Rozwiązywanie równań nieliniowych

➢ Metoda bisekcji

Założenia:

1) W przedziale $[a, b]$ funkcja posiada pierwiastek $f(x) = 0$ gdy $f(a)f(b) < 0$.
2) Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.
3) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$.

Algorytm metody bisekcji:

1) Obliczamy $x_0 = \frac{a+b}{2}$
2) Jeżeli wartość funkcji $|f(x_0)| < \varepsilon$ to kończymy obliczenia, w przeciwnym wypadku z otrzymanych dwóch przedziałów $[a, x_0]$ i $[x_0, b]$ wybieramy ten na końcach którego funkcja ma przeciwne znaki, tj.:
   jeżeli $f(a)f(x_0) < 0$ wstawiamy: $b = x_0$, a się nie zmienia
   w przeciwnym razie: $a = x_0$, b się nie zmienia

Gdzie: ε – założony błąd.

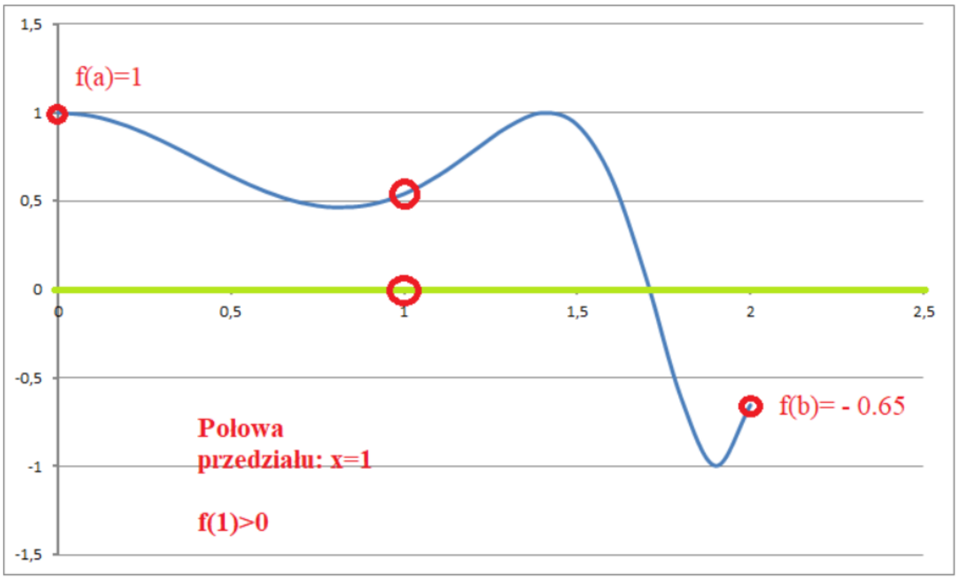
Przykład:

Dla funkcji $f(x) = \cos(x^3 - 2x) = 0$ wyznacz miejsce zerowe na przedziale [0, 2] dla błędu $\varepsilon = 0{,}01$.

Sprawdzamy czy $f(a)f(b) < 0$:

$$f(0)f(2) = 1 \cdot (-0.65) = -0.65$$

Pierwszy krok obliczeń:



Rys. 1. Metoda bisekcji – pierwszy krok obliczeń

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1$$

$$f(1) = 0.5403 > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

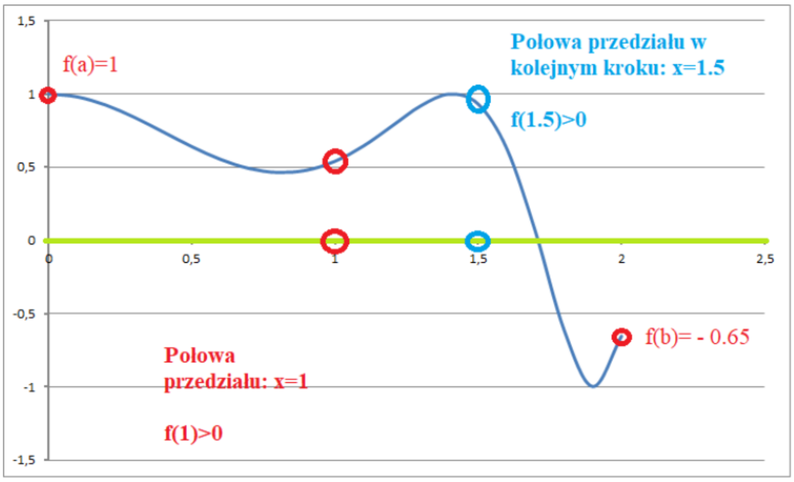
$$f(0)f(1) = 1 \cdot 0.5403 = 0.5403$$

Uzyskana wartość jest dodatnia (warunek niespełniony), więc podstawiamy:

$$a = x_0 = 1$$

Nowy przedział to: [1, 2]

Drugi krok obliczeń:



Rys. 2. Metoda bisekcji – drugi krok obliczeń

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(1.5) = 0.93051 > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

$$f(1)f(1.5) = 0.5403 \cdot 0.93051 = 0,50276$$

Uzyskana wartość jest dodatnia (warunek niespełniony), więc podstawiamy:

$$a = x_0 = 1.5$$

Nowy przedział to: [1.5, 2]

Trzeci krok obliczeń:

Dzielimy przedział na połowę, obliczamy x_0 i sprawdzamy czy $|f(x_0)| < 0.01$:

$$x_0 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75$$

$$f(1.75) = |-0.28459| > 0.01$$

Sprawdzamy czy $f(a)f(x_0) < 0$:

$$f(1.5)f(1.75) = 0.93051 \cdot (-0.28459) = -0.26481$$

Uzyskana wartość jest ujemna (warunek spełniony), więc podstawiamy:

$$b = x_0 = 1.75$$

Nowy przedział to: [1.5, 1.75]

	a	b	f(a)	f(b)	x0	f(x0)	f(a)*f(x0)
1	0.00000	2.00000	1.00000	-0.65364	1.00000	0.54030	0.54030
2	1.00000	2.00000	0.54030	-0.65364	1.50000	0.93051	0.50276
3	1.50000	2.00000	0.93051	-0.65364	1.75000	-0.28459	-0.26481

Rys. 3. Pierwsze 3 kroki obliczeń

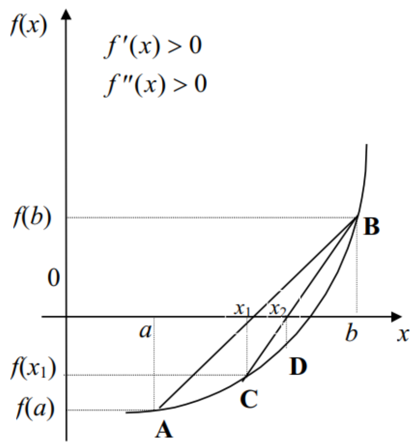
- **Metoda fałszywej linii (regula falsi)**

Wzór rekurencyjny do obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

Jeżeli wartość funkcji $|f(x_1)| < \varepsilon$ to kończymy obliczenia, w przeciwnym wypadku:

Jeżeli $f(x_1)f(a) < 0$ wstawiamy: $b = x_1$
W przeciwnym wypadku: $a = x_1$



Rys. 4. Interpretacja geometryczna metody fałszywej linii

- **Metoda stycznych**

Założenia:

1) W przedziale $[a, b]$ funkcja posiada pierwiastek $f(x) = 0$ gdy $f(a)f(b) < 0$.
2) Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.
3) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$.

Algorytm metody stycznych:

1) Wybieramy punkt startowy x_0 – zazwyczaj $a, b,$ 0 lub 1.
2) Wyprowadzamy styczną w tym punkcie do funkcji $f(x)$. Współrzędna odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX (x_1) stanowi pierwsze przybliżenie pierwiastka funkcji.
3) Jeżeli przybliżenie nie jest zadowalające powtarzamy krok 2, a za punkt startowy wybieramy x_1.

Wzór na kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f(x)$ jest następujący:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1}$$

Przykład:

Dla funkcji $f(x) = -x^3 + 10x + 5$ wyznacz miejsce zerowe na przedziale [2, 6]. Jako punkt startowy przyjmij $x_0 = 6$.

Obliczenia:

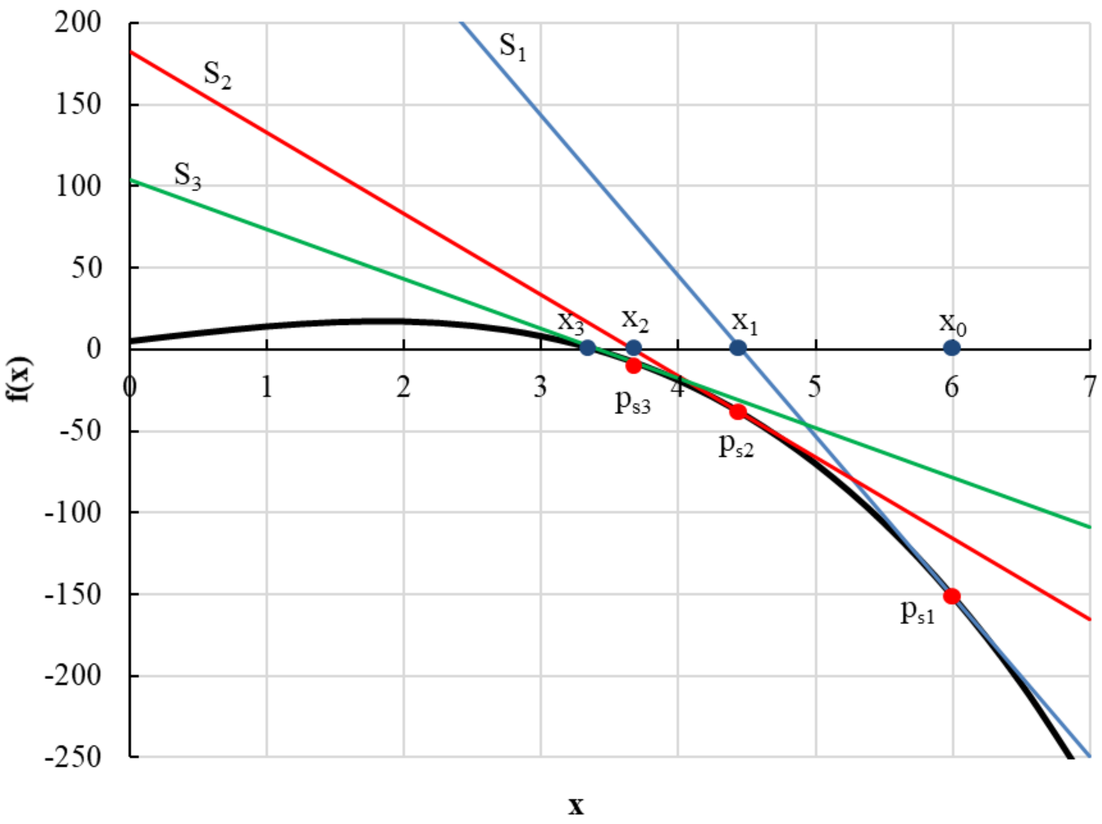
$f'(x) = -3x^2 + 10$

$$x_1 = 6 - \frac{-6^3 + 10 * 6 + 5}{-3 * 6^2 + 10} = 4{,}459$$

$$x_2 = 4{,}459 - \frac{-4{,}459^3 + 10 * 4{,}459 + 5}{-3 * 4{,}459^2 + 10} = 3{,}672$$

$$x_3 = 3{,}672 - \frac{-3{,}672^3 + 10 * 3{,}672 + 5}{-3 * 3{,}672^2 + 10} = 3{,}416$$

Postępowanie wyznaczania kolejnych stycznych, punktów styczności i punktów przecięcia przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 5. Schemat działania metody stycznych – pierwsze 3 kroki. S_1 ... S_3 – styczne, x_1 ... x_3 – punkty przecięcia, p_{s1} ... p_{s3} – punkty styczności.

W wyniku działania algorytmu możemy znaleźć rozwiązanie, które nie leży w zadanym przedziale. Wszystko zależy od doboru punktu startowego i nachylenia stycznej do wykresu.

➢ Metoda siecznych

W metodzie siecznych pochodną funkcji możemy przybliżyć ilorazem różnicowym:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{2}$$

Wtedy wzór na kolejne przybliżenia rozwiązania jest w postaci:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

Zadania:

Zad 1. Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą bisekcji (5p).

Program powinien wypisać:

- funkcję $f(x)$ – równanie,
- dane przedstawione na Rys. 3.

Zad 2. Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą fałszywej linii (5p).

Program powinien wypisać:

- funkcję $f(x)$ – równanie,
- znalezione rozwiązanie x i wartość funkcji $f(x)$ dla każdej iteracji.

Sprawozdanie do zad 1 i 2

Obliczenia wykonaj dla przykładu podanego w instrukcji i dla jednej dowolnej funkcji. Porównaj uzyskane wyniki z wartościami dokładnymi.

Te zadania należy oddać na bieżących zajęciach.

Zad 3. Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą stycznych i siecznych (10p). Wymagania:

- Funkcję $f(x)$ i pochodną funkcji $f'(x)$ implementujemy jako odrębne funkcje.
- Pochodną funkcji $f'(x)$ dla metody stycznych obliczamy analitycznie.
- Użytkownik podaje punkt startowy x_0. Dla metody siecznych przyjąć drugi punkt startowy x_{-1} o 0.1 mniejszy od x_0.
- Warunkiem stopu jest podana przez użytkownika liczba iteracji.
- Program powinien wypisać:
  - funkcję $f(x)$ – równanie,
  - znalezione rozwiązanie x i wartość funkcji $f(x)$ dla każdej iteracji.

Wykonaj obliczenia dla przykładu podanego w instrukcji (dla $x_0 = 6$ i dla 5 iteracji) i dla jednej dowolnej funkcji wielomianowej. Dla wybranej funkcji punkt startowy i liczbę iteracji przyjmij dowolnie. Porównaj uzyskane wyniki z obu metod z wartościami dokładnymi.

Sprawozdanie zawierające wyniki (zrzuty ekranu z konsoli) przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-2 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy do wirtualnego laboratorium (WU-2). Plik *.cpp powinien zawierać rozwiązanie wszystkich zadań z możliwością wyboru rozwiązania.