Suma de Subrectángulos

Ejemplo

Suma de Subrectángulos

Dada la siguiente matriz, ¿Cuál es el subrectángulo cuya sumatoria de elementos internos es máxima?

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Suma de Subrectángulos

Si sumamos toda la matriz, quizás no obtenemos el mayor valor, ya que también tenemos valores negativos:

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Suma de Subrectángulos

Deberíamos considerar diferentes subrectángulos para encontrar aquel cuya sumatoria es máxima:

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

4

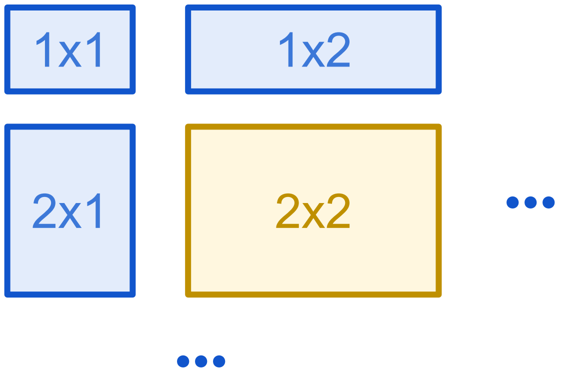
-13

10

8

Suma de Subrectángulos: Solución sin P. D.

Podemos probar todos los tamaños de subrectángulos, en cada posición de la matriz, sumando todos los elementos internos, e ir guardando el mayor resultado.



-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Suma de Subrectángulos: Solución con P. D.

Para resolver este problema con programación dinámica, utilizaremos una matriz auxiliar (PD) para almacenar cierta información “intermedia” que nos ayudará a calcular rápidamente la sumatoria de subrectángulos.

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Suma de Subrectángulos: Cálculo de matriz PD

En cada posición almacenamos la sumatoria desde M[0][0] hasta M[i][j]:

Matriz original

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Matriz P.D. (con sumatorias parciales)

-5	-2	3				
-2	-7	**-12**				

-5 +3 +5 +3 -8 -10 = **-12**

Suma de Subrectángulos: Cálculo de matriz PD

Cada celda, también podemos completarla ¡usando Programación Dinámica!

Matriz original

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Matriz P.D. (con sumatorias parciales)

-5	-2	3	11			
-2	-7	**-12**	**-2**			
-1	2	**0**	**4**			

PD[i][j] = + PD[i-1][j] + PD[i][j-1] - PD[i-1][j-1] + M[i][j]

PD[i][j] = + 0 + (-2) - (-12) + (-6) = **4**

Suma de Subrectángulos: Cálculo de matriz PD

Al completar la matriz de P.D., tendremos el siguiente resultado:

Matriz original

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Matriz P.D. (con sumatorias parciales)

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

¿Cómo nos ayudará nuestra matriz PD a resolver nuestro problema original?

M

-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Supongamos que queremos saber la sumatoria interna de este subrectángulo que va desde M[i][j] hasta M[f][c]

M

			j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Si tomamos PD[f][c], tenemos la sumatoria de todos los valores que queremos, el problema es que también está sumando partes de M que no nos interesan.

M

			j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	**31**	28
-4	14	1	7	1	11	11

PD[f][c] contiene la sumatoria desde M[0][0] hasta M[f][c]

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Pero si a esa sumatoria parcial, le restamos PD[f][j-1], estaríamos restando todo un grupo de valores que no nos interesan.

M

			j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	**21**	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

PD[f][j-1] contiene la sumatoria desde M[0][0] hasta M[f][j-1]

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Y si luego restamos PD[i-1][c], estaríamos restando otra parte que no nos sirve... el problema ahora es que restamos 2 veces una sección.

M

		j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	**4**	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

PD[i-1][c] contiene la sumatoria desde M[0][0] hasta M[i-1][c]

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Pero esa sección que restamos 2 veces, podemos compensarla volviendo a sumarla con el acumulado en PD[i-1][j-1].

M

			j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

-5	-2	3	11	13	14	10
-2	-7	-12	-2	-2	4	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	21	20	20	11	31	28
-4	14	1	7	1	11	11

PD[i-1][j-1] contiene la sumatoria desde M[0][0] hasta M[i-1][j-1]

Suma de Subrectángulos: Solución con P.D.

Finalmente, si efectuamos este simple cálculo, podemos obtener la sumatoria de únicamente los valores que nos interesaban ¡en O(1)!

M

			j			c	
	-5	3	5	8	2	1	-4
	3	-8	-10	2	-2	5	4
i	1	8	3	-6	0	9	3
f	12	7	1	-4	-9	5	-6
	-15	8	-12	6	3	-10	3

PD

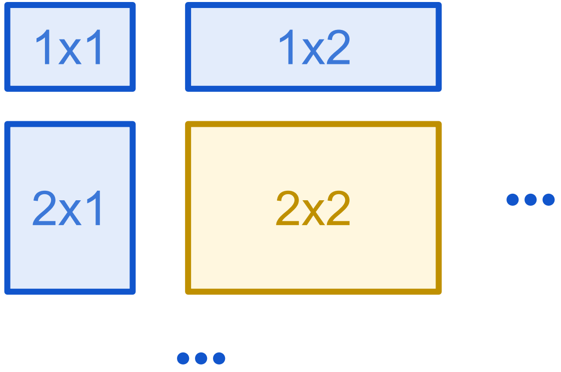
-5	-2	3	11	13	14	10
-2	**-7**	-12	-2	-2	**4**	4
-1	2	0	4	4	19	22
11	**21**	20	20	11	**31**	28
-4	14	1	7	1	11	11

sumatoria = + PD[f][c] - PD[f][j-1] - PD[i-1][c] + PD[i-1][j-1]

sumatoria = + 31 - 21 - 4 + (-7) = **-1**

Suma de Subrectángulos: Solución con P. D.

Este cálculo, lo tenemos que realizar para cada tamaño de subrectángulo en cada posición de la matriz (de estos pasos no escapamos). La ventaja es que pudimos resolver sumatorias que son costosas en tiempo constante (con un mayor costo de memoria).



-5	3	5	8	2	1	-4
3	-8	-10	2	-2	5	4
1	8	3	-6	0	9	3
12	7	1	-4	-9	5	-6
-15	8	-12	6	3	-10	3

Suma de Subrectángulos: Solución con P. D.

En este ejemplo, la información que guardamos para utilizar programación dinámica <u>no es directamente</u> el resultado del problema o valores que necesitamos, sino que almacenamos **información intermedia** que nos simplifica y mejora un determinado proceso interno de nuestro algoritmo.

Estos casos suelen ser más complejos de detectar y requieren mayor práctica de la metodología, ya que no son tan triviales como el ejemplo de Fibonacci.

Suma de Subrectángulos: Análisis C.C.

Análisis de complejidad computacional de ambas soluciones:

	Solución sin P.D.	Solución con P.D.
Generación de matriz de P.D.	-	$O(N^2)$
Generación de subrectángulos (distintos tamaños)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Movimiento de subrectángulos (por cada posición de M)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Cálculo de la sumatoria de los elementos internos	$O(N^2)$	$O(1)$
Complejidad Computacional	¿?	¿?

Pre-cálculo

+

Solución

Suma de Subrectángulos: Análisis C.C.

Análisis de complejidad computacional de ambas soluciones:

	Solución sin P.D.	**Solución con P.D.**
Generación de matriz de P.D.	-	$O(N^2)$
Generación de subrectángulos (distintos tamaños)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Movimiento de subrectángulos (por cada posición de M)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Cálculo de la sumatoria de los elementos internos	$O(N^2)$	$O(1)$
Complejidad Computacional	$\mathbf{O(N^6)}$	$\mathbf{O(N^2) + O(N^4)}$

Pre-cálculo

+

Solución

Suma de Subrectángulos: Análisis C.C.

Análisis de complejidad computacional de ambas soluciones:

	Solución sin P.D.	Solución con P.D.
Generación de matriz de P.D.	-	$O(N^2)$
Generación de subrectángulos (distintos tamaños)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Movimiento de subrectángulos (por cada posición de M)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Cálculo de la sumatoria de los elementos internos	$O(N^2)$	$O(1)$
Complejidad Computacional	**$O(N^6)$**	**$O(N^4)$**

Pre-cálculo

+

Solución