Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Aproksymacja funkcji kawałkami regularnych przy użyciu informacji dokładnej i niedokładnej

Tomasz Czyż

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka obliczeniowa i komputerowa

Nr albumu: 290565

Promotor
dr Maciej Goćwin

Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2019

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

. . . .
(Podpis czytelny studenta)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

. . . .
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie

Streszczenie

Słowa kluczowe

słowa kluczowe

Abstract

Abstract

Key words

keywords

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest analiza zachowania różnych algorytmów aproksymujących funkcje kawałkami gładkie przy użyciu informacji dokładniej i niedokładniej. Pierwszy z analizowanych algorytmów został przedstawiony w pracy [2]. Rozważane są w niej funkcje klasy F_r^∞, o których zakładamy, że zarówno sama funkcja $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ może być nieciągła, jak i jej pochodna, począwszy od rzędu możliwe większego od pierwszego. Czyli, dla przykładu, f może być dwa razy różniczkowalna na $[0,T]$ i $f^{(3)}(s)$ może nie istnieć w jakimś punkcie s. Ponadto, f może mieć skończenie wiele punktów osobliwych; ich ilość i położenie jest nieznane. Dodatkowo, algorytm przedstawiony w [2] używa n wartości funkcji w punktach $x_1, \ldots x_n$ jako jedyne dostępne informacje o funkcji f, a w przypadku algorytmu adaptacyjnego dopuszczamy, że wybór x_j zależy od $f(x_1), \ldots, f(x_{j-1})$. W wymienionej pracy do znalezienia optymalnego algorytmu nieadaptacyjnego i adaptacyjnego w najgorszym przypadku oraz w przypadku asymptotycznym do mierzenia błędu stosowana jest m.in. norma $L^p(1 \leq p < \infty)$.

W artykule [3] rozszerzony jest wynik prac [1] i [2] poprzez skupienie się na klasie funkcji ciągłych globalnie r-regularnych z co najwyżej jednym punktem osobliwym. W podanej pracy przedstawiony jest algorytm nieadaptacyjny, który asymptotycznie poprawia ograniczenie błędu z [5].

Ostatni z analizowanych algorytmów pochodzi z pracy [5] i jako jedyny z przedstawionych algorytmów uwzględnia zaburzenie danych. W artykule uogólnione zostają rezultaty z [2] i [3] poprzez wprowadzanie informacji niedokładniej oraz założenie, że wykładnik Höldera $\varrho \in (0, 1]$. (...) Z tego powodu w pracy [5] przedstawiony został nowy algorytm do lokalizacji osobliwości. Co więcej dla $\varrho = 0$, co odpowiada informacji dokładniej, przedstawiony algorytm jest nawet prostszy niż te z [2] i [3].

Rozdział 1

Definicje

Dla liczby całkowitej $r \geq 0$, $\varrho \in (0,1]$ oraz $a < b$, przez $H_{r,\varrho}(a,b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ takich, że $g \in C^r([a,b])$ i $g^{(r)}$ jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem ϱ, tzn.

$$c(g) := \sup_{a \leq x \leq y \leq b} \frac{|g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)|}{|x-y|^{\varrho}} < \infty.$$

Dla danego $T > 0$ niech $F_{r,\varrho} = F_{r,\varrho}(T)$ będzie przestrzenią funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających następujące warunki: istnieje $s_f \in [0,T)$ i $g_f \in H_{r,\varrho}(0,T)$ takie, że

$$f(lT + s_f + x) = g_f(x) \quad \text{for all} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{i} \quad x \in [0,T)$$

Można powiedzieć, że f jest 'kopią' g_f na każdym z przedziałów $(lT+s_f, (l+1)T+s_f]$ i f jest prawostronnie ciągła na $lT+s_f$. W związku z tym wszystkie punkty, które różnią się między sobą o wielokrotność T będą uważane za identyczne. Dla przykładu, jeżeli $0 < x_1 \leq T < x_2 \leq 2T$, to przedział $(x_1, x_2]$ będzie utożsamiany z $(x_1, T] \cup (0, x_2 - T] \subset (0,T]$.

Przez $\Delta_f^{(j)}$ ozanaczmy *skoki nieciągłości* dla kolejnych pochdnych f w punkcie nieciągłości s_f,

$$\Delta_f^{(j)} = f^{(j)}(s_f^+) - f^{(j)}(s_f^-) = g_f^{(j)}(0) - g_f^{(j)}(T) \quad 0 \leq j \leq r,$$

Z względu na sposób wyboru punktów x_j, $1 \leq j \leq n$, rozróżniamy *informacje nieadaptacyjną*, gdy punkty wybierane są niezależnie od f oraz *informacje adaptacyjną*, gdy wybór x_j zależy od poprzednio otrzymanych wartości f. W przypadku informacji adaptacyjnej x_1 jest ustalone natomiast

$$x_j = x_j(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}) \quad j \geq 2.$$

Przez *informację* rozumiemy znane wartości aproksymowanej funkcji, Informację będziemy utożsamiać z wielowartościowym operatorem N. W przypadku, gdy $f \in F_{r,\varrho}$ przez $N(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich możliwych informacji o funkcji f

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Wtedy $N\colon F_{r,\varrho} \longrightarrow Y$, gdzie Y jest *zasięgiem* N, to znaczy $Y = \bigcup\limits_{f \in F_{r,\varrho}} N(f)$

W tej pracy będziemy rozpatrywać aproksymacje funkcji $f \in F_{r,\varrho}$ względem normy L^p, gdzie $1 \le p \le \infty$.

Dla inforamcji y oraz funkcji f i jej aproksymacji $\phi(y)$, gdzie $\phi : Y \longmapsto L^p(0,T)$ błąd aproksymacji wynosi

$$\|f - \phi(y)\|_{L^p} = \left(\int_0^T |(f - \phi(y))(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad if\ 1 \le p < \infty$$

oraz

$$\|f - \phi(y)\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<x\le T} |(f - \phi(y))(x)|$$

Najgorszy przypadek błędu definiujemy jako

$$e_p^{wor}(\phi, N, \mathcal{F}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{y \in N(f)} \|f - \phi(y)\|_{L^p}$$

Rozróżniamy następujące klasy $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{f = c\mathbb{1}_{\mathbb{R}}, c \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{H}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, \Delta_f^{(j)} = 0\ for\ all\ 0 \le j \le r\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho}^C &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, \Delta_f^{(0)} = 0\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho}^D &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1, |\Delta_f^{(0)}| \le 1\} \\
\mathcal{F}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \le 1\}
\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_{r,\varrho} \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^C \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^D \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}$$

Zauważmy, że zapis $y \in N(f)$ to formalny sposób powiedzenia, że y jest informacją o f. Dla przykładu, dla informacji nieadaptacyjnej składającej się z zaburzonych ewaluacji funkcji f w punktach $x_1, \ldots, x_n$ z precyzją δ, mamy:

$$N(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad |y_i - f(x_i| \le \delta, \quad 1 \le i \le n\}$$

Gdy $\delta = 0$, wtedy $N(f)$ jest singletonem a informacja jest dokładna.

Oznaczmy przez $\mathcal{N}(n, \delta)$ klasę wszystkich (adaptacyjnych) informacji N, które używają co najwyżej n ewaluacji funkcji, z precyzją δ każda. Wtedy przez *minimalany błąd najgorszego przykładu* w klasie $\mathcal{F}$, który może zostać osiągnięty przez algorytm używający informacji o co najwyżej n wartościach funkcji z precyzją δ rozumiemy:

$$r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}) = \inf\{e_p^{wor}(\varphi, N, \mathcal{F}) : \ \varphi\ uzywa\ N \in \mathcal{N}(n, \delta)\}$$

Poniższe ograniczenia dolne na $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F})$ są dość oczywiste albo mogą zostać wyprowadzone ze znanych rezultatów

Stwierdzenie 1.1. *Dla każdego n i $\delta \geq 0$ mamy:*

(i) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{K}) \leq \delta T^{1/p}$
(ii) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{H}_{r,\varrho}) \leq a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)}$ *dla pewnego* $a_{r,\varrho} > 0$
(iii) $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}) = \infty, \quad r \geq 1$

Dowód. (...) □

Z stwierdzenia 1.1 *(i)-(ii)* otrzymujemy, że

$$r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) \geq r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) \geq \max(\delta T^{1/p}, a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)})$$

W dalszej części pracy udowodnimy, że te nierówności są ostre, z wyjątkiem pierwszej dla $p = \infty$. To jest główny wyniki artykułu [5], który możemy zapisać w poniższej postaci:

Twierdzenie 1.2.

1. $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)})) \quad$ *dla* $1 \leq p \leq \infty$
2. $r_\infty^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)}))$

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia skonstruujemy algorytm, który posiada żądane własności błędu. W tym celu przedstawimy dodatkowe rezultaty dotyczące błędu interpolacji/ekstrapolacji funkcji kawałkami holderowskich, bazujących na wartościach zaburzonych.

1.1. Rezultaty pomocnicze

Niech $m \geq 2r + 1$, $h + \frac{T}{m}$ oraz $t_i = ih$ dla każdego i. Przez d_i oznaczmy różnicę dzieloną stopnia $r + 1$ bazującą na wartościach $f(t_i)$:

$$d_i = f[t_i, \dots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{k=1 \land k \neq j}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

Następnie oznaczmy przez $\tilde{d}_i$ (niedokładną) różnicę dzieloną stopnia $r+1$ bazującą na wartościach $y_j = F(t_j) + e_j$, gdzie $|e_j| \leq \delta$

$$\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \dots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

Lemat 1.3. *Jeżeli $f \in H_{r,\varrho}(t_i, t_{i+r+1})$, wtedy*

$$|\tilde{d}_i| \leq \frac{c(g_f)(r+1)^\varrho}{(r+1)!} h^{\varrho - 1} + \delta \frac{2^{r+1}}{(r+1)!} h^{-(r+1)}$$

Dowód. (...) □

Teraz oszacujemy błąd interpolacji i ekstrapolacji w obecności zaburzenia wartości funkcji. Niech p_i i $\tilde{p}_i$ odpowiadają wielomianom stopnia co najwyżej r interpolujących f opartych na dokładnych i niedokładnych wartościach funkcji f w punktach $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}$. Dla $r \geq 1$, wprowadźmy oznaczenia:

$$\beta_r = \max_{0\leq t\leq r} |\prod_{k=0}^{r}(t-k)|, \quad \Lambda_r = \max_{0\leq t\leq r} \sum_{k=0}^{r}\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{r}\left|\frac{t-l}{k-l}\right| \quad \tilde{\Lambda}_r = \sum_{k=0}^{r}\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{r}\left|\frac{2r+1-l}{k-l}\right|$$

Lemat 1.4. *Niech $f \in H_{0,\varrho}$, wtedy:*
dla $x \in [t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_1(x)| \leq C_{0,\varrho}(f)h^{\varrho} + \delta, \quad C_{0,\varrho}(f) = c(g_f)2^{-\varrho}$$

dla $x \in [t_{i-1}, t_{i-\frac{1}{2}}) \cup (t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{0,\varrho}(f)h^{\varrho} + \delta, \quad \overline{C}_{0,\varrho}(f) = c(g_f)$$

Niech $f \in H_{r,\varrho}$ i $r \geq 1$, wtedy:
dla $x \in [t_i, t_{i+r}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq C_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r, \quad C_{r,\varrho}(f) = c(g_f)2^{-\varrho}$$

dla $x \in [t_{i-r-1}, t_i) \cup (t_{i+r}, t_{i+2r+1}]$:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\overline{\Lambda}_r, \overline{C}_{r,\varrho}(f) = c(g_f)\frac{(2r+1)!(2r+1)^{\varrho}}{r(r!)^2}$$

Dowód. (...) □

Lemat 1.5. *Niech $f \in F_{r,\varrho}$ oraz*

$$s_f \in \begin{cases} (t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}], \ gdy\ r = 0 \\ (t_i, t_{i-r}], \ gdy\ r \geq 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że $|\tilde{d}_k| \leq Bh^{\varrho-1}\forall_k$. Wtedy dla każdego $x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$, gdy $r = 0$ lub dla każdego $x \in [t_{i-r-1}, t_{i+2r+1}]$, gdy $r \geq 1$, mamy:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq D_r(B, f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r,$$

gdzie $D_0(B, f) = c(g_f) + B$ i

$$D_r(B, f) = c\left(g_f\right)\frac{\beta_r(r+1)^{\varrho}}{rr!} + B\left(2^{r+1} - 1\right)\frac{(2r)!}{(r-1)!} \quad for\ r \geq 1.$$

Dowód. (...) □

1.1.1. (Podstawowe definicje z artykułów [2] i [3])

Dla $r \geq 1$, $a < b$, przez $W_r(a,b)$ oznaczamy przestrzeń funkcji r-gładkich, zdefiniowanych w następujący sposób:

$$W_r(a,b) = \left\{ f \in C^{r-1}([a,b]) \mid \quad f^{(r-1)} \text{ absolutnie ciągła, } \left\| f^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)} < \infty \right\}$$

Przez $F_r = F_r(0,T)$, dla $T > 0$, oznaczamy funkcje r-gładkie, ale posiadające jeden punkt osobliwy, tzn. takich funkcji f, że $f \in W_r(0,T)$ albo

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x), & 0 \leq x < s_f \\ f_+(x), & s_f \leq x \leq T \end{cases},$$

gdzie $f_-(x) \in W_r(0,s_f)$, $f_+(x) \in W_r(s_f,T)$, dla $s_f \in (0,T)$. Innumi słowy $f \in F_r$ wtw, gdy

$$f(x) = g(x) + \mathbb{1}_{[s_f,T]}(x) \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_f^{(j)} \frac{(x-s_f)^j}{j!}, \quad 0 \leq x \leq T$$

gdzie $g \in W_r(0,T)$ i $\Delta_f^{(j)}$ to skoki nieciągłości odpowiadającej pochodnej w punkcie s_f. Warto zauważyć, że $0 \leq a < b \leq T$ mamy $\left\| f^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)} = \left\| g^{(r)} \right\|_{L^\infty(a,b)}$

W pracy [3] skupiamy się na klasie funkcji $G_r = G(0,T) \coloneqq F_r(0,T) \cap C([0,T])$. Stąd wynika, że $f \in G$ wtw, gdy $f \in F_r \wedge \Delta_f^{(0)} = 0$. Zakładamy też, że $r \geq 2$.

Rozdział 2

Złożoność obliczeniowa

Rozdział 3

Informacja dokładna i niedokładna

rozdział o informacji zaburzonej itp.

Przez informacje zaburzoną rozmumiemy

$$y_j = f(x_j) + e_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

gdzie n to liczba odwołań algorytmu do funkcji f

Rozdział 4

Ograniczenia z dołu

Rozdział 5

Algorytmy

5.1. Algorytm oparty o informację dokładną

Algurytm przedstawiony w pracy [4] lokalizuje osobliwość przy pomocy wielomianów Lagrange'a w_g^r. Na wejściu algorytm otrzymuje $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, przedział $[a,b]$, regularność r oraz współczynnik Höldera ϱ. Kluczowym elementem algorytmu jest zdefiniowana poniżej wielkość (*test*), która jest użyta do wykrycie punktu osobliwego.

$$A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) = \max_{0\le j\le r} \frac{\left\| w_g^r([\bar{b},b])\,(z_j) - w_g^r([a,\bar{a}])\,(z_j)\right\|}{\bar{h}^{r+e}}, \tag{5.1}$$

gdzie $a < \bar{a} < \bar{b} < b$, $z_j = \bar{a} + (\bar{b}-\bar{a})j/r$, dla $j = 0,1,\ldots,r$ oraz $\bar{h} = b-a$ jest długością przedziału, na którym *test* jest zdefiniowany.

K1: Niech $\delta := h^{r+\varrho}$, $B := \emptyset$
jeżeli $\max\limits_{0\leq i\leq p-1}(c_{i+1}-c_i) \leq 4\delta$ **wtedy**
idź do *Krok 3*
w p.p.
Niech $A = \max\{A_g(c_j, c_j+\delta, c_{j+1}-\delta, c_{j+1}) \mid c_{j+1}-c_j > 4\delta\}$
dla $j = 0, 1, \ldots, p-1$
Niech $A_g^i = A_g(c_i, c_i+\delta, c_{i+1}-\delta, c_{i+1})$
jeżeli istnieją różne k i l takie, że $A = A^k \wedge A = A^l$ **wtedy**
idź do *Krok 3*

K2: Niech $[c_k, c_{k+1}]$ - przedział otrzymany w *Krok 1*
$B = BISECTION(g, [a,b], r, \varrho)$

K3: Niech $\bar{M} = \{c_0, \ldots, c_p\} \cap B$

$$q(t) = \begin{cases} g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_{i+1}) \wedge c_{i+1}-c_i \leq 4\delta \\ g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_i+\delta) \wedge c_{i+1}-c_i > 4\delta, \\ w_g^r([c_i+\delta, c_{i+1}-\delta])(t) & \text{gdy } t \in [c_i+\delta, c_{i+1}-\delta) \wedge c_{i+1}-c_i > 4\delta \\ g(c_{i+1}-\delta) & \text{gdy } t \in [c_{i+1}-\delta, c_{i+1}) \wedge c_{i+1}-c_i > 4\delta \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$ z $q(b) =$ zdefiniowanym przez ciągłość na ostatnim przedziale
$B := B \cup \{c_i+\delta, c_{i+1}-\delta \mid c_{i+1}-c_i > 4\delta,\ i = 0, \ldots, k-1\}$

5.1.1. Analiza algorytmu

Twierdzenie 5.1. *Niech $r+\varrho \geq 1$. Istnieją stałe C i m_0 takie, że dla $m > m_0$, przedziału $[a,b]$ oraz wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ z $\delta_g^0 = 0$ zachodzi:*

$$\sup_{t\in[a,b]} \|g(t) - q(t)\| \leq Cm^{-(r+\varrho)}$$

Dodatkowo, obliczenie q wymaga $O(p+\log m)$ ewaluacji fun g, gdzie p jest liczbą przedziałów w początkowym podziale M przedziału $[a,b]$. Czyli, aby otrzymać optymalną aproksymację $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ na przedziale $[a,b]$, wystarcza wiąźć podział M z $m+1$ równoodległymi punktami $x_i = a+(b-a)i/m$, dla $i = 0, 1, \ldots, m$. wtedy obliczenie q wymaga $O(m)$ ewaluacji funkcji g.

Zacznijmy od wyjaśnienia własności testu 5.1 służącego do wykrywania osobliwości. Rozważmy błąd interpolacji Lagrange'a dla nieciągłej funkcji $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$. Błąd jest ograniczony za względu na wielomian s^g (TODO: reference).

Lemat 5.2. *Istnieje stała C taka, że dla wszystkich $[a,b]$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ oraz $s = 0, 1, \ldots, r$, mamy*

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\|g(t) - w_g^s([a,b])(t)\right\| \leq C\left(\min\left\{\sup_{t\in[a,\hat{t}_g)} \|s_g(t)\|, \sup_{t\in[\hat{t}_g,b]} \|s_g(t)\|\right\} + \bar{h}^{\min\{s+1,r+\varrho\}}\right)$$

Dowód. (...) □

Wniosek 5.3. *Istnieje stała C taka, że dla wszystkich $[a,b]$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ z $\delta_g^0 = 0$, $0 \leq \delta \leq \min 1, \bar{h}$ oraz $s = 0,1,\ldots,r$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (a, a+\delta] \cup [b-\delta, b) \Longrightarrow \sup_{t\in[a,b]} \left\| g(t) - w_g^s([a,b])(t) \right\| \leq C \left(\delta + \bar{h}^{\min\{s+1, r+\varrho\}} \right)$$

Dowód. (...) □

Lemat 5.4. *Istnieje stała C zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $[a,b]$, $\bar{a} \in (a,b)$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (\bar{a}, b) \Longrightarrow g(t) - w_g^r([a,\bar{a}])(t) = s_g(t) \mathbb{1}_{\left[\hat{t}_g, b\right]}(t) + R_g(t), \quad t \in [\bar{a}, b],$$

gdzie $\|R_g(t)\| \leq C\bar{h}^{r+\varrho}$, dla $t \in [\bar{a}, b]$

Dowód. (...) □

Wniosek 5.5. *Istnieje stała $\bar{C}$ zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $[a,b]$, $\bar{a} \in (a,b)$, wszystkich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (a, \bar{a}) \Longrightarrow g(t) - w_g^r([\bar{a},a])(t) = s_g(t) \mathbb{1}_{\left[a, \hat{t}_g\right]}(t) + R_g(t), \quad t \in [a, \bar{a}],$$

gdzie $\|R_g(t)\| \leq \bar{C}\bar{h}^{r+\varrho}$, dla $t \in [a, \bar{a}]$

Dowód. (...) □

Stwierdzenie 5.6. *Istnieje stała C^* zależna od r i L_r taka, że dla wszystkich $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ i $[a,b]$ oraz wszystich $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$, mamy*

$$\hat{t}_g \text{ z niezerowym wielomianem } s_g \text{ nie jest w } (a,b) \Longrightarrow A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \leq C^*$$

Dowód. (...) □

Uwaga 5.7. *Stwierdzenie 5.6 pokazuje, że procedura LOCATE-APPROXIMATE wraz z zprocedurą BISECTION, sukcesywnie wybiera przedziały bazując a wartościach testu. Zauważmy, że jeżeli $\hat{t}_g$ jest unikalna, to wtedy dla jakiegokolwiek przedziału $[a,b]$, który nie został wybrany, mamy $A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \leq C^*$*

Stwierdzenie 5.8. *Niech $D > 0$. Istnieją stałe C i $\bar{N}$, zależne tylko od parametrów klast $G^{r,\varrho}([a,b])$ i D, takie, że dla wszystkich $[a,b]$, $[\bar{a},\bar{b}] \subset (a,b)$, $g \in G^{r,\varrho}([a,b])$ oraz $s = 0,1,\ldots,r$, mamy*

$$\hat{t}_g \in (\bar{a},\bar{b}] \wedge b - a \leq D(\bar{b}-\bar{a}) \Longrightarrow \text{dla } [\gamma,\omega] = [a,b] \vee [\gamma,\omega] = [\bar{a},\bar{b}] \text{ zachodzi}$$

$$\sup_{t\in[\gamma,\omega]} \left\| g(t) - w_g^s([\gamma,\omega])(t) \right\| \leq C \left(1 + A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \right) \bar{h}^{\min\{s+1, r+\varrho\}}$$

oraz ponadto

$$\sup_{t\in[\gamma,\omega]} \left\| \left(w_g^s([\gamma,\omega]) \right)^{(j)}(t) \right\| \leq \bar{N} \left(1 + \bar{h}^{\min\{s+1-j, r+\rho-j\}} + \left(1 + A_g(a,\bar{a},\bar{b},b) \right) \bar{h}^{r+\varphi-j} \right)$$

dla $j = 0,1,\ldots,s$.

Dowód. (...) □

Uwaga 5.9. *Stwierdzenie 5.8 pokazuje, że w przypadku z osobliwością, ograniczenie górne na błąd interpolacji możemy wyrazić za pomocą* $A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b)$

Poniższy lemat dotyczy przypadku, gdy osobliwość znajduje się na brzegu przdziału $[a, b]$
(lemat... dowod...)
(Dowód tw1 z 2014)

Uwaga 5.10. *Twierdzenie 5.1 zachodzi również dla funkcji* g*, która ma skok w punkcie* c_i *początkowego podziału* M *oraz ma niezerowy wielomian* s_g *dla co najwyżej jednego nieznanego punktu* t_g*,* $t_g \neq c_i\ \forall_i$*.*

5.2. Algorytm oparty o informację zaburzoną

W tym rozdziale opiszemy algorytm bazujący na informacji zaburzonej przedstawiony w artykule [5]. Analizowany algorytm używa co najwyżej n wartości funkcji z precyzją δ oraz w najgorszym przypadku ma błąd proporcjonalny do $\max(\delta, n^{-1/r+\varrho})$ w klasie funkcji $\mathcal{F}^D_{r,\varrho}$ dla $p < \infty$ oraz w klasie $\mathcal{F}^C_{r,\varrho}$ dla $p \leq \infty$. Kluczowym parametrem algorytmu jest

$$h = T/m \quad with \quad m \geq 2r + 1,$$

gdzie m jest początkową gęstością siatki. Dodatkowo, niech $\omega = \omega(h)$ spełnia $0 < \omega < (r + 1)h$.

Na początku algorytm aproksymuje punkt osobliwy s_f. Jest to realizowane w trzech krokach. W kroku 1. przy pomocy siatki rozmiarze o długości h i różnic dzielonych lokalizowany jest punkt s_f na przedziale $[u_1, v_1]$ o długości $(r+1)h$. W kroku 2. używamy wielomianów interpolujących $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ do zwężenia tego przedziału do $[u_2, v_2]$. Krok 3. produkuje przedział $[u_3, v_3] \subseteq [u_2, v_2]$, w którym różnica $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ jest nierosnąca na $[u_3, \xi]$ i niemalejąca na $[\xi, v_3]$, gdzie ξ jest finalną aproksymacją s_f.

Powyższe kroki mogą być zapisane następująco; dla $t_i = ih\ \forall i$.

Krok 1 Oblicz różnice dzielone $\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \dots, t_{i+r+1}]$ for $1 \le i \le m$ oraz znajdź

$$i^* = arg \max_{1 \le i \le m} |\tilde{d}_i|$$

Niech $u_1 = t_{i^*}$ i $v_1 = t_{i^*+r+1}$.

Krok 2 Oznaczymy przez $\tilde{p}_+$ i $\tilde{p}_-$ wielomiany stopnia $\le r$, które interpolują węzły $(t_j, \tilde{f}(t_j))$ odpowiednio dla $i^* - r \le j \le i^*$ oraz dla $i^* + r + 1 \le j \le i^* + 2r + 1$. Następnie wykonaj iterację:

$u := u_1$, $v := v_1$
dopóki $v - u > \omega$ **wykonuj**:
  $z_j := u + j(v-u)/(r+2), \qquad j = 1, 2, \dots, r+1$
  $j^* := arg \max_{1 \le j \le r+1} |\tilde{p}_+(z_j) - \tilde{p}_-(z_j)|$
  jeżeli $|\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_-(z_j)| \le |\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_+(z_j)|$ **wtedy**
    $u := z_{j^*}$
  w p.p.
    $v := z_{j^*}$
koniec
Niech $u_2 = u$ i $v_2 = v$.

Krok 3 Wykonaj iterację:

$u := u_2$, $v := v_2$
dopóki istnieje maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v) **wykonuj**
  $z :=$ największe maksimum lokalne $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$ na (u, v)
  jeżeli $|\tilde{f}(z) - \tilde{p}_-(z)| \le |\tilde{f}(z) - \tilde{p}_+(z)|$ **wtedy**
    $u := z$
  w p.p.
    $v := z$
koniec
Niech $u_3 = u$ i $v_3 = v$.

Finalną aproksymacją s_f jest

$$\xi := arg \max_{u_3 \le x \le v_3} |\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$$

5.2.1. Analiza algorytmu

Przedstawiony algorytm używa m wartości funkcji w kroku 1 oraz jedyną wartość funkcji w każdej iteracji w krokach 2 i 3. Czyli w kroku 2 używamy co najwyżej

$$\left\lceil \frac{\ln\left(\frac{(r+1)h}{\omega(h)}\right)}{\ln\left(\frac{r+2}{r+1}\right)} \right\rceil$$

wartości funkcji i $(r-1)$ w kroku 3. Stąd otrzymujemy, że jeżezli $\omega = \omega(h) \ge kh^\alpha$ dla pewngo ustalonego k i α, wtedy w najgoryszym przypadku liczba użytych wartości funkcji równa sie asymptotycznie $m = \frac{T}{h}$ dla $h \to 0^+$.

(punktowa analiza błędu...)

Podsumowując analizę błędu dla każdego punktu otrzymujemy, że gdy $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ wtedy:

$$\begin{cases} |f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} & \text{dla } x \notin (u_2, v_2] \\ |f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} + |\Delta_f^{(0)}| & \text{dla } x \in (u_2, v_2] \end{cases}$$

gdzie $v_2 - u_2 \leq \omega$

Mamy również, że liczba ewaluacji funkcji n jest proporcjonalna do h^{-1}, tak więc $h^{r+\varrho}$ jest proporcjonalne do $n^{-(r+\varrho)}$. Z tego wynika poniższe stwierdzenia:

Stwierdzenie 5.11. *Niech $1 \leq p \leq \infty$. Jeżeli $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ oraz $\omega(h) = h^{(r+\varrho)p+1}$, wtedy*

$$e_{\mathrm{p}}^{wor}\left(\varphi_h^*, N_h^*; \mathcal{F}_{r,\varrho}^D\right) = \mathcal{O}\left(n^{-(r+\varrho)}\right)$$

Warto wspomnieć, że powyższe ograniczenia górne nie może zostać spełnione przez algorytmy nieadaptacyjne, co zostało pokazane w [2]. Pokazano tam również, że dla $p = \infty$ nie istnieje algorytm z błędem zbiegającym do zera, dlatego założenia $p < \infty$ jest niezbędne. Dodatkowo, gdy rozważymy klasę $\mathcal{F}_{r,\varrho}^C \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^D$, to możemy uprościć algorytm biorąc $\omega(h) = (r+1)h$ i unikając iteracji w kroku 2. Otrzymujemy w ten sposób algorytm, który dla $r = 0, 1$ jest nieadaptacyjny, a dla $r \geq 2$ używa co najwyżej $r-1$ dodatkowych punktów, niezależnie od tego jak małe jest h. Co więcej, organiczenie górne zachodzi dla $p = \infty$ Stosując powyższą modyfikację możemy sformułować następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.12. *Jeżeli $\delta \leq bh^{r+\varrho}$ i $\omega(h) = (r+1)h$, wtedy:*

$$\mathrm{e}_{\infty}^{\mathrm{wor}}\left(\varphi_h^*, N_h^*; \mathcal{F}_{r,\varrho}^C\right) = \mathcal{O}\left(n^{-(r+\varrho)}\right). \tag{5.2}$$

Ponownie, dla $r \geq 2$ użycie informacji adaptacyjnej jest konieczne. Łącząc wyniki 5.11, 5.12 i 1.1(i) otrzymujemy 1.2. Faktycznie, dla ustalonego δ i n możemy wybrać $h = \frac{T}{m}$ takie, że

$$m = m(n, \delta) = \left\lfloor \min\left(\beta n, \frac{1}{T}\left(\frac{b}{\delta}\right)^{\frac{1}{r+\varrho}}\right)\right\rfloor = \Theta\left(\min\left(n, \delta^{-1/(r+\varrho)}\right)\right), \tag{5.3}$$

Uwaga 5.13. *Zauważmy, że dla ustalonej precyzji δ nie ma sensu brać m większego niż $m_{max} = \Theta(\delta^{-1/(r+\varrho)})$ wartości funkcji, ponieważ dla $m = m_{max}$ osiągamy maksymalną dokładność dla danego δ.*

Rozdział 6

Testy numeryczne

porównanie algorytmów

Bibliografia

[1] F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, N. Dyn, *Interpolation and approximation of piecewise smooth functions*, SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 41–57

[2] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, Y. Zhao, *The power of adaption for approximating functions with singularities*, Mathematics Of Computation 77 2008, p. 2309–2338

[3] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, *Uniform approximation of piecewise r-smooth and globally continuous functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 47, No. 1 (2008/2009)

[4] B. Kacewicz, P. Przybyłowicz, *Complexity of the derivative-free solution of systems of IVPs with unknown singularity hypersurface*, Journal of Complexity

[5] P. M. Morkisz, L. Plaskota, *Approximation of piecewise Hölder functions from inexact information*, Journal of Complexity