Linealización

En muchas aplicaciones, los modelos fenomenológicos que describen al sistema real son no-lineales. Esto dificulta su análisis.

Sin embargo, dadas ciertas condiciones, es posible obtener una aproximación lineal del modelo no lineal en torno a un rango de trabajo en el que estemos interesados.

Linealización

En muchas aplicaciones, los modelos fenomenológicos que describen al sistema real son no-lineales. Esto dificulta su análisis.

Sin embargo, dadas ciertas condiciones, es posible obtener una aproximación lineal del modelo no lineal en torno a un rango de trabajo en el que estemos interesados.

Esta aproximación se conoce como linealización.

Linealización

En muchas aplicaciones, los modelos fenomenológicos que describen al sistema real son no-lineales. Esto dificulta su análisis.

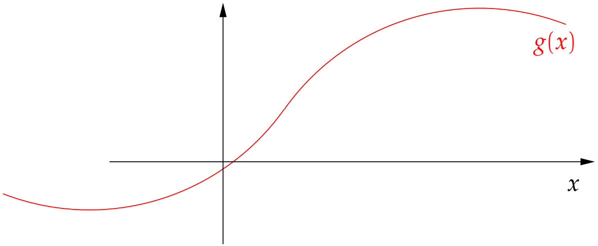
Sin embargo, dadas ciertas condiciones, es posible obtener una aproximación lineal del modelo no lineal en torno a un rango de trabajo en el que estemos interesados.

Esta aproximación se conoce como linealización.

Para estudiar linealización primero recordaremos las aproximaciones de primer orden, y la representacion en series de Taylor de una función.

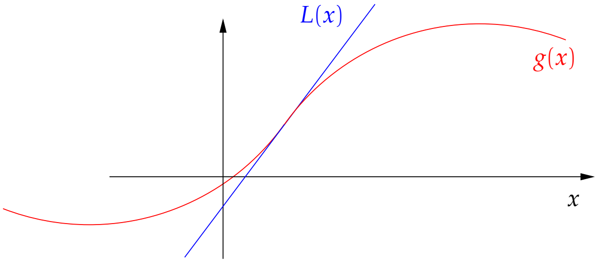
Aproximación de Primer Orden de una Función

Sea $g(x)$ una función continua no lineal. Buscamos aproximar dicha función en torno a un punto a través de una recta.



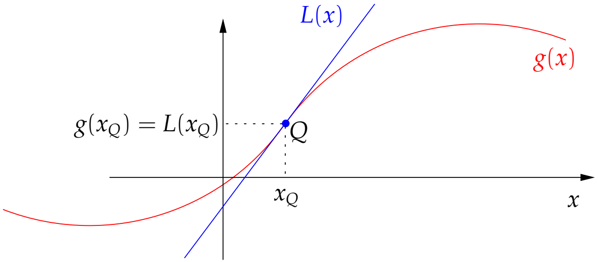
Aproximación de Primer Orden de una Función

Sea $g(x)$ una función continua no lineal. Buscamos aproximar dicha función en torno a un punto a través de una recta.



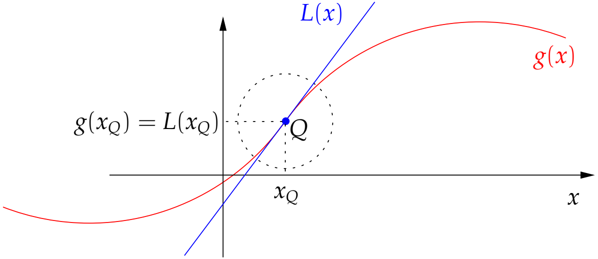
Aproximación de Primer Orden de una Función

Sea $g(x)$ una función continua no lineal. Buscamos aproximar dicha función en torno a un punto a través de una recta.



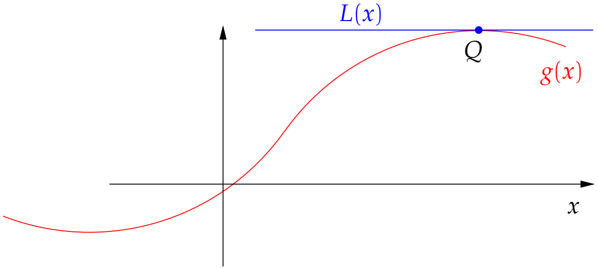
Aproximación de Primer Orden de una Función

Sea $g(x)$ una función continua no lineal. Buscamos aproximar dicha función en torno a un punto a través de una recta.



Aproximación de Primer Orden de una Función

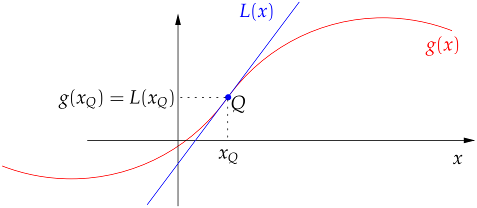
Al variar el punto Q, varia la recta que aproxima a la curva.



Aproximación de Primer Orden de una Función

Para determinar $L(x)$ basta con conocer un punto de la recta (se conoce Q) y su pendiente m, la que también es conocida pues

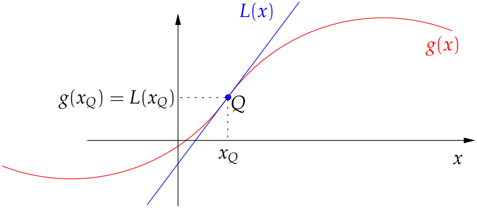
$$m = \frac{\Delta L(x)}{\Delta x} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q}$$



Aproximación de Primer Orden de una Función

Para determinar $L(x)$ basta con conocer un punto de la recta (se conoce Q) y su pendiente m, la que también es conocida pues

$$m = \frac{\Delta L(x)}{\Delta x} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q}$$



Así, la ecuación de la recta se obtiene notando que

$$\Delta x = x - x_Q$$
$$\Delta L(x) = L(x) - L(x_Q) = L(x) - g(x_Q)$$

Por lo tanto

$$L(x) = g(x_Q) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q}(x - x_Q)$$

Aproximación de Primer Orden de una Función

Ejercicio:

Aproxime el valor de $\sqrt{4+\epsilon}$ (positivo), para $\epsilon \in \{0.1, 1, -1, 8\}$ usando una apróximación de primer orden.

Ejercicio:

Aproxime el valor de $\sqrt{4+\epsilon}$ (positivo), para $\epsilon \in \{0.1, 1, -1, 8\}$ usando una apróximación de primer orden.

Valores reales (para evaluar que tan buena fue la aproximación):

- $\sqrt{4+0.1} = 2.02484567..$
- $\sqrt{4+1} = 2.23606797..$
- $\sqrt{4-1} = 1.73205080..$
- $\sqrt{4+8} = 3.46410161..$

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Debemos conocer la tasa de cambio de la pendiente en el punto Q, es decir la segunda derivada de $g(x)$.

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Debemos conocer la tasa de cambio de la pendiente en el punto Q, es decir la segunda derivada de $g(x)$.

Esta idea puede extenderse considerando polinomios de orden superior, pues la función $g(x)$ puede representarse de forma exacta a través de la serie infinita

$$g(x) = g(x_Q) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\left.\frac{d^\ell g(x)}{dx^\ell}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q)^\ell$$

Esta es la Serie de Taylor!

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Debemos conocer la tasa de cambio de la pendiente en el punto Q, es decir la segunda derivada de $g(x)$.

Esta idea puede extenderse considerando polinomios de orden superior, pues la función $g(x)$ puede representarse de forma exacta a través de la serie infinita

$$g(x) = g(x_Q) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q}(x - x_Q) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right|_{x=x_Q}(x - x_Q)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\left.\frac{d^\ell g(x)}{dx^\ell}\right|_{x=x_Q}(x - x_Q)^\ell$$

Esta es la Serie de Taylor!

La aproximación de primer orden estudiada anteriormente se puede obtener a través de la serie de Taylor, ignorando los términos de orden superior ($\ell > 1$).

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Debemos conocer la tasa de cambio de la pendiente en el punto Q, es decir la segunda derivada de $g(x)$.

Esta idea puede extenderse considerando polinomios de orden superior, pues la función $g(x)$ puede representarse de forma exacta a través de la serie infinita

$$g(x) = g(x_Q) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q)^2 + \cdots$$

Serie de Taylor

¿Y si en vez de usar un polinomio de 1er orden para aproximar usamos uno de 2do orden?

Debemos conocer la tasa de cambio de la pendiente en el punto Q, es decir la segunda derivada de $g(x)$.

Esta idea puede extenderse considerando polinomios de orden superior, pues la función $g(x)$ puede representarse de forma exacta a través de la serie infinita

$$g(x) = g(x_Q) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 g(x)}{dx^2}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left.\frac{d^\ell g(x)}{dx^\ell}\right|_{x=x_Q} (x - x_Q)^\ell \qquad \text{Esta es la Serie de Taylor!}$$

La aproximación de primer orden estudiada anteriormente se puede obtener a través de la serie de Taylor, ignorando los términos de orden superior ($\ell > 1$).

Serie de Taylor

Si la función g depende de múltiples variables, también se puede usar la correspondiente serie de Taylor, ignorar los términos de orden superior, y así obtener una aproximación de primer orden de g.

Serie de Taylor

Si la función g depende de múltiples variables, también se puede usar la correspondiente serie de Taylor, ignorar los términos de orden superior, y así obtener una aproximación de primer orden de g.

Caso de 2 variables: Sea $g(x_1, x_2)$ una función continua e infinitamente diferenciable en $x_1 = x_{1_Q}, x_2 = x_{2_Q}$. Entonces la serie de Taylor tiene la forma

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) =& g(x_{1_Q}, x_{2_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_1 - x_{1_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_2 - x_{2_Q}) \\ &+ \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_1 - x_{1_Q})^2 + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)^2}{\partial x_2^2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_2 - x_{2_Q})^2 \\ &+ \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_1 - x_{1_Q})(x_2 - x_{2_Q}) \end{aligned}$$

Serie de Taylor

Ignorando los términos de orden superior obtenemos $L(x_1, x_2)$, la aproximación de primer orden de $g(x_1, x_2)$ en torno al punto $x_1 = x_{1_Q}$, $x_2 = x_{2_Q}$.

$$L(x_1, x_2) = g(x_{1_Q}, x_{2_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_1 - x_{1_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x2_Q}} (x_2 - x_{2_Q})$$

Serie de Taylor

Ignorando los términos de orden superior obtenemos $L(x_1, x_2)$, la aproximación de primer orden de $g(x_1, x_2)$ en torno al punto $x_1 = x_{1_Q}$, $x_2 = x_{2_Q}$.

$$L(x_1, x_2) = g(x_{1_Q}, x_{2_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x_{2_Q}}} (x_1 - x_{1_Q}) + \left.\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ x_2 = x2_Q}} (x_2 - x_{2_Q})$$

Para el **caso general** se tiene que la aproximación de primer orden $L(x_1, \ldots x_n)$ de $g(x_1, \ldots x_n)$ en torno al punto $x_1 = x_{1_Q}, \ldots x_n = x_{n_Q}$.

$$L(x_1, \ldots, x_n) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i (x_i - x_{i_Q}),$$

donde

$$C_0 = g(x_{1_Q}, \ldots, x_{n_Q}) \qquad \text{y} \qquad C_i = \left.\frac{\partial g(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_1 = x_{1_Q} \\ \vdots \\ x_n = x_{n_Q}}}$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Ilustraremos como usar lo antes visto para obtener un modelo lineal de un sistema no lineal de tiempo continuo a través de un ejemplo.

Para ello considere el sistema no lineal descrito por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + [0.2 + y(t)]\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^3 = \left[2\frac{du(t)}{dt} + u(t)\right]^3 \tag{1}$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Ilustraremos como usar lo antes visto para obtener un modelo lineal de un sistema no lineal de tiempo continuo a través de un ejemplo.

Para ello considere el sistema no lineal descrito por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + [0.2 + y(t)]\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^3 = \left[2\frac{du(t)}{dt} + u(t)\right]^3 \tag{1}$$

Lo primero es identificar $x_1, \ldots, x_n$ y $g(x_1, \ldots, x_n)$. Definiremos como variables x_i a la entrada, salida, y las correspondientes derivadas.

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Ilustraremos como usar lo antes visto para obtener un modelo lineal de un sistema no lineal de tiempo continuo a través de un ejemplo.

Para ello considere el sistema no lineal descrito por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + [0.2 + y(t)]\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^3 = \left[2\frac{du(t)}{dt} + u(t)\right]^3 \tag{1}$$

Lo primero es identificar $x_1, \ldots, x_n$ y $g(x_1, \ldots, x_n)$. Definiremos como variables x_i a la entrada, salida, y las correspondientes derivadas.

En este caso definimos

$$x_1 \triangleq y(t), \quad x_2 \triangleq \frac{dy(t)}{dt}, \quad x_3 \triangleq \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad x_4 \triangleq u(t), \quad x_5 \triangleq \frac{du(t)}{dt}$$

Note que se omite la dependencia del tiempo t.

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Ilustraremos como usar lo antes visto para obtener un modelo lineal de un sistema no lineal de tiempo continuo a través de un ejemplo.

Para ello considere el sistema no lineal descrito por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + [0.2 + y(t)]\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^3 = \left[2\frac{du(t)}{dt} + u(t)\right]^3 \tag{1}$$

Lo primero es identificar $x_1, \ldots, x_n$ y $g(x_1, \ldots, x_n)$. Definiremos como variables x_i a la entrada, salida, y las correspondientes derivadas.

En este caso definimos

$$x_1 \triangleq y(t), \quad x_2 \triangleq \frac{dy(t)}{dt}, \quad x_3 \triangleq \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad x_4 \triangleq u(t), \quad x_5 \triangleq \frac{du(t)}{dt}$$

Note que se omite la dependencia del tiempo t.

¿Por que cree que se escogieron esas variables?

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Así, el sistema se puede reescribir como $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$\begin{aligned} g_a(x_1, x_2, x_3) &\triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3 \\ g_b(x_4, x_5) &\triangleq [2x_5 + x_4]^3 \end{aligned}$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Así, el sistema se puede reescribir como $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$g_a(x_1, x_2, x_3) \triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3$$
$$g_b(x_4, x_5) \triangleq [2x_5 + x_4]^3$$

Note que podemos definir $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \triangleq g_a(x_1, x_2, x_3) - g_b(x_4, x_5) = 0$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Así, el sistema se puede reescribir como $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$g_a(x_1, x_2, x_3) \triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3$$
$$g_b(x_4, x_5) \triangleq [2x_5 + x_4]^3$$

Note que podemos definir $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \triangleq g_a(x_1, x_2, x_3) - g_b(x_4, x_5) = 0$

Ahora debemos escoger el punto Q. Este puede ser cualquier punto que satisfaga $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$ (considerando las restricciones propias de las señales). A este punto le denominaremos punto de operación.

Así, el sistema se puede reescribir como $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$g_a(x_1, x_2, x_3) \triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3$$
$$g_b(x_4, x_5) \triangleq [2x_5 + x_4]^3$$

Note que podemos definir $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \triangleq g_a(x_1, x_2, x_3) - g_b(x_4, x_5) = 0$

Ahora debemos escoger el punto Q. Este puede ser cualquier punto que satisfaga $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$ (considerando las restricciones propias de las señales). A este punto le denominaremos punto de operación.

Al aproximar el sistema usando lo visto anteriormente tenemos que

$$g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) + \left[3x_{1_Q}^2 + x_{2_Q}\right](x_1 - x_{1_Q}) + \left[0.2 + x_{1_Q}\right](x_2 - x_{2_Q}) + (x_3 - x_{3_Q})$$
$$= g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q}) + 3\left[2x_{5_Q} + x_{4_Q}\right]^2 (x_4 - x_{4_Q}) + 6\left[2x_{5_Q} + x_{4_Q}\right]^2 (x_5 - x_{5_Q})$$

Note que $g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) = g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q})$, por lo tanto el sistema aproximado viene dado por

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2(x_2 - x_{2_Q}) + C_3(x_3 - x_{3_Q}) = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5(x_5 - x_{5_Q})$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Note que $g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) = g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q})$, por lo tanto el sistema aproximado viene dado por

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2(x_2 - x_{2_Q}) + C_3(x_3 - x_{3_Q}) = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5(x_5 - x_{5_Q})$$

¿El sistema aproximado es lineal?

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Note que $g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) = g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q})$, por lo tanto el sistema aproximado viene dado por

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2(x_2 - x_{2_Q}) + C_3(x_3 - x_{3_Q}) = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5(x_5 - x_{5_Q})$$

¿El sistema aproximado es lineal?

Es posible escoger un punto de operación tal que las derivadas involucradas sean cero. Los puntos de operación que cumplan dicha condición son llamados puntos de equilibrio, pues significa que las variables del sistema cuando se encuentra operando en dicho punto no varían.

Note que $g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) = g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q})$, por lo tanto el sistema aproximado viene dado por

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2(x_2 - x_{2_Q}) + C_3(x_3 - x_{3_Q}) = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5(x_5 - x_{5_Q})$$

¿El sistema aproximado es lineal?

Es posible escoger un punto de operación tal que las derivadas involucradas sean cero. Los puntos de operación que cumplan dicha condición son llamados puntos de equilibrio, pues significa que las variables del sistema cuando se encuentra operando en dicho punto no varían.

Así, si escogemos Q como un punto de equilibrio, tenemos que $x_{2_Q} = x_{3_Q} = x_{5_Q} = 0$, lo que conduce a $x_{1_Q} = x_{4_Q}$.

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5 x_5$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Definiendo $\Delta y(t) = y(t) - x_{1_Q}$ y $\Delta u(t) = u(t) - x_{4_Q}$ tenemos que

$$\Delta y(t) = x_1 - x_{1_Q} \qquad \frac{d\Delta y(t)}{dt} = x_2 \qquad \frac{d^2\Delta y(t)}{dt^2} = x_3$$

$$\Delta u(t) = x_4 - x_{4_Q} \qquad \frac{d\Delta u(t)}{dt} = x_5$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Definiendo $\Delta y(t) = y(t) - x_{1_Q}$ y $\Delta u(t) = u(t) - x_{4_Q}$ tenemos que

$$\Delta y(t) = x_1 - x_{1_Q} \qquad \frac{d\Delta y(t)}{dt} = x_2 \qquad \frac{d^2\Delta y(t)}{dt^2} = x_3$$

$$\Delta u(t) = x_4 - x_{4_Q} \qquad \frac{d\Delta u(t)}{dt} = x_5$$

Finalmente el modelo linealizado es

$$C_1\Delta y(t) + C_2\frac{d\Delta y(t)}{dt} + C_3\frac{d^2\Delta y(t)}{dt^2} = C_4\Delta u(t) + C_5\frac{d\Delta u(t)}{dt}$$

Linealización de sistemas de tiempo continuo

Definiendo $\Delta y(t) = y(t) - x_{1_Q}$ y $\Delta u(t) = u(t) - x_{4_Q}$ tenemos que

$$\Delta y(t) = x_1 - x_{1_Q} \qquad \frac{d\Delta y(t)}{dt} = x_2 \qquad \frac{d^2\Delta y(t)}{dt^2} = x_3$$

$$\Delta u(t) = x_4 - x_{4_Q} \qquad \frac{d\Delta u(t)}{dt} = x_5$$

Finalmente el modelo linealizado es

$$C_1\Delta y(t) + C_2\frac{d\Delta y(t)}{dt} + C_3\frac{d^2\Delta y(t)}{dt^2} = C_4\Delta u(t) + C_5\frac{d\Delta u(t)}{dt}$$

Es importante notar que el sistema lineal obtenido describe las variaciones del estado del sistema respecto del punto de equilibrio, y no en términos absolutos.

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Usaremos la misma función no lineal del ejemplo de tiempo continuo pero con argumentos de tiempo discreto para que quede en evidencia las principales diferencias

Sea el sistema no lineal de tiempo discreto dado por

$$y(k-2) + [0.2 + y(k)]\, y(k-1) + y(k)^3 = [2u(k-1) + u(k)]^3 \tag{2}$$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Usaremos la misma función no lineal del ejemplo de tiempo continuo pero con argumentos de tiempo discreto para que quede en evidencia las principales diferencias

Sea el sistema no lineal de tiempo discreto dado por

$$y(k-2) + [0.2 + y(k)]\, y(k-1) + y(k)^3 = [2u(k-1) + u(k)]^3 \qquad (2)$$

Para sistemas de tiempo discreto, se deben definir las variables x_i como la entrada $u(k)$, la salida $y(k)$, y las mismas señales retardadas (es decir, $y(k-1), y(k-2), u(k-1)$).

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Usaremos la misma función no lineal del ejemplo de tiempo continuo pero con argumentos de tiempo discreto para que quede en evidencia las principales diferencias

Sea el sistema no lineal de tiempo discreto dado por

$$y(k-2) + [0.2 + y(k)]\, y(k-1) + y(k)^3 = [2u(k-1) + u(k)]^3 \tag{2}$$

Para sistemas de tiempo discreto, se deben definir las variables x_i como la entrada $u(k)$, la salida $y(k)$, y las mismas señales retardadas (es decir, $y(k-1), y(k-2), u(k-1)$).

Por lo tanto

$$x_1 \triangleq y(k), \quad x_2 \triangleq y(k-1), \quad x_3 \triangleq y(k-2), \quad x_4 \triangleq u(k), \quad x_5 \triangleq u(k-1)$$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Usaremos la misma función no lineal del ejemplo de tiempo continuo pero con argumentos de tiempo discreto para que quede en evidencia las principales diferencias

Sea el sistema no lineal de tiempo discreto dado por

$$y(k-2) + [0.2 + y(k)]\, y(k-1) + y(k)^3 = [2u(k-1) + u(k)]^3 \qquad (2)$$

Para sistemas de tiempo discreto, se deben definir las variables x_i como la entrada $u(k)$, la salida $y(k)$, y las mismas señales retardadas (es decir, $y(k-1), y(k-2), u(k-1)$).

Por lo tanto

$$x_1 \triangleq y(k), \quad x_2 \triangleq y(k-1), \quad x_3 \triangleq y(k-2), \quad x_4 \triangleq u(k), \quad x_5 \triangleq u(k-1)$$

¿De aquí en adelante, como cree que cambia el procedimiento respecto del caso continuo?

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Dado un punto de operación, la aproximación de primer orden es exactamente igual al caso anterior pues es la misma función no lineal.

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Dado un punto de operación, la aproximación de primer orden es exactamente igual al caso anterior pues es la misma función no lineal.

Luego tenemos que $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$\begin{aligned} g_a(x_1, x_2, x_3) &\triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3 \\ g_b(x_4, x_5) &\triangleq [2x_5 + x_4]^3 \end{aligned}$$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Dado un punto de operación, la aproximación de primer orden es exactamente igual al caso anterior pues es la misma función no lineal.

Luego tenemos que $g_a(x_1, x_2, x_3) = g_b(x_4, x_5)$, con

$$\begin{aligned} g_a(x_1, x_2, x_3) &\triangleq x_3 + [0.2 + x_1]\, x_2 + x_1^3 \\ g_b(x_4, x_5) &\triangleq [2x_5 + x_4]^3 \end{aligned}$$

Lo que conduce a la aproximación

$$\begin{aligned} g_a(x_{1_Q}, x_{2_Q}, x_{3_Q}) &+ \left[3x_{1_Q}^2 + x_{2_Q}\right](x_1 - x_{1_Q}) + \left[0.2 + x_{1_Q}\right](x_2 - x_{2_Q}) + (x_3 - x_{3_Q}) \\ &= g_b(x_{4_Q}, x_{5_Q}) + 3\left[2x_{5_Q} + x_{4_Q}\right]^2 (x_4 - x_{4_Q}) + 6\left[2x_{5_Q} + x_{4_Q}\right]^2 (x_5 - x_{5_Q}) \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$C_1(x_1 - x_{1_Q}) + C_2(x_2 - x_{2_Q}) + C_3(x_3 - x_{3_Q}) = C_4(x_4 - x_{4_Q}) + C_5(x_5 - x_{5_Q})$$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

¿Cómo cree usted que se calcula?

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

¿Cómo cree usted que se calcula?

Para calcularlo se debe considerar que $y(k) = y(k-1) = y(k-2)$ y $u(k) = u(k-1)$.

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

¿Cómo cree usted que se calcula?

Para calcularlo se debe considerar que $y(k) = y(k-1) = y(k-2)$ y $u(k) = u(k-1)$.

En este ejemplo se tiene que $x_{1_Q} = x_{2_Q} = x_{3_Q}$ y $x_{4_Q} = x_{5_Q}$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

¿Cómo cree usted que se calcula?

Para calcularlo se debe considerar que $y(k) = y(k-1) = y(k-2)$ y $u(k) = u(k-1)$.

En este ejemplo se tiene que $x_{1_Q} = x_{2_Q} = x_{3_Q}$ y $x_{4_Q} = x_{5_Q}$

Definiendo $\Delta y(k) = y(k) - x_{1_Q}$ y $\Delta u(k) = u(k) - x_{4_Q}$ tenemos que

$$\Delta y(k) = x_1 - x_{1_Q} \qquad \Delta y(k-1) = x_2 - x_{2_Q} \qquad \Delta y(k-2) = x_3 - x_{3_Q}$$
$$\Delta u(k) = x_4 - x_{4_Q} \qquad \Delta u(k) = x_5 - x_{5_Q}$$

Linealización de sistemas de tiempo discreto

Si bien el punto de equilibrio en un sistema de tiempo discreto es conceptualmente lo mismo que para tiempo continuo, la forma de calcularlo cambia.

¿Cómo cree usted que se calcula?

Para calcularlo se debe considerar que $y(k) = y(k-1) = y(k-2)$ y $u(k) = u(k-1)$.

En este ejemplo se tiene que $x_{1_Q} = x_{2_Q} = x_{3_Q}$ y $x_{4_Q} = x_{5_Q}$

Definiendo $\Delta y(k) = y(k) - x_{1_Q}$ y $\Delta u(k) = u(k) - x_{4_Q}$ tenemos que

$$\Delta y(k) = x_1 - x_{1_Q} \qquad \Delta y(k-1) = x_2 - x_{2_Q} \qquad \Delta y(k-2) = x_3 - x_{3_Q}$$
$$\Delta u(k) = x_4 - x_{4_Q} \qquad \Delta u(k) = x_5 - x_{5_Q}$$

Finalmente el sistema linealizado es

$$C_1 \Delta y(k) + C_2 \Delta y(k-1) + C_3 \Delta y(k-2) = C_4 \Delta u(k) + C_5 \Delta u(k-1)$$