



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

TRABAJO PRÁCTICO 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Tomás Fernández de Luco, F-3443/6

Problema 1

Al expresar el sistema en la forma $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu$ se tiene que la matriz A es el escalar $-a$, mientras que $Bu = 0$ dado que no hay entradas. Por lo tanto, la solución analítica estará dada por la siguiente igualdad.

$$x(t) = e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)Bu$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)0$$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$x(t) = e^{-at}x(0)$$

Puede verse en la figura debajo que la implementación de la solución analítica en Octave da como resultado la curvatura exponencial esperada.

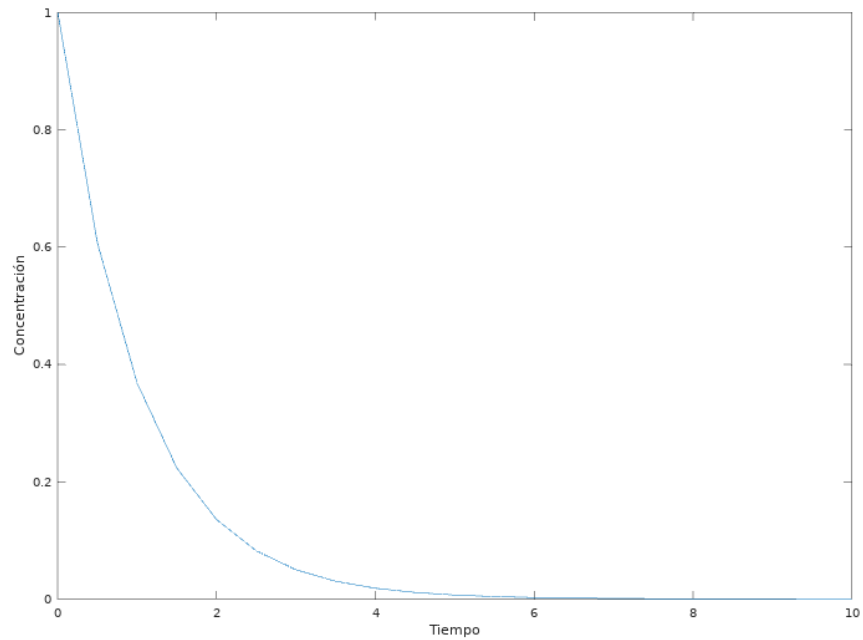


Figura 1: Solución analítica de la absorción del fármaco.

Problema 2

La implementación de la función *ltiSolve* es lo suficientemente directa al utilizar la ecuación 2b en cada valor del arreglo de tiempo, valiéndose de la función *expm* de Octave para calcular la exponencial matricial necesaria. El resultado para los parámetros del ejercicio es el siguiente.

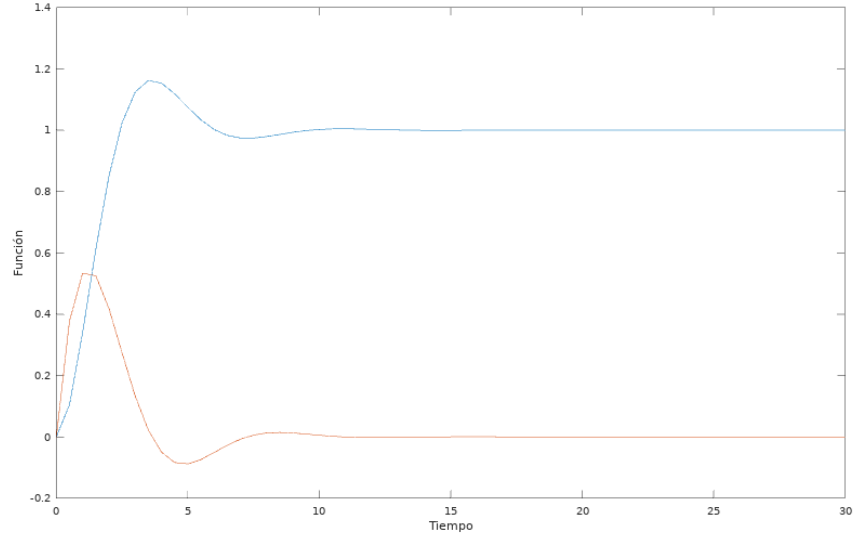


Figura 2: Solución analítica al sistema LTI propuesto.

Problema 3

De las ecuaciones de estado pueden obtenerse los siguientes valores para la solución analítica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{bmatrix}, u = 1$$

El valor inicial utilizado será $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Los resultados de las simulaciones pedidas se encuentran debajo, donde puede verse que en el segundo caso se oscila indefinidamente dado al rozamiento nulo, mientras que en el tercero hay un movimiento muy lento por la elevada fricción con el suelo.

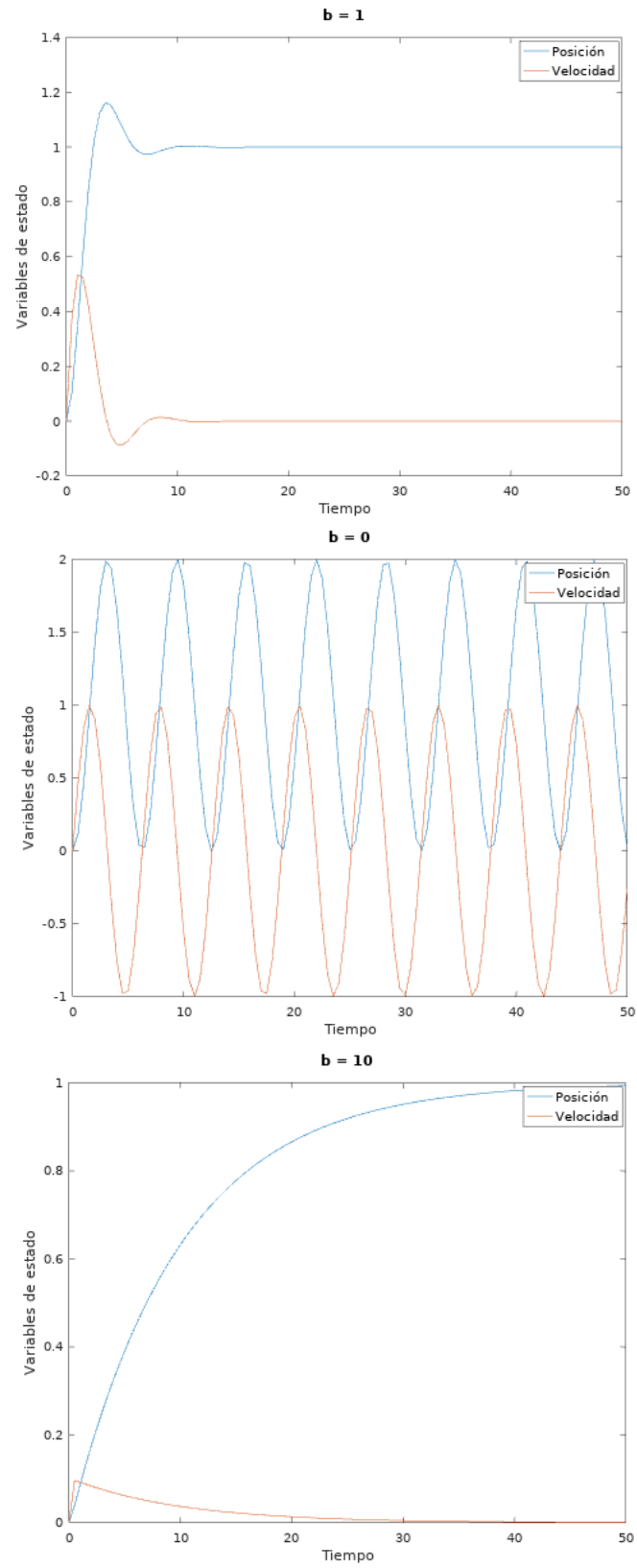


Figura 3: Soluciones analíticas a tres casos del sistema masa-resorte.

Problema 4

Los resultados de las simulaciones hechas con la implementación proporcionada tienen una evolución muy similar a las soluciones analíticas vistas anteriormente.

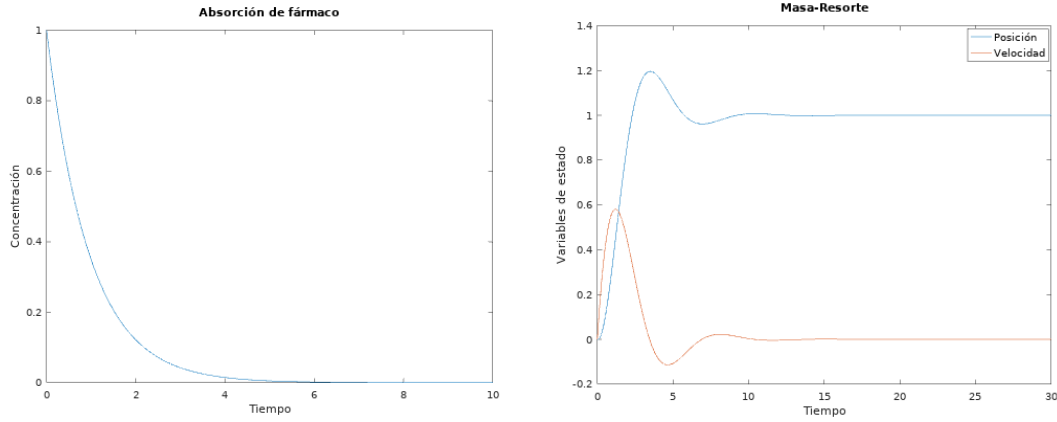


Figura 4: Simulaciones con Forward Euler.

Problema 5

Debajo se encuentran los errores obtenidos para las simulaciones con las dos longitudes de paso pedidas. Los resultados muestran el hecho de que Forward Euler es un algoritmo de primer orden ya que al disminuir 10 veces la longitud de paso obtenemos un error de primer paso 10^2 veces menor, pero un error máximo 10 veces menor.

Paso	Error primer paso	Error máximo
0.1	9.82×10^{-3}	6.61×10^{-2}
0.01	9.98×10^{-5}	6.14×10^{-3}

Problema 6

Los resultados experimentales para cada coeficiente de roce fueron los siguientes.

- **$b = 1$:** La simulación es marginalmente estable con una longitud de paso $h = 1$. Con valores menores es estable; mientras que con valores mayores, inestable.
- **$b = 0$:** Los resultados fueron inestables para todas las longitudes de paso usadas.
- **$b = 10$:** Con $h \leq 0.2$, los valores eventualmente se estabilizan. Por otro lado, con cualquier valor $h \geq 0.21$ ya se torna inestable.

Ahora validaremos esos resultados analizando los autovalores de la matriz de evolución.

- **$b = 1$:** En este caso se tiene que $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, con lo que puede validarse que el radio espectral de la matriz A_d es exactamente 1 cuando $h = 1$, menor a 1 con un paso menor y mayor a 1 con un paso mayor. Esto confirma los resultados obtenidos por prueba y error.
- **$b = 0$:** Los autovalores son $\lambda = \pm i$, con lo que no se conseguirá una simulación estable para ninguna longitud de paso pues $|1 + h\lambda| > 1$ para todo $h > 0$.

- **$b = 10$:** Los valores de los autovalores son $\lambda = -5 \pm 2\sqrt{6}$, con lo que la longitud de paso en la que la simulación pasa de ser estable a inestable es $h = \frac{-2}{-5 - 2\sqrt{6}} \approx 0.20204$, lo cual también valida a grandes rasgos los resultados obtenidos anteriormente.

Problema 7

Como puede verse debajo, si bien los errores de Backward Euler son un poco menores que con la versión Forward, no hay una mejora sustancial. Además, los órdenes de magnitud de cada error y la disminución que tienen con un paso más pequeño son los mismos por estar tratando con otro algoritmo de primer orden.

Paso	Error primer paso	Error máximo
0.1	9.09×10^{-3}	5.65×10^{-2}
0.01	9.92×10^{-5}	6.05×10^{-3}

Para este problema, los resultados experimentales fueron que el sistema siempre se estabiliza independientemente del coeficiente de roce y del tamaño del paso de integración. Como se vio en la teoría, utilizando Backward Euler los autovalores tienen la forma $\lambda_d = \frac{1}{1 - h\lambda}$, con lo cual tenemos que la simulación será estable si $|\frac{1}{1 - h\lambda}| < 1$.

- **$b = 1$ y $b = 10$:** Los autovalores λ para los casos con estos coeficientes tienen una parte real menor a 0, con lo que el módulo del denominador de la condición de estabilidad siempre será mayor a 1. Entonces, las simulaciones de estos sistemas serán estables independientemente del h .
- **$b = 0$:** Como los autovalores son estrictamente imaginarios, ocurrirá lo mismo que con los demás coeficientes de roce y se tendrá siempre una simulación estable para cualquier longitud de paso por más que el sistema original sea marginalmente estable.

Problema 8

Con este algoritmo sí se nota una mejora sustancial en la precisión con respecto a los dos métodos de Euler. Se comprueba que es un método de segundo orden pues el error del primer paso disminuye en tres órdenes de magnitud y el máximo en dos órdenes al disminuir diez veces la longitud de paso.

Paso	Error primer paso	Error máximo
0.1	1.71×10^{-4}	2.41×10^{-3}
0.01	1.67×10^{-7}	2.30×10^{-5}

Los resultados experimentales para cada coeficiente de roce fueron los siguientes.

- **$b = 1$:** La simulación parece tener una posición marginalmente estable con una velocidad estable utilizando $h = 2$, mientras que ambas son estables con un paso menor e inestables con uno mayor.
- **$b = 0$:** Con valores de paso de al menos 0.1 la simulación se inestabiliza, pero con valores menores parecería preservar la estabilidad marginal.
- **$b = 10$:** Usando $h \leq 0.2$ el sistema es estable, pero se desestabiliza rápidamente usando valores mayores.

A continuación se grafica la norma de los autovalores λ_d en función de la longitud de paso h para cada uno de los coeficientes de roce, a fin de corroborar a grandes rasgos los resultados obtenidos experimentalmente. Se agrega una horizontal en $y = 1$ para poder ver más claramente los intervalos de estabilidad. Puede notarse que las observaciones por prueba y error son bastante precisas para los casos de coeficiente 1 y 10, pero que con coeficiente 0 el sistema se vuelve inestable con pasos menores a los encontrados, salvo que no fue detectable en las pruebas hechas.

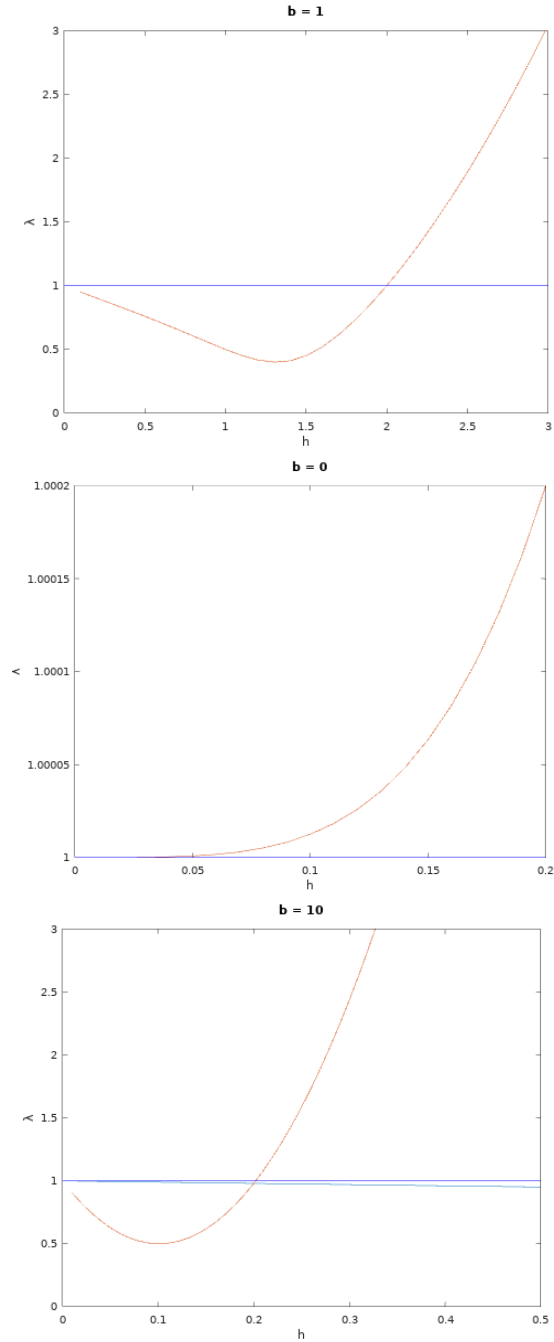


Figura 5: Norma de los autovalores discretos en función de la longitud de paso.

Problema 9

Los errores obtenidos en las simulaciones con la Regla Trapezoidal son de los mismos órdenes de magnitud que los obtenidos con el Método de Heun, lo cual es un resultado esperable para otro método de segundo orden.

Paso	Error primer paso	Error máximo
0.1	9.06×10^{-5}	1.14×10^{-3}
0.01	8.42×10^{-8}	1.15×10^{-5}

Este es el único método de los utilizados que preserva la estabilidad en los tres sistemas para toda longitud de paso, siendo estable para coeficientes $b = 1$ y $b = 10$ y marginalmente estable para $b = 0$. Los resultados analíticos validan dichas observaciones, ya que la norma de los autovectores discretos es siempre menor a 1 para los dos primeros casos e igual a 1 en el tercero.

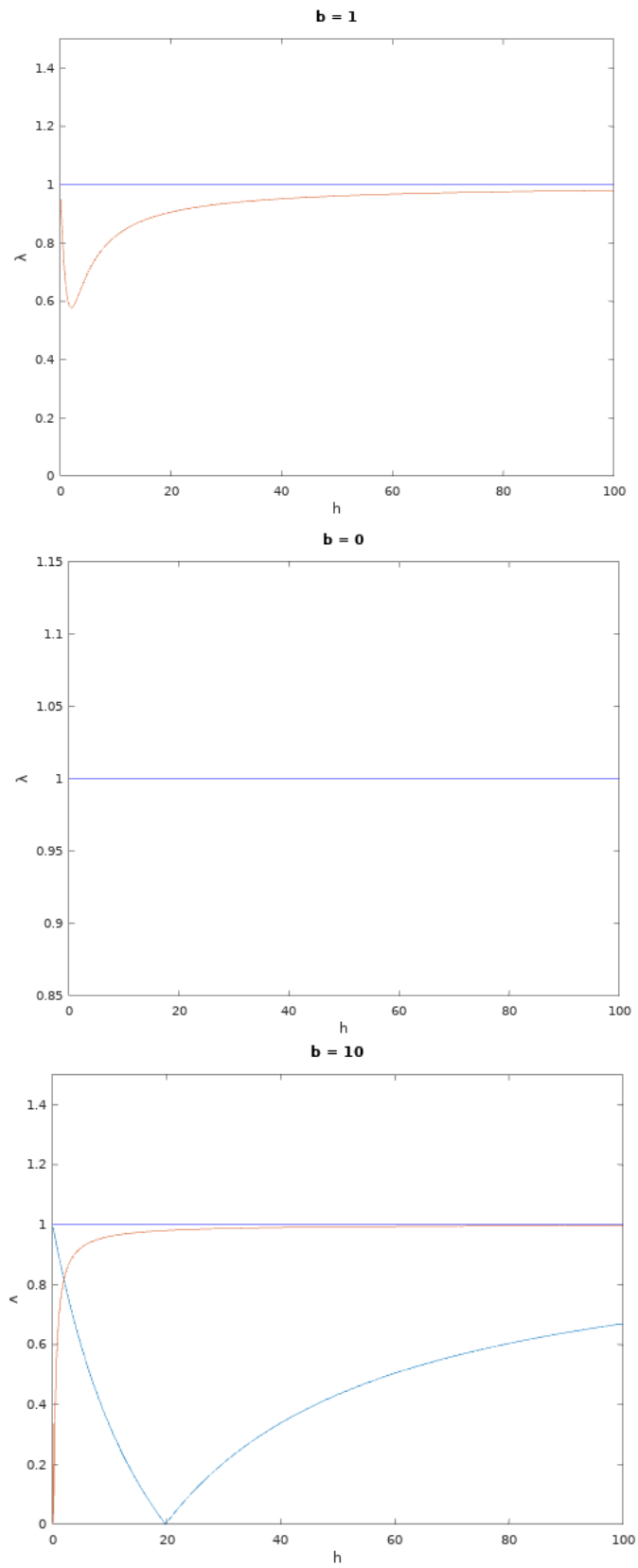


Figura 6: Norma de los autovalores discretos en función de la longitud de paso.

Problema 10

Como vimos anteriormente, el Método de Heun se vuelve inestable con longitudes de paso lo suficientemente altas en el sistema masa-resorte con coeficiente $b = 1$. Entonces, resulta esperable el resultado obtenido, en el cual llega a una cota de alrededor de 2.5 y luego oscila en valores cercanos pues no puede agrandar el valor h más mientras mantiene el error dentro de los valores admitidos.

Una situación similar pero más alejosa ocurre con $b = 100$, ya que en este caso los autovalores de la matriz de evolución son aproximadamente 0.01 y 100. Al ser uno tan pequeño y el otro tan grande, sólo pueda mantenerse la estabilidad con valores de paso muy pequeños, con lo que el paso termina oscilando alrededor de 0.03.

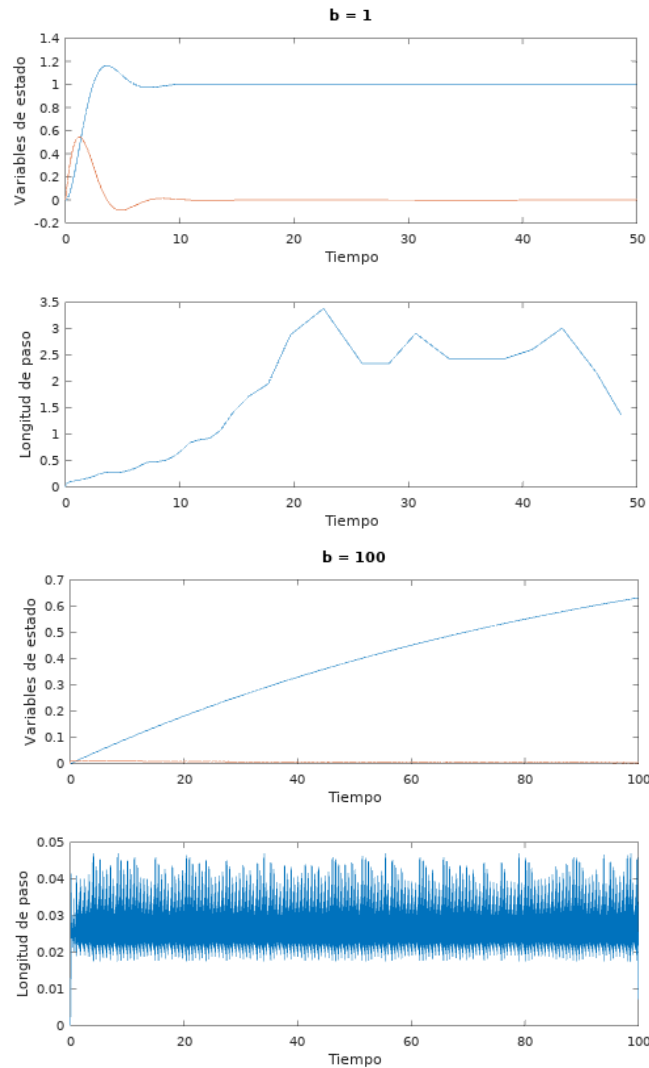


Figura 7: Simulación y longitud de paso para dos ejecuciones de RK23.

Problema 11

A diferencia del problema anterior, al usar un método implícito se puede preservar la estabilidad numérica del sistema original. Consecuentemente, las simulaciones con coeficientes $b = 1$ y $b = 100$ no tienen inconvenientes de errores muy grandes y pueden utilizar tamaños de paso considerablemente

mayores a los logrados por RK23, incluso llegando al valor máximo admitido en al menos una situación.

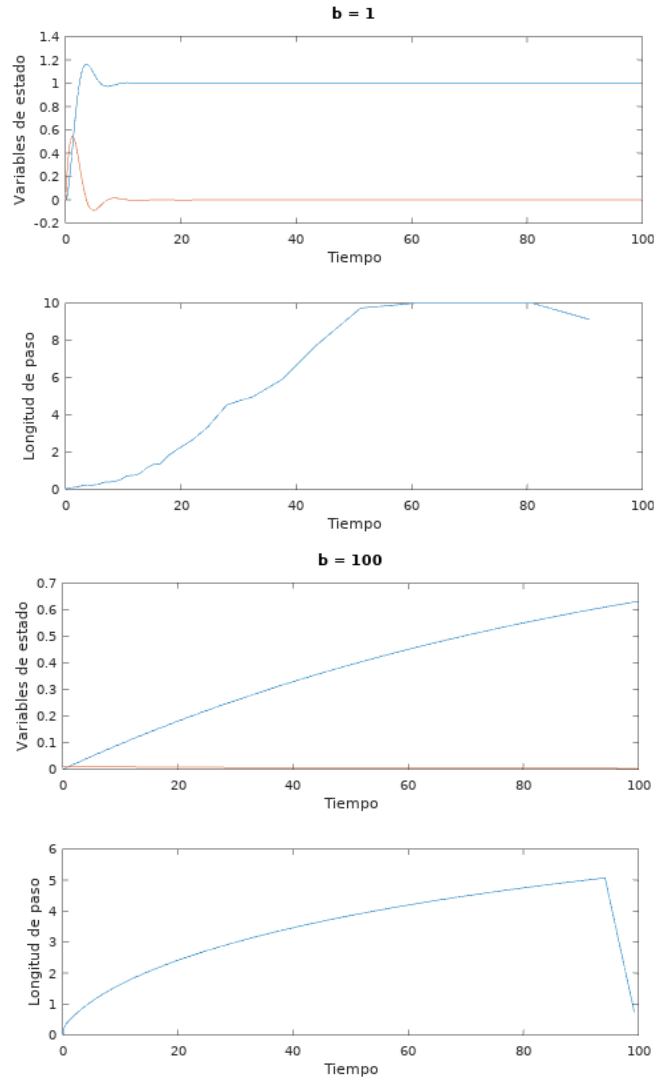


Figura 8: Simulación y longitud de paso para los sistemas estables.

El caso del coeficiente de roce nulo es particular, pues al preservar la estabilidad marginal es necesario usar un tamaño de paso pequeño debido a la frecuencia de oscilación de las variables de estado. Como los valores se modifican muy frecuentemente, no puede usarse una longitud de paso muy significativa con respecto a la frecuencia de las curvas pues probablemente se tenga un error muy alto si se las comienza a deformar. Puede notarse que los pasos tienen un valor mínimo cerca de las crestas y los valles de las variables, mientras que puede aumentar un poco en los sectores más afines a una recta, y por ende mejor predecibles con pasos más largos.

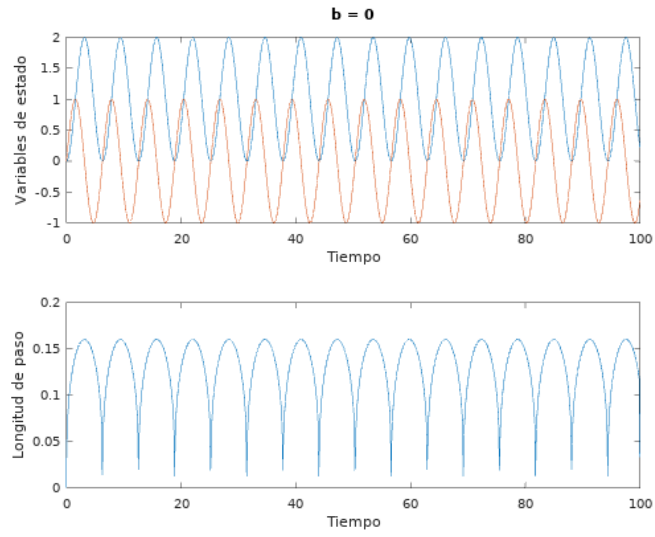


Figura 9: Simulación y longitud de paso para el sistema marginalmente estable.