Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki
Kierunek studiów: Matematyka
Specjalność: Matematyka teoretyczna

Praca dyplomowa – licencjacka

TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ

Imię i nazwisko dyplomanta

słowa kluczowe:
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków).

krótkie streszczenie:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Opiekun pracy dyplomowej	dr inż. Dawid Huczek	....	....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczątka wydziałowa

Wrocław, rok 2019

Wrocław University of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics
Field of study: Mathematics
Specialty: Theoretical Mathematics

Bachelor's Thesis

TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ W JĘZYKU ANGIELSKIM

Imię i nazwisko dyplomanta

keywords:
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:
Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Supervisor	dr inż. Dawid Huczek	....	....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**

a) category A (perpetual files)

b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019

Spis treści

Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.

Rozdział 1

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

1.1 Definicje

1.1.1 Definicje ogólne

1. Ciaglosc funkcji na przestrzeni metrycznej (zbior $C(X)$)
2. odwzorowania trójkątne, zbior $C_{\triangle}(X \times I)$
3. przestrzeń metryczna, metryka
4. orbita,
5. uklad dynamiczny,
6. punkt izolowany w przestrzeni metrycznej
7. przestrzen metryczna zwarta,
8. orbita okresowa
9. RODZAJE CHAOSU (Devaneya, Li Yorka)
10. niezmienniczosc zbioru ze wzgledu na odwzorowanie
11. gęstość
12. napisac ze chaotycznosc odwzorowania rozumiem przez chaotycznosc odpowiedniego
13. ukladu dynamicznego
14. zbiór rezydualny
15. topologia
16. baza topologii
17. kula otwarta

18. separable, second category (czyli 1 i 2 kategoria bairea) TODO: separable znaczy chyba osrodkowa??
19. g-delta
20. punkt okresowy odwzorowania
21. definicja pr1() i pr2()
22. entropia topologiczna
23. wnetrze zbioru

1.1.2 Definicje utworzone na potrzeby dowodu twierdzenia o rozszerzaniu

Na potrzeby dowodu wprowadźmy pojęcia odległości między odwzorowaniami, oraz dwie funkcje: $\mathrm{pr}_1(x, y)$ i $\mathrm{pr}_2(x, y)$.

Definicja 1.1 (Metryka na przestrzeni funkcji ciągłych w przestrzeni metrycznej)**.** Niech (M, σ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, rozważmy odwzorowania $h, k \in C(M)$. Odległość między nimi zdefiniujmy jako $\max_{m \in M} \sigma(h(m), k(m))$ i oznaczmy ją jako $d_1(h, k)$.

Definicja 1.2 (Metryka na przestrzeni odwzorowań trójkątnych)**.** Odległość między odwzorowaniami trójkątnymi definiujemy wówczas następująco: Niech (X, ρ) i (Y, τ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi a $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ i $\Phi(x, y) = (\phi(x), \psi_x(y))$ trójkątnymi odwzorowaniami należącymi do $C_\triangle(X \times Y)$. Odległość definiujemy wówczas jako

$$\begin{aligned} d_2(F, \Phi) = \max_{(x,y \in X \times Y} & \max\{\rho(f(x), \phi(x)), \tau(g_x(y), \psi_x(y))\} \\ &= \max\{d_1(f, \phi), \max_{x \in X} d_1(g_x, \psi_x)\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że jak wynika z lematu 1.4 przestrzenie metryczne $(C(X), d_1)$ oraz $(C_\triangle(X \times Y), d_2)$ są zupełne i odpowiednie topologie na nich są topologiami jednostajnej zbieżności. (TODO czy to jest właściwe tłumaczenie?)

Definicja 1.3 ($\mathrm{pr}_1(x, y)$, $\mathrm{pr}_2(x, y)$)**.** Dla $(x, y) \in X \times Y$ niech $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ i $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$. Odwzorowanie identycznościowe na Y będziemy oznaczać przez Id_Y lub krótko Id. W dalszej części pracy przestrzeń Y będzie odcinkiem rzeczywistym $I = [0, 1]$.

1.2 Lematy

Lemat 1.4.

Lemat 1.5. *Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych. Każda okresowa orbita P_0 odwzorowania $f \in C(X)$ jest nigdziegęstym domkniętym podzbiorem X.*

Lemat 1.6.

Lemat 1.7. *dla przestrzeni nieskonczonej i zwartej czyli referencja 25 z pracy glownej*

Lemat 1.8.

Lemat 1.9.

Lemat 1.10.

Twierdzenie 1.11. *[1] - dowod twierdzenia 1.5*

Lemat 1.12.

Lemat 1.13.

Lemat 1.14. *W glownej pracy to byl lemat 3*

Lemat 1.15.

Lemat 1.16.

Lemat 1.17.

Lemat 1.18.

Lemat 1.19.

Lemat 1.20.

Lemat 1.21.

Lemat 1.22.

Lemat 1.23.

Lemat 1.24.

Rozdział 2

Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaney'a

Twierdzenie 2.1 (O rozszerzaniu)**.** *Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych, oraz niech $f \in C(X)$ będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaney'a. Wówczas odwzorowanie f można rozszerzyć do odwzorowania $F \in C_{\triangle}(X \times I)$ (to znaczy tak, że f jest odwzorowaniem bazowym dla F) w taki sposób, że:*

(i) F jest również chaotyczne w sensie Devaney'a,

(ii) F ma taką samą entropię topologiczną jak f,

(iii) zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze ze względu na F.

[2]

Dowód twierdzenia o rozszerzaniu. Odwzorowanie f jest chaotyczne w sensie Devaney'a, zatem spełnia warunek (2), czyli ma gęsty zbiór punktów okresowych, w szczególności istnieje orbita okresowa. Możemy zatem ustalić okresową orbitę P_0 odwzorowania f. Z lematu 1.5 mamy, że P_0 jest nigdziegęstym, domkniętym podzbiorem X.

Rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ wszystkich odwzorowań $F = (f, g_x)$ ze zbioru $C_{\triangle}(X \times I)$ spełniających następujące warunki:

1. Odwzorowanie bazowe f spełnia założenia twierdzenia 2.1.
2. $\forall_{x \in X}$ odwzorowanie g_x jest niemalejące i krańce przedziału I pozostawia niezmienione.
3. $\forall_{x \in P_0}$ g_x jest identycznością

Warunek **??** implikuje, że dla każdego odwzorowania z $\mathcal{F}$ zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze, czyli $\forall_{F \in \mathcal{F}}$ zachodzi warunek (iii) twierdzenia 2.1. Zachodzenie warunku (ii) twierdzenia 2.1 dla każdego odwzorowania $F \in \mathcal{F}$ wynika z lematu 1.6. Pozostaje zatem wykazać prawdziwość warunku (i), czyli chaotyczność w sensie Devaney'a jakiegoś odwzorowania $F \in \mathcal{F}$. Takie odwzorowanie będzie bowiem łącznie spełniało wszystkie 3 warunki, czyli tezę twierdzenia.

Z lematu 1.7 wynika, że aby odwzorowanie F było chaotyczne w sense Devaneya potrzeba i wystarcza, żeby spełniało dwa poniższe warunki:

1. F jest topologicznie tranzytywne

2. zbiór punktów okresowych odwzorowania F jest gęsty w $(X \times I)$

Jest tak gdyż przestrzeń $(X \times I)$ spełnia założenia lematu, tj. jest przestrzenią nieskończoną i zwartą.

Chcemy wykazać, że $\exists_{F \in \mathcal{F}}$ będące jednocześnie topologicznie tranzytywne i posiadające gęsty w $(X \times I)$ zbiór punktów okresowych. Z lematu 1.8wiemy, że$\mathcal{F}$ jest niepustym, domkniętym podzbiorem ptrzestrzeni $C_\triangle(X \times I)$, która jak wynika z lematu 1.9 jest przestrzenią metryczną zupełną.

Przekrój dwóch zbiorów rezydualnych jest rezydualny (patrz lemat 1.10) a więc niepusty. Wystarczy zatem pokazać, że oba zbiory:

- zbiór odwzorowań topologicznie tranzytywnych

- zbiór odwzorowań, których zbiór punktów okresowych jest gęsty w $(X \times I)$

są rezydualne w $\mathcal{F}$. Wówczas każde odwzorowanie należące do ich przekroju będzie spełniało wszystkie trzy warunki tezy twierdzenia 2.1

Zbiór odwzorowań tranzytywnych jest rezydualny w $\mathcal{F}$, zostało to udowodnione w twierdzeniu 1.11

Pozostało wykazać, że również zbiór odwzorowań posiadających gęsty zbiór punktów okresowych jest rezydualny w $\mathcal{F}$. Oznaczmy zbiór takich odwzorowań (jednocześnie należących do $\mathcal{F}$) przez $\mathcal{F}_{DP}$.

Niech $\{U_i^X\}_{i=1}^\infty$ będzie bazą topologii X i niech $\{U_i^I\}_{i=1}^\infty$ będzie zbiorem wszystkich odcinków otwartych o końcach wymiernych, należących do odcinka otwartego $(0,1)$. Niech $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ będzie ponumerowaniem zbioru $\{U_i^X \times U_j^I : i, j \in \mathbb{N}\}$. Wtedy każda kula otwarta w $X \times I$ zawiera jakiś spośród otwartych zbiorów U_i.

Dla każdego $i = 1, 2, ...$ niech zbiór $\mathcal{F}_{SO}^i$ (Ś- stabilny, Ó- okresowy) będzie zdefiniowany następująco. Odwzorowanie G należy do $\mathcal{F}_{SO}^i$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $\mathcal{F}$, posiada punkt okresowy w U_i oraz wszystkie dostatecznie bliskie G odwzorowania z $\mathcal{F}$ również posiadają punkt okresowy w U_i (być może różne od punktuów okresowych odwzorowania G). Zbiory $\mathcal{F}_{SO}^i$ są otwartymi podzbiorami $\mathcal{F}$ (patrz lemat 1.12). Ponieważ $\mathcal{F}_{DP} \supseteq \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{F}_{SO}^i$ aby pokazać, że $\mathcal{F}_{DP}$ jest rezydualny w $\mathcal{F}$ wystarczy pokazać, że $\forall_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{SO}^i$ jest gęsty w $\mathcal{F}$. (Wynika to z faktów: 1.17 i 1.18).

Aby wykazać że każdy zbiór $\mathcal{F}_{SO}^i$ jest gęsty w $\mathcal{F}$ ustalmy dowolne: $i \in \mathbb{N}$, $F = (f, g_x) \in \mathcal{F}$ i $\epsilon > 0$. Pokażemy, że istnieje odwrorowanie $G \in \mathcal{F}_{SO}^i$, którego odległość od F nie przekracza ϵ. Dla uproszczenia sytuacji załóżmy, że $\rho(\mathrm{pr}_1(U_i), P_0) > 0$ (Jeżeli tak nie jest, zawsze możemy wziąć zamiast U_i mniejszy prostokąt $U_i^* \subset U_i$).

Weźmy dodatnią liczbę naturalną $N \geq \frac{4}{\epsilon}$. Następnie rozważmy otwarte sąsiedztwo V orbity P_0 w przestrzeni (X, ρ) takie, że $\rho(\mathrm{pr}_1(U_i), V) \geq 0$ oraz $d_1(g_x, \mathrm{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$ dla każdego $x \in V$ (pamiętamy, że $g_x = \mathrm{Id}$ dla $x \in P_0$).

P_0 jest zbiorem niezmienniczym ze względu na f, na mocy lematu 1.13 istnieje niepusty zbiór otwarty $W \subseteq V$ taki, że $W \cup f(W) \cup \ldots \cup f^N(W) \subseteq V$. Na mocy lematu 1.14 istnieje punkt okresowy x_0 odwzorowania f taki, że $x_0 \in \mathrm{pr}_1(U_i)$ oraz orbita x_0 kroi się niepusto ze zbiorem W. Niech $r > 0$ będzie pierwszą dodatnią liczbą całkowitą dla której $f^r(x_0) \in W$. Wtedy $f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \ldots, f^{r+N-1}(x_0) \in V$. Niech $s \geq 0$ będzie pierwszą nieujemną liczbą całkowitą dla której $f^{r+N+s}(x_0) = x_0$, tj. $r + N + s$ jest okresem punktu x_0. Weźmy y_0 takie, że $(x_0, y_0) \in U_i$. Ponieważ wszystkie odwzorowania włóknowe (g_x)

odwzorowania F są ńa", to istnieje punkt $y^* \in (0,1)$ taki, że $F^s(f^{r+N}(x_0), y^*) = (x_0, y_0)$ (patrz lemat 1.15).

Przypadek 1. $z = \mathrm{pr}_2(F^r(x_0, y_0)$ jest różne od 0 i 1. Oznaczmy przez g odwzorowanie z $C(I)$ posiadające następujące trzy własności:

(g1) $d_1(g, \mathrm{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$,

(g2) g jest odwzorowaniem niemalejącym, pozostawiającym końce przedziału I niezmienione,

(g3) $g^N(z) = y^*$.

Następnie, rozważmy odwzorowanie $h \in C(I)$ posiadające trzy następujące własności:

(h1) $d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4}$,

(h2) $h(y_0) = g_{x_0}(y_0)$,

(h3) h jest stałe na zwartym odcinku $[a,b] \subseteq \mathrm{pr}_2(U_i)$ zawierającym punkt y_0 w swoim wnętrzu.

Weźmy teraz odwzorowanie $G = (f, \widetilde{g}_x) \in \mathcal{F}$ takie, że $d_2(G,F) < \frac{\epsilon}{2}$ oraz

$$\widetilde{g}_x = \begin{cases} h & \text{if } x = x_0, \\ g & \text{if } x \in \{f^k(x_0) : r \le k \le r+N-1\}, \\ g_x & \text{if } x \in \{f^k(x_0) : 1 \le k \le r-1 \text{ or } r+N \le k \le r+N+s-1\}. \end{cases}$$

Odwzorowanie takie istnieje na mocy lematu 1.16, ponieważ

$$d_1(\widetilde{g}_{x_0}, g_{x_0}) = d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4}$$

oraz dla $x \in \{f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \dots, f^{r+N-1}(x_0)\}$,

$$d_1(\widetilde{g}_x, g_x) = d_1(g, g_x) \le d_1(g, \mathrm{Id}) + d_1(\mathrm{Id}, g_x) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

.

Punkt $(x_0, y_0) \in U_i$ jest punktem okresowym odwzorowania G, ponieważ

$$\begin{aligned} G^{r+N+s}(x_0, y_0) &= G^{r+N+s-1}(G(x_0, y_0)) \\ &= G^{r+N+s-1}(F(x_0, y_0)) = G^{N+s}(F^r(x_0, y_0)) \\ &= G^{N+s}(f^r(x_0), z) = G^s(f^{r+N}(x_0), y^*) \\ &= F^s(f^{r+N}(x_0), y^*) = (x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Szczegółowe uzasadnienie powyższej równości znajduje się w 1.19

Ponadto, ze względu na (h3), na mocy 1.20 zachodzi

$$G^{r+N+s}(\{x_0\} \times [a,b]) = \{(x_0, y_0)\}.$$

Z faktu $y_0 \in (a,b)$, oraz 1.21 wynika, że każde odwzorowanie $\widetilde{G} \in \mathcal{F}$ dostatecznie bliskie G posiada własność

$$\widetilde{G}^{r+N+s}(\{x_0\} \times [a,b]) \subseteq \{x_0\} \times [a,b].$$

Zatem $\widetilde{G}$ posiada punkt okresowy w $\{x_0\} \times [a, b] \subseteq U_i$. Zatem $G \in \mathcal{F}^i_{SO}$, co kończy dowód dla przypadku 1.

Przypadek 2. $\mathrm{pr}_2(R^r(x_0, y_0))$ jest równy 0 lub 1.

W takim przypadku użyjemy lematu 1.16 aby dostać odwzorowanie $H = (f, h_x) \in \mathcal{F}$ takie, że $d_2(H, F) < \frac{\epsilon}{2}$ i dla $x \in \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{r-1}(x_0)\}$ odwzorowania włóknowe h_x są ściśle rosnące. (Odwzorowanie takie istnieje na mocy 1.22) Ponieważ y_0 jest różnie od 0 i 1 dostajemy, że $\mathrm{pr}_2(H^r(x_0, y_0))$ również jest różne od 0 i 1 (uzasadnienie w 1.23). Następnie korzystając z przypadku 1 i z lematu 1.24 dostajemy odwzorowanie $G \in \mathcal{F}^i_{SO}$, dla którego zachodzi nierówność $d_2(G, H) < \frac{\epsilon}{2}$. Wówczas $d_2(G, F) < \epsilon$. (TODO powolac sie na nierownosc trojkata)

□

Podsumowanie

Podsumowanie w pracach matematycznych nie jest obligatoryjne. Warto jednak na zakończenie krótko napisać, co udało nam się zrobić w pracy, a czasem także o tym, czego nie udało się zrobić.

Dodatek

Dodatek w pracach matematycznych również nie jest wymagany. Można w nim przedstawić np. jakiś dłuższy dowód, który z pewnych przyczyn pominęliśmy we właściwej części pracy lub (np. w przypadku prac statystycznych) umieścić dane, które analizowaliśmy.

Bibliografia

[1] Alseda, L., Kolyada, S., Llibre, J., Snoha, L. Entropy and periodic points for transitive maps. *Transactions of the American Mathematical Society 351*, 4 (1999), 1551–1573.

[2] Balibrea, F., Snoha, L. Topological entropy of devaney chaotic maps. *Topology and its Applications 133*, 3 (2003), 225–239.