Tensor de Maxwell

Tensor de Levi-Civita

No tengo ni idea que es un tensor pero estas son algunas de las propiedades que voy a necesitar para hacer la cuentas:

- $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$
- $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$ solo con permutaciones cíclicas
- $\epsilon_{jki}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}$

Ecuaciones de Maxwell en vacio

Las ecuaciones de Maxwell en vacio están dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \quad (4)$$

Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz en unidades Gaussianas está dado por (5):

$$\vec{F}_{EM} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \tag{5}$$

Para el caso de la fuerza aplicada sobre una distribución de carga, en este caso volumétrica, tenemos que reemplazar (6) y (7) en (5) obteniendo (8):

$$q = \rho dv \tag{6}$$

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \tag{7}$$

$$\vec{F}_{EM} = \int_v [\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}]dv \tag{8}$$

Momento lineal Electromagnético

Usando la leyes de Newton, podemos escribir las ecuaciones de movimiento a partir de las fuerzas que sienten estas. En el caso de una cierta distribución de cargas está dado por (9), donde se tiene en cuenta la fuerza dada por (8) y una cierta $\vec{F}_0$ que tiene en si todas las demás fuerzas externas:

$$\frac{d\vec{P_M}}{dt} = \int_v [\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}]dv + \vec{F}_0 \tag{9}$$

En todo el resto de cosas no voy a tener en cuenta la fuerza $\vec{F}_0$, solo es un término que para este tema molesta.

$$\frac{d\vec{P_M}}{dt} = \int_v [\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}]dv \tag{10}$$

Se puede reescribir el argumento del término correspondiente a la fuerza electromagnética utilizando las ecuaciones (11) y (12), logrando obtener (13):

$$\rho = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \tag{11}$$

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{12}$$

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \left[\frac{1}{4\pi c}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \times \vec{B} \tag{13}$$

Si utilizamos el siguiente "truco" (14) podemos reescribir (13) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] = \partial_t\vec{E} \times \vec{B} + \vec{E} \times \partial_t\vec{B} \tag{14}$$

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c}(\partial_t\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] - \vec{E} \times \partial_t\vec{B})\right] \tag{15}$$

Si usamos (2) podemos reemplazar $\partial_t\vec{B}$ a $-c\vec{\nabla} \times \vec{E}$, de forma que reorganizando podemos obtener (16):

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi c}(\partial_t\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] - \vec{E} \times c\vec{\nabla} \times \vec{E})\right] \tag{16}$$

La cual podemos reorganizar según (17):

$$\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi}\partial_t\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] \tag{17}$$

Donde a (17) podemos sumar 0, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B}$. De esta forma si colocamos esta expresión en (10) podríamos separar la integral en los siguientes dos términos:

$$\frac{d\vec{P_M}}{dt} + \frac{1}{4\pi c}\int_v \partial_t\left[\vec{E} \times \vec{B}\right]dv = \int_v \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right]dv \tag{18}$$

Donde de (18) podemos definir el momento electromagnético como:

$$\vec{P}_{EM} = \frac{1}{4\pi c}\int_v \left[\vec{E} \times \vec{B}\right]dv \tag{19}$$

Utilizando esto podemos reescribir (18) como:

$$\partial_t(\vec{P}_M + \vec{P}_{EM}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right]dv \tag{20}$$

Donde de (20) definimos la matriz de Maxwell a (21):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right] \tag{21}$$

Veamos en notación de índices lo que dice cada término del corchete, primeramente con el término correspondiente al rotor de $\vec{E}$:

$$\left[(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E}\right]_i = \epsilon_{ijk}(\epsilon_{jmn}\partial_m E_n)E_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jmn}E_k\partial_m E_n \tag{22}$$

Donde en (22) la propiedad de permutación cíclica sobre tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} para llevarlo al tensor ϵ_{jki} poder aplicar la propiedad de las deltas:

$$\left[(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E}\right]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jmn}E_k\partial_m E_n = \epsilon_{jki}\epsilon_{jmn}E_k\partial_m E_n = (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im})E_k\partial_m E_n$$

$$\Leftrightarrow \left[(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E}\right]_i = E_k\partial_k E_i - E_k\partial_i E_k \tag{23}$$

Ahora veamos el término correspondiente a la divergencia de $\vec{E}$:

$$\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]_i = (\partial_j E_j)E_i \tag{24}$$

Antes de seguir con los términos correspondientes a $\vec{B}$ notemos que en (21) posee esencialmente dos términos, uno vinculado con la suma de cosas de divergencias y rotores de $\vec{E}$, y otro exactamente igual pero reemplazando $\vec{E}$ por $\vec{B}$. Por lo que si calculamos la suma con $\vec{E}$ de forma directa podemos obtener lo que ocurre con $\vec{B}$.

Para la siguiente cuenta notar que ijk son índices mudos, por lo que puedo llamar $j \equiv k$ sin problemas:

$$\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{E}\right]_i = \partial_j E_j E_i + E_k\partial_k E_i - E_k\partial_i E_k$$

$$\Leftrightarrow \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{E}\right]_i = E_j\partial_j E_i + \partial_j E_j E_i - E_j\partial_i E_j$$

$$\Leftrightarrow \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{E}\right]_i = \partial_j(E_iE_j) - E_j\partial_i E_j$$

$$\Leftrightarrow \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{E}\right]_i = \partial_j(E_iE_j) - \frac{1}{2}\partial_i(E_jE_j)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\vec{E}\right]_i = \partial_i\left[(E_iE_j) - \frac{1}{2}(E_jE_j)\delta_{ij}\right] \tag{25}$$

Si repetimos todos los mismos procesos con $\vec{B}$ hasta llegar a (25), mirando (21) y (25) podemos notar que nos queda de factor común ∂ en notación de índices, por lo que tomando el factor $(4\pi)^{-1}$ de (20) podemos definir el Tensor de Maxwell como:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}\vec{E} + \vec{B}\vec{B})\right] \tag{26}$$

Por lo que volviendo a (20) podemos reescribir en notación de índices como:

$$\left[\partial_t(\vec{P}_M + \vec{P}_{EM})\right]_i = \int_v (\partial_j T_{ij})dv$$

Donde si usamos Stokes (o teorema de la divergencia) obtenemos:

$$\left[\partial_t(\vec{P}_M + \vec{P}_{EM})\right]_i = \int_{s(v)} T_{ij}n_j ds$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{P}_M + \vec{P}_{EM}) = \int_{s(v)} \vec{\vec{T}}\hat{n}ds \tag{27}$$

Se puede calcular como es la proyección sobre alguna dirección del tensor de Maxwell utilizando la ecuación (26), esto es muy util para resolver la integral dada en ecuación (27) de cada problema en específico:

$$\vec{\vec{T}}\cdot\hat{n} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right) + \vec{B}\left(\vec{B}\cdot\hat{n}\right) - \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)\hat{n}\right] \tag{28}$$