Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki
Kierunek studiów: Matematyka
Specjalność: Matematyka teoretyczna

Praca dyplomowa – licencjacka

DYNAMIKA ODWZOROWAŃ TRÓJKĄTNYCH

Tomasz Biegus

słowa kluczowe:
chaos, entropia topologiczna, odwzorowania trójkątne, układy dynamiczne.

krótkie streszczenie:
Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie dowodu pewnego twierdzenia dotyczącego chaotycznych układów dynamicznych na przestrzeniach produktowych z czasem dyskretnym. Praca zawiera twierdzenie wraz z dowodem, pomocniczymi twierdzeniami, lematami i niezbędnymi definicjami. Omawiane są takie pojęcia jak entropia topologiczna, chaos w sensie Devaneya, klasa ciągłych odwzorowań trójkątnych na przestrzeni produktowej, rozszerzenie do odwzorowania trójkątnego.

Opiekun pracy dyplomowej	dr inż. Dawid Huczek	....	....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**
- *a) kategorii A (akta wieczyste)*
- *b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)*

** niepotrzebne skreślić*

pieczątka wydziałowa

Wrocław, rok 2019

Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics
Field of study: Mathematics
Specialty: Theoretical Mathematics

Bachelor's Thesis

DYNAMICS OF TRIANGULAR MAPS

Tomasz Biegus

keywords:
chaos, topological entropy, triangular maps, dynamical systems.

short summary:
The purpose of this thesis is to present a proof of a theorem concerning chaotic dynamic systems on product spaces with discrete time. The thesis contains a theorem along with a proof, auxiliary statements, lemmas and necessary definitions. Concepts such as topological entropy, chaos in the sense of Devaney, class of continuous triangular maps in a product space, as well as extension to triangular map are discussed.

Supervisor	dr inż. Dawid Huczek	....	....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**
- *a) category A (perpetual files)*
- *b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)*

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2019

Spis treści

Wstęp

Motywacje

Studia matematyczne podjąłem późno, już po ukończeniu innych kierunków. Od zawsze jednak matematyka pociągała mnie jako klucz do zrozumienia pozostałych dziedzin, jako narzędzie pozwalające dostrzec lepiej i głębiej urodę przyrody. Wykorzystując matematykę, możemy uchwycić reguły, wzorce i schematy które opisują niewyobrażalną złożoność świata w którym żyjemy. Matematykę postrzegam jako klamrę spinające wszystkie dziedziny intelektualnej działalności człowieka, począwszy od fizyki, poprzez chemię, biologię, aż po psychologię czy nauki społeczne. Decyzję o rozpoczęciu studiów matematycznych podjąłem w lecie siedząc nad rzeką i przyglądając się hipnotyzującym zawirowaniom na powierzchni wody płynącej w rzece Odrze przepływającej przez Wrocław, oraz leniwemu ruchowi fraktalnych kształtów chmur na błękitnym niebie. Byłem wówczas absolwentem wyższej uczelni, w którym wciąż żyło pragnienie poznawania głębiej wszystkich tych pięknych zjawisk, które nas otaczają. Byłem również świeżo po lekturze inspirującej popularnonaukowej książki Jamesa Gleicka zatytułowanej „Chaos” [8]...

Historia badań nad układami dynamicznymi

Historia rozwoju nauki nierozerwalnie wiąże się z pojęciem ruchu. Bez ruchu nie ma sensu mówić o upływie czasu, zachodzeniu procesów fizycznych chemicznych czy też biologicznych, czyli tych wszystkich rzeczach wokół których koncentrują się badania naukowe. Rozważania nad ruchem są zapewne tak stare jak gatunek ludzki. Pisane świadectwa zadawania sobie takich pytań znajdujemy już w dziełach starożytnych. Heraklit z Efezu (ur. ok. 540 p.n.e., zm. ok. 480 p.n.e.) miał powiedzieć „pantha rei” co znaczy „wszystko płynie” dostrzegając procesy nieustannych zmian w otaczającym nas świecie. Zenon z Elei rozważał paradoksy ruchu, Arystoteles sformułował swoje prawa ruchu. Następnie Izaak Newton, jak sam to ujął „stojąc na barkach gigantów” Galileusza, Tychona Brahego i Johannesa Keplera, zapoczątkował rozkwit współczesnych nauk empirycznych formułując w 1687r. zasady dynamiki i (równolegle z Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem) dając początek rachunkowi różniczkowemu. Rachunek różniczkowy dał potężne narzędzie do modelowania rzeczywistości, pozwalając na przykład na przewidywanie konfiguracji ciał niebieskich na niebie w dalekiej przyszłości. Niesamowity rozwój nauki w wieku XIX skłaniał ludzi do pokładania coraz większej ufności w możliwość absolutnie pewnego przewidywania stanów dowolnych układów. Rozbudzało to wyobraźnię i nadzieje na dokładne przewidywanie pogody, rozwoju organizmów żywych, rozprzestrzeniania się chorób a być może nawet zachowania ludzi. Na przełomie wieków XIX i XX w nauce pojawiły się potężne pęknięcia, niwecząc te ambitne wyobrażenia. Nastąpiły trzy odkrycia, wskazujące na immanentne ograniczenia w możliwościach badania świata. Były to: twierdzenie Gödla, zasada nieoznaczoności Heisenberga i odkrycie chaosu deterministycznego. Tego ostatniego dotyczy niniejsza praca. Historia badań nad układami chaotycznymi sięga XIX wieku, kiedy to wybitny matematyk francuski Henri Poincaré postanowił zmierzyć się z wielkim pytaniem: „Czy układ słoneczny jest stabilny?”, nie udało mu się udzielić odpowiedzi, ale metody które rozwinął przyczyniły się do powstania nowej gałęzi matematyki, nazywanej teorią układów dynamicznych.

Przełomową chwilą dla nauki o chaosie było okrycie w dziedzinie meteorologii. W 1963 roku w pracy [10] amerykański matematyk i meteorolog Edward Lorenz, przedstawił następujący układ trzech nieliniowych równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie σ, r i b są pewnymi stałymi, a X, Y, Z są funkcjami czasu. Lorenz zauważył, że ten układ trzech równań różniczkowych opisujących w uproszczeniu ruch powietrza w atmosferze, prowadzi do chaosu. To znaczy, że orbity rozwiązań tych równań dążą w przestrzeni fazowej do atraktora, który posiada niezwykle złożoną strukturę, która tłumaczy dlaczego przewidywanie pogody na dowolnie długie okresy nie jest i, co ważniejsze, nigdy nie będzie możliwe. Ponieważ jednak praca ta została opublikowana w czasopiśmie meteorologicznym, to przez długi czas pozostawała niezauważona w środowisku fizyków i matematyków. W układzie Lorenza zadziwia fakt, że prosty układ równań, może prowadzić do niezwykle skomplikowanej dynamiki.

Opisywane powyżej zagadnienie opierało się na równaniach różniczkowych. Czas w tym modelu jest ciągły, to znaczy, że rozwiązaniem układu równań różniczkowych jest funkcja czasu postaci $f : \mathbb{R} \to X$, gdzie X jest przestrzenią wszystkich możliwych stanów układu, tak zwaną przestrzenią fazową. Matematycy badają jednak również układy w których znamy stan układu tylko w dyskretnych chwilach czasu i dysponujemy formułą określającą jaki będzie kolejny stan układu jeżeli znamy stan obecny. Przykładem zastosowania takiego podejścia do badań fizycznych są przekroje Poincarégo stosowane przez niego podczas prób rozwiązania wspomnianego wcześniej problemu stabilności układu słonecznego. W takim przypadku zamiast równań różniczkowych mamy odwzorowanie $f : X \to X$, gdzie stan układu w kolejnych chwilach czasu przyjmuje wartości $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$.

Być może jeszcze bardziej uderzającym, niż układ Lorenza, przykładem prostego modelu prowadzącego do złożonej dynamiki, jest iterowanie odwzorowania logistycznego. Mamy tutaj do czynienia z czasem dyskretnym. Jedną iterację odwzorowania, możemy interpretować jako przejście układu z jednego stanu do drugiego w jakimś ustalonym kroku czasowym. Naszą przestrzeń fazową stanowi odcinek $[0, 1]$, a odwzorowaniem jest $f(x) = kx(1 - z)$, gdzie k jest ustalonym parametrem z przedziału $(0, 4]$. Dla $k \in (2, 3]$ niezależnie od tego z jakiego punktu $x \in (0, 1)$ wystartujemy, ciąg $\left(f^n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ zawsze będzie zbiegał do punktu $1 - \frac{1}{k}$. Jednak gdy będziemy zwiększać wartość parametru k i przekroczymy wartość 3 to powstałe ciągi będą oscylowały, zbliżając się do dwóch punktów, przy dalszym zwiększaniu k będziemy otrzymywać ciągi „skaczące” pomiędzy: czterema, ośmioma, szesnastoma itd. punktami. Zjawisko to nazywamy kaskadą podwajania okresu i jest to scenariusz przejścia do chaosu. Istotnie, przy $k = 4$ odwzorowanie logistyczne pomimo swojej prostoty i elementarności staje się chaotyczne.

Chaos deterministyczny

Pojęcie chaosu deterministycznego ma swój początek w naukach empirycznych, w szczególności w fizyce, która zajmuje się badaniem układów podlegających zmianom w czasie.

Wprowadza się pojęcie przestrzeni fazowej. Jest to wielowymiarowa przestrzeń, której punktom odpowiadają stany układu. Przykładowo stan prostego wahadła możemy przedstawić jako punkt w przestrzeni dwuwymiarowej, gdzie pierwsza współrzędna odpowiada wychyleniu na przykład w radianach, a druga momentowi pędu wahadła. Gdy wahadło się kołysze, zmienia się położenie punktu reprezentującego jego stan. Ewolucję układu możemy badać, analizując trajektorie w tej przestrzeni. Dużo bardziej skomplikowanym przykładem jest analiza ruchu cząsteczki białka, gdzie położenia i pędy każdego z jego atomów są współrzędnymi w przestrzeni stanów. Zauważmy, że do pełnego opisu stanu białka potrzebujemy $6 \cdot N$ współrzędnych, gdzie N jest liczbą atomów w białku (liczba 6 bierze się stąd, że musimy znać po trzy współrzędne dla położeń i pędów). W takim przypadku operujemy w bardzo wysokowymiarowej przestrzeni fazowej. Ruch w przestrzeni fazowej jest matematyczną abstrakcją i nie należy go utożsamiać z fizycznym ruchem badanego obiektu. Jeżeli w pewnym momencie układ powróci do punktu w którym już wcześniej się znajdował, to od tego momentu będzie powtarzał się cykl, zjawisko jest periodyczne, a więc w pełni przewidywalne. Okazuje się jednak, że występują w przyrodzie zjawiska, które nie osiągają nigdy stanu w którym już kiedyś się znajdowały, powracając być może dowolnie blisko do stanów już odwiedzonych, ale jednak nie wpadając w cykl. Ruch taki, mimo że w pełni deterministyczny, wydaje się być losowy i jest nieprzewidywalny. Intuicyjnie zjawisko chaotyczne możemy rozumieć następująco. Jeżeli rozważymy dwa układy rządzone przez jednakowe prawa to jeżeli wystartujemy z bliskich, ale nie jednakowych, stanów początkowych, to po skończonym czasie układy te staną się odległe w przestrzeni fazowej. Oznacza to tyle, że startując z bardzo podobnego położenia po jakimś czasie oba układy będą się zachowywały zupełnie inaczej.

Kiedy dysponujemy pojęciem przestrzeni fazowej i trajektorii punktu w tej przestrzeni, możliwe staje się odejście od fizycznych zjawisk, które były modelowane i sprowadzenie zagadnienia do czystej matematyki. W matematyce niezwykle istotna jest precyzja używanych pojęć, chaos jednak okazuje się być pojęciem niełatwym do zdefiniowania. W związku z tym, co ciekawe, nie ma jednej powszechnie przyjętej definicji chaosu. W czystej matematyce zaproponowano ich kilka. Swoje definicje chaosu zaproponowali m.in. Robert L. Devaney, Lous Block wraz z Williamem Andrew Coppelem oraz Tien-Yien Li wspólnie z Jamesem A. Yorke'm [3].

W rozwój teorii chaotycznych układów dynamicznych swój wkład mieli, oprócz wyżej wymienionych, tacy wybitni matematycy jak: John Von Neumann, Stanisław Ulam, Andriej Nikołajewicz Kołmogorow, George David Birkhoff, Stephen Smale, Aleksander Mikołajewicz Szarkowski.

Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyniku twierdzenia zawartego w pracy [4] wraz z uzupełnieniem fragmentów, w których autorzy powoływali się na inne źródła bądź pomijali dowody faktów uznawanych przez nich za oczywiste, a które studentowi matematyki oczywiste wydawać się nie muszą. Twierdzenie to dotyczy chaotycznych układów dynamicznych z czasem dyskretnym, gdzie przestrzenią fazową jest iloczyn kartezjański zwartej przestrzeni metrycznej i domkniętego odcinka jednostkowego.

Rozdział 1

Definicje, twierdzenia, lematy

1.1 Definicje dotyczące zwartych przestrzeni metrycznych

Definicja 1.1 (Metryka)**.** Metryką na zbiorze X nazywamy funkcję $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ spełniającą następujące warunki:

1. $\forall_{x,y \in X} : \rho(x,y) = 0 \iff x = y$,
2. $\forall_{x,y \in X} : \rho(x,y) = \rho(y,x)$,
3. $\forall_{x,y,z \in X} : \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Warunek 3 nazywany jest zwykle nierównością trójkąta.

Definicja 1.2 (Przestrzeń metryczna)**.** Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, ρ), gdzie X jest zbiorem a ρ zdefiniowaną na nim metryką. Czasami, tam gdzie nie będzie prowadziło to do nieporozumień, przestrzeń metryczną (X, ρ) będziemy oznaczać przez samo X.

Definicja 1.3 (Odległość punktu od zbioru)**.** W przestrzeni metrycznej (X, ρ), odległość punktu $x \in X$ od zbioru $A \subset X$ definiujemy następująco:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

Definicja 1.4 (Kula otwarta)**.** Kulą otwartą w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór: $K(s,r) = \{x \in X : \rho(s,x) < r\}$. Punkt s nazywamy wówczas środkiem kuli K, a $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ jej promieniem.

Definicja 1.5 (Zbiór otwarty)**.** Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy otwartym wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego $a \in A$ istnieje kula otwarta o środku w a, zawierająca się w A.

Lemat 1.6 (Kula otwarta w przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym)**.** *W przestrzeni metrycznej (X, ρ), każda kula otwarta jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Weźmy dowolną kulę otwartą $K = K(s,r) \subseteq X$. Weźmy teraz dowolny punkt $k \in K$. Wiemy, że $\rho(s,k) < r$, czyli $r - \rho(s,k) = \epsilon > 0$. Zatem, jeżeli weźmiemy $r_k = \frac{\epsilon}{2}$ to $K_2 = K(k, r_k) \subset K$, ponieważ

$$\forall_{a\in K_2}$$
$$\begin{aligned}\rho(s,a) &\leq \rho(s,k) + \rho(k,a) \leq \rho(s,k) + r_k \\ &= \rho(s,k) + \frac{\epsilon}{2} = \rho(s,k) + \frac{r}{2} - \frac{\rho(s,k)}{2} \\ &= \frac{\rho(s,k)}{2} + \frac{r}{2} < r,\end{aligned} \tag{1.1}$$

czyli $\forall_{a\in K_2}\, a \in K$. Z dowolności k otrzymujemy, że kula K jest otwarta a z dowolności wyboru kuli K otrzymujemy tezę. □

Definicja 1.7 (Topologia)**.** Topologią na przestrzeni A nazywamy rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni.

Definicja 1.8 (Topologia generowana przez metrykę)**.** Topologią generowaną przez metrykę ρ na zbiorze X, nazywamy rodzinę wszystkich zbiorów będących sumami kul otwartych zawartych w X.

Definicja 1.9 (Otoczenie punktu)**.** W przestrzeni metrycznej X zbiór $V \subseteq X$ nazywamy otoczeniem punktu x, jeżeli istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$, taki że $x \in U \subseteq V$.

Definicja 1.10 (Otoczenie zbioru)**.** W przestrzeni metrycznej X zbiór $V \subseteq X$ nazywamy otoczeniem zbioru A, jeżeli istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$, taki że $A \subseteq U \subseteq V$.

Definicja 1.11 (Wnętrze zbioru)**.** W przestrzeni metrycznej, wnętrzem zbioru A nazywamy zbiór wszystkich punktów, które należą do A wraz z pewnym swoim otoczeniem.

Definicja 1.12 (Domknięcie zbioru)**.** Domknięciem zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór $\{x \in X : \forall_{r>0}\, K(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$. Domknięcie zbioru A oznaczamy przez $\bar{A}$ lub $\mathrm{Cl}(A)$.

Definicja 1.13 (Zbiór domknięty)**.** Zbiór A jest domknięty, gdy $A = \mathrm{Cl}(A)$.

Twierdzenie 1.14 (Charakteryzacja zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej)**.** *Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X,ρ) jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu zbieżnego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, zawartego w A, jego granica również należy do A.*

Definicja 1.15 (Zbiór gęsty)**.** Dla danej przestrzeni metrycznej (X,ρ). Zbiór $A \subset X$ nazwiemy gęstym, gdy $\forall_{x\in X}\, \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{a\in A} : \rho(x,a) < \epsilon$.

Definicja 1.16 (Ośrodkowość)**.** Przestrzeń metryczna (X,ρ) jest ośrodkowa, gdy zawiera podzbiór przeliczalny i gęsty.

Definicja 1.17 (Zbiór brzegowy)**.** Zbiór A nazwiemy brzegowym, gdy ma puste wnętrze.

Definicja 1.18 (Zbiór nigdziegęsty)**.** Dla danej przestrzeni metrycznej (X,ρ). Zbiór $A \subset X$ nazwiemy nigdziegęstym, gdy wnętrze domknięcia tego zbioru jest puste.

Definicja 1.19 (Ciąg)**.** Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy: $x_1, x_2, \ldots$. Niekiedy ciąg oznaczamy skrótowo przez (x_n). W pracy rozważać będziemy ciągi w przestrzeniach metrycznych, czyli funkcje postaci $x : \mathbb{N} \to X$, gdzie X jest rozważaną przestrzenią metryczną.

Definicja 1.20 (Podciąg)**.** Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach ze zbioru X. Niech $(k_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ będzie silnie rosnącym ciągiem indeksów. Wówczas ciąg $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ nazywamy podciągiem ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicja 1.21 (Granica ciągu)**.** W przestrzeni metrycznej (X, ρ), punkt g nazywamy granicą ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gdy zachodzi warunek:

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>N}\, \rho(x_n, g) < \epsilon.$$

Definicja 1.22 (Granica dolna ciągu)**.** Granicę dolną ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy następująco:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = \sup_{n\geq 0}\inf_{k\geq n} x_k.$$

Definicja 1.23 (Granica górna ciągu)**.** Granicę górną ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy następująco:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n} x_k.$$

Definicja 1.24 (Punkt skupienia ciągu)**.** Punkt x_0 nazywamy punktem skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gdy w dowolnym otoczeniu punktu x_0 znajduje się nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu.

Definicja 1.25 (Punkt skupienia zbioru)**.** Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Punkt a nazywamy punktem skupienia zbioru $A \subset X$, gdy w dowolnym otoczeniu punktu a znajduje się nieskończenie wiele elementów zbioru A.

Definicja 1.26 (Punkt izolowany)**.** Mówimy, że a jest punktem izolowanym zbioru A, gdy $a \in A$ i a nie jest punktem skupienia zbioru A.

Definicja 1.27 (Ciąg Cauchy'ego)**.** Ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy ciąg (x_n) spełniający warunek:

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n,m>N}\, \rho(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definicja 1.28 (Pokrycie otwarte)**.** [11, s. 195] Pokryciem otwartym przestrzeni metrycznej X nazywamy rodzinę zbiorów otwartych $(U_i)_{i\in I}$ taką, że $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Definicja 1.29 (Przestrzeń metryczna zwarta, definicja pokryciowa)**.** Na podstawie [11, s. 196]. Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy zwartą jeżeli każde pokrycie otwarte $(U_i)_{i\in I}$ tej przestrzeni zawiera podpokrycie skończone, to znaczy istnieje skończony zbiór indeksów $J \subset I$, taki że $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. Podzbiór $Y \subset X$ jest zwarty jeżeli (Y, ρ) jest przestrzenią zwartą.

Twierdzenie 1.30 (Ciągowa charakteryzacja zwartości przestrzeni metrycznej)**.** *Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu $(x_n) \subset X$ można wybrać podciąg zbieżny.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że z dowolnego pokrycia X zbiorami otwartymi możemy wybrać podpokrycie skończone. Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \in X$. Pokażę, że ten ciąg ma punkt skupienia w X. Załóżmy, że ciąg (x_n) nie ma punktu skupienia w X, to znaczy $\forall_{x \in X}$ x nie jest punktem skupienia x_n, czyli $\forall_{x\in X} \exists_{\epsilon>0} K(x,\epsilon) \setminus \{x\} \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \emptyset$. Utwórzmy pokrycie X w następujący sposób:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in X} K(x, \epsilon_x),$$

gdzie $\epsilon_x > 0$ jest liczbą spełniającą warunek $K(x,\epsilon_x) \setminus \{x\} \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \emptyset$. Oczywiście rodzina $\mathcal{A}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Zgodnie z założeniem, z pokrycia $\mathcal{A}$ możemy wybrać podpokrycie skończone. Każdy zbiór $A \in \mathcal{A}$ zawiera najwyżej jeden element ciągu (x_n). Skończenie wiele zbiorów zawierających po co najwyżej jednym elemencie ciągu prowadzi do wniosku, że przestrzeń X zawiera skończenie wiele elementów nieskończonego ciągu co stanowi sprzeczność.

Oznaczmy przez g punkt skupienia ciągu (x_n). Oznaczmy przez y_1 pierwszy element ciągu (x_n) różny od g. przez y_2 pierwszy element ciągu (x_n) różny od g i taki, że $y_2 \in K(g, \frac{d}{2})$, gdzie $d = \rho(y_1, g)$. Następnie niech y_n będzie pierwszym elementem ciągu (x_n) różnym od g i spełniającym warunek $y_n \in K(g, \frac{d_{n-1}}{2})$, gdzie $d_{n-1} = \rho(y_{n-1}, g)$. Powstały w ten sposób podciąg $(y_n) \subset (x_n)$ jest zbieżny do $g \in X$. W przypadku gdyby na którymś etapie powyższej konstrukcji nie można było wskazać kolejnego elementu różnego od g, znaczyłoby to, że od pewnego miejsca ciąg (x_n) jest stale równy g, a więc zbieżny.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że z każdego ciągu $(x_n) \subset X$ możemy wybrać podciąg zbieżny oraz że istnieje pokrycie X, z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego.

Niech $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem X, które nie ma podpokrycia skończonego. Na mocy lematu 1.31 możemy wybrać z niego podpokrycie przeliczalne. Załóżmy zatem, że nieskończona, przeliczalna rodzina zbiorów otwartych $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ stanowi pokrycie X. Skonstruujmy następujący ciąg:

$$x_1 \notin U_1,$$

$$x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k.$$

Zawsze znajdziemy taki $x_n \in X$, gdyż gdyby taki nie istniał znaczyłoby to, że $\bigcup_{i=1}^{n-1} U_{k_i} = X$, czyli istniałoby podpokrycie skończone. Załóżmy teraz, że ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny. Wtedy istniałaby jego granica, tj. element $g \in X$, taki że dla każdego $\epsilon > 0$ nieskończenie wiele elementów ciągu leży wewnątrz kuli $B(g,\epsilon)$, z kolei z otwartości zbiorów U_n możemy wybrać taki ϵ, że $B(g,\epsilon) \subset U_k$, gdzie U_k jest dowolnym zbiorem z pokrycia X, zawierającym g. Z konstrukcji naszego ciągu wynika jednak, że $\forall_{n\in N} \forall_{m>n}\, x_m \notin U_n$, czyli do każdego U_n należy jedynie skończenie wiele elementów. Zatem otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Lemat 1.31. *Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Jeżeli z każdego ciągu $(x_n) \subset X$ można wybrać podciąg zbieżny, to przestrzeń X ma własność Lindelöfa, czyli z każdego pokrycia X zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie przeliczalne.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że przestrzeń X jest całkowicie ograniczona, to znaczy, że dla każdego ϵ można ją pokryć skończenie wieloma kulami o promieniu ϵ.

Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Załóżmy, że nie możemy pokryć X skończenie wieloma kulami o promieniu ϵ. Konstruujemy następujący ciąg: x_1-dowolny element X, następnie indukcyjnie, niech elementem o numerze $n+1$ będzie x_{n+1} taki, że $\forall_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\, \rho(x_{n+1}, x_k) > \epsilon$. Gdyby taki x_{n+1} nie istniał znaczyłoby to, że skończenie wiele kul o promieniu ϵ:

$K(x_1,\epsilon), K(x_2,\epsilon), \ldots, K(x_n,\epsilon)$ pokrywa X. Tak skonstruowany ciąg oczywiście nie zawiera podciągu zbieżnego, gdyż z konstrukcji, dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j : \rho(x_i, x_j) \geq \epsilon$. Co prowadzi do sprzeczności, a zatem przestrzeń X jest całkowicie ograniczona.

Z powyższego łatwo zauważamy, że przestrzeń X jest ośrodkowa. Ośrodkiem jest zbiór

$$A = \left\{ s : K(s,r) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \right\},$$

gdzie $\mathcal{K}_n$ jest skończonym pokryciem X kulami o promieniach $\frac{1}{n}$. Zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ jest przeliczalny jako przeliczalna suma zbiorów skończonych, więc A jest przeliczalny. Gęstość A w X jest oczywista.

Weźmy teraz dowolne pokrycie $\mathcal{O}$ przestrzeni X. Wiemy, że X jest ośrodkowa. Skoro $\mathcal{O}$ jest pokryciem otwartym, to dla każdego punktu x z ośrodka istnieje takie r_x wymierne i taki zbiór $O_x \in \mathcal{O}$, że $K(x, r_x) \subset O_x$. Oznaczmy punkty z ośrodka przez $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Oczywiście:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(x_n, r_{x_n}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{x_n},$$

zatem rodzina

$$\{O_{x_n} : x_n \text{należy do ośrodka}\},$$

jest przeliczalnym podpokryciem X.

□

1.2 Fakty ogólne, dotyczące zwartych przestrzeni metrycznych

Definicja 1.32 (Zupełność)**.** Przestrzeń metryczna jest zupełna jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

Twierdzenie 1.33 (Ośrodkowość zwartych przestrzeni metrycznych)**.** *Jeżeli przestrzeń metryczna jest zwarta to jest również ośrodkowa.*

Dowód. Fakt ten udowodniliśmy w trakcie dowodu lematu 1.31. □

Twierdzenie 1.34 (Zupełność zwartych przestrzeni metrycznych)**.** *Każda zwarta przestrzeń metryczna jest zupełna.*

Dowód. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią zwartą. Weźmy ciąg Cauchy'ego (x_n) elementów X. Ze zwartości (twierdzenie 1.30) wynika, że istnieje podciąg (y_{n_k}) ciągu (x_n) zbieżny do jakiegoś $g \in X$. Zatem $\forall_{\epsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n>n_0} \rho(y_n, g) < \epsilon$. Pokażemy, że (x_n) zbiega do g.

Ustalmy $\epsilon > 0$. Z faktu, że (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego wynika, że

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n,m>N} \rho(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ponadto

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n>n_0} \rho(y_n, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Weźmy teraz element y_k podciągu (y_n), taki że $y_k = x_M$, gdzie $M > N \wedge M > n_0$. Wówczas

$$M > N \implies \forall_{n>N} \rho(x_M, x_n) < \frac{\epsilon}{2},$$

$$M > n_0 \implies \rho(x_M, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zatem $\forall_{n>N} : \rho(x_n, g) \leq \rho(x_n, x_M) + \rho(x_M, g) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, czyli $g \in X$ jest granicą ciągu (x_n), a więc (x_n) jest zbieżny w (X, ρ). □

Lemat 1.35 (Baza topologii zwartej przestrzeni metrycznej)**.** *W zwartej, a więc i ośrodkowej przestrzeni metrycznej, bazę topologii stanowi rodzina kul otwartych, o środkach w ośrodku i promieniach wymiernych.*

Wniosek 1.36. *Topologia zwartej przestrzeni metrycznej posiada przeliczalną bazę.*

1.3 Przestrzenie funkcyjne

Definicja 1.37 (Odwzorowanie ciągłe)**.** Niech (X, ρ), (Y, d) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy ciągłym, jeżeli:

$$\forall_{x_0 \in X} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X} \, \rho\Big(x_0, x\Big) < \delta \implies d\Big(f(x_0), f(x)\Big) < \epsilon.$$

Definicja 1.38 (Zbiór $C(X)$)**.** Zbiór $C(X)$ jest to zbiór wszystkich ciągłych odwzorowań postaci $f : X \to X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną.

Definicja 1.39 (Metryka zbieżności jednostajnej)**.** Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Wówczas na przestrzeni $C(X)$ definiujemy metrykę:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \rho\Big(f(x), g(x)\Big).$$

Metrykę d nazywamy metryką zbieżności jednostajnej.

1.4 Lemat Urysohna

Lemat 1.40 (Lemat Urysohna)**.** *Niech A, B będą rozłącznymi, domkniętymi zbiorami w przestrzeni metrycznej (X, ρ). Wtedy istnieje funkcja ciągła $f : X \to [0, 1]$, taka że $A = f^{-1}(0)$ i $B = f^{-1}(1)$.*

Dowód. Tezę lematu spełnia następująca funkcja:

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

gdzie d jest zdefiniowane jak w 1.3. □

1.5 Twierdzenie Baire'a

Definicja 1.41 (Zbiór mizerny (zbiór pierwszej kategorii))**.** W zupełnej przestrzeni metrycznej zbiorem pierwszej kategorii nazywamy zbiór będący przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych.

Definicja 1.42 (Zbiór rezydualny (zbiór drugiej kategorii))**.** Zbiór nazywamy rezydualnym, jeżeli zawiera przekrój przeliczalnie wielu gęstych zbiorów otwartych.

Twierdzenie 1.43 (Twierdzenie Baire'a)**.** *W niepustej, zupełnej przestrzeni metrycznej X, przekrój przeliczalnie wielu gęstych zbiorów otwartych jest zbiorem gęstym.*

Lemat 1.44 (Przekrój zbiorów rezydualnych jest rezydualny)**.** *[7, s. 230] W przestrzeni metrycznej zupełnej, przekrój przeliczalnie wielu zbiorów rezydualnych jest rezydualny. W szczególności niepusty.*

1.6 Definicje dotyczące układów dynamicznych

Definicja 1.45 (Układ dynamiczny)**.** Układem dynamicznym nazywamy parę (X, T), gdzie X jest zbiorem a $T : X \to X$ przekształceniem (odwzorowaniem).

Definicja 1.46 (Iterata przekształcenia)**.** Iterata przekształcenia T to potęga przekształcenia T^n, $n \in \mathbb{N}$. Potęgę rozumiemy tutaj jako $n-$krotne złożenie odwzorowania z samym sobą: $T^n = (T \circ T \circ \ldots \circ T)$.

Definicja 1.47 (Orbita)**.** Orbita punktu x to ciąg $x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots$, czyli

$$O_T(x) = \{T^n x : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Jeśli T jest odwracalne (czyli różnowartościowe i „na"), to możemy rozważać orbitę obustronną:

$$\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definicja 1.48 (Punkt stały)**.** Punkt x jest stały, gdy $Tx = x$.

Definicja 1.49 (Punkt okresowy odwzorowania)**.** Punkt x jest okresowy, gdy jest stały dla jakiejś iteraty, tzn. gdy $\exists_{n \in \mathbb{N}} T^n x = x$.

Definicja 1.50 (Orbita okresowa)**.** Orbitą okresową nazywamy orbitę punktu okresowego. Zauważmy, że orbity okresowe traktowane jako zbiory są zawsze skończone.

Definicja 1.51 (Niezmienniczość zbioru ze względu na odwzorowanie)**.** Zbiór $A \subset X$ nazywamy niezmienniczym ze względu na odwzorowanie $f : X \to X$ jeżeli $f(A) \subset A$.

1.7 Entropia topologiczna

1.7.1 Definicja Adlera, Konheima i McAndrew

Definicja 1.52 (Entropia topologiczna pokrycia)**.** Na podstawie [2]. Rozważamy układ dynamiczny (X, f), gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną. Niech $\mathcal{A}$ będzie otwartym pokryciem X. Wprowadzamy oznaczenia:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n, A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset\},$$

gdzie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ są otwartymi pokryciami X.

$$f^{-n}(\mathcal{A}) = \left\{f^{-n}(A) : A \in \mathcal{A}\right\},$$

$$\mathcal{A}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{A}).$$

Ponadto niech $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ będzie najmniejszą możliwą mocą podpokrycia wybranego z $\mathcal{A}$ (tzn. licznością podzrodziny rodziny $\mathcal{A}$, która również jest pokryciem X). Moc tej rodziny możemy utożsamiać z licznością ponieważ zawsze istnieje podpokrycie skończone, gdyż X jest zwarta.

Wtedy entropią topologiczną odwzorowania f przy pokryciu $\mathcal{A}$ nazywamy wartość:

$$h(f, \mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{N}(\mathcal{A}^n).$$

Definicja 1.53 (Entropia topologiczna Adlera, Konheima, McAndrew)**.** Na podstawie [2]. Adler, Konheim i McAndrew entropię topologiczną odwzorowania f definiują następująco:

$$h(f) = \sup h(f, \mathcal{A}),$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich otwartych pokryciach $\mathcal{A}$ przestrzeni X.

1.7.2 Definicja Bowena

Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $f : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Rozważamy układ dynamiczny (X, f).

Definicja 1.54 (Kula Bowena)**.** [11, s. 58] Niech $\epsilon > 0$ oraz $n \geq 1$. Kulę Bowena rzędu n o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu ϵ definiujemy następująco

$$\begin{aligned} B_n(x, \epsilon) &:= \left\{ y \in X : \rho\left(f^k(x), f^k(y)\right) \leq \epsilon, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\} \\ &= \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\left(\overline{K}\left(f^i(x), \epsilon\right)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definicja 1.55 (Zbiór (n, ϵ)-rozdzielony)**.** [11, s. 58] Mówimy, że zbiór $E \subset X$ jest (n, ϵ)-rozdzielony, jeżeli dla każdych $x, y \in E$, takich że $x \neq y$ istnieje $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, takie że $\rho\left(f^k(x), f^k(y)\right) > \epsilon$.

Maksymalną moc zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego oznaczamy przez $s_n(f, \epsilon)$. (Liczba ta jest zawsze skończona, ponieważ przestrzeń jest zwarta.)

Definicja 1.56 (Zbiór (n, ϵ)-rozpinający)**.** [11, s. 58] Zbiór E nazywamy (n, ϵ)-rozpinającym jeżeli $X \subset \bigcup_{x\in E} B_n(x, \epsilon)$.

Minimalną moc zbioru (n, ϵ)-rozpinającego oznaczamy przez $r_n(f, \epsilon)$. (Zwartość przestrzeni implikuje, że zawsze istnieją skończone zbiory (n, ϵ)-rozpinające, możemy więc mówić o minimalnej liczności takiego zbioru.)

Definicja 1.57 (Entropia topologiczna Bowena)**.** [11, s. 59] Entropię topologiczną $h_{\text{top}}(f)$ odwzorowania f definiujemy następująco:

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_n(f, \epsilon).$$

Definicja 1.58 (Entropia topologiczna Bowena na podzbiorze przestrzeni)**.** [6, s. 402] Powyższe definicje występują też w wersjach ograniczonych do ustalonego zbioru zwartego $K \subset X$. I tak, niech $K \subset X$ będzie zbiorem zwartym, wtedy:

1. Maksymalną moc zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego zawartego w K oznaczamy przez $s_n(f, \epsilon, K)$.
2. $h_{\text{top}}(f, K) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, K)$.

Twierdzenie 1.59. *[6, s. 402] Zachodzi następująca równość:*

$$h_{top}(f) = \sup_{K \subset X, K \text{ zwarty}} h_{top}(f, K).$$

W dalszej części pracy będziemy używali oznaczenia h zamiast h_{top}, w miejscach gdzie nie będzie prowadziło to do nieporozumień.

1.7.3 Twierdzenia dotyczące entropii topologicznej

Twierdzenie 1.60. *(Równość entropii Adlera, Konheima, McAndrew i entropii topologicznej Bowena) Definicje 1.53 i 1.57 entropii topologicznej są równoważne.*

Dowód. Dowód znajdzie Czytelnik w pracy [11, s. 59]. □

Lemat 1.61 (Złożenie dwóch funkcji niemalejących jest niemalejące)**.** *Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ i $g : [0, 1] \to [0, 1]$ będą funkcjami niemalejącymi, wówczas ich złożenie $f \circ g$ również jest funkcją niemalejącą.*

Dowód. Weźmy dowolne $x, y \in [0, 1]$, niech $y < x$. Wówczas, ponieważ g jest niemalejąca zachodzi nierówność $g(y) \leq g(x)$, z faktu, że f również jest niemalejąca otrzymujemy $f(g(y)) \leq f(g(x))$. Czyli $(f \circ g)(y) \leq (f \circ g)(x)$. □

Wniosek 1.62 (Złożenie skończenie wielu funkcji niemalejących jest niemalejące)**.** *Wniosek ten otrzymujemy z lematu 1.61 przez zastosowanie indukcji matematycznej.*

Wniosek 1.63 (Iteraty funkcji niemalejącej są niemalejące)**.** *Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją niemalejącą, wówczas dla każdego $i \in \mathbb{N}$ funkcje f^i są niemalejące.*

Twierdzenie 1.64 (Entropia topologiczna odwzorowań monotonicznych)**.** *Niech $I = [0, 1]$ i niech $f : I \to I$ będzie funkcją monotoniczną (niekoniecznie ściśle). Wówczas entropia topologiczna f jest równa zero.*

Dowód. Rozważmy dwa przypadki: osobno dla $f : I \to I$ niemalejącej i nierosnącej.

Przypadek 1: $f : I \to I$ niemalejąca. Skorzystamy z definicji entropii topologicznej Bowena. Pokażemy, że

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon) = 0.$$

Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$. Podzielmy odcinek $[0, 1]$ na $m = \lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1 \leq \frac{1}{\epsilon} + 1$ odcinków o (niekoniecznie jednakowych) długościach równych $d_{i,\epsilon} < \epsilon$ w taki sposób aby otrzymać rodzinę odcinków:

$$\left\{ [0, d_{1,\epsilon}), [d_{1,\epsilon}, d_{1,\epsilon} + d_{2,\epsilon}), \ldots, [\sum_{i=1}^{m-1} d_{i,\epsilon}, 1] \right\}.$$

Oznaczmy krańce tych odcinków przez $a_0 = 0$, $a_1 = d_{1,\epsilon}$, $a_2 = d_{1,\epsilon} + d_{2,\epsilon}$, ..., $a_m = 1$. Zdefiniujmy $A_i := \{f^{-i}(a_0), f^{-i}(a_1), \ldots, f^{-i}(a_m)\}$, dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Niech $B = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$. Każdy ze zbiorów A_i zawiera $m+1$ elementów, zatem $|B| \leq n \cdot (m+1)$ Uporządkujmy elementy zbioru B w niemalejący ciąg $(b_j)_{j=0}^{|B|-1}$. Podzielmy I na odcinki postaci $B_j = [b_{j-1}, b_j]$ dla $j \in \{1, 2, \dots, |B|-1\}$.

Pokażę, że dowolne dwa punkty x, y należące do tego samego odcinka B_j nie mogą jednocześnie należeć do tego samego zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego.

Weźmy dowolny odcinek $B_j = [b_{j-1}, b_j]\, j \in \{1, 2, \dots, |B|-1\}$. Wybierzmy z niego dwa dowolne punkty x, y, $x \neq y$. Bez straty ogólności, niech $x > y$. Oczywiście nie istnieje punkt $b_k \in B$ dla którego $y < b_k < x$. Z konstrukcji B widzimy natychmiast, że $\forall_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} \exists_{j \in \{1,2,\dots,m\}} f^{-i}(a_{j-1}) \leq y < x \leq f^{-i}(a_j)$. Z monotoniczności funkcji f i wniosku 1.63 otrzymujemy

$$f^i(f^{-i}(a_{j-1})) = a_{j-1} \leq f^i(y) \leq f^i(x) \leq a_j = f^i(f^{-i}(a_j)).$$

Ponieważ $\rho(a_{j-1}, a_j) = d_{j,\epsilon} < \epsilon$ to $\rho(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$. A więc x i y nie należą do jednego zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego.

Przypomnijmy, że $s_n(f, \epsilon)$ oznacza maksymalną moc zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że do dowolnego zbioru (n, ϵ)-rozdzielonego może należeć co najwyżej jeden punkt z każdego z odcinków B_j, odcinków tych jest $|B|-1$. Zatem $s_n(f, \epsilon) \leq |B| - 1 \leq n \cdot (m+1) - 1 \leq n \cdot (\frac{1}{\epsilon} + 1 + 1) - 1 = \frac{n}{\epsilon} + \frac{n}{2} - 1$.

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \Big(n \cdot (m+1) - 1 \Big) \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{n}{\epsilon} + \frac{n}{2} - 1 \right) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{2 \cdot n + \epsilon \cdot n}{2 \cdot \epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \log \Big(n \cdot (2 + \epsilon) \Big) - \frac{1}{n} \log(2 \cdot \epsilon) \right) = \lim_{\epsilon \to 0} 0 = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Entropia z definicji jest nieujemna, więc $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Przypadek 2: $f : I \to I$ nierosnąca. Jeżeli f jest nierosnąca, to f^2 jest niemalejąca. Zatem z przypadku pierwszego $h_{\text{top}}(f^2) = 0$. Dla entropii topologicznej zachodzi następująca równość:

$$h_{\text{top}}(f^n) = n \cdot h_{\text{top}}(f),$$

zatem $0 = h_{\text{top}}(f^2) = 2 \cdot h_{\text{top}}(f)$, czyli $h_{\text{top}}(f) = 0$.

□

1.8 Chaos

Pomimo dużej popularności chaotycznych układów dynamicznych, przez długi czas nie było jednej powszechnie akceptowanej definicji chaosu. W niniejszej pracy prezentujemy dwie spośród powszechnie stosowanych: chaos w sensie Devaneya oraz w sensie Li-Yorke'a. W dalszej części pracy korzystać zajmować się będziemy odwzorowaniami chaotycznymi w sensie Devaneya.

Definicja 1.65 (Topologiczna tranzytywność)**.** [5] Mówimy, że f jest topologicznie tranzytywne w przestrzeni metrycznej X, gdy dla każdych niepustych, otwartych podzbiorów U, V przestrzeni X istnieje liczba naturalna k taka, że przekrój $f^k(U) \cap V$ jest niepusty.

Definicja 1.66 (Wrażliwość na warunki początkowe)**.** [4] Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, a $f : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Mówimy, że f jest wrażliwe na warunki początkowe jeżeli istnieje $\delta > 0$, taki że dla każdego $x \in X$ i dla każdego otoczenia U punktu x, istnieją $y \in U$ i $n \geq 0$ dla których zachodzi $\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Definicja 1.67 (Chaos w sensie Devaneya)**.** Niech X będzie przestrzenią metryczną. Ciągłe odwzorowanie $f : X \to X$ nazywamy chaotycznym (w sensie Devaneya) na X jeżeli:

1. f jest tranzytywne,

2. zbiór punktów okresowych f jest gęsty w X,

3. f jest wrażliwe na warunki początkowe.

Często, zamiast mówić o chaotyczności odwzorowania f, mówimy o chaotyczności układu dynamicznego (X, f).

Twierdzenie 1.68 (Warunki dostateczne chaotyczności w sensie Devaneya)**.** *[5] Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną oraz niech X nie będzie zbiorem skończonym. Jeżeli $f : X \to X$ jest tranzytywne i posiada gęsty zbiór punktów okresowych to f jest wrażliwe na warunki początkowe.*

Dowód. [5] Załóżmy, że $f : X \to X$ jest tranzytywne i posiada gęsty zbiór punktów okresowych.

W pierwszej kolejności zauważmy, że istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że dla każdego $x \in X$ istnieje punkt okresowy $q \in X$, którego orbita $O(q)$ jest w odległości co najmniej $\frac{\delta_0}{2}$ od x:

Wybierzmy dwa dowolne punkty okresowe q_1 i q_2 o rozłącznych orbitach $O(q_1), O(q_2)$.

Takie punkty istnieją, ponieważ:

1. Orbity okresowe są skończone, więc żadna taka orbita nie może być gęsta w nieskończonym zbiorze X.

2. Zbiór punktów okresowych odwzorowania f jest gęsty w X, więc istnieją punkty okresowe, należące do różnych orbit.

3. Rozważmy dwie orbity $O(p), O(q)$, bez straty ogólności niech $|O(p)| \geq |O(q)|$. Jeżeli te orbity są różne to $\exists_{p_0 \in O(p)}\, p_0 \notin O(q)$. Przypuśćmy, że istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $f^n(p_0) \in O(q)$. Wówczas, ponieważ $O(q)$ jest orbitą okresową, istniałoby $k \in \mathbb{N}$, takie że $O(q) \ni f^{n+k}(p_0) = p_0$, co stanowi sprzeczność. Zatem $\forall n \in \mathbb{N}\, f^n(p_0) \notin O(q)$, czyli jeżeli orbity są różne to są one rozłączne.

Oznaczmy przez δ_0 odległość między $O(q_1)$ a $O(q_2)$. Wówczas z nierówności trójkąta, każdy punkt $x \in X$ jest w odległości co najmniej $\frac{\delta_0}{2}$ od jednej z dwóch wybranych orbit. Pokażemy, że f jest wrażliwe na warunki początkowe ze stałą (ang. *sensitivity constant*) $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Weźmy dowolny punkt $x \in X$ i niech N będzie pewnym otoczeniem punktu x. Ponieważ zbiór punktów okresowych odwzorowania f jest gęsty, to istnieje punkt okresowy p należący do przekroju $U = N \cap K(x, \delta)$. Niech n oznacza okres punktu p. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że istnieje punkt okresowy $q \in X$, którego orbita $O(q)$ jest w odległości co najmniej 4δ od x. Oznaczmy

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(K(f^i(q), \delta)).$$

Zbiór V jest otwarty i niepusty, gdyż $q \in V$. W związku z tym, ponieważ f jest tranzytywne, to istnieją $y \in U$ i $k \in \mathbb{N}$, takie że $f^k(y) \in V$.

Niech teraz j będzie częścią całkowitą z $\frac{k}{n} + 1$. Wtedy $1 \le nj - k \le n$. Z konstrukcji mamy

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}\left(f^k(y)\right) \in f^{nj-k}(V) \subseteq K\left(f^{nj-k}(q), \delta\right).$$

Liczba n jest okresem p, więc $f^{nj}(p) = p$, a z nierówności trójkąta:

$$\rho\left(x, f^{nj-k}(q)\right) \le \rho(x,p) + \rho\left(p, f^{nj}(y)\right) + \rho\left(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)\right),$$

po przekształceniach dostajemy:

$$\begin{aligned}\rho\left(f^{nj}(p), f^{nj}(y)\right) &= \rho\left(p, f^{nj}(y)\right) \\ &\ge \rho\left(x, f^{nj-k}(q)\right) - \rho\left(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)\right) - \rho\left(p, x\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

Następnie, ponieważ $p \in K(x, \delta)$ oraz $f^{nj}(y) \in K\left(f^{nj-k}(q), \delta\right)$ otrzymujemy

$$\rho\left(f^{nj}(p), f^{nj}(y)\right) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Ostatecznie, korzystając z nierówności trójkąta dostajemy, że albo $\rho\left(f^{nj}(x), f^{nj}(y)\right) > \delta$, albo $\rho\left(f^{nj}(x), f^{nj}(p)\right) > \delta$. W obu przypadkach znaleźliśmy punkt, którego nj-ta iterata jest w odległości większej od δ od $f^{nj}(x)$. □

Definicja 1.69 (Chaos w sensie Li-Yorke'a)**.** [3, s. 25] Ciągłe odwzorowanie $f : X \to X$ na zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest chaotyczne (w sensie Li-Yorke'a) jeżeli istnieje nieprzeliczalny podzbiór S przestrzeni X o następujących własnościach:

1. $\limsup_{n\to\infty} \rho\left(f^n(x), f^n(y)\right) > 0$ dla każdych $x, y \in S$, $x \neq y$,

2. $\liminf_{n\to\infty} \rho\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0$ dla każdych $x, y \in S$, $x \neq y$,

3. $\limsup_{n\to\infty} \rho\left(f^n(x), f^n(p)\right) > 0$ dla każdych $x \in S$, $p \in X$, p - okresowy.

1.9 Chaos, tranzytywność a entropia

Zarówno tranzytywność, chaotyczność jak i topologiczną entropię możemy intuicyjnie pojmować jako pewne „miary skomplikowania” układu dynamicznego. Pojawia się więc pytanie czy są to pojęcia tożsame, a jeżeli nie, to jak bardzo się różnią. Czy możliwe jest aby odwzorowanie topologicznie tranzytywne miało zerową entropię topologiczną i odwrotnie: czy odwzorowanie o niezerowej entropii topologicznej może nie być tranzytywne. Okazuje się, że odpowiedź na oba te pytania jest twierdząca. Wiele zależy od przestrzeni którą rozważamy. Mając daną przestrzeń, możemy zadać pytanie czy istnieje dla niej odwzorowanie tranzytywne (a nawet więcej: chaotyczne), ale o zerowej entropii topologicznej. Ogólniej: jaką wartość przyjmuje dolne ograniczenie na entropię topologiczną dla odwzorowań chaotycznych na danej przestrzeni i czy istnieje odwzorowanie o entropii równej temu ograniczeniu. Innymi słowy możemy rozważać problem istnienia i wartości minimum bądź supremum entropii topologicznej po wszystkich chaotycznych odwzorowaniach danej przestrzeni w nią samą. Poniżej przedstawiamy kilka znanych wyników przedstawionych w [4]. W każdym z poniższych punktów zakładamy, że f jest chaotyczne w sensie Devaneya.

1. Jeżeli $f : [0,1] \to [0,1]$, to entropia topologiczna $h(f) \geq \frac{1}{2}\log(2)$.

2. Istnieje $f : C \to C$, gdzie C jest zbiorem Cantora, takie że $h(f) = 0$.

3. Niech $F = \{f : S^1 \to S^1 \mid f \text{ jest chaotyczne w sensie Devaneya}\}$, gdzie S^1 oznacza okrąg. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $f \in F$ dla którego $h(f) < \epsilon$, jednocześnie nie istnieje takie $f \in F$, dla którego wartość entropii osiąga zero.

1.10 Odwzorowania trójkątne

Definicja 1.70 (Odwzorowanie trójkątne)**.** Rozważmy „prostokąt” $X \times Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowaniem trójkątnym nazywamy funkcję $F : X \times Y \to X \times Y$ postaci:

$$F(x,y) = \Big(f(x), g(x,y)\Big).$$

Definicja 1.71 (Ciągłość odwzorowań trójkątnych)**.** W pracy rozważać będziemy wyłącznie odwzorowania ciągłe, tj. takie trójkątne F dla których $f \in C(X)$ i g jest ciągłą funkcją z $X \times Y$ w Y. Zbiór takich odwzorowań oznaczać będziemy $C_\triangle(X \times Y)$ Zamiast $g(x,y)$ będziemy pisać $g_x(y)$, gdzie $g_x : Y \to Y$ jest rodziną ciągłych przekształceń zależną w sposób ciągły od $x \in X$.

Definicja 1.72 (Odwzorowanie bazowe)**.** Odwzorowanie f nazywamy odwzorowaniem bazowym (ang. *basis map*) odwzorowania $F = (f, g_x)$.

Definicja 1.73 (Odwzorowania włóknowe)**.** Odwzorowania g_x dla $x \in X$ nazywamy odwzorowaniami włóknowymi (ang. *fibre maps*) odwzorowania $F = (f, g_x)$.

Twierdzenie 1.74 (O równości entropii odwzorowania trójkątnego i jego odwzorowania bazowego)**.** *Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, $I = [0,1]$, $F = (f, g_x) \in C_\triangle(X \times I)$. Wtedy, jeżeli $\forall_{x \in X}$ funkcje włóknowe g_x są (niekoniecznie ściśle) monotoniczne, to entropia topologiczna odwzorowania F jest równa entropii topologicznej jego odwzorowania bazowego f, czyli:*

$$h(F) = h(f).$$

Dowód. Rozważamy dwie zwarte przestrzenie metryczne: (X, d_1) oraz $(X \times I, d_2)$ z metrykami zdefiniowanymi w 1.75 i 1.76. Przestrzeń X jest zwarta z założenia, natomiast przestrzeń $X \times I$ jest zwarta jako produkt dwóch przestrzeni zwartych.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\pi : X \times I \to X$, $\pi(x,a) = x$. Oczywiście π jest ciągłe i „na”. Wówczas $F : X \times I \to X \times Y$, $f : X \to X$ oraz $\pi : X \times I \to X$ („na”) są ciągłymi odwzorowaniami.

Weźmy dowolny punkt $(x,a) \in X \times I$:

$$(\pi \circ F)(x,a) = \pi\Big(F(x,a)\Big) = \pi\Big(f(x), g_x(a)\Big) = f(x),$$

$$(f \circ \pi)(x,a) = f\Big(\pi(x,a)\Big) = f(x),$$

a więc $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Na podstawie twierdzenia 17 z pracy [6, s. 409] otrzymujemy, że

$$h(F) \leq h(f) + \sup_{x \in X} h(F, \pi^{-1}(x)).$$

Ustalmy $x \in X$. Wiemy, że:

$$h(F, \pi^{-1}(x)) = h(F, \{x\} \times I) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(F, \epsilon, \{x\} \times I),$$

gdzie $s_n(F, \epsilon, \{x\} \times I)$ jest maksymalną mocą zbioru $(n, \epsilon)-$rozdzielonego, zawartego w $\{x\} \times I$.

Zauważmy, że zbiór $\{x\} \times I$ jest (n, ϵ)-rozdzielony, jeżeli dla każdych $(x, y_1), (x, y_2) \in \{x\} \times I$, takich że $y_1 \neq y_2$ istnieje $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, takie że

$$\begin{aligned}
&d_2(F^k(x, y_1), F^k(x, y_2)) \\
&= d_2\Big(\Big(f^k(x), (g_{f^{k-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x)(y_1)\Big), \Big(f^k(x), (g_{f^{k-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x)(y_2)\Big)\Big) \\
&= d_1\Big((g_{f^{k-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x)(y_1), (g_{f^{k-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x)(y_2)\Big) \\
&> \epsilon.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Podstawmy nierówność 1.5 w miejsce $\rho(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$ z definicji 1.55. Przedefiniujmy zbiór A_i z twierdzenia 1.64 w następujący sposób: $A_i \coloneqq \{F^{-i}(x, a_0), F^{-i}(x, a_1), \ldots, F^{-i}(x, a_m)\}$, dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dla każdych $i \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $a \in I$ zachodzi:

$$F^{-i}(x, a) = \Big(f^{-i}(x), (g^{-1}_{f^{-i}(x)} \circ \ldots \circ g^{-1}_{f^{-2}(x)} \circ g^{-1}_{f^{-1}(x)})(a)\Big).$$

Wszystkie odwzorowania włóknowe g_x są niemalejące, a więc ich złożenia również (na mocy wniosku 1.62).

W takim razie rozumując analogicznie jak w twierdzeniu 1.64, łatwo stwierdzamy, że:

$$\forall_{x \in X}\, h(F, \pi^{-1}(x)) = 0,$$

czyli również:

$$\sup_{x \in X} h(F, \pi^{-1}(x)) = 0.$$

Otrzymujemy zatem nierówność:

$$h(F) \leq h(f). \tag{1.6}$$

Pokażemy teraz, że $h(F) \geq h(f)$. Skorzystamy z definicji 1.53 (Adlera) entropii topologicznej. Rozważmy wszystkie pokrycia otwarte przestrzeni $X \times I$ postaci $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \times I : A \in \mathcal{A}\}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest dowolnym pokryciem otwartym przestrzeni X. Wtedy dla każdego takiego pokrycia $\widetilde{\mathcal{A}}$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
F^{-n}(A \times I) &= \{(x, y) : F^n(x, y) \in A \times I\} \\
&= \Big\{(x, y) : f^n(x) \in A \wedge \Big(g_{f^n(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x\Big)(y) \in I\Big\} \\
&= \{x : f^n(x) \in A\} \times I \\
&= f^{-n}(A) \times I,
\end{aligned}$$

dla każdego $A \times I \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Dalej

$$F^{-n}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\right) = \left\{F^{-n}(A \times I) : A \times I \in \widetilde{\mathcal{A}}\right\} = \left\{f^{-n}(A) \times I : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

Ponadto dla każdych $A_1 \times I, A_2 \times I$ mamy $(A_1 \times I) \cap (A_2 \times I) = (A_1 \cap A_2) \times I$, a więc

$$\widetilde{\mathcal{A}}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} F^{-i}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\right) = \left\{A \times I : A \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{A})\right\}.$$

Skoro dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie zbiory należące do $\widetilde{\mathcal{A}}^n$ są postaci jak wyżej, to podrodzina $\widetilde{\mathcal{B}}^n \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^n$ jest podpokryciem przestrzeni $X \times I$ wtedy i tylko wtedy, gdy podrodzina $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}^n$ jest podpokryciem przestrzeni X. Z powyższego wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathcal{N}\left(\widetilde{\mathcal{A}}^n\right) = \mathcal{N}(\mathcal{A}^n)$, co w konsekwencji daje:

$$\sup_{\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{R}} h(F, \widetilde{\mathcal{A}}) = \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A}),$$

gdzie

$$\mathcal{R} = \left\{\widetilde{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} = \{A \times I : A \in \mathcal{A}\},\ \text{gdzie } \mathcal{A} \text{ jest dowolnym pokryciem otwartym przestrzeni } X\right\},$$

Drugie supremum w powyższym wzorze brane jest po wszystkich pokryciach przestrzeni X, czyli otrzymujemy:

$$\sup_{\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{R}} h(F, \widetilde{\mathcal{A}}) = h(f).$$

Aby otrzymać entropię odwzorowania F bierzemy supremum po wszystkich pokryciach przestrzeni $X \times I$, czyli po nadzbiorze zbioru $\mathcal{R}$, więc:

$$h(F) \geq \sup_{\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{R}} h(F, \widetilde{\mathcal{A}}) = h(f). \tag{1.7}$$

Ostatecznie z nierówności 1.6 i 1.7 dostajemy:

$$h(F) = h(f).$$

□

1.11 Definicje utworzone na potrzeby dowodu twierdzenia o rozszerzaniu

Definicje i własności odwzorowań trójkątnych podajemy na podstawie pracy [4].

Na potrzeby dowodu wprowadźmy pojęcia odległości między odwzorowaniami oraz dwie funkcje: $\mathrm{pr}_1(x, y)$ i $\mathrm{pr}_2(x, y)$.

Definicja 1.75 (Metryka na przestrzeni ciągłych przekształceń zwartej przestrzeni metrycznej)**.** Niech (M, σ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, rozważmy odwzorowania $h, k \in C(M)$. Odległość między nimi zdefiniujmy jako $\max_{m \in M} \sigma(h(m), k(m))$ i oznaczmy ją jako $d_1(h, k)$.

Definicja 1.76 (Metryka na przestrzeni odwzorowań trójkątnych)**.** Odległość między odwzorowaniami trójkątnymi definiujemy następująco: Niech (X, ρ) i (Y, τ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi a $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ i $\Phi(x, y) = (\phi(x), \psi_x(y))$ trójkątnymi odwzorowaniami należącymi do $C_\triangle(X \times Y)$. Odległość definiujemy wówczas jako

$$\begin{aligned} d_2(F, \Phi) &= \max_{(x,y)\in X\times Y} \max\left\{\rho(f(x), \phi(x)), \tau(g_x(y), \psi_x(y))\right\} \\ &= \max\left\{d_1(f, \phi), \max_{x\in X} d_1(g_x, \psi_x)\right\}. \end{aligned}$$

Uwaga: Rozważmy przestrzeń $(C(X \times Y), d)$ wszystkich ciągłych odwzorowań $X \times Y$ w siebie, z metryką zbieżności jednostajnej:

$$d(F, \Phi) = \max_{(x,y)\in X\times Y} \max\left\{\rho\Big(f(x, y), \phi(x, y)\Big), \tau\Big(g(x, y), \psi(x, y)\Big)\right\}.$$

Wówczas metryka d_2 jest równa metryce d obciętej do zbioru $C_\triangle(X \times Y)$.

Zbieżność w metrykach d_1 i d_2 jest tym samym, co zbieżność jednostajna (por. definicja 1.39). Z lematów 1.77 i 1.78 wynika, że przestrzenie metryczne $(C(X), d_1)$ oraz $(C_\triangle(X \times Y), d_2)$ są zupełne.

Lemat 1.77 (Przestrzeń $(C(X), d_1)$ jest zupełna)**.** *Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Przestrzeń metryczna $(C(X), d_1)$ jest zupełna.*

Dowód. Musimy pokazać, że każdy ciąg Cauchy'ego w przestrzeni $(C(X), d_1)$ jest zbieżny do elementu tej przestrzeni. Niech $(f_n)_{n=0}^\infty \subset C(X)$, będzie ciągiem Cauchy'ego, czyli

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n,m>N}\, d_1(f_n, f_m) = \max_{x\in X} \rho\Big(f_n(x), f_m(x)\Big) < \epsilon. \tag{1.8}$$

Weźmy dowolny $x_0 \in X$, oczywiście

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}}\, \rho\Big(f_n(x_0), f_m(x_0)\Big) \le \max_{x\in X} \rho\Big(f_n(x), f_m(x)\Big). \tag{1.9}$$

Podstawiając 1.9 do 1.8 otrzymujemy, że dla każdego $x \in X$ ciąg $\Big(f_n(x)\Big)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni (X, ρ). Ponieważ (X, ρ) jest przestrzenią zwartą a więc zupełną (twierdzenie 1.34), to dla każdego $x \in X$ ciąg $\Big(f_n(x)\Big)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny.

Oznaczmy teraz $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, dla każdego $x \in X$.

Pozostało pokazać, że ciąg $(f_n)_{n=0}^\infty \subset C(X)$ zbiega do f w przestrzeni $(C(X), d_1)$. Ustalmy $\epsilon > 0$. Oczywiście:

$$\exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n,m>N}\, d_1(f_n, f_m) = \max_{x\in X} \rho\Big(f_n(x), f_m(x)\Big) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Z definicji f zachodzi:

$$\forall_{x\in X}\, \exists_{n_x>N}\, \forall_{n\ge n_x}\, \rho\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Powyższe nierówności prowadzą do:

$$\forall_{x\in X}\, \forall_{n>N} \rho\Big(f_n(x), f(x)\Big) \le \rho\Big(f_n(x), f_{n_x}(x)\Big) + \rho\Big(f_{n_x}(x), f(x)\Big) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Z dowolności ϵ otrzymujemy:

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>N}\, \forall_{x\in X}\, \rho\Big(f_n(x), f(x)\Big).$$

co jest równoważne następującemu:

$$\forall_{\epsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n>N}\ \max_{x\in X}\rho\Big(f_n(x), f(x)\Big) = d_1(f_n, f),$$

czyli zbieżności ciągu $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ do f w metryce d_1.

Zauważmy, że d_1 jest metryką zbieżności jednostajnej. Odwzorowanie f jest granicą ciągu odwzorowań ciągłych w metryce zbieżności jednostajnej, a więc $f \in C(X)$. □

Lemat 1.78 (Ciągłe odwzorowania trójkątne tworzą przestrzeń metryczną zupełną)**.** *Niech (X,ρ) i (Y,τ) będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi. Wówczas przestrzeń metryczna $(C_\triangle(X\times Y), d_2)$ jest zupełna.*

Dowód. Rozważmy przestrzeń $(C(X\times Y), d)$ wszystkich ciągłych odwzorowań postaci:

$$F : X\times Y \to X\times Y.$$

Weźmy dwa dowolne odwzorowania $F,\Phi \in C(X\times Y)$:

$$F(x,y) = \Big(f(x,y), g(x,y)\Big);\ \Phi(x,y) = \Big(\phi(x,y), \psi(x,y)\Big).$$

Zdefiniujmy metrykę d następująco:

$$d(F,\Phi) = \max_{(x,y)\in X\times Y}\max\left\{\rho\Big(f(x,y), \phi(x,y)\Big), \tau\Big(g(x,y), \psi(x,y)\Big)\right\}.$$

Pokażemy, że zbiór $(C_\triangle(X\times Y), d_2)$ jest domkniętym podzbiorem $(C(X\times Y), d)$. Weźmy dowolny zbieżny ciąg odwzorowań: $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_\triangle(X\times Y)$. Oznaczmy $F = \lim_{n\to\infty} F_n$, $\Big(F = (f,g),\ F_n = (f_n, g_n)\Big)$. Mamy

$$\forall_{\epsilon>0}\,\exists_{n_0}\,\forall_{n>n_0} d(F_n,F) = \max_{(x,y)\in X\times Y}\max\left\{\rho\Big(f_n(x,y), f(x,y)\Big), \tau\Big(g_n(x,y), g(x,y)\Big)\right\} < \epsilon,$$

oznacza to, że

$$\forall_{(x,y)\in X\times Y}\ \lim_{n\to\infty}\rho\Big(f_n(x,y), f(x,y)\Big) = \lim_{n\to\infty}\tau\Big(g_n(x,y), g(x,y)\Big) = 0.$$

Ponieważ $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, F_n \in C_\triangle(X\times Y)$, to $f_n(x,y) = f_n(x)$. Mamy więc

$$\forall_{(x,y)\in X\times Y}\ \lim_{n\to\infty}\rho\Big(f_n(x), f(x,y)\Big) = \lim_{n\to\infty}\rho\Big(f_n(x), f_x(y)\Big) = 0.$$

Ponadto dla każdych $n\in\mathbb{N}, x\in X, y_1, y_2\in Y$ mamy $f_n(x,y_1) = f_n(x,y_2)$, wobec czego tę samą własność ma odwzorowanie f. Ponieważ f nie zależy od współrzędnej y to odwzorowanie F jest odwzorowaniem trójkątnym, czyli zbiór odwzorowań trójkątnych jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $C(X\times Y)$.

Przestrzeń $(C(X\times Y), d)$ jest zupełna na mocy lematu 1.77. Ostatecznie $(C_\triangle(X\times Y), d_2)$ jako domknięta podprzestrzeń zupełnej przestrzeni $(C(X\times Y), d)$ również jest przestrzenią zupełną. □

Definicja 1.79 $(\mathrm{pr}_1(x,y), \mathrm{pr}_2(x,y))$**.** Dla $(x,y)\in X\times Y$ niech $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$ i $\mathrm{pr}_2(x,y) = y$. Odwzorowanie identycznościowe na Y będziemy oznaczać przez Id_Y lub krótko Id. W dalszej części pracy przestrzeń Y będzie odcinkiem rzeczywistym $I = [0,1]$.

1.12 Lematy

Na potrzeby kolejnych lematów wprowadźmy następujące definicje i oznaczenia. Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych oraz niech $f \in C(X)$ będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaneya. $I = [0, 1]$. P_0 to dowolny, skończony zbiór zawarty w X. Przez $\mathcal{F}$ oznaczmy zbiór wszystkich odwzorowań $F = (f, g_x)$ ze zbioru $C_\triangle(X \times I)$ spełniających następujące warunki:

1. $\forall_{x\in X}$ odwzorowanie g_x jest niemalejące i krańce przedziału I pozostawia niezmienione.

2. $\forall_{x\in P_0}$ g_x jest identycznością.

Lemat 1.80. *Zbiór $\mathcal{F}$ jest niepustym, domkniętym podzbiorem przestrzeni $C_\triangle(X \times I)$.*

Dowód. Niech $f \in C(X)$ będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaneya. Zdefiniujmy $F_0(x, y) = (f(x), y)$. Dla każdego $x \in X$ odwzorowanie g_x jest identycznością, więc w szczególności jest niemalejące i pozostawia krańce przedziału I niezmienione. Zatem $F_0 \in \mathcal{F}$, czyli $\mathcal{F}$ jest zbiorem niepustym.

Pokazujemy domkniętość. Weźmy dowolny ciąg zbieżny $\Big(F_n = (f_n, g_{x,n})\Big)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Oznaczmy jego granicę przez $\widetilde{F} = (\widetilde{f}, \widetilde{g_x})$. Skoro ciąg ten zawiera się w $\mathcal{F}$ to $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, f_n = f$. Wiemy, że zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} d_2(F_n, \widetilde{F}) = \lim_{n\to\infty} \max\{d_1(f, \widetilde{f}), \max_{x\in X} d_1(g_{x,n}, \widetilde{g_x})\} = 0. \tag{1.10}$$

Zatem $d_1(f, \widetilde{f}) = 0$, czyli $\widetilde{f} = f$.

Z równości 1.10 otrzymujemy również

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in X} d_1(g_{x,n}, \widetilde{g_x}) = 0,$$

a z tego mamy

$$\forall_{x\in X} \lim_{n\to\infty} d_1(g_{x,n}, \widetilde{g_x}) = 0.$$

Metryka d_1 na przestrzeni $C(I)$ jest metryką zbieżności jednostajnej, a wszystkie odwzorowania $g_{x,n}$ są oczywiście ciągłe i monotoniczne, więc dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $\widetilde{g_x}$ jest ciągłe i monotoniczne jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu monotonicznych odwzorowań ciągłych. Ponadto, skoro prawdziwy jest warunek

$$\forall_{x\in X} \lim_{n\to\infty} d_1(g_{x,n}, \widetilde{g_x}) = \lim_{n\to\infty} \max_{a\in I} (g_{x,n}(a), \widetilde{g_x}(a)) = 0,$$

to w szczególności zachodzi on dla $a \in \{0, 1\}$, więc skoro odwzorowania $g_{x,n}$ pozostawiają krańce przedziału I niezmienione, to jest to prawdą również dla odwzorowań $\widetilde{g_x}$. Wiemy, że wszystkie odwzorowania $g_{n,x}$ są monotoniczne. Ustalmy $x_0 \in P_0$, wszystkie odwzorowania $g_{x_0,n}$ są identycznością, wówczas $\widetilde{g_{x_0}} = \mathrm{Id}$ jako granica ciągu stałego. Odwzorowania $\widetilde{g_x}$ spełniają więc warunki narzucane przez definicję zbioru $\mathcal{F}$. Zatem granica $\widetilde{F}$ należy do $\mathcal{F}$, czyli dowolny, ustalony ciąg zbiega do elementu zbioru $\mathcal{F}$, więc zbiór ten jest domknięty. □

Twierdzenie 1.81. *Zbiór odwzorowań tranzytywnych jest rezydualny w $\mathcal{F}$.*

Dowód. Twierdzenie 1.5 w pracy [1]. □

Definicja 1.82. Niech U będzie dowolnym zbiorem otwartym zawartym w $X \times I$. Zdefiniujmy zbiór $\mathcal{F}_{SO}$ („S” - stabilny, „O” - okresowy) następująco. Odwzorowanie G należy do $\mathcal{F}_{SO}$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $\mathcal{F}$, posiada punkt okresowy w U oraz wszystkie dostatecznie bliskie G odwzorowania z $\mathcal{F}$ również posiadają punkt okresowy w U (być może różne od punktów okresowych odwzorowania G).

Bezpośrednio z tej definicji wynika, że $\mathcal{F}_{SO}$ jest otwartym podzbiorem $\mathcal{F}$.

Lemat 1.83. *Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych, $f \in C(X)$ odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaneya, P skończonym zbiorem niezmienniczym ze względu na f, a V otwartym otoczeniem zbioru P. Wówczas dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje niepusty zbiór otwarty $W \subseteq V$, taki że $W \cup f(W) \cup \ldots \cup f^N(W) \subseteq V$.*

Dowód. P jest zbiorem skończonym, więc możemy wypisać wszystkie jego elementy:

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}.$$

Ponieważ V jest otwartym otoczeniem zbioru P to istnieje $d > 0$, takie że dla każdego $0 < \epsilon < d$ zbiór $\bigcup_{i=0}^{k} K(p_i, \epsilon)$ zawiera się w V. Ustalmy $0 < \epsilon < d$ i oznaczmy $U = \bigcup_{i=0}^{k} K(p_i, \epsilon)$, oczywiście $U \subseteq V$. Rozważmy dowolny, ustalony punkt p_i ze zbioru P. Wiemy, że P jest niezmienniczy ze względu na odwzorowanie f, a więc istnieją punkty $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_N} \in P$ dla których zachodzi $f(p_i) = p_{j_1}$, $f^2(p_i) = p_{j_2}$, ..., $f^N(p_i) = p_{j_N}$. Z kolei z ciągłości odwzorowania f, również jego iteraty są ciągłe, a z tego wynika, że znajdziemy taką δ_i, że $\epsilon > \delta_i > 0$ i dla której $f^n(K(p_i, \delta_i)) \subset K(p_{j_n}, \epsilon) \subset U$, dla każdego $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Z dowolności wyboru p_i otrzymujemy, że każdy zbiór postaci $f^n(K(p_i, \delta_i))$, (gdzie $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ a $p_i \in P$) zawiera się w U. Oznaczmy $W = \bigcup_{i=1}^{k} K(p_i, \delta_i)$, oczywiście W jest niepustym zbiorem otwartym, który zawiera się w U ponieważ $\delta_i < \epsilon$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ponadto

$$\forall_{n \in \{1,2,\ldots,k\}}\, f^n(W) = f^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} K(p_i, \delta_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f^n\Big(K(p_i, \delta_i)\Big) \subset U.$$

Ostatecznie otrzymujemy $W \cup f(W) \cup \ldots \cup f^N(W) \subset U \subseteq V$. □

Lemat 1.84 (Istnienie orbity okresowej odwiedzającej rodzinę zbiorów otwartych)**.** *Na podstawie [4, s. 231-232 Lemma 3] i [9, s. 7] Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Niech $f \in C(X)$ będzie topologicznie tranzytywnym odwzorowaniem, którego zbiór punktów okresowych jest gęsty w X.*

Wtedy dla każdej rodziny niepustych zbiorów otwartych $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ istnieje orbita okresowa f, której przekrój z każdym ze zbiorów U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jest niepusty.

Dowód. Ponieważ odwzorowanie f jest tranzytywne a przestrzeń X jest zwarta, to istnieje punkt x_0, którego orbita jest gęsta w X. Zatem orbita punktu x_0 odwiedza każdy ze zbiorów otwartych U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Teraz korzystając z ciągłości odwzorowania f wystarczy wziąć punkt okresowy f dostatecznie bliski x_0. □

Lemat 1.85. *[1] Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $F = (f, g_x)$ będzie odwzorowaniem należącym do $C_\triangle(X \times I)$ którego wszystkie odwzorowania włóknowe są niemalejące i pozostawiają krańce I niezmienione. Niech $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ będzie podzbiorem X oraz dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech U_i będą parami rozłącznymi zbiorami otwartymi, takimi że $a_i \in U_i$. Załóżmy, że h_i są niemalejącymi odwzorowaniami z $C(I)$ pozostawiającymi* *krańce I niezmienione i spełniającymi $d_1(h_i, g_{a_i}) < \epsilon$ dla pewnego dodatniego ϵ i każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas istnieje odwzorowanie:*

$$\widetilde{F} = (f, \widetilde{g}_x) \in C_\triangle(X \times I),$$

spełniające cztery następujące warunki:

1. *wszystkie odwzorowania włóknowe $\widetilde{F}$ są niemalejące i pozostawiające krańce I niezmienione,*
2. $d_2(F, \widetilde{F}) < \epsilon$,
3. $\widetilde{g}_{a_i} = h_i$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$,
4. $\widetilde{g}_x = g_x$ *dla* $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Dowód. [1] Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ niech $V_i \subset U_i$ będzie otwartym otoczeniem a_i, takim że dla pewnego dodatniego $\widetilde{\epsilon} < \epsilon$, $d_1(h_i, g_x) < \widetilde{\epsilon}$ zawsze wtedy gdy $x \in V_i$.

Oznaczmy $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Niech $u : X \longrightarrow [0, 1]$ będzie ciągłą funkcją, przyjmującą wartość 1 na zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, natomiast 0 poza zbiorem V. Ponieważ zbiory $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, oraz $X \setminus V$ są domknięte i rozłączne, to taka funkcja istnieje na mocy lematu Urysohna (lemat 1.40). Zastąpmy każde odwzorowanie włóknowe g_x przez $\widetilde{g}_x$, gdzie

$$\widetilde{g}_x(y) = \begin{cases} g_x(y) & \text{dla } x \in X \setminus V, \\ g_x(y)(1 - u(x)) + h_i(y)u(x) & \text{dla } x \in V_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{1.11}$$

dla każdego $y \in I$. Zauważmy ponadto, że dla $x \in V_i$ oraz $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, możemy równoważnie napisać:

$$\widetilde{g}_x(y) = u(x)(h_i(y) - g_x(y)) + g_x(y). \tag{1.12}$$

Rozważmy odwzorowanie $\widetilde{F} = (f, \widetilde{g}_x)$. Należy ono do $C_\triangle(X \times I)$. Z równości 1.11 widzimy, że wszystkie odwzorowania włóknowe $\widetilde{g}_x$ są niemalejące i krańce przedziału I są ich punktami stałymi. Ponadto $\widetilde{g}_{a_i} = h_i$ dla każdego i oraz $\widetilde{g}_x = g_x$ dla $x \in X \setminus V \supset X \setminus U$. Ponieważ dla $x \in V_i$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $d_1(h_i, g_x) < \widetilde{\epsilon}$ oraz $u(x) \in [0, 1]$, zatem z równości 1.12 otrzymujemy $d_1(g_x, \widetilde{g}_x) < \widetilde{\epsilon}$ dla każdego $x \in V$. Wynika z tego, że

$$\begin{aligned} d_2(F, \widetilde{F}) &= d_2\Big((f, g_x), (f, \widetilde{g_x})\Big) \\ &= \max\left\{d_1(f, f), \max_{x \in X} d_1(g_x, \widetilde{g_x})\right\} \\ &= \max\left\{0, \max_{x \in X} d_1(g_x, \widetilde{g_x})\right\} \\ &= \max_{x \in X} d_1(g_x, \widetilde{g_x}) \\ &\le \widetilde{\epsilon} < \epsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Rozdział 2

Twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań chaotycznych w sensie Devaneya

Twierdzenie 2.1 (O rozszerzaniu). *Twierdzenie wraz z dowodem przytaczamy za pracą [4] Niech (X, ρ) będzie zwartą przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych oraz niech $f \in C(X)$ będzie odwzorowaniem chaotycznym w sensie Devaneya. Wówczas odwzorowanie f można rozszerzyć do odwzorowania $F \in C_{\triangle}(X \times I)$ (to znaczy tak, że f jest odwzorowaniem bazowym dla F) w taki sposób, że:*

(i) F jest również chaotyczne w sensie Devaneya,

(ii) F ma taką samą entropię topologiczną jak f,

(iii) zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze ze względu na F.

Dowód twierdzenia o rozszerzaniu. Odwzorowanie f jest chaotyczne w sensie Devaneya, zatem ma gęsty zbiór punktów okresowych, w szczególności istnieje orbita okresowa. Możemy zatem ustalić okresową orbitę P_0 odwzorowania f. Ponieważ P_0 jest zbiorem skończonym a X nie ma punktów izolowanych, to P_0 jest nigdziegęstym domkniętym podzbiorem X.

Rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ wszystkich odwzorowań $F = (f, g_x)$ ze zbioru $C_{\triangle}(X \times I)$ spełniających następujące warunki:

1. Odwzorowanie bazowe f jest odwzorowaniem z założenia twierdzenia 2.1.

2. $\forall_{x \in X}$ odwzorowanie g_x jest niemalejące i krańce przedziału I pozostawia niezmienione.

3. $\forall_{x \in P_0}$ g_x jest identycznością.

Warunek 2 implikuje, że dla każdego odwzorowania z $\mathcal{F}$ zbiory $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ są niezmiennicze, czyli $\forall_{F \in \mathcal{F}}$ zachodzi warunek (iii) twierdzenia 2.1. Zachodzenie warunku (ii) twierdzenia 2.1 dla każdego odwzorowania $F \in \mathcal{F}$ wynika z faktu, że każde odwzorowanie z $C_{\triangle}(X \times I)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną (a więc w szczególności każde odwzorowanie z $\mathcal{F}$), którego wszystkie odwzorowania włóknowe są niemalejące, ma taką samą entropię topologiczną jak jego odwzorowanie bazowe (twierdzenie 1.74). Pozostaje zatem wykazać prawdziwość warunku (i), czyli chaotyczność w sensie Devaneya jakiegoś odwzorowania $F \in \mathcal{F}$. Takie odwzorowanie będzie bowiem łącznie spełniało wszystkie 3 warunki, czyli tezę twierdzenia.

Z lematu 1.68 wynika, że aby odwzorowanie F było chaotyczne w sense Devaneya potrzeba i wystarcza, żeby spełniało dwa poniższe warunki:

1. F jest topologicznie tranzytywne.

2. zbiór punktów okresowych odwzorowania F jest gęsty w $(X \times I)$.

Jest tak, gdyż przestrzeń $(X \times I)$ spełnia założenia lematu, tj. jest przestrzenią nieskończoną i zwartą.

Chcemy wykazać, że istnieje $F \in \mathcal{F}$ będące jednocześnie topologicznie tranzytywne i posiadające gęsty w $(X \times I)$ zbiór punktów okresowych. Z lematu 1.80 wiemy, że $\mathcal{F}$ jest niepustym, domkniętym podzbiorem przestrzeni $C_{\triangle}(X \times I)$, która jak wynika z lematu 1.78 jest przestrzenią metryczną zupełną.

Przekrój dwóch zbiorów rezydualnych jest rezydualny (patrz lemat 1.44) a więc niepusty. Wystarczy zatem pokazać, że oba zbiory:

- zbiór odwzorowań topologicznie tranzytywnych,

- zbiór odwzorowań, których zbiór punktów okresowych jest gęsty w $(X \times I)$,

są rezydualne w $\mathcal{F}$. Wówczas każde odwzorowanie należące do ich przekroju będzie spełniało wszystkie trzy warunki tezy twierdzenia 2.1

Zbiór odwzorowań tranzytywnych jest rezydualny w $\mathcal{F}$, zostało to udowodnione w twierdzeniu 1.81.

Pozostało wykazać, że również zbiór odwzorowań posiadających gęsty zbiór punktów okresowych jest rezydualny w $\mathcal{F}$. Oznaczmy zbiór takich odwzorowań (jednocześnie należących do $\mathcal{F}$) przez $\mathcal{F}_{DP}$.

Niech $\{U_i^X\}_{i=1}^{\infty}$ będzie bazą topologii X (X jest jest przestrzenią zwartą, więc topologia na niej określona posiada przeliczalną bazę, por. wniosek 1.36) i niech $\{U_i^I\}_{i=1}^{\infty}$ będzie zbiorem wszystkich odcinków otwartych o końcach wymiernych, należących do odcinka otwartego $(0, 1)$. Niech $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ponumerowaniem zbioru $\{U_i^X \times U_j^I : i, j \in \mathbb{N}\}$. Wtedy każda kula otwarta w $X \times I$ zawiera jakiś spośród otwartych zbiorów U_i.

Dla każdego $i = 1, 2, ...$ niech zbiór $\mathcal{F}_{SO}^i$ („S" - stabilny, „O" - okresowy) będzie zdefiniowany następująco. Odwzorowanie G należy do $\mathcal{F}_{SO}^i$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $\mathcal{F}$, posiada punkt okresowy w U_i oraz wszystkie dostatecznie bliskie G odwzorowania z $\mathcal{F}$ również posiadają punkt okresowy w U_i (być może różne od punktów okresowych odwzorowania G). Zbiory $\mathcal{F}_{SO}^i$ są otwartymi podzbiorami $\mathcal{F}$ (patrz lemat 1.82). Ponieważ $\mathcal{F}_{DP} \supseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{SO}^i$ aby pokazać, że $\mathcal{F}_{DP}$ jest rezydualny w $\mathcal{F}$ wystarczy pokazać, że $\forall_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{SO}^i$ jest gęsty w $\mathcal{F}$. (Wynika to z twierdzenia Baire'a 1.43 oraz definicji 1.42).

Aby wykazać że każdy zbiór $\mathcal{F}_{SO}^i$ jest gęsty w $\mathcal{F}$ ustalmy dowolne: $i \in \mathbb{N}$, $F = (f, g_x) \in \mathcal{F}$ i $\epsilon > 0$. Pokażemy, że istnieje odwzorowanie $G \in \mathcal{F}_{SO}^i$, którego odległość od F nie przekracza ϵ. Dla uproszczenia sytuacji załóżmy, że $\rho(\mathrm{pr}_1(U_i), P_0) > 0$ (Jeżeli tak nie jest, zawsze możemy wziąć zamiast U_i mniejszy prostokąt $U_i^* \subset U_i$).

Weźmy dodatnią liczbę naturalną $N \geq \frac{4}{\epsilon}$. Następnie rozważmy otwarte otoczenie V orbity P_0 w przestrzeni (X, ρ), takie że $\rho(\mathrm{pr}_1(U_i), V) \geq 0$ oraz $d_1(g_x, \mathrm{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$ dla każdego $x \in V$ (pamiętamy, że $g_x = \mathrm{Id}$ dla $x \in P_0$).

P_0 jest skończonym zbiorem niezmienniczym ze względu na f, więc na mocy lematu 1.83 istnieje niepusty zbiór otwarty $W \subseteq V$, taki że $W \cup f(W) \cup \ldots \cup f^N(W) \subseteq V$. Na mocy lematu 1.84 istnieje punkt okresowy x_0 odwzorowania f, taki że $x_0 \in \mathrm{pr}_1(U_i)$ oraz orbita x_0 ma niepusty przekrój ze zbiorem W. Niech $r > 0$ będzie pierwszą dodatnią liczbą całkowitą dla której $f^r(x_0) \in W$. Wtedy $f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \ldots, f^{r+N-1}(x_0) \in V$. Niech $s \geq 0$ będzie pierwszą nieujemną liczbą całkowitą dla której $f^{r+N+s}(x_0) = x_0$, tj. $r + N + s$ jest okresem punktu x_0. Weźmy y_0, takie że $(x_0, y_0) \in U_i$. Ponieważ wszystkie odwzorowania włóknowe (g_x) odwzorowania F są „na", to istnieje punkt $y^* \in (0, 1)$, taki że $F^s(f^{r+N}(x_0), y^*) = (x_0, y_0)$. Uzasadnienie:

$$\begin{aligned} F^s\left(f^{r+N}(x_0), y^*\right) &= \left(f^{r+N+s}(x_0),\ g_{x_s}\Big(g_{x_{s-1}}\Big(\ldots\Big(g_{x_1}(y^*)\Big)\ldots\Big)\Big)\right) \\ &= \left(x_0,\ \Big(g_{x_s} \circ g_{x_{s-1}} \circ \ldots \circ g_{x_1}\Big)(y^*)\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $x_1 = f^{r+N}(x_0)$, $x_{k+1} = f(x_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, s-1$. Oznaczmy $\Big(g_{x_s} \circ g_{x_{s-1}} \circ \ldots \circ g_{x_1}\Big)$ przez g_s. Funkcja g_s jest „na" jako złożenie funkcji „na". W związku z tym, dla każdego $z \in [0, 1]$ istnieje $z^* \in [0, 1]$, takie że $g_s(z^*) = z$. Ponadto jeżeli $z \in (0, 1)$, to $z^* \in (0, 1)$ bo g_s pozostawia krańce przedziału $[0, 1]$ niezmienione.

Przypadek 1. $z = \mathrm{pr}_2(F^r(x_0, y_0))$ jest różne od 0 i 1. Oznaczmy przez g odwzorowanie z $C(I)$ posiadające następujące trzy własności:

(g1) $d_1(g, \mathrm{Id}) < \frac{\epsilon}{4}$,

(g2) g jest odwzorowaniem niemalejącym, pozostawiającym końce przedziału I niezmienione,

(g3) $g^N(z) = y^*$.

Następnie, rozważmy odwzorowanie $h \in C(I)$ posiadające trzy następujące własności:

(h1) $d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4}$,

(h2) $h(y_0) = g_{x_0}(y_0)$,

(h3) h jest stałe na zwartym odcinku $[a, b] \subseteq \mathrm{pr}_2(U_i)$ zawierającym punkt y_0 w swoim wnętrzu.

Weźmy teraz odwzorowanie $G = (f, \widetilde{g}_x) \in \mathcal{F}$, takie że $d_2(G, F) < \frac{\epsilon}{2}$ oraz

$$\widetilde{g}_x = \begin{cases} h & \text{if } x = x_0, \\ g & \text{if } x \in \Big\{f^k(x_0) : r \leq k \leq r + N - 1\Big\}, \\ g_x & \text{if } x \in \Big\{f^k(x_0) : 1 \leq k \leq r - 1 \vee r + N \leq k \leq r + N + s - 1\Big\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Odwzorowanie takie istnieje na mocy lematu 1.85, ponieważ

$$d_1(\widetilde{g}_{x_0}, g_{x_0}) = d_1(h, g_{x_0}) < \frac{\epsilon}{4},$$

oraz dla $x \in \Big\{f^r(x_0), f^{r+1}(x_0), \ldots, f^{r+N-1}(x_0)\Big\}$:

$$d_1(\widetilde{g}_x, g_x) = d_1(g, g_x) \leq d_1(g, \mathrm{Id}) + d_1(\mathrm{Id}, g_x) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Punkt $(x_0, y_0) \in U_i$ jest punktem okresowym odwzorowania G, ponieważ

$$
\begin{aligned}
G^{r+N+s}(x_0,y_0) &\overset{(1)}{=} G^{r+N+s-1}\Big(G(x_0,y_0)\Big) \\
&\overset{(2)}{=} G^{r+N+s-1}\Big(F(x_0,y_0)\Big) \overset{(3)}{=} G^{N+s}\Big(F^r(x_0,y_0)\Big) \\
&\overset{(4)}{=} G^{N+s}\Big(f^r(x_0),z\Big) \overset{(5)}{=} G^s\Big(f^{r+N}(x_0),y^*\Big) \\
&\overset{(6)}{=} F^s\Big(f^{r+N}(x_0),y^*\Big) \overset{(7)}{=} (x_0,y_0).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Szczegółowe uzasadnienie powyższych równości:

1. Nie musimy rozważać odwracalności G gdyż $r > 0,\ N > 0,\ s \geq 0$, a więc $r+N+s \geq 2$.
2. $G = (f, \widetilde{g}_x)$, $\widetilde{g}_{x_0} = h$ a $h(y_0) = g_{x_0}(y_0)$.
3. Z równania 2.2 mamy $\widetilde{g}_x = g_x$, dla $x \in \{f^k(x_0) : 1 \leq k \leq r-1\}$.
4. Wynika z definicji z.
5. Z równania 2.2 dla $x \in \{f^k(x_0) : r \leq k \leq r+N-1\}$, oraz (g3).
6. Z równania 2.2 mamy $\widetilde{g}_x = g_x$, dla $x \in \{f^k(x_0) : r+N \leq k \leq r+N+s-1\}$.
7. Wprost z definicji y^*.

Ponadto, ze względu na (h3) zachodzi

$$
\begin{aligned}
G^{r+N+s}(\{x_0\}\times[a,b]) &= G^{r+N+s-1}\Big(G(\{x_0\}\times[a,b])\Big) \\
&= G^{r+N+s-1}\Big(\{f(x_0)\}\times\widetilde{g}_x([a,b])\Big) \\
&\overset{(h3)}{=} G^{r+N+s-1}\Big(\{f(x_0)\}\times\widetilde{g}_{x_0}([a,b])\Big) \\
&\overset{(h2)}{=} G^{r+N+s-1}\Big(\{f(x_0)\}\times\{g_{x_0}(y_0)\}\Big) \\
&= G^{r+N+s-1}\Big(\{(f(x_0),g_{x_0}(y_0))\}\Big) \\
&= G^{r+N+s-1}\Big(\{F(x_0,y_0)\}\Big) \\
&= \{(x_0,y_0)\}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Z faktu $y_0 \in (a,b)$ wynika, że każde odwzorowanie $\widetilde{G} \in \mathcal{F}$ dostatecznie bliskie G posiada własność

$$\widetilde{G}^{r+N+s}(\{x_0\}\times[a,b]) \subseteq \{x_0\}\times[a,b].$$

$\widetilde{G}^{r+N+s}$ na pierwszej współrzędnej przeprowadza x_0 na x_0, zaś na drugiej przeprowadza odcinek $[a,b]$ w $[a,b]$. Każde ciągłe odwzorowanie odcinka w siebie ma punkt stały, a punkt stały iteraty jest punktem okresowym oryginalnego odwzorowania. Zatem $\widetilde{G}$ posiada punkt okresowy w $\{x_0\}\times[a,b] \subseteq U_i$. Zatem $G \in \mathcal{F}^i_{SO}$, co kończy dowód dla przypadku 1.

Przypadek 2. $\mathrm{pr}_2(F^r(x_0,y_0))$ jest równy 0 lub 1. W takim przypadku użyjemy lematu 1.85 aby dostać odwzorowanie $H = (f, h_x) \in \mathcal{F}$, takie że $d_2(H,F) < \frac{\epsilon}{2}$ i dla $x \in \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{r-1}(x_0)\}$ odwzorowania włóknowe h_x są ściśle rosnące. Takie odwzorowanie istnieje, ponieważ każdą funkcję niemalejącą możemy jednostajnie przybliżać funkcjami ściśle rosnącymi.

Ponieważ y_0 jest różnie od 0 i 1 dostajemy, że $\mathrm{pr}_2(H^r(x_0, y_0))$ również jest różne od 0 i 1. (Ponieważ $H = (f, h_x) \in \mathcal{F}$, to każde z odwzorowań h_x pozostawia niezmienione punkty 0 i 1. Wprowadźmy oznaczenie $\mathrm{pr}_2(H^r(x_0, y_0)) = (h_{f^{r-1}(x_0)} \circ \ldots \circ h_{f(x_0)} \circ h_{x_0})(y_0) = h_0(y_0)$. Odwzorowanie h_0 jako złożenie odwzorowań ściśle rosnących i pozostawiających punkty 0 i 1 niezmienione jest ściśle rosnące i pozostawia niezmienione punkty 0 i 1. Ponieważ $y_0 > 0$ to oczywiście $h_0(y_0) > h_0(0) = 0$. Natomiast ze względu na fakt, że $y_0 < 1$, to zachodzi $h_0(y_0) < h_0(1) = 1$.)

Następnie korzystając z przypadku 1 dostajemy odwzorowanie $G \in \mathcal{F}^i_{SO}$, dla którego zachodzi nierówność $d_2(G, H) < \frac{\epsilon}{2}$. Wówczas, korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy $d_2(G, F) \le d_2(G, H) + d_2(H, F) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

$\square$

Bibliografia

[1] Alseda, L., Kolyada, S., Llibre, J., Snoha, L. Entropy and periodic points for transitive maps. *Transactions of the American Mathematical Society 351*, 4 (1999), 1551–1573.

[2] Alsedà, L., Llibre, J., Misiurewicz, M. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, vol. 5. 1993.

[3] Aulbach, B., Kieninger, B. On three definitions of chaos. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* (2001).

[4] Balibrea, F., Snoha, L. Topological entropy of devaney chaotic maps. *Topology and its Applications 133*, 3 (2003), 225–239.

[5] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P. On devaney's definition of chaos. *The American Mathematical Monthly 99*, 4 (1992), 332–334.

[6] Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society 153* (1971), 401–414.

[7] Engelking, R. *Topologia ogólna.* Biblioteka Matematyczna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2007.

[8] Gleick, J. *Chaos: Making a New Science.* Penguin Books, New York, NY, USA, 1987.

[9] Kolyada, S., Snoha, L. Some aspects of topological transitivity - a survey. *Grazer Mathematische Berichte 334* (01 1997), 3–35.

[10] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences 20*, 2 (1963), 130–141.

[11] Ruette, S. *Chaos on the Interval.* 2018.