Diseño de controladores básicos
Clase 03

Profesor
Juan C. Agüero

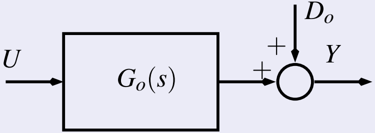
Departamento de Ingeniería Electrónica
UTFSM, Chile

Valparaíso, 07 de Julio de 2021

Outline

Outline

Planta



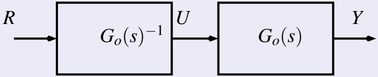
Objetivo: Y debe ser cercano (igual) a R.

Ejemplo:

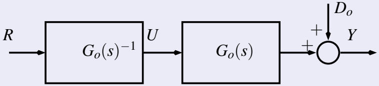
Si queremos que la altura de agua en un estanque sea igual a 10 [cm], entonces la referencia R es 10 [cm], y la medición de la altura real es la salida Y. La entrada U (manipulable) puede ser el voltaje que se aplica a la bomba que alimenta con agua el estanque, y la perturbación esta dada al agregar agua directamente al estanque.

Soluciones de lazo abierto

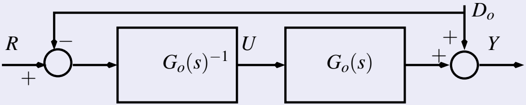
Sin perturbaciones



Con perturbación de salida no medible



Con perturbación de salida medible

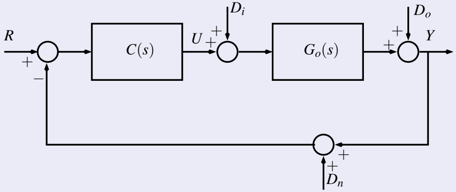


Problemas

- Incertidumbre.
- Perturbaciones y ruidos de medición.
- Planta podría ser no invertible ($G(s) = \frac{1}{s+1}$).
- No-linealidades.

Lazo cerrado con un grado de libertad

Lazo nominal:



$$
\begin{aligned}
Y &= T_o(R - D_n) + S_{io}D_i + S_oD_o \\
U &= S_{uo}(R - D_n - D_o) - T_oD_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_o &= \frac{1}{1+G_oC} \\
T_o &= \frac{G_oC}{1+G_oC} \\
S_{io} &= \frac{G_o}{1+G_oC} \\
S_{uo} &= \frac{C}{1+G_oC}
\end{aligned}
$$

Estabilidad Interna

Definición

El lazo nominal es internamente estable si todas las transferencias S_o, T_o, S_{io}, S_{uo} son estables.

Sea $C(s) = \frac{P(s)}{L(s)}$ y $G_o(s) = \frac{B_o(s)}{A_o(s)}$, entonces

$$T_o = \frac{B_oP}{A_oL + B_oP} \qquad S_o = \frac{A_oL}{A_oL + B_oP}$$
$$S_{io} = \frac{B_oL}{A_oL + B_oP} \qquad S_{uo} = \frac{A_oP}{A_oL + B_oP}$$

Teorema

El lazo nominal es internamente estable ssi las raíces de $A_{cl} = A_oL + B_oP$ son estables (semiplano izquierdo).

Requerimientos para el Lazo cerrado

$$Y = T_o(R - D_n) + S_{io}D_i + S_oD_o$$
$$U = S_{uo}(R - D_n - D_o) - T_oD_i$$

1. $T_o(j\omega) \approx 1$ donde $R(j\omega)$ es importante.
2. $T_o(j\omega) \approx 0$ donde $D_n(j\omega)$ es importante.
3. $S_o(j\omega) \approx 0$ donde $D_o(j\omega)$ es importante.
4. $S_{io}(j\omega) \approx 0$ donde $D_i(j\omega)$ es importante.

$$S_o + T_o = 1$$
$$S_{io} = G_oS_o$$
$$S_{uo} = CS_o = \frac{T_o}{G_o}$$

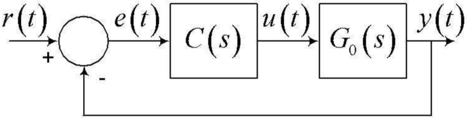
Típicamente:

- Referencia $\leftrightarrow$ bajas freqs.
- Ruido de medición $\leftrightarrow$ altas freqs.
- Perturbaciones $\leftrightarrow$ bajas freqs.

- (1), (3), y (4) son, en general, compatibles (pero no equivalentes).
- (1) y (2) son, en general, no compatibles.
- $BW\{T\}$ no debe ser muy grande con respecto al $BW\{G_0\}$.

Relación temporal entrada-salida del controlador PID:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \\
&= K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}
\end{aligned}
$$



Transferencia de controlador PID

Relación entrada-salida del controlador PID en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} C(s) &= K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \\ &= K_P \left\{ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d s \right\} \end{aligned}$$

Note que el término derivativo no es realizable y en consecuencia no se puede implementar. En la práctica se agrega un polo rápido al término derivativo para que sea realizable.

$$\begin{aligned} C(s) &= K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1} \\ &= K_P \left\{ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1}{s} + T_d \frac{s}{\tau s + 1} \right\} \end{aligned}$$

Componentes de un controlador PID

Proporcional:

La transferencia entre la señal de referencia ($r(t)$) y la señal de salida ($y(t)$) está dada por:

$$T(s) = \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)}$$

$$T(0) = \frac{K_P G(0)}{1 + K_P G(0)}$$

$$\lim_{K_P \to \infty} T(0) = 1$$

Con una ganancia proporcional alta se puede invertir la planta. Sin embargo, esto puede ocacionar saturación de actuadores.

Componentes de un controlador PID

Integral:

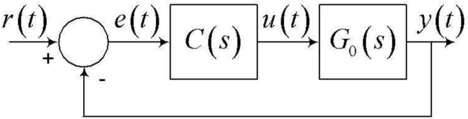
Si el error fuese constante (diferente de cero), entonces la señal de actuación esta dada por:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} e_0 t$$

El término integral no permite un error en estado estacionario.

Análisis en el dominio de la frecuencia:

Evaluando cuando $s \to 0$ (téorema del valor final!) se tiene que la señal $e(t)$ tiene que ser cero para que $u(t)$ sea finita.



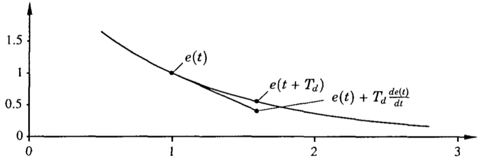
Derivativa:

Consideremos un controlador PD

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}$$

Realizando una aproximación de primer orden (utilizando una serie de Taylor de $e(t+T_d)$ alrededor de t), se tiene que:

$$e(t+T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$



La actuación el controlador PD es proporcional al valor futuro del error.

- Existen distintas formas de escribir el controlador PID.
- Conviene verificar la que se usa para un determinado sistema.

- **usando derivada del error:**
  $u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\} + B$
- **usando derivada de la salida:**
  $u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right\} + B$
- **derivada de la salida, el negativo del error:**
  $u(t) = K_P \left\{ \bar{e}(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \bar{e}(\tau) d\tau + T_d \frac{dy(t)}{dt} \right\} + B$, donde $\bar{e}(t) = y(t) - r(t)$

B es un valor constante que refleja que el controlador real se aplica al sistema real alrededor de un punto de operación.

Sintonía empírica de un controlador PID

	tiempo de subida	**overshoot**	**tiempo de asentamiento**	**error de estado estacionario**
K_P	decrece	crece	cambio pequeño	decrece
K_I	decrece	crece	crece	elimina
K_D	cambio pequeño	decrece	decrece	no cambia

Table 3.1: Reglas empíricas cuando se incrementan los parámetros del controlador PID

Outline

Teorema:

Considere un lazo cerrado de un grado de libertad con controlador y planta (nominal) dados por:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} \qquad B(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0$$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$P(s) = p_{n_p}s^{n_p} + p_{n_p-1}s^{n_p-1} + \ldots + p_0$$

$$L(s) = s^{n_l} + l_{n_l-1}s^{n_l-1} + \ldots + l_0$$

Suponga que $B(s)$ and $A(s)$ son coprimos (sin factores comunes). Sea $A_{cl}(s) = s^{n_{cl}} + c_{n_{cl}-1}s^{n_{cl}-1} + \ldots + c_0$ un polinomio arbitrario de grado $n_{cl} = 2n-1$. Entonces, existen polinomios $P(s)$ y $L(s)$, con grados $n_p = n_l = n-1$ tales que

$$A(s)L(s) + B(s)P(s) = A_{cl}(s)$$

La idea básica es que el número de incognitas sea igual al número de ecuaciones. Se considera que se prefieren controladores bi-propios ($n_p = n_l$) y que el grado de $A_{cl}(s)$ es $n + n_l$.

Incluyendo acción integral:

$$n_p = n_l = n \text{ y } n_{cl} = 2n$$

En general, vamos a considerar acción integral, aún si existe un integrador en la planta. Esto es para cancelar el efecto de la perturbación de entrada.

Método de asignación de polos

Planta:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Controlador:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)}$$

Dependiendo del contenido en frecuencia de las señales de referencia, perturbaciones y ruido de medición, y del ancho de banda del sistema de lazo abierto, se escoge el ancho de banda de:

$$T(s) = \frac{B(s)P(s)}{A(s)L(s)+B(s)P(s)}$$

Note que con la realimentación sólo modificamos los polos de lazo abierto (no los ceros). El ancho de banda de $T(s)$ es manipulado con las raíces de $A_{cl}(s)$.

Ecuación Diofantina

Los polos de lazo cerrado quedan determinados por las raíces del siguiente polinomio:

$$A_{cl}(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s)$$

Procedimiento:

- Determinar el ancho de banda de $T(s)$ de modo de tener un lazo de control que siga la referencia, y rechace perturbaciones y ruido de medición y que no sea muy grande con respecto al ancho de banda de lazo abierto.
- Elegir los polos de lazo cerrado ($A_{cl}(s)$). Si se desea incluir acción integral considere el orden de $A_{cl}(s)$ como $2n$.
- Resolver la ecuación diofantina:

$$A_{cl}(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s)$$

para encontrar los polinomios $P(s)$ y $L(s)$ de orden n (pero con $l_0 = 0$).

Asignación de polos para PID: Equivalencia entre controladores

Existe una relación biyectiva entre los parámetros del controlador PID de la forma:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1}, \quad N = \frac{1}{\tau}$$

y el controlador de la forma (note la aproximación del término derivativo con un sistema realizable):

$$C(s) = \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{s(s+d)}$$

$$K_p = \frac{n_1 d - n_0}{d^2}$$

$$K_I = \frac{n_0}{d}$$

$$K_D = \frac{n_2 d - n_1 d + n_0}{d}$$

$$N = d$$

$$n_2 = K_P + K_D N$$

$$n_1 = K_P N + K_I$$

$$n_0 = K_I N$$

$$d = N$$

Asignación de polos para PID: Equivalencia entre controladores

Similarmente los controladores PI:

$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

son equivalentes al controlador

$$C(s) = \frac{n_1 s + n_0}{s}$$

con $n_1 = K_P$ y $n_0 = K_I$.

Note que para una planta de primer orden ($n = 1$), un controlador PI es suficiente para ubicar los 2 polos de lazo cerrado donde se desee. Similarmente, para una planta de segundo orden ($n = 2$), un controlador PID es suficiente para ubicar los polos de lazo cerrado donde se desee.

Ejemplo

Planta:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl}(s) = (s^2+4s+9)(s+4)^2$$

La correspondiente ecuación Diofantina está dada por:

$$(s^2+4s+9)(s+4)^2 = (s+1)(s+2)s(s+d) + 2(n_2 s^2 + n_1 s + n_0)$$

$$\begin{aligned} d &= 9 \\ n_0 &= 72 \\ n_1 &= 59 \\ n_2 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_P &= 5.67 \\ K_I &= 8 \\ K_D &= 0.93 \\ N &= 9.09 \end{aligned}$$

Outline

Considere una planta $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ controlada por un controlador proporcional $C(s) = K_P$. Las raíces del polinomio característico están dadas por:

$$A(s) + K_P B(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K_P G(s) = 0$$

Si resolvemos esta ecuación polinomial para distintos valores de K_P y graficamos los correspondientes polos de lazo cerrado obtenemos el lugar geométrico de raíces para $G(s)$. Este gráfico (para valores positivos de K_P) se puede realizar con el comando rlocus en Matlab ingresando la transferencia $G(s)$.

Ejemplo: Controlador proporcional

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow A_{cl}(s) = (s+1) + K_P = 0 \Leftrightarrow 1 + K_P \frac{1}{s+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow s = -1 - K_P$$

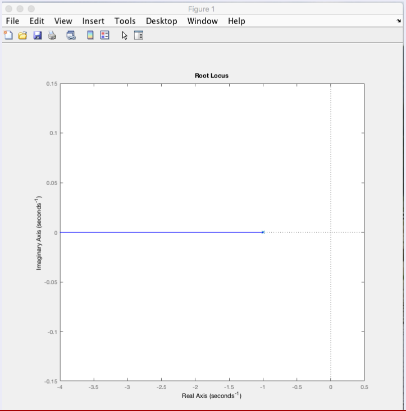
```
>> G=tf(1,[1 1])

G =

    1
  -----
  s + 1

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(G)
```



Ejemplo: Controlador PI

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, C(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} \Rightarrow A_{cl}(s) = (s+1)s + K_P s + K_I = 0$$

$K_P = 1$

$$\begin{aligned}(s+1)s + K_P s + K_I = 0 &\Leftrightarrow 1 + K_I \frac{1}{s(s+1) + K_P s} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + K_I \frac{1}{s^2 + 2s} = 0\end{aligned}$$

$K_P = 1$

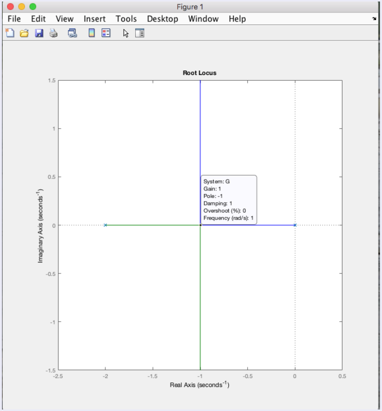
```
>> G=tf(1,[1 2 0])

G =

      1
  ---------
  s^2 + 2 s

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(G)
>>
```



Con $K_I = 1$ se tiene que las raíces de $A_{cl} = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$ son dos en $s = -1$.

Lugar geométrico de raíces

$K_I = 1$

$$(s+1)s + K_P s + K_I = 0 \Leftrightarrow 1 + K_P \frac{s}{s(s+1)+K_I} = 0 \Leftrightarrow 1 + K_P \frac{s}{s^2+s+1} = 0$$

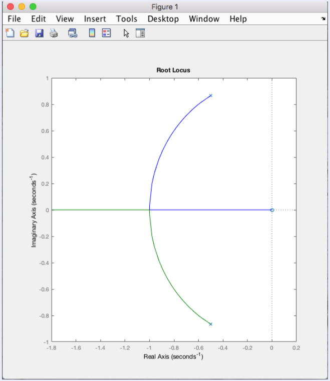
```
>> G=tf([1 0],[1 1 1])

G =

       s
  -----------
  s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(G)
>>
```



Outline

Antienrollamiento

- La salida de los sistemas dinámicos depende de los valores pasados de sus entradas y salidas.

- La mayoría de los actuadores (entradas reales a la planta) tienen limitaciones del tipo saturación (válvulas no se pueden abrir más de 100%).

- El controlador PID tradicional no tiene la capacidad de conocer el valor real de la actuación entrando a la planta. (Podría entregar una actuación deseada mayor a 100%).

- Si la actuación satura, entonces el controlador puede seguir subiendo el valor deseado de actuación (y puede llegar a ser muy superior a la real).

Antienrollamiento

- Si es necesario empezar a disminuir el valor de la actuación, va a tomar algún tiempo debido a la dinámica del controlador. Es decir el controlador no responde inmediatamente.

Antienrollamiento

- Este fenómeno recibe el nombre de enrollamiento.

Antienrollamiento

- La salida de los sistemas dinámicos depende de los valores pasados de sus entradas y salidas.
- La mayoría de los actuadores (entradas reales a la planta) tienen limitaciones del tipo saturación (válvulas no se pueden abrir más de 100%).
- El controlador PID tradicional no tiene la capacidad de conocer el valor real de la actuación entrando a la planta. (Podría entregar una actuación deseada mayor a 100%).
- Si la actuación satura, entonces el controlador puede seguir subiendo el valor deseado de actuación (y puede llegar a ser muy superior a la real).
- Si es necesario empezar a disminuir el valor de la actuación, va a tomar algún tiempo debido a la dinámica del controlador. Es decir el controlador no responde inmediatamente.
- Este fenómeno recibe el nombre de enrollamiento.

- Existen distintas formas de evitar el enrollamiento.
- Todas son basadas en que el controlador sea capaz de conocer la actuación real a la planta.

Considere que:

- Se desea implementar un controlador $C(s)$ que es bi-propio y de fase mínima ($T = \frac{BP}{AL+BP}$).
- Existen saturaciones de los niveles de actuación conocidas.

Sea $C(s) = c_\infty + F(s)$ donde $F(s)$ es estrictamente propio

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= C(p)e(t) = c_\infty e(t) + F(p)e(t)\\ &= c_\infty e(t) + \underbrace{\frac{F(p)}{C(p)}\hat{u}(t)}_{\text{Depende solo de valores pasados de } \hat{u}(t)}\end{aligned}$$

Antienrollamiento

$$\hat{u}(t) = c_\infty e(t) + \underbrace{\frac{F(p)}{C(p)}\hat{u}(t)}_{\text{Depende solo de valores pasados de } \hat{u}(t)}$$

$$= c_\infty e(t) + \underbrace{\frac{F(p)}{C(p)}u(t)}_{\text{Utilizando la entrada que realmente entra en la planta}}$$

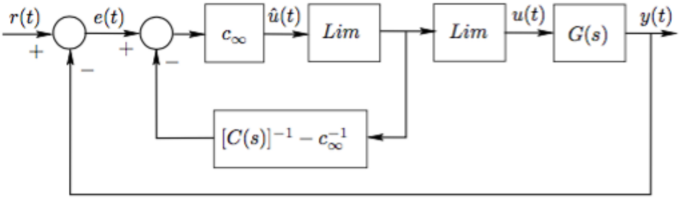
$$u(t) = \underbrace{\mathrm{sat}\left\{\hat{u}(t)\right\}}_{\text{Imita la saturación real}}$$

Considerando que $\frac{F(s)}{C(s)} = \frac{C(s)-c_\infty}{C(s)} = c_\infty \left\{ \frac{1}{c_\infty} - \frac{1}{C(s)} \right\}$ entonces $\hat{u}(t)$ se puede reescribir como:

$$\hat{u}(t) = c_\infty \left\{ e(t) - \left[\frac{1}{C(s)} - \frac{1}{c_\infty} \right] u(t) \right\}, \quad u(t) = \mathrm{sat}\left\{\hat{u}(t)\right\}$$

Antienrollamiento

1. Calcule $c_\infty = \lim_{s\to\infty} C(s)$.
2. Determine la transferencia dada por $C(s)^{-1} - c_\infty^{-1}$.



- El esquema anterior implementa exactamente $C(s)$ cuando no hay saturaciones (calcule la transferencia de lazo cerrado).
- Toda la parte dinámica del controlador es alimentada por la entrada real a la planta.

Antienrollamiento

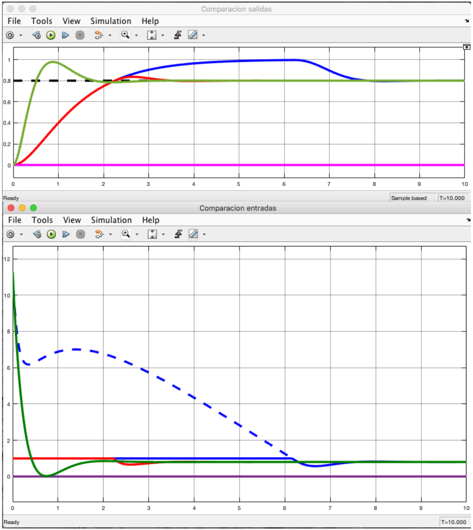
$$C(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1}$$

$$c_\infty = K_P + \frac{K_D}{\tau}$$

$$C(s)^{-1} - c_\infty^{-1} = \frac{(K_D - K_I \tau^2)s - \tau K_I}{(K_D + K_P \tau)^2 s^2 + (K_D + K_P \tau)(K_P + K_I \tau)s + (K_D + K_P \tau)K_I}$$

Note que para implementar el antienrrollamiento para el controlador PI se utiliza $K_D = 0$ y cualquier valor de τ.

Antienrollamiento



Outline

Outline

Trabajo a desarrollar Sesión 1: Actividad 1

Actividad 1

Implemente un controlador PID con y sin mecanismo de antienrollamiento en SIMULINK.

- Considere $G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$.
- Simule el sistema usando una referencia del tipo escalón con un valor final de 0.8.
- Considere un nivel de saturación para la actuación de ± 1.
- Simule lazos de control PID con y sin mecanismos de antienrollamiento.

Actividad 2: Lugar geométrico de raíces

Para la planta $G = \frac{b_1(\tau s+1)}{s(\tau_p s+1)}$ consideramos un controlador PI que cancela el polo en $s = -\frac{1}{\tau_p}$. La transferencia del controlador esta entonces dada por:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_I \frac{\frac{K_P}{K_I} s + 1}{s}$$

Entonces, $\frac{K_P}{K_I} = \tau_p$ y el controlador esta entonces dado por:

$$C(s) = K_I \frac{\tau_p s + 1}{s}$$

El sistema de lazo cerrado esta caracterizado por el siguiente polinomio característico ($G = B/A$, y $C = P/L$):

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A(s)L(s) + B(s)P(s) \\ &= s(\tau_p s + 1)s + b_1(\tau s + 1)K_I(\tau_p s + 1) \\ &= (\tau_p s + 1)\left\{s^2 + K_I b_1(\tau s + 1)\right\} \end{aligned}$$

Note que los polos cancelados todavía aparecen en el polinomio característico aún cuando no aparecen en la transferencia de la referencia a la salida. Esto es, porque estos polos aparecen en la transferencia de la perturbación de entrada a la salida.

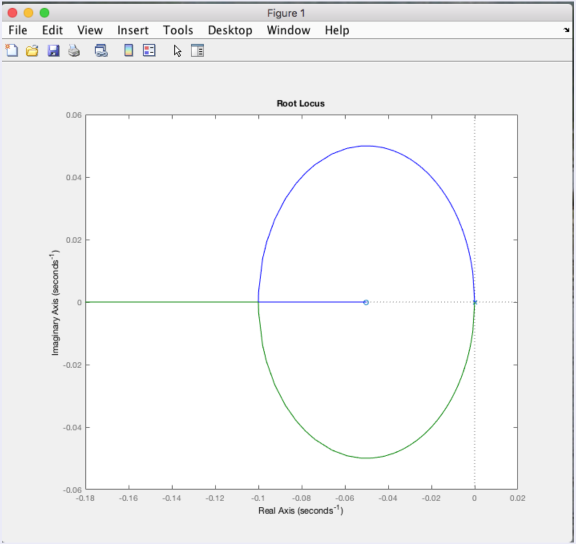
Trabajo a desarrollar Sesión 1: Actividad 2

Los polos de lazo cerrado son la solucion de la siguiente ecuación en s:

$$s^2 + K_I b_1(\tau s + 1) = 0 \Leftrightarrow 1 + K_I \frac{b_1(\tau s + 1)}{s^2} = 0$$

Esta representación de los polos de lazo cerrado permite usar la técnica de Lugar Geométrico de raíces (rlocus). Note que no se utiliza directamente la planta en este caso.

Trabajo a desarrollar Sesión 1: Actividad 2



Por otro lado se pueden calcular los polos de lazo cerrado resolviendo la ecuación de segundo orden para s. Si se desean que los polos sean ambos reales e iguales, entonces es suficiente considerar que el discriminante sea igual a $D = 0$, es decir:

$$D = (K_I b_1 \tau)^2 - 4K_I b_1 = 0 \Leftrightarrow K_I = \frac{4}{b_1 \tau^2}$$

Tareas Actividad 2:

- Diseñar un controlador PI.
- Simule el efecto de perturbaciones y muestre el seguimiento a una referencia constante del lazo de control.
- Incluya saturaciones en la actuación utilizando los controladores con y sin anti-enrrollamiuento. Compare.

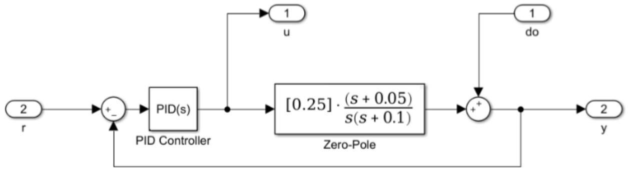


Figure 8.4: Lazo con controlador PI

Trabajo a desarrollar Sesión 1: Actividad 3

Implemente en Simulink el sistema de estanques acoplados:

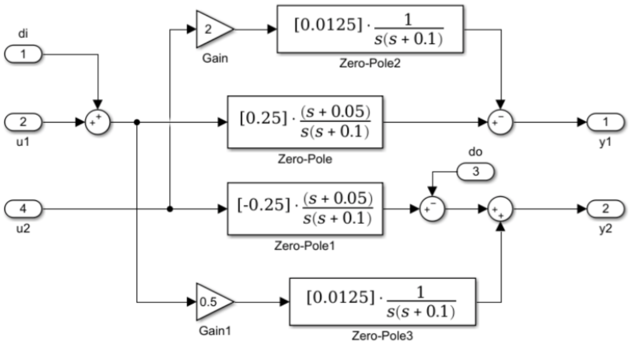


Figure 8.5: Modelo lineal sistema de estanques acoplados

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1(s) \\ \Delta V_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s(\tau_p s + 1)} \begin{bmatrix} k_1(\tau s + 1) & -\frac{a_1}{a_2} k_2 \\ \frac{a_2}{a_1} k_1 & -k_2(\tau s + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1(s) \\ \Delta U_2(s) \end{bmatrix}$$

Trabajo a desarrollar Sesión 1: Actividad 3

Implemente un lazo de control descentralizado

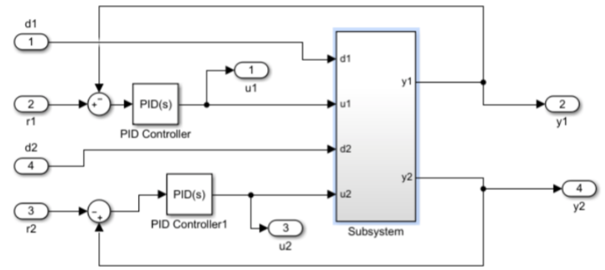


Figure 8.6: Control descentralizado sistema de estanques acoplados

- Note que la señal de error entra con signo diferente a los controladores.
- Incluya el efecto de saturaciones y utilice el controlador con esquema de anti-enrollamiento.

Outline

Trabajo a desarrollar Sesión 2

Planta de interés:

La planta que se utiliza en esta sesión corresponde a un levitador mágnetico, representado por la siguiente función de transferencia (después de linealizar):

$$G(s) = \frac{b}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)}$$

con $b = 57500$, $a_1 = 100$, $a_2 = 25$.

Objetivo:

Diseñar controladores PID y de estructura general utilizando la técnica de asignación de polos.

Técnica de asignación de polos:

Para una planta, $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ de orden n, podemos diseñar un controlador, $C(s) = \frac{P(s)}{L(s)}$, que incluye acción integral, bi-propio de orden n, tal que podemos escoger en forma arbitraria las raíces del polinomio característico resultante, $A_{cl}(s)$, de orden $2n$, dado por

$$A_{cl}(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s)$$

Planta de primer orden ($n = 1$): Asignación de polos con acción integral

- $G(s) = \frac{b}{s+a} \rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s + l_0} = \frac{p_1 s + p_0}{s} = p_1 + p_0 \frac{1}{s}$
- Para una planta de primer orden el controlador diseñado por asignación de polos, incluyendo acción integral, es un controlador PI.
- Entonces, para una planta de primer orden, con un controlador PI podemos escoger dos polos de lazo cerrado donde se desee, resolviendo la siguiente ecuación polinomial:

$$
\begin{aligned}
& A_{cl}(s) = (s+a)s + b(p_1 s + p_0) \\
\Leftrightarrow & s^2 + c_1 s + c_0 = (s+a)s + b(p_1 s + p_0) \\
\Leftrightarrow & c_1 = a + b p_1 \, , c_0 = b p_0 \\
\Leftrightarrow & p_0 = \frac{c_0}{b} \, , p_1 = \frac{c_1 - a}{b}
\end{aligned}
$$

Trabajo a desarrollar Sesión 2

Planta de segundo orden ($n = 2$): Asignación de polos con acción integral

- $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \rightarrow C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s^2 + l_1 s + l_0} = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s + l_1)}$
- Para una planta de segundo orden el controlador diseñado por asignación de polos, incluyendo acción integral, es un controlador PID (con término derivativo aproximado).
- Entonces, para una planta de segundo orden, con un controlador PID podemos escoger cuatro polos de lazo cerrado donde se desee, resolviendo la siguiente ecuación polinomial:

$$
\begin{aligned}
& A_{cl}(s) = (s^2 + a_1 s + a_0)s(s + l_1) + (b_1 s + b_0)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) \\
\Leftrightarrow & s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = \% \\
\Leftrightarrow & c_3 = l_1 + a_1 + b_1 p_2, \, c_2 = a_1 l_1 + a_0 + b_0 p_2 + b_1 p_1, \\
& c_1 = a_0 l_1 + b_1 p_0 + b_0 p_1, \, c_0 = b_0 p_0
\end{aligned}
$$

Trabajo a desarrollar Sesión 2

Para plantas de orden mayor a 3, el método de asignación de polos no necesariamente lleva a obtener un controlador PI o PID. De hecho el controlador PID es de orden 2, y si la planta es por ejemplo de orden $n = 3$, entonces un controlador, con acción integral, diseñado por asignación de polos sería bi-propio de orden 3.

Para plantas de orden mayor a 3, por medio de cancelaciones de polos y ceros en el controlador diseñado, se podría obtener un controlador PID. Sin embargo, no podríamos escoger los $2n$ polos del polinomio característico libremente.

$A_{cl}(s)$ tipícamente se escoge como un polinomio de segundo orden, $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, con $\xi = 0.7$ y ω_n es el ancho de banda de lazo cerrado deseado. De modo de tener los $2n$ polos necesarios, se completa con polos *rápidos*.

Consejo de diseño:

- Las plantas inestables se controlan rápido.
- Las plantas de fase no-mínima se controlan lento.
- Las plantas con retardo (por ejemplo la ducha) se controlan lento.

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}$$

Test para estabilidad:

- Un polinomio de segundo orden es estable ssi los coeficientes son todos del mismo signo.

$$s^2 + 2s + 3 \rightarrow \text{raíces estables}$$
$$s^2 + 2s - 3 \rightarrow \text{raíces inestables}$$

- Un polinomio de orden mayor a 3 tiene raíces inestables si los coeficientes cambian de signo (o alguno es 0).

$$s^3 + 3s^2 + 5 = 0 \rightarrow \text{raíces inestables}$$
$$s^3 + 3s^2 - 2s + 5 = 0 \rightarrow \text{raíces inestables}$$
$$s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0 \rightarrow \text{no se sabe, se debe utilizar otro test, como Routh}$$

Control PI para el levitador magnético:

$$C(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$
$$G(s) = \frac{b}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)}$$

con $b > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= (s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)s + b(K_P s + K_I) \\ &= (s^2 + a_1 s)(s^2 - a_2^2) + b(K_P s + K_I) \\ &= s^4 + a_1 s^3 - a_2^2 s^2 - a_1 a_2^2 s + b(K_P s + K_I) \\ &= s^4 + a_1 s^3 - a_2^2 s^2 + (bK_P - a_1 a_2^2)s + K_I \end{aligned}$$

Como hay un cambio de signo en el polinomio característico un controlador PI no puede estabilizar un levitador magnético.

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador PID

La transferencia de este controlador esta dada por:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$

pero como el término derivativo no se puede implementar físicamente en la implementación es necesario incluir un polo rápido, es decir:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \frac{s}{\tau s + 1} = \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{s(s+d)}$$

Una dificultad que se tiene en este caso es que para utilizar el método de asignación de polos es necesario que el controlador sea de orden $n_{cl} = 2n - 1$, $n_p = n_l = n - 1$ y si se desea incorporar acción integral entonces se necesita $n_{cl} = 2n$, y $n_p = n_l = n$. En este caso corresponde a que el controlador sea de orden $n_p = n_l = 3$, pero el controlador PID es solo de orden 2.

Si se desea utilizar un controlador PID, no se pueden elegir todos los polos de lazo cerrado. Adicionalmente, si se considera el PID con el término derivativo aproximado entonces, el polinomio característico es de orden 5 y resulta muy díficil hacer el diseño porque lo polos de lazo cerrado no pueden escogerse en forma arbitraria. Por esta razón, decidimos utilizar el modelo de PID (no realizable) para diseñar el controlador.

Se desea obtener un polinomio característico de la forma:

$$A_{cl}(s) = (s + a_2)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha)$$

con $\xi = 0.7$ y $\omega_n = 20$.
De modo de simplificar el problema decidimos trabajar con la versión no realizable del PID.

En este caso, tenemos que el polo correspondiente al término $s + a_2$ lo estamos cancelando (es un cero del controlador) y α no se puede escoger en forma arbitraria y se debe determinar.

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador PID

En este caso tenemos que resolver para K_P, K_I y K_D del siguiente igualación de polinomios:

$$(s+a_2)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+\alpha) = (s+a_2)(s-a_2)(s+a_1)s+b(K_D s^2+K_P s+K_I)$$

$$(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+\alpha) = (s-a_2)(s+a_1)s+b(\bar{n}_1 s+\bar{n}_0)$$

donde $(s+a_2)(\bar{n}_1 s+\bar{n}_0) = K_D s^2+K_P s+K_I$.
Desarrollando el lado izquierdo se tiene:

$$s^3+(2\xi\omega_n+\alpha)s^2+(\omega_n^2+2\xi\omega_n\alpha)s+\omega_n^2\alpha$$

y el lado derecho:

$$s^3+(a_1-a_2)s^2+(b\bar{n}_1-a_1a_2)s+b\bar{n}_0$$

Igualando término a término se tiene que

$$\alpha = a_1 - a_2 - 2\xi\omega_n = 47$$

$$\bar{n}_1 = \frac{a_1 a_2 + \omega_n^2 + 2\xi\omega_n\alpha}{b} = 0.0733$$

$$\bar{n}_0 = \frac{\omega_n^2\alpha}{b} = 0.327$$

y asi tenemos que

$$\begin{aligned} K_D s^2 + K_P s + K_I &= (s + a_2)(\bar{n}_1 s + \bar{n}_0) \\ &= 0.0733 s^2 + 2.1595 s + 8.175 \end{aligned}$$

De modo de utilizar un controlador PID realizable se utiliza $\tau = K_D/100$.

Simulaciones Actividad 1:

- Pruebe el controlador, en seguimiento a referencias tipo escalón y rechazo a perturbaciones de salida.
- Introduzca saturaciones y utilice un esquema de anti-enrollamiento.

Simulaciones Actividad 2:

- Determine los polos de lazo cerrado para distintos valores de τ (aproximación del término derivativo).
- Note que si τ es muy grande, la aproximación de la derivada, y del diseño del controlador no es muy buena.
- Si τ es muy pequeño, entonces el sistema a simular es muy rápido y laaproximación de Euler tiene que ser mejor (paso de Euler más pequeño).

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador con asignación de polos

Como la planta es de orden $n = 3$, y se desea un controlador con acción integral, el controlador es bi-propio de orden 3, y el polinomio $A_{cl}(s)$ es de orden 6.

Polos cancelados

- Note que los polos y ceros cancelados entre la planta y el controlador todavía aparecen en $A_{cl}(s)$ y en consecuencia en alguna de las funciones de sensibilidad que definen la estabilidad interna del lazo de control.
- Si se cancela algún polo inestable, este aparecerá en $A_{cl}(s)$ y refleja la inestabilidad interna del lazo de control.

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador con asignación de polos

- Se decide cancelar los polos estables de la planta, los cuales aparecen en $A_{cl}(s)$.

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= (s+25)(s+100)(\text{polinomio de 4to orden}) \\ &= (s+25)(s+100)^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+\alpha) \end{aligned}$$

  Se dejara el diseño del controlador en términos de α, ξ y ω_n.

- El controlador tiene la siguiente forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{(s+25)(s+100)\bar{P}(s)}{s\bar{L}(s)}$$

  con $\bar{P}(s) = \bar{p}_1 s + \bar{p}_0$, $\bar{L}(s) = s^2 + \bar{l}_1 s + \bar{l}_0$

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador con asignación de polos

Resolviendo para $\bar{P}(s)$ y $\bar{L}(s)$:

$$(s+25)(s+100)^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+\alpha) = A(s)L(s)+B(s)P(s)$$
$$= (s+100)(s+25)(s-25)s(s^2+\bar{l}_1 s+\bar{l}_0)+57500(s+25)(s+100)(\bar{p}_1 s+\bar{p}_0)$$

o equivalentemente:

$$(s+100)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+\alpha) = (s-25)s(s^2+\bar{l}_1 s+\bar{l}_0)+57500(\bar{p}_1 s+\bar{p}_0)$$

donde se resuelve un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas.

Trabajo a desarrollar Sesión 2: Diseño de un Controlador con asignación de polos

Simulaciones Actividad 3:

- Realizar las mismas simulaciones que con el controlador PID y comparar.