DÚ Lingebra 21/10/24 KAZIMÍR

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Dokaž nebo vyvrať pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

a) $tr(AB) = tr(BA)$

$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \longrightarrow tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$

$(BA)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \longrightarrow tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$

=> Vzhledem k tomu, že násobení čísel je komutativní ($b_{ij} a_{ji} = a_{ji} b_{ij}$) a zároveň sčítání je asociativní a komutativní (nezáleží tedy na pořadí, ve kterém prvky sčítáme), jsou obě stopy rovny součtu všech ~~a~~ součinů tvaru $a_{ij} b_{ji}$ pro $j, i \in [n]$.

Vlastnost a) $tr(AB) = tr(BA)$ tedy platí.

b) $tr(ABC) = tr(CAB)$

$tr(ABC) = tr((AB)C) \overset{a)}{=} tr(C(AB)) = tr(\overset{((CA)B)}{\cancel{CAB}}) \overset{a)}{=} tr(B(CA))$

Pomocí vlastnosti a) snadno odvodíme platnost (nejen) $tr(ABC) = tr(CAB)$, když si maticový součin šikovně uzávorkujeme.

c) $tr(ABC) = tr(ACB)$

protipříklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$ABC = \begin{array}{cc|cc|cc} & & 1 & 2 & 0 & 1 \\ & & 2 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & -5 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(ABC) = -5+3 = -2$$

$$ACB = \begin{array}{cc|cc|cc} & & 0 & 1 & 1 & 2 \\ & & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(ACB) = 1+1 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{tr(ABC)}_{=-2} \neq \underbrace{tr(ACB)}_{=2}$$