Notas de Análisis Numérico

2022

María Teresa Casparri
Javier García Fronti
Gustavo Krimker

Autoridades

Universidad de Buenos Aires
Rector: Dr. Alberto E. Barbieri

Facultad de Ciencias Económicas
Decano: Dr. Ricardo Pahlen Acuña

Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM)
Directora: Dra. María Teresa Casparri

Centro de Investigación en Metodologías Básicas y Aplicadas a la Gestión (CIMBAGE)
Director: Dr. Javier Ignacio García Fronti

Centro de Investigación

Metodologías Básicas

Aplicadas a la Gestión

(CIMBAGE - IADCOM)

.UBAeconómicas

Estas notas corresponden a “Análisis Numérico”, asignatura ubicada en el Ciclo Profesional de la carrera de actuario de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos aires.

La formación de la carrera de actuario articula conocimientos económicos, administrativos, contables, jurídicos, matemáticos y estadísticos, para analizar los problemas del seguro, los programas de previsión social, de las finanzas y de la gestión del riesgo en general, desarrollando modelos actuariales idóneos para su tratamiento en contextos de riesgos e incertidumbre. Para ello es fundamental contar con una sólida formación matemática y esta materia es parte de ella.

Esta asignatura comprende las bases matemáticas para la utilización de técnicas numéricas aplicables a los distintos problemas actuariales, atendiéndose así a una formación matemática y computacional.

El objetivo es integrar los conocimientos adquiridos en el ciclo matemático y los articule con nuevos conceptos de resolución numérica, de forma de abordar problemas actuariales específicos e interpretar teoría actuarial formulada en lenguaje matemático. Se busca comprender los diferentes métodos numéricos disponibles y desarrollar la capacidad de elegir el apropiado para cada problema, obteniendo resultados en función del nivel dado de aproximación prefijado.

Índice general

Capítulo 0

Conceptos preliminares

A continuación enunciaremos algunas de las definiciones y teoremas básicos que utilizaremos a lo largo de estas notas.

Definición 0.1. *Diremos que f es* de clase C^1 *en el intervalo* $[a;b]$ *si* f' *es continua en* $[a;b]$.

Definición 0.2. *Diremos que f es* de clase C^n *en el intervalo* $[a;b]$ *si* $f^{(n)}$ *es continua en* $[a;b]$.

Definición 0.3. *Diremos que f es* de clase C^∞ *en el intervalo I si f es infinitas veces derivable y continua en I.*

Teorema 0.1 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea f continua en el intervalo* $[a;b]$. *Si $k \in \mathbb{R}$ es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto ξ perteneciente al intervalo $(a;b)$ tal que $f(\xi) = k$.*

Teorema 0.2 (Bolzano)**.** *Si f es continua en el intervalo* $[a,b]$ *y* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *entonces existe un ξ perteneciente al* (a,b) *tal que* $f(\xi) = 0$.

Teorema 0.3 (Teorema de acotabilidad)**.** *Si* $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$, *entonces f está acotada en* $[a,b]$.

Teorema 0.4 (Teorema de Weierstrass)**.** *Si* $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$, *entonces f tiene un máximo global y un mínimo global en* $[a,b]$.

Teorema 0.5 (Teorema Generalizado de Rolle)**.** *Si f continua en* $[a,b]$, *y existen las derivadas* $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ *en* $(a;b)$ *y* $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$ *(con* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a;b]$*) entonces existe ξ perteneciente al* (a,b) *tal que* $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Teorema 0.6 (Teorema de Lagrange)**.** *Si f continua en* $[a,b]$ *y derivable en* $(a;b)$ *entonces existe ξ perteneciente al* (a,b) *tal que* $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Teorema 0.7 (Teorema de Taylor)**.** *Sea* $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ *una función tal que* f *es de clase* $C^{(n)}$ *en* $[a, b]$ *y existe* f^{n+1} *en* $(a; b)$*. Si* $x_0 \in [a; b]$*, entonces para todo* $x \in [a; b]$ *existe un punto* ξ *entre* x *y* x_0 *tal que:*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + &f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \end{aligned}$$

Teorema 0.8 (Teorema del valor medio ponderado)**.** *Sea* f *continua en* $[a, b]$ *y* g *una función integrable Riemann en* $[a, b]$*. Si* g *no cambia de signo en* $[a, b]$*, entonces existe un número* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Capítulo 1

Teoría de error y Números Complejos

1.1. Teoría del error

Cuando efectuamos un cálculo con una computadora, introducimos los datos en el sistema decimal, la máquina los convierte en base 2, opera en esta base y luego nos devuelve el resultado en base 10. Todo esto, sumado al hecho de trabajar sólo con una cantidad finita de números, hace que perdamos precisión en los cálculos. Dado un número natural n, existen $k+1$ cifras a_0, $a_1, \ldots, a_k$ pertenecientes al conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tales que n admite el siguiente desarrollo:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

con $a_k \neq 0$. Como dicho desarrollo es único, escribimos

$$n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$$

Ejemplo 1.1. $386 = 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 6$.

En general, dada una base b cualquiera, y un número natural n, existen $k+1$ cifras, tomadas del $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tales que

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

con $a_k \neq 0$, lo cual nos permite escribir

$$n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_{0(b)}$$

1.1.1. Sistema binario

En general, un natural n se escribe en código binario de la siguiente forma

$$n = a_k 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 \tag{1.1}$$

donde $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \{0, 1\}$ y $a_k \neq 0$.

Para representar en base 2 un número natural n, podemos proceder de la siguiente forma:

Dividiendo ambos miembros de (1.1) por 2, resulta:

$$\frac{n}{2} = a_k 2^{k-1} + a_{k-1}2^{k-2} + \cdots + a_1 2^0 + \frac{a_0}{2}$$

Así que a_0 es el resto de dividir n por 2.

Sea $\frac{n}{2} = Q_0 + \frac{a_0}{2}$ con $Q_0 = a_k 2^{k-1} + a_{k-1}2^{k-2} + \cdots + a_1 2^0$. Dividiendo Q_0 por 2:

$$\frac{Q_0}{2} = a_k 2^{k-2} + a_{k-1}2^{k-3} + \cdots + \frac{a_1}{2}$$

de donde resulta que a_1 es el resto de dividir Q_0 por 2.

Continuando este proceso obtenemos dos sucesiones $\{Q_n\}$ y $\{a_n\}$ de cocientes y restos respectivamente. El proceso termina cuando encontramos un k tal que $Q_k = 0$.

Ejemplo 1.2. *Escribiremos el número 386 en base 2. Comenzando con 386 : 2,*

Q_0	*193*	a_0	*0*
Q_1	*96*	a_1	*1*
Q_2	*48*	a_2	*0*
Q_3	*24*	a_3	*0*
Q_4	*12*	a_4	*0*
Q_5	*6*	a_5	*0*
Q_6	*3*	a_6	*0*
Q_7	*1*	a_7	*1*
Q_8	*0*	a_8	*1*

Luego, $386 = 110000010_{(2)}$.

1.1.2. Fracciones binarias

Sea R un número real tal que $0 < R < 1$. Existe una sucesión de cifras $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ pertenecientes al $\{0, 1\}$, tales que

$$R = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + \cdots + d_n 2^{-n} + \ldots \tag{1.2}$$

de donde podemos escribir,

$$R = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots_{(2)}$$

Para determinar los valores de los d_k podemos desarrollar el siguiente algoritmo:

Multiplicando (1.2) por 2 se tiene que:

$$2R = d_1 + \left[\left(d_2 2^{-1}\right) + \left(d_3 2^{-2}\right) + \cdots + \left(d_n 2^{-n+1}\right) + \ldots \right]$$

El número entre corchetes es positivo y menor que 1, por lo tanto $d_1 = ent(2R)$. Para continuar el proceso, tomamos la parte fraccionaria o mantisa de $2R$, $mant(2R) = M_1$ y obtenemos

$$M_1 = d_2 2^{-1} + d_3 2^{-2} + \cdots + d_n 2^{-n+1} + \ldots$$

Luego,

$$2M_1 = d_2 + \left[\left(d_3 2^{-1}\right) + \left(d_4 2^{-2}\right) + \cdots + \left(d_n 2^{-n+2}\right) + \ldots \right]$$

de donde $d_2 = ent(2M_1)$.

En general, obtenemos dos sucesiones $\{d_k\}$ y $\{M_k\}$:

$$d_k = ent(2M_{k-1}) \qquad \text{para } k > 1$$

$$M_k = mant(2M_{k-1})$$

con $d_1 = ent(2R)$ y $M_1 = mant(2R)$

Ejemplo 1.3. *Consideremos $R = 0,7$.*

d_1=*ent(1,4)=1*	M_1=*mant(1,4)=0,4*
d_2=*ent(0,8)=0*	M_2=*mant(0,8)=0,8*
d_3=*ent(1,6)=1*	M_3=*mant(1,6)=0,6*
d_4=*ent(1,2)=1*	M_4=*mant(1,2)=0,2*
d_5=*ent(0,4)=0*	M_5=*mant(0,4)=0,4*
d_6=*ent(0,8)=0*	M_6=*mant(0,8)=0,8*
$\vdots$	$\vdots$

Por lo tanto, $0,7 = 0,101100110\ldots_{(2)} = 0,1\overline{0110}_{(2)}$

También podemos pensarlo de la siguiente manera. Sea f *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ mant(x) < 0,5 \\ 1 \ si \ mant(x) \geq 0,5 \end{cases}$$

y la recurrencia $x_{k+1} = mant(2x_k)$ *con* $x_1 = x$*. En el caso* $x = 0,7$ *obtenemos la sucesión:*

$$\{0,7; 0,4; 0,8; 0,6; 0,2; 0,4; \ldots\}$$

y aplicando f *a cada término de la sucesión, resulta nuevamente que*

$$0,7 = 0,101100110\ldots_{(2)} = 0,1\overline{0110}_{(2)}$$

1.1.3. Pasaje a base 10

Para pasar una fracción binaria a base 10, solo debemos plantear la descomposición binaria y realizar los cálculos:

Ejemplo 1.4.

$$\begin{aligned} 0,\overline{011}_{(2)} &= 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} \\ &\quad + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(3n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} \\ &= 3\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} = \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

1.1.4. Números de computadora

Las computadoras usan para los números reales una representación binaria en coma flotante normalizada. Esto significa que lo que almacena es una aproximación binaria:

$$x = \pm q \times 2^n$$

donde q es la mantisa, que verifica $\frac{1}{2} \leq q < 1$ y n es el exponente.

Luego la cantidad de cifras que puede almacenar es finita. Por ejemplo, si consideramos los números de la forma $0,d_1d_2d_3d_{4(2)} \times 2^n$ con $d_1 = 1$, $d_i \in \{0,1\}$ y $n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ la cantidad de posibles números es $2 \times 2 \times 2 \times 8 = 64$

Si a una computadora con una mantisa de 4 cifras como la que acabamos de describir, le pedimos que realice la operación

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right)$$

obtendríamos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} &= 0,0\overline{0011}_{(2)} \\
&= 0,0001100110011\ldots_{(2)} \\
&= 0,1100110011\ldots_{(2)} \times 2^{-3} \\
&\approx 0,1101_{(2)} \times 2^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= 0,\overline{0011}_{(2)} \\
&= 0,001100110011\ldots_{(2)} \\
&= 0,1100110011\ldots_{(2)} \times 2^{-2} \\
&\approx 0,1101_{(2)} \times 2^{-2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} + \frac{1}{5} &= 0,01101_{(2)} \times 2^{-2} + 0,1101_{(2)} \times 2^{-2} \\
&= 1,00111_{(2)} \times 2^{-2} = 0,100111_{(2)} \times 2^{-1} \\
&\approx 0,1010_{(2)} \times 2^{-1}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0,01010_{(2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

De esta forma, para la realización de cálculos, las computadoras disponen de un subconjunto finito de números racionales.

Las especificaciones técnicas acerca del hardware de punto flotante, fue establecida por el IEEE (Instituto para Ingenieros Electrónicos y Eléctricos) en el informe denominado *Binary Floating Point Arithmetic Standard 754-1985*.

Para almacenar un número las computadoras guardan una secuencia finita de ceros y unos, según estas normas, las cuales incluyen la cantidad de bits (dígitos binarios) que se reservan a cada número.

Por ejemplo, si el procesador de la computadora utiliza una representación de 64 bits, el primero indica el signo, ($s = 0$ si es positivo, $s = 1$ si es negativo), los 11 siguientes, conforman el exponente y los 52 últimos, la mantisa.

Los 11 bits correspondientes al exponente, permiten escribir todos los números del 0 hasta el $1111111111_{(2)}$. Es decir, desde el 0 hasta $2^{11}-1 = 2047$.

Con el fin de poder representar números pequeños y números muy grandes, estos 2048 posibles exponentes se distribuyen desde -1023 hasta 1024. Sea e el número representado por estos 11 bits. El exponente del número representado será 2^{e-1023}. De esta forma, si $e = 0$, el exponente será 2^{-1023} y si $e = 2047$, el exponente resultará 2^{1024}.

Así, si s es el signo, e el exponente y m la mantisa, el sistema nos da un número de coma flotante de la forma $(-1)^s 2^{e-1023}(1+m)$.

Ejemplo 1.5. *El número*

$$010000000000111\underbrace{000000\ldots0}_{49\ ceros}$$

representa al número $n = (-1)^s 2^{e-1023}(1+m)$*, donde:*

$$s = 0,$$

$$e = 10000000000_{(2)},\ \ y$$

$$m = 1110000000000\ldots00000_{(2)}$$

Es decir,

$$e = 1 \times 2^{10} + 0 \times 2^9 + \ldots 0 \times 2^1 + 0 = 1024,\ \ y$$

$$m = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{52} = \frac{7}{8}$$

Por lo tanto,

$$n = (-1)^0 \times 2^{1024-1023} \times (1 + 0,875) = 3,75$$

Mediante este sistema de punto flotante, el número positivo N más grande que se puede representar es el dado por:

$$s = 0,$$

$$e = 11111111111_{(2)} = 2047 \text{ y}$$

$$m = 111111111\ldots1111_{(2)} = \sum_{k=1}^{52}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{52}$$

Luego,

$$N = 2^{1024} \times \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{52}\right] \approx 2^{1025}$$

Tomando logaritmos en base 10 se tiene que

$$\log N \approx 1025 \log 2 \approx 308$$

con lo cual,

$$N \approx 10^{308}$$

De manera similar, se puede verificar que el número positivo más pequeño es del orden de 10^{-308}.

Una mantisa que disponga de al menos 24 cifras binarias, permite obtener una precisión de 7 cifras decimales, mientras que con 32 cifras en la mantisa, se pueden almacenar hasta 9 cifras significativas.

1.1.5. Error absoluto y relativo

Supongamos que $\widehat{p}$ es una aproximación a p. El *error absoluto* de la aproximación es

$$E_p = |p-\widehat{p}|$$

y el *error relativo* es

$$R_p = \frac{|p-\widehat{p}|}{p}$$

con $p \neq 0$. Diremos que el número $\widehat{p}$ aproxima a p con t *cifras significativas* si t es el mayor entero no negativo para el cual

$$\frac{|p-\widehat{p}|}{p} < 5 \times 10^{-t}.$$

1.2. Números complejos

Definición 1.1. *Se llama número complejo a toda expresión de la forma*

$$a+bi$$

donde a y b son números reales e i satisface que $i^2 = -1$. El número real a se conoce como la parte real del complejo z y se representa por $Re(z)$, mientras que el número real b se conoce como la parte imaginaria de z y se representa por $Im(z)$.

Nota 1.1. *Los números reales son complejos con parte imaginaria nula. Por ejemplo $4 = 4 + 0i$.*

El conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

1.2.1. Suma y producto de números complejos

La suma de dos números complejos z_1 y z_2 es otro número complejo que tiene como parte real a la suma de las partes reales de cada uno de ellos y como parte imaginaria la suma de las respectivas partes imaginarias. Es decir, si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

De manera similar, el producto de dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ es otro número complejo que se define de la siguiente manera:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

De hecho, este producto puede pensarse como si fueran polinomios en la variable i sustituyendo i^2 por -1 cada vez que aparezca.

Ejemplo 1.6. *Supongamos que $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 - 5i$. Tenemos entonces que:*

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(2 - 5i) = 6 - 15i + 4i - 10i^2 = 6 - 11i + 10 = 16 - 11i$$

1.2.2. Propiedades de la suma y de la multiplicación.

La suma de complejos goza de las siguientes propiedades

(S1) Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

(S2) Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(S3) Existencia de elemento neutro: $z + 0 = 0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(S4) Existencia de elemento opuesto: Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $-z$ tal que $z + (-z) = 0$

La multiplicación tiene propiedades similares:

(M1) Asociativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

(M2) Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(M3) Existencia de elemento identidad (o neutro): $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(M4) Existencia de elemento inverso: Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ existe z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$

Finalmente, ambas operaciones se encuentran relacionadas por el hecho de que la suma es distributiva respecto del producto:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

para toda $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1.2.3. Potencias de i

Observemos que

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1,$$

etc. Las potencias de i se repiten en ciclos de longitud 4. Luego, se tiene que

$$i^n = i^r$$

donde r es el resto de dividir a n por 4.

Ejemplo 1.7.

$$i^{27} = i^3 = -i$$

1.2.4. Representación gráfica de los núneros complejos

4

Tanto el concepto de número complejo como la validez de las operaciones definidas entre ellos, eran cuestionadas por los matemáticos hasta que Gauss (1777-1855) dió una interpretación geométrica de los mismos. Tan confuso les resultaba este concepto, que Leibniz (uno de los matemáticos más importantes del siglo XVII) se refería a ellos como "algo anfibio entre el ser y el no ser".

La interpretación dada por Gauss consiste utilizar un par de ejes cartesianos perpendiculares y colocar la parte real de un complejo en uno de dichos ejes (*eje real*) y la parte imaginaria en el otro (*eje imaginario*) Así todo número complejo queda asociado a un vector o un punto en el plano.

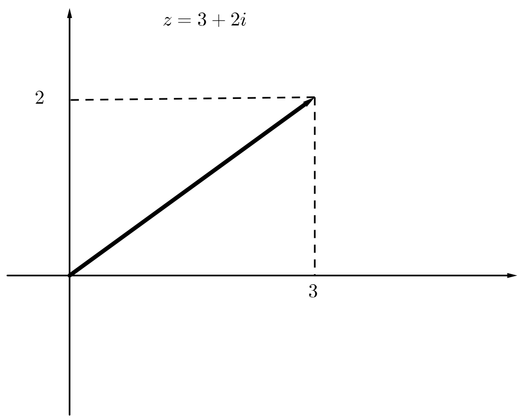


Figura 1.1: Complejo $z = 3 + 2i$

Definición 1.2. *Se llama módulo de un complejo $z = a + bi$ a la longitud del vector que lo representa. El módulo de dicho complejo lo denotamos por $|z|$. Es inmediato que*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Son inmediatas las siguientes propiedades referentes al módulo:

1. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $|z| = |-z|$

Por otra parte es importante ver que

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

La verificación se deja como ejercicio.

1.2.5. División de complejos

Dados dos números complejos z_1 y z_2, donde este último es no nulo, el cociente entre ellos es otro número complejo z_3 tal que $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Es decir, suponiendo que $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = e + fi$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = e + fi = z_3$$

si y sólo si se verifica que

$$(c + di) \cdot (e + fi) = a + bi$$

Efectuando la multiplicación e igualando las partes reales e imaginarias correspondientes, resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ce - df &= a \\ de + cf &= b \end{cases}$$

cuya solución es

$$e = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \qquad f = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Finalmente,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$$

La división de números complejos resulta más sencilla introduciendo la noción de *conjugado.*

Definición 1.3. *Se denomina conjugado del número complejo $z = c + di$ al número complejo*

$$\overline{z} = c - di$$

Observen que desde el punto de vista gráfico z y $\overline{z}$ son simétricos respecto del eje real.

Un hecho importante es que el producto entre un complejo y su conjugado es un número real. Más aún,

$$z \cdot \overline{z} = (c + di)(c - di) = c^2 + d^2$$

Volviendo al problema de la división, esta pueda resolverse fácilmente multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i$$

Ejemplo 1.8.

$$\frac{2-4i}{3+i} = \frac{2-4i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{2-14i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

Ejemplo 1.9. *Demuestren las siguientes propiedades acerca del conjugado:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$
4. *Si* $z \neq 0$ *entonces* $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
5. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
6. $z - \overline{z} = 2Im(z)i$

1.2.6. Forma trigonométrica de un complejo

Definición 1.4. *Llamaremos argumento de z al ángulo que forma el vector que representa al complejo z con la dirección positiva del eje real. Este ángulo no está unívocamente determinado sino que puede variar en múltiplos enteros de 2π rad. Si $z = a + bi$, denotaremos por $arg(z)$ al único número real tal que:*

$$0 \leq arg(z) < 2\pi; \quad \cos(arg(z)) = \frac{a}{|z|}; \quad \sin(arg(z)) = \frac{b}{|z|}$$

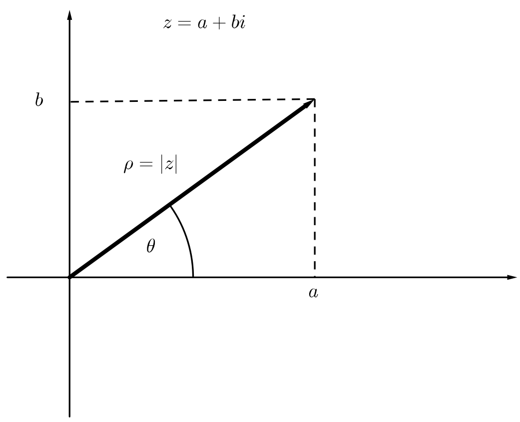


Figura 1.2: Módulo y argumento de un complejo $z = a + bi$

En el triángulo de la figura puede observarse que

$$a = \rho \cos\theta \quad \text{y} \quad b = \rho \sin\theta$$

Luego,

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \tag{1.3}$$

Definición 1.5. *La expresión anterior se conoce como la forma trigonométrica del complejo z.*

Utilizando conocidas identidades trigonométricas, puede calcularse fácilmente el producto y la división de complejos en esta forma.

En efecto, si $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, al multiplicar se obtiene que

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)]$$

Aplicando las fórmulas del coseno y seno de una suma, resulta

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos(\alpha+\beta) + i(\sin(\alpha+\beta)] \tag{1.4}$$

De la fórmula anterior puede observarse que el producto de dos complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y su argumento es la suma de los argumentos de cada uno de ellos. Así, por ejemplo, al multiplicar un número complejo por $z = i$ no se modifica su módulo (pues el módulo de $z = i$ es 1) pero su ángulo queda incrementado en $\frac{\pi}{2}$ rad. Luego su efecto geométrico es rotar el complejo 90 grados en el sentido antihorario.

De manera similar, si $z_2 \neq 0$ podemos calcular $\frac{z_1}{z_2}$. Para ello simplemente multiplicaremos z_1 por el inverso de z_2. Entonces calculemos primero $(z_2)^{-1}$:

$$(z_2)^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{\rho_2(\cos\beta - i\sin\beta)}{\rho_2^2} = \frac{1}{\rho_2}[\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)]$$

Por lo tanto, obtenemos finalmente que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[(\cos(\alpha-\beta) + i(\sin(\alpha-\beta)] \tag{1.5}$$

De las fórmulas anteriores es inmediato el siguiente resultado que se conoce como *fórmula de De Moivre* (matemático francés, 1667-1754):

Teorema 1.1. *(De Moivre) Si $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \tag{1.6}$$

1.2.7. Forma polar de un complejo

Es un resultado muy conocido en los primeros cursos de análisis que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Se conoce como el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial. Las funciones seno y coseno también pueden desarrollarse en series de Taylor, las cuales representan a estas funciones en todo $\mathbb{R}$. Estos desarrollos son:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

y

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Reemplazando las fórmulas (1.8) y (1.9) en la forma trigonométrica (1.3) resulta

$$\begin{aligned}
\rho(\cos\theta + i\sin\theta) &= \rho\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right)\right] \\
&= \rho\left[1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots\right] \\
&= \rho e^{i\theta}
\end{aligned}$$

Esta igualdad recibe el nombre de fórmula de Euler. y la expresión

$$z = \rho e^{i\theta} \tag{1.10}$$

se conoce como la *forma polar de un complejo.*

1.2.8. Raíces de un complejo

Definición 1.6. *Dado el número complejo*

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

diremos que el complejo w es una raíz n-ésima de z si se verifica que $w^n = z$.

Vamos a ver que z posee n raíces n-ésimas. Para ello, supongamos que

$$w = r(\cos\beta + i\sin\beta)$$

y que $w^n = z$. Aplicando la fórmula de De Moivre se tiene que

$$r^n(\cos n\beta + i \sin n\beta) = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Teniendo en cuenta que dos complejos son iguales si tienen igual módulo y sus ángulos difieren en un múltiplo de 2π radianes, se tiene que

$$r^n = \rho \quad \text{y} \quad n\beta = \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

Como ρ y r son números reales positivos, de (1.11) se deduce que

$$r = \sqrt[n]{\rho}$$

y también que

$$\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

Luego, los números complejos

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.12}$$

son raíces n-ésimas de z. Sin embargo, entre los infinitos w_k definidos en (1.12) hay infinitos que se repiten debido a la periodicidad de las funciones cos y sin. Es fácil ver que si elegimos k entre 0 y $n-1$ las raíces serán todas diferentes.

Ejemplo 1.10. *Calculemos las raíces quintas de $z = -1 - i$.*

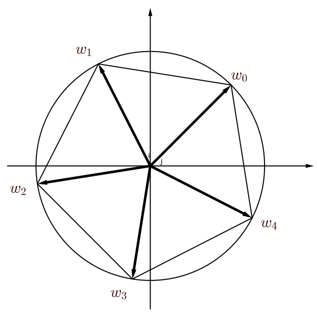


Figura 1.3: Raíces quintas de $z = -1 - i$

Como

$$-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

aplicando la fórmula (1.12) se tiene que

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
w_1 &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}\right)\right] \\
w_2 &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{5}\right)\right] \\
w_3 &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{5}\right)\right] \\
w_4 &= \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{5}\right)\right]
\end{aligned}
$$

De la fórmula (1.12) para calcular raíces n-ésimas se deduce que todas ellas tienen igual módulo y que sus argumentos difieren en $2\pi/n$ radianes. Luego, los extremos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de radio igual a la $\sqrt[n]{\rho}$.

Capítulo 2

Resolución numérica de sistemas de ecuaciones

En todo lo que sigue supondremos como mínimo que f es continua en algún intervalo conveniente.

2.1. Método de bisección

El método más elemental para la resolución de ecuaciones, es el de bisección, que se fundamenta en el Teorema de Bolzano, el cual establece que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y f cambia de signo en dicho intervalo, entonces existe un c perteneciente al (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Sea r una solución de la ecuación $f(x) = 0$. La idea es generar una sucesión $x_1, x_2, \ldots,$ de aproximaciones que converja a r, mediante la aplicación sucesiva del Teorema de Bolzano.

Para ello, debemos partir de un intervalo inicial, $[a_1; b_1]$ que contenga a r y que verifique $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Una vez determinado este intervalo, llamamos x_1 al punto medio, es decir, $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, y luego evaluamos f en dicho punto. Si $f(x_1) = 0$, entonces $r = x_1$ y el problema estaría resuelto. Supongamos que $f(b_1) < 0$ y además $f(x_1) > 0$, entonces la raíz se encuentra entre x_1 y b_1 (si fuera negativo, se encontraría entre a_1 y x_1). Luego llamamos x_2 al punto medio del intervalo $[x_1, b_1]$ y razonamos como antes hasta alcanzar una solución aproximada que satisfaga alguna cota de tolerancia.

2.1.1. Análisis del error

Observemos que en el primer paso, el error ϵ es:

$$\epsilon = |x_1 - r| < \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{l}{2}.$$

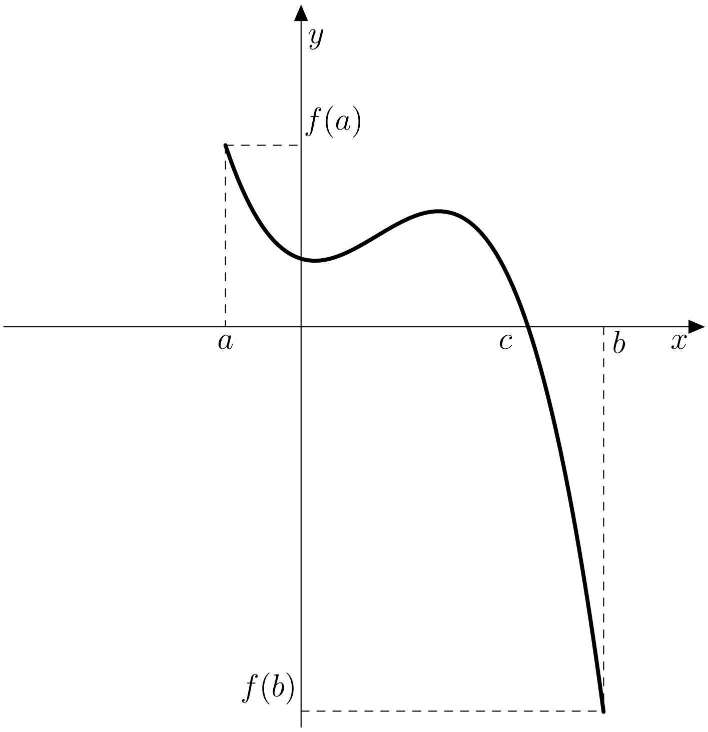


Figura 2.1: Teorema de Bolzano.

En el segundo paso, se tiene que

$$\epsilon = |x_2 - r| < \frac{l}{2^2},$$

y, en general, luego de $n-$pasos,

$$\epsilon = |x_n - r| < \frac{l}{2^n},$$

La expresión anterior no sólo permite trabajar fácilmente con el error, sino que además nos muestra que las aproximaciones convergen a una raíz.

Teorema 2.1. *Consideremos la ecuación* $f(x) = 0$.
Si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *son aproximaciones a una raíz de* f*, obtenidas mediante la aplicación del método de bisección, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

Demostración. Como $\epsilon = |x_n - r| < \frac{l}{2^n}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{l}{2^n} = 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0$, lo cual equivale a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

□

Ejemplo 2.1. *Resolver la ecuación* $x^5 + 2x - 1 = 0$ *con un error menor que* 10^{-5}.

Observemos en primer lugar que como se trata de una ecuación polinómica de grado impar, tiene como mínimo una solución real. Por otra parte, puede probarse que $f(x) = x^5 + 2x - 1$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, de donde, la raíz es única.

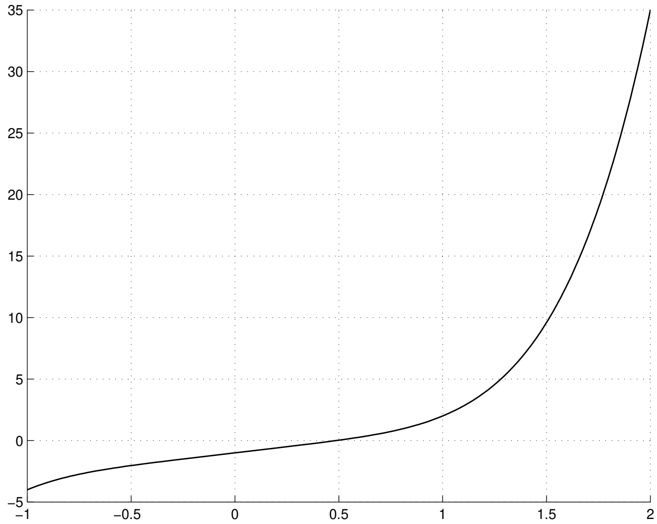


Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = x^5 + 2x - 1$

Por otra parte, se tiene que $f(0) \cdot f(1) < 0$, por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $(0;1)$. Para determinar el menor número de iteraciones necesarias para hallar la solución especificada, sabemos que:

$$\epsilon < \frac{1}{2^n} < 10^{-5}$$

Luego, $10^5 < 2^n \Rightarrow n \geq 17$.

La siguiente tabla, muestra los resultados de las sucesivas iteraciones hasta determinar una solución con un error menor que 10^{-5}:

n	x_n	n	x_n
1	0.50000000000000	10	0.48730468750000
2	0.25000000000000	11	0.48681640625000
3	0.37500000000000	12	0.48657226562500
4	0.43750000000000	13	0.48645019531250
5	0.46875000000000	14	0.48638916015625
6	0.48437500000000	15	0.48635864257813
7	0.49218750000000	16	0.48637390136719
8	0.48828125000000	17	0.48638153076172
9	0.48632812500000		

2.2. Método de Newton-Raphson

Este método consiste en aproximar una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, mediante las raíces de sucesivas aproximaciones lineales de f suficientemente cerca de x_0.

Partiendo de algún punto inicial x_0 se traza la recta tangente a f en x_0, cuya ecuación es

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

La intersección de dicha recta con el eje x es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Luego se traza la recta tangente a f en x_1 y se determina su intersección x_2 con el eje x, y así sucesivamente. De esta forma se genera una sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ donde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Bajo ciertas condiciones bastante generales, y con x_0 cerca de r, este método converge muy velozmente.

Pueden probarse los siguientes resultados:

Teorema 2.2 (Convergencia local)**.** *Sea r una raíz simple de $f(x)$ (lo cual implica que $f'(r) \neq 0$) . Si $f''(x)$ es continua en un entorno de r suficientemente pequeño y x_0 pertenece a dicho entorno, entonces la suceción obtenida por la iteración de Newton-Raphson, converge a r.*

Bajo condiciones más restrictivas, pueden obtenerse resultados de carácter global:

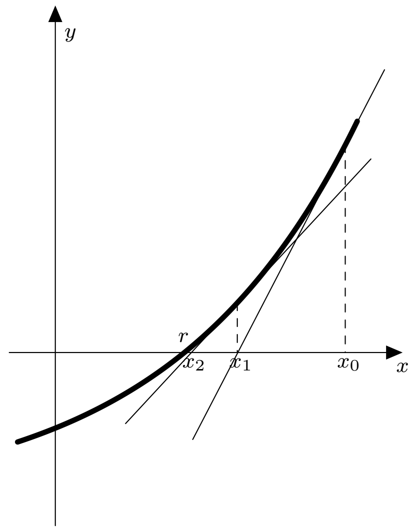


Figura 2.3: Método de Newton.

Teorema 2.3. *Si f es de clase C^2 en el intervalo $[a, b]$ y $f''(x) > 0$ entonces el método de Newton-Raphson converge para todo x_0 siempre que $f'(x_0) \neq 0$. (Obsérvese que en este caso no es necesario pedir que x_0 esté suficientemente cerca de r).*

Newton-Raphson converge cuadráticamente. Más adelante daremos una definición rigurosa de esta idea, pero básicamente implica que en cada paso el error es menor o igual que el cuadrado del error anterior, con lo cual el número de cifras correctas (aproximadamente) se duplica en cada paso.

Ejemplo 2.2. *Consideremos nuevamente la ecuación $x^5 + 2x - 1 = 0$. En este caso la iteración de Newton es:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + 2x_n - 1}{5x_n^4 + 2}$$

Comenzando con $x_0 = 0{,}5$, como en el ejemplo del método de bisección. Se encuentran los siguientes valores:

n	x_n	n	x_n
0	0.50000000000000	2	0.48638904072909
1	0.48648648648649	3	0.48638903593454

La solución obtenida luego de la tercer iteración, $x_4 = 0{,}48638903593454$ tiene un error menor que 10^{-14}. Para obtener este resultado utilizando el método de la bisección se requieren más de 40 iteraciones.

2.3. Método de la secante

Si bien el método de Newton es uno de los más utilizados, supone conocer la derivada de f en cada aproximación. En muchas ocasiones, resulta bastante complicado determinar estos valores, particularmente cuando no se dispone de una fórmula analítica para f'.

En estos casos puede modificarse el método de Newton, aproximando mediante rectas secantes en lugar de tangentes. Dados los puntos iniciales x_0 y x_1, se determina la recta secante que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. Luego se define x_2 como el punto de intersección de la recta anterior con el eje x. Utilizando x_2 y x_1, se define x_3 como la intersección de la secante que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ y el eje x, y así sucesivamente.

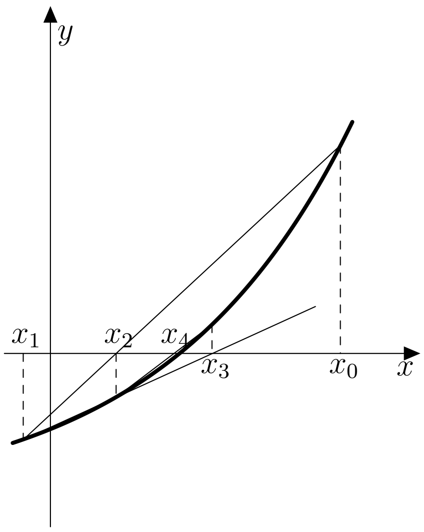


Figura 2.4: Método de la Secante.

La ecuación de la secante que pasa por los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$ es

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

Por lo tanto, la intersección de dicha recta con el eje x es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Obsévese la semejanza con el método de Newton.

Si bien converge un poco más lentamente que el método de la tangente, no sólo tiene como ventaja prescindir de la derivada, sino que en cada paso requiere menos evaluaciones que el método de Newton, ya que sólo debe calcular $f(x_n)$ ($f(x_{n-1})$ se calculó en el paso anterior), mientras que en el de Newton cada paso requiere dos evaluaciones: la de $f(x_n)$ y la de $f'(x_n)$.

Ejemplo 2.3. *Resolveremos ahora la ecuación $x^5 + 2x - 1 = 0$ utilizando el método de la secante. En este caso la iteración es:*

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^5 + 2x_n - 1)\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n^5 + 2x_n - 1) - (x_{n-1}^5 + 2x_{n-1} - 1)}$$

Comenzando con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtienen los siguientes valores:

n	x_n	n	x_n
1	0.33333333333333	5	0.48638890162194
2	0.42756183745583	6	0.48638903594029
3	0.48951137511248	7	0.48638903593454
4	0.48630420655159		

2.4. Iteración por punto fijo

El método de Newton-Raphson es un caso particular de un tipo más general llamado iteración de punto fijo. Recordemos que:

Definición 2.1. *Un* punto fijo *de una función g es un punto p tal que $g(p) = p$.*

Dada una ecuación $f(x) = 0$, hay varias formas de convertir el problema en otro de punto fijo:

Ejemplo 2.4. *Supongamos que se quiere resolver la ecuación $x^3 + 4x - 1 = 0$. Podemos reescribir la ecuación de varias maneras con el objeto de trasformarla en un problema de punto fijo. Por ejemplo,*

$$x = \frac{1 - x^3}{4} \Rightarrow g_1(x) = \frac{1 - x^3}{4}$$

$$x = \sqrt[3]{1 - 4x} \Rightarrow g_2(x) = \sqrt[3]{1 - 4x}$$

$$x = \frac{1}{x^2 + 4} \Rightarrow g_3(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

Sin embargo no todas las ecuaciones anteriores permiten resolver el problema.

Definición 2.2. *La iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ para $x = 0, 1, \ldots$ se denomina* iteración de punto fijo*.*

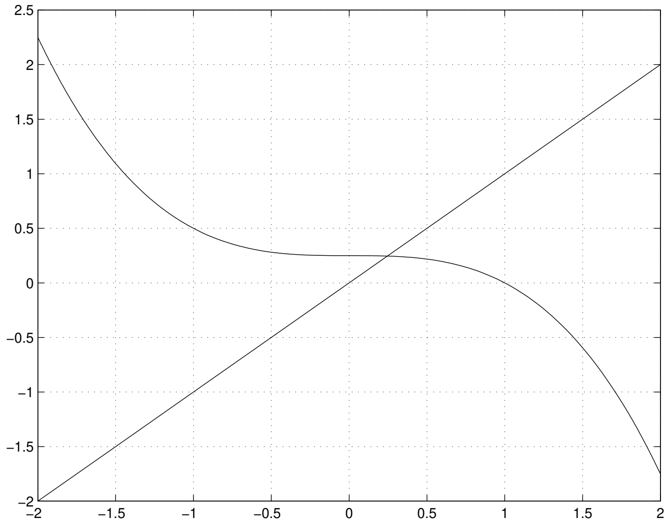


Figura 2.5: Gráfico de $f(x) = x^3 + 4x - 1 = 0$ y la recta $y = x$.

Teorema 2.4. *Sea g una función continua. Si la sucesión generada por la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ de punto fijo converge, entonces lo hace a un punto fijo de g.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión que se obtiene mediante la iteración de punto fijo. Como por hipótesis, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, se tiene que existe un número real l tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l$$

Luego,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} g(x_n) \quad \text{(por definición de iteración de punto fijo)} \\ &= g\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) \quad \text{(por ser } g \text{ continua)} \\ &= g(l) \end{aligned}$$

lo cual demuestra el teorema. $\square$

Teorema 2.5. *Sea g continua en el $[a, b]$. Si $Im(g) \subseteq [a, b]$, entonces g tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b$ (en caso contrario se verificaría trivialmente la propiedad a probar). Consideremos la función $f(x) = g(x) - x$. Como g es continua en $[a, b]$, f también es continua en dicho intervalo ya que es la resta de dos funciones continuas.

Por otra parte, como $Im(g) \subseteq [a, b]$ y $g(a) \neq a$ se tiene que $g(a) - a > 0$. De manera similar, por ser $g(b) \neq b$, resulta que $g(b) - b > 0$.

De lo dicho anteriormente, f es una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, lo que implica $g(c) = c$. □

Teorema 2.6. *Si además g es derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ para toda $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo es único.*

Demostración. Supngamos que existen x_1 y x_2 distintos en el intervalo (a, b) tal que $g(x_1) = x_1$ y $g(x_2) = x_2$. Utilizando esto , el Teorema de Lagrange y la hipótesis, se tiene que:

$$|x_1 - x_2| = |g(x_1) - g(x_2)| = |g'(c)||x_1 - x_2| < \lambda|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

lo cual es un absurdo. Esta contradicción surge de suponer que g tiene más de un punto fijo. Como por el teorema anterior tiene al menos uno, dicho punto fijo debe ser único. □

Teorema 2.7. *Si g verifica las hipótesis del teorema anterior, entonces se pueden dar las siguientes cotas del error de aproximación:*

1. $|x_n - r| \leq \lambda^n |x_0 - r|$

2. $|x_n - r| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$

Ejemplo 2.5. *Resolveremos la ecuación $x^5 + 2x - 1 = 0$ utilizando iteración de punto fijo. Para ello consideraremos la ecuación $x = \frac{1}{2}(1 - x^5)$, de donde la iteración de punto fijo es*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - x_n^5)$$

Tomando x_0 suficientemente próxima a r, se verifican las condiciones de los teoremas anteriores. Como en los casos anteriores partiremos de $x_0 = 0{,}5$:

n	x_n	n	x_n
0	0.50000000000000	9	0.48638903564084
1	0.48437500000000	10	0.48638903597564
2	0.48666851269081	11	0.48638903592879
3	0.48634988700459	12	0.48638903593535
4	0.48639451271207	13	0.48638903593443
5	0.48638826961483	14	0.48638903593456
6	0.48638914315650	15	0.48638903597564
7	0.48638902093220	16	0.48638903593454
8	0.48638903803365		

Observación

Supongamos que se quiere resolver la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

donde f es C^2 en algún intervalo que contiene a la raíz p de la ecuación, y además $f'(p) \neq 0$.

Si consideramos la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

se observa que la raíz p de la ecuación (2.1) es un punto fijo de g. Efectivamente,

$$g(p) = p - \frac{f(p)}{f'(p)} = p - 0 = p$$

Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación (2.1) mediante la iteración de Newton, es equivalente a encontrar un punto fijo de otra función.

2.5. Orden de convergencia

Luego de estudiar la convergencia de un método iterativo, podemos preguntarnos acerca de la rapidez de su convergencia. Para ello, definiremos la idea de orden de convergencia, la cual representa una medida acerca de la velocidad de convergencia.

Definición 2.3. *Diremos que una sucesión de iteraciones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a r con orden $\alpha \geq 1$, si existe una constante $c > 0$ tal que*

$$|r - x_{n+1}| \leq c|r - x_n|^\alpha$$

para todo $n \geq 0$.

En particular, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene a partir de un método iterativo diseñado para resolver una ecuación $f(x) = 0$, llamando E_n al error correspondiente al $n-$ésimo paso, se tiene que

$$|E_{n+1}| \leq c|E_n|^\alpha$$

o, equivalentemente,

$$|E_{n+1}| \sim c|E_n|^\alpha$$

Probaremos que el método de Bisección es de orden 1(convergencia lineal). Observemos en primer término que para $\alpha = 1$, de la definición anterior se tiene que

$$|E_{n+1}| \leq c|E_n|$$

Como la desigualdad vale para todo $n \geq 0$, por inducción se sigue que

$$|E_{n+1}| \leq c^n|E_0|$$

Puede probarse que en el caso de bisección $\alpha = 1$. Para reducir el error en un décimo se requieren aproximadamente entre 3 y 4 pasos pues $\frac{1}{2^4} < \frac{1}{10} < \frac{1}{2^3}$.

Por su parte, en el caso del método de Newton, $\alpha = 2$. En efecto, sea f de clase C^2 en algún intervalo suficientemente pequeño que contenga a una raíz simple, r de f.

Dada la iteración de Newton, se tiene que:

$$x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r$$

Por lo tanto,

$$E_{n+1} = \frac{E_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.2}$$

Por otra parte, realizando un desarrollo de f en polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de x_n, se tiene

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$$

Haciendo $x = r$,

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2}(r - x_n)^2 f''(\xi) \\ &= f(x_n) - f'(x_n)E_n + \frac{1}{2}(E_n)^2 f''(\xi) \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{f'(x_n)E_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\frac{1}{2}(E_n)^2 f''(\xi)}{f'(x_n)}$$

Utilizando la igualdad (2.2), obtenemos,

$$E_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)}{f'(x_n)}(E_n)^2$$

y, finalmente,

$$|E_{n+1}| \leq C(E_n)^2$$

y por ende, $\alpha = 2$. En cada paso el error se reduce cuadráticamente, con lo cual, el número de cifras correctas, básicamente, se duplica con cada iteración.

Puede probarse que en general, los métodos de iteración por punto fijo son de orden 1 y que el método de la secante es de orden $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Capítulo 3

Sumación

Muchos modelos económicos y financieros consideran al tiempo como una variable discreta en lugar de continua. Esto conduce a la necesidad de plantear y resolver ecuaciones en diferencias, las cuales constituyen la versión discreta de las ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 4 hemos definido el operador de diferencias Δ, el cual cumple un rol preponderante en el cálculo discreto. Se trata de un operador lineal que es el análogo discreto del operador de derivación.

En general, tal como lo planteara George Boole en su *Calculus of Finite Differences*, las definiciones y métodos utilizados en el cálculo finito están íntimamente vinculados a los propios del cálculo diferencial. En particular, nos interesa el problema de la antidiferencia o *integración finita*.

3.1. Antidiferencia

Recordemos que una función F es una *primitiva* o *antiderivada* de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Análogamente tenemos la siguiente definición:

Definición 3.1. *Una función F es una* antidiferencia *de f si*

$$\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = f(n)$$

Es usual utilizar el símbolo Δ^{-1} para denotar al operador de antidiferencia:

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) \text{ si y solo si } \Delta F(n) = f(n)$$

Ejemplo 3.1. *La función* $F(x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$ *es una antidiferencia de* $f(x) = x^2 - x$. *En efecto,*

$$\begin{aligned}
\Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) \\
&= \frac{1}{3}(x+1)x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) \\
&= \frac{1}{3}x(x-1)\left[(x+1) - (x-2)\right] \\
&= \frac{1}{3}x(x-1)3 \\
&= x^2 - x
\end{aligned}$$

De la misma forma que si una función tiene antiderivada, dicha antiderivada no es única, si F es una antidiferencia de f resulta que $F(x) + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es cualquier función de período 1 (esto es, $\alpha(x+1) = \alpha(x)$ para toda x), también es una antidiferencia de f:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[F(x) + \alpha(x)\right] &= \left[F(x+1) + \alpha(x+1)\right] - \left[F(x) + \alpha(x)\right] \\
&= \left[F(x+1) + \alpha(x)\right] - \left[F(x) + \alpha(x)\right] \\
&= F(x+1) - F(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

3.2. Sumas indefinidas y definidas

Definición 3.2. *Llamaremos* suma indefinida *de* $f(x)$ *al conjunto de todas sus antidiferencias y la denotaremos por*

$$\sum f(x)$$

Es decir que,

$$f(x) = \Delta F(x) \Leftrightarrow \sum f(x) = F(x) + \alpha(x)$$

con $\alpha(x+1) = \alpha(x)$

Obsérvese la conexión entre el concepto de suma indefinida y el de integral indefinida.

Finalmente, si $f(x) = \Delta F(x)$, por simple imitación del Teorema de Barrow, daremos la siguiente definición:

Definición 3.3. *Llamaremos* suma definida *de f entre a y b, denotada por $\sum_a^b f(x)$ al número:*

$$\sum_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

La igualdad anterior es, en principio, una expresión puramente formal que surge de una analogía. Es claro que según la definición dada, $\sum_a^b f(x)$ es un número, pero ¿tiene algún significado?

Consideremos entonces una función $f(x)$ tal que

$$f(x) = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$$

Utilizando el principio de inducción completa el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Si $b > a$ entonces*

$$\sum_a^b f(x) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Demostración. Observemos en primer término que si $b > a$, existe un $n \in \mathbb{N}/b = a + n$.

La proposición a demostrar es válida para $n = 1$:

$$\sum_a^{a+1} f(x) = F(a+1) - F(a) = \Delta F(a) = f(a) = \sum_{k=a}^{a} f(k)$$

Supongamos que la igualdad es válida para un $n \geq 1$ cualquiera. Es decir,

$$\sum_a^{a+n} f(x) = \sum_{k=a}^{a+n+1} f(k)$$

Probaremos que con este supuesto, la proposición también es válida para $n + 1$ Aplicando las definiciones de suma definida, Δ y antidiferencia:

$$\begin{aligned}
\sum_a^{a+n+1} f(x) &= F(a+n+1) - F(a) \\
&= F(a+n+1) - F(a) - F(a+n) + F(a+n) \\
&= F(a+n+1) - F(a+n) + F(a+n) - F(a) \\
&= \Delta F(a+n) + F(a+n) - F(a) \\
&= f(a+n) + F(a+n) - F(a) \\
&= f(a+n) + \sum_a^{a+n} f(x)
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned}\sum_{a}^{a+n+1} f(x) &= f(a+n) + \sum_{k=a}^{a+n-1} f(x)\\ &= \sum_{k=a}^{a+n} f(x)\end{aligned}$$

lo cual completa el proceso de inducción. □

Esta interpretación resultará sumamente útil para calcular algunas sumas finitas e infinitas.

Ejemplo 3.2. *Calcular*

$$1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + 20\cdot 20!$$

Es decir, calcular $\sum_{k=1}^{20} k\cdot k!$

En primer lugar, es necesario observar que:

$$\begin{aligned}\Delta x! &= (x+1)! - x!\\ &= (x+1)x! - x!\\ &= x!(x+1,1)\\ &= x\cdot x!\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\sum x\cdot x! = x! + \alpha(x)$$

pues $x!$ *es una antidiferencia de* $x\cdot x!$.

Utilizando el teorema anterior,

$$\sum_{k=1}^{20} k\cdot k! = \sum_{1}^{21} x\cdot x! = x!\Big|_{1}^{21} = 21! - 1!$$

Ejemplo 3.3. *Calcular*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Observemos que si $F(x) = \dfrac{-1}{x+1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) \\
&= \frac{-1}{x+2} - \frac{-1}{x+1} \\
&= \frac{-(x+1)+(x+2)}{(x+2)(x+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)(x+2)}
\end{aligned}$$

Luego, $\sum \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{-1}{x+1}$, y entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{1}^{n+1} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
&= \left. \frac{-1}{x+1} \right|_{1}^{n+1} \\
&= \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n}{2(n+2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2(t+2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3.3. Algunas propiedades

Sea F una antidiferencia de f. De la definición de suma definida se sigue que:

1. $\sum_a^a f(x) = F(a) - F(a) = 0$

2. $\sum_a^b f(x) = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\sum_b^a f(x)$

3. Si $a < c < b$, entonces $\sum_a^b f(x) = \sum_a^c f(x) + \sum_c^b f(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_a^c f(x) + \sum_c^b f(x) &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \sum_a^b f(x)\end{aligned}$$

Compárese estos resultados con los análogos para la integral definida.
Sea f integrable en el $[a; b]$, se tiene que:

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Si $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. (Linealidad) Como una consecuencia inmediata de la linealidad del operador Δ se tiene que el operador de suma definida también es lineal. Es decir,

   a) $\sum_a^b kf(x) = k\sum_a^b f(x)$

   b) $\sum_a^b [f(x) + g(x)] = \sum_a^b f(x) + \sum_a^b g(x)$

Por otra parte, así como existen funciones que tienen primitivas o antiderivadas inmediatas, podemos listar algunas funciones que tienen antidiferencia inmediata.

3.3.1. Sucesiones geométricas

Sea $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$. Entonces,

$$\Delta f(x) = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$$

Luego,

$$\Delta\frac{a^x}{a-1} = a^x$$

y, por lo tanto,

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a-1} + \alpha(x)$$

con α cualquier función de período 1. De la expresión anterior puede deducirse la conocida suma de los primeros $n-$términos de una sucesión geométrica. Dada $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} &= \sum_{1}^{n+1} aq^{x-1} = a\sum_{1}^{n+1} q^{x-1}\\ &= a\frac{q^{x-1}}{q-1}\Big|_{1}^{n+1} = a\left[\frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1}\right]\\ &= a\frac{q^n}{q-1}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4. *Una persona debe a principio de año 12 cuotas mensuales iguales y consecutivas de \$1000 c/u con vencimiento a fin de cada mes.*

Suponiendo una tasa de interés efectiva mensual del 5 %, constante a lo largo de todo el año.

¿Cuánto debe esta persona a principio de año?

Se desea conocer el valor actual (a comienzo de año) de las 12 cuotas mensuales.

Definiendo al factor de actualización financiero mensual como $v_{12} = \frac{1}{1+0,05} = 1,05^{-1}$*, se tiene que:*

$Valor\ actual = 1000.v_{12}+1000.v_{12}^2+1000.v_{12}^3+...+1000.v_{12}^{12} = \sum_{x=1}^{12} 1000.v_{12}^x = 1000.\sum_{x=1}^{12} v_{12}^x$

Recordando el ejemplo anterior y haciendo $n = 12$ *y* $a = v_{12}$*; la respuesta es: 1000.*

$$\frac{1,05^{-13} - 1,05^{-1}}{1,05^{-1} - 1}$$

3.3.2. Potencias factoriales

Definición 3.4. *Dado un entero* $n \geq 0$ *y un* h *entero y positivo, llamaremos* potencia factorial descendente *a la función*

$$x^{n/-h} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h)$$

Cuando $n = 1$ utilizaremos la notación de Knuth para denotar la correspondiente potencia factorial:

$$x^{n/-1} = x^{\underline{n}}$$

que leeremos com x *a la* n *descendente*. Estas funciones cumplen un papel sumamente importante en el cálculo de sumas, pues

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\
&= (x+1)x(x-1)\ldots(x-n+2) - x(x-1)\ldots(x-n+1) \\
&= x(x-1)\ldots(x-n+2)(x+1-x+n-1) \\
&= nx(x-1)\ldots(x-n+2) \\
&= nx^{\underline{n-1}}
\end{aligned}$$

Es decir, en el cálculo finito, las potencias factoriales desempeñan el papel de las potencias en el cálculo tradicional.

Es fácil verificar que

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

Por otra parte, puede probarse por inducción que las potencias factoriales satisfacen la siguiente recurrencia:

$$x^{\underline{n}} = (x-n+1)x^{\underline{n-1}}$$

A partir de esta relación puede extenderse la idea para valores no positivos de n.

Haciendo $n = 1$ y observando que $x^{\underline{1}} = x$, resulta que $x^{\underline{1}} = x \cdot x^{\underline{0}}$, de donde

$$x^{\underline{0}} = 1$$

Para los casos $n = 0$ y $n = -1$, se obtiene que:

$$x^{\underline{0}} = (x+1)x^{\underline{-1}} \Rightarrow x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

y, anï¿½logamente,

$$x^{\underline{-1}} = (x+2)x^{\underline{-2}} \Rightarrow x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

En general,

$$x^{\underline{-n}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-n}} &= (x+1)^{\underline{-n}} - x^{\underline{-n}} \\
&= \frac{1}{(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)} - \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} \\
&= \frac{x+1-x-n-1}{(x+1)\dots(x+n+1)} \\
&= -nx^{\underline{-n-1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto sigue siendo válida la igualdad, siempre y cuando $n \neq -1$. Tenemos entonces que

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1} + \alpha(x) \text{ con } n \neq -1$$

De manera similar a las potencias factoriales decrecientes podríamos definir potencias factoriales ascendentes:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

Sin embargo esto no es necesario, ya que

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = (x+n-1)^{\underline{n}},$$

de donde toda potencia ascendente es un potencia descendente en virtud de la conmutatividad del producto.

Ejemplo 3.5. *Calcular* $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2) &= \sum_{1}^{11} x(x+1)(x+2) \\
&= \sum_{1}^{11} x^{\overline{3}} \\
&= \sum_{1}^{11} (x+2)^{\underline{3}} \\
&= \left.\frac{(x+2)^{\underline{4}}}{4}\right|_{1}^{11} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left.(x+2)(x+1)x(x-1)\right|_{1}^{11} \right] \\
&= \frac{1}{4}(13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)) \\
&= 4290
\end{aligned}$$

3.3.3. Funciones factoriales lineales

Generalizaremos levemente los resultados anteriores considerando funciones de la forma $F(x) = (ax+b)^{\underline{n}}$. Apliquemos a F el operador de diferencias:

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= [a(x+1)+b]^{\underline{n}} - (ax+b)^{\underline{n}} \\ &= [a(x+1)+b]\,(ax+b)\dots[a(x-n+2)+b] \\ &\quad - (ax+b)\,[a(x-1)+b]\dots[a(x-n+1)+b] \\ &= (ax+b)\,[a(x-1)+b]\dots[a(x-n+2)+b] \\ &\quad \cdot [a(x+1)+b-a(x-n+1)-b] \\ &= an(ax+b)^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum (ax+b)^{\underline{n}} = \frac{(ax+b)^{\underline{n+1}}}{a(n+1)} + \alpha(x)$$

Ejemplo 3.6. *Calcular* $3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + \dots + 17 \cdot 19$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8} (2k+3)(2k+1) &= \sum_{1}^{9} (2x+3)^{\underline{2}} \\ &= \left.\frac{(2x+3)^{\underline{3}}}{3 \cdot 2}\right|_{1}^{9} \\ &= \frac{1}{6}\left[(2x+3)(2x+1)(2x-1)\right]\Big|_{1}^{9} \\ &= \frac{1}{6}(21 \cdot 19 \cdot 17 - 5 \cdot 3 \cdot 1) \\ &= 1128\end{aligned}$$

3.4. Sumas por partes

Recordemos que $\Delta\,[f(x)g(x)] = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$. Sumando y restando $g(x+1)f(x)$ en la parte derecha de la igualdad anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta\,[f(x)g(x)] &= g(x+1)\,[f(x+1)-f(x)] + f(x)\,[g(x+1)-g(x)] \\ &= Eg(X)\Delta f(X) + f(X)\Delta g(x)\end{aligned}$$

donde E es el operador de Boole o desplazamiento.

Aplicando el operador $\sum$ de antidiferencia, se tiene que

$$f(x)g(x) = \sum Eg(x)\Delta f(x) + \sum f(x)\Delta g(x)$$

o bien,

$$\sum f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum Eg(x)\Delta f(x)$$

Ejemplo 3.7. *Calcular* $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{3^k}$

En primer lugar plantearemos el problema en términos de una suma definida y luego aplicaremos la fórmula de sumación por partes.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{1}^{n+1} \frac{x}{3^x} = \sum_{1}^{n+1} x \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Considerando $f(x) = x$ *y* $\Delta g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$*, resultan* $\Delta f(x) = 1$ *y* $g(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$*, de donde, finalmente,* $Eg(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$*. Es decir,*

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \Delta f(x) &= 1 \\ g(x) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & \Delta g(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ Eg(x) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} &= \sum_{1}^{n+1} x \left(\frac{1}{3}\right)^x \\
&= -\frac{1}{2} x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \Bigg|_{1}^{n+1} - \sum_{1}^{n+1} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^x \\
&= -\frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^x \\
&= -\frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \Bigg|_{1}^{n+1} \right] \\
&= -\frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \right] \\
&= -\frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \\
&= \frac{-2(n+1) - 1}{4 \cdot 3^n} + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}
\end{aligned}
$$

3.5. Suma de las potencias $k-$ésimas

Debido a la linealidad de la suma definida, el problema de calcular sumas sobre polinomios, se reduce a calcular sumas sobre distintas potencias $k-$ésimas de números naturales. Es decir,

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = \sum_{j=0}^{n-1} j^k$$

Así, por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} \big(3k^3 + 2k^2 - x + 6)\big) = 3\sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 6$$

Luego, para calcular la suma inicial, se requiere conocer los valores de

$$\sum_{k=1}^{n} k^3; \sum_{k=1}^{n} k^2; \sum_{k=1}^{n} k$$

tal como veremos más adelante, pueden probarse las siguientes igualdades, donde los coeficientes de cada polinomio, están relacionados con los llamados números de Bernoulli:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para demostrar cada una de ellas podríamos recurrir al Principio de Inducción Completa. Por ejemplo, probaremos que

$$S_2(n) = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \quad \text{para} \quad n \geq 0$$

Primero debemos verificar que la igualdad se cumple para $n = 0$. En efecto, es cierto que,

$$S_2(0) = \frac{0(0+\frac{1}{2})(0+1)}{3} = 0.$$

Supongamos ahora que se cumple para $n \geq 0$ cualquiera. Es decir,

$$S_2(n) = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

Queremos ver que la igualdad es válida para el siguiente de n. y reemplazaremos n por $n-1$.

$$S_2(n+1) = S_2(n) + (n+1)^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
3S_2(n+1) &= (n+1)(n+\frac{1}{2})(n) + 3(n+1)^2 \\
&= (n+1)(n^2 + \frac{7}{2}n + 3 \\
&= (n+1)(n+\frac{3}{2})(n+2)
\end{aligned}$$

Este último resultado es claramente el valor para $n+1$ con lo cual hemos demostrado que la fórmula propuesta es correcta.

Sin embargo, una de las dificultades de este método radica en que nos permite demostrar la validez de la fórmula, pero no nos da indicios acerce de cómo obtenerla. Es decir, podemos demostrar que cierta propiedad es verdadera siempre y cuando contemos con ella a priori.

Un método para calcular estas sumas es el de *perturbación*.

El procedimiento está inspirado en la demostración elemental de la fórmula que suma los primeros términos de una progresión geométrica. Es decir, dada

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} \\
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n \\
1 + \sum_{k=2}^{n+1} q^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n \\
1 + \sum_{k=1}^{n} q^{k} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n \\
1 + q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n \\
(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} &= q^n - 1 \\
\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} &= \frac{q^n-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Como puede observarse, extraemos el primer y último término de S_{n+1} para obtener una ecuación en S_n.

Podemos aplicar esta idea a la suma de las potencias k.ésimas. Por ejemplo, si consideramos $S_2(n)$, esto es la suma de los primeros cuadrados,

$$
\begin{aligned}
S_2(n+1) &= \sum_{0\le k\le n} (k+1)^2 \\
S_2(n) + (n+1)^2 &= \sum_{0\le k\le n} (k^2 + 2k + 1) \\
S_2(n) + (n+1)^2 &= \sum_{0\le k\le n} k^2 + 2\sum_{0\le k\le n} k + \sum_{0\le k\le n} 1 \\
S_2(n) + (n+1)^2 &= S_2(n) + 2\sum_{0\le k\le n} k + (n+1)
\end{aligned}
$$

Cancelando los $S_2(n)$ deducimos la fórmula que permite sumar los primeros n números enteros:

$$2\sum_{0\le k\le n} k = (n+1)^2 - (n+1)$$

o bien,

$$\sum_{0\le k\le n} k = \frac{(n+1)n}{2}$$

Puede ocurrir que comenzando con la suma de los números enteros al cubo obtengamos también una expresión para los números enteros al cuadrado. Sea $S_3(n) = \sum_{0\le k\le n} k^3$:

$$
\begin{aligned}
S_3(n+1) &= \sum_{0\le k\le n} (k+1)^3 \\
S_3(n) + (n+1)^3 &= \sum_{0\le k\le n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\
S_3(n) + (n+1)^3 &= S_3(n) + 3S_2(n) + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1)
\end{aligned}
$$

Los S_n se cancelan y tenemos suficiente información como para determinar S_n sin recurrir a la inducción.

$$
\begin{aligned}
3S_n &= (n+1)^3 - 3\frac{(n+1)n}{2} - (n+1) \\
&= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1) = (n+1)(n + \frac{1}{2})n
\end{aligned}
$$

Otra posiblidad es escribir las otencias de x en términos de potencias factoriales y luego aplicar el operador de suma:

$$\begin{aligned} x^2 &= x(x-1) + x \\ &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{2}} + \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{1}} \\ &= \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{2}} + \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{1}} \\ &= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} \right) \Bigg|_{0}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Análogamente, $x^{\underline{3}} = x^3 - 3x^2 + 2x$, podemos escribir

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}},$$

y así sucesivamente.
¿Es siempre posible escribir las potencias de x en función de potencias factoriales?. Con el objeto de responder a esta pregunta, definiremos los números de Stirling.

3.5.1. Números de Stirling

Existen dos clases de números de Stirling, los cuales responden a diferentes problemas combinatorios.

Dado un conjunto A de n elementos, los números de Stirling n, k de segunda clase cuentan la cantidad de maneras en que puede partirse A en k subconjuntos no vacíos. Teniendo en cuanta esta interpretación, utilizaremos la notación de Knuth para denotarlos:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo 3.8. $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ *cuenta las formas en que podemos partir un conjunto de 3 elementos en 2 subconjuntos no vacíos. Supongamos* $A = \{a, b, c\}$ *Podemos escribir a* A *como:*

$$\begin{aligned} &\{a, b\} \cup \{c\} \\ &\{a, c\} \cup \{b\} \\ &\{b, c\} \cup \{a\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3$

Ejemplo 3.9. $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 6$ *pues si* $A = \{a, b, c, d\}$*, entonces podemos partirlo en 3 subconjuntos de las siguientes formas:*

$$\begin{aligned} &\{a, b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \\ &\{a, c\} \cup \{b\} \cup \{d\} \\ &\{a, d\} \cup \{b\} \cup \{c\} \\ &\{b, c\} \cup \{a\} \cup \{d\} \\ &\{b, d\} \cup \{a\} \cup \{c\} \\ &\{c, d\} \cup \{a\} \cup \{b\} \end{aligned}$$

Es claro que $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$.

Consideremos el caso $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$. Queremos contar las formas de partir al conjunto A de n elementos en dos subconjuntos no vacíos.

Sean A_1 y A_2 dichos subconjuntos y elijamos un elemento cualquiera de A. Dicho elemento pertenecerá a uno de los dos subconjuntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que pertenece a A_1. La cantidad de particiones distintas queda determinada por las formas de repartir los $n-1$ elementos restantes. Como cada uno de ellos puede pertenecer o no al conjunto A_2, existen 2^{n-1} formas distintas de repartirlos. Sin embargo debemos evitar la posibilidad de que ninguno pertenezca a A_2 para asegurar que sea no vacío. Luego,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

Ejemplo 3.10. *Sea $A = \{a, b, c\}$. Tomemos, por ejemplo, el elemento c y supongamos que $c \in A_1$. Falta ubicar a los elementos a y b. Contamos entonces las distintas formas en que dichos elementos pueden pertenecer a A_2: a puede pertenecer o no y por cada una de estas dos posibilidades, b puede pertenecer o no. Luego tenemos 2^2 casos, pero como $A_2 \neq \emptyset$ hay que descontar la posibilidad de que ninguno pertenzca. Luego tenemos $2^2 - 1$ particiones y* $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^2 - 1 = 3$

Generalizaremos la idea anterior para el caso más general $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Igual que antes elegimos un elemento x de los n posibles. La cantidad de particiones de$A$ que tienen como una de sus partes al subconjunto unitario A^* que contiene solo a dicho elemento es $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$, pues coincide con la cantidad de particiones de un conjunto de $n-1$ elementos en $k-1$ subconjuntos. Si dicho elemento no constituyera un conjunto unitario, entonces estaría junto con algunos de los $n-1$ elementos restantes. Como hay $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ formas de particionas dichos $n-1$ elementos en k subconjuntos no vacíos y x puede estar en cualquiera de esos k, la cantidad buscada es $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$.

Teniendo en cuenta todo esto se llega a la siguiente relación de recurrencia:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Utilizando la recurrencia anterior y tomando $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ si $n \neq 0$, se puede construir la siguiente tabla:

n	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

Figura 3.1: Números de Stirling de segunda clase

Puede observarse que al escribir x^2 o x^3 en función de potencias factoriales, los coeficientes son justamente, números de Stirling. Probaremos este hecho.

Lema 3.1. $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}$

Demostración. Resulta de manera inmediata como consecuencia de.

$$x^{\underline{k+1}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k) = x^{\underline{k}}(x-k)$$

$\square$

Se tiene entonces el siguiente teorema fundamental:

Teorema 3.2.

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}$$

Demostración. Utilizaremos el lema anterior e inducción:

Vale para $n = 1$: $x = x^{\underline{1}}$

Supongamos que vale para $n-1$ con $n \geq 1$. Esto es, supongamos que:

$$x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^n = x \cdot x^{n-1} &= x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} k x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} k x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} k \right) x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.11.

$$\begin{aligned} x^3 &= \sum_{k=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^3 &= \sum_{0}^{n+1} x^3 \\ &= \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \\ &= \frac{x^{\underline{4}}}{4} + 3\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\bigg|_0^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + 3\frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \\ &\quad \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

3.6. Método de operadores.

Desarrollaremos un método que nos permitirá resolver sumas de funciones que resultan ser el producto de una exponencial y un polinomio.

Probaremos que

$$\sum a^x P_n(x) = \frac{a^x}{a-1}\left[P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^3 \Delta^3 P_n(x) + \cdots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right] + \alpha(x)$$

Demostración. Para probar la igualdad anterior, simplemente aplicaremos el operador Δ al miembro derecho de la identidad y verificaremos que el resultado obtenido es $a^x P_n(x)$.

Recordando una vez más la diferencia de una suma:

$$\Delta f(x)g(x) = Ef(x)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x),$$

y haciendo $f(x) = \dfrac{a^x}{a-1}$ y

$$g(x) = \left[P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^3 \Delta^3 P_n(x) + \cdots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right]$$

se tiene que

$$\Delta f(x)g(x) = \frac{a^{x+1}}{a-1}\Delta \left[P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x) + \cdots + \right.$$
$$\left. \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right] + \frac{a^{x+1}-a^x}{a-1}\left[P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x) \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) + \cdots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right]$$

Como el operador Δ es lineal,

$$\Delta f(x)g(x) = a^x \left[\frac{a}{a-1}\Delta P_n(x) - \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) + \cdots + \right.$$
$$\left. (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^{n+1} \Delta^{n+1} P_n(x)\right] + a^x \left[P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x) \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) + \cdots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right]$$

Sacando factor común a^x y considerando que $\Delta^{n+1}P_n(x) = 0$ pues P es un polinomio de grado n,

$$\Delta f(x)g(x) = a^x \left[\frac{a}{a-1}\Delta P_n(x) - \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) + \cdots + \right.$$
$$(-1)^{n-1}\left(\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x) + P_n(x) + \left(-\frac{a}{a-1}\right)\Delta P_n(x)$$
$$\left. + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^2 \Delta^2 P_n(x) + \cdots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^n \Delta^n P_n(x)\right]$$

Cancelando los términos opuestos, resulta finalmente que

$$\Delta f(x)g(x) = a^x P_n(x)$$

con lo cual la igualdad queda demostrada. □

Con el objeto de simplificar la notación, definiremos el *polinomio operador*:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-a\Delta}{a-1}\right)^k$$

Luego, la fórmula anterior puede expresarse como

$$\sum a^x P_n(x) = \frac{a^x}{a-1}\left[1 + \left(-\frac{a\Delta}{a-1}\right) + \left(-\frac{a\Delta}{a-1}\right)^2 + \left(-\frac{a\Delta}{a-1}\right)^3 + ...+\right.$$
$$\left. + \left(-\tfrac{a\Delta}{a-1}\right)^n\right] P_n(x) + \alpha(x)$$

o bien

$$\sum a^x P_n(x) = \frac{a^x}{a-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{a\Delta}{a-1}\right)^k\right] P_n(x) + \alpha(x)$$

Ejemplo 3.12. *Resolver la siguiente suma:*

$$\sum_{x=2}^{7} 4^x.(x+1)^{3/-1}$$

Se trata de una suma que involucra una expresión exponencial, 4^x y un polinomio de grado 3: $P_3(x) = (x+1)^{3/-1}$, que es la función factorial:

$(x+1)x(x-1)$.

Aplicando el operador recién definido, tenemos que:

$$\sum 4^x (x+1)^{3/-1} = \frac{4^x}{4-1}\left[\sum_{n=0}^{3}\left(-\frac{4\Delta}{4-1}\right)^n\right](x+1)^{3/-1} + \alpha(x)$$

Es decir,

$$\sum 4^x (x+1)^{3/-1} = \frac{4^x}{4-1}\left[(x+1)^{3/-1} - \frac{4}{4-1}\Delta(x+1)^{3/-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{4}{4-1}\right)^2 \Delta^2(x+1)^{3/-1} - \left(\frac{4}{4-1}\right)^3 \Delta^3(x+1)^{3/-1}\right] + \alpha(x)$$

Calculando las sucesivas diferencias:

$\Delta(x+1)^{3/-1} = 3(x+1)^{2/-1}$

$\Delta^2(x+1)^{3/-1} = 3\cdot 2(x+1)^{1/-1}$

$\Delta^3(x+1)^{3/-1} = 3\cdot 2\cdot 1$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}\sum 4^x (x+1)^{3/-1} &= \frac{4^x}{4-1}\left[(x+1)^{3/-1} - \frac{4}{4-1}3(x+1)^{2/-1} + \right.\\ &\left. + \left(\frac{4}{4-1}\right)^2 3\cdot 2(x+1)^{1/-1} - \left(\frac{4}{4-1}\right)^3 3\cdot 2\cdot 1\right] + \alpha(x)\\ &= \frac{4^x}{3}\left[(x+1)^{3/-1} - 4(x+1)^{2/-1} + \frac{32}{3}(x+1) - \frac{128}{9}\right] + \alpha(x)\end{aligned}$$

Finalmente, valuando la expresión hallada se obtiene el valor de la sumatoria:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{7} 4^k (k+1)^{3/-1} &= \frac{4^x}{3}\left[(x+1)^{3/-1} - 4(x+1)^{2/-1} + \frac{32}{3}(x+1) - \frac{128}{9}\right]\Bigg|_2^8\\ &= 6505056\end{aligned}$$

3.7. Método de coeficientes y funciones indeterminados (conjetura).

Este método, a diferencia de otros, no es un procedimiento mecánico. Se basa en la intuición, la experiencia, la prueba y error; pudiendo muchas veces no ser aplicable. En realidad, se utilizan las mismas ideas que en los métodos análogos para resolver ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias.

Resulta particularmente útil cuando se desea sumar un cociente de funciones:

$$\sum \frac{g(x)h(x)}{f(x)},$$

donde:
$g(x)$ es una función del tipo exponencial, trigonométricas, etc.,
$h(x)$ es una función polinómica, y
$f(x)$ es una función factorial o polinómica.

Entonces, aplicando la definición de suma, el objetivo es hallar una función $v(x)$ tal que al hacer su diferencia, se obtenga la función a sumar:

$$v(x)/\Delta v(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$$

Observen el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.13. *Resolver la siguiente suma indefinida:*

$$\sum \left[\frac{5^x(8x+2)}{(x+1)^{4/1}}\right]$$

Siguiendo la notación presentada más arriba,

$$\begin{aligned} g(x) &= 5^x \\ h(x) &= 8x+2 \\ f(x) &= (x+1)^{4/1} = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \end{aligned}$$

El problema radica en plantear $v(x)$. Para ello, recordemos que la diferencia de funciones exponenciales, trigonométricas y polinómicas; son a su vez funciones del mismo tipo. Entonces, es de esperar que $v(x)$ tenga un aspecto similar a la función que se pretende sumar. Podemos proponer:

$$v(x) = \frac{5^x P_n(x)}{(x+1)^{3/1}} = \frac{5^x P_n(x)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

donde $P_n(x)$ un polinomio de grado n que debe determinarse.

Entonces:

$$v(x+1) = \frac{5^{x+1} P_n(x+1)}{(x+2)^{3/1}} = \frac{5^{x+1} P_n(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

Aplicando la definición de suma:

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= v(x+1) - v(x) \\
&= \frac{(x+1)5^{x+1} P_n(x+1) - (x+4)5^x P_n(x)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\Delta v(x) = \frac{5^x (8x+2)}{(x+1)^{4/1}}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deber ser iguales entre sí. Luego,

$$\begin{aligned}
(x+1)5^{x+1} P_n(x+1) - (x+4)5^x P_n(x) &= 5^x(8x+2) \\
5^x \left[5(x+1)P_n(x+1) - (x+4)P_n(x)\right] &= 5^x(8x+2) \\
5(x+1)P_n(x+1) - (x+4)P_n(x) &= 8x+2
\end{aligned}$$

Resta proponer un polinomio $P_n(x)$,de grado n, que satisfaga la igualdad anterior.

Consideremos el polinomio $P_0(x) = k$ siendo k una constante. De las igualdades anteriores resula que:

$$\begin{aligned}
5(x+1)k - (x+4)k &= 8x+2 \\
5k. + 5k - kx - 4k &= 8x+2 \\
4kx + k &= 8x+2
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes correspondientes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4.k = 8 \\ k = 2 \end{cases}$$

Es importante señalar que k debe satisfacer ambas ecuaciones, es decir, que se trate de un sistema compatible.

Finalmente, la respuesta es $v(x) + \alpha(x)$ donde α es una función periódica de período 1:

$$\sum \left[\frac{5^x(8x+2)}{(x+1)^{4/1}} \right] = \frac{5^x 2}{(x+1)^{3/1}} + \alpha(x)$$

Algunas consideraciones:

- En primer lugar, al plantear $v(x)$ siempre se debe estar pensando en $v(x+h)$ simultáneamente; ya que lo que interesa es la $\Delta v(x)$.

- Como se adelantó, $v(x)$ tiene un aspecto similar al de la función a sumar, que en la gran mayoría de los casos se trata de un cociente de funciones.

- El numerador de $v(x)$ estará compuesto por el producto de la función exponencial, trigonométrica, etc. en cuestión $g(x)$ y un polinomio auxiliar $P_n(x)$.

- El denominador de $v(x)$ deberá escogerse cuidadosamente. Se busca que al efectuar la $\Delta v(x)$, y por ende realizar una resta de cociente de funciones, se obtenga como denominador común el denominador de la función a sumar, es decir, $f(x)$. Entonces, luego de hacer $\Delta v(x) = \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$, los denominadores se cancelan. Las funciones factoriales facilitan la tarea.

- En cuanto a los numeradores, resta proponer $P_n(x)$. Aquí debe observarse la igualdad lograda una vez simplificados los denominadores, y determinar *intuitivamente* el grado n del polinomio a proponer. Siempre es conveniente plantear polinomios completos, esto es:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a \\ P_1(x) &= ax + b \\ P_2(x) &= ax^2 + bx + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

siendo $a; b; c$ constantes a determinar mediante un sistema de ecuaciones que resulta de igualar coeficientes.

- El método se basa en la prueba y el error. Esto significa que la intuición puede indicar cierto valor de n, que se verificará de obtenerse un sistema compatible. De no ser así, es decir, si se obtiene un sistema de ecuaciones sin solución, entonces deberá proponerse otro valor de n, posiblemente mayor.

- Finalmente, halladas las constantes que definen a $P_n(x)$, resta reemplazar en $v(x)$.

La solución es $v(x) + \alpha(x)$ donde α es una función periódica de período 1.

Ejemplo 3.14. *Resolver la siguiente suma:*

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{2^k(15k^2 + 4k - 2)}{(3k-1)(3k+2)}$$

Para hallar el valor de la suma planteada, es necesario conocer

$$\sum \frac{2^x(15x^2 + 4x - 2)}{(3x-1)(3x+2)}$$

Aplicando el método descripto, se propone:

$$v(x) = \frac{2^x P_n(x)}{3x-1}$$

Luego,

$$v(x+1) = \frac{2^{x+1} P_n(x+1)}{3x+2}$$

Aplicando la definición de diferencia:

$$\begin{aligned}\Delta v(x) &= v(x+1) - v(x) \\ &= \frac{(3x-1)2^{x+1}P_n(x+1) - (3x+2)2^x P_n(x)}{(3x-1)(3x+2)}\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\Delta v(x) = \frac{2^x(15x^2 + 4x - 2)}{(3x - 1)(3x + 2)}$$

Igualando los numeradores:

$$\begin{aligned}(3x - 1)2^{x+1}P_n(x + 1) - (3x + 2)2^x P_n(x) &= 2^x(15x^2 + 4x - 2)\\ (3x - 1)2P_n(x + 1) - (3x + 2)P_n(x) &= 15x^2 + 4x - 2\end{aligned}$$

Proponiendo $n = 1$*, es decir, un polinomio de grado 1,* $P_1(x) = ax + b$*,*

$$\begin{aligned}(3x - 1)2\left[a(x + 1) + b\right] - (3x + 2)(ax + b) &= 15x^2 + 4x - 2\\ (6x - 2)\left[ax + a + b\right] - (3x + 2)(ax + b) &= 15x^2 + 4x - 2\\ 6ax^2 + 6ax + 6bx - 2ax - 2a - 2b &\\ -3ax^2 - 3bx - 2ax - 2b &= 15x^2 + 4x - 2\\ 3ax^2 + (2a + 3b)x - 2a - 4b &= 15x^2 + 4x - 2\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes correspondientes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3a = 15\\ 2a + 3b = 4\\ -2a - 4b = -2\end{cases}$$

que tiene como solución: $a = 5$ *y* $b = -2$*. Entonces:*

$$\sum \left[\frac{2^x(15x^2 + 4x - 2)}{(3x - 1)(3.x + 2)}\right] = \frac{2^x(5x - 2)}{3x - 1} + \alpha(x)$$

Finalmente, valuando la expresión hallada se obtiene el valor de la sumatoria:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} \frac{2^k(15k^2 + 4k - 2)}{(3k - 1)(3k + 2)} &= \sum_0^{11} \frac{2^x(15x^2 + 4x - 2)}{(3x - 1)(3x + 2)}\\ &= \left.\frac{2^x(5x - 2)}{3x - 1}\right|_0^{11}\\ &= 3390\end{aligned}$$

3.8. La fórmula de sumación de Euler

La fórmula de sumación de Euler es una de las herramientas más poderosas para aproximar sumas mediante integrales, o bien, para evaluar integrales utilizando sumas. Aunque Euler realizó en 1736 una demostración que se publicó en 1741, los historiadores coinciden en que fue descubierta independientemente por Colin Maclaurin, quien la utilizó en su *Tratado de Fluxiones* publicado en 1742.

Esta fórmula es ampliamente utilizada en la Teoría Analítica de Números y el Análisis Numérico. Además, de ella se deducen de manera inmediata las fórmulas de Woolhouse y Lubbock, clásicas en la Matemática Actuarial. Por otra parte, programas como el Mathematica, utilizan la fórmula de Euler para evaluar las sumas.

En esta sección discutiremos la deducción de la fórmula sin resto, a partir de la convolución binomial de funciones generatrices y el cálculo simbólico de operadores.

3.8.1. Funciones generatrices

Una de las ideas más fecundas para trabajar con sucesiones, es operar de manera formal con ciertas series de potencias asociadas a ellas.

Definición 3.5. *Diremos que una función $F(z)$ es la* **función generatriz** *de la sucesión $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ si*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

Según las necesidades, en algunos casos se consideran como funciones de variable compleja, mientras que en otros simplemente como objetos formales que se manipulan sin preocuparse por cuestiones tales como condiciones de convergencia. A través de este manejo puramente formal, que incluye derivar, integrar, realizar corrimientos, cambios de variables, etc., es posible encontrar las fórmulas cerradas de algunas sucesiones.

Ilustraremos la idea con la sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sabemos que los términos de esta sucesión se generan mediante la siguiente recurrencia:

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

El objetivo es determinar una fórmula cerrada para esta sucesión. Para ello, supondremos que existe una función generatriz

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ tal que los coeficientes de las potencias de z son los términos de Fibonacci. Operando con ella, encontraremos la función generatriz F y luego, al desarrollarla en serie, se obtiene la fórmula de la sucesión.

En efecto, multiplicando a F de manera conveniente, se tienen los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \ldots \\ zF(z) &= \qquad z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + \ldots \\ z^2F(z) &= \qquad\qquad z^2 + z^3 + 2z^4 + 3z^5 + 5z^6 + \ldots \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores resulta que

$$F(z)\left(1 - z - z^2\right) = 1$$

de donde,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} \tag{3.2}$$

Como el desarrollo en serie de Taylor de la ecuación (3.2) es:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \cdot z^n \tag{3.3}$$

resulta que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \quad \forall n \geq 0 \tag{3.4}$$

Para probar la validez de la fórmula (3.4) podemos utilizar el Principio de Inducción Completa.

3.8.2. Convolución de funciones generatrices

Dos funciones generatrices $F(z)$ y $G(z)$ de las sucesiones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ respectivamente pueden combinarse linealmente para dar lugar a la función generatriz de la correspondiente combinación lineal de dichas sucesiones.

También pueden multiplicarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}F(z) \cdot G(z) &= (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \dots)\cdot \\ &\quad (g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots) \\ &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) z + (f_0 g_+ f_1 g_1 + f_2 g_0) z^2 + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (f_k g_{n-k}) \right) z^n\end{aligned}$$

Definición 3.6. *El producto $F(z) \cdot G(z)$ definido anteriormente es la función generatriz de la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ llamada la* **convolución** *de las sucesiones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

En algunas ocasiones es más sencillo trabajar con la sucesión $\left(\frac{f_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en lugar de (f_n) y luego multiplicar por $n!$.

Definición 3.7. *La serie de potencias $\widehat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}\ z^n$ es la* **función generatriz exponencial** *de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*

Ejemplo 3.15. *La función $F(z) = e^z$ es la función generatriz exponencial de la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$ y es la función generatriz de la sucesión $\left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{n!} \dots\right)$.*

Definición 3.8. *Si $\widehat{F}(z)$ y $\widehat{G}(z)$ son dos funciones generatrices exponenciales, entonces su producto $\widehat{F}(z) \cdot \widehat{G}(z) = \widehat{H}(z)$ es la función generatriz exponencial de la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, denominada* **convolución binomial***:*

$$\begin{aligned}\widehat{H}(z) = \widehat{F}(z) \cdot \widehat{G}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!}\ z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{h_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!}\ \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

De donde,

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k g_{n-k} \tag{3.5}$$

3.8.3. Números de Bernoulli

Los números de Bernoulli constituyen una de las sucesiones más importantes de la matemática. Su aplicación es fundamental en áreas tales como la combinatoria, el cálculo finito y la teoría de números, tanto en la teoría analítica como algebraica. Aparecen vinculados a temas centrales como por ejemplo el Teorema de Fermat y la función zeta de Riemann. Se llaman así en honor al matemático suizo, Jacobo Bernoulli, quien a comienzos del siglo XVIII, en su obra póstuma *Ars Conjectandi* sugirió, sin demostrar, una expresión general para la suma de las potencias $k-$ésimas de los primeros n números no negativos consecutivos:

$$0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j} \tag{3.6}$$

donde los B_j son los números de Bernoulli que pueden definirse mediante la siguiente recursión:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j = 0 \quad k \geq 1 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Tomando $k = 1, 2, 3$ y 4 en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2} \\ B_2 &= -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = \frac{1}{6} \\ B_3 &= -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = 0 \\ B_4 &= -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

3.8.4. La función generatriz exponencial de los números de Bernoulli

Definamos primero el siguiente símbolo, conocido como la *convención de Ivenson*:

$$[n = m] = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{array} \right.$$

Tomando $n = k + 1$ en la (3.7) se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = [n = 1]$$

$$B_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = B_n + [n = 1]$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j = B_n + [n = 1] \tag{3.8}$$

Consideremos la función generatriz exponencial, $\widehat{B}(z)$ de la sucesión de números de Bernoulli. Es decir,

$$\widehat{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\ z^n$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.8) es el resultado de la convolución binomial entre $\widehat{B}(z)$ y e^z.

Por otra parte, la función generatriz exponencial de la parte derecha de la ecuación (3.8) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n + [n = 1]}{n!}\ z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\ z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n = 1]}{n!}\ z^n = \widehat{B}(z) + z$$

De lo dicho anteriormente resulta que

$$\widehat{B}(z) \cdot \mathrm{e}^z = \widehat{B}(z) + z$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\widehat{B}(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{3.9}$$

3.8.5. La fórmula de sumación de Euler

Finalmente, para deducir la fórmula de sumación de Euler, estableceremos una relación entre los operadores Δ de diferencia y D de derivación.

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(x+1)$ alrededor de x:

$$f(x+1) = f(x) + D[f(x)] + \frac{D^2[f(x)]}{2!} + \frac{D^3[f(x)]}{3!} + \cdots + \frac{D^n[f(x)]}{n!} + \ldots$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= D[f(x)] + \frac{D^2[f(x)]}{2!} + \frac{D^3[f(x)]}{3!} + \cdots + \frac{D^n[f(x)]}{n!} + \ldots \\
&= \left(D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots + \frac{D^n}{n!} + \ldots \right) f(x) \\
&= \left(\mathrm{e}^D - 1 \right) f(x)
\end{aligned}$$

Como $\sum = \frac{1}{\Delta}$ se tiene que

$$\sum = \frac{1}{\mathrm{e}^D - 1} \tag{3.10}$$

Por último, de las ecuaciones (3.9) y (3.10) se concluye que

$$\begin{aligned}
\sum &= \frac{B_0}{D} + B_1 + \frac{B_2}{2!} D + \frac{B_3}{3!} D^2 + \ldots \\
&= \frac{B_0}{D} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^{n-1} \\
&= \int \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \, D^{n-1}
\end{aligned}$$

Aplicando este último operador a f y tomando límites se obtiene

$$\sum_a^b f(x) = \sum_{a \leq k < b} f(k) = \int_a^b f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \, f^{(n-1)}(x) \Bigg|_a^b$$

que es la fórmula de Euler sin resto (el primero en dar una expresión para el resto fue Poisson, en un trabajo de 1823, publicado cuatro años después).

Finalmente, observemos que si f es tal que su derivada se anula a partir de algún momento, la fórmula arroja un resultado exacto. De hecho, permite demostrar de manera inmediata, la conjetura de Bernoulli.

Ejemplo 3.16. *Utilizando la fórmula de Euler, aproximaremos el valor de:*

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln 100}{100}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{x}) = \frac{1-\ln x}{x^2}$*,se tiene que:*

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{\ln k}{k} = \sum_{2}^{101} \frac{\ln x}{x} \approx \int_{2}^{101} \frac{\ln x}{x} dx + B_1 \frac{\ln x}{x}\Big|_{2}^{101} + \frac{B_2}{2} \frac{1-\ln x}{x^2}\Big|_{2}^{101}$$

Efectuando los cálculos,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{100} \frac{\ln k}{k} &\approx 10{,}40944219 + 0{,}150439663 - 6{,}422299475 \times 10^{-3} \\ &\approx 10{,}55345955\end{aligned}$$

Puede compararse este resultado con el valor de la suma calculado con 20 dígitos de precisión:

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{\ln k}{k} \approx 10{,}553976183549153711$$

Ejemplo 3.17. *Utilizaremos la fórmula de Euler para deducir una expresión para calcular la suma de los primeros* $n-$*cubos.*

Queremos entonces calcular $\sum_{k=0}^{n} k^3$*. Teniendo en cuenta que a partir de la derivada cuarta de* x^3*, son todas nulas, se tiene que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \sum_{0}^{n+1} x^3 \\ &= \int_{0}^{n+1} x^3 dx + B_1 x^3\Big|_{0}^{n+1} + \frac{B_2}{2} \quad 3x^2\Big|_{0}^{n+1} + \frac{B_3}{6} \quad 6x\Big|_{0}^{n+1} + \frac{B_4}{24} \quad 6\Big|_{0}^{n+1} \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{n+1} - \frac{1}{2} \quad x^3\Big|_{0}^{n+1} + \frac{1}{4} \quad x^2\Big|_{0}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2 n^2 \\ &= \Big[\frac{n(n+1)}{2}\Big]^2\end{aligned}$$

Capítulo 4

Interpolación

Uno de los problemas clásicos del Análisis Numérico, consiste en determinar una función que pase por ciertos puntos preestablecidos. Por ejemplo, conocidos los valores de una tabla, se desea encontrar una función que se corresponda con los datos contenidos en ella. De esta forma se puede, por ejemplo, estimar valores en puntos intermedios a los dados. Este problema se conoce con el nombre de interpolación.

En este capítulo estudiaremos cómo interpolar utilizando funciones polinómicas.

4.1. Polinomios interpolantes

El primer aspecto que queremos abordar es el problema de la existencia de los polinomios de interpolación. Es decir, dados $n+1$ puntos $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1) \dots (x_n; y_n)$ donde las abscisas son todas distintas, se desea determinar si existe un polinomio de grado a lo sumo n que pase por dichos puntos.

Se quiere saber si existen coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ tales que el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{4.1}$$

verifica que $p(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$.

Reemplazando los x_k en el polinomio (4.1) se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_0 & = & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\ y_1 & = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\ \vdots & = & \quad \vdots \\ y_n & = & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Se trata de un sistema lineal de $n+1-$incóginitas y $n+1-$ecuaciones. El sistema (4.2) puede escribirse también en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Es decir se trata de un sistema matricial de la forma $Y = V \cdot A$ donde Y es la matriz de términos independientes, V la de coeficientes y A es la matriz de incógnitas. Para demostrar que el sistema tiene solución única basta probar que la matriz V tiene inversa. Para ello consideremos la transformación lineal

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que V es la matriz asociada a ella. Recordemos que f es inversible si y solo si V es inversible y esto es equivalente a demostrar que f es inyectiva.

Sea $ker(f)$ el núcleo de la transformación f. Supongamos que existe un vector $\overrightarrow{w}$ no nulo de coordenadas $w_0, w_1, \dots w_n$ tal que $\overrightarrow{w} \in ker(f)$. Entonces, se tiene que

$$V \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

Es decir,

$$\begin{cases} 0 &= w_0 + w_1 x_0 + w_2 x_0^2 + \dots + w_n x_0^n \\ 0 &= w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_1^2 + \dots + w_n x_1^n \\ \vdots &= \quad \vdots \\ 0 &= w_0 + w_1 x_n + w_2 x_n^2 + \dots + w_n x_n^n \end{cases}$$

Por lo tanto , el polinomio

$$p(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_n x^n$$

se anula en $x_0, x_1 \dots x_n$, que por hipótesis son todos distintos. Luego p es de grado a lo sumo n y tiene $n+1$ raíces, lo cual contradice el Teorema Fundamental del Álgebra. Este absurdo proviene de suponer que el $ker(f)$ contiene algún vector no nulo. Luego, $ker(f)$ es trivial y, en consecuencia, f es inyectiva, tal como queríamos probar.

De esta forma, hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Dados $n+1$ puntos $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1) \dots (x_n; y_n)$ donde las abscisas son todas distintas, existe un único polinomio p de grado a lo sumo n tal que $p(x_k) = y_k$ para toda k entre 0 y n.*

Nótese que de paso hemos probado que el $det(V)$, conocido como determinante de *Vandermonde*, es diferente de cero.

Por otra parte, el desarrollo anterior nos muestra una primera forma de calcular los coeficientes del polinomio interpolador.

Ejemplo 4.1. *Encontrar el polinomio de grado menor o igual que dos que pasa por los puntos* $(-1,-3)$, $(1,3)$ *y* $(2,9)$.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *el polinomio buscado. Para hallar los coeficientes planteamos el sistema*

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de coeficientes,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

y efectuando la multiplicación, encontramos los coeficientes del polinomio:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $p(x) = -1 + 3x + x^2$

4.2. Polinomios de Lagrange

Veremos ahora otra manera de calcular los polinomios de interpolación, que si bien no es el camino más simple desde el punto de vista práctico, tiene una alto interés teórico.

Supongamos en primer lugar, que queremos determinar la recta que pasa por dos puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, de una cierta función f.

Escribiremos esta ecuación como una cierta combinación de $f(x_0)$ y $f(x_1)$:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

Las funciones L_0 y L_1 se determinan de manera que $P(x_0) = f(x_0)$ y $P(x_1) = f(x_1)$. Ello ocurre si

$$L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1$$

Si hacemos

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},$$

resulta que

$$L_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = x_1 \\ 1 & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Análogamente debe ser

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Por lo tanto,

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Dados $n + 1$ puntos distintos, podemos generalizar la idea anterior construyendo un polinomio de grado menor o igual que n que pase por esos puntos.

Es decir,

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)f(x_k)$$

donde

$$L_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_n \neq x_k \\ 1 & \text{si} \quad x_n = x_k \end{cases}$$

y

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

Teorema 4.2. *Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n + 1$ puntos distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n, tal que $P(x_k) = f(x_k)$ con $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Definición 4.1. *Al polinomio*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= L_{n,0}(x)f(x_0) + L_{n,1}(x)f(x_1) + \cdots + L_{n,n}(x)f(x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x)f(x_k) \end{aligned}$$

con

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

del teorema anterior, se lo denomina **n-ésimo polinomio interpolador de Lagrange***.*

Teorema 4.3. *Supongamos que $x_o, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos distintos del $[a;b]$ y que f es una función de clase C^{n+1} en dicho intervalo. Entonces para cada $x \in [a;b]$ existe un número $\xi(x)$ en el $(a;b)$ tal que*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

y $P(x)$ es el polinomio interpolante de f.

Demostración. La igualdad es obvia si $x = x_k$ para cualquier $k = 0, 1, \ldots, n$

Para los $x \neq x_k$ definimos

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\,\frac{(t - x_0)(t - x_1)\ldots(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\,\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \end{aligned}$$

Como f es de clase C^{n+1} en $[a;b]$ y P es de clase C^{∞} en $\mathbb{R}$, se tiene que g es C^{n+1} en $[a;b]$.

Para $t = x_k$ se tiene que

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)]\,\prod_{i=0}^{n} \frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)}$$

y como $0 \leq k \leq n$, $\prod_{i=0}^{n} \frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} = 0$. Por lo tanto $g(x_k) = 0$ para toda k.

Además,

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \underbrace{\prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)}}_{1}$$

de donde $g(x) = 0$.

Luego, g es C^{n+1} en $[a;b]$ y se anula en $x, x_o, x_1, \ldots, x_n$, es decir, en $n+2$ puntos distintos. Por lo tanto, aplicando el Teorema Generalizado de Rolle, existe $\xi \in (a;b)$ tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Luego, derivando $n+1$ veces y reemplazando en ξ, resulta

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \, \frac{(n+1)!}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}$$

de donde queda probado el teorema. □

Teorema 4.4. *Supongamos que f es de clase C^4 en el intervalo $[x_0, x_n]$ para $n = 1, 2, 3$. Supongamos además que los nodos x_0, x_1, x_2 y x_3 están equiespaciados.*
Entonces los términos del error correspondientes a los polinomios de grado $1, 2$ y 3 admiten cotas dadas por

$$|T_1(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{8} \text{ para } x \in [x_0, x_1],$$

$$|T_2(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \text{ para } x \in [x_0, x_2],$$

y

$$|T_3(x)| \leq \frac{h^4 M_4}{24} \text{ para } x \in [x_0, x_3],$$

donde M_{n+1} es una cota de $|f^{(n+1)}(x)|$ que existe por ser continua (Teorema de acotabilidad de Weierstrass) y h es el tamaño del paso, es decir, la distancia entre dos nodos consecutivos.

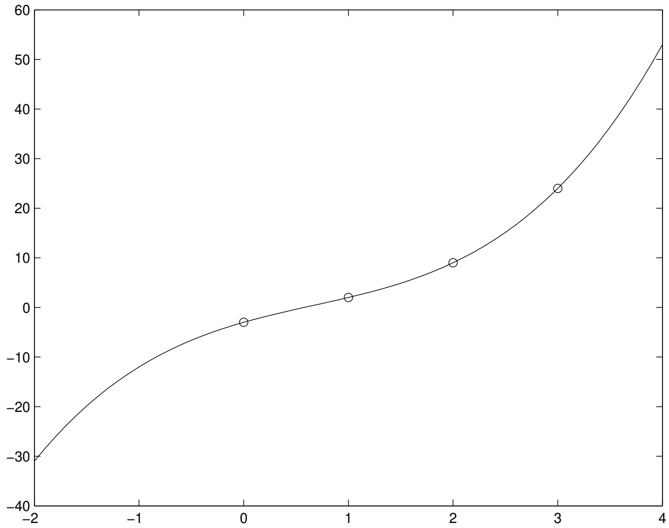
Ejemplo 4.2. *Determinar el polinomio de grado menor o igual que 3 que pasa por los puntos $(0; -3)$, $(1; 2)$, $(2; 9)$ y $(3; 24)$.*

Según lo establecido anteriormente, se tiene que el polinomio buscado es:

$$P(x) = -3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} +$$
$$9 \cdot \frac{(x-0)(x-)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 24 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Efectuando los cálculos indicados, resulta

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 3$$



4.3. Polinomio interpolador de Newton

En ciertas ocasiones se requiere calcular varios polinomios aproximantes y después elegir el más adecuado.

Si usamos los polinomios interpoladores de Lagrange, tenemos como inconveniente que no existe relación entre la construcción de $P_{n-1}(x)$ y $P_n(x)$.

Construiremos polinomios interpoladores, llamados de Newton, siguiendo un proceso recursivo:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) \\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

De esta forma, resulta

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Definición 4.2. *El polinomio obtenido anteriormente se conoce como* **polinomio de Newton con n centros ,** $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

El problema es determinar los coeficientes para que dicho polinomio sea, a su vez, el polinomio de interpolación para los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$. Como se trata de un polinomio interpolador sabemos que $f(x_0) = P(x_0)$ y $f(x_1) = P(x_1)$. Luego,

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) \Rightarrow f(x_0) = a_0$$

Por otra parte,

$$f(x_1) = P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a_1$$

Análogamente, como $f(x_2) = P(x_2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_2) =& f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) \\ &+ a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \right) \frac{1}{(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{(x_1 - x_0)[f(x_2) - f(x_1)]}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_1)[f(x_1) - f(x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)} \end{aligned}$$

Para simplificar la notación de estos coeficientes es conveniente introducir el concepto de diferencias divididas de una función:

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k) \\ f[x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \\ f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}} \end{aligned}$$

y, en general,

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-j}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

Obsérvese que $a_0 = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$ y $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

Teorema 4.5 (Polinomio interpolador de newton)**.** *Supongamos que* $x_0, x_1, \ldots x_n$ *son* $n+1$ *puntos distintos de* $[a,b]$ *entonces existe un único polinomio interpolador tal que* $f(x_i) = P_n(x_i)$ *y*

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

siendo $a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *para* $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Las diferencias divididas pueden obtenerse fácilmente construyendo las sucesivas columnas de la siguiente tabla:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Ejemplo 4.3. *Determinar los polinomios interpoladores sucesivos de Newton con nodos* $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_5 = 6$

1	*-3*					
2	*0*	*3*				
3	*15*	*15*	*6*			
4	*48*	*33*	*9*	*1*		
5	*105*	*57*	*12*	*1*	*0*	
6	*192*	*87*	*15*	*1*	*0*	*0*

Por lo tanto los polinomios interpolantes son:

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = -3 + 3(x-1)\\
&P_2(x) = -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2)\\
&P_3(x) = -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

Hemos visto que una de las ventajas de los polinomios interpoladores de Newton, es que se generan de manera recursiva a partir de polinomios de menor grado.

Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son los nodos de interpolación y $P_k(x)$ es el polinomio de interpolación que pasa por los primeros $k+1$ nodos, se tiene que

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + a_{k+1}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k),$$

donde $a_{k+1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}]$.

4.3.1. Diferencias progresivas

Estas fórmulas pueden expresarse de manera simplificada cuando los nodos están equiespaciados.

En efecto, sea $h = x_{i+1} - x_i$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y sea $x = x_0 + sh$.

La diferencia $x - x_i$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} x - x_i &= x_0 + sh - (x_0 + ih) \\ &= (s-i)h \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]sh + f[x_0, x_1, x_2]s(s-1)h^2 \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]s(s-1)\ldots(s-n+1)h^n \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k]s(s-1)\ldots(s-k+1)h^k \end{aligned}$$

Recordemos que dados dos números naturales m y n, con $m \geq n$, el combinatorio $\binom{m}{n}$ se define por:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots m}{n!}$$

Con el objeto de simplificar la notación,dado un número s cualquiera, extenderemos el uso de la notación binomial de la siguiente manera:

$$\binom{s}{n} = \frac{(s-n+1)(s-n+2)\ldots s}{n!}$$

Obviamente, no podemos utilizar el factorial de s, pues no es necesariamente un número natural.

Teniendo en cuenta esta notación, podemos reescribir el polinomio interpolador como se muestra a continuación:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} f[x_0, x_1, \ldots, x_k]h^k k! \tag{4.3}$$

Definición 4.3. *La fórmula (4.3) se conoce como* fórmula de diferencias divididas progresivas de Newton.

Consideremos el operador de diferencias, Δ:

$$\begin{aligned}
\Delta p_n &= p_{n+1} - p_n \\
\Delta^k p_n &= \Delta(\Delta^{k-1} p_n) \\
\Delta^2 p_n &= \Delta(\Delta p_n) \\
&= \Delta(p_{n+1} - p_n) = (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n) \\
&= p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n
\end{aligned}$$

Es posible reescribir las diferencias divididas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{1}{h}\ \Delta f(x_0) \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{1}{2h^2}\big[\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)\big] \\
&= \frac{1}{2h^2}\Delta\big[\Delta f(x_0)\big] \\
&= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)
\end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de diferencias divididas progresivas, se obtiene:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \tag{4.4}$$

Definición 4.4. *La fórmula (4.4) se conoce como* fórmula de diferencias progresivas.

4.3.2. Diferencias regresivas.

Si reordenamos los nodos interpolantes en la forma $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned}
P_n(x) = f[x_n] &+ f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) \\
&+ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\
&+ \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0](x - x_n)\ldots(x - x_1)
\end{aligned}$$

Si los nodos están equiespaciados, haciendo $x = x_n + sh$ con
$h = x_{k-1} - x_k$ y $x_i = x_n - (n - i)h$.

Como $x - x_i = sh + (n-i)h = h(s+n-i)$, resulta:

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_n + sh) &= f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}]sh \\ &+ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]s(s+1)h^2 \\ &+ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}]s(s+1)(s+2)h^3 \\ &+ \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]s(s+1)\ldots(s+n-1)h^n \end{aligned}$$

Definición 4.5. *La fórmula anterior se conoce como* fórmula de diferencias divididas regresivas.

Dada una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definimos el *operador de diferencias regresivas*, ∇p_n (nabla de p_n) de la siguiente forma:

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}$$

y

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n)$$

Luego,

$$\begin{aligned} f[x_n, x_{n-1}] &= \frac{1}{h}\ \nabla f(x_n) \\ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] &= \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n) \end{aligned}$$

y, en general,

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\ \nabla^k f(x_n)$$

Luego,

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!}\ \nabla^k f(x_n)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \binom{-s}{k} &= \frac{-s(-s-1)(-s-2)\ldots(-s-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k s(s+1)(s+2)\ldots(s+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

podemos escribir

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \tag{4.5}$$

que se conoce como *fórmula de diferencias regresivas de Newton.*

Ejemplo 4.4. *Consideremos el polinomio que interpola los siguientes puntos:*

$$(0,6),(1,4),(2,20),(3,90),(4,274).$$

La tabla de diferencias divididas es:

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
0	**6**				
		-2			
1	*4*		**9**		
		16		**6**	
2	*20*		*27*		**1**
		70		*10*	
3	*90*		*57*		
		184			
4	*274*				

Los números en negrita son los coeficientes de los polinomios sucesivos:

$$P_1(x) = 6 - 2x;$$

$$P_2(x) = 6 - 2x + 9x(x-1);$$

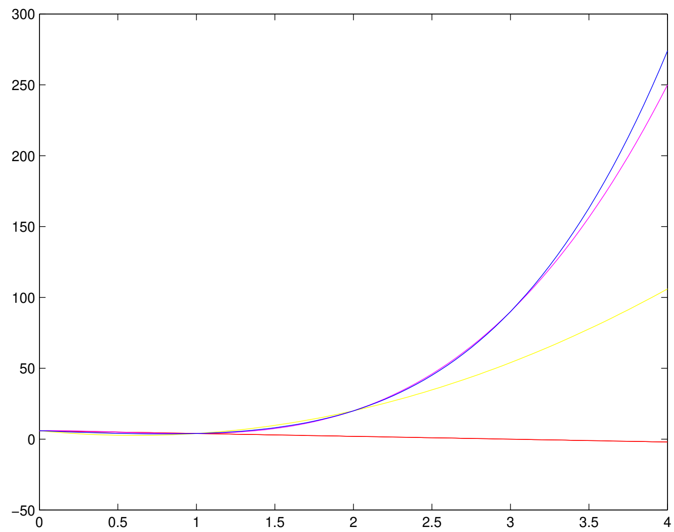
$$P_3(x) = 6 - 2x + 9x(x-1) + 6x(x-1)(x-2);$$

$$P_4(x) = 6 - 2x + 9x(x-1) + 6x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Efectuando los cálculos puede comprobarse que

$$P_4(x) = 6 - 5x + 2x^2 + x^4.$$

El siguiente gráfico muestra los 4 polinomios anteriores:



En el gráfico puede observarse que los valores que toman los 4 polinomios son aproximadamente iguales para valores próximos a 0, pero se distancian a medida que la variable toma valores cercanos a 4.

Comparemos, los valores que toman los diferentes polinomios en 0.2:
$P_1(0{,}2) = 5{,}6$
$P_2(0{,}2) = 4{,}16$
$P_3(0{,}2) = 5{,}888$
$P_4(0{,}2) = 5{,}0816$
mientras que si tomamos valores cercanos a 4, por ejemplo 3.8:
$P_1(3{,}8) = -1,6$
$P_2(3{,}8) = 94{,}16$
$P_3(3{,}8) = 209{,}072$
$P_4(3{,}8) = 224{,}394$

Si reordenamos los nodos interpolantes en la forma

$$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$$

se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \ldots \\ &+ f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0](x - x_n) \ldots (x - x_1) \end{aligned}$$

En la práctica, se trata simplemente de invertir la tabla anterior. Por lo tanto los polinomios sucesivos son:

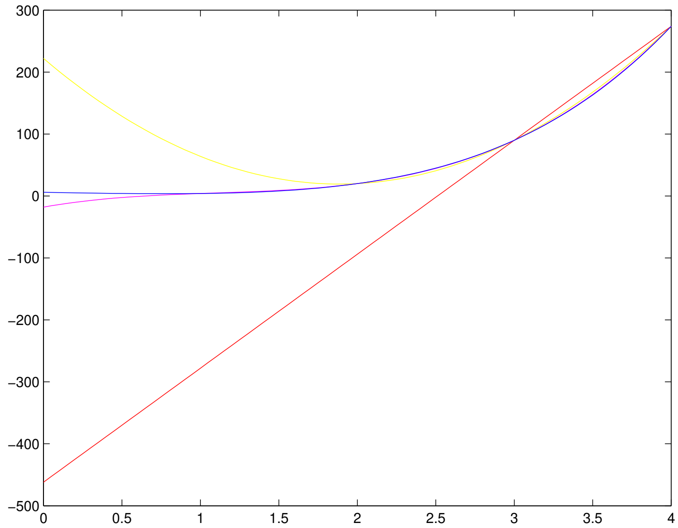
$$Q_1(x) = 274 + 184(x - 4);$$
$$Q_2(x) = 274 + 184(x - 4) + 57(x - 4)(x - 3);$$
$$Q_3(x) = 274 + 184(x - 4) + 57(x - 4)(x - 3) + 10(x - 4)(x - 3)(x - 2);$$

$$\begin{aligned} Q_4(x) =& 274 + 184(x - 4) + 57(x - 4)(x - 3) \\ &+ 10(x - 4)(x - 3)(x - 2) + (x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1) \end{aligned}$$

Realizando los cálculos, obtenemos:

$$Q_4(x) = 6 - 5x + 2x^2 + x^4,$$

que coincide con $P_4(x)$, tal como era previsible, ya que existe un único polinomio de grado 4 que interpole los 5 nodos dados. El próximo gráfico muestra los polinomios Q.



En este caso puede observarse que los polinomios toman valores similares cuando la variable se encuentra próxima a 4.
Los valores de $Q(x)$ en 0.2 son:
$Q_1(0{,}2) = -425{,}2$
$Q_2(0{,}2) = 181{,}28$
$Q_3(0{,}2) = -10{,}24$
$Q_4(0{,}2) = 5{,}0816$
mientras que si tomamos valores cercanos a 4, por ejemplo 3.8:
$Q_1(3{,}8) = 237{,}2$
$Q_2(3{,}8) = 228{,}08$
$Q_3(3{,}8) = 225{,}2$
$Q_4(3{,}8) = 224{,}394$

Entonces a la hora de construir el polinomio de interpolación de Newton, es conveniente comenzar tomando los argumentos más próximos al valor de x a interpolar. Esto siempre y cuando no se pretenda trabajar con la totalidad de los argumentos dados, ya que en ese caso, independientemente del orden de los nodos, el polinomio será el mismo (propiedad de la unicidad de los polinomios de interpolación).

4.4. Splines

Uno de los problemas de la interpolación polinómica es que dado un conjunto numeroso de puntos $\{(x_k; y_k)\}_{k=0}^{n}$ obtenemos un polinomio, probablemente de grado n, que en muchos casos tiene $n-1$ extremos locales. Por lo tanto es posible que la gráfica presente grandes oscilaciones.

Para evitar estas oscilaciones, una posibilidad es unir los puntos mediante segmentos. Sin embargo es posible construir una función cúbica $S_k(x)$ en cada intervalo $[s_k, s_{k+1}]$ de manera que la curva definida por partes $y = S(x)$ resulte de clase C^2 en el intervalo $[x_0, x_n]$.

4.4.1. Spline cúbico interpolador

Supongamos que tenemos $n+1$ puntos $\{(x_k; y_k)\}_{k=0}^n$ cuyas abscisas están ordenadas de forma tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Diremos que una función $S(x)$ es un *Spline cúbico interpolador* si existen n polinomios cúbicos $S_k(x)$ tales que:

1. $S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3$ para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. $S_k(x) = y_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

3. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

4. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

5. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

4.4.2. Existencia de los splines cúbicos.

Cada polinomio cúbico $S_k(x)$ tiene cuatro coeficientes $s_{k,0}, s_{k,1}, s_{k,2}, s_{k,3}$ a priori desconocidos, lo que hace un total de $4n$ coeficientes a determinar.

Las condiciones 2 - 5 de la definición de spline nos dan $4n - 2$ ecuaciones, de donde nos quedan dos grados de libertad para calcular los coeficientes.

Estos grados de libertad se conocen como restricciones en los extremos, ya que generalmente involucran los valores de $S'(x)$ o $S''(x)$ en los extremos del intervalo.

Como $S(x)$ es un polinomio cúbico en cada subintervalo, su derivada segunda es lineal por partes. Entonces, para cada $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ tenemos la siguiente representación de $S''(x) = S''_k(x)$:

$$S''_k(x) = S''_k(x_k)\,\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + S''_k(x_{k+1})\,\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Llamando $m_k = S''(x_k), m_{k+1} = S''(x_{k+1})$ y $h_k = x_{k+1} - x_k$, se tiene que

$$S_k''(x) = \frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x) + \frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k)$$

para $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ y $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Integrando dos veces la expresión anterior,

$$S_k'(x) = \frac{-1}{2}\frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k)^2 + T_k$$

y

$$S_k(x) = \frac{1}{6}\frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{1}{6}\frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k)^3 + T_k x$$

con $T_k x = p_k(x_{k+1} - x) + q_k(x - x_k)$

Luego,

$$S_k(x) = \frac{1}{6}\frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{1}{6}\frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k)^3 + p_k(x_{k+1} - x) + q_k(x - x_k)$$

Evaluando en $x = x_k$ y $x = x_{k+1}$ se obtienen los valores y_k e y_{k+1}:

$$y_k = \frac{1}{6}m_k h_k^2 + p_k h_k \quad y_{k+1} = \frac{1}{6}m_{k+1}h_k^2 + q_k h_k$$

de donde,

$$\frac{y_k}{h_k} - \frac{1}{6}m_k h_k = p_k \quad \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{1}{6}m_{k+1}h_k = q_k$$

Reemplazando en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} S_k(x) = {} & \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_k}{6h_k}(x - x_k)^3 \\ & + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{1}{6}m_k h_k\right)(x_{k+1} - x) \\ & + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{1}{6}m_{k+1}h_k\right)(x - x_k) \end{aligned}$$

Faltan determinar los coeficientes $\{m_k\}$. Aún no utilizamos las condiciones sobre las derivadas:

$$\begin{aligned} S_k'(x) = {} & \frac{-m_k}{2h_k}(x_{k+1} - x)^2 + \frac{m_k}{2h_k}(x - x_k)^2 - \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{1}{6}m_k h_k\right) \\ & + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{1}{6}m_{k+1}h_k\right) \end{aligned}$$

Evaluando $S'_k(x)$ en x_k (por derecha),

$$\begin{aligned} S'_k(x_k) &= \frac{-m_k h_k}{2} - \frac{y_k}{h_k} + \frac{m_k h_k}{6} + \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6} \\ &= \frac{-m_k h_k}{3} - \frac{m_{k+1} h_k}{6} + d_k \end{aligned}$$

donde $d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$.

De manera similar, reemplazando x_k en $S'_{k-1}(x)$:

$$\begin{aligned} S'_k(x_{k-1}) &= \frac{-m_k h_{k-1}}{2} - \frac{y_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{m_{k-1} h_{k-1}}{6} + \frac{y_k}{h_{k-1}} - \frac{m_k h_{k-1}}{6} \\ &= \frac{m_k h_{k-1}}{3} + \frac{m_{k-1} h_{k-1}}{6} + d_{k-1} \end{aligned}$$

Igualando las derivadas,

$$\frac{1}{3} m_k h_{k-1} + \frac{1}{6} m_{k-1} h_{k-1} + \frac{1}{3} m_k h_k + \frac{1}{6} m_{k+1} h_k = d_k - d_{k-1}$$

de donde,

$$2 m_k h_{k-1} + m_{k-1} h_{k-1} + 2 m_k h_k + m_{k+1} h_k = 6\left(d_k - d_{k-1}\right)$$

o bien,

$$m_{k-1} h_{k-1} + 2 m_k (h_{k-1} + h_k) + m_{k+1} h_k = u_k$$

con $u_k = 6(d_k - d_{k-1})$ y $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Se tiene entonces un sistema de $n - 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. Por lo tanto deberían agregarse 2 ecuaciones para que sea compatible determinado. Lo habitual es que estas dos ecuaciones sirvan para eliminar m_0 y m_n.

Dependiendo de las condiciones que se elijan, se construyen distintos tipos de splines. Pueden fijarse condiciones sobre la derivada o sobre la derivada segunda en los extremos. Consideraremos este último caso. Si fijamos el valor de m_0, podemos calcular el de $h_0 m_0$ y tenemos (para $k = 1$) que

$$2 m_1 (h_0 + h_1) + h_2 m_2 = u_1 - m_0 h_0$$

De manera similar, fijando m_n (esto es para $k = n - 1$), calculamos $m_n h_{n-1}$ y resulta:

$$2 m_{n-1} (h_{n-2} + h_{n-1}) + h_{n-2} m_{n-2} = u_{n-1} - m_n h_{n-1}$$

Estas 2 ecuaciones junto con las $n-3$ ecuaciones restantes (para $k = 2, 3, \ldots, n-2$) constituyen un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas: $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$.

Siempre pueden escribirse como un sistema lineal tridiagonal $HM = V$ dado por:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & a_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Como este sistema es de diagonal estrictamente dominante, tiene solución única.

Una vez calculados los m_k, los coeficientes para la parte $S_k(x)$ vienen dados por:

$$\begin{array}{l} s_{k,0} = y_k \quad s_{k,1} = d_k - \dfrac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6} \\ s_{k,2} = \dfrac{m_k}{2} \quad s_{k,3} = \dfrac{m_{k+1} - m_k}{6h_k} \end{array}$$

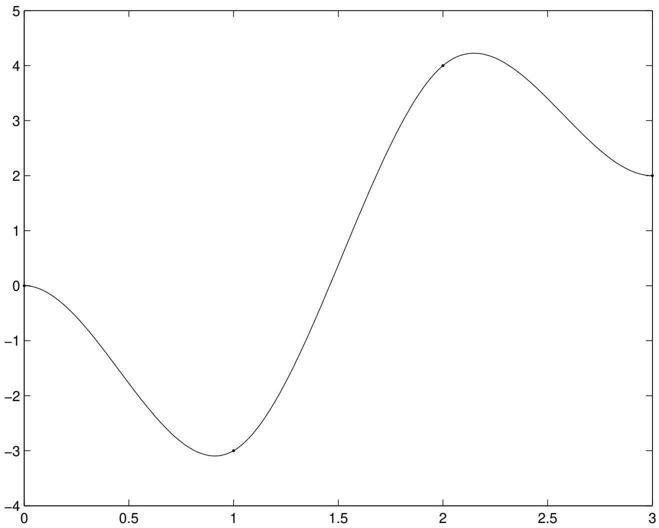


Figura 4.1: Gráfico de un spline cúbico

Capítulo 5

Derivación e integración Numérica

5.1. Derivación numérica

Recordemos que la derivada de una función f en un punto cualquiera x, es igual a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Uno de los objetivos más importantes de la derivación numérica, es desarrollar métodos que puedan ser empleados en la resolución de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales.

Una manera obvia de aproximar $f'(x)$ es considerar directamente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores pequeños de h. Esta opción tiene como inconveniente los grandes errores de redondeo que puede acarrear.

También podríamos elegir una sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converja a cero y generar la sucesión

$$\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}/D_k = \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}$$

Sin embargo desde el punto de vista del cálculo numérico, no es posible tomar valores arbitrariamente pequeños de h. Por otra parte se producen fenómenos de cancelación por los efectos del redondeo, haciendo probable que la sucesión en algún momento tome el valor cero y a partir de allí permanezca constante.

En este capítulo desarrollaremos las fórmulas más usuales para la derivación.

5.1.1. Fórmulas de diferencias progresivas y regresivas

Para aproximar $f'(x_0)$ supongamos primero que $x_0 \in (a; b)$ y que f es C^2 en $[a; b]$. Por otra parte supongamos que $x_1 = x_0 + h$ para alguna $h \neq 0$ de forma tal que $x_1 \in [a; b]$ Construiremos el polinomio de Lagrange de primer orden y luego lo derivaremos.

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_1(x) + \frac{f''(c(x))}{2}\,(x - x_0)(x - x_1) \\
&= f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_0 + h)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \\
&\quad + \frac{f''(c(x))}{2}\,(x - x_0)(x - x_1) \\
&= f(x_0)\frac{x - x_0 - h}{-h} + f(x_0 + h)\frac{x - x_0}{h} \\
&\quad + \frac{f''(c(x))}{2}\,(x - x_0)(x - x_1)
\end{aligned}$$

Derivando respecto de x,

$$\begin{aligned}
f'(x) = &\frac{-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 + h)}{h} + D[f''(c(x))]\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} \\
&+ \frac{f''(c)}{2}\,(2x - 2x_0 - h)
\end{aligned}$$

de forma tal que

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

aunque como no tenemos información acerca de $D[f''(x)]$ no podemos estimar el error de truncamiento.

Cuando $x = x_0$, resulta

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(c)}{2}\,h,$$

o bien,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - O(h) \tag{5.1}$$

Definición 5.1. *La fórmula (5.1) se denomina* **fórmula de diferencia progresiva** *si $h > 0$ y* **fórmula de diferencia regresiva** *si $h < 0$.*

5.1.2. Fórmula de $n+1$ puntos

De manera similar, podemos obtener fórmulas más generales, suponiendo que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos distintos del $[a,b]$ y f es de clase C^{n+1} en dicho intervalo.

En efecto,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \end{aligned}$$

Derivando respecto de x,

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)D_x\big[L_i(x)\big] &+ \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}\, D_x\Bigg[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\Bigg] \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) D_x\Big[f^{(n+1)}(c(x))\Big] \end{aligned}$$

Si x es uno de los x_i, entonces,

$$f'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k'(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k) \tag{5.2}$$

Definición 5.2. *La fórmula (5.2) se conoce como la* **fórmula de** $(n+1)$**-puntos** *para aproximar* $f'(x_i)$*.*

Las más comunes son las fórmulas de 3 y 5 puntos. Encontraremos en primer lugar la fórmula de 3 puntos.

Fórmulas de 3 puntos

Observemos que:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Longrightarrow L_0' = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ L_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Longrightarrow L_1' = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ L_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Longrightarrow L_2' = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

Si además los nodos son equidistantes, resultan las siguientes expresiones:

1. Si $x_i = x_0$, entonces, de la fórmula (5.2) se tiene que:

$$f'(x_0) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k'(x_0) + \frac{f^{(3)}(c)}{6} \prod_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{2}(x_0 - x_k)$$

   Además, $L_0'(x_0) = \frac{-3}{2h}, L_1'(x_0) = \frac{2}{h}$ y $L_2'(x_0) = \frac{-1}{2h}$.

   De todo lo anterior resulta

$$f'(x_0) = \frac{-1}{2h}\big[3f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)\big] + \frac{f^{(3)}(c)}{3}h^2 \tag{5.3}$$

2. Si $x_i = x_1$, entonces,

$$f'(x_1) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k'(x_1) + \frac{f^{(3)}(c)}{6} \prod_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{2}(x_1 - x_k)$$

   Además, $L_0'(x_1) = \frac{-1}{2h}, L_1'(x_1) = 0$ y $L_2'(x_1) = \frac{1}{2h}$.

   Por lo tanto,

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}\big[f(x_2) - f(x_0)\big] - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2 \tag{5.4}$$

3. Finalmente, si $x_i = x_2$,

   $L_0'(x_2) = \frac{1}{2h}, L_1'(x_2) = \frac{-2}{h}$ y $L_2'(x_2) = \frac{3}{2h}$.

Resulta entonces

$$f'(x_2) = \frac{-1}{2h}\big[-f(x_0) + 4f(x_1) - 3f(x_2)\big] + \frac{f^{(3)}(c)}{3}h^2 \tag{5.5}$$

Reemplanzando $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ en las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5), obtenemos las expresiones:

$$f'(x_0) = \frac{-1}{2h}\big[3f(x_0) - 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)\big] + \frac{f^{(3)}(c)}{3}h^2 \tag{5.6}$$

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{2h}\big[f(x_0 + 2h) - f(x_0)\big] - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2 \tag{5.7}$$

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{-1}{2h}\big[-f(x_0) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0 + 2h)\big] + \frac{f^{(3)}(c)}{3}h^2 \tag{5.8}$$

Definición 5.3. *Las fórmulas 5.6, 5.7 y 5.8 se conocen como* **fórmulas de 3 puntos**

Si en la ecuación (5.7) reemplazamos $x_0 + h$ por x_0 se obtiene la *fórmula centrada de 3 puntos*:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\big[f(x_0+h) - f(x_0-h)\big] - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2 \tag{5.9}$$

Análogamente si reemplazamos $x_0{+}2h$ por x_0 en la ecuación (5.8), resulta,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\big[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)\big] + \frac{f^{(3)}(c)}{3}h^2 \tag{5.10}$$

que es igual a (5.6) cambiando h por $-h$.

Fórmula de diferencias centradas de 5 puntos

Supongamos que f es de clase C^5 en $[a;b]$ y que $x-2h$, $x-h$, x, $x+h$ y $x+2h$ están en $[a;b]$.

Utilizando la fórmula de Taylor de cuarto orden de f alrededor de x para $f(x{+}h)$, $f(x{-}h)$,$f(x{+}2h)$ y $f(x{-}2h)$ puede obtenerse la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{1}{12h}\big[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\big] + f^{(5)}(c)\frac{h^4}{30} \tag{5.11}$$

la cual tiene una precisión mayor que las fórmulas de 3 puntos.

5.1.3. Efecto del error de redondeo en las fórmulas centradas de 3 y 5 puntos

Supongamos la fórmula centrada de orden $O(h^2)$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\big[f(x_0+h) - f(x_0-h)\big] - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2$$

Supongamos también que al evaluar $f(x+h)$ y $f(x-h)$ ocurren errores de redondeo $e(x+h)$ y $e(x-h)$. Entonces se tiene que

$$f(x_0+h) = \widehat{f}(x_0+h) + e(x_0+h)$$

y

$$f(x_0-h) = \widehat{f}(x_0-h) + e(x_0-h)$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = & \frac{1}{2h}\big[\widehat{f}(x_0+h) + e(x_0+h) - \widehat{f}(x_0-h) - e(x_0-h)\big] \\
& - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2 \\
= & \frac{1}{2h}\big[\widehat{f}(x_0+h) - \widehat{f}(x_0-h)\big] + \frac{1}{2h}\big[e(x_0+h) - e(x_0-h)\big] \\
& - \frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2
\end{aligned}
$$

Si los errores de redondeo están acotados por algún $\epsilon > 0$ y M es una cota superior de la derivada tercera,

$$
\begin{aligned}
|\text{Error Total}| &= \big|f'(x_0) - \frac{\widehat{f}(x_0+h) - \widehat{f}(x_0-h)}{2h}\big| \\
&\leq \big|\frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h}\big| + \big|\frac{f^{(3)}(c)}{6}h^2\big| \\
&\leq \frac{1}{2h}\big|e(x_0+h) - e(x_0-h)\big| + \frac{h^2}{6}M \\
&\leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M
\end{aligned}
$$

De la expresión anterior puede observarse que para reducir el error de truncamiento es necesario reducir h pero esto aumenta el error de redondeo.

Análogamente se puede establecer que para la fórmula de 5 puntos,

$$|\text{Error Total}| \leq \frac{3\epsilon}{2h} + \frac{h^4}{30}M$$

5.1.4. Derivada segunda

Finalmente, arribaremos a una fórmula para aproximar la derivada segunda de una función.

Utilizando la fórmula de Taylor de tercer orden de f alrededor de x para $f(x+h)$, se tiene que:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(c_1)}(x)}{4!}h^4 \qquad (5.12)$$

Cambiando h por $-h$ en (5.12), resulta

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(c_2)}(x)}{4!}h^4 \qquad (5.13)$$

Haciendo (5.12) + (5.13)

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \left[f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)\right]\frac{h^4}{4!} \qquad (5.14)$$

Como f es C^4 en el intervalo considerado, aplicando el Teorema de los Valores Intermedios, existe un ξ entre c_1 y c_2 tal que:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + 2f^{(4)}(\xi)\frac{h^4}{4!} \qquad (5.15)$$

Por lo tanto,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi)h^2}{12} \qquad \xi \in (x-h, x+h) \qquad (5.16)$$

5.2. Integración Numérica

Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado tiene antiderivada. Sin embargo, esta antiderivada no necesariamente es una función elemental, y su cálculo requiere el uso de métodos numéricos.

5.2.1. Métodos de cuadratura

El método básico para aproximar la $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se basa en calcular sumas del tipo $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$, y recibe el nombre de *cuadratura numérica.*

Utilizando los polinomios de Lagrange podemos encontrar algunas fórmulas de integración.

Consideremos $n+1$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$ y sea f tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la fórmula de cuadratura es

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)
$$

donde $a_i = \int_a^b L_i(x)\mathrm{d}x$ y el error está dado por

$$
E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x
$$

Cuando utilizamos el primer y segundo polinomio de Lagrange en la fórmula de cuadratura anterior, con nodos equiespaciados, se obtienen las expresiones conocidas como la *regla del trapecio* y *regla de Simpson* respectivamente.

5.2.2. Regla del trapecio

Para derivar la regla del trapecio, consideremos los puntos $a = x_0$ y $b = x_1$ e integremos el primer polinomio interpolador:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_1} \Bigg(f(x_0)\,\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\,\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\
&\quad + \frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2!}\,(x-x_0)(x-x_1)\Bigg)\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_1)\mathrm{d}x + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f^{(2)}(\xi(x))\,(x-x_0)(x-x_1)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Llamando h a la longitud del intervalo, resulta:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(x_0)}{-h}\left(-\frac{h^2}{2}\right) + \frac{f(x_1)}{h}\left(\frac{h^2}{2}\right) \\ + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f^{(2)}(\xi(x))\ (x-x_0)(x-x_1)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio Ponderado, tenemos que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\mathrm{d}x$$

De donde finalmente resulta la *Regla del Trapecio*:

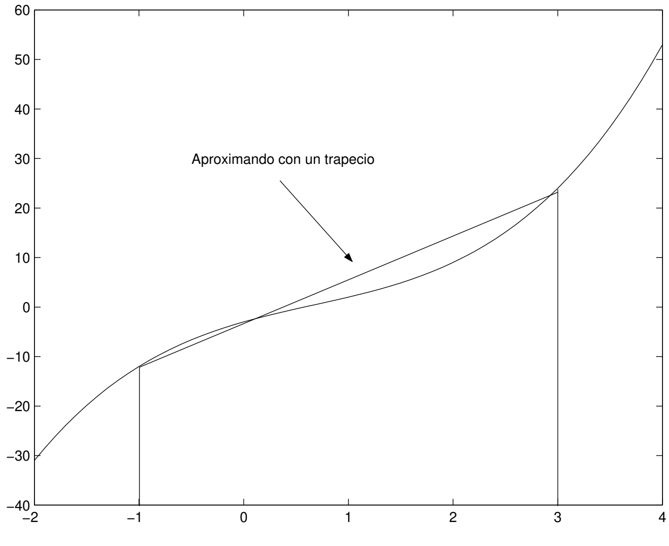
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) - \frac{1}{12}f^{(2)}(\xi)h^3 \tag{5.17}$$

o bien,

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) \tag{5.18}$$

Observación

Si f es positiva en el intervalo $[a,b]$, la fórmula (5.18) representa el área del siguiente trapecio:



Ejemplo 5.1. *Vamos a calcular el valor de*

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx$$

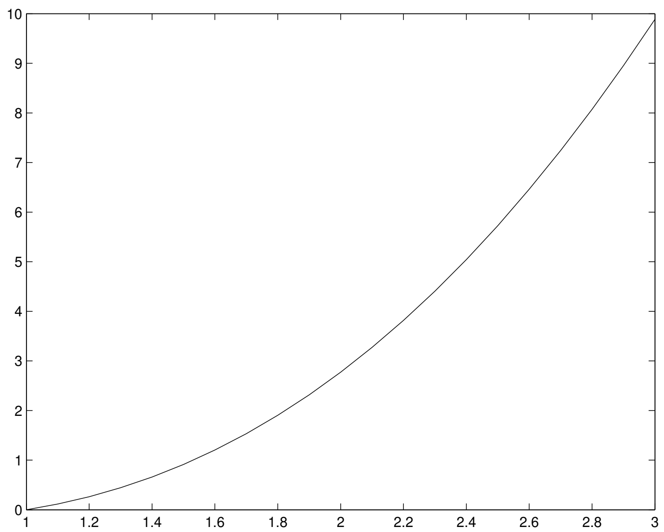
utilizando la regla del trapecio. Esta integral puede resolverse fácilmente utilizando el método de integración por partes:

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 \Big|_1^3 = 9\ln 3 \frac{26}{9} \approx 6,99861709$$

Aplicando la Regla del trapecio, resulta

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx = \frac{2}{2}(9\ln 3 + \ln 1) = 9\ln 3 \approx 9,887510598$$

Esta aproximación es bastante mayor que el valor exacto porque la función $f(x) = x^2 \ln x$ tiene concavidad positiva en todo el intervalo de integración:



5.2.3. Regla de Simpson

Podemos obtener esta fórmula integrando el segundo polinomio interpolador de Lagrange en el $[a, b]$. Sin embargo, resulta conveniente obtenerla a partir de tercer polinomio de Taylor alrededor de x_1.

Entonces, para cada $x \in [x_0, x_2]$ existe un $\xi(x) \in (x_0, x_2)$ tal que:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_1)}{3!}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_1)^4 \end{aligned}$$

Integrando entre x_0 y x_2,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \left(f(x_1)(x-x_1) + \frac{1}{2}f'(x_1)(x-x_1)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}f''(x_1)(x-x_1)^3 + \frac{1}{24}f^{(3)}(x_1)(x-x_1)^4 \right)\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$
$$+ \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\mathrm{d}x$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio Ponderado y escribiendo la derivada segunda siguiendo la fórmula (5.16) , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x &= 2hf(x_1) + \frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(x_1) + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)\frac{2}{5}h^5 \\
&= 2hf(x_1) \\
&\quad + \frac{1}{3}h^3 \left(\frac{1}{h^2}(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)\frac{2}{5}h^5 \\
&= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) - \frac{1}{36}f^{(4)}(\xi_2)h^5 \\
&\quad + \frac{1}{60}f^{(4)}(\xi_1)h^5
\end{aligned}$$

de donde finalmente, teniendo en cuenta una cantidad de consideraciones acerca de $f^{(4)}$, obtenemos la *Regla de Simpson*:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \tag{5.19}$$

Ejemplo 5.2. *Nuevamente calcularemos una aproximación de*

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx,$$

pero utilizando en este caso la regla de Simpson:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}\left(\ln 1 + 16\ln 2 + 9\ln 3\right) \\
&\approx 6,992621829
\end{aligned}$$

Puede observarse que este valor es mucho más preciso que el calculado anteriormente utilizando la regla del trapecio. Aplicando Simpson se tiene que el módulo del error absoluto es

$5,99988\times10^{-3}$ *y el error relativo es de* $8,57295\times10^{-4}$*, mientras que el error porcentual de la aproximación calculada con el método del trapecio, es de* $0,4128$.

Grado de exactitud

El *grado de exactitud* o *grado de precisión* de una fórmula de cuadratura es el entero positivo más grande n, tal que la fórmula sea exacta para x^k cuando $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Como consecuencia de la linealidad de la integral, esto equivale a decir que una regla de cuadratura tiene grado de exactitud n si la fórmula es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que n.

Observemos lo que ocurre en el caso particular de la regla del trapecio. Recordemos que esta regla permite aproximar una integral mediante la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Sea T_k la aproximación mediante la regla del trapecio de la integral de x^k en el intervalo $[a;b]$. Probaremos que la regla es exacta para $k = 0$ y $k = 1$, pero no lo es, en general, para $k > 1$.

1. Caso $k = 0$

   Se tiene que:

   $$\int_a^b x^0\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$
   $$T_0 = \frac{b-a}{2}\cdot(a^0+b^0) = \frac{b-a}{2}\cdot 2 = b-a$$

   Por lo tanto,

   $$\int_a^b x^0\mathrm{d}x = T_0$$

   lo cual implica que la regla es exacta para $k = 0$

2. Caso $k = 1$

   $$\int_a^b x^1\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2}$$
   $$T_1 = \frac{b-a}{2}\cdot(a+b) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

   de donde la regla es exacta para $k = 1$

3. Caso $k=2$ Por un lado, se tiene que

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{b^3-a^3}{3}$$

mientras que

$$T_2 = \frac{b-a}{2} \cdot (a^2+b^2)$$

con lo cual

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x \neq T_2$$

Este resultado no debería sorprender ya que el término del error dado por la regla del trapecio es igual a $-\frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)(b-a)^3$ y se anula para todo polinomio de grado menor o igual que 1, pues tienen derivada segunda igual a cero.

De esta manera, el grado de exactitud constituye una medida sobre la precisión de un método y nos permite anticipar su término de error.

Sabiendo que la regla del trapecio es de grado 1, la deduciremos nuevamente.

Queremos encontrar coeficientes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c_1 f(a) + c_2 f(b) + c_3 f^{(2)}(\xi)$$

Como la regla tiene grado de precisión 1,

$$\int_a^b x \mathrm{d}x = c_1 a + c_2 b$$

de donde,

$$\frac{b^2-a^2}{2} = c_1 a + c_2 b$$

y, por otra parte,

$$\int_a^b 1 \mathrm{d}x = c_1 + c_2$$

de donde,

$$b-a = c_1 + c_2$$

Resolviendo el sistema lineal dado por las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Por la tanto se tiene la regla R_T tal que

$$R_T = \frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big]$$

Si consideramos ahora $f(x)=x^2$,

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + 2c_3$$
$$\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) = \frac{1}{2}(b-a)\left(a^2+b^2\right) + 2c_3$$

Haciendo las cuentas y despejando, resulta

$$c_3 = -\frac{h^3}{12}$$

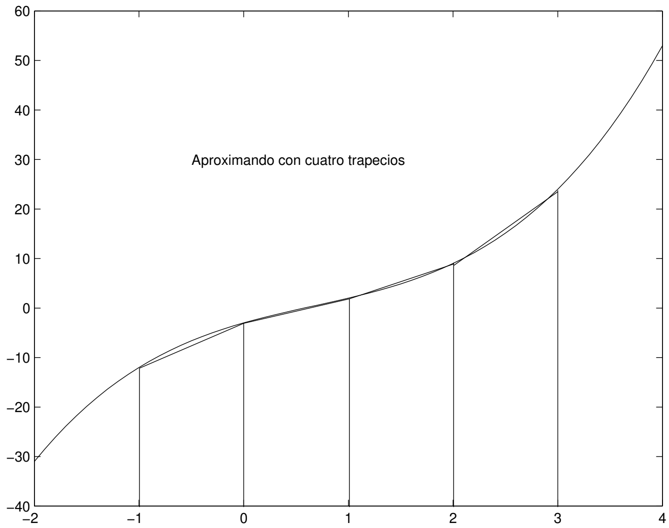
obteniéndose nuevamente la fórmula

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] - \frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi)$$

con ξ entre a y b.

5.2.4. Regla compuesta del trapecio

Un método intuitivo para hallar el área limitada por una curva en un intervalo $[a,b]$, es dar una aproximación a dicha área sumando las áreas de una serie de trapecios construidos sobre los intervalos $[x_{k-1};x_k]$ de una partición del $[a,b]$.



Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ puntos equiespaciados del intervalo $[a, b]$, con $a = x_0$ y $b = x_n$. Sea $x_k = a + hk$ donde $h = \frac{b-a}{n}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k-1})] \\
&= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]
\end{aligned}$$

o bien,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (5.20)$$

Análisis del error

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k-1})] - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi(k)) \right)
\end{aligned}$$

de donde el error de aproximación está dado por

$$E_T = \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{n} f^{(2)}(\xi(k)).$$

Como $h = \frac{b-a}{n}$, podemos escribir

$$E_T = \frac{(b-a)h^2}{12} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2)}(\xi(k))}{n}$$

Como la suma anterior es una media aritmética de valores de la derivada segunda, que es continua, podemos encontrar un $\xi \in (a, b)$ tal que $f^{(2)}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2)}(\xi(k))}{n}$. Luego

$$E_T = \frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi) = O(h^2)$$

5.2.5. Regla compuesta de Simpson

Sea n un número entero par. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y aplicamos la regla de Simpson en cada uno de ellos. Tenemos $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_k = a + hk$ con $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, utilizando (5.19)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi(k)) \right) \\
&= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n) \right) \\
&- \frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi(k))
\end{aligned}$$

Análisis del error

Como f es de clase C^4 en $[a, b]$, por el Teorema de Weierstrass (valores extremos), $f^{(4)}$ toma un valor mínimo y un valor máximo en $[a, b]$. Luego,

$$\min_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(\xi(k)) \leq \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x)$$

de donde,

$$\sum_{k=1}^{n/2} \min_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi(k)) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x)$$

$$\frac{n}{2} \min_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi(k)) \leq \frac{n}{2} \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x)$$

Por el Teorema de los Valores Intermedios, existe un $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi(k))$$

con lo cual tenemos, finalmente, que

$$E_S = \frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) h^4 = O(h^4) \tag{5.21}$$

5.2.6. Extrapolación de Richardson

La extrapolación puede aplicarse siempre que sepamos que el método de aproximación tiene un término de error de una forma previsible. Esta forma se basa en un parámetro que generalmente es el tamaño de paso h. Supongamos que, para cada número $h \neq 0$ tenemos una fórmula $N(h)$ que aproxima un valor desconocido M y que el error de truncamiento que supone la aproximación presenta la forma

$$M - N(h) = k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \dots \tag{5.22}$$

para algún conjunto de constantes $k_1, k_2, k_3, \dots$ desconocidas. Dado que el error de truncamiento es $O(h)$ es de esperar que
$M - N(0,1) \approx k_1 0,1$, $M - N(0,01) \approx k_1 0,001$ y en general
$M - N(h) \approx k_1 h$, salvo que haya una gran variación entre las constantes $k_1, k_2, k_3, \dots$.
El objeto de la extrapolación es combinar las aproximaciones $O(h)$ de manera que se obtengan fórmulas con un error de truncamiento de orden superior.
Supongamos que la fórmula (5.22) se aplica a cualquier h positivo. Reemplazando h por $\frac{h}{2}$ se obtiene:

$$M - N(\frac{h}{2}) = \frac{k_1}{2} h + \frac{k_2}{4} h^2 + \frac{k_3}{8} h^3 + \dots \tag{5.23}$$

Haciendo 2$\cdot$ (5.23) $-$ (5.22), resulta

$$M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) - \frac{k_2}{2} h^2 - \frac{3k_3}{4} h^3 - \dots \tag{5.24}$$

Llamando $N_1(h) = N(h)$ y $N_2(h) = N_1(\frac{h}{2}) + N_1(\frac{h}{2}) - N_1(h)$. Luego,

$$M = N_2\left(h\right) - \frac{k_2}{2} h^2 - \frac{3k_3}{4} h^3 + \dots = N_2(h) + O(h^2) \tag{5.25}$$

Si ahora reemplazamos h por $h/2$ obtenemos

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{k_2}{8} h^2 - \frac{3k_3}{32} h^3 - \dots \tag{5.26}$$

Combinando 5.25 y 5.26, resulta

$$3M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + \frac{3k_3}{8} h^3 + \dots$$

$$M = \left[N_2(h/2) + \frac{N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{3}\right] + \frac{k_3}{8} h^3 + \dots \tag{5.27}$$

Llamando $N_3(h) = N_2(\frac{h}{2}) + \frac{N_2(h/2)-N_2(h)}{3}$,

$$M = N_3(h) + O(h^3)$$

En general, si M puede reescribirse en la forma

$$M = N(h) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j h^j + O(h^n)$$

entonces para cada $j = 2, 3, \ldots, n$ tendremos una aproximación $O(h^j)$ de la forma

$$N_j(h) = N_{j-1}(h/2) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}$$

La extrapolación puede aplicarse siempre que el error de truncamiento tenga una fórmula del tipo

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_n})$$

para un conjunto de constantes k_i con $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

5.2.7. Integración de Romberg

Este método combina la extrapolación de Richardson con la regla compuesta del trapecio. La idea es generar un algoritmo iterativo que permita elevar el orden de la aproximación en cada paso.

Puede probarse que se la regla compuesta del trapecio admite reescribirse de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_{k,1}(f) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i h_k^{2i}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ y $T_{k,1}(f)$ es la aproximación de $\int_a^b (f(x)\mathrm{d}x$ utilizando 2^{k-1} trapecios.

Por otra parte, es posible deducir la siguiente expresión para los $T_{k,1}$:

$$T_{k,1} = \frac{1}{2}\big[T_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k)\big] \tag{5.28}$$

Finalmente, realizando el procedimiento de extrapolación de Richardson, se tiene que

$$T_{k,2} = T_{k,1} + \frac{T_{k,1} - T_{k-1,1}}{3} \quad k \geq 2$$

y, en general,

$$T_{k,j} = T_{k,j-1} + \frac{T_{k,j-1} - T_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

De esta forma, partiendo de los valores de $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, $T_{3,1}$, $T_{4,1}$, puede construirse la siguiente tabla:

$$\begin{array}{llll}
T_{1,1} & & & \\
T_{2,1} & T_{2,2} & & \\
T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \\
T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4}
\end{array}$$

Observemos que para agregar un renglón a la tabla, solamente debemos calcular $T_{5,1}$ utilizando la regla del trapecio y luego aplicar la fórmula recursiva.

Ejemplo 5.3. *Vamos a calcular la* $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$. *Resolviendo analíticamente y utilizando el teorema de Barrow, se tiene que*

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = 26,79907502$$

Aplicando la fórmula de iteración (5.28), se tiene que:

$h_1 = 2, \quad T_{1,1} = \frac{2}{2}(f(0) + f(2)) = 109{,}1963001$

$h_2 = 1, \quad T_{2,1} = \frac{1}{2}(T1,1 + 2f(1)) = 57{,}31643188$

$h_3 = \frac{1}{2}, \quad T_{3,1} = \frac{1}{2}(T2,1 + (f(0{,}5) + f(1{,}5)) = 36{,}09502417$

$h_4 = \frac{1}{4}, \quad T_{4,1} = \frac{1}{2}(T3,1 + \frac{1}{2}(f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)) = 29{,}28813231$

Con estos datos, mediante la iteración de Romberg podemos construir la siguiente tabla con las sucesivas aproximaciones:

109.1963001			
57.31643188	*40.02314247*		
36.09502417	*29.0212216*	*28.28776021*	
29.28813231	*27.01916836*	*26.88569814*	*26.86344319*

Observando el siguiente gráfico puede entenderse por qué las primeras aproximaciones tienen errores tan grandes:

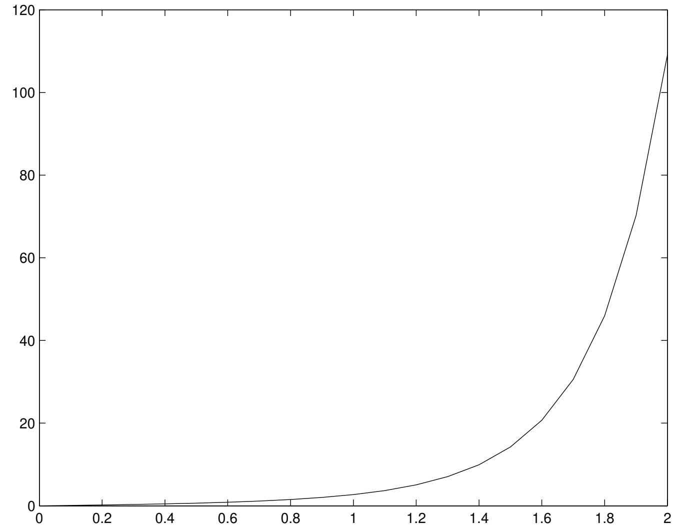


Figura 5.1: Gráfico de $f(x) = xe^{x^2}$

Bibliografía

[1] T. Apostol, *An Elementary View of Euler's Summation Formula*, The American Mathematical Monthly, Vol. 106 (1999) pp 409-418.

[2] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analisis*, Wiley, USA, 1988.

[3] J. Barral Souto, *Cálculo de diferencias finitas, diferencias divididas, interpolación*, Facultad de Ciencias Económicas, Buenos Aires, 1949.

[4] N. Bowers, *Actuarial Mathematics*, The Society Of Actuaries, E.U.A., 1997.

[5] R. Burden y D. Faires, *Análisis numérico*, PWS Publishing Co., Boston, MA, USA, 1988.

[6] H. Freeman *An Elementary Treatise on Actuarial Mathematics*,Cambridge University Press, London, 1932

[7] J. González Galé, *Elementos de cálculo actuarial*, Ed. Macchi, Buenos Aires, 1970.

[8] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 2006.

[9] C. Jordan Jr., *Life contingencies*, Chicago, 1952.

[10] Kreider,Kuller;Ostberg, *Ecuaciones diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.

[11] V. Lampret, *The Euler.Maclaurin and Taylor Formulas: Twin, Elementary Derivations*, Mathematics Magazine, Vol. 74 (2001) pp 109-122.

[12] J. Mathews y K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Prentice Hall, España, 1999.

[13] S. Nakamura, *Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab*, Prentice Hall,México, 1997.

[14] F. Scheid, *Análisis numérico*, Mc Graw Hill, New York, 1968.

[15] M. Spivak, *Calculus*, Reverté,1992.

[16] K. Williams, *Bernoulli's Identity without Calculus*, Mathematics Magazine, Vol. 70 (1997) pp 47-50.