



Guía experiencia 3: Diseño de Controladores.

Guía preparada por el profesor: Juan C. Agüero,
para la asignatura *Laboratorio de Control Automático* (ELO-271)

June 30, 2021

CONTENTS

1	Introducción	2
2	Control on-off	2
2.1	Control on-off con histéresis	3
3	Técnica de la Asignación de polos	4
4	Control PID	4
4.1	Sintonización del controlador PID usando asignación de polos	6
5	Control con Anti-enrollamiento (Anti-Windup)	8
5.1	Resumen control PID	10
6	Sesión 1: Diseño de controlador para sistema de estanques	11
6.1	Recapitulación modelo estanques acoplados	11
6.2	Estrategia de control para sistema de estanques	12
7	Trabajo Previo a la Sesión	14
8	Trabajo de Laboratorio	14
9	Sesión 2: Diseño de controlador para sistema de levitador magnético	18
9.1	Recapitulación Modelo Levitador Magnético	18
9.2	Diseño de sistemas de control	18
9.3	Trabajo Previo	20
10	Trabajo de Laboratorio	20

1 INTRODUCCIÓN

El objetivo general de esta experiencia es estudiar algunos tipos de controladores comúnmente usados. Estudiaremos primero el control on-off, que es un tipo de control bastante simple de implementar y fácil de entender, sin embargo, limitado en términos de desempeño. Luego estudiaremos los controladores PID (proporcional-integral-derivativo), los cuales son ampliamente usados en la industria. Finalmente estudiaremos un esquema que nos permitirá lidiar con las saturaciones, que son restricciones propias de la naturaleza de los actuadores y sensores, y que pueden tener consecuencias importantes en el control si no son tratadas de forma apropiada. El trabajo en laboratorio consiste en diseñar e implementar en Simulink los tipos de control antes descritos.

2 CONTROL ON-OFF

En muchos problemas prácticos, una estrategia de control que funciona y que es bastante simple de implementar es el llamado *control on-off* (también conocido como *bang-bang control*), en el cual los actuadores pueden tener solo dos estados de funcionamiento. Para ilustrar esta técnica, imagine que usted desea controlar la temperatura en una habitación, y suponga que para ello dispone de un sensor de temperatura (ubicado en el lugar de interés) y una estufa o fuente de calor que posee solo dos estados: encendido o apagado. Si usted desea una temperatura específica en la habitación por sobre la temperatura ambiente (suponiendo el ambiente frío), lo razonable es medir la temperatura actual y, en caso de estar por debajo de la deseada, encender el calefactor para subir la temperatura. Por el contrario, si la temperatura está por sobre lo deseado, lo razonable es apagar el calefactor para que la temperatura disminuya producto del intercambio con el ambiente frío.

Usualmente, a los estados de actuación se les asigna la etiqueta de *encendido* o *apagado*, sin embargo estas etiquetas no necesariamente involucran el encendido o apagado de un dispositivo físico. De hecho, si modificamos el ejemplo anterior y suponemos que en vez de un calefactor usamos un sistema de aire acondicionado que calienta o enfría el ambiente, los estados *encendido* o *apagado* no corresponden literalmente a lo sucedido en el actuador, y un estado encendido puede ser enfriar y el estado apagado puede ser calentar. Lo importante es notar que, en esta estrategia, se dispone de dos modos de actuación para hacer control. La función que determina a la señal de control en el último caso mencionado se ilustra en la Figura 2.1, en donde se aprecia que, si la temperatura está por sobre los 20°C , se usa el modo enfriar (estado on) y si esta está por debajo, se usa el modo calentar (estado off).

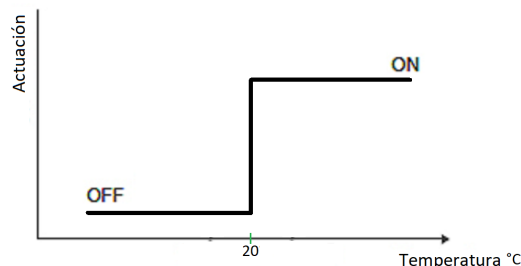


Figure 2.1: Curva de control on - off

Esta técnica de control es bastante simple e intuitiva, sin embargo tiene algunas desventajas a considerar. Una de las más importantes se ilustra a continuación. Suponga que la temperatura en nuestro ejemplo esta ligeramente por sobre los 20°C . Según esta estrategia de control, se debe activar el modo enfriamiento para bajar la temperatura, sin embargo, rápidamente alcanzaremos los 20°C e incluso se bajará ligeramente esa temperatura, momento en el cual se activará el modo calefacción para subir la temperatura, lo que ocurrirá hasta pasar ligeramente de la temperatura deseada, repitiendo así el mismo patrón de control. En consecuencia, los saltos entre los dos modos de actuación pueden ser muchos en muy poco tiempo, lo que puede dañar severamente a los dispositivos físicos encargados de la actuación. Para compensar dicho problema, se suele incluir *histéresis* en la actuación, lo que se describe a continuación:

2.1 CONTROL ON-OFF CON HISTÉRESIS

Para evitar que ocurra el fenómeno antes descrito, se puede implementar una estrategia que permita una *ventana de error* respecto del valor deseado, con cierta tolerancia. Así, la actuación puede ser diseñada de tal forma de permitir un error por debajo de la referencia cuando la actuación este en un modo, y por sobre la referencia cuando la actuación esté en el otro modo. Esto se ilustra en la Figura 2.2, en donde se busca controlar una temperatura a 20°C . Si la temperatura esta por sobre 22°C , se activa el enfriamiento y la actuación obedece a la curva azul hasta que se alcanzan los 18°C . En ese instante se activa la curva roja (calefacción), hasta llegar a los 22°C , instante en que nuevamente se opera según la curva azul. Si hubiésemos considerado inicialmente una temperatura inferior a los 18°C , entonces se parte en modo calefacción hasta los 22°C , instante en que se cambia a modo enfriamiento, entrando nuevamente en el rango de temperatura deseado. Si inicialmente hubiésemos considerando una temperatura dentro de la ventana, entonces es fácil notar que se permanece dentro de ella independiente del estado inicial de la actuación. Esta adaptación en la estrategia de control permite reducir la tasa a la que cambia el actuador de un estado a otro, pero con la desventaja que se debe tolerar cierto error en el control.

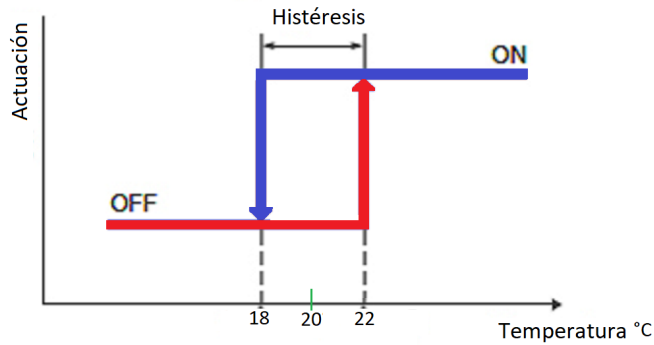


Figure 2.2: Curva de Histéresis

La Figura 2.2 es una *curva de histéresis*, en donde existe un rango (de temperatura en este caso) en donde la actuación puede tener un estado o el otro, dependiendo de en qué estado estaba anteriormente (curva azul o curva roja). A dicho comportamiento dual, que depende del “pasado” de la propia variable, se le denomina *histéresis*. Las curvas que describen este comportamiento pueden ser diversas, como las curvas mostradas en la Figura 2.3.

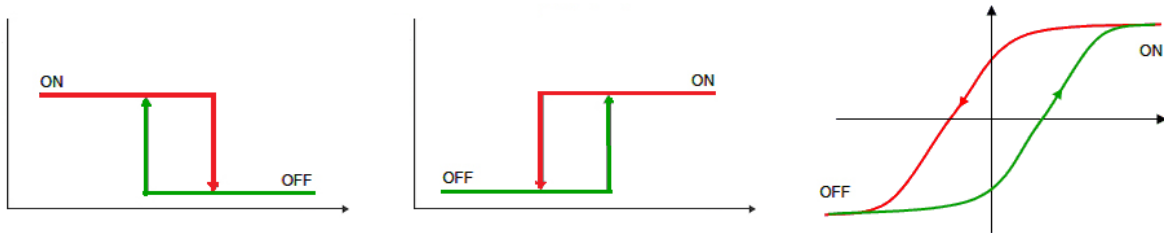


Figure 2.3: Curvas de Histéresis

3 TÉCNICA DE LA ASIGNACIÓN DE POLOS

Las desventajas de implementar un controlador limitado, como lo es el controlador on-off, pueden ser reducidas considerablemente a través de una estrategia de control más sofisticada y juiciosa, que incluya en su diseño el comportamiento dinámico del sistema a controlar. Así, podemos usar un esquema de control de un grado de libertad como el ilustrado en la Figura 3.1, en donde $C(s)$ denota el controlador (lineal) a diseñar, $G_0(s)$ denota el modelo linealizado de la planta, $y(t)$ corresponde a la salida, $r(t)$ corresponde a la señal de referencia (lo que se desea lograr), $e(t)$ es la señal de error y $u(t)$ es la señal de control.

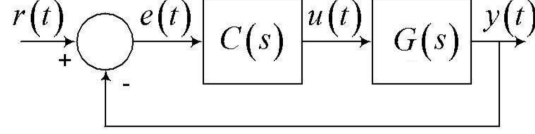


Figure 3.1: Lazo de control de un grado de libertad.

La técnica de la asignación de polos consiste en diseñar el controlador de tal forma que los polos del sistema realimentado estén localizados en posiciones específicas en el plano complejo de tal forma que la respuesta dinámica del sistema sea la deseada.

Específicamente, considere que el modelo lineal de la planta $G(s)$ y el controlador $C(s)$ están dados por:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad C(s) = \frac{P(s)}{L(s)}, \quad (3.1)$$

entonces, los polos de lazo cerrado quedan determinados por las raíces del siguiente polinomio:

$$A_{cl}(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s) \quad (3.2)$$

En consecuencia, eligiendo el polinomio de lazo cerrado $A_{cl}(s)$ (escogiendo los polos de lazo cerrado), se puede diseñar el controlador resolviendo la ecuación Diofantina en (3.2) donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios que definen al controlador ($P(s)$ y $L(s)$).

Más adelante en esta guía usaremos esta técnica para escoger los parámetros de cierto tipo de controladores, conocidos como controladores PID, y que se describen a continuación.

4 CONTROL PID

Un tipo de controlador $C(s)$ ampliamente usado en la industria es el llamado *controlador proporcional-integral-derivativo (PID)* (revise el Apéndice al final de este documento para conocer algunos PID industriales). Para muchos problemas encontrados en la práctica (en particular para los sistemas que pueden ser modelados como sistemas lineales de primer y segundo orden) es suficiente utilizar un controlador del tipo PID. Este tipo de controladores presenta importantes características, tales como:

- consigue seguimiento perfecto para entradas constantes.
- es capaz de “anticipar” el futuro usando una acción derivativa.

El controlador PID es tal que la señal de control tiene la forma

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.1)$$

El efecto de cada componente de $u(t)$ se describe a continuación.

Término proporcional, $(K_P e(t))$:

Imagine que se encuentra con el mismo problema de control de temperatura descrito en la sección anterior, pero considerando que la estufa no dispone solo de dos niveles de funcionamiento, si no que puede calentar el ambiente a temperaturas en un rango continuo. En dicho caso, es razonable considerar que si el ambiente está *muy frío* se puede encender la calefacción a nivel alto; si el ambiente está moderadamente frío, se puede encender la calefacción de forma moderada, y si el ambiente está ligeramente frío (comparado con la temperatura deseada), pues se puede dejar la calefacción a un nivel bajo, etc. Básicamente, este es un tipo de control proporcional, en donde la temperatura varía de forma proporcional a la señal de error, es decir, el control es de la forma $K_P e(t)$, donde K_P es un parámetro constante. Claramente, dependiendo del valor de K_P , el control puede ser más rápido y vigoroso, o puede ser más lento y suave.

Un diseño apropiado de K_P puede conseguir buenos resultados. De hecho, si consideramos que utilizamos un controlador sólo proporcional, $C(s) = K_P$, entonces la transferencia entre la señal de referencia $r(t)$ y la señal de salida $y(t)$ (también conocida como función de sensibilidad complementaria) está dada por:

$$T(s) = \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)} \quad (4.2)$$

Si consideramos que el proceso $G(s)$ tiene una ganancia a continua dada por $G(0)$, tenemos que la ganancia a continua de la sensibilidad complementaria, $T(0)$, está dada por

$$T(0) = \frac{K_P G(0)}{1 + K_P G(0)} \quad (4.3)$$

la que se aproxima a 1 cuando K_P crece ($\lim_{K_P \rightarrow \infty} T(0) = 1$). Esto quiere decir que, si se utiliza alta ganancia, se esperaría un buen seguimiento de la referencia (constante).

Es importante destacar que el análisis anterior es bastante simplista. La estabilidad del lazo cerrado y otros fenómenos tienen que ser analizados en detalle una vez que el valor de K_P está determinado. De hecho, si K_P es excesivamente grande, el controlador puramente proporcional puede llegar a comportarse como un control on-off sin histéresis. Para ilustrar esto considere el ejemplo de control de temperatura dado anteriormente, y suponga que la medición está solo un grado celsius por debajo de lo esperado. Si se tiene una ganancia muy grande, esta diferencia se exagerará considerablemente, haciendo que la señal de control sea grande (usando la estufa en su máxima temperatura). Si la medición está por sobre la referencia, entonces la estufa se apagará completamente. Este comportamiento es similar al de un controlador on-off.

Término integrativo, $\frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$:

La razón principal para el término integrativo es que se pueda conseguir buen seguimiento a referencia constante y a la vez rechazar perturbaciones constantes, pues si hubiese un error estacionario, la acción integral del controlador lo compensará. Para observar esto supongamos que se implementa un controlador PI (control PID con $K_D = 0$), para seguir una referencia de tipo escalón, de tal forma que existe un error estacionario constante e_∞ y que la señal de actuación estacionaria es igual a la constante u_∞ . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} u_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(K_P e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \\ &= K_P e_\infty + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

El término integral en (4.4) no convergerá para e_∞ constante, y por lo tanto u_∞ tampoco será constante (contradiciendo lo supuesto), a menos que $e_\infty = 0$.

Una forma alternativa de observar este comportamiento de los controladores que tienen acción integral, es considerando que en estado estacionario ($s = 0$), la ganancia del controlador es infinita. Esto implica, que la entrada a este controlador (la señal de error) tiene que ser cero para que a la salida del controlador tenga un valor finito.

Término derivativo, $T_d \frac{de(t)}{dt}$:

El término derivativo es útil para penalizar cambios bruscos, y por lo tanto ayuda a manejar overshoots con el fin de obtener respuestas mas *suaves*. Esto se debe a que T_d se puede interpretar como una ganancia sobre la tasa de cambio del error. Este término de alguna forma debe “predecir” (tener una aproximación del valor futuro) la tasa de cambio del error. Para ilustrar como esto sucede consideremos un controlador con parte derivativa y proporcional:

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\} \quad (4.5)$$

Realizando una aproximación de Euler¹ de $e(t)$ con $\Delta = T_d$, se tiene que:

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.6)$$

se puede observar que este controlador consigue una actuación que es proporcional al error en el instante $t + T_d$. Es por esta razón que se dice que el control derivativo predice el futuro del error y calcula la actuación en base a esta predicción.

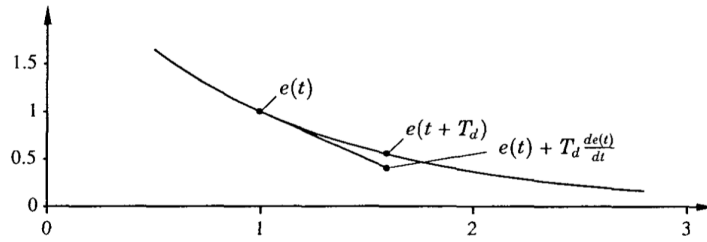


Figure 4.1: Interpretación de la acción derivativa en base a predicciones del error, donde la predicción es obtenida como extrapolación lineal.

4.1 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR PID USANDO ASIGNACIÓN DE POLOS

Para sintonizar un controlador PID (determinar los valores de K_P , K_I , K_D) se puede, en general, utilizar las mismas técnicas que se usan para diseñar cualquier controlador lineal (por ejemplo, asignación de polos) pero se tiene que imponer que la transferencia $C(s)$ tiene la forma particular de un controlador PID. También existen técnicas prácticas especializadas en el diseño de controladores PID basadas en la forma de la respuesta a escalón del sistema dinámico a controlar (método de Ziegler-Nichols).

En esta guía estudiaremos la técnica de asignación de polos para sintonizar el controlador PID. Para ello comenzaremos determinando la función de transferencia del controlador PID.

Función de transferencia de los controladores PID

En el caso de controladores PID la entrada a la planta $u(t)$ está dada por:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (4.7)$$

$$= K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\} \quad (4.8)$$

¹ Alternativamente esto se puede obtener a través de una serie de Taylor de $e(t + T_d)$ alrededor de t , truncada.

Entonces, utilizando la transformada de Laplace, la función de transferencia de los controladores del tipo PID está dada por:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \quad (4.9)$$

$$= K_P \left\{ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d s \right\} \quad (4.10)$$

Note que en general $C(s)$ es una función impropia, y por lo tanto no puede implementarse físicamente. Para lidiar con dicho problema, se suele agregar un polo rápido (de dinámica despreciable debido a su rápida convergencia) de tal forma que el término derivativo sea una función propia. Así, la componente derivativa toma la forma:

$$K_D s \rightarrow K_D \frac{s}{\tau s + 1} \quad (4.11)$$

donde τ es un valor pequeño. La incorporación del polo rápido tiene dos consecuencias:

- El controlador PID se puede implementar en la práctica.
- El valor de τ debe ser suficientemente cercano a cero para que la aproximación de la derivada sea razonable, pero no podrá estar arbitrariamente cercana a cero debido a restricciones físicas y/o de procesamiento. Dependiendo del valor de τ escogido, el polo extra puede hacer que el controlador filtre componentes de alta frecuencia del error en mayor o menor medida.

En SIMULINK existe un bloque PID que considera $N = \frac{1}{\tau}$ de modo que se debe ingresar un valor N suficientemente grande. Reescribiendo la transferencia $C(s)$, tenemos que:

$$C(s) = K_D \frac{s}{\frac{1}{N}s + 1} = K_D \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \quad (4.12)$$

Finalmente, el controlador PID se implementa en SIMULINK de la siguiente forma:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \quad (4.13)$$

$$= K_P \left\{ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \right\} \quad (4.14)$$

Note que existe una relación biyectiva entre los parámetros del controlador PID de la forma:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1}, \quad N = \frac{1}{\tau} \quad (4.15)$$

y el controlador de la forma:

$$C(s) = \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{s(s + d)} \quad (4.16)$$

dada por

$$K_P = \frac{n_1 d - n_0}{d^2} \quad (4.17)$$

$$K_I = \frac{n_0}{d} \quad (4.18)$$

$$K_D = \frac{n_2 d - n_1 d + n_0}{d} \quad (4.19)$$

$$N = d \quad (4.20)$$

y por

$$n_2 = K_P + K_D N \quad (4.21)$$

$$n_1 = K_P N + K_I \quad (4.22)$$

$$n_0 = K_I N \quad (4.23)$$

$$d = N \quad (4.24)$$

Esto quiere decir, que es suficiente diseñar un controlador con la estructura en (4.16) para diseñar un controlador PID.

EJEMPLO: De modo de ilustrar el método de asignación de polos par sintonizar un controlador PID, considere la siguiente planta:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (4.25)$$

y considere que se desea obtener un lazo cerrado con polos correspondiente al siguiente polinomio:

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 4)^2 \quad (4.26)$$

La correspondiente ecuación Diofantina está dada por:

$$(s^2 + 4s + 9)(s + 4)^2 = (s + 1)(s + 2)s(s + d) + 2(n_2s^2 + n_1s + n_0) \quad (4.27)$$

la cual tiene como solución (resuelva la ecuación (4.27)):

$$d = 9 \quad (4.28)$$

$$n_0 = 72 \quad (4.29)$$

$$n_1 = 59 \quad (4.30)$$

$$n_2 = 14 \quad (4.31)$$

lo que conduce a las siguientes ganancias del controlador PID:

$$K_P = 5.67 \quad (4.32)$$

$$K_I = 8 \quad (4.33)$$

$$K_D = 0.93 \quad (4.34)$$

$$N = 9.09 \quad (4.35)$$

El método de asignación de polos tiene sentido sólo si el número de ecuaciones (igualando los coeficientes acompañando las diferentes potencias de s) disponibles es igual al número de parámetros a calcular. Para el caso del controlador PID en (4.15) el número de parámetros a calcular es 4.

Ajuste basado en Reglas empíricas²

Para efectos prácticos, si el diseño analítico del controlador no entrega los resultados esperados en el sistema real, se puede hacer un ajuste de los parámetros basado en reglas empíricas. En la tabla 4.1 se muestran reglas empíricas que ilustran el efecto en la salida de la planta cuando se **incrementa** los parámetros de un controlador PID. Note que estas reglas son sólo un consejo y la respuesta de lazo cerrado depende de todos los parámetros del controlador a la vez. Así que estas reglas sólo deben usarse como un medio de ajuste fino en la sintonización del controlador PID y no aseguran 100% el efecto que se ilustra en el cuadro.

	tiempo de subida	overshoot	tiempo de asentamiento	error de estado estacionario
K_P	decrece	crece	cambio pequeño	decrece
K_I	decrece	crece	crece	elimina
K_D	cambio pequeño	decrece	decrece	no cambia

Table 4.1: Reglas empíricas cuando se incrementan los parámetros del controlador PID

5 CONTROL CON ANTI-ENROLLAMIENTO (ANTI-WINDUP)

En la práctica los actuadores están sujetos a restricciones. Por ejemplo una válvula solamente se puede abrir hasta un 100% y no se puede cerrar más allá de 0%. Entonces, una vez que la salida del controlador

²Estas reglas fueron sacadas de <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=ControlPID>

alcanza el límite permisible por los actuadores, un control como el PID descrito en la sección anterior no tiene la capacidad de *entender* que la actuación no está alcanzando el nivel deseado ya que el actuador está saturado. De esta forma, la salida del controlador puede llegar a ser muy alta con respecto al valor de la actuación real en la planta. Esto significa que el desempeño del controlador no es lo esperado y muchas veces no es aceptable. Este efecto recibe el nombre de *enrollamiento* y la forma de eliminarlo es usando un mecanismo de *anti-enrollamiento* que básicamente es una forma de informar al controlador que la actuación está por o ha alcanzado el nivel de saturación. El control tipo On-Off no tiene dicho problema pues solo opera en dos estados factibles para el actuador.

Existen diferentes maneras de implementar esquemas de anti-enrollamiento. Hasta ahora no es claro qué esquema de anti-enrollamiento es el mejor y en la práctica es necesario probar con distintas formas de implementación de modo de encontrar un diseño de control satisfactorio. A continuación describiremos un método en particular.

Considere que deseamos implementar un controlador general $C(s)$, con la restricción que sea bi-propio y de fase mínima. Entonces el procedimiento es como sigue:

1. Se calcula el límite cuando $s \rightarrow \infty$ del controlador $C(s)$, es decir,

$$c_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} C(s).$$

2. Se determina la transferencia dada por $C(s)^{-1} - c_\infty^{-1}$.
3. Se implementa el controlador tal como se observa en la figura 5.1, donde “Lim” representa un bloque de saturación donde se incorporan los límites de la señal de control.

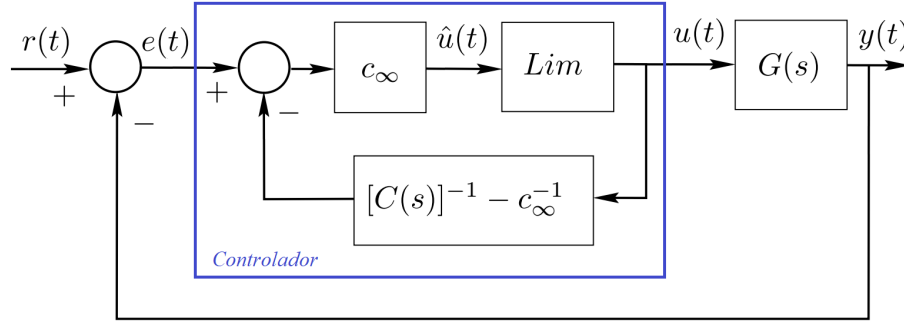


Figure 5.1: Implementación del esquema de anti-enrollamiento.

En este caso se observa que la dinámica del controlador está internamente limitada por la misma saturación del actuador. El esquema anterior es tal que garantiza que si la señal de actuación no se satura, entonces $U(s) = G(s)E(s)$, es decir, el controlador opera normalmente. Si en cambio la actuación se satura, entonces dicha saturación es considerada para el cálculo de las nuevas señales de control.

Note que el esquema de anti-enrollamiento anterior es válido para cualquier controlador $C(s)$ que sea bi-propio y de fase mínima. Si nosotros estamos interesados en la implementación de un controlador PID con anti-enrollamiento, entonces tendremos que

$$c_\infty = K_P + K_D N = n_2 \quad (5.1)$$

$$= K_P + \frac{K_D}{\tau} \quad (5.2)$$

Luego

$$C(s)^{-1} - c_{\infty}^{-1} = \frac{\left(\frac{K_P + K_D N - 1}{K_P + K_D N}\right) s(s + N)}{(K_P + K_D N)s^2 + (K_P N + K_I)s + K_I N} = \frac{(d - n_1/n_2)s - n_0/n_2}{n_2 s^2 + n_1 s + n_0} \quad (5.3)$$

$$= \frac{(K_D - K_I \tau^2)s - \tau K_I}{(K_D + K_P \tau)^2 s^2 + (K_D + K_P \tau)(K_P + K_I \tau)s + (K_D + K_P \tau)K_I} \quad (5.4)$$

5.1 RESUMEN CONTROL PID

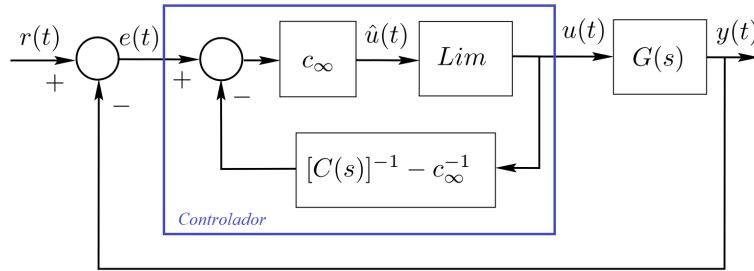
CONTROLADOR PID IDEAL

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \quad (5.5)$$

CONTROLADOR PID CON APROXIMACIÓN DEL TÉRMINO DERIVATIVO

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1} \quad (5.6)$$

IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR PID CON ANTI-ENROLLAMIENTO



donde

$$c_{\infty} = K_P + \frac{K_D}{\tau} \quad (5.7)$$

$$C(s)^{-1} - c_{\infty}^{-1} = \frac{(K_D - K_I \tau^2)s - \tau K_I}{(K_D + K_P \tau)^2 s^2 + (K_D + K_P \tau)(K_P + K_I \tau)s + (K_D + K_P \tau)K_I} \quad (5.8)$$

6 SESIÓN 1: DISEÑO DE CONTROLADOR PARA SISTEMA DE ESTANQUES

6.1 RECAPITULACIÓN MODELO ESTANQUES ACOPLADOS

A esta altura usted ya está familiarizado con el sistema de estanques representado en la Figura 6.1.

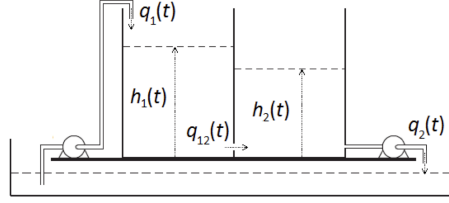


Figure 6.1: Esquema de la planta y variables de interés.

Cabe recordar, que el modelo lineal del sistema de estanques que relaciona los caudales con las alturas, dado un punto de operación $(h_{1,Q}, h_{2,Q})$, puede ser escrito de forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta H_1(s) \\ \Delta H_2(s) \end{bmatrix}}_{\text{Alturas}} = \frac{m}{s(\tau_p s + 1)} \begin{bmatrix} \tau s + 1 & -1 \\ 1 & -(\tau s + 1) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta Q_1(s) \\ \Delta Q_2(s) \end{bmatrix}}_{\text{Caudales}} \quad (6.1)$$

donde

$$\tau_p = \frac{A}{2\gamma}, \quad \tau = \frac{A}{\gamma}, \quad m = \frac{1}{2A} \quad (6.2)$$

con $A = 100$, y $\gamma = \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1,Q} - h_{2,Q}}}$. Note que γ depende del punto de equilibrio asociado a la linealización del sistema.

Si deseamos manipular el sistema usando un computador, debemos incorporar la relación entre los voltajes de actuación y medición, y los caudales y niveles reales. Para ello, recordemos que los sensores y los actuadores se pueden modelar con las siguientes relaciones

$$v_1(t) = a_1 h_1(t) + b_1 \quad v_2(t) = a_2 h_2(t) + b_2 \quad (6.3)$$

$$q_1(t) = c_1 u_1(t) + d_1 u_1(t)^2 \quad q_2(t) = c_2 u_2(t) + d_2 u_2(t)^2, \quad (6.4)$$

donde a_i , b_i , c_i y d_i son valores constantes. Al linealizar dichas relaciones, se obtiene:

$$\Delta V_1(s) = a_1 \Delta H_1(s) \quad \Delta V_2(s) = a_2 \Delta H_2(s) \quad (6.5)$$

$$\Delta Q_1(s) = \bar{c}_1 \Delta U_1(s) \quad \Delta Q_2(s) = \bar{c}_2 \Delta U_2(s) \quad (6.6)$$

donde $\bar{c}_i = c_i + 2d_i u_{i,Q}$, siendo $u_{i,Q}$ el voltaje de entrada en el punto de equilibrio, y tal que satisface $c_1 u_{1,Q} + d_1 u_{1,Q}^2 - q_{1,Q} = 0$.

Finalmente, la función de transferencia vista desde el punto de vista del computador, es decir, la transferencia que relaciona los voltajes que alimentan las bombas y los voltajes de los sensores, esta dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1(s) \\ \Delta V_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s(\tau_p s + 1)} \begin{bmatrix} k_1(\tau s + 1) & -\frac{a_1}{a_2} k_2 \\ \frac{a_2}{a_1} k_1 & -k_2(\tau s + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1(s) \\ \Delta U_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

donde $k_i = \frac{a_i \bar{c}_i}{2A}$, con $i = 1, 2$.

Esta es la función de transferencia (matricial) considerando los voltajes de actuadores y sensores como las entradas y salidas al sistema (que son las señales que el computador maneja).

6.2 ESTRATEGIA DE CONTROL PARA SISTEMA DE ESTANQUES

El objetivo de control en este sistema es mantener los niveles de agua de cada estanque en alturas deseadas. Estas alturas de referencia por supuesto deben ser admisibles. Para lograr lo anterior se debe tener en cuenta que el sistema de estanques acoplados es un sistema MIMO, es decir, de múltiples entradas y múltiples salidas, y hacer un diseño apropiado. Una de las principales dificultades asociada al control de este tipo de sistemas es que pueden existir interacciones entre todas las entradas y todas las salidas. Así, el control de una salida puede causar estragos en el control de otra salida.

Afortunadamente, en el caso particular del sistema de estanques acoplados presente en el laboratorio se puede adoptar una estrategia sencilla en la cual el diseño de control se reduce al diseño de dos sistemas SISO (de una entrada y una salida). Para ilustrar este método, note que la relación entre las variables de entrada y salida en (6.7) se puede escribir como

$$\Delta V_1(s) = G_1(s)\Delta U_1(s) + D_1(s) \quad (6.8)$$

$$\Delta V_2(s) = G_2(s)\Delta U_2(s) + D_2(s) \quad (6.9)$$

donde

$$G_1(s) = k_1 \frac{\tau s + 1}{s(\tau_p s + 1)} \quad G_2(s) = -k_2 \frac{\tau s + 1}{s(\tau_p s + 1)} \quad (6.10)$$

$$D_1(s) = -\frac{a_1}{a_2} k_2 \frac{1}{s(\tau_p s + 1)} \Delta U_2(s) \quad D_2(s) = \frac{a_2}{a_1} k_1 \frac{1}{s(\tau_p s + 1)} \Delta U_1(s) \quad (6.11)$$

La estrategia de control es la siguiente:

- Utilizando la bomba 1 (u_1) se controla el voltaje asociado a la altura del estanque 1 (v_1). Esto se hace controlando $G_1(s)$, que modela la relación entre dichas variables.
- Utilizando la bomba 2 (u_2) se controla el voltaje asociado a la altura del estanque 2 (v_2). Esto se hace controlando $G_2(s)$, que modela la relación entre dichas variables.
- Los efectos debido a $D_1(s)$ y $D_2(s)$ son considerados como perturbaciones, y deben ser rechazados con un diseño apropiado de u_1 y u_2 .

Esta estrategia de control se conoce como **control descentralizado**.

Así, para controlar simultáneamente el nivel de agua de los dos estanques podemos implementar el esquema de la Figura 6.2, en donde se ha incorporado un bloque PI como controlador. En este esquema de control las salidas del sistema que se realimentan son los voltajes medidos v_1 y v_2 (los voltajes asociados a los niveles) y las entradas al sistema corresponden a los voltajes u_1 y u_2 (los voltajes que alimentan las bombas). Si se desea que la altura de los dos estanques sigan alguna altura de referencia en particular, se debe utilizar la tabla obtenida en la experiencia 3 que relaciona v_1 , v_2 con h_1 y h_2 para obtener los voltajes de referencia correspondientes a dichas alturas. A su vez, para visualizar el nivel de agua desde Simulink usted debe incorporar también un conversor del voltaje medido. Es importante observar que lo que se controla es el voltaje asociado a los niveles de agua, y no el nivel de agua directamente. Si los sensores no están bien caracterizados, el controlador puede conseguir error de seguimiento cero y aún así usted puede observar una diferencia entre la altura deseada, versus la altura que usted mide visualmente. Esto no sería un problema del controlador, si no que de la caracterización del sensor.

Note que en el lazo de control para el estanque 2 el signo del error está invertido de modo que el diseño para los dos controladores sean similares. De hecho, si se aumenta el voltaje u_1 la salida v_1 crece. Sin embargo, si se aumenta el voltaje u_2 la salida v_2 disminuye.

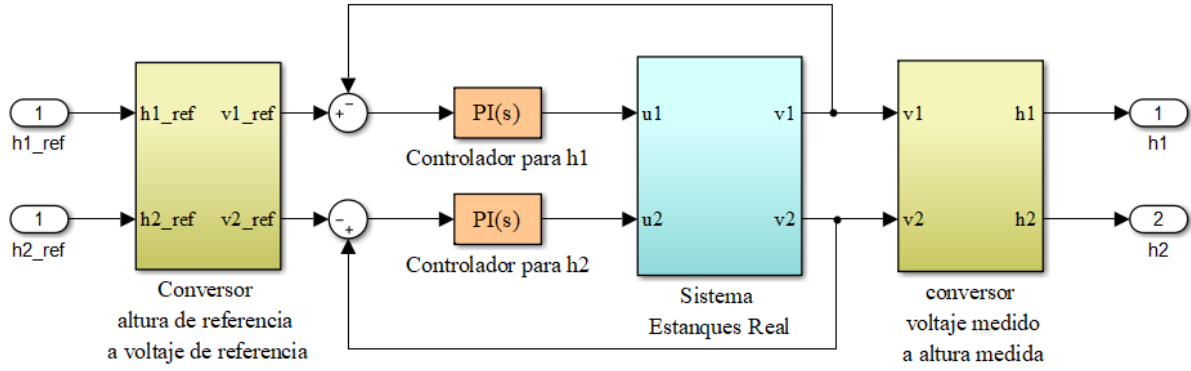


Figure 6.2: Diagrama de Control

Diseño de controlador PI

Como ya habrá notado, los sistemas G_i descritos en (6.10), que son los sistemas que deseamos controlar en esta estrategia de control descentralizada, tienen la misma forma, dada por (omitiremos los subíndices i por simplicidad)

$$G(s) = k \frac{(\tau s + 1)}{s(\tau_p s + 1)} \quad (6.12)$$

Para implementar el controlador descentralizado basta con diseñar un control apropiado para $G(s)$. Existen múltiples formas de sintonizar los parámetros del controlador para $G(s)$. Nosotros usaremos un controlador PI ($C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}$) y seguiremos el siguiente criterio:

Mantener el polo en la planta con constante de tiempo τ_p como un polo de la función de transferencia en lazo cerrado. Para ello, se debe cancelar el polo en la planta con constante de tiempo τ_p con un cero del controlador, con lo cual se obtiene la relación

$$K_P = \tau_p K_I.$$

Luego, la ecuación que define los polos de lazo cerrado viene dada por

$$1 + K_I \frac{k(\tau s + 1)}{s^2} = 0 \quad (6.13)$$

Escogeremos la ganancia K_I tal que los polos de lazo cerrado sean reales e iguales. Esta localización es para propósitos ilustrativos, y no necesariamente representa una elección óptima, pues eso dependerá de las especificaciones que usted quiera en su respuesta (tiempo de asentamiento, overshoot, etc.) El valor de K_I lo puede encontrar usando SISO tool, lugar geométrico de las raíces, o analíticamente ya que el polinomio característico que define los polos de lazo cerrado está dado por:

$$A_{cl}(s) = s(\tau_p s + 1)s + k(\tau s + 1)K_I \left(\frac{K_P}{K_I} s + 1 \right) \quad (6.14)$$

$$= s(\tau_p s + 1)s + k(\tau s + 1)K_I(\tau_p s + 1) \quad (6.15)$$

$$= (\tau_p s + 1)(s^2 + kK_I\tau s + kK_I) \quad (6.16)$$

y por lo tanto la condición de que los polos no cancelados sean iguales es equivalente a considerar que el discriminante del polinomio de segundo orden sea igual a cero, es decir:

$$k^2 K_I^2 \tau^2 - 4kK_I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_I = \frac{4}{k\tau^2} \quad (6.17)$$

7 TRABAJO PREVIO A LA SESIÓN

- Estudie la técnica del *lugar geométrico de las raíces* para el diseño de controladores y la implementación de un controlador en la herramienta SISO tools de Matlab, considerando el lugar geométrico de las raíces del lazo abierto.
- Revise y estudie el video sobre control on-off de los estanques acoplados. Prepare un breve reporte con lo concluido sobre el contenido del video.

8 TRABAJO DE LABORATORIO

En esta sección se describirán las actividades a realizar durante la sesión en Laboratorio, que consisten en la simulación de los tipos de controladores descritos anteriormente.

Actividad 1: Controlador PID con sistema de anti-enrollamiento.

En esta sección usted implementará un PID (ya diseñado) para una planta arbitraria y probará el esquema de anti-enrollamiento propuesto en la guía.

- Construya un controlador PID en SIMULINK. Utilice una máscara de modo de ingresar los parámetros K_P , K_I , K_D , τ , como se ilustra en la figura 8.1.

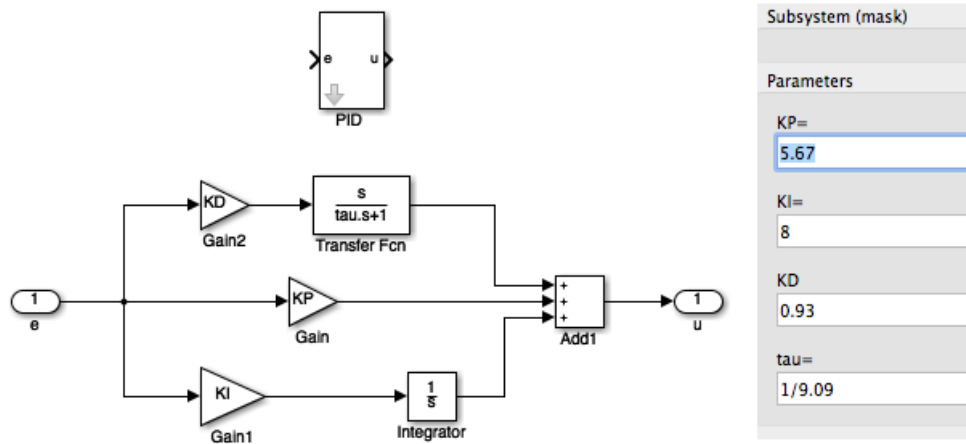


Figure 8.1: Controlador PID

- Simule un lazo cerrado con una planta dada por $G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$ y verifique que el controlador PID con los parámetros en (4.32)-(4.35) controla dicho sistema en condiciones ideales (sin saturaciones), tal como se aprecia en la figura 8.2. Simule el sistema usando una referencia escalón con un valor final de 0.8. Para realizar la simulación utilice el método de Euler con un paso de simulación de 10^{-4} y tiempo de simulación de 10 segundos.
- Repita la actividad del punto b) pero ahora considere un nivel de saturación para la actuación de ± 1 . Compare la salida del controlador previo a la saturación, con la actuación saturada.
- Construya un controlador PID con un sistema de anti-enrollamiento como se ilustra en la figura 8.3. Utilice una máscara de modo de ingresar los parámetros K_P , K_I , K_D , τ , U_{max} , U_{min} , donde U_{max} , U_{min} representan los valores máximos y mínimos de la actuación real a la planta.

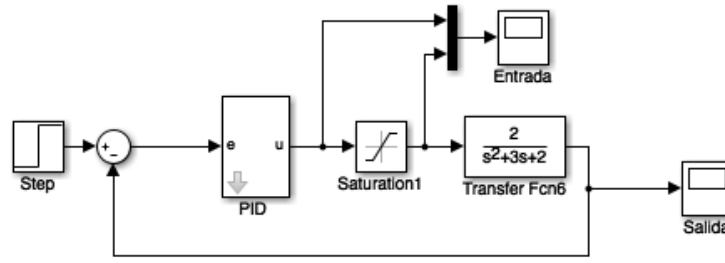


Figure 8.2: Lazo de control con un controlador PID

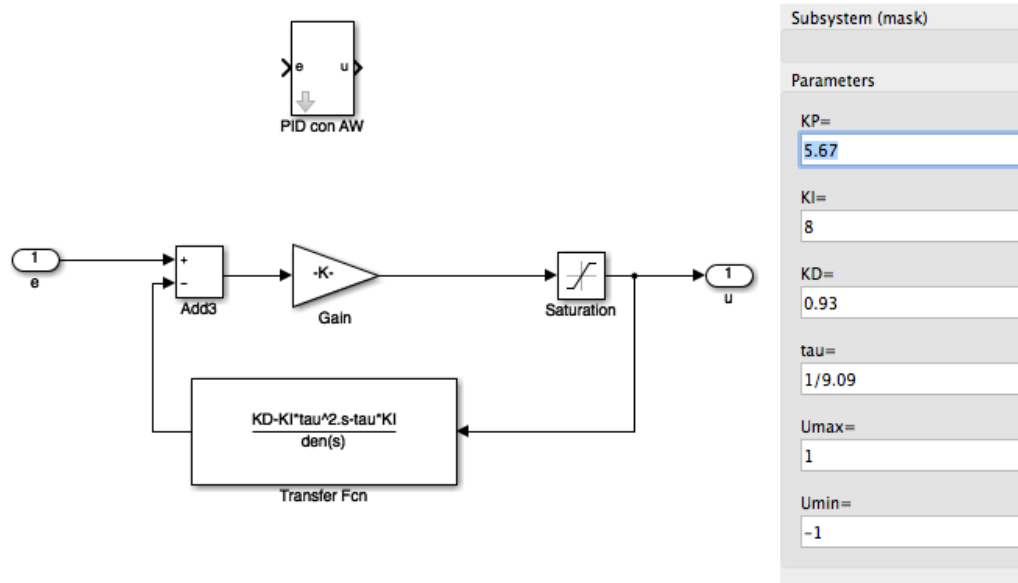


Figure 8.3: Controlador PID con mecanismo de anti-enrollamiento.

- e) Repita la actividad del punto c) pero ahora incluya el controlador con esquema anti-enrollamiento realizado en el punto anterior. Compare las señales de entrada y salida de la planta con las obtenidas por el controlador PID sin mecanismo de anti-enrollamiento de los puntos b) y c). Comente.

Actividad 2: Diseño e implementación de controladores PI para planta SISO del sistema de estanques.

Considere la siguiente planta SISO:

$$G_1(s) = \frac{k_1(\tau s + 1)}{s(\tau_p s + 1)} \quad (8.1)$$

donde $\tau = 20$, $\tau_p = 10$ y $k_1 = 1/8$. Diseñe un controlador PI ($C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$) para la planta $G_1(s)$ e verifique su funcionamiento. Para ello considere lo siguiente:

- Mantenga el polo de la planta que está en $-\frac{1}{\tau_p}$ como un polo de la función de transferencia en lazo cerrado.
- Determine K_I de modo que los polos de lazo cerrado sean reales e iguales.

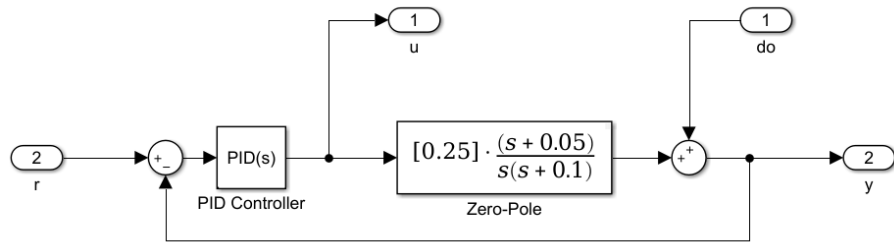


Figure 8.4: Lazo con controlador PI

- Ahora que conoce el controlador PI, verifique que funcione para un lazo de un grado de libertad sin saturaciones (ver Figura 8.4). Use una señal de referencia igual a $r(t) = 5\mu(t)$ y una perturbación tipo escalón en la salida de $d_o = -7\mu(t - 100)$. Configure Euler con un paso de simulación de $1e-4$, y use tiempo de simulación de 200. Comente las características de la respuesta (tiempo de asentamiento, sobre paso máximo, etc). ¿Es posible manipular los polos en lazo cerrado (variar K_I) para obtener una respuesta más rápida y con menos overshoot?
- Repita lo anterior pero ahora considerando una saturación en el actuador de ± 2 . Incluya un esquema de anti-enrollamiento para el controlador PI y simule nuevamente el experimento anterior. Comente las características de la respuesta con antienrollamiento (tiempo de asentamiento, sobre paso máximo, etc)
- Compare las características de la respuesta ideal (sin saturaciones), con las del caso con saturación y antienrollamiento.

Actividad 3: Implementación controlador descentralizado en el sistema MIMO.

- Implemente en Simulink el sistema linealizado de los estanques en (6.7). Considere los valores k_1 , τ y τ_p de la actividad anterior, y suponga además que $k_1 = k_2$ y que $a_1 = 2a_2$. Agregue dos perturbaciones como se muestra en la Figura 8.5

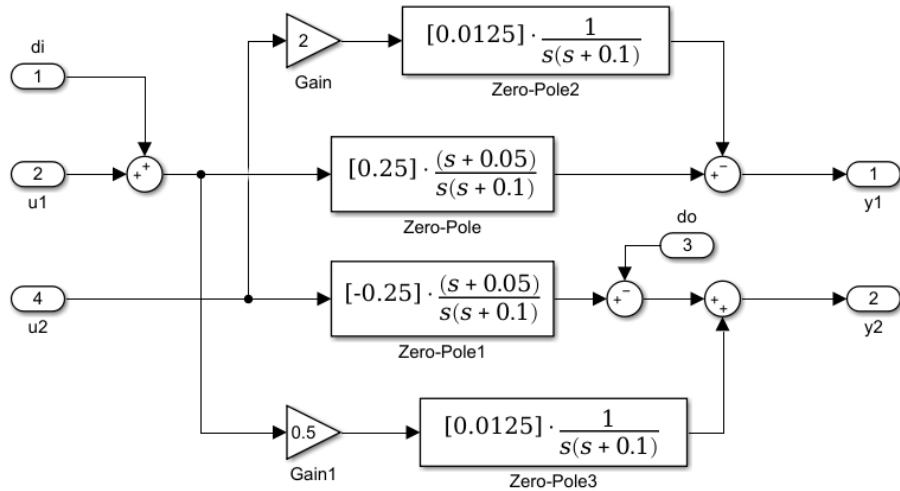


Figure 8.5: Modelo lineal sistema de estanques acoplados

- Implemente el esquema de control descentralizado para el sistema linealizado anterior, omitiendo los conversores de altura/voltaje y voltaje/altura (trabaje directamente con voltajes). Para ello use el

controlador PI diseñado en la actividad anterior (ver figura). Suponga el caso ideal en que no existe saturación y compruebe que la estrategia de control funciona siguiendo referencias tipo escalón y rechazando perturbaciones. Para ello considere el esquema de la figura 8.6 con $r_1(t) = 5\mu(t)$, $r_2(t) = 3\mu(t)$, $d_i(t) = 1.5\mu(t-150)$ y $d_o(t) = 2\mu(t-300)$. Grafique tanto las entradas, perturbaciones, señales de control y salidas. Use tiempo de simulación de 500 segundos y Euler con paso de $1e-3$ segundos.

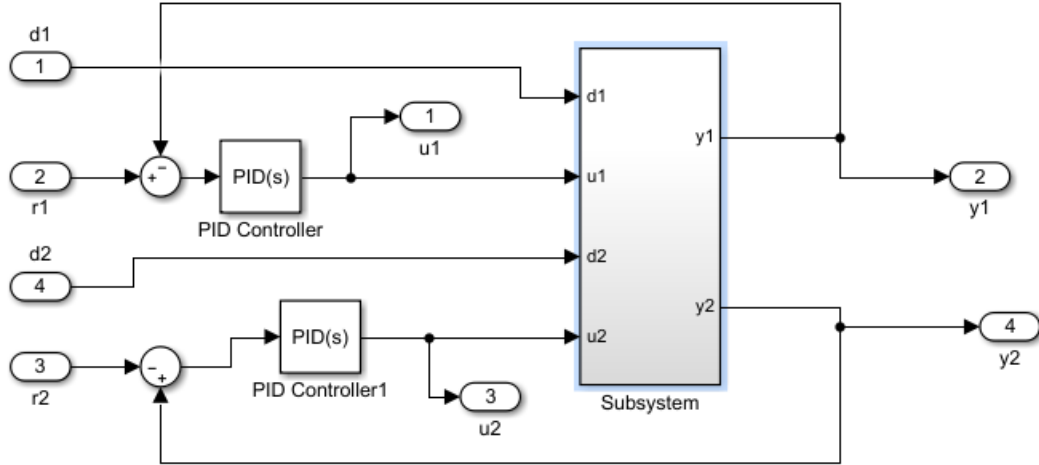


Figure 8.6: Control descentralizado sistema de estanques acoplados

- c) Repita lo anterior pero ahora considerando una saturación en cada actuador de ± 2 y usando el controlador con el esquema de antienrollamiento incorporado. Haga las mismas pruebas que en el caso anterior. Comente los resultados, y compárelos con los del punto anterior.

9 SESIÓN 2: DISEÑO DE CONTROLADOR PARA SISTEMA DE LEVITADOR MAGNÉTICO

9.1 RECAPITULACIÓN MODELO LEVITADOR MAGNÉTICO

El sistema de Levitador Magnético representado en la Figura 9.1 ya es conocido por usted (al menos por foto), y ya obtuvo un modelo lineal de éste en torno a un punto de operación específico, en donde la corriente del electro-imán es cero. En ese caso, se tiene que la función de transferencia $G(s)$ que relaciona la entrada $\Delta U(s)$ (la variación -respecto del equilibrio- del voltaje u que controla la corriente del electroimán) con la salida $\Delta V_x(s)$ (la variación -respecto del equilibrio- del voltaje v_x asociado a la posición del rotor), esta dada por

$$\Delta V_x(s) = G(s)\Delta U(s) \quad (9.1)$$

$$G(s) = \frac{K_p}{(s+a)(s+b)(s-b)} \quad (9.2)$$

donde

$$K_p = \frac{K_a K_m K_i}{mL} = 57500, \quad a = \frac{R}{L} = 100, \quad b = \sqrt{\frac{K_x}{m}} = 25. \quad (9.3)$$



Figure 9.1: Sistema Levitador Magnético

9.2 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

El levitador incluye un controlador PID interno implementado en forma análoga cuyos parámetros pueden ser manipulados de forma manual. También tiene el modo de operación externo en donde se puede manipular el voltaje de control externamente.

Nosotros diseñaremos 2 controladores para manipular est sistema:

- Controlador 1: Controlador PID
- Controlador 2: Controlador más general (no necesariamente PID).

Ambos controladores serán sintonizados usando asignación de polos y se usará el esquema de antienrolamiento para lidiar con el efecto de la saturación.

Es importante observar que tanto el método de asignación de polos como el esquema de antienrolamiento son herramientas bastante generales y por lo tanto **no** estan restringidas a la sintonización de controladores PID solamente.

Diseño del controlador 1 por asignación de polos.

Para diseñar este controlador, haremos asignación de polos considerando el modelo ideal del controlador PID y luego agregaremos un polo rápido para la implementación.

La versión simplificada del controlador PID (sin polo rápido en el término derivativo) está dada por:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (9.4)$$

Este controlador se diseñará de tal forma de que el polinomio característico de lazo cerrado este dado por:

$$A_{cl}(s) = (s + a_2)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha) \quad (9.5)$$

donde $\xi = 0.7$, $\omega_n = 20$ y α es un valor constante a determinar (no es un parámetro de diseño en este caso). Al plantear la ecuación diofantina, se calculan los valores específicos de K_P , K_I y K_D .

Al incluir el polo rápido, el controlador toma la forma

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1}. \quad (9.6)$$

Supondremos que $\tau = 0.01K_D$.

A este controlador le llamaremos **controlador 1**. Usted se podría preguntar si es posible incluir el valor de τ en el diseño junto con las ganancias K_P , K_I y K_D , y la respuesta es sí, se puede, aunque en ese caso el controlador resultante no tendría en el diseño original la estructura de un controlador PID. El método de asignación de polos no es exclusivo de los controlador PID.

A continuación presentaremos un segundo controlador (no PID) diseñado usando el método de asignación de polos, para ser implementado en el laboratorio. A dicho controlador le llamaremos **controlador 2**.

Diseño del controlador 2 por asignación de polos.

Para el diseño, se propone que este segundo controlador también posea acción integral (polo en $s = 0$) y además cancele los polos de la planta ubicados en $s = -100$ y $s = -25$ con ceros del controlador, para que de esta forma dichos polos sean raíces del polinomio característico del lazo cerrado.

El requerimiento anterior es equivalente a decir que $C(s)$ tiene la siguiente estructura:

$$G(s) = \frac{57500}{(s + 100)(s - 25)(s + 25)} \quad (9.7)$$

$$C(s) = \frac{(s + 25)(s + 100)\bar{P}(s)}{s\bar{L}(s)} \quad (9.8)$$

Al utilizar el método de asignación de polos incluyendo acción integral, el polinomio mónico de lazo cerrado $A_{cl}(s)$ se escoge de orden $n_{cl} = 2n$, donde n es el orden de la planta, y el controlador bi-propio $C(s)$ se escoge de orden $n_p = n_l = n$, donde n_p y n_l son el orden de los polinomios $P(s)$ y $L(s)$ respectivamente. Para el caso de interés se tiene que $n = 3$ y entonces, $n_{cl} = 6$, $n_l = n_p = 3$.

Considerando la estructura particular de $C(s)$ en (9.8) se tiene que:

$$A_{cl}(s) = (s + 100)(s - 25)(s + 25)L(s) + 57500P(s) \quad (9.9)$$

$$= (s + 100)(s - 25)(s + 25)s\bar{L}(s) + 57500(s + 25)(s + 100)\bar{P}(s) \quad (9.10)$$

$$= (s + 25)(s + 100) \{ (s - 25)s(s^2 + \bar{l}_1 s + \bar{l}_0) + 57500(\bar{p}_1 s + \bar{p}_0) \} \quad (9.11)$$

Se decide escoger el polinomio característico $A_{cl}(s)$ de la siguiente forma:

$$A_{cl}(s) = (s + 25)(s + 100)^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha) \quad (9.12)$$

Una vez escogidos los parámetros ω_n , α y ξ , se igualan los polinomios y se resuelve el correspondiente sistema de ecuaciones para determinar los valores del controlador. Note que en este caso (con cancelación de polos y ceros) se tiene que la ecuación polinomial (9.12) puede ser simplificada a:

$$(s + 100)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha) = (s - 25)s(s^2 + l_1 s + l_0) + 57500(p_1 s + p_0) \quad (9.13)$$

9.3 TRABAJO PREVIO

Antes de la experiencia en laboratorio usted debe desarrollar el siguiente trabajo.

- Demuestre (por ejemplo utilizando el método de Routh) que el modelo del sistema levitador magnético **no** puede ser estabilizado utilizando un controlador **P** o un controlador **PI** (es decir, se requiere del término derivativo).
- Revisar el código **asig_polos.m** y funciones asociadas que se le proporcionará.

10 TRABAJO DE LABORATORIO

Considere el modelo del sistema de levitador magnético dado por

$$G(s) = \frac{b}{(s + a_1)(s - a_2)(s + a_2)} \quad (10.1)$$

donde $b = 57500$, $a_1 = 100$, $a_2 = 25$.

Actividad 1: Implementación del controlador 1 para levitador magnético.

a) Diseñe un controlador PID para la planta $G(s)$. Para ello siga el siguiente procedimiento:

i) Considere la versión simplificada del controlador PID (sin polo rápido en el término derivativo).

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (10.2)$$

ii) Conserve el polo en $s = -a_2$ como un polo de la transferencia en lazo cerrado. Para ello cancele el polo de la planta en $s = -a_2$ a través del controlador de la forma

$$C(s) = \frac{(s + a_2)(\bar{n}_1 s + \bar{n}_0)}{s} \quad (10.3)$$

iii) Para determinar \bar{n}_1 y \bar{n}_0 , utilice el método de asignación de polos de modo de obtener un polinomio característico de lazo cerrado de la forma:

$$A_{cl}(s) = (s + a_2)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha) \quad (10.4)$$

donde $\xi = 0.7$, $\omega_n = 20$ y α es un valor constante a determinar.

iv) Obtenga los valores de K_P , K_I y K_D .

v) Considere $\tau = 0.01K_D$. Determine el controlador 1 incluido el polo rápido, es decir, obtenga

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1}. \quad (10.5)$$

b) Implemente el lazo de control de un grado de libertad de la Figura 10.1 para $G(s)$ y verifique el desempeño del controlador 1. Considere una señal de referencia igual a $r(t) = -1\mu(t)$ y una perturbación $d_o(t) = 1\mu(t - 1)$. Implemente el controlador suponiendo que no existe saturación (caso ideal) y suponiendo que sí existe saturación y que se usa un esquema de antienrollamiento. Para este último caso use el esquema de anti-enrollamiento de la actividad 1 de la sesión anterior para 3 distintos valores de saturación de los actuadores (por ejemplo ± 3.5). Comente sus resultados.

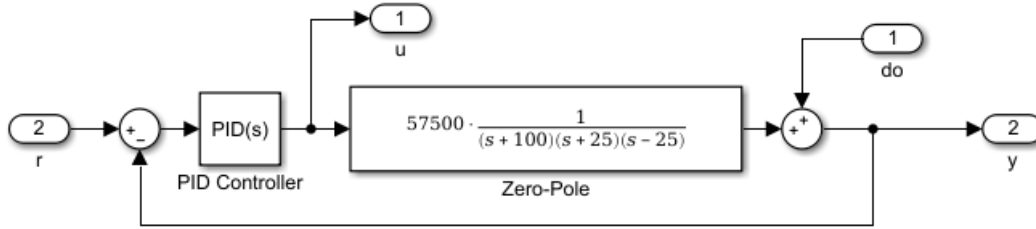


Figure 10.1: Lazo levitador magnético

Actividad 2: Efecto de la elección del polo rápido del derivador.

- Considere el controlador $C(s)$ que incluye el polo rápido para el lazo de la actividad anterior, sin saturación. Determine los polos de lazo cerrado considerando los siguientes valores de τ :
 - $\tau = 0.1$
 - $\tau = 0.01$
 - $\tau = 0.000001$

Esto lo puede hacer de forma numérica con Matlab, por ejemplo, definiendo C y G con el comando `tf` o `zpk`, y luego escribiendo `pole(minreal(ss(C*G/(1+C*G))))`. Compare dichos polos con los polos del diseño original utilizando el modelo de controlador simplificado. Comente el efecto del polo rápido de la parte derivativa en el diseño original de la asignación de polos.

- Implemente en Simulink el lazo de control de un grado de libertad del punto b) de la actividad anterior, considerando sólo el caso ideal (sin saturación). Use el controlador en (10.5) pero usando los 3 valores de τ del punto anterior. Compare la respuesta del sistema en cada caso y comente. Use tiempo de simulación de 2 segundos y método de Euler con paso de $1e-3$. Si en algún caso en que la respuesta debería converger, esto no sucede o hay un error numérico diagnosticado por Matlab, disminuya el paso del método de integración a $1e-5$ o menor. ¿Por qué cree usted que puede pasar esto?

Actividad 3: Implementación del controlador 2 para levitador magnético.

- Determine el Controlador 2 para los siguientes valores de la asignación en (9.13) $\omega_n = 70$, $\xi = 0.7$ y $\alpha = 60$. Para facilitar la obtención de los parámetros del controlador, usted dispone en sitio Aula de los códigos `asig_polos.m`, `paq.m` y `el_pcero.m`. Revisar el código `asig_polos.m` es parte del trabajo previo.
- Repita la actividad 1.b) pero ahora considerando el controlador 2 en vez del 1. Use los valores que entrega los códigos `asig_polos.m`, `paq.m` y `el_pcero.m`. para implementar el esquema de antienrollamiento en este caso. Comente sus resultados.
- Analice y compare el desempeño del controlador 1 y del controlador 2 cuando están saturados y cuando no están saturados.

APÉNDICE: CONSIDERACIONES PRÁCTICAS DE CONTROLADORES PID

En la implementación via computador de un controlador PID, el término que incluye la derivada del error se debe aproximar. En las experiencias anteriores, se vio que para implementar sistemas dinámicos por computador es necesario utilizar métodos numéricos como el metodo de Euler hacia adelante. Para sistemas lineales se transforma la variable de Laplace s al dominio discreto usando $s \rightarrow \frac{z-1}{\Delta}$ dónde Δ es el intervalo de tiempo para simular el sistema dinámico. Sin embargo, para el caso de la derivada ($K_D \dot{e}(t)$), el sistema correspondiente resulta ser no causal. Para ilustrar esto, considere $K_P = K_I = 0$, entonces se tiene que

$$u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow u(k\Delta) = K_D \frac{e(k\Delta + \Delta) - e(k\Delta)}{\Delta}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.6)$$

Esto no se puede implementar debido a que la salida del controlador, $u(k\Delta)$, depende del futuro de la entrada, $e(k\Delta + \Delta)$. Esto es consecuente con lo expuesto anteriormente en la guía para tiempo continuo.

Una alternativa para resolver este problema es la incorporación del polo rápido descrita anteriormente en la guía. Otra alternativa para implementar la derivada del error, es utilizar una aproximación de Euler hacia atrás ($s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{\Delta}$), es decir:

$$u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow u(k\Delta) = K_D \frac{e(k\Delta) - e(k\Delta - \Delta)}{\Delta}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.7)$$

En la industria, el controlador PID es extremadamente común. Los dispositivos más comunes donde se implementan los controladores PID son los llamados Controladores Lógicos Programables, PLC (de la sigla en inglés Programmable Logic Controller) , que vienen con controladores PID incorporados de fábrica. De modo de utilizar correctamente estos componentes es necesario verificar la ecuación que define al controlador PID para el sistema de control que se está usando. Ilustraremos esto con el PLC Allen-Bradley.

PLC ALLEN-BRADLEY (PLC-5): Los PLC de la marca Allen-Bradley (PLC-5) tienen 6 tipos de controladores PID. Aquí mostramos tres de ellos (los otros son similares):

- **usando derivada del error:** $u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\} + B$
- **usando derivada de la salida:** $u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right\} + B$
- **derivada de la salida, el negativo del error:** $u(t) = K_P \left\{ \bar{e}(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \bar{e}(\tau) d\tau + T_d \frac{d\bar{e}(t)}{dt} \right\} + B$,
donde $\bar{e}(t) = y(t) - r(t)$

B es un valor constante que refleja que el controlador real se aplica al sistema real alrededor de un punto de operación.

Los PLC funcionan en forma cíclica, ejecutando una serie de líneas de código en cada ciclo. Si se considera que el intervalo de tiempo del ciclo del PLC es constante y dado por Δ . Se tiene que la derivada e integral del error son calculadas de la siguiente forma:

- **Derivada:** Si la derivada error (o la salida) se denota con la variable $D(k\Delta)$, se tiene que su aproximación utilizando Euler en reversa y añadiendo un filtro está dado por:

$$D(k\Delta) = (1 - \alpha) \frac{e(k\Delta) - e(k\Delta - \Delta)}{\Delta} + \alpha D(k\Delta - \Delta), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.8)$$

donde α es una constante. Utilizando transformada Zeta, se tiene que la transferencia que se utiliza para aproximar la derivada está dada por:

$$H_D(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{1}{1 + \frac{16\Delta}{K_P T_d}} \quad (10.9)$$

la cual es realizable y además filtra el ruido de medición.

- **Integral:** Si la integral del error se denota por $I(k\Delta)$, en estos equipos se aproxima por:

$$I(k\Delta) = I(k\Delta - \Delta) + \frac{\Delta}{T_i} e(k\Delta), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.10)$$

utilizando transformada Zeta, se tiene que la función de transferencia que se utiliza para aproximar la integral del error está dada por:

$$H_I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{\Delta}{T_i} \quad (10.11)$$