Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Aproksymacja funkcji kawałkami regularnych przy użyciu informacji dokładnej i niedokładnej

Tomasz Czyż

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka obliczeniowa i komputerowa

Nr albumu: 290565

Promotor
dr Maciej Goćwin

Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2019

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

....

(Podpis czytelny studenta)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

....

(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie

Streszczenie

Słowa kluczowe

słowa kluczowe

Abstract

Abstract

Key words

keywords

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest analiza zachowania różnych algorytmów aproksymujących funkcje kawałkami gładkie przy użyciu informacji dokładniej i niedokładniej. Pierwszy z analizowanych algorytmów został przedstawiony w pracy [2]. Rozważane są w niej funkcje klasy F_r^∞, o których zakładamy, że zarówno sama funkcja $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ może być nieciągła, jak i jej pochodna, począwszy od rzędu możliwe większego od pierwszego. Czyli, dla przykładu, f może być dwa razy różniczkowalna na $[0, T]$ i $f^{(3)}(s)$ może nie istnieć w jakimś punkcie s. Ponadto, f może mieć skończenie wiele punktów osobliwych; ich ilość i położenie jest nieznane. Dodatkowo, algorytm przedstawiony w [2] używa n wartości funkcji w punktach $x_1, \ldots x_n$ jako jedyne dostępne informacje o funkcji f, a w przypadku algorytmu adaptacyjnego dopuszczamy, że wybór x_j zależy od $f(x_1), \ldots, f(x_{j-1})$. W wymienionej pracy do znalezienia optymalnego algorytmu nieadaptacyjnego i adaptacyjnego w najgorszym przypadku oraz w przypadku asymptotycznym do mierzenia błędu stosowana jest m.in. norma $L^p(1 \leq p < \infty)$.

W artykule [3] rozszerzony jest wynik prac [1] i [2] poprzez skupienie się na klasie funkcji ciągłych globalnie r-regularnych z co najwyżej jednym punktem osobliwym. W podanej pracy przedstawiony jest algorytm nieadaptacyjny, który asymptotycznie poprawia ograniczenie błędu z [5].

Ostatni z analizowanych algorytmów pochodzi z pracy [5] i jako jedyny z przedstawionych algorytmów uwzględnia zaburzenie danych. W artykule uogólnione zostają rezultaty z [2] i [3] poprzez wprowadzanie informacji niedokładniej oraz założenie, że wykładnik Höldera $\varrho \in (0, 1]$. (...) Z tego powodu w pracy [5] przedstawiony został nowy algorytm do lokalizacji osobliwości. Co więcej dla $\varrho = 0$, co odpowiada informacji dokładniej, przedstawiony algorytm jest nawet prostszy niż te z [2] i [3].

Rozdział 1

Definicje

Dla liczby całkowitej $r \geq 0$, $0 < \varrho \leq 1$ oraz $a < b$, przez $H_{r,\varrho}(a,b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ takich, że $g \in C^r([a,b])$ i $g^{(r)}$ jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem ϱ,

$$c(g) := \sup_{a \leq x \leq y \leq b} \frac{|g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)|}{|x-y|^{\varrho}} < \infty.$$

Dla danego $T > 0$ niech $F_{r,\varrho} = F_{r,\varrho}(T)$ będzie przestrzenią funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających następujące warunki: istnieje $s_f \in [0,T)$ i $g_f \in H_{r,\varrho}(0,T)$ takie, że

$$f(lT + s_f + x) = g_f(x) \quad \text{for all} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{i} \quad x \in [0,T)$$

Rozdział 2

Złożoność obliczeniowa

rozdział o informacji zaburzonej itp.

Rozdział 3

Ograniczenia z dołu

Rozdział 4

Algorytmy

4.1. Algorytm oparty o informację zaburzoną

W tej opiszemy algorytm bazujący na informacji zaburzonej przedstawiony w artykule [5]. Analizowany algorytm używa co najwyżej n wartości funkcji z precyzją δ oraz w najgorszym przypadku ma błąd proporcjonalny do $\max(\delta, n^{-1/r+\varrho})$ w klasie funkcji $\mathcal{F}^D_{r,\varrho}$ dla $p < \infty$ oraz w klasie $\mathcal{F}^C_{r,\varrho}$ dla $p \leq \infty$. Kluczowym parametrem algorytmu jest

$$h = T/m \quad with \quad m \geq 2r + 1,$$

gdzie m jest początkową gęstością siatki. Dodatkowo, niech $\omega = \omega(h)$ spełnia $0 < \omega < (r + 1)h$.

Na początku algorytm aproksymuje punkt osobliwy s_f. Jest to realizowane w trzech krokach. W kroku 1. przy pomocy siatki rozmiarze o długości h i różnic dzielonych lokalizowany jest punkt s_f na przedziale $[u_1, v_1]$ o długości $(r+1)h$. W kroku 2. używamy wielomianów interpolujących $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ do zwężenia tego przedziału do $[u_2, v_2]$. Krok 3. produkuje przedział $[u_3, v_3] \subseteq [u_2, v_2]$, w którym różnica $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ jest nierosnąca na $[u_3, \xi]$ i niemalejąca na $[\xi, v_3]$, gdzie ξ jest finalną aproksymacją s_f.

Powyższe kroki mogą być zapisane następująco; dla $t_i = ih\ \forall i$.

Krok 1 Oblicz różnice dzielone $\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \ldots, t_{i+r+1}]$ for $1 \leq i \leq m$ oraz znajdź

$$i^* = arg \max_{1 \leq i \leq m} |\tilde{d}_i|$$

Niech $u_1 = t_{i^*}$ i $v_1 = t_{i^*+r+1}$.

Krok 2 Oznaczymy przez $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ wielomiany stopnia $\leq r$, które interpolują węzły $(t_j, \tilde{f}(t_j))$ odpowiednio dla $i^* - r \leq j \leq i^*$ oraz dla $i^* + r + 1 \leq j \leq i^* + 2r + 1$. Następnie wykonaj iterację:

$u := u_1$, $v := v_1$
dopóki $v - u > \omega$ **do**
  $z_j := u + j(v-u)/(r+2), \qquad j = 1, 2, \ldots, r+1$
  $j^* := arg \max_{1 \leq j \leq r+1} |\tilde{p}_+(z_j) - \tilde{p}_-(z_j)|$
  if $|\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_-(z_j)| \leq |\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_+(z_j)|$ **then**
    $u := z_{j^*}$
  else
    $v := z_{j^*}$
end while
Niech $u_2 = u$ i $v_2 = v$.

Krok 3 Wykonaj iterację:

$u := u_2$, $v := v_2$
dopóki istnieje maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v) **do**
  $z :=$ największe maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v)
  if $|\tilde{f}(z) - \tilde{p}_-(z)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{p}_+(z)|$ **then**
    $u := z$
  else
    $v := z$
end while
Niech $u_3 = u$ i $v_3 = v$.

Finalną aproksymacją s_f jest

$$\xi := arg \max_{u_3 \leq x \leq v_3} |\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$$

Rozdział 5

Testy numeryczne

porównanie algorytmów

Bibliografia

[1] F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, N. Dyn, *Interpolation and approximation of piecewise smooth functions*, SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 41–57

[2] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, Y. Zhao, *The power of adaption for approximating functions with singularities*, Mathematics Of Computation 77 2008, p. 2309–2338

[3] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, *Uniform approximation of piecewise r-smooth and globally continuous functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 47, No. 1 (2008/2009)

[4] B. Kacewicz, P. Przybyłowicz, *Complexity of the derivative-free solution of systems of IVPs with unknown singularity hypersurface*, Journal of Complexity

[5] P. M. Morkisz, L. Plaskota, *Approximation of piecewise Hölder functions from inexact information*, Journal of Complexity