

Económicas, UBA. Actuario. Análisis Numérico.

Examen FINAL Remanente. Periodo 3.

Para aprobar, debe sumar 50 puntos.

Nombre y Apellido: Número de Registro:

25/agosto/2021

Contents

1 Resolución de Ecuaciones: Punto Fijo (25 puntos)	2
1.1 Graficar la función	2
1.2 Corregir algoritmo	2
1.3 Hallar raíces	2
1.4 Graficar los puntos fijos	2
1.5 Iteraciones	2
2 Integral Densidad Gamma (25 puntos)	3
2.1 Simpson y Trapecio	3
2.2 Simpson Compuesto	3
2.3 Esperanza Matemática	3
2.4 Esperanza Matemática de una función condicional	3
3 Derivación Numérica (12 puntos)	4
3.1 Estime $P'(x)$	4
3.2 Estime $P''(x)$	4
4 SQL (10 puntos)	5
4.1 Consulta empleados	5
4.2 Consulta Categorías	5
5 Interpolación (13 puntos)	6
5.1 Teoría	6
5.2 Lagrange	6
6 Simulación de precios (15 puntos)	7

1 Resolución de Ecuaciones: Punto Fijo (25 puntos)

Considere la siguiente ecuación: $\cos(x)/x + x^3 + 2 * x^2 - 3 * x = 1$. Se desean obtener las soluciones en el intervalo $(1; 2]$.

1.1 Graficar la función

- Plantee la ecuación de la forma $f(x) = 0$.
- Grafique la función de manera tal que pueda identificar todas las soluciones de la ecuación en el intervalo dado.
- Indique un intervalo aproximado que contenga cada una de las raíces identificadas con precisión 10^{-1} .

1.2 Corregir algoritmo

Corregir el algoritmo “PuntoFijo” en el siguiente bloque de código. *Edite lo mínimo necesario para que el algoritmo funcione correctamente* (ediciones innecesarias se considerarán errores).

Comentar los cambios que realizó (use “#” al final de cada línea modificada).

[*Notar que, para el resto del ejercicio, no debe utilizar su propio algoritmo, sino que debe usar el algoritmo dado y corregido, sin agregar ninguna línea de código adicional.*]

```
# Corrija el código a continuación
PuntoFijo = function(g,p0,Tol,N){
  for(i in 1:N){
    p0 = g(p)
    if (abs(p0-p) > Tol) return(p0)
    p = p + 1
  }
  return(paste('El algoritmo falla luego de ', N, ' iteraciones'))
}
```

1.3 Hallar raíces

Utilizando el algoritmo del punto 1.2, halle todas las raíces identificadas en el punto 1.1. Halle en primer lugar la función $g(x)$ (o las funciones), y chequee el cumplimiento de las condiciones de existencia en cada solución.

[**OBSERVACIÓN:** Debe usar el algoritmo dado en 1.2 (corregido por usted). No puede usar su propio algoritmo.]

1.4 Graficar los puntos fijos

Grafique la función o las funciones $g(x)$ (que utilizó para hallar las raíces de $f(x)$) e identifique los **puntos fijos** hallados en el punto 1.3. En el gráfico (o en cada gráfico), marque las coordenadas de cada *punto fijo* $g(x) = x$ con un punto de color rojo.

1.5 Iteraciones

Tome el algoritmo del punto 1.2 (copie y pegue) y agregue las líneas de código que considere necesarias para poder visualizar (imprimir) cada iteración del algoritmo. Una vez editado el algoritmo, imprima 8 iteraciones del algoritmo iniciando en $x_0 = 1.50$. ¿A cuál de las raíces convergería el algoritmo en este caso?

2 Integral Densidad Gamma (25 puntos)

Considere la siguiente función de densidad de la variable aleatoria Y , con dominio en el intervalo $(0, \infty)$, y parámetros $\alpha = 2.52$ y $\theta = 1.32$:

$$f_Y(x|\alpha, \theta) = \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}$$

La función $\Gamma(z)$ está definida por la siguiente integral: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$.

2.1 Simpson y Trapecio

Aproxime la probabilidad de que Y esté entre 0.25 y 5 usando los métodos de “Trapecio”, “Simpson” y “Simpson tres octavos”. Ingrese cada algoritmo por separado (**no se aceptará un “algoritmo general”**). Indique en cada caso los “nodos” y_0, y_1, \dots, y_n que se utilizan para la aproximación.

2.2 Simpson Compuesto

Aproxime la probabilidad de que Y esté entre 0.25 y 5 usando el método de “Simpson Compuesto” con $n = 20$. Además:

- Indique en cada caso los “nodos” y_0, y_1, \dots, y_n que se utilizan para la aproximación.
- Calcule la cota del error.
- Compare los resultados con el punto 2.1.

2.3 Esperanza Matemática

Use *Trapecio Compuesto* con $n = 1500$ para aproximar $E(Y)$; es decir, la esperanza matemática de Y . Calcule la cota del error.

2.4 Esperanza Matemática de una función condicional

Use *Simpson Compuesto* con $n = 1500$ para aproximar $E[Z]$; donde

$$Z = \begin{cases} Y & \text{si } Y < 5 \\ 5 & \text{si } Y \geq 5 \end{cases}$$

Es decir, Z es una función condicional limitada de Y , que toma el valor Y siempre y cuando sea menor a 5, y toma el valor máximo de 5 en caso contrario.

3 Derivación Numérica (12 puntos)

Considere los datos de la tabla siguiente, donde $P = f(r)$.

r	P
0.00	115.0000
0.01	109.7069
0.02	104.7135
0.03	100.0000
0.04	95.5482
0.05	91.3410
0.06	87.3629
0.07	83.5992
0.08	80.0364
0.09	76.6621
0.10	73.4645
0.11	70.4328
0.12	67.5570
0.13	64.8277
0.14	62.2361
0.15	59.7741

3.1 Estime $P'(x)$.

Utilice el método de los 5 puntos centrados para aproximar $P'(r_0)$ y $P'(r_1)$. Si no pudiese aplicar el método, explique por qué. Solicite al docente los valores de r_0 y r_1 .

[Observación: *utilice solamente el código necesario*. No puede usar un algoritmo que calcule todos los métodos.]

3.2 Estime $P''(x)$.

Aproxime las derivadas segundas $P''(r_0)$ y $P''(r_1)$. Si no pudiese aproximarla/s, explique por qué. Solicite al docente los valores de r_0 y r_1 .

4 SQL (10 puntos)

Utilice la base de datos de la siguiente web para preparar sus códigos de SQL: https://www.w3schools.com/sql/trysql.asp?filename=trysql_select_all

4.1 Consulta empleados

Escriba una consulta SQL que contenga los empleados con más de 20 ventas realizadas en total. La salida debe contener los siguientes campos: Nombre y Apellido del Empleado, Cantidad de ventas, Total (calculado como la suma total del Precio*Cantidad).

4.2 Consulta Categorías

Escriba una consulta SQL que contenga un resumen de las categorías de productos vendidas solo para los productos que se venden en botellas. La salida debe contener los siguientes campos: Código de categoría, Nombre de categoría, Descripción de la categoría, Cantidad de ventas y Total (calculado como la suma total del Precio*Cantidad).

5 Interpolación (13 puntos)

5.1 Teoría

Explique en qué consiste la interpolación mediante trazadores cúbicos, explicitando las diferencias entre los trazadores “naturales” y los “sujetos”.

Respuesta (escriba a continuación):

5.2 Lagrange

Considere los datos de pérdidas (L) y prbabilidad acumulada ($PA = Prob(L < x)$) estimadas en la siguiente Tabla.

L	PA
9.4812	0.1
9.5244	0.2
10.0952	0.3
11.1160	0.4
12.8725	0.5
13.4483	0.6
14.1008	0.7
14.4795	0.8
15.2031	0.9
19.6600	1.0

Usando un polinomio de Lagrange para interpolar, estime las probabilidades $P(L < 14)$ y $P(L < 18)$. Comente los resultados hallados.

6 Simulación de precios (15 puntos)

- Simule 1000 *caminos de precios diarios*, considerando $P_0 = 75$, $\mu = 0.15$ y $\sigma = 0.20$, y un horizonte temporal de seis meses. Grafique un histograma de los precios finales.
- Calcule la probabilidad de que el precio final P_T esté entre 65 y el precio inicial P_0 .
- Calcule la probabilidad de que el precio final P_T sea menor al precio esperado en T ; es decir, $Prob(P_T < E[P_T])$.