

SVD para compresión de imágenes y reducción de dimensionalidad

Autores

Santiago Groba¹

Tomás Lottersberger²

grobaalonsos@udesa.edu.ar¹, tlottersberger@udesa.edu.ar²

Universidad de San Andrés

15 de noviembre de 2024

Resumen

Este informe explora la reducción de dimensionalidad mediante distintos métodos, como la descomposición en valores singulares (SVD), el análisis de componentes principales (PCA), la norma de Frobenius y los mínimos cuadrados aplicados con SVD. El objetivo es aprender representaciones de baja dimensión de un conjunto de datos de muestras de sensores y de un conjunto de imágenes, analizar la calidad de las reconstrucciones y medir la similitud entre pares de imágenes en espacios de baja dimensión. Además, se busca estudiar los efectos de variar la dimensión de los datos y destacar los elementos más importantes del conjunto. La selección de cada método depende del tipo de datos y de los objetivos específicos, permitiendo evaluar la eficiencia de cada técnica.

El análisis demostró que la reducción de dimensionalidad mediante PCA y SVD mantiene la estructura de los datos y mejora la precisión en las predicciones. Por otro lado, la compresión de imágenes permite alcanzar un balance óptimo entre la reducción de información y la calidad visual. Esto evidencia cómo estas técnicas contribuyen a mejorar tanto la interpretación como el procesamiento eficiente de datos en diversas aplicaciones.

1. Introducción

En este informe se presentarán dos experimentos numéricos que examinan la reducción de dimensionalidad en un conjunto de datos y la compresión de imágenes mediante técnicas de descomposición en valores singulares (SVD), análisis de componentes principales (PCA), norma de Frobenius y mínimos cuadrados utilizando SVD. Cabe destacar que en el análisis de datos de alta dimensionalidad es común encontrar redundancias y ruido que dificultan la interpretación y el procesamiento eficiente de la información. La reducción de dimensionalidad se convierte, así, en una técnica fundamental, ya que permite transformar datos de alta dimensión a un espacio de menor dimensión, preservando la información relevante y eliminando el ruido. Por otro lado, la compresión de imágenes es una aplicación clave de la reducción de dimensionalidad, ya que permite representar imágenes con menos información, optimizando el espacio de almacenamiento y mejorando la eficiencia en el procesamiento. El principal objetivo de este informe es explorar cómo las técnicas de reducción de dimensionalidad pueden aplicarse para mejorar

la interpretación, visualización y procesamiento eficiente de datos en distintas aplicaciones.

2. Marco teórico

2.1. Representación de imágenes como matrices

Cada imagen puede representarse como una matriz, donde los elementos de la matriz corresponden a los niveles de intensidad (en imágenes en escala de grises) o a valores RGB (en imágenes a color) de cada píxel. Al "aplanar" cada imagen en un vector, se puede construir una matriz de datos donde cada fila representa una imagen, permitiendo así realizar la descomposición en valores singulares sobre la colección completa de imágenes.

2.2. Compresión de imágenes

La compresión de imágenes es un proceso esencial en el tratamiento de grandes volúmenes de datos visuales, pues permite reducir el tamaño de almacenamiento y la transmisión de datos sin una pérdida significativa de calidad. La

compresión puede ser sin pérdida (preserva toda la información original) o con pérdida (reduce el tamaño eliminando información menos perceptible al ojo humano). La compresión mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD) es un enfoque basado en técnicas lineales que permite representar la información visual en un espacio de menor dimensión, logrando una compresión con pérdida controlada de datos.

2.3. Descomposición en valores singulares (SVD)

2.3.1. Concepto

La Descomposición en Valores Singulares es una herramienta matemática que descompone cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en el producto de tres matrices:

$$A = U\Sigma V^T \quad (1)$$

donde:

- U es una matriz ortogonal de tamaño $m \times m$, cuyos vectores columna son los vectores singulares de la izquierda de A .
- Σ es una matriz diagonal de tamaño $m \times n$ que contiene los valores singulares de A ordenados de mayor a menor.
- V^T es una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$, cuyos vectores columna son los vectores singulares de la derecha de A .

Esta descomposición tiene múltiples aplicaciones en áreas como la reducción de dimensiones, la compresión de datos y el procesamiento de señales, debido a su capacidad para descomponer los datos en componentes significativos y menos significativos.

2.3.2. Interpretación

Los valores singulares en Σ representan la "importancia" de cada componente en la estructura de datos original. Los valores singulares más grandes están asociados con componentes que contienen más información, mientras que los valores singulares menores pueden considerarse como "ruido" o detalles menos relevantes. Al reducir la cantidad de valores singulares en la reconstrucción, se logra una versión comprimida de la matriz original.

2.4. Análisis de componentes principales (PCA)

El Análisis de componentes principales (PCA, por sus siglas en inglés) es un método de reducción de dimensionalidad que proyecta los datos en un nuevo espacio de menor dimensión de manera que se preserve la mayor variabilidad posible, suponiendo que no todas las dimensiones son informativas. El proceso de PCA puede describirse en los siguientes pasos:

1. **Centralización de los datos:** Restar la media de cada característica a los datos originales.
2. **Cálculo de covarianza:** Se calcula la matriz de covarianza de los datos centralizados.
3. **Descomposición en valores singulares:** Aplicar SVD a la matriz de covarianza para obtener los valores y vectores singulares.
4. **Selección de componentes principales:** Seleccionar los 'd' vectores singulares correspondientes a los d valores singulares más grandes.

5. **Proyección:** Proyectar los datos originales x_i en el espacio de menor dimensión, $z \in \mathbb{R}^p$ con $p < n$, utilizando los vectores singulares seleccionados. Buscando una transformación β de $n \times p$ tal que $(x, \beta) = z$.

Matemáticamente, la proyección de un vector x en el espacio de componentes principales se realiza mediante:

$$z = V_d^T x \quad (2)$$

Donde V_d es la matriz formada por los primeros d vectores singulares derechos.

2.5. Norma de Frobenius

La norma de Frobenius es una medida de la magnitud de una matriz y se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus elementos. Para una matriz X de tamaño $m \times n$, la norma de Frobenius se puede expresar como:

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2} \quad (3)$$

donde x_{ij} es el elemento en la fila i y la columna j de la matriz X .

La norma de Frobenius es una generalización de la norma euclidiana para vectores y se utiliza comúnmente para medir la "magnitud" de una matriz, de forma independiente a su dimensión o forma. Resulta beneficioso en la determinación de errores o diferencias entre matrices, como por ejemplo en la compresión de imágenes, donde el objetivo es reducir al mínimo la disparidad entre la imagen original y la reconstruida.

2.6. Cuadrados mínimos

El método de cuadrados mínimos es una técnica utilizada para ajustar un modelo lineal a

un conjunto de datos, minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Si se posee una matriz X de tamaño $m \times n$ donde $m \geq n$, y un vector y en \mathbb{R}^m , el objetivo es hallar la solución al problema $X\beta = y$. Dado el caso que $y \notin \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ se debe buscar un vector $\beta \in \mathbb{R}^n$ que minimice el residuo (o error).

$$\|X\beta - y\|_2 \quad (4)$$

Aproximando linealmente cuando $x \in \mathbb{R}^{n=1}$ dado un conjunto de datos (x_i, y_i) , el modelo lineal se puede expresar como:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (5)$$

Donde β_0, β_1 son los coeficientes del modelo. El objetivo es encontrar los valores de β_0, β_1 que minimizan la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y_i y la aproximación resultante del modelo lineal:

$$E_2(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_1 x_i + \beta_0)]^2 \quad (6)$$

De manera tal que se minimice la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y_i y la aproximación resultante del modelo lineal. Esta clase de error le otorga un mayor peso a los puntos que están muy alejados de la aproximación aunque no le permite dominar la aproximación por completo. La solución analítica a este problema se puede obtener derivando E_2 con respecto a β_0, β_1 e igualando las derivadas a cero. La solución se puede escribir en forma matricial como:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (7)$$

Donde X es la matriz de datos formada por los valores de x_i y un vector de unos, $\hat{\beta}$ es el vector de coeficientes estimados y y es el vector de valores observados.

2.6.1. Aplicación de SVD a cuadrados mínimos

Cuadrados mínimos se aplica cuando es necesario enfrentar el problema de encontrar un vector β que resuelva el sistema $X\beta = y$, y no es posible encontrar una solución exacta. En este caso, se busca encontrar un vector $\hat{\beta}$ que minimice $\|X\hat{\beta} - y\|$. La solución de cuadrados mínimos se puede obtener mediante la descomposición SVD de la matriz X y la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, permitiendo encontrar una solución eficiente y estable para el ajuste de modelos lineales. La solución se puede escribir como:

$$\hat{\beta} = V\Sigma^{-1}U^T y \quad (8)$$

Donde U, Σ y V son las matrices de la descomposición SVD de X . Esta formulación permite encontrar una solución estable y eficiente para el problema de cuadrados mínimos, incluso cuando la matriz X es singular o mal condicionada.

2.7. Similitud entre muestras

La similitud entre muestras se refiere a la medida en que dos o más muestras comparten características o patrones comunes. Esta información puede ser útil para identificar grupos, detectar valores atípicos o construir modelos predictivos. Se utiliza una función de similitud gaussiana (RBF) para medir la similitud entre muestras. Esta función se define como:

$$K(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

La función RBF asigna un valor de similitud entre 0 y 1 a cada par de muestras. Un valor de 1 indica que las muestras son idénticas, mientras que un valor de 0 indica que las muestras son completamente diferentes.

3. Procedimiento y experimentación

En esta sección se describirán los experimentos numéricos realizados, incluyendo los procedimientos correspondientes.

3.1. Primera experiencia

Aquí se mostrará lo correspondiente a la experimentación sobre compresión de imágenes.

3.1.1. Compresión de imágenes mediante SVD

La compresión de imágenes mediante SVD implica reconstruir la matriz de imagen utilizando solo los primeros d valores singulares, con $d < \min(m, n)$. Esto se expresa como: $A_d = U_d \Sigma_d V_d^T$ donde U_d , Σ_d y V_d son submatrices que contienen únicamente los d valores y vectores singulares más importantes. Al usar solo los componentes principales, se elimina el "ruido" o detalles menos relevantes, lo que da como resultado una imagen comprimida que mantiene la mayoría de las características visuales de la original.

3.1.2. Aprendizaje de representaciones de baja dimensión

Para estudiar representaciones de baja dimensión de las imágenes, se deben apilar todas las imágenes, aplastando cada una a un vector que contiene la información de la imagen, y colocándolo como fila de la matriz A que contiene todas las imágenes como vector. Luego, se realiza la descomposición SVD de la matriz de datos de imágenes A , donde cada fila representa una imagen y cada columna de la fila representa un píxel de la imagen.

En este caso, A es una matriz de 19×784 (compuesta por 19 imágenes de 28×28 píxeles

cada una), donde $U(19 \times 19)$ es una matriz ortogonal que contiene los vectores singulares izquierdos, $\Sigma(19 \times 784)$ es una matriz diagonal que contiene los valores singulares, y $V^T(784 \times 784)$ es la matriz ortogonal de vectores singulares derechos.

3.1.3. Reconstrucción de imágenes

Para evaluar la calidad de las reconstrucciones, se reconstruyeron las imágenes originales utilizando una selección de los primeros d valores singulares y sus correspondientes vectores singulares. La reconstrucción de una imagen se realizó multiplicando los vectores singulares izquierdos por la matriz diagonal de valores singulares truncada, y luego por los vectores singulares derechos traspuestos. Como se puede observar en la figura 1, figura 2 y figura 3, la selección de los d valores singulares es crucial. Por un lado, reducir la dimensionalidad (d) puede ayudar a eliminar la redundancia y el ruido en los datos, lo que puede llevar a una representación más compacta y simplificada de las imágenes. Esto puede ser beneficioso para reducir el costo computacional y la complejidad del modelo. Sin embargo, esta reducción de dimensionalidad conlleva una pérdida de información, ya que al truncar la descomposición SVD a un número limitado de componentes, inevitablemente se descartan algunos aspectos menos importantes pero potencialmente significativos de los datos originales. Por lo tanto, la elección del valor de d es fundamental para la relación entre la compresión de datos y la preservación de la información relevante. Los gráficos se realizan con 5, 10 y 15 valores singulares para ilustrar cómo varía la calidad de las reconstrucciones con diferentes niveles de reducción de dimensionalidad. En el caso de la figura 1 se utilizan los primeros 5 valores singulares, ya que, se busca mostrar cómo se ve la reconstrucción cuando se conservan solo las características

más dominantes de los datos. Esto proporciona una visión de cómo se preserva la estructura básica de las imágenes con una compresión considerable de la información. Por otro lado, en la figura 3 se utilizan los primeros 15 valores singulares para mostrar qué pasa cuando la mayoría de los valores singulares son incluidos. Aquí, se puede observar cómo la calidad de la reconstrucción mejora a medida que se conservan más componentes singulares. Esto da una idea de cómo la inclusión de más información puede llevar a una representación más fiel de las imágenes originales.

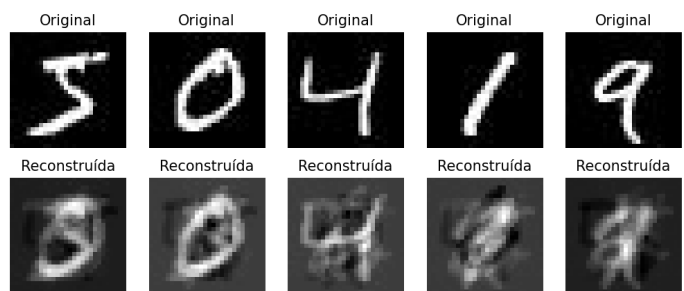


Figura 1: Comparación entre las imágenes originales y las reconstruidas a partir de los primeros 5 valores singulares.

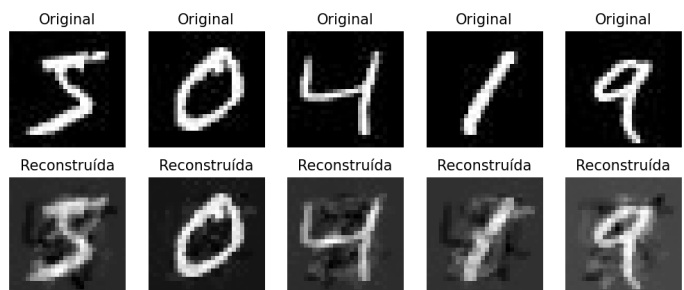


Figura 2: Comparación entre las imágenes originales y las reconstruidas a partir de los primeros 10 valores singulares.

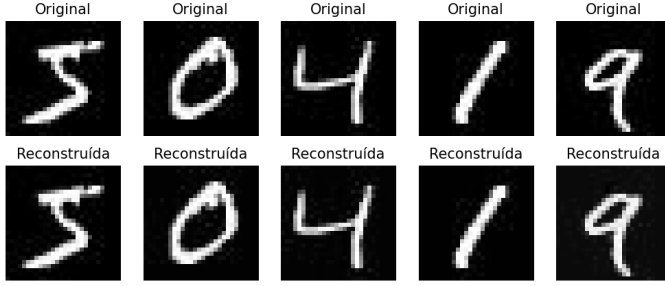


Figura 3: Comparación entre las imágenes originales y las reconstruidas a partir de los primeros 15 valores singulares.

3.1.4. Medición de la calidad de compresión

La medida de similitud entre pares de imágenes en espacios de baja dimensión se basa en comparar las imágenes reconstruidas en dicho espacio. Una vez que la dimensionalidad de las imágenes ha sido reducida mediante descomposición SVD y se ha seleccionado un número d de componentes principales, es posible reconstruir las imágenes originales utilizando solo esos componentes. Estas reconstrucciones representan aproximaciones de las imágenes originales en un espacio de menor dimensión. En la figura 4 se pueden observar ejemplos de matrices de similitud entre pares de imágenes en distintas dimensiones.

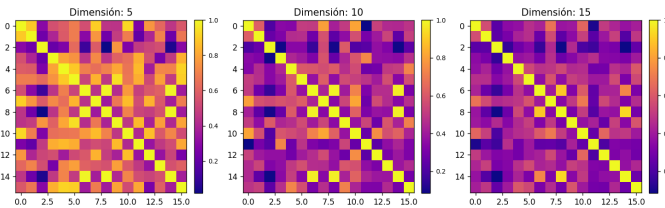


Figura 4: Matriz de similitud par a par de las imágenes.

Además, para evaluar la calidad de una imagen comprimida, se puede medir el error de reconstrucción entre la imagen original y la comprimida. En este caso, se utiliza la norma de Fro-

benius como métrica de error. El error relativo en la norma de Frobenius entre la matriz original A y la comprimida A_d se define como:

$$E_r = \frac{\|A - A_d\|_F}{\|A\|_F} \quad (10)$$

Un error bajo indica que la compresión ha mantenido la mayoría de las características de la imagen original, mientras que un error alto indica una pérdida significativa de información.

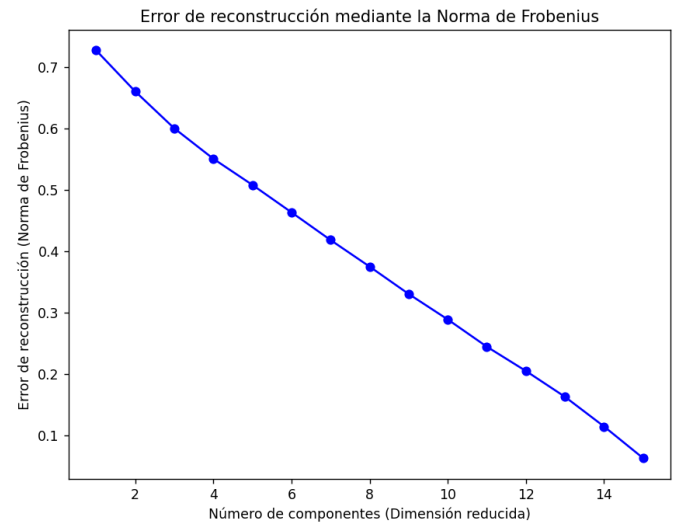


Figura 5: Promedio de error entre las imágenes para cada dimensión.

Existe un equilibrio entre el nivel de compresión y la pérdida de calidad. Un objetivo común es encontrar el valor mínimo de d que mantenga el error de reconstrucción por debajo de un umbral específico, para realizar la experimentación, estableceremos éste en el 10 % del error de Frobenius relativo. Esto se puede determinar mediante un análisis empírico en el que se calcula el error para distintos valores de d y se selecciona el valor más pequeño que satisface el criterio de error deseado.

En este caso experimental, se estableció, como se dijo anteriormente, el umbral de error en 10 %, tras un análisis minucioso de la progresión

del error relativo ocurrido de determinó que el d óptimo que se encuentra bajo dicho umbral es $d = 15$, el cual establece un error relativo del 6 %, y posteriormente, con $d \geq 16$ el error relativo ocurrido permanece constante en 0 %. El error para todos los d puede verse en la imagen 12 ubicada en su sección correspondiente del apéndice.

3.2. Segunda experiencia

Aquí se mostrará lo correspondiente a la experimentación sobre reducción de dimensionalidad.

Se utilizó un conjunto de datos X que contiene un conjunto de n muestras (mediciones) que fueron realizadas a través de p sensores, representadas en una matriz de $n \times p$ dimensiones. El objetivo principal era analizar la similitud entre pares de muestras en un espacio de dimensión reducida d , considerando que algunas dimensiones son más ruidosas que otras. Para ello, se aplicó la técnica de reducción de dimensionalidad PCA y se analizó la similitud par a par entre muestras en el espacio de dimensión X y en el espacio de dimensión reducida d para distintos valores de d .

3.2.1. Descomposición de X y reducción de dimensionalidad

Se realizó una descomposición de la matriz X en sus valores singulares, se redujo la dimensión de esta representación y se trabajó con los vectores x proyectados al nuevo espacio reducido Z , es decir $z = V_d^T x$. Se realizaron los puntos anteriores para $d = 2, 6, 10$ y p .

3.2.2. Análisis de similitud par a par

Se analizó la similitud par a par entre muestras en el espacio de dimensión X y en el espacio de dimensión reducida d para distintos

valores de d utilizando PCA. Se compararon estas medidas de similitud utilizando una matriz de similitud para visualizar todas las similitudes par a par juntas.

3.2.3. Ajuste del modelo de mínimos cuadrados

Se ajustó un modelo de mínimos cuadrados para predecir una variable respuesta Y , minimizando la norma $\|X\hat{\beta} - y\|_2$. Se analizó el peso asignado a cada dimensión original en el vector de pesos $\hat{\beta}$.

3.2.4. Predicción en el espacio reducido

Se evaluó si la predicción en el espacio reducido con PCA y $d = 2$ mejoraba en comparación con no realizar reducción de dimensionalidad. Se identificaron las muestras con mejor predicción en ambos casos.

3.2.5. Visualización de resultados

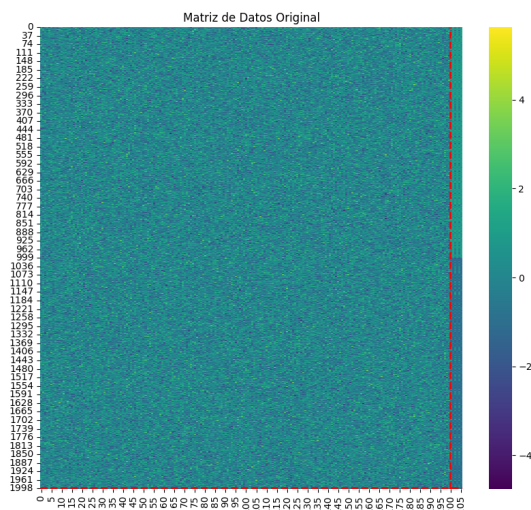


Figura 6: Matriz de datos original.

Figura 6

En esta figura, se visualiza la matriz de datos original. Se puede observar una mayor variabilidad en las últimas 6 columnas. Este patrón en las últimas columnas puede indicar la presencia de características o variables que tienen un mayor impacto en la estructura de los datos.

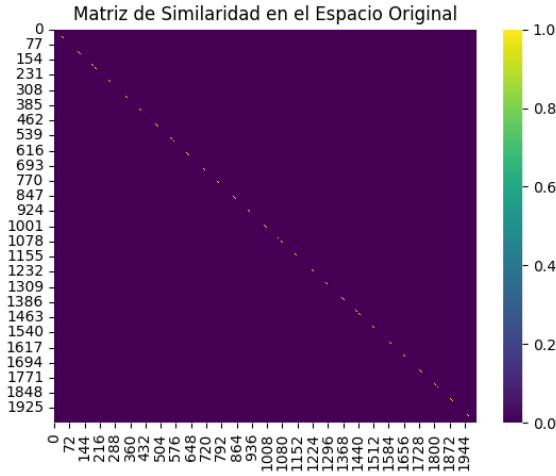


Figura 7: Matriz de Similitud en el Espacio Original

Figura 7

Esta figura muestra la matriz de similitud entre las muestras en el espacio original. Se observa una diagonal con valores altos de similitud, lo que indica que cada muestra es muy similar a sí misma. Fuera de la diagonal las muestras presentan baja similitud entre sí en el espacio original.

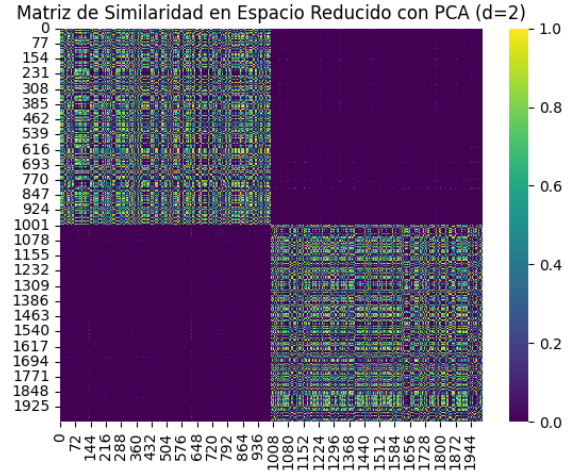


Figura 8: Matriz de Similitud en Espacio Reducido con PCA ($d=2$)

Figura 8

Esta figura muestra la matriz de similitud entre las muestras luego de aplicar PCA y reducir la dimensionalidad a $d=2$. Se observa un patrón de bloques, donde algunas regiones muestran alta similitud entre sí, mientras que otras regiones presentan baja similitud. Esto sugiere que la reducción de dimensionalidad ha agrupado las muestras con características similares.

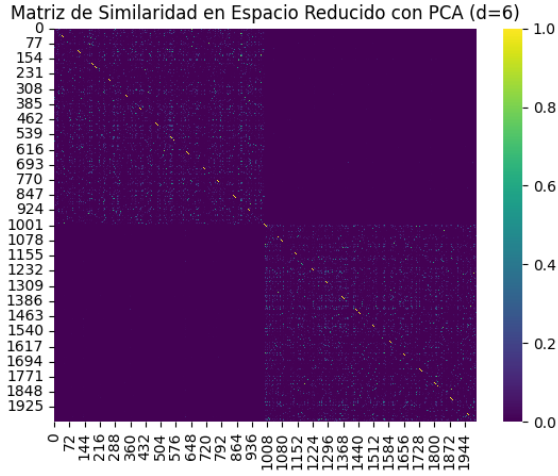


Figura 9: Matriz de Similaridad en Espacio Reducido con PCA ($d=6$)

Figura 9

Esta figura muestra la matriz de similitud entre las muestras luego de aplicar PCA y reducir la dimensionalidad a $d=6$. Comparada con la figura 8, se observa que la estructura de bloques se mantiene, pero con algunas diferencias en la distribución de la similitud. Esto indica que al aumentar el número de dimensiones en el espacio reducido, se captura más información sobre la similitud entre las muestras, pero aún se mantiene una representación simplificada en comparación con el espacio original.

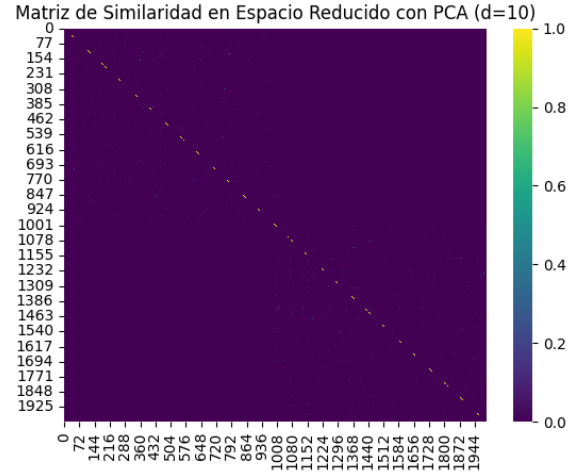


Figura 10: Matriz de Similaridad en Espacio Reducido con PCA ($d=10$)

Figura 10

Esta figura muestra la matriz de similitud entre las muestras luego de aplicar PCA y reducir la dimensionalidad a $d=10$. En comparación con las figuras 8 y 9, se observa una estructura más compleja con mayor detalle en los patrones de similitud. Esto sugiere que al aumentar aún más el número de dimensiones en el espacio reducido, se captura una mayor cantidad de información sobre la similitud entre las muestras, acercándose a la complejidad del espacio original.

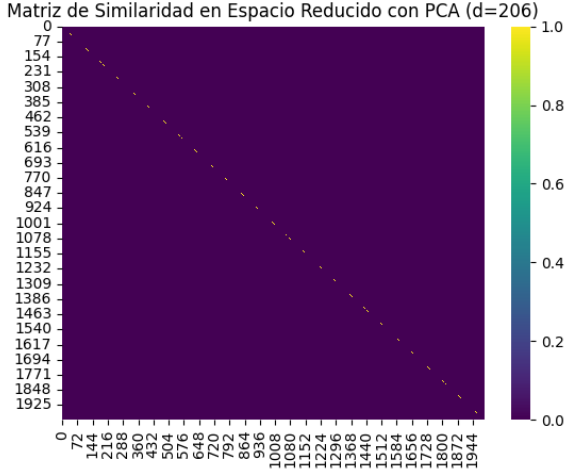


Figura 11: Matriz de Similitud en Espacio Reducido con PCA ($d=206$)

Figura 11

Esta figura muestra la matriz de similitud entre las muestras luego de aplicar PCA y reducir la dimensionalidad a $d=206$, que corresponde a la dimensión original de los datos. Como era de esperar, la matriz de similitud en este caso es prácticamente idéntica a la matriz de similitud en el espacio original (Figura 7). Esto confirma que al no realizar una reducción de dimensionalidad, se preserva completamente la estructura de similitud entre las muestras.

Error

Al analizar el error de Frobenius entre las matrices de similitud en el espacio original (Figura 7) y los espacios reducidos (Figuras 8, 9, 10 y 11), observamos que este disminuye a medida que aumenta la dimensionalidad del espacio reducido (d). Para $d=2$, el error es 667.96, indicando una distorsión significativa en la estructura de similitud. A medida que aumentamos d a 6 y 10, el error se reduce a 85.87 y 11.85 respectivamente, mostrando una mejor preservación de la

similitud. Finalmente, con $d=206$ (dimensión original), el error es prácticamente cero, confirmando la preservación total de la estructura de similitud. Estos resultados sugieren que un valor de d mayor permite capturar más información sobre la similitud entre las muestras, pero también aumenta la complejidad del espacio reducido.

4. Conclusiones

Se evaluó la compresión de imágenes utilizando SVD. Esta técnica es una aplicación fundamental de la reducción de dimensionalidad, ya que permite representar imágenes con menos información, lo que reduce el espacio de almacenamiento y optimiza la eficiencia en el procesamiento. La calidad de las imágenes comprimidas se midió con un error relativo calculado mediante la norma de Frobenius, que cuantifica la diferencia entre la imagen original y la reconstruida. Los resultados mostraron que la compresión de imágenes mediante SVD alcanzó un equilibrio óptimo entre compresión y calidad visual. También se observó que la similitud entre pares de imágenes en espacios de baja dimensión reflejaba la estructura semántica de las imágenes originales. Sin embargo, tanto la calidad de las reconstrucciones como la similitud entre pares de imágenes dependían de la cantidad de valores singulares utilizados en la compresión. En general, se encontró que una selección adecuada de la cantidad de valores singulares permitía una compresión eficiente sin sacrificar de forma significativa la calidad visual ni la similitud semántica entre las imágenes.

Se aplicó PCA para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos de mediciones de sensores. Se analizó la similitud entre las muestras en el espacio original y en los espacios reducidos, observando cómo la estructura de simila-

ridad se ve afectada por la reducción de dimensionalidad. Se encontró que un espacio reducido con $d = 2$, aunque introduce mayor error de Frobenius, permite visualizar mejor la variabilidad de los datos. Además, se ajustó un modelo de mínimos cuadrados en el espacio original y en el espacio reducido, analizando el vector de pesos β y el error de predicción. Los resultados mostraron que la reducción de dimensionalidad puede simplificar el modelo sin comprometer significativamente la precisión de la predicción.

En conclusión, este trabajo ha explorado la aplicación de técnicas de reducción de dimensionalidad, como SVD y PCA, en dos contextos diferentes: la compresión de imágenes y el análisis de datos de sensores. En el primer experimento, se demostró que la SVD permite comprimir imágenes de manera eficiente, logrando un equilibrio entre la reducción del tamaño y la preservación de la calidad visual y la similitud semántica. Se observó que la elección del número de valores singulares es crucial para obtener una compresión óptima. En el segundo experimento, se aplicó PCA para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos de sensores, facilitando la visualización de la estructura de similaridad entre las muestras y el análisis del modelo de mínimos cuadrados. Se encontró que la reducción de dimensionalidad puede simplificar el modelo sin comprometer significativamente la precisión de la predicción, aunque la elección del número de dimensiones (d) influye en la preservación de la estructura de similaridad y la variabilidad de los datos. En ambos casos, las técnicas de reducción de dimensionalidad demostraron ser herramientas valiosas para el análisis y la visualización de datos, permitiendo extraer información relevante y simplificar la complejidad de conjuntos de datos de alta dimensión.

5. Apéndice

5.1. Progresión del error relativo en compresión de imágenes

```
Dimension d=1, Error de Frobenius relativo: 0.73
Dimension d=2, Error de Frobenius relativo: 0.66
Dimension d=3, Error de Frobenius relativo: 0.60
Dimension d=4, Error de Frobenius relativo: 0.55
Dimension d=5, Error de Frobenius relativo: 0.51
Dimension d=6, Error de Frobenius relativo: 0.46
Dimension d=7, Error de Frobenius relativo: 0.42
Dimension d=8, Error de Frobenius relativo: 0.38
Dimension d=9, Error de Frobenius relativo: 0.33
Dimension d=10, Error de Frobenius relativo: 0.29
Dimension d=11, Error de Frobenius relativo: 0.24
Dimension d=12, Error de Frobenius relativo: 0.21
Dimension d=13, Error de Frobenius relativo: 0.16
Dimension d=14, Error de Frobenius relativo: 0.12
Dimension d=15, Error de Frobenius relativo: 0.06
Con d=15, el error de compresion es inferior al 10%. Este valor de d es adecuado.
Dimension d=16, Error de Frobenius relativo: 0.00
Con d=16, el error de compresion es inferior al 10%. Este valor de d es adecuado.
```

Figura 12: Progresión del error relativo para distintas dimensiones d

6. Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M. (2015). Numerical analysis. Cengage learning.
- Harris, C.R. et al., 2020. Array programming with NumPy. Nature, 585, pp.357–362.
- Pedregosa, F. et al., 2011. Scikit-learn: Machine learning in Python. Journal of machine learning research, 12(Oct), pp.2825–2830.
- Hunter, J.D., 2007. Matplotlib: A 2D graphics environment. Computing in science & engineering, 9(3), pp.90–95.