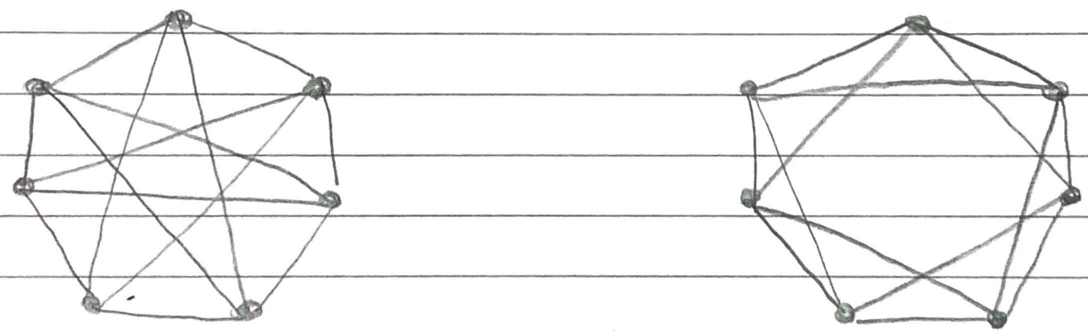
Lista de exercícios complementar

1) Encontre grafos que satisfaçam as seguintes definições (grafos simples sempre que possível).

(i) Cinco vértices e exatamente (a) um ciclo (b) três ciclos (c) seis ciclos (d) treze ciclos (e) 22 ciclos.

(ii) Seis vértices, sete arestas que não contenha subgrafos isomorfos ao C_4.

2) Prove que os seguintes grafos são isomorfos.



3) Uma seqüência de graus é uma seqüência de inteiros não negativos que representa os graus dos vértices de um grafo cuja ordem é dada pelo tamanho da seqüência. Ela é dita gráfica quando existe um grafo simples com aquela seqüência de graus. Para

as sequências de graus abaixo, prove se são ou não gráficas.

(i) $(5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$
(ii) $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$
(iii) $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$
(iv) $(7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1)$

4) Prove, por indução, que a seguinte sequência de graus é gráfica

$$(n, n, n-1, n-1, \ldots, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

5) Encontre um grafo com seis vértices e doze arestas que não possua subgrafo isomorfo ao K_4. Você deve provar que a sua resposta está certa.

6) Mostre que todo grafo conexo contém um subgrafo que é uma árvore geradora.

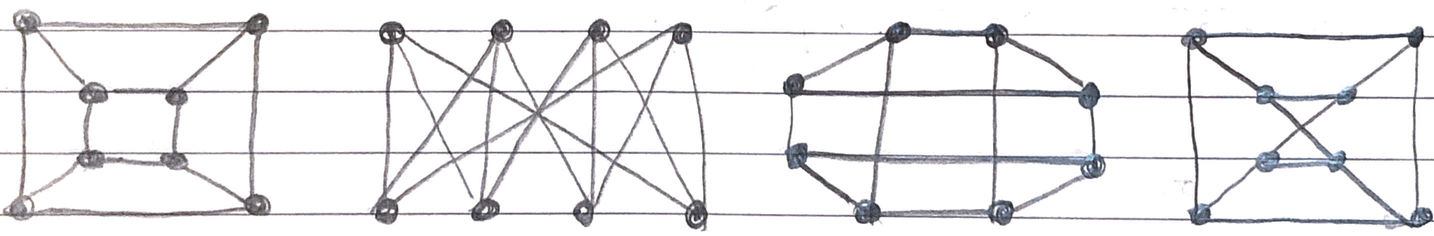
7) Seja G um grafo conexo com n vértices e n arestas. Quantos ciclos G possui? Justifique a sua resposta.

8) Encontre duas árvores não isomorfas com a mesma sequência de graus.

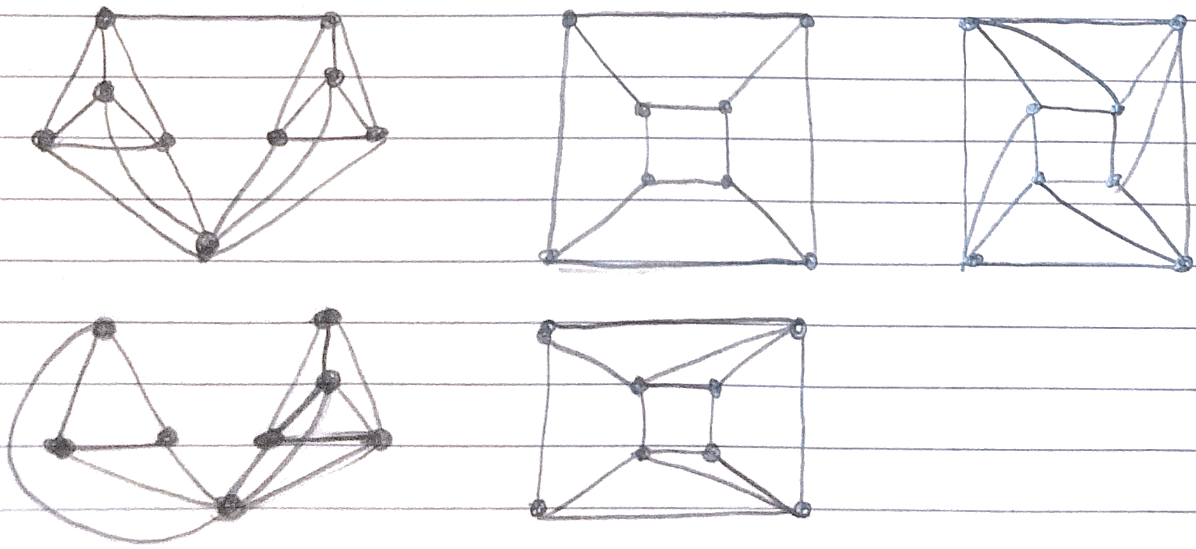
9) Prove que se $|E(G)| > \binom{|V(G)|-1}{2}$, então G é conexo.

10) Mostre que quaisquer dois caminhos de comprimento máximo em um grafo tem pelo menos um vértice em comum.

11) Quais grafos abaixo são isomorfos? Você deve provar a sua resposta (seja ela positiva ou negativa)



12) Determine o número cromático dos grafos abaixo.



13) Pinte os vértices do dodecaedro com cinco cores de maneira que quaisquer dois vértices à distância no máximo dois tenham cores distintas

14) Determine o número cromático do dodecaedro.

15) Existe árvore cujos vértices tenham graus apenas 1 e 3 e que tenha número ímpar de arestas?

16) Prove que um grafo é bipartido não vazio sse seu número cromático é 2.

17) É possível determinar o número de folhas de uma árvore com n vértices e diâmetro 3? (Obs: o diâmetro de um grafo é a maior distância entre qq dois vértices.

18) Seja T uma árvore em que todo vértice adjacente a uma folha tem grau pelo menos três. Prove que existem duas folhas com o mesmo vizinho.

19) Seja $G = K_{m,n}$. Determine condições para que G possua uma trilha de Euler e para que possua um tour de Euler.

20) Prove ou dê um contraexemplo: a cardinalidade de um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes máxima (número de independência) é igual à cardinalidade de uma das suas partes em um grafo bipartido conexo

21) Repita o exercício 19 para o problema do caminho hamiltoniano e do grafo hamiltoniano.

22) Para cada $n \geq 3$, encontre um grafo cúbico sem triângulos.

23) Seja G um grafo bipartido com bipartições $\{X, Y\}$.

(i) Mostre que $|E(G)| \leq |X||Y|$
(ii) Deduza que $|E(G)| \leq |V(G)|^2/4$
(iii) Descreva grafos para os quais (ii) vale na igualdade

(iv) Mostre que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$

(v) Deduza que se G é K-regular, com $K \geq 1$, então $|X| = |Y|$.

24) Dado um grafo G, mostre que existe uma ordenação de seus vértices tal que o algoritmo guloso produz uma coloração com $\chi(G)$ cores.

25) Seja G um grafo em que quaisquer dois ciclos ímpares tem pelo menos um vértice em comum. Mostre que $\chi(G) \leq 5$.