



Guía experiencia 2: Modelado fenomenológico y simulación.

Guía preparada por el profesor Juan C. Agüero,
para la asignatura *Laboratorio de Control Automático* (ELO-271)

02 Junio 2021

ÍNDICE

1. Introducción	3
2. Sistema de Estanques Acoplados	3
2.1. Descripción del Sistema	3
2.1.1. Modelado Fenomenológico	3
2.1.2. Modelo Linealizado	6
2.1.3. Sensores y Actuadores	8
2.1.4. Estimación de Parámetros	8
2.1.5. Estimación de parámetros de sensores y actuadores	8
2.1.6. Experimento de Igualación de Nivel	9
2.2. Resumen	10
3. Trabajo Previo Sesiones Estanques	11
4. Trabajo de Laboratorio Sesión Estanques	11
5. Sistema de Levitador Magnético	13
5.1. Descripción del Sistema	13
5.1.1. Circuito eléctrico asociado al electroimán	13
5.1.2. Sistema Electro-Mecánico	13
5.1.3. Sensores y Actuadores	14
5.2. Resumen	16
6. Trabajo Previo Sesión Levitador	17
7. Trabajo de Laboratorio Sesión Levitador	17

1. INTRODUCCIÓN

En esta experiencia usted se enfrentará al problema de obtener un modelo que describa un sistema real. De hecho, se considerarán dos sistemas reales, de distinta naturaleza, que usted deberá modelar y simular. Así, en futuras experiencias, usted podrá usar dichos modelos para diseñar un lazo de control apropiado.

El primer sistema corresponde a un sistema de estanques acoplados. Para describir dicho sistema, usted debe entender el fenómeno físico subyacente para obtener un modelo fenomenológico. Además se deben modelar los sensores y actuadores correspondientes. El modelo obtenido dependerá de parámetros desconocidos, sin embargo, éstos se pueden estimar a través de mediciones del sistema real.

El segundo sistema corresponde a un levitador magnético que, una vez controlado, puede mantener un objeto metálico levitando gracias al campo magnético generado por un electroimán. Al igual que en el caso anterior, se obtendrá un modelo para representar dicho sistema.

La experiencia completa se desarrolla en dos sesiones: una para el sistema de estanques acoplados y una para el levitador magnético.

2. SISTEMA DE ESTANQUES ACOPLADOS

2.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema de *Estanques Acoplados* es una planta prototipo hidráulica, compuesta por dos estanques de acrílico de base cuadrada que comparten una pared en común. Orificios en la parte inferior de la pared común permite el flujo de agua entre los estanques. A un estanque, que le llamaremos estanque 1, se le suministra agua por su parte superior a través de una bomba conectada a un reservorio en el fondo. Al otro estanque, que llamaremos estanque 2, se le extrae agua por la parte inferior por medio de una segunda bomba, que esta conectada al reservorio en la base. En la figura 2.1 se muestra una fotografía del sistema y en la figura 2.2 un esquema donde se presentan las variables de interés asociadas a los niveles de estanque y caudales involucrados.

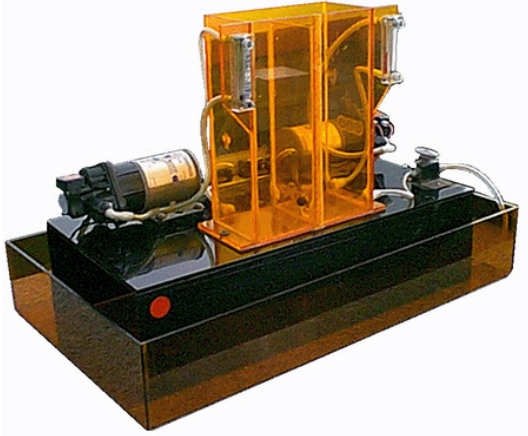


Figura 2.1: Fotografía del sistema.

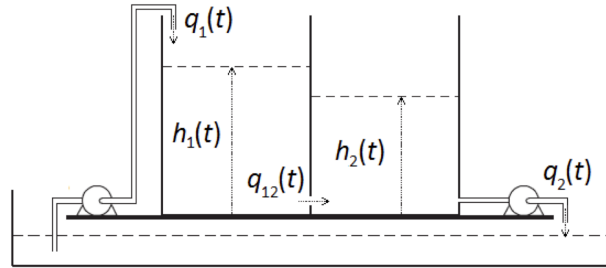


Figura 2.2: Esquema de la planta y variables de interés.

2.1.1. MODELADO FENOMENOLÓGICO

BALANCE DE MASA Para obtener un modelo matemático de este sistema tomaremos un enfoque fenomenológico basado en la física, que consiste en obtener relaciones entre las variables de interés.

Para ello consideraremos en primer lugar una ecuación de balance sobre la masa de agua al interior del el primer estanque, escribiendo:

$$m_1(t) = m_1(0) + m_{1,in}(t) - m_{2,out}(t). \quad (2.1)$$

Lo anterior establece simplemente que la masa de agua en el instante actual t , es igual a la masa de agua inicial, $m_1(0)$, más toda la masa que ha entrado hasta ese instante, $m_{1,in}(t)$, menos toda la masa que ha salido, $m_{2,out}(t)$.

Como en términos hidráulicos resulta más natural trabajar en términos de volumen de agua y dado que $m_1(t) = \rho_{agua} V_1(t)$, donde ρ_{agua} es la densidad volumétrica del agua, podemos escribir

$$V_1(t) = V_1(0) + V_{1,in}(t) - V_{2,out}(t). \quad (2.2)$$

Resulta deseable, para nuestros propósitos, expresar la ecuación anterior en forma diferencial introduciendo el concepto de caudal. Derivando (2.2) respecto del tiempo obtenemos:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dV_{1,in}(t)}{dt} - \frac{dV_{2,out}(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Dicha ecuación nos expresa que la tasa de cambio del volumen de agua en el estanque es igual a la velocidad con que ingresa volumen de agua al estanque o caudal de entrada $q_{1,in}(t)$, menos la velocidad con que sale volumen de agua al estanque o caudal de salida $q_{1,out}(t)$. Dado que el estanque es de sección constante con área A_1 , y el volumen está dado por $A_1 h_1(t)$, entonces (2.3) se puede escribir como:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_{1,in}(t) - q_{1,out}(t). \quad (2.4)$$

De un análisis similar sobre el estanque 2, conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{2,in}(t) - q_{2,out}(t). \quad (2.5)$$

Aunque dichas ecuaciones parecen no estar relacionadas, sí lo están, dado que el caudal que sale del primer estanque es igual al que ingresa al segundo: $q_{1,out}(t) = q_{2,in}(t) = q_{12}(t)$. De este modo y sabiendo que las áreas basales son iguales podemos escribir:

$$\text{Sistema (1): } \begin{cases} A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{12}(t) \\ A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) - q_2(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

El sistema de ecuaciones anterior proviene del balance de masa de agua en los estanques y relaciona las variables de interés presentes en el esquema de la figura 2.2, pero aún no nos entrega una descripción completa del sistema. Aún falta cuantificar el caudal de traspaso del estanque 1 al estanque 2, que representamos como $q_{12}(t)$.

ANÁLOGO ELÉCTRICO Y EL CAUDAL DE TRASPASO En ciencia e ingeniería el desarrollo de analogías juega un papel muy importante en la comprensión y relación entre fenómenos que se encuentran en campos distintos. En la figura 2.3 se presenta una analogía entre el sistema de estanques acoplados y un sistema eléctrico.

La analogía no es antojadiza, pues el mismo papel que juegan los estanques como acumuladores de agua, lo juegan los condensadores con la carga eléctrica. Las bombas suministran o extraen agua por unidad de tiempo a través de caudales, que es el mismo papel que juegan las fuentes de corriente con respecto a la carga eléctrica por unidad de tiempo o corriente. La analogía se refuerza aún más si planteamos las ecuaciones de redes para el sistema eléctrico:

$$\text{Sistema (2): } \begin{cases} C \frac{dV_1(t)}{dt} = i_1(t) - i_{12}(t) \\ C \frac{dV_2(t)}{dt} = i_{12}(t) - i_2(t) \\ i_{12}(t) = \frac{1}{R} (v_1(t) - v_2(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

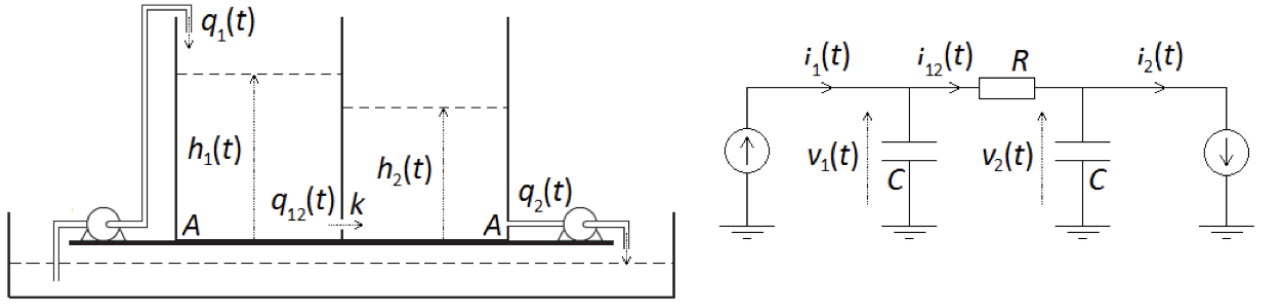


Figura 2.3: Sistema hidráulico y su análogo eléctrico.

Acá apreciamos que las ecuaciones asociadas a balances de carga para los condensadores, son idénticas en estructura al sistema (1) obtenidas con el balance de agua en los estanques, donde remplazamos los niveles por voltajes, los caudales por corrientes y las áreas basales de los estanques por las capacidades de los condensadores. Sin embargo el modelo eléctrico plantea una ecuación adicional, asociada la ley de Ohm, que puede ser transferida fácilmente al caudal de traspaso de un estanque al otro, considerando que el agujero establece una resistencia al paso del agua. Considerando este factor planteamos el modelo como:

$$\text{Sistema (3): } \begin{cases} A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{12}(t) \\ A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) - q_2(t) \\ q_{12}(t) = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \text{ si } h_1(t) \geq h_2(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

donde destaca la presencia del término raíz cuadrada. La diferencia entre la “Ley de Ohm eléctrica” y la “Ley de Ohm hidráulica” radica en que la última se deduce con la ayuda de la ecuación de Bernoulli para una línea de flujo, que habrás trabajado en tu ramo de Física 130.

CLASIFICACIÓN DEL SISTEMA Ya con la tranquilidad de disponer de un modelo matemático del sistema es oportuno analizar características generales del mismo y establecer una clasificación.

- **SISO o MIMO:** Se denomina sistema SISO (Single Input - Single Output) a los sistemas con una entrada y una salida. Mientras que se denominan sistemas MIMO (Multi input-Multi output) a los sistemas con más de una entrada y más de una salida. En nuestro caso la instrumentación disponible en laboratorio nos permite medir ambos niveles de estanques: $h_1(t)$ y $h_2(t)$ y por otro lado actuar mediante las bombas sobre los caudales de entrada y salida: $q_1(t)$ y $q_2(t)$. Entonces, dado que con 2 variables de actuación (caudales) podemos afectar a 2 variables de salida (niveles), podemos clasificar a este sistema como MIMO 2×2 (de dos entradas y dos salidas). En la Figura 2.4 se muestra un bloque representativo del sistema, especificando las entradas ($q_1(t)$ y $q_2(t)$) y las salidas ($h_1(t)$ y $h_2(t)$).

Una confusión habitual radica en que dado que el caudal 2 es de salida al estanque 2 desde un punto de vista hidráulico, debe ser entonces una salida del sistema. Esto obviamente no es así, dado que en el sistema se presentan con las orientaciones de las flechas, indicando el sentido positivo del caudal.

- **Lineal o no lineal:** Otra característica muy importante es la propiedad de linealidad de los sistemas. Volviendo a la analogía sabemos que si la resistencia es lineal entonces el sistema eléctrico es lineal. Por otro lado, aunque las ecuaciones de conservación de agua son lineales, la “ley de Ohm hidráulica” es *no-lineal* por el término que presenta una raíz cuadrada, por lo que el sistema se clasifica como *no-lineal*. Desde el punto de vista operacional, esto nos indica que el análisis matemático de sistema de estanques será algo más complejo que con el análisis del circuito con resistencia lineal.

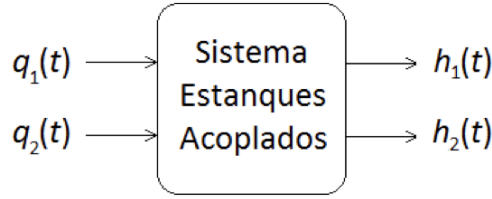


Figura 2.4: Esquema MIMO del sistema.

- **Estable o inestable:** La estabilidad es una propiedad fundamental de los sistemas y más en control. Existen diversas definiciones de estabilidad para sistemas. En este curso nos enfocamos en conceptos aplicables a sistemas *lineales*. De este modo primero linealizamos el sistema en torno a un punto de operación y luego analizamos los polos del sistema linealizado. Una de las definiciones de estabilidad más importantes en teoría de control es conocida como BIBO Estabilidad (del inglés Bounded input- Bounded Output Stability). Se dice que un sistema es BIBO estable si **para toda entrada acotada** que se aplica al sistema, la salida correspondiente es también acotada. Al contrario, se dice que el sistema es BIBO *inestable* si se encuentra por lo menos una entrada acotada tal que la salida correspondiente no lo es. En el caso de los estanques acoplados, si aplicamos las entradas de caudal $q_1(t) = c > 0$ y $q_2(t) = 0$ con ambos estanques inicialmente vacíos (vale decir ingresar al estanque 1 un caudal constante sin extraer agua del segundo estanque), sucederá es que los niveles de agua en los estanques comenzarán a subir de manera sostenida, sin estabilizarse nunca, hasta llegar al rebalse. Vale decir, pese a que las entradas fueron acotadas, las salidas tuvieron un comportamiento creciente. De este modo podemos clasificar a este sistema como BIBO *inestable*.
- **Variante o invariante en el tiempo:** Los parámetros A y κ se consideran constantes, por lo tanto diremos entonces que el sistema es invariante en el tiempo.

En resumen, podemos clasificar a nuestro sistema de estanque acoplados como un sistema MIMO 2×2 , no lineal, invariante en el tiempo. Estas características transforman a esta planta en un bonito desafío en especial en la etapa de control.

2.1.2. MODELO LINEALIZADO

Para trabajar con el sistema de estanques, es preferible contar con un modelo lineal, pues éste es más fácil de analizar para luego (en una futura experiencia) diseñar un controlador apropiado. Para ello, usaremos la misma técnica de Linealización descrita en el curso de sistemas lineales (puede revisar el sitio Aulas para estudiar las slides asociadas al curso), con la salvedad que ahora estamos linealizando un sistema de dos entradas y dos salidas.

Así, reemplazando $q_{1,2}(t)$ en (2.8) y despejando, podemos escribir (para $h_1(t) \geq h_2(t)$),

$$f_1 \left(\frac{dh_1(t)}{dt}, h_1(t), h_2(t), q_1(t) \right) \triangleq A \frac{dh_1(t)}{dt} + \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - q_1(t) = 0 \quad (2.9)$$

$$f_2 \left(\frac{dh_2(t)}{dt}, h_1(t), h_2(t), q_2(t) \right) \triangleq A \frac{dh_2(t)}{dt} - \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + q_2(t) = 0 \quad (2.10)$$

Claramente las funciones f_1 y f_2 son no lineales debido al término $\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$. Para linealizarlas, primero debemos determinar un punto de operación para las señales involucradas en las funciones, es decir, para $h_1(t), h_2(t), \frac{dh_1(t)}{dt}, \frac{dh_2(t)}{dt}, q_1(t), q_2(t)$. Ahora bien, definiremos el punto de operación Q como un punto de equilibrio dado por $Q := (h_{1,Q}, h_{2,Q}, 0, 0, q_{1,Q}, q_{2,Q})$. Note que en el punto de equilibrio la derivadas son iguales a cero, (el resto de los términos son constantes no negativas para este caso) y por lo

tanto se cumple que

$$f_1 \left(\frac{dh_1(t)}{dt}, h_1(t), h_2(t), q_1(t) \right) \Big|_Q = \kappa \sqrt{h_{1,Q} - h_{2,Q}} - q_{1,Q} = 0 \quad (2.11)$$

$$f_2 \left(\frac{dh_2(t)}{dt}, h_1(t), h_2(t), q_2(t) \right) \Big|_Q = -\kappa \sqrt{h_{1,Q} - h_{2,Q}} + q_{2,Q} = 0, \quad (2.12)$$

de donde se deduce que $q_{1,Q} = q_{2,Q}$, es decir, para que el sistema esté en equilibrio el caudal de entrada debe ser igual que el caudal de salida, lo que tiene perfecto sentido físico.

Dado el punto de equilibrio, podemos definir

$$h_{1,\Delta}(t) \triangleq h_1(t) - h_{1,Q}, \quad \frac{dh_{1,\Delta}(t)}{dt} \triangleq \frac{dh_1(t)}{dt} - 0 = \frac{dh_1(t)}{dt}, \quad (2.13)$$

$$h_{2,\Delta}(t) \triangleq h_2(t) - h_{2,Q}, \quad \frac{dh_{2,\Delta}(t)}{dt} \triangleq \frac{dh_2(t)}{dt} - 0 = \frac{dh_2(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

$$q_{1,\Delta}(t) \triangleq q_1(t) - q_{1,Q}, \quad q_{2,\Delta}(t) \triangleq q_2(t) - q_{2,Q}. \quad (2.15)$$

Claramente el subíndice Δ denota que la variable se refiere a la diferencia entre la variable original y el punto de equilibrio asociado. Esto nos permite entonces linealizar ambas ecuaciones (2.9) y (2.10), basados en el procedimiento descrito en el curso de sistemas lineales, y obtener

$$\gamma h_{1,\Delta}(t) + A \frac{dh_{1,\Delta}(t)}{dt} - \gamma h_{2,\Delta}(t) = q_{1,\Delta}(t) \quad (2.16)$$

$$-\gamma h_{1,\Delta}(t) + \gamma h_{2,\Delta}(t) + A \frac{dh_{2,\Delta}(t)}{dt} = -q_{2,\Delta}(t) \quad (2.17)$$

donde $\gamma = \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1,Q} - h_{2,Q}}}$. Aplicando la T. de Laplace en ambas ecuaciones y reordenando tenemos

$$(\gamma + As) H_{1,\Delta}(s) - \gamma H_{2,\Delta}(s) = Q_{1,\Delta}(s) \quad (2.18)$$

$$\gamma H_{1,\Delta}(s) - (\gamma + As) H_{2,\Delta}(s) = Q_{2,\Delta}(s), \quad (2.19)$$

o escrito equivalentemente de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} (\gamma + As) & -\gamma \\ \gamma & -(\gamma + As) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_{1,\Delta}(s) \\ H_{2,\Delta}(s) \end{bmatrix}}_{\text{Salidas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{1,\Delta}(s) \\ Q_{2,\Delta}(s) \end{bmatrix}}_{\text{Entradas}} \quad (2.20)$$

donde las entradas y salidas están descritas de forma vectorial. Para obtener la salida del sistema en función de la entrada debemos invertir la matriz del término del lado izquierdo. De esta forma, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} H_{1,\Delta}(s) \\ H_{2,\Delta}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} & -\frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} \\ \frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} & -\frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} \end{bmatrix}}_{=G(s)} \begin{bmatrix} Q_{1,\Delta}(s) \\ Q_{2,\Delta}(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La matriz $G(s)$ se llama matriz de transferencia, y es la generalización de una función de transferencia para el caso de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas. La matriz de transferencia está compuesta por funciones de transferencia SISO (como las que estudio en el curso de sistemas lineales) que muestra el efecto de cada entrada en cada salida¹. De hecho, para visualizar lo anterior, podemos escribir el sistema lineal como

$$H_{1,\Delta}(s) = \frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} Q_{1,\Delta}(s) - \frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} Q_{2,\Delta}(s) \quad (2.22)$$

$$H_{2,\Delta}(s) = \frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} Q_{1,\Delta}(s) - \frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} Q_{2,\Delta}(s). \quad (2.23)$$

Es importante recordar que el sistema lineal describe la dinámica de las señales respecto del punto de equilibrio escogido.

¹Los sistemas multivariables se estudian en detalle en el curso Control Multivariable impartido por el área de control.

2.1.3. SENSORES Y ACTUADORES

Ya obtenido el modelo matemático del sistema y clasificado, debemos determinar su correspondencia con el equipamiento de laboratorio y analizar cómo podemos medir los niveles (salidas) y actuar sobre los caudales (entradas).

SENSORES DE NIVEL: Casi al fondo de cada estanque se ubican mangueras que conducen el líquido a un diafragma que modifica las resistencias eléctricas de un circuito, debido a la presión de la columna de agua que soporta. La instrumentación asociada nos entrega entonces un voltaje de medición a través de funciones afines que podemos describir como:

$$v_1(t) = a_1 h_1(t) + b_1 \quad (2.24)$$

$$v_2(t) = a_2 h_2(t) + b_2 \quad (2.25)$$

donde $0 \leq v_i(t) \leq 10[V]$.

BOMBAS PARA LOS CAUDALES: Para manipular los caudales, se cuenta con bombas de desplazamiento positivo, que a través de un circuito de potencia se comandan a través de voltajes continuos según el modelo:

$$q_1(t) = c_1 u_1(t) + d_1 u_1^2(t) \quad (2.26)$$

$$q_2(t) = c_2 u_2(t) + d_2 u_2^2(t) \quad (2.27)$$

donde $0 \leq u_i(t) \leq 10[V]$. Este modelo reduce a las bombas (y los circuitos de potencia asociados) a un relación estática del tipo cuadrática, vale decir como sistemas que responden de manera instantánea ante los estímulos de voltaje. Esto claramente no es cierto, sin embargo, dadas las constantes de tiempo mayores asociadas al sistema hidráulico, podemos considerar las constantes de tiempo de las bombas como despreciables.

2.1.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

En el modelo anterior, incluyendo sensores y actuadores, existe un conjunto de parámetros desconocidos que se deben estimar para completar el modelo². En esta sección se presentan experimentos para estimar dichos parámetros.

2.1.5. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE SENSORES Y ACTUADORES

Hay que notar que los sensores entregarán un voltaje por cada nivel de altura del estanque. Dicho voltaje se puede medir desde el computador (a través de la tarjeta de adquisición de datos), además usted puede medir, con una regla, la altura de agua asociada a cada voltaje. Esto le permite obtener un conjunto de datos experimentales y así implementar el método de mínimos cuadrados para estimar a_1 , a_2 , b_1 y b_2 . También puede hacerlo usando Excel.

De forma análoga, usted puede manipular las bombas y obtener mediciones para determinar los parámetros c_1 , c_2 , d_1 y d_2 .

Nota Importante: Debido a la modalidad online de este semestre a causa de la pandemia, no se hará la estimación de los parámetros antes indicados del sistema real ya que no se obtendrán mediciones experimentales. Sin embargo, usted ya tiene las herramientas para hacerlo pues ya realizó el procedimiento para estimar estos parámetros en la experiencia 1, en donde implementó el algoritmo de mínimos cuadrado con datos ficticios para ajustar curvas de orden 1 y orden 2 como las que gobiernan a los sensores y actuadores.

Por lo tanto, solo faltaría describir un procedimiento para estimar el parámetro κ (que no es un parámetro de los sensores y actuadores). Para ello se puede usar el experimento de igualación de nivel que se describe a continuación.

²La estimación de parámetros es uno de los problemas más importantes en aplicaciones prácticas. La asignatura donde se estudian en detalle los métodos de estimación es Modelos Para Control, impartido por el área de control

2.1.6. EXPERIMENTO DE IGUALACIÓN DE NIVEL

Para determinar el coeficiente de traspaso κ se puede apagar ambas bombas, llenar el estanque 1 hasta cierto nivel ($h_1(0)$), y el estanque 2 en un nivel mas bajo manteniendo el agujero que conecta los estanques tapado. Luego, se permite el traspaso de un estanque a otro y se colectan datos que representan las alturas (v_1 y v_2). En este caso, la ecuaciones diferenciales que representan este experimento están dadas por:

$$A \frac{dh_1(t)}{dt} = -q_{12}(t) \quad (2.28)$$

$$A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) \quad (2.29)$$

$$q_{12}(t) = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \text{ si } h_1(t) \geq h_2(t) \quad (2.30)$$

Definiendo la diferencia de niveles en los estanques como:

$$z(t) = h_1(t) - h_2(t) \quad (2.31)$$

Restando las dos ecuaciones diferenciales se tiene que:

$$A \frac{dz(t)}{dt} = -2\kappa\sqrt{z} \quad (2.32)$$

La cual se puede resolver via integración:

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{z(t)}} dz(t) = -\frac{2\kappa}{A} \int_0^t dt \Rightarrow \sqrt{z(t)} = \sqrt{z(0)} - \frac{\kappa}{A}t \quad (2.33)$$

Como la relación entre $\sqrt{z(t)}$ y el tiempo t es una linea recta, se puede utilizar el algoritmo de “minimos cuadrados” para estimar la pendiente de la recta y como el área A es conocida (la puede medir con una regla), la constante κ se puede estimar.

2.2. RESUMEN

De esta manera, el sistema completo, incluyendo la parte hidráulica, los sensores de nivel y las bombas, tiene como modelo fenomenológico al conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{(I) Modelo no Lineal (descrito en el tiempo):} & \quad \begin{cases} A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{12}(t) \\ A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) - q_2(t) \\ q_{12}(t) = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \text{ si } h_1(t) \geq h_2(t) \end{cases} \\
 \text{(II) Modelo Lineal (descrito en Laplace):} & \quad \begin{cases} H_{1,\Delta}(s) = \frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} Q_{1,\Delta}(s) - \frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} Q_{2,\Delta}(s) \\ H_{2,\Delta}(s) = \frac{\gamma/A^2}{s(s + 2\gamma/A)} Q_{1,\Delta}(s) - \frac{(s + \gamma/A)}{As(s + 2\gamma/A)} Q_{2,\Delta}(s). \end{cases} \\
 \text{(III) Sensores de nivel:} & \quad \begin{cases} v_1(t) = a_1 h_1(t) + b_1 \\ v_2(t) = a_2 h_2(t) + b_2 \end{cases} \\
 \text{(IV) Bombas:} & \quad \begin{cases} q_1(t) = c_1 u_1(t) + d_1 u_1^2(t) \\ q_2(t) = c_2 u_2(t) + d_2 u_2^2(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Con las variables siguientes (para $i = 1, 2$):

t	tiempo en [s]
$h_i(t)$	nivel en el estanque i en [cm]
$q_i(t)$	caudal de entrada del estanque i en [cm ³ /s]
$q_{12}(t)$	caudal de traspaso del estanque 1 al 2 en [cm ³ /s]
$0 \leq v_i(t) \leq 10$	voltaje de medición de nivel del estanque i en [V]
$0 \leq u_i(t) \leq 10$	voltaje de actuación sobre la bomba i en [V]
$H_{i,\Delta}(s)$	T. de Laplace de la diferencia entre $h_i(t)$ y el correspondiente punto de equilibrio.
$Q_{i,\Delta}(s)$	T. de Laplace de la diferencia entre $q_i(t)$ y el correspondiente punto de equilibrio.

y los parámetros siguientes:

A	área basal de ambos estanques en [cm ²]
κ	coeficiente de traspaso en [cm ^{2,5} /s]
a_1	ganancia de la característica del sensor de nivel estanque 1 en [V/cm]
b_1	offset de la característica del sensor de nivel estanque 1 en [V]
a_2	ganancia de la característica del sensor de nivel estanque 2 en [V/cm]
b_2	offset de la característica del sensor de nivel estanque 2 en [V]
c_1	ganancia de la bomba 1 en [cm ³ /(sV)]
c_2	ganancia de la bomba 2 en [cm ³ /(sV)]
$h_{1,Q}$	nivel en el estanque 1 en el punto de equilibrio
$h_{2,Q}$	nivel en el estanque 2 en el punto de equilibrio
γ	$= \kappa / (2\sqrt{h_{1,Q} - h_{2,Q}})$

3. TRABAJO PREVIO SESIONES ESTANQUES

Antes de la experiencia en laboratorio usted debe desarrollar el siguiente trabajo.

- Estudie el proceso de *enmascaramiento* (Mask) de un bloque en Simulink.
- Repase la metodología para la linealización de sistemas no lineales descrito, ya sea en el curso de Control 1 o en el curso de Análisis de Sistemas Lineales.
- Estudiar las actividades y los códigos asociados a la experiencia 1 en donde se utiliza el algoritmo de mínimos cuadrados. Además, estudiar la función *línea de tendencia* de Microsoft Excel, como alternativa sencilla a Matlab.

4. TRABAJO DE LABORATORIO SESIÓN ESTANQUES

El trabajo con el sistema de estanques acoplados se desarrollará en dos sesiones de laboratorio. En la primera sesión usted trabajará solo con Simulink, mientras que en la segunda sesión usted interactuará con el sistema real. Se usará el método de Euler con $\Delta = 0,001s$. En ambos casos, usted deben desarrollar las actividades pero además, debe analizar y comentar sus resultados.

■ Actividad 1: Simulación modelos no-lineal y lineal.

- a) Construya un modelo de SIMULINK que represente al sistema de estanques acoplados en base al modelo no lineal. Considere que la entradas son los flujos $q_1(t)$ y $q_2(t)$ y las salidas son los niveles $h_1(t)$ y $h_2(t)$, es decir, no se deben incluir los modelos de los sensores y actuadores. El modelo fenomenológico del sistema en SIMULINK debe estar en formato enmascarado. Los parámetros A , κ y las condiciones iniciales de los niveles $h_1(0)$ y $h_2(0)$ deben ser ingresados por dicha interfaz (usando máscara). Considere que $\kappa = 15$, $A = 100$, $h_1(0) = 14$ y $h_2(0) = 10$.

Note que en esta guía se ha asumido que $h_1(t) \geq h_2(t)$ para todo instante. Esto puede no cumplirse en la simulación, por lo que de modo de no encontrar errores se recomienda utilizar $q_{12}(t) = \kappa \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} \text{sgn}\{h_1(t) - h_2(t)\}$, donde $\text{sgn}(\cdot)$ representa la función signo. (en algunas versiones de Simulink existe el bloque *signedsqrt* que hace la operación antes descrita)

- b) Implemente en Simulink el modelo linealizado y compare, vía simulaciones, la dinámica de este modelo lineal con la dinámica del modelo no lineal. Considere el punto de equilibrio dado por $h_{1,Q} = 14$, $h_{2,Q} = 10$, $q_{1,Q} = 30$ y $q_{2,Q} = 30$, y los parámetros $\kappa = 15$ y $A = 100$ (todos deben ser ingresados por enmascaramiento). Para la comparación debe implementar el modelo de la Figura 4.1. Note que NO se implementan los modelos de sensores ni actuadores. El modelo lineal puede implementarlo a través función de transferencia SISO usando el esquema de la Figura 4.2. Simule y comente los resultados considerando (use todas las gráficas que estime conveniente para su análisis):

- i) $q_1(t) = q_2(t) = 15\sin(t) + q_{1,Q}$
- ii) $q_1(t) = q_2(t) = q_{1,Q} + 5\mu(t - 5)$
- iii) $q_1(t) = q_{1,Q} + 15\mu(t - 5)$ y $q_2(t) = q_{2,Q} + 5\mu(t - 5)$
- iv) $q_1(t) = q_{1,Q} + 5\mu(t - 5)$ y $q_2(t) = q_{2,Q} + 15\mu(t - 5)$

■ Actividad 2: Estimación del coeficiente de traspaso.

- a) Construya un modelo de SIMULINK que represente al sistema de estanques acoplados en base al modelo no lineal, tal como en el punto a) de la Actividad 1, pero ahora considere que la entradas son los voltajes de actuación $u_1(t)$ y $u_2(t)$ y las salidas son los voltajes de medición $v_1(t)$ y $v_2(t)$, es decir, se deben incluir los modelos de los sensores y actuadores. Los parámetros A y κ , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , c_1 , d_1 , c_2 , d_2 y las condiciones iniciales de los niveles $h_1(0)$ y $h_2(0)$ deben ser ingresados usando máscara.

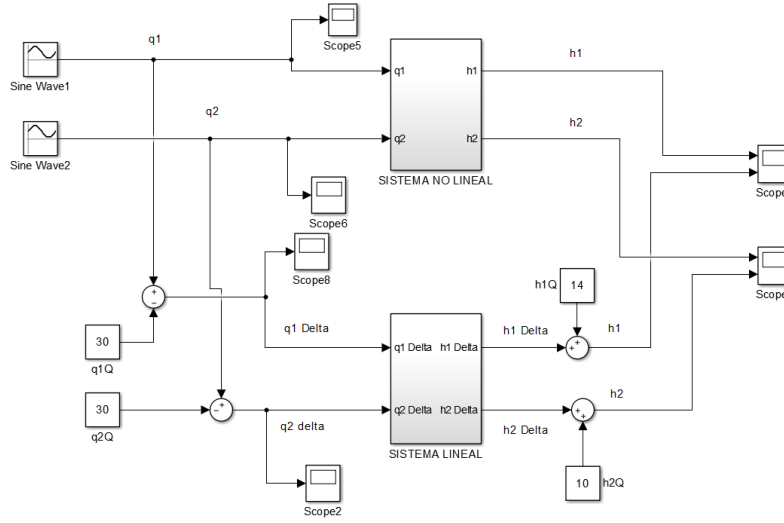


Figura 4.1: Comparación Sistema Lineal y No lineal.

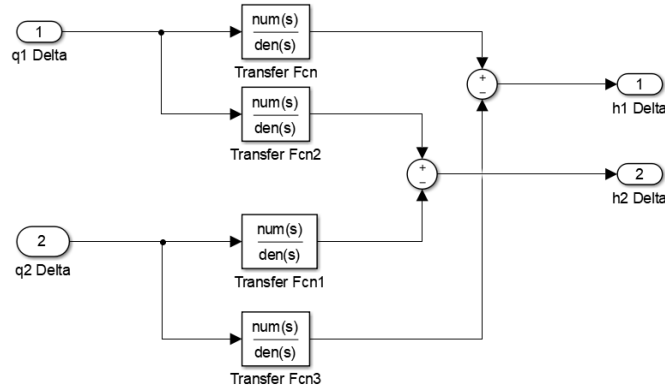


Figura 4.2: Sistema Lineal de 2×2 usando funciones SISO.

Considere los siguientes valores para los parámetros de interés: Sensores $a_1 = 0,15$, $a_2 = 0,2$, $b_1 = 0,3$, $b_2 = 0,5$; Bombas: $c_1 = 0,3$, $c_2 = -0,4$, $d_1 = 6$, $d_2 = 20$; Estanques acoplados: $\kappa = 15$, $A = 100$; Condiciones iniciales $h_1(0) > h_2(0)$ (diferencia inicial de altura a escoger).

- b) **Simule** el experimento de igualación de nivel descrito en la guía. Para ello primero estime las alturas en los estanques $h_1(t)$ y $h_2(t)$ a partir de las mediciones ruidosas de los voltajes en los sensores de nivel:

$$v_1^{med}(t) = v_1(t) + \epsilon_1(t) \quad (4.1)$$

$$v_1(t) = a_1 h_1(t) + b_1 \quad (4.2)$$

$$v_2^{med}(t) = v_2(t) + \epsilon_2(t) \quad (4.3)$$

$$v_2(t) = a_2 h_2(t) + b_2 \quad (4.4)$$

donde $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$ son ruidos blanco Gaussianos de media cero y varianza pequeña (por ejemplo 10^{-6}).

- c) Calcule $\sqrt{z(t)}$, donde $z(t) = h_1(t) - h_2(t)$ asumiendo que a_1 , b_1 , a_2 , b_2 son conocidos. Utilice el algoritmo de mínimos cuadrados para estimar la pendiente $-\kappa/A$. Note que dado que las mediciones son ruidosas es posible que $z(t)$ sea menor que cero en algún intervalo de tiempo (seleccione sólo el intervalo de tiempo donde $z(t) > 0$). Considerando que el valor del área $A = 100$ es conocido, finalmente estime el valor de κ .

5. SISTEMA DE LEVITADOR MAGNÉTICO

5.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El segundo sistema a estudiar, conocido como Levitador Magnético, es un sistema electromecánico que permite la levitación de un objeto metálico llamado rotor. Este sistema está compuesto por un electroimán que aporta un campo magnético variable y dos imanes permanentes (uno de ellos ubicado en el extremo del rotor) que aportan un campo magnético fijo, tal como se muestra Figura 5.1. Operando adecuadamente, la fuerza electromagnética sobre el rotor permite compensar la fuerza generada por la gravedad, quedando así el rotor suspendido en el aire.

A continuación presentaremos el modelo no lineal del sistema, que consiste en una descripción del electroimán, y luego del sistema electro-mecánico asociado.

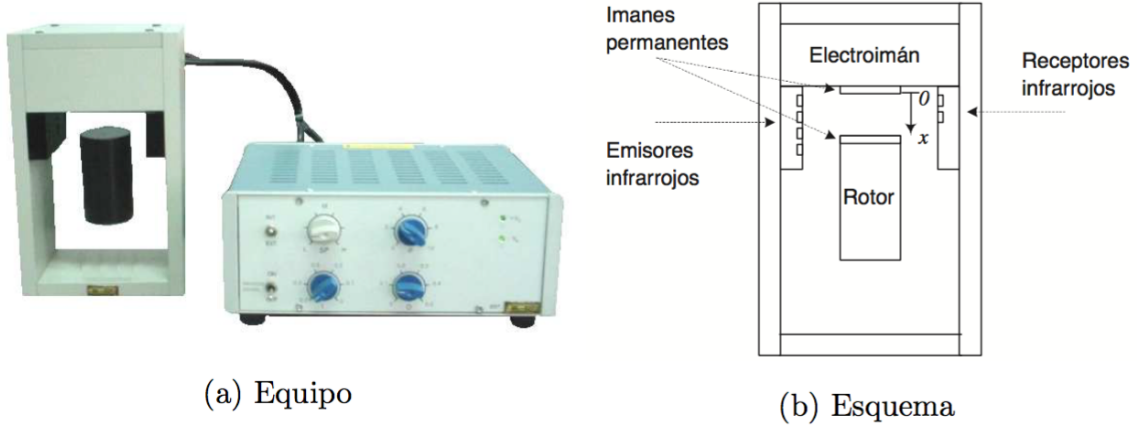


Figura 5.1: Sistema Levitador Magnético

5.1.1. CIRCUITO ELÉCTRICO ASOCIADO AL ELECTROIMÁN

El electroimán produce un campo magnético variable proporcional a la corriente continua $i_e(t)$ que circula por su bobina. Esta corriente $i_e(t)$, que permite modificar la fuerza electromagnética sobre el rotor, es suministrada mediante un amplificador inversor transistorizado, cuya carga es el electroimán. La carga se puede representar por un circuito RL , como se muestra en la Figura 5.2. De esta forma, el circuito eléctrico que modela al electroimán viene descrito por:

$$L \frac{di_e(t)}{dt} = v_e(t) - Ri_e(t), \quad (5.1)$$

donde $v_e(t)$ es el voltaje de entrada del circuito. La corriente que circula por la bobina $i_e(t)$ opera en el rango $\pm 1,5[A]$.

5.1.2. SISTEMA ELECTRO-MECÁNICO

El sistema electro-mecánico tiene como entrada la corriente $i_e(t)$ de alimentación de la bobina del electroimán y como salida la posición $x(t)$ del rotor. Note que la definición del eje x es hacia abajo (ver Figura 5.1). Utilizando leyes de Física básica se puede establecer que la ecuación que relaciona la fuerza magnética total con la posición del rotor está dada por:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - F(t) \quad (5.2)$$

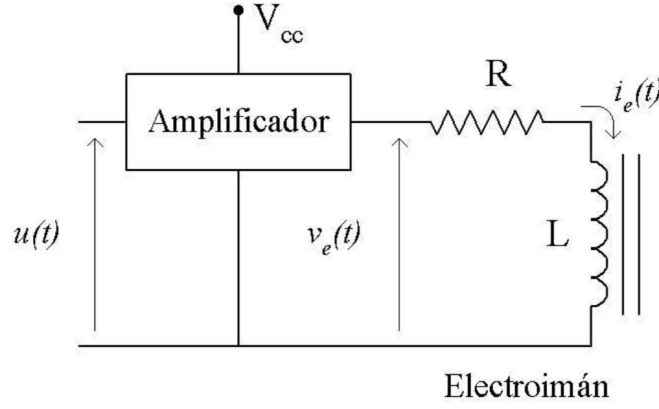


Figura 5.2: Sistema Eléctrico

donde m es la masa del rotor y g es la aceleración de gravedad terrestre. La fuerza magnética total es producida conjuntamente por el electroimán y por el imán permanente, y está dada por:

$$F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \quad (5.3)$$

La fuerza generada por los imanes permanentes es atractiva (atracción a la posición $x(t) = 0$), es decir, k_2 es un parámetro positivo. La fuerza asociada al electroimán en cambio puede repeler o atraer al rotor dependiendo del signo asociado a la corriente $i_e(t)$.

Nota: En la literatura usted es común encontrar modelos parecidos, pero con un término cuadrático para la corriente. En dichos casos solo se ejerce atracción o repulsión sobre un rotor que no posee imanes permanentes.

5.1.3. SENSORES Y ACTUADORES

ACTUADOR. El voltaje de entrada del circuito RL , $v_e(t)$, permite manipular la corriente del electroimán y, en consecuencia, la fuerza ejercida en el rotor. Dicho voltaje se manipula a través de un voltaje de actuación, $u(t)$, tal que

$$v_e(t) = -K_a u(t) + \delta_a, \quad (5.4)$$

con δ_a un parámetro constante. El voltaje de control $u(t)$ opera en el rango $\pm 10[V]$,

SENSORES. La posición del rotor es medida electrónicamente mediante un conjunto de emisores y receptores de luz infrarroja, dispuestos en línea de forma que los haces de luz se cortan a medida que el rotor se desplaza verticalmente, disminuyendo la intensidad de luz recibida por los receptores. La intensidad de la luz infrarroja recibida se traduce a un voltaje de medición, $v_x(t)$, en el rango de $-10[V]$ a $0[V]$ y esta relacionada a la posición de acuerdo a la siguiente relación:

$$v_x(t) = K_m x(t) - \delta_m \quad (5.5)$$

donde δ_m y K_m son parámetros constantes.

La corriente del electroimán también se puede medir a través de un sensor que entrega un voltaje de medición $v_{ie}(t)$ descrito por

$$v_{ie}(t) = K_L i_e(t) + \delta_L \quad (5.6)$$

donde δ_L y K_L son parámetros constantes.

CLASIFICACIÓN DEL SISTEMA Según sus propiedades, podemos clasificar el sistema como sigue:

- **SISO o MIMO:** Consideraremos que la entrada del sistema es el voltaje de actuación $u(t)$ y la salida del sistema es el voltaje de medición de la posición $v_x(t)$, e ignoraremos el voltaje de medición de corriente $v_{ie}(t)$ como salida del sistema pues no jugará ningún rol para el control que diseñaremos más adelante. Por lo tanto, estamos frente a un sistema de una entrada y una salida (SISO).
- **Lineal o no lineal:** Claramente este modelo es no lineal debido a que la fuerza debida a los campos magnéticos es proporcional a la inversa del cuadrado de la posición del rotor ($F(t) = (k_1 i_e(t) + k_2) \frac{1}{x^2(t)}$). Note que el resto de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema no presentan no-linealidades (incluidos los sensores y actuadores), sin embargo la ecuación de fuerza anterior hace que la ecuación que relaciona la entrada $u(t)$ con la salida $v_x(t)$ sea no-lineal de todas formas.
- **Estable o inestable:** Recuerde que un sistema es BIBO estable si **para toda entrada acotada** que se aplica al sistema, la salida correspondiente es también acotada. Al contrario, se dice que el sistema es BIBO *inestable* si se encuentra por lo menos una entrada acotada tal que la salida correspondiente no lo es. En este caso, basta notar que para cualquier entrada $u(t)$ acotada que haga que la fuerza $F(t)$ sea negativa, se tendrá que la posición del rotor aumentará indefinidamente, y por lo tanto, haciendo que el rotor se caiga. En consecuencia, el sistema es BIBO *inestable*. Hay que notar que en realidad sí existen cotas en las señales reales del sistema pues los voltajes y corrientes tienen valores límites, y además la posición del rotor no puede crecer indefinidamente. Sin embargo, hay que enfatizar que esto es causa de la implementación física del sistema, y no de la dinámica del sistema propiamente tal. Por ejemplo, el rotor no puede caer indefinidamente en la práctica pues la mesa (o el suelo si usted no tiene reflejos suficientemente rápidos) detendrá al rotor, sin embargo, este tipo de cotas físicas no aplican en la definición de las cotas de estabilidad en sentido BIBO (la mesa o el suelo no son parte del modelo fenomenológico).
- **Variante o invariante en el tiempo:** Los parámetros asociados al sistema, como por ejemplo la masa del rotor, las coeficientes asociadas a las fuerzas magnéticas, etc, se consideran constantes. Por lo tanto diremos entonces que el sistema es invariante en el tiempo.

MODELO LINEAL Se puede obtener un modelo lineal de este sistema dado un punto de equilibrio apropiado. Para ello debe notar que para que el sistema esté en equilibrio, no debe haber movimiento del rotor (por lo tanto velocidad y aceleración cero), lo que además requiere que no existan variaciones de la corriente. En este caso las fuerzas en el sistema estarán en equilibrio en una posición determinada que depende de la corriente en equilibrio. Sin la presencia de un controlador, cualquier variación del punto de equilibrio, debido por ejemplo a una perturbación, se traducirá en que el rotor caerá al suelo o quedará de forma permanente en la posición $x(t) = 0$. Estamos entonces hablando de un punto de equilibrio inestable.

Es posible demostrar (de hecho deberá hacerlo usted pues es parte del trabajo previo del laboratorio) que, dado un punto de equilibrio arbitrario denotado por u_Q, i_{eQ}, F_Q, x_Q y v_{xQ} (donde el subíndice Q se usa para referirse al punto de equilibrio de la variable asociada), el sistema lineal asociado viene dado por

$$G(s) = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K_a K_m k_1}{L m x_Q^2} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{m x_Q^3}}\right) \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{m x_Q^3}}\right)}$$

Note que este sistema es inestable pues tiene un par de polos iguales en magnitud pero con signo contrario (uno de ellos está en la parte real positiva).

5.2. RESUMEN

El modelo fenomenológico completo queda descrito como:

$$(I) \text{ Modelo No Lineal (descrito en el tiempo): } \begin{cases} L \frac{di_e(t)}{dt} = v_e(t) - Ri_e(t) \\ m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - F(t) \\ F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \end{cases}$$

$$(II) \text{ Actuador: } \begin{cases} v_e(t) = -K_a u(t) + \delta_a \end{cases} \quad \text{Corresponde a Analog Output 0}$$

$$(III) \text{ Sensores: } \begin{cases} v_x(t) = K_m x(t) - \delta_m \\ v_{ie}(t) = K_L i_e(t) + \delta_L, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Corresponde a Analog Input 0} \\ \text{(la medición } v_{ie}(t) \text{ no la usaremos)} \end{array}$$

(IV) Modelo Lineal **considerando sensor y actuador** como parte del sistema (descrito en Laplace):

$$G(s) = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K_a K_m k_1}{L m x_Q^2} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{m x_Q^3}}\right) \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{m x_Q^3}}\right)}$$

Con las variables siguientes:

t	tiempo en $[s]$
$-10 \leq u(t) \leq 10$	señal de entrada al Levitador en $[V]$
$v_e(t)$	voltaje de entrada en el electroiman en $[V]$
$-1,5 \leq i_e(t) \leq 1,5$	corriente en el electroimán en $[A]$
$v_{ie}(t)$	voltaje de medición de corriente en el electroimán en $[V]$
$0 \leq x(t) \leq 10$	posición del rotor (medida respecto al electroimán) en $[cm]$
$F(t)$	fuerza magnética total en $[cN]$
$-10 \leq v_x(t) \leq 0$	voltaje de medición de la posición del rotor en $[V]$
$\Delta U(s)$	transformada de Laplace de $\Delta u(t) = u(t) - u_Q$
$\Delta V_x(s)$	transformada de Laplace de $\Delta v_x(t) = v_x(t) - v_{xQ}$

y los parámetros siguientes:

m	masa del rotor en $[kg]$
L	inductancia del electroimán en $[H]$
R	resistencia del electroimán $[\Omega]$
g	aceleración de gravedad terrestre $[cm/s^2]$
k_1	coeficiente del electroimán en $[cNcm^2/A]$
k_2	coeficiente de los imanes permanentes en $[cNcm^2]$
δ_a	offset de la característica del actuador en $[V]$
δ_L	offset de la característica del sensor de corriente del electroiman en $[V]$
δ_m	offset de la característica del sensor de posición del rotor en $[V]$
K_a	ganancia de la característica del actuador (adimensional)
K_L	ganancia de la característica del sensor de corriente del electroiman en $[\Omega]$
K_m	ganancia de la característica del sensor de posición del rotor en $[V/cm]$
u_Q	voltaje del actuador en el punto de equilibrio usado para la linealización $[V]$
i_{eQ}	corriente de la bobina en el punto de equilibrio usado para la linealización $[A]$
x_Q	posición del rotor en el punto de equilibrio usado para la linealización $[cm]$
v_{xQ}	voltaje de medición de la posición en el punto de equilibrio usado para la linealización $[V]$

6. TRABAJO PREVIO SESIÓN LEVITADOR

Antes de la experiencia en laboratorio usted **debe desarrollar** el siguiente trabajo.

- Considere la ecuación de fuerza magnética total que actúa sobre el rotor:

$$F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \quad (6.1)$$

Muestre que la aproximación lineal de $F(t)$ en torno a un punto de equilibrio arbitrario dado por i_{eQ} , x_Q esta dada por (recuerde que puede consultar el material en sitio aulas sobre linealización).

$$\Delta F(t) = \frac{k_1}{x_Q^2} \Delta i_e(t) + \frac{-2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{x_Q^3} \Delta x(t) \quad (6.2)$$

- Demuestre que, para un punto de equilibrio arbitrario, el modelo lineal está descrito por:

$$G(s) = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta X(s)} \frac{\Delta X(s)}{\Delta I_e(s)} \frac{\Delta I_e(s)}{\Delta V_e(s)} \frac{\Delta V_e(s)}{\Delta U(s)}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta X(s)} &= K_m, & \frac{\Delta X(s)}{\Delta I_e(s)} &= \frac{-k_1}{mx_Q^2} \frac{1}{\left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}}\right) \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}}\right)} \\ \frac{\Delta I_e(s)}{\Delta V_e(s)} &= \frac{1}{L} \frac{1}{(s + R/L)}, & \frac{\Delta V_e(s)}{\Delta U(s)} &= -K_a \end{aligned}$$

- Investigue como usar el bloque *Saturation* en Simulink para limitar una señal. Investigue además cómo la opción *limit output* presente en los bloques *integrator* permite hacer lo propio con la variable de salida asociada sin la necesidad del bloque *Saturation*.

7. TRABAJO DE LABORATORIO SESIÓN LEVITADOR

Para el desarrollo de esta sesión, considere los siguientes parámetros $\delta_a = \delta_L = 0$, $\delta_m = 10$, $K_a = 3$, $K_L = 20/3$, $K_m = 1$, $g = 1000$, $R = 20$, $L = 0,2$, $m = 0,15$, $k_2 = 1536$ y $k_1 = 5888$.

- **Actividad 1: Modelo lineal en torno a un punto de equilibrio.**

- Obtenga el punto de equilibrio del sistema cuando el rotor esta siendo afectado sólomente por los imanes permanentes (el electroimán NO está ejerciendo fuerza sobre el rotor)
- Muestre que, para el punto de equilibrio anterior, el modelo lineal del sistema está dado por

$$G(s) = \frac{57500}{(s + 100)(s + 25)(s - 25)}.$$

- **Actividad 2: Comparación modelo lineal y no lineal.**

- Considere tiempo de simulación total de 1 segundo, e implemente el método de Euler con $\Delta = 1e - 3$.
- Implemente en Simulink el modelo no lineal como en la figura 7.1, considerando como salidas las señales $i_e(t)$, $v_x(t)$, $x(t)$ y $F(t)$. Incluya el bloque saturador para x y configúrelo para que $0 < x < 10$ que representaría los toques físicos que tendría el movimiento del rotor (el rotor si baja mucho chocaría con la mesa, o si sube mucho se encontraría como tope al iman permanente ubicado en la parte superior) Como condición inicial, debe usar el punto de operación calculado en la actividad 1. Puede usar máscara para incorporar los parámetros si así lo desea.

- 2.c Implemente en Simulink el modelo lineal del sistema como el descrito en la figura 7.2. Use las expresiones de la segunda actividad del trabajo previo para ello. Agregue un bloque para calcular la aproximación lineal de la fuerza usando la información del modelo lineal. Agregue bloques de saturación para Δx y Δv_x como se muestra en la figura. Use límites $0 - x_Q < \Delta x < 10 - x_Q$ y $-10 - v_{xQ} < \Delta v_x < 0 - v_{xQ}$. Note que el modelo lineal no incluye las saturaciones (por eso sigue siendo lineal).
- 2.d Simule ambos sistemas a entrada $u(t) = 0$. Verifique que en dicho escenario las señales de ambos sistemas no varían, y que de hecho se encuentran en el punto de equilibrio calculado anteriormente. ¿Por qué ocurre esto?
- 2.e Compare las señales de los sistemas no lineal y lineal ante una entrada $u(t) = 0,1\mu(t - 0,5)$. Comente los resultados. Repita lo anterior considerando ahora $u(t) = -0,1\mu(t - 0,5)$. Comente los resultados.

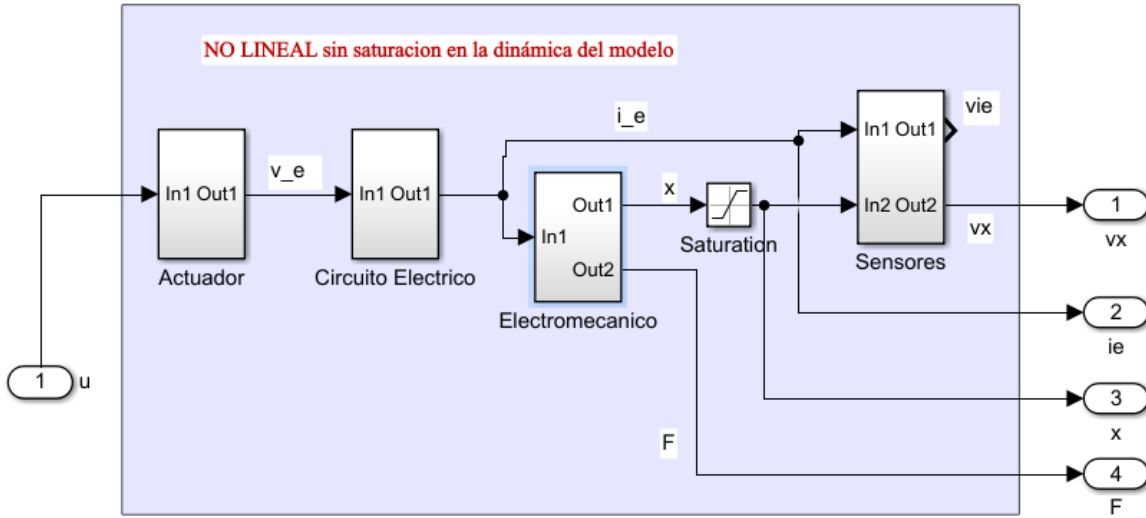


Figura 7.1: Esquema simulink levitador no lineal

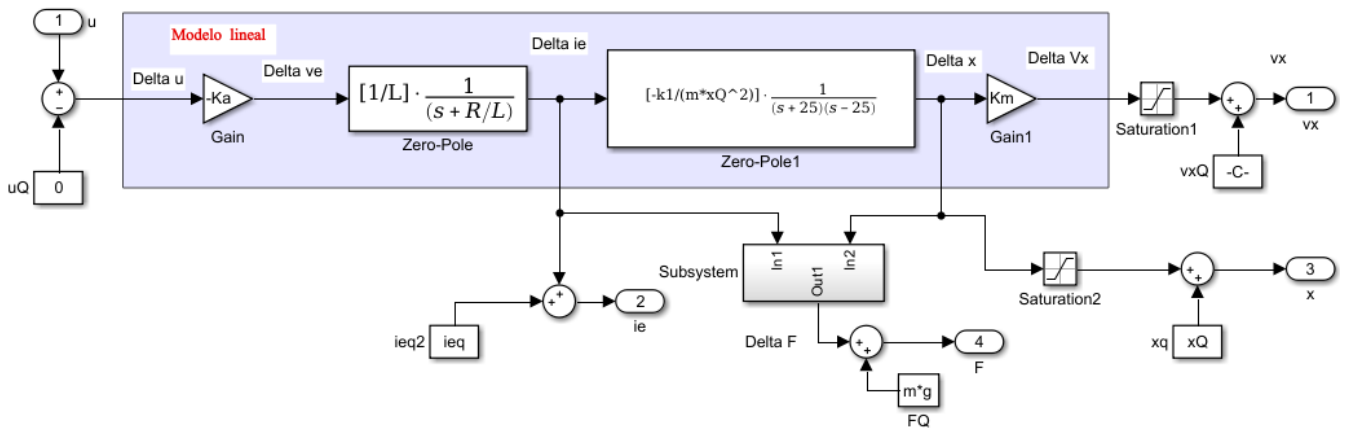


Figura 7.2: Esquema simulink levitador lineal

■ **Actividad 3: Efecto de saturar la corriente.**

- 3.a Implemente en Simulink el modelo no lineal tal como en la actividad 1 pero ahora considerando que la corriente $i_e(t)$ esta saturada tal que $-0,01 < i_e(t) < 0,01$ (suponga que el electroimán no puede operar fuera de cierto rango por motivos de seguridad o por que el suministro de energía no es capaz de proveer corriente fuera de ese rango). La saturación debe incorporarla utilizando el bloque integrador (ver figura 7.3).
- 3.b Implemente ahora en Simulink el modelo lineal de la actividad anterior, pero agregando saturación en $\Delta i_e(t)$ tal que $-0,01 - i_{eQ} < \Delta i_e(t) < 0,01 - i_{eQ}$. Para incorporar esa saturación usted no podrá usar el bloque transfer function, ni el bloque zero-pole, si no que deberá implementar el mismo esquema que en la figura 7.3 pero con la diferencia que la entrada corresponde a $\Delta v_e(t)$ y cuya salida es $\Delta i_e(t)$. Note que al incorporar la saturación, el modelo lineal se transforma en un modelo no lineal.
- 3.c Simule ambos sistemas a entrada $u(t) = 0$. Verifique que en dicho escenario las señales de ambos sistemas no varían.
- 3.d Compare las señales de los dos sistemas ante una entrada $u(t) = 0,1\mu(t - 0,5)$. Comente los resultados. Repita lo anterior considerando ahora $u(t) = -0,1\mu(t - 0,5)$. Comente los resultados.
- 3.e Compárelos los resultados obtenidos en la actividad 3.d con los obtenidos en el punto 2.e de la actividad anterior.

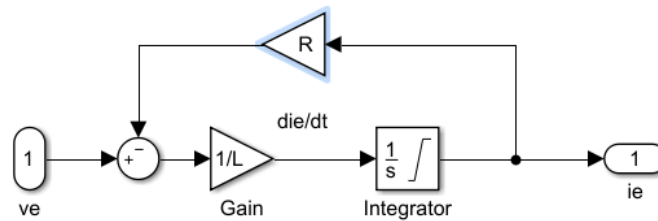


Figura 7.3: Saturación corriente bloque integrador