



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka

Specjalność: Matematyka teoretyczna

Praca dyplomowa – licencjacka

TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ

Imię i nazwisko dyplomanta

słowa kluczowe:
tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków).

krótkie streszczenie:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Opiekun pracy dyplomowej	dr inż. Dawid Huczek
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczęćka wydziałowa

Wrocław, rok 2019



Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Mathematics

Specialty: Theoretical Mathematics

Bachelor's Thesis

TYTUŁ PRACY DYPLOMOWEJ W JĘZYKU ANGIELSKIM

Imię i nazwisko dyplomanta

keywords:

tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (nie powinno być dłuższe niż 530 znaków).

Supervisor	dr inż. Dawid Huczek
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**

a) category A (perpetual files)

b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019

Spis treści

Wstęp	3
1 Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski	5
1.1 Definicje	5
1.1.1 Definicje ogólne	5
1.1.2 Definicje utworzone na potrzeby dowodu twierdzenia o rozszerzaniu	6
1.2 Lematy	7
2 Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaney’a	9
Podsumowanie	13
Dodatek	15
Bibliografia	16

Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.

Rozdział 1

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

1.1 Definicje

1.1.1 Definicje ogólne

1. wnetrze zbioru
2. topologia
3. baza topologii
4. przestrzeń topologiczna
5. metryka
6. przestrzeń metryczna
7. kula otwarta
8. gęstość w przestrzeni metrycznej
9. przestrzeń metryczna zwarta,
10. punkt izolowany w przestrzeni metrycznej
11. Ciagłość funkcji na przestrzeni metrycznej (zbior $C(X)$)
12. układ dynamiczny,
13. orbita,
14. orbita okresowa
15. punkt okresowy odwzorowania
16. niezmienniczość zbioru ze względu na odwzorowanie
17. topologiczna tranzytywność
18. entropia topologiczna

19. RODZAJE CHAOSU (Devaney, Li Yorke)
20. napisac ze chaotycznosc odwzorowania rozumiem przez chaotycznosc odpowiedniego układu dynamicznego
21. zbiór rezydualny
22. separable, second category (czyli 1 i 2 kategoria bairea) TODO: separable znaczy chyba osrodkowa??
23. g-delta
24. odwzorowania trójkątne, zbior $C_{\Delta}(X \times I)$

Definicja 1.1 (Metryka). Metryką na zbiorze X nazywamy funkcję $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ spełniającą następujące warunki:

1. $\forall_{x,y \in X} : \rho(x,y) = 0 \iff x = y,$
2. $\forall_{x,y \in X} : \rho(x,y) = \rho(y,x),$
3. $\forall_{x,y,z \in X} : \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$

Warunek 3 nazywany jest zwykle nierównością trójkąta.

Definicja 1.2 (Przestrzeń metryczna). Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, ρ) , gdzie X jest zbiorem a ρ zdefiniowaną na nim metryką.

Definicja 1.3 (Kula otwarta). Kulą otwartą w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór: $K(s, r) = \{x \in X : \rho(s, x) < r\}$. Punkt s nazywamy wówczas środkiem kuli K , a $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jej promieniem.

Definicja 1.4 (Zbiór gęsty). Dla danej przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Zbiór $A \subset X$ nazwiemy gęstym, gdy $\forall_{x \in X} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{a \in A} : \rho(x, a) < \epsilon$.

1.1.2 Definicje utworzone na potrzeby dowodu twierdzenia o rozszerzaniu

Na potrzeby dowodu wprowadźmy pojęcia odległości między odwzorowaniami oraz dwie funkcje: $\text{pr}_1(x, y)$ i $\text{pr}_2(x, y)$.

Definicja 1.5 (Metryka na przestrzeni funkcji ciągłych w przestrzeni metrycznej). Niech (M, σ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, rozważmy odwzorowania $h, k \in C(M)$. Odległość między nimi zdefiniujemy jako $\max_{m \in M} \sigma(h(m), k(m))$ i oznaczmy ją jako $d_1(h, k)$.

Definicja 1.6 (Metryka na przestrzeni odwzorowań trójkątnych). Odległość między odwzorowaniami trójkątnymi definiujemy wówczas następująco: Niech (X, ρ) i (Y, τ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi a $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ i $\Phi(x, y) = (\phi(x), \psi_x(y))$ trójkątnymi odwzorowaniami należącymi do $C_{\Delta}(X \times Y)$. Odległość definiujemy wówczas jako

$$\begin{aligned} d_2(F, \Phi) &= \max_{(x,y \in X \times Y)} \max\{\rho(f(x), \phi(x)), \tau(g_x(y), \psi_x(y))\} \\ &= \max\{d_1(f, \phi), \max_{x \in X} d_1(g_x, \psi_x)\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że jak wynika z lematu 1.8 przestrzenie metryczne $(C(X), d_1)$ oraz $(C_\Delta(X \times Y), d_2)$ są zupełne i odpowiednie topologie na nich są topologiami jednostajnej zbieżności. (TODO czy to jest właściwe tłumaczenie?)

Definicja 1.7 ($\text{pr}_1(x, y), \text{pr}_2(x, y)$). Dla $(x, y) \in X \times Y$ niech $\text{pr}_1(x, y) = x$ i $\text{pr}_2(x, y) = y$. Odwzorowanie identycznościowe na Y będziemy oznaczać przez Id_Y lub krótko Id . W dalszej części pracy przestrzeń Y będzie odcinkiem rzeczywistym $I = [0, 1]$.

1.2 Lematy

Lemat 1.8.

Lemat 1.9. Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych. Każda okresowa orbita P_0 odwzorowania $f \in C(X)$ jest nigdziegęstym domkniętym podzbiorem X .

Lemat 1.10.

Lemat 1.11. dla przestrzeni nieskonczonej i zwartej czyli referencja 25 z pracy glownej

Lemat 1.12.

Lemat 1.13.

Lemat 1.14.

Twierdzenie 1.15. [1] - dowod twierdzenia 1.5

Lemat 1.16.

Lemat 1.17.

Lemat 1.18. W glownej pracy to byl lemat 3

Lemat 1.19.

Lemat 1.20. [1] Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $F = (f, g_x)$ będzie odwzorowaniem należącym do $C_\Delta(X \times I)$ którego wszystkie włókna są niemalejące i pozostawiają krańce I nie zmienione. Niech $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ będzie podzbiorem X oraz dla $i = 1, 2, \dots, n$ niech U_i będą parami rozłącznymi zbiorami otwartymi takimi, że $a_i \in U_i$. Załóżmy, że h_i są niemalejącymi odwzorowaniami z $C(I)$ pozostawiającymi krańce I niezmienione i spełniającymi $d_1(h_i, g_{a_i}) < \epsilon$ dla pewnego dodatniego ϵ i każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas istnieje odwzorowanie $\tilde{F} = (f, \tilde{g}_x) \in C_\Delta(X \times I)$ spełniające cztery następujące warunki:

1. wszystkie włókna \tilde{F} są niemalejące i pozostawiające krańce I niezmienione,
2. $d_2(F, \tilde{F}) < \epsilon$,
3. $\tilde{g}_{a_i} = h_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$,
4. $\tilde{g}_x = g_x$ dla $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Dowód. [1] Dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ niech $V_i \subset U_i$ będzie otwartym sąsiedztwem a_i takim, że dla pewnego dodatniego $\tilde{\epsilon} < \epsilon$, $d_1(h_i, g_x) < \tilde{\epsilon}$ zawsze wtedy gdy $x \in V_i$.

Oznaczmy $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ i weźmy $u : X \rightarrow [0, 1]$, ciągłą funkcję, przyjmującą wartość 1 na zbiorze $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, natomiast 0 poza zbiorem V . Zastąpmy każde odwzorowanie włóknowe g_x przez \tilde{g}_x , gdzie

$$\tilde{g}_x(y) = \begin{cases} g_x(y) & \text{if } x \in X \setminus V, \\ g_x(y)(1 - u(x)) + h_i(y)u(x) & \text{if } x \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases} \quad (1.1)$$

dla każdego $y \in I$. Zauważmy ponadto, że dla $x \in V_i$ oraz $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ możemy równoważnie napisać

$$\tilde{g}_x(y) = u(x)(h_i(y) - g_x(y)) + g_x(y). \quad (1.2)$$

Rozważmy odwzorowanie $\tilde{F} = (f, \tilde{g}_x)$. Należy ono do $C_\Delta(X \times I)$. Z równości 1.1 widzimy, że wszystkie włókna \tilde{g}_x są niemalejące i pozostawiając krańce przedziału I nie zmienione (TODO sprawdzić czy to dobre tłumaczenie, może krańce ustalone? krańce stałe?). Ponadto $\tilde{g}_{a_i} = h_i$ dla każdego i oraz $\tilde{g}_x = g_x$ dla $x \in X \setminus V \supset X \setminus U$. Ponieważ dla $x \in V_i$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $d_1(h_i, g_x) < \tilde{\epsilon}$ oraz $u(x) \in [0, 1]$, zatem z równości 1.2 otrzymujemy $d_1(g_x, \tilde{g}_x) < \tilde{\epsilon}$ dla każdego $x \in V$. Wynika z tego, że $d_2(F, \tilde{F}) \leq \tilde{\epsilon} < \epsilon$ (TODO uzasadnić tutaj wewnątrz to ostatnie przejście od d1 do d2 z definicji d1 i d2), co kończy dowód.

□

Lemat 1.21.

Lemat 1.22.

Lemat 1.23.

Lemat 1.24.

Lemat 1.25.

Lemat 1.26.

Lemat 1.27.

Lemat 1.28.

Rozdział 2

Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaney’a

Twierdzenie 2.1 (O rozszerzaniu). *Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych oraz niech $f \in C(X)$ będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaney’a. Wówczas odwzorowanie f można rozszerzyć do odwzorowania $F \in C_\Delta(X \times I)$ (to znaczy tak, że f jest odwzorowaniem bazowym dla F) w taki sposób, że:*

- (i) F jest również chaotyczne w sensie Devaney’a,
- (ii) F ma taką samą entropię topologiczną jak f ,
- (iii) zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze ze względu na F .

[2]

Dowód twierdzenia o rozszerzaniu. Odwzorowanie f jest chaotyczne w sensie Devaney’a, zatem spełnia warunek (2), czyli ma gęsty zbiór punktów okresowych, w szczególności istnieje orbita okresowa. Możemy zatem ustalić okresową orbitę P_0 odwzorowania f . Z lematu 1.9 mamy, że P_0 jest nigdziegęstym, domkniętym podzbiorem X .

Rozważmy zbiór \mathcal{F} wszystkich odwzorowań $F = (f, g_x)$ ze zbioru $C_\Delta(X \times I)$ spełniających następujące warunki:

1. Odwzorowanie bazowe f spełnia założenia twierdzenia 2.1.
2. $\forall_{x \in X}$ odwzorowanie g_x jest niemalejące i krańce przedziału I pozostawia niezmiennicze.
3. $\forall_{x \in P_0}$ g_x jest identycznością

Warunek ?? implikuje, że dla każdego odwzorowania z \mathcal{F} zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze, czyli $\forall_{F \in \mathcal{F}}$ zachodzi warunek (iii) twierdzenia 2.1. Zachodzenie warunku (ii) twierdzenia 2.1 dla każdego odwzorowania $F \in \mathcal{F}$ wynika z lematu 1.10. Pozostaje zatem wykazać prawdziwość warunku (i), czyli chaotyczność w sensie Devaney’a jakiegoś odwzorowania $F \in \mathcal{F}$. Takie odwzorowanie będzie bowiem łącznie spełniało wszystkie 3 warunki, czyli tezę twierdzenia.

Z lematu 1.11 wynika, że aby odwzorowanie F było chaotyczne w sensie Devaney’a potrzeba i wystarcza, żeby spełniało dwa poniższe warunki:

1. F jest topologicznie tranzytywne
2. zbiór punktów okresowych odwzorowania F jest gęsty w $(X \times I)$

Jest tak gdyż przestrzeń $(X \times I)$ spełnia założenia lematu, tj. jest przestrzenią nieskończoną i zwartą.

Chcemy wykazać, że $\exists_{F \in \mathcal{F}}$ będące jednocześnie topologicznie tranzytywne i posiadające gęsty w $(X \times I)$ zbiór punktów okresowych. Z lematu 1.12 wiemy, że \mathcal{F} jest niepustym, domkniętym podzbiorem przestrzeni $C_\Delta(X \times I)$, która jak wynika z lematu 1.13 jest przestrzenią metryczną zupełną.

Przekrój dwóch zbiorów rezydualnych jest rezydualny (patrz lemat 1.14) a więc niepusty. Wystarczy zatem pokazać, że oba zbiory:

- zbiór odwzorowań topologicznie tranzytywnych
- zbiór odwzorowań, których zbiór punktów okresowych jest gęsty w $(X \times I)$

są rezydualne w \mathcal{F} . Wówczas każde odwzorowanie należące do ich przekroju będzie spełniało wszystkie trzy warunki tezy twierdzenia 2.1

Zbiór odwzorowań tranzytywnych jest rezydualny w \mathcal{F} , zostało to udowodnione w twierdzeniu 1.15

Pozostało wykazać, że również zbiór odwzorowań posiadających gęsty zbiór punktów okresowych jest rezydualny w \mathcal{F} . Oznaczmy zbiór takich odwzorowań (jednocześnie należących do \mathcal{F}) przez \mathcal{F}_{DP} .

Niech $\{U_i^X\}_{i=1}^\infty$ będzie bazą topologii X i niech $\{U_i^I\}_{i=1}^\infty$ będzie zbiorem wszystkich odcinków otwartych o końcach wymiernych, należących do odcinka otwartego $(0, 1)$. Niech $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ będzie ponumerowaniem zbioru $\{U_i^X \times U_j^I : i, j \in \mathbb{N}\}$. Wtedy każda kula otwarta w $X \times I$ zawiera jakiś spośród otwartych zbiorów U_i .

Dla każdego $i = 1, 2, \dots$ niech zbiór \mathcal{F}_{SO}^i (Ś- stabilny, Ó- okresowy) będzie zdefiniowany następująco. Odwzorowanie G należy do \mathcal{F}_{SO}^i wtedy i tylko wtedy, gdy należy do \mathcal{F} , posiada punkt okresowy w U_i oraz wszystkie dostatecznie bliskie G odwzorowania z \mathcal{F} również posiadają punkt okresowy w U_i (być może różne od punktów okresowych odwzorowania G). Zbiory \mathcal{F}_{SO}^i są otwartymi podzbiarami \mathcal{F} (patrz lemat 1.16). Ponieważ $\mathcal{F}_{DP} \supseteq \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{F}_{SO}^i$ aby pokazać, że \mathcal{F}_{DP} jest rezydualny w \mathcal{F} wystarczy pokazać, że $\forall_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{SO}^i$ jest gęsty w \mathcal{F} . (Wynika to z faktów: 1.21 i 1.22).

Aby wykazać że każdy zbiór \mathcal{F}_{SO}^i jest gęsty w \mathcal{F} ustalmy dowolne: $i \in \mathbb{N}$, $F = (f, g_x) \in \mathcal{F}$ i $\epsilon > 0$. Pokażemy, że istnieje odwzorowanie $G \in \mathcal{F}_{SO}^i$, którego odległość od F nie przekracza ϵ . Dla uproszczenia sytuacji założmy, że $\rho(\text{pr}_1(U_i), P_0) > 0$ (Jeżeli tak nie jest, zawsze możemy wziąć zamiast U_i mniejszy prostokąt $U_i^* \subset U_i$).

Weźmy dodatnią liczbę naturalną $N \geq \frac{4}{\epsilon}$. Następnie rozważmy otwarte sąsiedztwo V orbity P_0 w przestrzeni (X, ρ) takie, że $\rho(\text{pr}_1(U_i), V) \geq 0$ oraz $d_1(g_x, \text{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$ dla każdego $x \in V$ (pamiętamy, że $g_x = \text{Id}$ dla $x \in P_0$).

P_0 jest zbiorem niezmienniczym ze względu na f , na mocy lematu 1.17 istnieje niepusty zbiór otwarty $W \subseteq V$ taki, że $W \cup f(W) \cup \dots \cup f^N(W) \subseteq V$. Na mocy lematu 1.18 istnieje punkt okresowy x_0 odwzorowania f taki, że $x_0 \in \text{pr}_1(U_i)$ oraz orbita x_0 kroi się niepusto ze zbiorem W . Niech $r > 0$ będzie pierwszą dodatnią liczbą całkowitą dla której $f^r(x_0) \in W$. Wtedy $f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \dots, f^{r+N-1}(x_0) \in V$. Niech $s \geq 0$ będzie pierwszą nieujemną liczbą całkowitą dla której $f^{r+N+s}(x_0) = x_0$, tj. $r + N + s$ jest okresem punktu x_0 . Weźmy y_0 takie, że $(x_0, y_0) \in U_i$. Ponieważ wszystkie odwzorowania włóknowe (g_x)

odwzorowania F są łańcuchowe, to istnieje punkt $y^* \in (0, 1)$ taki, że $F^s(f^{r+N}(x_0), y^*) = (x_0, y_0)$ (patrz lemat 1.19).

Przypadek 1. $z = \text{pr}_2(F^r(x_0, y_0))$ jest różne od 0 i 1. Oznaczmy przez g odwzorowanie z $C(I)$ posiadające następujące trzy własności:

- (g1) $d_1(g, \text{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$,
- (g2) g jest odwzorowaniem niemalejącym, pozostawiającym końce przedziału I niezmiennymi,
- (g3) $g^N(z) = y^*$.

Następnie, rozważmy odwzorowanie $h \in C(I)$ posiadające trzy następujące własności:

- (h1) $d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4}$,
- (h2) $h(y_0) = g_{x_0}(y_0)$,
- (h3) h jest stałe na zwartym odcinku $[a, b] \subseteq \text{pr}_2(U_i)$ zawierającym punkt y_0 w swoim wnętrzu.

Weźmy teraz odwzorowanie $G = (f, \tilde{g}_x) \in \mathcal{F}$ takie, że $d_2(G, F) < \frac{\epsilon}{2}$ oraz

$$\tilde{g}_x = \begin{cases} h & \text{if } x = x_0, \\ g & \text{if } x \in \{f^k(x_0) : r \leq k \leq r + N - 1\}, \\ g_x & \text{if } x \in \{f^k(x_0) : 1 \leq k \leq r - 1 \text{ or } r + N \leq k \leq r + N + s - 1\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Odwzorowanie takie istnieje na mocy lematu 1.20, ponieważ

$$d_1(\tilde{g}_{x_0}, g_{x_0}) = d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4}$$

oraz dla $x \in \{f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \dots, f^{r+N-1}(x_0)\}$,

$$d_1(\tilde{g}_x, g_x) = d_1(g, g_x) \leq d_1(g, \text{Id}) + d_1(\text{Id}, g_x) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Punkt $(x_0, y_0) \in U_i$ jest punktem okresowym odwzorowania G , ponieważ

$$\begin{aligned} G^{r+N+s}(x_0, y_0) &= G^{r+N+s-1}(G(x_0, y_0)) \\ &= G^{r+N+s-1}(F(x_0, y_0)) = G^{N+s}(F^r(x_0, y_0)) \\ &= G^{N+s}(f^r(x_0), z) = G^s(f^{r+N}(x_0), y^*) \\ &= F^s(f^{r+N}(x_0), y^*) = (x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Szczegółowe uzasadnienie powyższej równości znajduje się w 1.23

Ponadto, ze względu na (h3), na mocy 1.24 zachodzi

$$G^{r+N+s}(\{x_0\} \times [a, b]) = \{(x_0, y_0)\}.$$

Z faktu $y_0 \in (a, b)$ oraz 1.25 wynika, że każde odwzorowanie $\tilde{G} \in \mathcal{F}$ dostatecznie bliskie G posiada własność

$$\tilde{G}^{r+N+s}(\{x_0\} \times [a, b]) \subseteq \{x_0\} \times [a, b].$$

Zatem \tilde{G} posiada punkt okresowy w $\{x_0\} \times [a, b] \subseteq U_i$. Zatem $G \in \mathcal{F}_{SO}^i$, co kończy dowód dla przypadku 1.

Przypadek 2. $\text{pr}_2(R^r(x_0, y_0))$ jest równy 0 lub 1.

W takim przypadku użyjemy lematu 1.20 aby dostać odwzorowanie $H = (f, h_x) \in \mathcal{F}$ takie, że $d_2(H, F) < \frac{\epsilon}{2}$ i dla $x \in \{x_0, f(x_0), \dots, f^{r-1}(x_0)\}$ odwzorowania włóknowe h_x są ściśle rosnące. (Odwzorowanie takie istnieje na mocy 1.26) Ponieważ y_0 jest różne od 0 i 1 dostajemy, że $\text{pr}_2(H^r(x_0, y_0))$ również jest różne od 0 i 1 (uzasadnienie w 1.27). Następnie korzystając z przypadku 1 i z lematu 1.28 dostajemy odwzorowanie $G \in \mathcal{F}_{SO}^i$, dla którego zachodzi nierówność $d_2(G, H) < \frac{\epsilon}{2}$. Wówczas $d_2(G, F) < \epsilon$. (TODO powołać się na nierówność trójkąta)

□

Podsumowanie

Podsumowanie w pracach matematycznych nie jest obligatoryjne. Warto jednak na zakończenie krótko napisać, co udało nam się zrobić w pracy, a czasem także o tym, czego nie udało się zrobić.

Dodatek

Dodatek w pracach matematycznych również nie jest wymagany. Można w nim przedstawić np. jakiś dłuższy dowód, który z pewnych przyczyn pominęliśmy we właściwej części pracy lub (np. w przypadku prac statystycznych) umieścić dane, które analizowaliśmy.

Bibliografia

- [1] ALSEDA, L., KOLYADA, S., LLIBRE, J., SNOHA, L. Entropy and periodic points for transitive maps. *Transactions of the American Mathematical Society* 351, 4 (1999), 1551–1573.
- [2] BALIBREA, F., SNOHA, L. Topological entropy of devaney chaotic maps. *Topology and its Applications* 133, 3 (2003), 225–239.
- [3] KURATOWSKI, K. *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. Biblioteka matematyczna. Państ. Wyd. Nauk., 1977.