UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MS211 – Turma A – 1o. Sem. 2018 – 1a. Prova – 24/04/2018

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS211 – Turma A – 1o. Sem. 2018 – 1a. Prova – 24/04/2018

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

RESPOSTAS PURAMENTE NUMÉRICA NÃO SERÃO CONSIDERADAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

INFORMAÇÕES ÚTEIS

Um número real $x \neq 0$ é representado num sistema de ponto flutuante $F(\beta, t, m, M)$ como

$$x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t \times \beta^e,$$

em que β é a base, t é o número de dígitos na mantissa, $0 \leq d_j \leq \beta - 1$ com $d_1 \neq 0$, e $-m \leq e \leq M$.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real de dimensão $n \times n$:

- **Critério das linhas:** $$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$
- **Critério de Sassenfeld:** $$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Boa Prova!

Questão 1. (2,5 pontos) Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{e} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 + \frac{1}{e} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} e - 1 \\ 2e \end{bmatrix}$$

e o sistema de pontos flutuantes $F(10, 2, 100, 100)$ com arredondamento.

(a) Determine a representação $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ da matriz $\mathbf{A}$ e do vetor $\mathbf{b}$, respectivamente, nesse sistema de ponto flutuante.

(b) Encontre a aproximação $\tilde{\mathbf{x}}$ para a solução exata $\mathbf{x}^*$ do sistema linear fornecida pelo método da eliminação de Gauss (com pivoteamento parcial) implementado nesse sistema de ponto flutuante.

(c) Usando aritmética exata, calcule $\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$ e $\|\mathbf{b}\|_\infty$.

(d) Sabendo que o número de condição da matriz é $\text{cond}(\mathbf{A}) = 65.5$, sem calcular a solução exata $\mathbf{x}^*$, apresente um majorante para o erro relativo $E_r = \dfrac{\|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^*\|_\infty}$.

Questão 2. (2,5 pontos) Considere o sistema linear $\mathbf{Cx} = \mathbf{g}$ em que $\mathbf{C}$ e $\mathbf{g}$ são dados por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 + \frac{1}{e} \\ 1 - \frac{1}{e} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2e \\ e - 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{C}$ satisfaz do critério de Sassenfeld mas não satisfaz o critério das linhas.

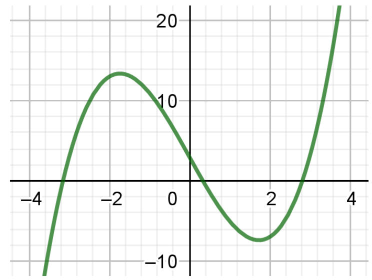
(b) O que pode ser dito sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel quando aplicados para resolver esse sistema linear.

(c) Escreva as equações explícitas do método de Gauss-Seidel usados para resolver $\mathbf{Cx} = \mathbf{g}$.

(d) Encontre uma aproximação para a solução do sistema linear usando o método de Gauss-Seidel com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e critério de parada $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq 0.1$. Explicite seus cálculos.

Questão 3. (2,5 pontos) Considere a função cuja expressão e gráfico são mostrados abaixo:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3.$$



(a) Usando o método de Newton e critério de parada $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq 0.01$, obtenha uma aproximação para uma das três raízes da equação $f(x) = 0$. Explicite seus cálculos numa tabela.

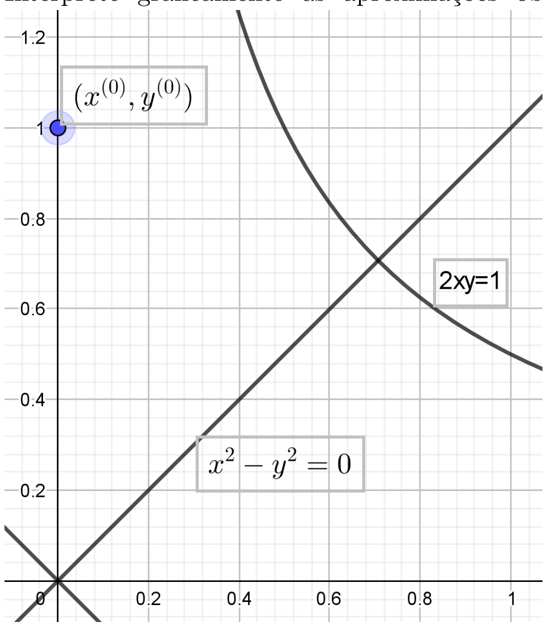
(b) Determine um intervalo aberto (a, b) para o qual o método do ponto fixo dado por $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ com $\varphi(x) = (x^3 + 3)/9$, converge para a raiz de $f(x) = 0$ para qualquer $x^{(0)}$ nesse intervalo.

Questão 4. (2,5 pontos) Considere o sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

(a) Encontre uma aproximação para a solução do sistema acima usando o método de Newton com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1]^T$ e critério de parada $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 0.1$. Explicite seus cálculos.

(b) Interprete graficamente as aproximações obtidas pelo método de Newton usando o gráfico:



FOLHA ADICIONAL