



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka

Specjalność: Matematyka teoretyczna

Praca dyplomowa – licencjacka

## TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ

Imię i nazwisko dyplomanta

słowa kluczowe:  
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków).

krótkie streszczenie:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

|                             |                                       |       |        |
|-----------------------------|---------------------------------------|-------|--------|
| Opiekun pracy<br>dyplomowej | dr inż. Dawid Huczek                  | ..... | .....  |
|                             | Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko | ocena | podpis |

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:\**

*a) kategorii A (akta wieczyste)*

*b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)*

*\* niepotrzebne skreślić*

pieczętka wydziałowa

Wrocław, rok 2019





Wrocław University  
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Mathematics

Specialty: Theoretical Mathematics

Bachelor's Thesis

## TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ W JĘZYKU ANGIELSKIM

Imię i nazwisko dyplomanta

keywords:

tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

|            |                               |       |           |
|------------|-------------------------------|-------|-----------|
| Supervisor | dr inż. Dawid Huczek          | ..... | .....     |
|            | Title/degree/name and surname | grade | signature |

*For the purposes of archival thesis qualified to:\**

*a) category A (perpetual files)*

*b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)*

*\* delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019



# Spis treści

|   |    |
|---|----|
| Wstęp   | 3  |
| 1 Rozdział pierwszy   | 5  |
| 1.1 Podrozdział pierwszy . . . . .                                      | 5  |
| 1.2 Podrozdział drugi . . . . .   | 6  |
| 2 Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaney’a | 7  |
| 3 Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski                   | 9  |
| Podsumowanie  | 11 |
| Dodatek   | 13 |
| Bibliografia  | 14 |



# Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.





# Rozdział 1

## Rozdział pierwszy

Tabela 1.1 przedstawia przykładową tabelę. Do tworzenia tabeli służą m.in. środowiska `tabular` oraz `table`. Istnieje możliwość numeracji dwustopniowej, gdzie pierwsza cyfra oznacza numer rozdziału, a druga – kolejny numer tabeli w tym rozdziale. Tytuł powinien znajdować się centralnie nad tabelą, 12 pkt odstępu od tekstu zasadniczego nad i pod tabelą wraz z tytułem. Jeśli tabela jest cytowana – należy podać centralnie pod tabelą źródło jej pochodzenia, np. opracowanie własne, opracowano na podstawie danych z GUS.

Tabela 1.1: Podstawowa Tabela

| Państwo           | PKB (w milionach USD ) | Stopa bezrobocia |
|-------------------|------------------------|------------------|
| Stany Zjednoczone | 75 278 049             | 4,60%            |
| Chiny             | 11 218 281             | 4,10%            |
| Japonia           | 4 938 644              | 3,10%            |
| Niemcy            | 3 466 639              | 6,00%            |
| Wielka Brytania   | 2 629 188              | 4,60%            |

*Źródło: opracowanie własne*

Do cytowania używamy komendy `cite`. W nawiasie klamrowym podajemy klucz, którego użyliśmy w pliku *bibliografia.bib*. Przykład: [?] lub [?, chap. 2].

### 1.1 Podrozdział pierwszy

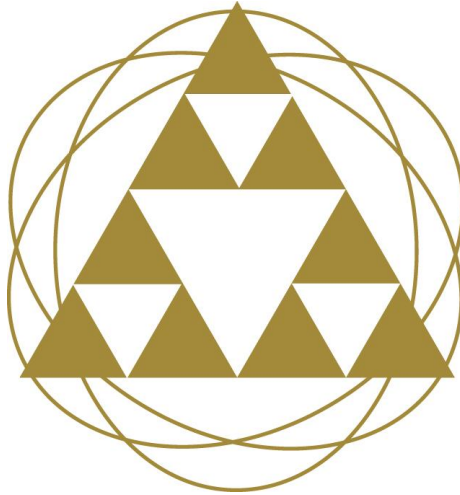
Tabela 1.2: Podstawowa Tabela

| Państwo           | PKB (w milionach USD ) | Stopa bezrobocia |
|-------------------|------------------------|------------------|
| Stany Zjednoczone | 75 278 049             | 4,60%            |
| Chiny             | 11 218 281             | 4,10%            |
| Japonia           | 4 938 644              | 3,10%            |
| Niemcy            | 3 466 639              | 6,00%            |
| Wielka Brytania   | 2 629 188              | 4,60%            |

*Źródło: opracowanie własne*

## 1.2 Podrozdział drugi

Rysunki do pracy dyplomowej należy wstawiać w sposób podobny do wstawiania tabel, z zasadniczą różnicą polegającą na tym, że podpis powinno umieszczać się centralnie pod rysunkiem, a nie powyżej niego. Numeracja i sposób cytowania pozostają bez zmian, przy czym tabele i rysunki nie mają numeracji wspólnej, np. po Tabeli 1.2 występuje Rysunek 1.1 (o ile jest to pierwszy rysunek rozdziału pierwszego), a nie Rysunek 1.3.



Rysunek 1.1: Podstawowy Rysunek

Definicje: orbita, orbita okresowa RODZAJE CHAOSU (Devaney, Li Yorke) niezmienniczosc zbioru ze wzgledu na odwzorowanie

## Rozdział 2

# Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaney’a

**Twierdzenie 2.1** (O rozszerzaniu). *Niech  $(X, \rho)$  będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych, oraz niech  $f \in C(X)$  będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaney’a. Wówczas odwzorowanie  $f$  można rozszerzyć do odwzorowania  $F \in C_\Delta(X \times I)$  (to znaczy tak, że  $f$  jest odwzorowaniem bazowym dla  $F$ ) w taki sposób, że:*

- (i)  $F$  jest również chaotyczne w sensie Devaney’a,
- (ii)  $F$  ma taką samą entropię topologiczną jak  $f$ ,
- (iii) zbiory  $X \times \{0\}$  i  $X \times \{1\}$  są niezmiennicze ze względu na  $F$ .

[1]

Na potrzeby dowodu wprowadźmy pojęcia odległości między odwzorowaniami. Niech  $(M, \sigma)$  będzie zwartą przestrzenią metryczną, rozważmy odwzorowania  $h, k \in C(M)$ . Odległość między nimi zdefiniujemy jako  $\max_{m \in M} \sigma(h(m), k(m))$  i oznaczmy ją jako  $d_1(h, k)$ . Odległość między odwzorowaniami trójkątnymi definiujemy wówczas następująco: Niech  $(X, \rho)$  i  $(Y, \tau)$  będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi a  $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$  i  $\Phi(x, y) = (\phi(x), \psi_x(y))$  trójkątnymi odwzorowaniami należącymi do  $C_\Delta(X \times Y)$ . Odległość definiujemy wówczas jako

$$\begin{aligned} d_2(F, \Phi) &= \max_{(x, y) \in X \times Y} \max\{\rho(f(x), \phi(x)), \tau(g_x(y), \psi_x(y))\} \\ &= \max\{d_1(f, \phi), \max_{x \in X} d_1(g_x, \psi_x)\} \end{aligned}$$

kontynuować

**Lemat 2.2.** *Niech  $(X, \rho)$  będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych. Każda okresowa orbita  $P_0$  odwzorowania  $f \in C(X)$  jest nigdziegęstym domkniętym podzbiorem  $X$ .*

*Dowód twierdzenia o rozszerzaniu.* Odwzorowanie  $f$  jest chaotyczne w sensie Devaney’a, zatem spełnia warunek (2), czyli ma gęsty zbiór punktów okresowych, w szczególności istnieje orbita okresowa. Możemy zatem ustalić okresową orbitę  $P_0$  odwzorowania  $f$ . Z lematu 2.2 mamy, że  $P_0$  jest nigdziegęstym, domkniętym podzbiorem  $X$ .

Rozważmy zbiór  $\mathcal{F}$  wszystkich odwzorowań  $F = (f, g_x)$  ze zbioru  $C_\Delta(X \times I)$  spełniających następujące warunki:

1. Odwzorowanie bazowe  $f$  spełnia założenia twierdzenia 2.1.
2.  $\forall_{x \in X}$  odwzorowanie  $g_x$  jest niemalejące i krańce przedziału I pozostawia niezmiennione.
3.  $\forall_{x \in P_0}$   $g_x$  jest identycznością

Warunek 1 implikuje, że dla każdego odwzorowania z  $\mathcal{F}$  zbiory  $X \times \{0\}$  i  $X \times \{1\}$  są niezmiennicze, czyli  $\forall_{F \in \mathcal{F}}$  zachodzi warunek (iii) twierdzenia 2.1.

□

## Rozdział 3

# Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski piszemy w pracy tak:

**Definicja 3.1** (Martyngał). Tu piszemy treść definicji martyngału.

**Lemat 3.2.** *Tu piszemy treść lematu.*



# Podsumowanie

Podsumowanie w pracach matematycznych nie jest obligatoryjne. Warto jednak na zakończenie krótko napisać, co udało nam się zrobić w pracy, a czasem także o tym, czego nie udało się zrobić.





# Dodatek

Dodatek w pracach matematycznych również nie jest wymagany. Można w nim przedstawić np. jakiś dłuższy dowód, który z pewnych przyczyn pominęliśmy we właściwej części pracy lub (np. w przypadku prac statystycznych) umieścić dane, które analizowaliśmy.



# Bibliografia

- [1] BALIBREA, F., SNOHA, L. Topological entropy of devaney chaotic maps. *Topology and its Applications* 133, 3 (2003), 225–239.