Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Aproksymacja funkcji kawałkami regularnych przy użyciu informacji dokładnej i niedokładnej

Tomasz Czyż

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka obliczeniowa i komputerowa

Nr albumu: 290565

Promotor
dr Maciej Goćwin

Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2019

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

....
(Podpis czytelny studenta)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

....
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie

Streszczenie

Słowa kluczowe

słowa kluczowe

Abstract

Abstract

Key words

keywords

Wprowadzenie

Aproksymacja funkcji oparta na dostępnej inforamcji jest problemem badanym od lat. Powstają coraz bardziej zaawansowane algorytmy, działające przy coraz słabszych założeniach o funkcji. Często jednak w rozważaniach teoretycznych pomijany jest czynnik zewnętrzny, który może powodować zaburzenia dostępych informacji. W tej pracy pokazujemy, jak znaczący wpływ na wyniki numeryczne może mieć zaniedbanie tego faktu.

W tym celu przedstawimy dwa algoytmy z artukułów [5] i [4]. Pierwszy z nich bazuje na wielomianach Lagrnage'a i jego analiza nie uwzględnia zaburzenia danych wejściowych. Algorytm z [5] dopuszcza informacje niedokładną, a kluczowy krok opiera się na różnicach dzielonych.

Omwiane algorytmy aprkosymują funkcje kawałkami regularne. Mówimy, że funkcja skalarna g jest (r, ϱ)-regularna na przedziale $[a, b]$, jeśli $g \in C^r([a, b])$ oraz g^r jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\varrho \in (0, 1]$. Rozważmy przestrzeń $F_{r,\varrho}$ T-okresowych funkcji f, które składają się z dwóch (r, ϱ)-regularnych części oddzielonych nieznanym punktem osobliwym s_f.

Oba algorytmy osiągają ten sam minimalny błąd najgorszego przypadku proporcjonalny do $n^{-(r+\varrho)}$, dzięki użyciu adaptacji do wykrycia punktu osobliwego. Adaptacyjny wybór punktów siatki jest niezbędny, aby otrzymać taki błąd. Ograniczenia związane z algorytmami nieadaptacyjmymi zostały omowione w [3], [2] oraz [?] (...).

Rozdział 1

Definicje

1.1. Informacja, algorytm, aproksymacja

W tym rozdziale wyjaśnijmy co rozumiemy przez aproksymacje i w jaki sposób ją otrzymujemy. W tym celu wprowadzimy fundamentalne pojęcia, takie jak operator rozwiązania, informacja zaburzona oraz algorytm. Szczególną uwagę poświęcimy informacji, która jest najważniejszym czynnikiem naszej analizy. Informacja, mowiąc w skrócie, jest tym co wiemy o problemie do rozwiązania. W niniejszej pracy kluczownym założeniem jest to, że informacja jest *zaburzona*, to znaczy, nie jest dokładna, czyli ma jakiś błąd.

Niech F będzie przestrznią liniową a G przestrzenią unormowaną, obie nad ciałem liczb rzeczywistych. Odwzorowanie

$$S : F \to G$$

nazywamy *operatorem rozwiązania*. Naszym zadaniem jest aproksymacja elementów $S(f)$ dla f należącego do $E \subset F$, bazując wyłącznie na informacji zaburzonej o f. Przejdźmy do szczegółowego omówienia inforamcji i aproksymacji.

Operatorem informacji nazywamy odwzorowanie

$$N : F \to 2^Y,$$

gdzie Y jest zbiorem skończonych ciągów liczb rzeczywistych, $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$. Czyli $N(f)$ jest pozbiorem Y. Zakładamy, że $N(f)$ jest niepuste dla wszystkich $f \in F$. Każdy element $y \in N(f)$ będziemy nazywać *informacją o f*. Zauważmy, że jeżeli zbiór $N(f)$ ma dokładnie jeden element dla wszystkich $f \in F$, to informacja N jest *dokładna*. W przypadku, gdy istnieje f dla którego $N(f)$ ma przynajmniej dwa elementy, wtedy informacja jest *zaburzona*.

Dodatkowo, informacje możemy rozróżniać ze względu na sposób wyboru kolejnych wartości funckji f. W przypadk, gdy kolejne wartości wybierane są niezależnie od

f, to mówimy o informacji *nieadaptacyjnej.* W przciwnym przypadku, to jest gdy kolejne wartości zależą zarówno od innych punktów, jak i wartości funkcji, to mówimy o informacji *adaptacyjnej.* Dla przykładu, dla informacji nieadaptacyjnej składającej się z zaburzonych ewaluacji funkcji f w punktach $x_1, \ldots, x_n$ z precyzją δ, mamy:

$$N(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad |y_i - f(x_i)| \leq \delta, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Znając informację y o f możemy wprowadzić aproksymację, a dokłanie algorytm, który ją wyprodukuję. *Algorytmem* nazywamy odwzorowanie:

$$\varphi : Y \to G$$

Innymi słowy, aproksymacją $S(f)$ jest $\varphi(y)$, gdzie y jest informacją o f. Błąd aproksymacji zdefiniownay jest jako róznica $\|S(f) - \varphi(y)\|$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą w przestrzeni G.

1.2. Model obliczeniowy

W ogólności, optymalność algorytmu oraz jego złożonść zależą od przyjętego modelu obliczeniowego. Model jest określony poprzez sposób w jaki błąd i koszt algorytmu są zdefiniowane. Jeżeli za błąd i koszt przyjmujemy wydajność na najtrudniejszym spośród wszystkich problemów w danej klasie, wtedy mówimy o *modelu najgorszego przypadku.* Innymi często rozważanymi modelami są: probablistyczny, średni, mieszany, losowy czy asymptotyczny, jednak nimi nie będziemy zajmować się w tej pracy.

Niech $N : R \to 2^Y$ będzie operatorem inforamcji. Poprzez *błąd najgorszego przypadku* algorytmu $\varphi : Y \to G$ na zbiorze $E \subset F$ rozumiemy:

$$e_p^{wor}(\phi, N, E) = \sup_{f \in E} \sup_{y \in N(f)} \|S(f) - \varphi(y)\|$$

Oznaczmy przez $\mathcal{N}(n, \delta)$ klasę wszystkich (adaptacyjnych) informacji N, które używają co najwyżej n ewaluacji funkcji, z precyzją δ każda. Wtedy przez *minimalany błąd najgorszego przykładu* w klasie E, który może zostać osiągnięty przez algorytm używający informacji o co najwyżej n wartościach funkcji z precyzją δ rozumiemy:

$$r_p^{wor}(n, \delta, E) = \inf\{e_p^{wor}(\varphi, N, E) : \ \varphi \ uzywa \ N \in \mathcal{N}(n, \delta)\}$$

W tej pracy porównujemy dwa algorytmy aprksymujęce funkcje z osobliwością, które osiągają to samo, optymalne organiczenie na minimalny błąd najgorszego przypadku, jednak tylko w przypadku jednego z nich w analizie zostało uwzgędione zaburzenie.

1.3. Klasy funkcji

Dla liczby całkowitej $r \geq 0$, $\varrho \in (0, 1]$ oraz $a < b$, przez $H_{r,\varrho}(a, b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ takich, że $g \in C^r([a, b])$ i $g^{(r)}$ jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem ϱ, tzn.

$$c(g) := \sup_{a \leq x \leq y \leq b} \frac{|g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)|}{|x - y|^\varrho} < \infty.$$

Dla danego $T > 0$ niech $F_{r,\varrho} = F_{r,\varrho}(T)$ będzie przestrzenią funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających następujące warunki: istnieje $s_f \in [0, T)$ i $g_f \in H_{r,\varrho}(0, T)$ takie, że

$$f(lT + s_f + x) = g_f(x) \quad \text{for all} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{i} \quad x \in [0, T)$$

Można powiedzieć, że f jest 'kopią' g_f na każdym z przedziałów $(lT+s_f, (l+1)T+s_f]$ i f jest prawostronnie ciągła na $lT+s_f$. W związku z tym wszystkie punkty, które różnią się między sobą o wielokrotność T będą uważane za identyczne. Dla przykładu, jeżeli $0 < x_1 \le T < x_2 \le 2T$, to przedział $(x_1, x_2]$ będzie utożsamiany z $(x_1, T] \cup (0, x_2 - T] \subset (0, T]$.

Przez $\Delta_f^{(j)}$ ozanaczmy *skoki nieciągłości* dla kolejnych pochdnych f w punkcie nieciągłości s_f,

$$\Delta_f^{(j)} = f^{(j)}(s_f^+) - f^{(j)}(s_f^-) = g_f^{(j)}(0) - g_f^{(j)}(T) \quad 0 \le j \le r,$$

W tej pracy będziemy rozpatrywać rózne aproksymacje $\varphi : Y \to L^p(0, T)$ funkcji $f \in F_{r,\varrho}$ względem normy L^p, gdzie $1 \le p \le \infty$. Czyli z definicji, błąd aproksymcji dla informacji y wynosi:

$$\|f - \varphi(y)\|_{L^p} = \left(\int_0^T |(f - \varphi(y))(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad \textit{dla } 1 \le p < \infty$$

oraz

$$\|f - \varphi(y)\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 < x \le T} |(f - \varphi(y))(x)|$$

Rozróżniamy następujące klasy $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{f = c\mathbb{1}_{\mathbb{R}}, c \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{H}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, \Delta_f^{(j)} = 0 \ for\ all\ 0 \le j \le r\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho}^C &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, \Delta_f^{(0)} = 0\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho}^D &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, |\Delta_f^{(0)}| \le 1\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1\}
\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_{r,\varrho} \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^C \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^D \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}$$

Rozdział 2

Ograniczenia z dołu

Poniższe ograniczenia dolne na $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F})$ są dość oczywiste albo mogą zostać wyprowadzone ze znanych rezultatów

Stwierdzenie 2.1. *Dla każdego n i $\delta \geq 0$ mamy:*

(i) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{K}) \geq \delta T^{1/p}$
(ii) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{H}_{r,\varrho}) \geq a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)}$ *dla pewnego* $a_{r,\varrho} > 0$
(iii) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}) = \infty, \quad r \geq 1$

Dowód. (...) □

Z stwierdzenia 2.1 *(i)-(ii)* otrzymujemy, że

$$r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) \geq r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) \geq \max(\delta T^{1/p}, a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)})$$

W dalszej części pracy udowodnimy, że te nierówności są ostre, z wyjątkiem pierwszej dla $p = \infty$. To jest główny wyniki artykułu [5], który możemy zapisać w poniższej postaci:

Twierdzenie 2.2.

1. $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)})) \quad$ *dla* $1 \leq p \leq \infty$
2. $r_\infty^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)}))$

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia skonstruujemy algorytm, który posiada żądane własności błędu. W tym celu przedstawimy dodatkowe rezultaty dotyczące błędu interpolacji/ekstrapolacji funkcji kawałkami holderowskich, bazujących na wartościach zaburzonych.

Rozdział 3

(Podstawowe definicje z artykułów [2] i [3])

3.1. info z tego rozdziału, zostanie przeniesione (potrzebna konsultacja)

Dla $r \geq 1$, $a < b$, przez $W_r(a,b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji r-gładkich, zdefiniowanych w następujący sposób:

$$W_r(a,b) = \left\{ f \in C^{r-1}([a,b]) \mid \quad f^{(r-1)} \text{ absolutnie ciągła, } \left\| f^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)} < \infty \right\}$$

Przez $F_r = F_r(0,T)$, dla $T > 0$, oznaczamy funkcje r-gładkie, ale posiadające jeden punkt osobliwy, tzn. takich funkcji f, że $f \in W_r(0,T)$ albo

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x), & 0 \leq x < s_f \\ f_+(x), & s_f \leq x \leq T \end{cases},$$

gdzie $f_-(x) \in W_r(0, s_f)$, $f_+(x) \in W_r(s_f, T)$, dla $s_f \in (0,T)$. Innumi słowy $f \in F_r$ wtw, gdy

$$f(x) = g(x) + \mathbb{1}_{[s_f,T]}(x) \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_f^{(j)} \frac{(x - s_f)^j}{j!}, \quad 0 \leq x \leq T$$

gdzie $g \in W_r(0,T)$ i $\Delta_f^{(j)}$ to skoki nieciągłości odpowiadającej pochodnej w punkcie s_f. Warto zauważyć, że $0 \leq a < b \leq T$ mamy $\left\| f^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)} = \left\| g^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)}$

W pracy [3] skupiamy się na klasie funkcji $G_r = G(0,T) \coloneqq F_r(0,T) \cap C([0,T])$. Stąd wynika, że $f \in G$ wtw, gdy $f \in F_r \wedge \Delta_f^{(0)} = 0$. Zakładamy też, że $r \geq 2$.

Rozdział 4

Algorytmy

4.1. Algorytm oparty o informację dokładną

Algorytm przedstawiony w pracy [4] lokalizuje osobliwość przy pomocy wielomianów Lagrange'a w_g^r. Na wejściu algorytm otrzymuje $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, przedział $[a,b]$, regularność r oraz współczynnik Höldera ϱ. Kluczowym elementem algorytmu jest zdefiniowana poniżej wielkość (*test*), która jest użyta do wykrycie punktu osobliwego.

$$A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) = \max_{0\le j\le r} \frac{\left\| w_g^r([\bar{b},b])\,(z_j) - w_g^r([a,\bar{a}])\,(z_j)\right\|}{\bar{h}^{r+e}}, \tag{4.1}$$

gdzie $a < \bar{a} < \bar{b} < b$, $z_j = \bar{a} + (\bar{b} - \bar{a})j/r$, dla $j = 0, 1, \ldots, r$ oraz $\bar{h} = b - a$ jest długością przedziału, na którym *test* jest zdefiniowany.

K1: Niech $\delta := h^{r+\varrho}$, $B := \emptyset$
jeżeli $\max\limits_{0 \leq i \leq p-1} (c_{i+1} - c_i) \leq 4\delta$ **wtedy**
idź do *Krok 3*
w p.p.
Niech, dla $j = 0, 1, \dots, p-1$,
$A = \max\{A_g(c_j, c_j + \delta, c_{j+1} - \delta, c_{j+1}) \mid c_{j+1} - c_j > 4\delta\}$
Niech $A_g^i = A_g(c_i, c_i + \delta, c_{i+1} - \delta, c_{i+1})$
jeżeli istnieją różne k i l takie, że $A = A^k \wedge A = A^l$ **wtedy**
idź do *Krok 3*

K2: Niech $[c_k, c_{k+1}]$ - przedział otrzymany w *Krok 1*
$B = BISECTION(g, [a, b], r, \varrho)$

K3: Niech $\bar{M} = \{c_0, \dots, c_p\} \cap B$

$$q(t) = \begin{cases} g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_{i+1}) \wedge c_{i+1} - c_i \leq 4\delta \\ g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_i + \delta) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta, \\ w_g^r([c_i + \delta, c_{i+1} - \delta])(t) & \text{gdy } t \in [c_i + \delta, c_{i+1} - \delta) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta \\ g(c_{i+1} - \delta) & \text{gdy } t \in [c_{i+1} - \delta, c_{i+1}) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, \dots, k-1$ z $q(b)$ = zdefiniowanym przez ciągłość na ostatnim przedziale
$B := B \cup \{c_i + \delta, c_{i+1} - \delta \mid c_{i+1} - c_i > 4\delta,\ i = 0, \dots, k-1\}$

4.2. Algorytm oparty o inforamcję zaburzoną

W tym rozdziale opiszemy algorytm bazujący na informacji zaburzonej przedstawiony w artykule [5]. Analizowany algorytm używa co najwyżej n wartości funkcji z precyzją δ oraz w najgorszym przypadku ma błąd proporcjonalny do $\max(\delta, n^{-1/r+\varrho})$ w klasie funkcji $\mathcal{F}_{r,\varrho}^D$ dla $p < \infty$ oraz w klasie $\mathcal{F}_{r,\varrho}^C$ dla $p \leq \infty$. Kluczowym parametrem algorytmu jest

$$h = T/m \quad with \quad m \geq 2r + 1,$$

gdzie m jest początkową gęstością siatki. Dodatkowo, niech $\omega = \omega(h)$ spełnia $0 < \omega < (r+1)h$.

Na początku algorytm aproksymuje punkt osobliwy s_f. Jest to realizowane w trzech krokach. W kroku 1. przy pomocy siatki rozmiarze o długości h i różnic dzielonych lokalizowany jest punkt s_f na przedziale $[u_1, v_1]$ o długości $(r+1)h$. W kroku 2. używamy wielomianów interpolujących $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ do zwężenia tego przedziału do $[u_2, v_2]$. Krok 3. produkuje przedział $[u_3, v_3] \subseteq [u_2, v_2]$, w którym różnica $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ jest nierosnąca na $[u_3, \xi]$ i niemalejąca na $[\xi, v_3]$, gdzie ξ jest finalną aproksymacją s_f.

Powyższe kroki mogą być zapisane następująco; dla $t_i = ih\ \forall i$.

Krok 1 Oblicz różnice dzielone $\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \ldots, t_{i+r+1}]$ for $1 \le i \le m$ oraz znajdź

$$i^* = arg \max_{1 \le i \le m} |\tilde{d}_i|$$

Niech $u_1 = t_{i^*}$ i $v_1 = t_{i^*+r+1}$.

Krok 2 Oznaczymy przez $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ wielomiany stopnia $\le r$, które interpolują węzły $(t_j, \tilde{f}(t_j))$ odpowiednio dla $i^* - r \le j \le i^*$ oraz dla $i^* + r + 1 \le j \le i^* + 2r + 1$. Następnie wykonaj iterację:

$u := u_1$, $v := v_1$
dopóki $v - u > \omega$ **wykonuj**:
  $z_j := u + j(v-u)/(r+2), \qquad j = 1, 2, \ldots, r+1$
  $j^* := arg \max_{1 \le j \le r+1} |\tilde{p}_+(z_j) - \tilde{p}_-(z_j)|$
  jeżeli $|\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_-(z_j)| \le |\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_+(z_j)|$ **wtedy**
    $u := z_{j^*}$
  w p.p.
    $v := z_{j^*}$
koniec
Niech $u_2 = u$ i $v_2 = v$.

Krok 3 Wykonaj iterację:

$u := u_2$, $v := v_2$
dopóki istnieje maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v) **wykonuj**
  $z :=$ największe maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v)
  jeżeli $|\tilde{f}(z) - \tilde{p}_-(z)| \le |\tilde{f}(z) - \tilde{p}_+(z)|$ **wtedy**
    $u := z$
  w p.p.
    $v := z$
koniec
Niech $u_3 = u$ i $v_3 = v$.

Finalną aproksymacją s_f jest

$$\xi := arg \max_{u_3 \le x \le v_3} |\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$$

Rozdział 5

Analiza algorytmów

5.1. Analiza algorytmu opartego o informację dokładną

Twierdzenie 5.1. *Niech $r + \varrho \geq 1$. Istnieją stałe C i m_0 takie, że dla $m > m_0$, przedziału $[a, b]$ oraz wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$ z $\delta_g^0 = 0$ zachodzi:*

$$\sup_{t\in[a,b]} \|g(t) - q(t)\| \leq Cm^{-(r+\varrho)}$$

Dodatkowo, obliczenie q wymaga $O(p + \log m)$ ewaluacji fun g, gdzie p jest liczbą przedziałów w początkowym podziale M przedziału $[a, b]$. Czyli, aby otrzymać optymalną aproksymację $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$ na przedziale $[a, b]$, wystarcza wiąźć podział M z $m + 1$ równoodległymi punktami $x_i = a + (b - a)i/m$, dla $i = 0, 1, \ldots, m$. wtedy obliczenie q wymaga $O(m)$ ewaluacji funkcji g.

Zacznijmy od wyjaśnienia własności testu 4.1 służącego do wykrywania osobliwości. Rozważmy błąd interpolacji Lagrange'a dla nieciągłej funkcji $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$. Błąd jest ograniczony za względu na wielomian s^g (TODO: reference).

Lemat 5.2. *Istnieje stała C taka, że dla wszystkich $[a, b]$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$ oraz $s = 0, 1, \ldots, r$, mamy*

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\|g(t) - w_g^s([a, b])(t)\right\| \leq C \left(\min \left\{ \sup_{t\in[a,\hat{t}_g)} \|s_g(t)\|, \sup_{t\in[\hat{t}_g,b]} \|s_g(t)\| \right\} + \bar{h}^{\min\{s+1,r+\varrho\}} \right)$$

Dowód. (...) $\square$

Wniosek 5.3. *Istnieje stała C taka, że dla wszystkich $[a, b]$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$ z $\delta_g^0 = 0$, $0 \leq \delta \leq \min 1, \bar{h}$ oraz $s = 0, 1, \ldots, r$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (a, a + \delta] \cup [b - \delta, b) \Longrightarrow \sup_{t\in[a,b]} \left\|g(t) - w_g^s([a, b])(t)\right\| \leq C \left(\delta + \bar{h}^{\min\{s+1,r+\varrho\}}\right)$$

Dowód. (...) □

Lemat 5.4. *Istnieje stała C zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $[a,b]$, $\bar{a} \in (a,b)$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (\bar{a}, b) \Longrightarrow g(t) - w_g^r([a,\bar{a}])(t) = s_g(t)\mathbb{1}_{[\hat{t}_g,b]}(t) + R_g(t), \quad t \in [\bar{a}, b],$$

gdzie $\|R_g(t)\| \le C\bar{h}^{r+\varrho}$, dla $t \in [\bar{a}, b]$

Dowód. (...) □

Wniosek 5.5. *Istnieje stała $\bar{C}$ zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $[a,b]$, $\bar{a} \in (a,b)$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (a, \bar{a}) \Longrightarrow g(t) - w_g^r([\bar{a},a])(t) = s_g(t)\mathbb{1}_{[a,\hat{t}_g]}(t) + R_g(t), \quad t \in [a, \bar{a}],$$

gdzie $\|R_g(t)\| \le \bar{C}\bar{h}^{r+\varrho}$, dla $t \in [a, \bar{a}]$

Dowód. (...) □

Stwierdzenie 5.6. *Istnieje stała C^* zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ i $[a,b]$ oraz wszystich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \text{ z niezerowym wielomianem } s_g \text{ nie jest w } (a,b) \Longrightarrow A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \le C^*$$

Dowód. (...) □

Uwaga 5.7. *Stwierdzenie 5.6 pokazuje, że procedura LOCATE-APPROXIMATE wraz z zprocedurą BISECTION, sukcesywnie wybiera przedziały bazując a wartościach testu. Zauważmy, że jeżeli $\hat{t}_g$ jest unikalna, to wtedy dla jakiegokolwiek przedziału $[a,b]$, który nie został wybrany, mamy $A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \le C^*$*

Stwierdzenie 5.8. *Niech $D > 0$. Istnieją stałe C i $\bar{N}$, zależne tylko od parametrów klast $G^{r,\varrho}([a,b])$ i D, takie, że dla wszystkich $[a,b]$, $[\bar{a},\bar{b}] \subset (a,b)$, $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ oraz $s = 0,1,\dots,r$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (\bar{a},\bar{b}] \wedge b - a \le D(\bar{b} - \bar{a}) \Longrightarrow \text{dla } [\gamma,\omega] = [a,b] \vee [\gamma,\omega] = [\bar{a},\bar{b}] \text{ zachodzi}$$

$$\sup_{t\in[\gamma,\omega]} \left\|g(t) - w_g^s([\gamma,\omega])(t)\right\| \le C\left(1 + A_g(a,\bar{a},\bar{b},b)\right)\bar{h}^{\min\{s+1,r+\varrho\}}$$

oraz ponadto

$$\sup_{t\in[\gamma,\omega]} \left\|\left(w_g^s([\gamma,\omega])\right)^{(j)}(t)\right\| \le \bar{N}\left(1 + \bar{h}^{\min\{s+1-j,r+\rho-j\}} + \left(1 + A_g(a,\bar{a},\bar{b},b)\right)\bar{h}^{r+\varphi-j}\right)$$

dla $j = 0,1,\dots,s$.

Dowód. (...) □

Uwaga 5.9. *Stwierdzenie 5.8 pokazuje, że w przypadku z osobliwością, ograniczenie górne na błąd interpolacji możemy wyrazić za pomocą $A_g(a,\bar{a},\bar{b},b)$*

Poniższy lemat dotyczy przypadku, gdy osobliwość znajduje się na brzegu przdziału $[a, b]$
(lemat... dowod...)
(Dowód tw1 z 2014)

Uwaga 5.10. *Twierdzenie 5.1 zachodzi również dla funkcji g, która ma skok w punkcie c_i początkowego podziału M oraz ma niezerowy wielomian s_g dla co najwyżej jednego nieznanego punktu t_g, $t_g \neq c_i\ \forall_i$.*

5.2. Analiza algorytmu opartego o informację zaburzoną

Niech $m \geq 2r+1$, $h + \frac{T}{m}$ oraz $t_i = ih$ dla każdego i. Przez d_i oznaczmy różnicę dzieloną stopnia $r+1$ bazującą na wartościach $f(t_i)$:

$$d_i = f[t_i, \ldots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{k=1 \wedge k\neq j}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

Następnie oznaczmy przez $\tilde{d}_i$ (niedokładną) różnicę dzieloną stopnia $r+1$ bazującą na wartościach $y_j = F(t_j) + e_j$, gdzie $|e_j| \leq \delta$

$$\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \ldots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

Lemat 5.11. *Jeżeli $f \in H_{r,\varrho}(t_i, t_{i+r+1})$, wtedy*

$$|\tilde{d}_i| \leq \frac{c(g_f)(r+1)^{\varrho}}{(r+1)!} h^{\varrho-1} + \delta \frac{2^{r+1}}{(r+1)!} h^{-(r+1)}$$

Dowód. Korzystając z nierówności trójkąta $|\tilde{d}_i| \leq |d_i| + |\tilde{d}_i - d_i|$ możemy oszacować pierwszy człon:

$$\begin{aligned} |d_i| &= \frac{|f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+r}]|}{x_{i+r+1} - x_i} = \frac{1}{r!} \frac{\left|f^{(r)}(\xi_1) - f^{(r)}(\xi_2)\right|}{x_{i+r+1} - x_i} \\ &\leq \frac{c(g_f)}{r!} \frac{|\xi_1 - \xi_2|^{\varrho}}{x_{i+r+1} - x_i} \leq \frac{c(g_f)}{r!} (x_{i+r+1} - x_i)^{\varrho-1} \leq \frac{c(g_f)(r+1)^{\varrho}}{(r+1)!} h^{\varrho-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

oraz drugi człon:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{d}_i - d_i\right| &= h^{-(r+1)} \left| \sum_{i=0}^{r+1} e_i \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq i}}^{r+1} (\ell - j)^{-1} \right| \\ &\leq \delta h^{-(r+1)} \sum_{i=0}^{r+1} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq i}}^{r+1} |\ell - j|^{-1} = \delta \frac{2^{r+1}}{(r+1)!} h^{-(r+1)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

co dowodzi lemta. □

Teraz oszacujemy błąd interpolacji i ekstrapolacji w obecności zaburzenia wartości funkcji. Niech p_i i $\tilde{p}_i$ odpowiadają wielomianom stopnia co najwyżej r interpolujących f opartych na dokładnych i niedokładnych wartościach funkcji f w punktach $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}$. Dla $r \geq 1$, wprowadźmy oznaczenia:

$$\beta_r = \max_{0\leq t\leq r}\left|\prod_{k=0}^{r}(t-k)\right|, \quad \Lambda_r = \max_{0\leq t\leq r}\sum_{k=0}^{r}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{r}\left|\frac{t-l}{k-l}\right| \quad \tilde{\Lambda}_r = \sum_{k=0}^{r}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{r}\left|\frac{2r+1-l}{k-l}\right|$$

Lemat 5.12. *Niech $f \in H_{0,\varrho}$, wtedy:*
dla $x \in [t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_1(x)| \leq C_{0,\varrho}(f)h^{\varrho} + \delta, \quad C_{0,\varrho}(f) = c(g_f)2^{-\varrho}$$

dla $x \in [t_{i-1}, t_{i-\frac{1}{2}}) \cup (t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{0,\varrho}(f)h^{\varrho} + \delta, \quad \overline{C}_{0,\varrho}(f) = c(g_f)$$

Niech $f \in H_{r,\varrho}$ i $r \geq 1$, wtedy:
dla $x \in [t_i, t_{i+r}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq C_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r, \quad C_{r,\varrho}(f) = c(g_f)2^{-\varrho}$$

dla $x \in [t_{i-r-1}, t_i) \cup (t_{i+r}, t_{i+2r+1}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\overline{\Lambda}_r, \overline{C}_{r,\varrho}(f) = c(g_f)\frac{(2r+1)!(2r+1)^{\varrho}}{r(r!)^2}$$

Dowód. Przypadek dla $r = 0$ jest oczywisty. Niech $r \geq 1$, korzystając z nierówności trójkąta:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq |f(x) - p_i(x)| + |\tilde{p}_i(x) - p_i(x)|$$

Jeżeli $x \in [t_i, t_{i+r}]$, wtedy dla pierwszego członu powyższej sumy mamy:

$$\begin{aligned}|f(x) - p_i(x)| &= |(x-t_i)\cdots(x-t_{i+r})\, f\,[t_i,\ldots,t_{i+r},x]| \\ &\leq \beta_r h^{r+1}\frac{|f\,[t_{i+1},\ldots,t_{i+r},x] - f\,[t_i,\ldots,t_{i+r-1},x]|}{t_{i+r}-t_i} \\ &\leq \beta_r h^{r+1}\frac{c\,(g_f)}{r^{1-\varrho}r!}h^{\varrho-1} = C_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho}\end{aligned}$$

a dla drugiego człony mamy:

$$|\tilde{p}_i(x) - p_i(x)| = \left|\sum_{k=i}^{i+r} e_k \prod_{\substack{\ell=i\\ \ell\neq k}}^{i+r}\frac{x-t_\ell}{t_k-t_\ell}\right| \leq \delta\Lambda_r \tag{5.3}$$

Przypadek dla $x \in [t_{i-r-1}, t_i) \cup (t_{i+r}, t_{i+2r+1}]$ jest analogiczny. □

Lemat 5.13. *Niech $f \in F_{r,\varrho}$ oraz*

$$s_f \in \begin{cases} (t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}], \text{ gdy } r = 0 \\ (t_i, t_{i-r}], \text{ gdy } r \geq 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że

$$|\tilde{d}_k| \leq Bh^{\varrho-1} \,\forall_k. \tag{5.4}$$

Wtedy dla każdego $x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, gdy $r = 0$ lub dla każdego $x \in [t_{i-r-1}, t_{i+2r+1}]$, gdy $r \geq 1$, mamy:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq D_r(B, f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r,$$

gdzie $D_0(B, f) = c(g_f) + B$ i

$$D_r(B, f) = c\left(g_f\right) \frac{\beta_r(r+1)^\varrho}{rr!} + B\left(2^{r+1} - 1\right) \frac{(2r)!}{(r-1)!} \quad \text{for } r \geq 1.$$

Dowód. Przypadki, gdy $s_f \leq x$ i $s_f > x$ są analogiczne. Weźmy $s_f \leq x$. Jeżeli $r = 0$, wtedy

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{p}_i| &\leq |f(x) - p_{i+1}| + |p_{i+1} - \tilde{p}_{i+1}| + |\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i| \\ &\leq c\left(g_f\right) h^\varrho + \delta + Bh^\varrho = \left(c\left(g_f\right) + B\right) h^\varrho + \delta \end{aligned}$$

Pokazaliśmy pierwszą część lematu. Załóżmy, że $r \geq 1$ i $s_f \leq x < t_{i+r}$. Wybierzmy najmniejszy indeks j taki, że $s_f \leq t_j$. Oczywiście $i+1 \leq j \leq i+r$ oraz $x \in [t_{j-1}, t_{j+r}]$. Otrzymujemy

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq |f(x) - p_j(x)| + |p_j(x) - \tilde{p}_j(x)| + |\tilde{p}_j(x) - \tilde{p}_i(x)| \tag{5.5}$$

A ponieważ $s_f \notin (t_j, t_{j+r}]$, to

$$|f(x) - p_j(x)| \leq c\left(g_f\right) \beta_r h^{r+1} \frac{1}{r!} \frac{\left(t_{j+r} - t_{j-1}\right)^\varrho}{t_{j+r} - t_j} = C_{r,\varrho}(f) \left(1 + \frac{1}{r}\right)^\varrho h^{r+\varrho}$$

Tak jak w równaniu 5.3, mamy

$$|p_j(x) - \tilde{p}_j(x)| \leq \delta\Lambda_r$$

Możemy tearz oszacować pozostały człon $|\tilde{p}_j(x) - \tilde{p}_i(x)|$. Dla $i + r + 1 \leq k \leq j + r$, mamy

$$\left(\tilde{f} - \tilde{p}_i\right)[t_i, \ldots, t_{i+r}, t_k] = \frac{y_k - \tilde{p}_i\left(t_k\right)}{(k-i)(k-i-1)\cdots(k-i-r)h^{r+1}} \tag{5.6}$$

oraz

$$\left|\left(\tilde{f} - \tilde{p}_i\right)[t_i, \ldots, t_{i+r}, t_k]\right| = \left|\tilde{f}\left[t_i, \ldots, t_{i+r}, t_k\right]\right| \leq \max_{i \leq \ell \leq k-r-1} \left|\tilde{d}_\ell\right| \leq Bh^{Q-1} \tag{5.7}$$

gdzie pierwsza nie równość wynika z [3](Lemat 1), natomiast druga z 5.4. Biorąc 5.6 oraz 5.7, otrzymujemy:

$$|y_k - \tilde{p}_i\left(t_k\right)| \leq \frac{(2r)!}{(r-1)!} Bh^{r+\varrho} \tag{5.8}$$

Także ostatni człon nierówności 5.5 możemy oszacować następująco

$$
\begin{aligned}
|\tilde{p}_j(x) - \tilde{p}_i(x)| &= \left| \sum_{k=j}^{j+r} \left(\tilde{p}_j\left(t_k\right) - \tilde{p}_i\left(t_k\right)\right) \prod_{\substack{\ell=j \\ \ell\neq k}}^{j+r} \frac{x - t_\ell}{t_k - t_\ell} \right| \\
&\leq \left(\max_{j \leq k \leq j+r} |y_k - \tilde{p}_i\left(t_k\right)| \right) \left(\max_{0 \leq t \leq r+1} \sum_{k=0}^{r} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq k}}^{r} \left| \frac{t-\ell}{k-\ell} \right| \right)
\end{aligned}
$$

Pierwsze maksimum z powyższego równania jest oszacowane poprzez 5.8. Natomiast drugie maksimum jest osiągane dla $t = r + 1$ i jest równe

$$
\sum_{k=0}^{r} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq k}}^{r} \left| \frac{r+1-\ell}{k-\ell} \right| = \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} = 2^{r+1} - 1
$$

Stąd

$$
|\tilde{p}_j(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \frac{(2r)!}{(r-1)!} \left(2^{r+1} - 1\right) B h^{r+\varrho}
$$

□

Przedstawiony algorytm używa m wartości funkcji w kroku 1 oraz jedyną wartość funkcji w każdej iteracji w krokach 2 i 3. Czyli w kroku 2 używamy co najwyżej

$$
\left\lceil \frac{\ln\left(\frac{(r+1)h}{\omega(h)}\right)}{\ln\left(\frac{r+2}{r+1}\right)} \right\rceil
$$

wartości funkcji i $(r-1)$ w kroku 3. Stąd otrzymujemy, że jeżezli $\omega = \omega(h) \geq kh^\alpha$ dla pewngo ustalonego k i α, wtedy w najgoryszym przypadku liczba użytych wartości funkcji równa sie asymptotycznie $m = \frac{T}{h}$ dla $h \to 0^+$.

(punktowa analiza błędu...)

Podsumowując analizę błędu dla każdego punktu otrzymujemy, że gdy $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ wtedy:

$$
\begin{cases}
|f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} & \text{dla } x \notin (u_2, v_2] \\
|f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} + |\Delta_f^{(0)}| & \text{dla } x \in (u_2, v_2]
\end{cases}
$$

gdzie $v_2 - u_2 \leq \omega$

Mamy również, że liczba ewaluacji funkcji n jest proporcjonalna do h^{-1}, tak więc $h^{r+\varrho}$ jest proporcjonalne do $n^{-(r+\varrho)}$. Z tego wynika poniższe stwierdzenia:

Stwierdzenie 5.14. *Niech $1 \leq p \leq \infty$. Jeżeli $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ oraz $\omega(h) = h^{(r+\varrho)p+1}$, wtedy*

$$
e_{\mathrm{p}}^{wor}\left(\varphi_h^*, N_h^*; \mathcal{F}_{r,\varrho}^D\right) = \mathcal{O}\left(n^{-(r+\varrho)}\right)
$$

Warto wspomnieć, że powyższe ograniczenia górne nie może zostać spełnione przez algorytmy nieadaptacyjne, co zostało pokazane w [2]. Pokazano tam również, że dla

$p = \infty$ nie istnieje algorytm z błędem zbiegającym do zera, dlatego założenia $p < \infty$ jest niezbędne. Dodatkowo, gdy rozważymy klasę $\mathcal{F}^C_{r,\varrho} \subset \mathcal{F}^D_{r,\varrho}$, to możemy uprościć algorytm biorąc $\omega(h) = (r+1)h$ i unikając iteracji w kroku 2. Otrzymujemy w ten sposób algorytm, który dla $r = 0, 1$ jest nieadaptacyjny, a dla $r \geq 2$ używa co najwyżej $r - 1$ dodatkowych punktów, niezależnie od tego jak małe jest h. Co więcej, organiczenie górne zachodzi dla $p = \infty$ Stosując powyższą modyfikację możemy sformułować następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.15. *Jeżeli $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ i $\omega(h) = (r+1)h$, wtedy:*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{wor}}_{\infty}\left(\varphi^*_h, N^*_h; \mathcal{F}^C_{r,\varrho}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-(r+\varrho)}\right). \tag{5.9}$$

Ponownie, dla $r \geq 2$ użycie informacji adaptacyjnej jest konieczne. Łącząc wyniki 5.14, 5.15 i 2.1(i) otrzymujemy 2.2. Faktycznie, dla ustalonego δ i n możemy wybrać $h = \frac{T}{m}$ takie, że

$$m = m(n, \delta) = \left\lfloor \min\left(\beta n, \frac{1}{T}\left(\frac{b}{\delta}\right)^{\frac{1}{r+\varrho}}\right)\right\rfloor = \Theta\left(\min\left(n, \delta^{-1/(r+\varrho)}\right)\right), \tag{5.10}$$

Uwaga 5.16. *Zauważmy, że dla ustalonej precyzji δ nie ma sensu brać m większego niż $m_{max} = \Theta(\delta^{-1/(r+\varrho)})$ wartości funkcji, ponieważ dla $m = m_{max}$ osiągamy maksymalną dokładność dla danego δ.*

Rozdział 6

Testy numeryczne

porównanie algorytmów

Bibliografia

[1] F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, N. Dyn, *Interpolation and approximation of piecewise smooth functions*, SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 41–57

[2] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, Y. Zhao, *The power of adaption for approximating functions with singularities*, Mathematics Of Computation 77 2008, p. 2309–2338

[3] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, *Uniform approximation of piecewise r-smooth and globally continuous functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 47, No. 1 (2008/2009)

[4] B. Kacewicz, P. Przybyłowicz, *Complexity of the derivative-free solution of systems of IVPs with unknown singularity hypersurface*, Journal of Complexity

[5] P. M. Morkisz, L. Plaskota, *Approximation of piecewise Hölder functions from inexact information*, Journal of Complexity

[6] J. F. Traub, H. Woźniakowski, G. W. Wasilkowski *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988