



**AGH**

Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica  
w Krakowie

---

Praca magisterska

Aproksymacja funkcji kawałkami regularnych przy  
użyciu informacji dokładnej i niedokładnej

Tomasz Czyż

Kierunek: Matematyka  
Specjalność: Matematyka obliczeniowa  
i komputerowa

Nr albumu: 290565

Promotor  
dr Maciej Goćwin



Wydział Matematyki Stosowanej

---

Kraków 2019

## Oświadczenie studenta

*Upředzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także upředzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchylający godności studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.*

.....  
(Podpis czytelny studenta)

## Oświadczenie promotora

*Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.*

.....  
(Podpis promotora)

# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	2
<b>Abstract</b> . . . . .	3
<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	4
<b>Rozdział 1. Definicje</b> . . . . .	5
1.1. Informacja, algorytm, aproksymacja . . . . .	5
1.2. Model obliczeniowy . . . . .	6
1.3. Klasy funkcji . . . . .	6
<b>Rozdział 2. Ograniczenia z dołu</b> . . . . .	8
<b>Rozdział 3. (Podstawowe definicje z artykułów [2] i [3])</b> . . . . .	9
<b>Rozdział 4. Algorytmy</b> . . . . .	10
4.1. Algorytm oparty o informację dokładną . . . . .	10
4.2. Algorytm oparty o informację zaburzoną . . . . .	11
<b>Rozdział 5. Analiza algorytmów</b> . . . . .	13
5.1. Analiza algorytmu opartego o informację dokładną . . . . .	13
5.2. Analiza algorytmu opartego o informację zaburzoną . . . . .	15
<b>Rozdział 6. Testy numeryczne</b> . . . . .	18
<b>Bibliografia</b> . . . . .	19

# Streszczenie

Streszczenie

**Słowa kluczowe**

słowa kluczowe

# Abstract

Abstract

**Key words**

keywords

# Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest analiza algorytmu aproksymującego funkcje kawałkami gładkie, który

---

# Rozdział 1

---

## Definicje

### 1.1. Informacja, algorytm, aproksymacja

W tym rozdziale wyjaśnimy co rozumiemy przez aproksymację i w jaki sposób ją otrzymujemy. W tym celu wprowadzimy fundamentalne pojęcia, takie jak operator rozwiązania, informacja zaburzona oraz algorytm. Szczególną uwagę poświęcimy informacji, która jest najważniejszym czynnikiem naszej analizy. Informacja, mówiąc w skrócie, jest tym co wiemy o problemie do rozwiązania. W niniejszej pracy kluczowym założeniem jest to, że informacja jest *zaburzona*, to znaczy, nie jest dokładna, czyli ma jakiś błąd.

Niech  $F$  będzie przestrznią liniową a  $G$  przestrzenią unormowaną, obie nad ciałem liczb rzeczywistych. Odwzorowanie

$$S : F \rightarrow G$$

nazywamy *operatorem rozwiązania*. Naszym zadaniem jest aproksymacja elementów  $S(f)$  dla  $f$  należącego do  $E \subset F$ , bazując wyłącznie na informacji zaburzonej o  $f$ . Przejdźmy do szczegółowego omówienia informacji i aproksymacji.

*Operatorem informacji* nazywamy odwzorowanie

$$N : F \rightarrow 2^Y,$$

gdzie  $Y$  jest zbiorem skończonych ciągów liczb rzeczywistych,  $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ . Czyli  $N(f)$  jest podzbiorem  $Y$ . Zakładamy, że  $N(f)$  jest niepuste dla wszystkich  $f \in F$ . Każdy element  $y \in N(f)$  będziemy nazywać *informacją o  $f$* . Zauważmy, że jeżeli zbiór  $N(f)$  ma dokładnie jeden element dla wszystkich  $f \in F$ , to informacja  $N$  jest *dokładna*. W przypadku, gdy istnieje  $f$  dla którego  $N(f)$  ma przynajmniej dwa elementy, wtedy informacja jest *zaburzona*.

Dodatkowo, informację możemy rozróżniać ze względu na sposób wyboru kolejnych wartości funkcji  $f$ . W przypadku, gdy kolejne wartości wybierane są niezależnie od

$f$ , to mówimy o informacji *nieadaptacyjnej*. W przeciwnym przypadku, to jest gdy kolejne wartości zależą zarówno od innych punktów, jak i wartości funkcji, to mówimy o informacji *adaptacyjnej*. Dla przykładu, dla informacji nieadaptacyjnej składającej się z zaburzonych ewaluacji funkcji  $f$  w punktach  $x_1, \dots, x_n$  z precyzją  $\delta$ , mamy:

$$N(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - f(x_i)| \leq \delta, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Znając informację  $y$  o  $f$  możemy wprowadzić aproksymację, a dokładnie algorytm, który ją wyprodukuję. *Algorytmem* nazywamy odwzorowanie:

$$\varphi : Y \rightarrow G$$

Innymi słowy, aproksymacją  $S(f)$  jest  $\varphi(y)$ , gdzie  $y$  jest informacją o  $f$ . Błąd aproksymacji zdefiniowany jest jako różnica  $\|S(f) - \varphi(y)\|$ , gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą w przestrzeni  $G$ .

## 1.2. Model obliczeniowy

W ogólności, optymalność algorytmu oraz jego złożoność zależą od przyjętego modelu obliczeniowego. Model jest określony poprzez sposób w jaki błąd i koszt algorytmu są zdefiniowane. Jeżeli za błąd i koszt przyjmujemy wydajność na najtrudniejszym spośród wszystkich problemów w danej klasie, wtedy mówimy o *modelu najgorszego przypadku*. Innymi często rozważanymi modelami są: probabilistyczny, średni, mieszany, losowy czy asymptotyczny, jednak nimi nie będziemy zajmować się w tej pracy.

Niech  $N : R \rightarrow 2^Y$  będzie operatorem informacji. Poprzez *błąd najgorszego przypadku* algorytmu  $\varphi : Y \rightarrow G$  na zbiorze  $E \subset F$  rozumiemy:

$$e_p^{wor}(\phi, N, E) = \sup_{f \in E} \sup_{y \in N(f)} \|f - \varphi(y)\|_{L^p}$$

Oznaczmy przez  $\mathcal{N}(n, \delta)$  klasę wszystkich (adaptacyjnych) informacji  $N$ , które używają co najwyżej  $n$  ewaluacji funkcji, z precyzją  $\delta$  każda. Wtedy przez *minimalny błąd najgorszego przypadku* w klasie  $E$ , który może zostać osiągnięty przez algorytm używający informacji o co najwyżej  $n$  wartościach funkcji z precyzją  $\delta$  rozumiemy:

$$r_p^{wor}(n, \delta, E) = \inf \{e_p^{wor}(\varphi, N, E) : \varphi \text{ używa } N \in \mathcal{N}(n, \delta)\}$$

W tej pracy porównujemy dwa algorytmy aproksymujące funkcje z osobliwością, które osiągają to samo, optymalne organiczenie na minimalny błąd najgorszego przypadku, jednak tylko w przypadku jednego z nich w analizie zostało uwzględnione zaburzenie. W celu dokładnego sprecyzowania ograniczeń algorytmów, w następnym rozdziale szczegółowo definiujemy interesującą nas klasę funkcji.

## 1.3. Klasy funkcji

Dla liczby całkowitej  $r \geq 0$ ,  $\varrho \in (0, 1]$  oraz  $a < b$ , przez  $H_{r, \varrho}(a, b)$  oznaczamy przestrzeń funkcji  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że  $g \in C^r([a, b])$  i  $g^{(r)}$  jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem  $\varrho$ , tzn.

$$c(g) := \sup_{a \leq x \leq y \leq b} \frac{|g^{(r)}(x) - g^{(r)}(y)|}{|x - y|^\varrho} < \infty.$$



Dla danego  $T > 0$  niech  $F_{r,\varrho} = F_{r,\varrho}(T)$  będzie przestrzenią funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniających następujące warunki: istnieje  $s_f \in [0, T)$  i  $g_f \in H_{r,\varrho}(0, T)$  takie, że

$$f(lT + s_f + x) = g_f(x) \quad \text{for all } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{and } x \in [0, T)$$

Można powiedzieć, że  $f$  jest 'kopią'  $g_f$  na każdym z przedziałów  $(lT + s_f, (l+1)T + s_f]$  i  $f$  jest prawostronnie ciągła na  $lT + s_f$ . W związku z tym wszystkie punkty, które różnią się między sobą o wielokrotność  $T$  będą uważane za identyczne. Dla przykładu, jeżeli  $0 < x_1 \leq T < x_2 \leq 2T$ , to przedział  $(x_1, x_2]$  będzie utożsamiany z  $(x_1, T] \cup (0, x_2 - T] \subset (0, T]$ .

Przez  $\Delta_f^{(j)}$  oznaczmy *skoki nieciągłości* dla kolejnych pochodnych  $f$  w punkcie nieciągłości  $s_f$ ,

$$\Delta_f^{(j)} = f^{(j)}(s_f^+) - f^{(j)}(s_f^-) = g_f^{(j)}(0) - g_f^{(j)}(T) \quad 0 \leq j \leq r,$$

W tej pracy będziemy rozpatrywać różne aproksymacje  $\varphi : Y \rightarrow L^p(0, T)$  funkcji  $f \in F_{r,\varrho}$  względem normy  $L^p$ , gdzie  $1 \leq p \leq \infty$ . Czyli z definicji, błąd aproksymacji dla informacji  $y$  wynosi:

$$\|f - \varphi(y)\|_{L^p} = \left( \int_0^T |(f - \varphi(y))(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty$$

oraz

$$\|f - \varphi(y)\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{0 < x \leq T} |(f - \varphi(y))(x)|$$

Rozróżniamy następujące klasy  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{f = c\mathbb{1}_{\mathbb{R}}, c \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{H}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \leq 1, \Delta_f^{(j)} = 0 \text{ for all } 0 \leq j \leq r\} \\ \mathcal{F}_{r,\varrho}^C &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \leq 1, \Delta_f^{(0)} = 0\} \\ \mathcal{F}_{r,\varrho}^D &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \leq 1, |\Delta_f^{(0)}| \leq 1\} \\ \mathcal{F}_{r,\varrho} &= \{f \in F_{r,\varrho} : c(g_f) \leq 1\} \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_{r,\varrho} \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^C \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^D \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}$$

## Ograniczenia z dołu

Poniższe ograniczenia dolne na  $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F})$  są dość oczywiste albo mogą zostać wyprowadzone ze znanych rezultatów

**Stwierdzenie 2.1.** *Dla każdego  $n$  i  $\delta \geq 0$  mamy:*

- (i)  $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{K}) \geq \delta T^{1/p}$
- (ii)  $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{H}_{r,\varrho}) \geq a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)}$  dla pewnego  $a_{r,\varrho} > 0$
- (iii)  $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}) = \infty, \quad r \geq 1$

*Dowód.* (...) □

Z stwierdzenia 2.1 (i)-(ii) otrzymujemy, że

$$r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) \geq r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) \geq \max(\delta T^{1/p}, a_{r,\varrho} n^{-(r+\varrho)})$$

W dalszej części pracy udowodnimy, że te nierówności są ostre, z wyjątkiem pierwszej dla  $p = \infty$ . To jest główny wyniki artykułu [5], który możemy zapisać w poniższej postaci:

**Twierdzenie 2.2.**

1.  $r_p^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)}))$  dla  $1 \leq p \leq \infty$
2.  $r_\infty^{wor}(n, \delta, \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) = \Theta(\max(\delta, n^{-(r+\varrho)}))$

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia skonstruujemy algorytm, który posiada żądane własności błędu. W tym celu przedstawimy dodatkowe rezultaty dotyczące błędu interpolacji/ekstrapolacji funkcji kawałkami holderowskich, bazujących na wartościach zaburzonych.

---

## Rozdział 3

---

### (Podstawowe definicje z artykułów [2] i [3])

Dla  $r \geq 1$ ,  $a < b$ , przez  $W_r(a, b)$  oznaczamy przestrzeń funkcji  $r$ -gładkich, zdefiniowanych w następujący sposób:

$$W_r(a, b) = \left\{ f \in C^{r-1}([a, b]) \mid f^{(r-1)} \text{ absolutnie ciągła, } \|f^{(r)}\|_{L^\infty(a, b)} < \infty \right\}$$

Przez  $F_r = F_r(0, T)$ , dla  $T > 0$ , oznaczamy funkcje  $r$ -gładkie, ale posiadające jeden punkt osobliwy, tzn. takich funkcji  $f$ , że  $f \in W_r(0, T)$  albo

$$f(x) = \begin{cases} f_-(x), & 0 \leq x < s_f \\ f_+(x), & s_f \leq x \leq T \end{cases},$$

gdzie  $f_-(x) \in W_r(0, s_f)$ ,  $f_+(x) \in W_r(s_f, T)$ , dla  $s_f \in (0, T)$ . Innumi słowy  $f \in F_r$  wtw, gdy

$$f(x) = g(x) + \mathbb{1}_{[s_f, T]}(x) \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_f^{(j)} \frac{(x - s_f)^j}{j!}, \quad 0 \leq x \leq T$$

gdzie  $g \in W_r(0, T)$  i  $\Delta_f^{(j)}$  to skoki nieciągłości odpowiadającej pochodnej w punkcie  $s_f$ . Warto zauważyć, że  $0 \leq a < b \leq T$  mamy  $\|f^{(r)}\|_{L^\infty(a, b)} = \|g^{(r)}\|_{L^\infty(a, b)}$

W pracy [3] skupiamy się na klasie funkcji  $G_r = G(0, T) := F_r(0, T) \cap C([0, T])$ . Stąd wynika, że  $f \in G$  wtw, gdy  $f \in F_r \wedge \Delta_f^{(0)} = 0$ . Zakładamy też, że  $r \geq 2$ .

---

## Rozdział 4

---

# Algorytmy

### 4.1. Algorytm oparty o informację dokładną

Algorytm przedstawiony w pracy [4] lokalizuje osobliwość przy pomocy wielomianów Lagrange’a  $w_g^r$ . Na wejściu algorytm otrzymuje  $g \in G^{r,e}([a, b])$ , przedział  $[a, b]$ , regularność  $r$  oraz współczynnik Höldera  $\varrho$ . Kluczowym elementem algorytmu jest zdefiniowana poniżej wielkość (*test*), która jest użyta do wykrycie punktu osobliwego.

$$A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b) = \max_{0 \leq j \leq r} \frac{\|w_g^r([\bar{b}, b])(z_j) - w_g^r([a, \bar{a}]) (z_j)\|}{\bar{h}^{r+e}}, \quad (4.1)$$

gdzie  $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ ,  $z_j = \bar{a} + (\bar{b} - \bar{a})j/r$ , dla  $j = 0, 1, \dots, r$  oraz  $\bar{h} = b - a$  jest długością przedziału, na którym *test* jest zdefiniowany.

*K1:* Niech  $\delta := h^{r+e}$ ,  $B := \emptyset$

**jeżeli**  $\max_{0 \leq i \leq p-1} (c_{i+1} - c_i) \leq 4\delta$  **wtedy**  
idź do *Krok 3*

**w p.p.**

Niech, dla  $j = 0, 1, \dots, p-1$ ,

$A = \max \{A_g(c_j, c_j + \delta, c_{j+1} - \delta, c_{j+1}) \mid c_{j+1} - c_j > 4\delta\}$

Niech  $A_g^i = A_g(c_i, c_i + \delta, c_{i+1} - \delta, c_{i+1})$

**jeżeli** istnieją różne  $k$  i  $l$  takie, że  $A = A^k \wedge A = A^l$  **wtedy**  
idź do *Krok 3*

*K2:* Niech  $[c_k, c_{k+1}]$  - przedział otrzymany w *Krok 1*

$B = \text{BISECTION}(g, [a, b], r, \varrho)$

*K3:* Niech  $\bar{M} = \{c_0, \dots, c_p\} \cap B$

$$q(t) = \begin{cases} g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_{i+1}) \wedge c_{i+1} - c_i \leq 4\delta \\ g(c_i) & \text{gdy } t \in [c_i, c_i + \delta) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta, \\ w_g^r([c_i + \delta, c_{i+1} - \delta])(t) & \text{gdy } t \in [c_i + \delta, c_{i+1} - \delta) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta \\ g(c_{i+1} - \delta) & \text{gdy } t \in [c_{i+1} - \delta, c_{i+1}) \wedge c_{i+1} - c_i > 4\delta \end{cases}$$

dla  $i = 0, 1, \dots, k-1$  z  $q(b) =$  zdefiniowanym przez ciągłość na ostatnim przedziale

$B := B \cup \{c_i + \delta, c_{i+1} - \delta \mid c_{i+1} - c_i > 4\delta, i = 0, \dots, k-1\}$

## 4.2. Algorytm oparty o informację zaburzoną

W tym rozdziale opiszemy algorytm bazujący na informacji zaburzonej przedstawiony w artykule [5]. Analizowany algorytm używa co najwyżej  $n$  wartości funkcji z precyzją  $\delta$  oraz w najgorszym przypadku ma błąd proporcjonalny do  $\max(\delta, n^{-1/(r+e)})$  w klasie funkcji  $\mathcal{F}_{r,\varrho}^D$  dla  $p < \infty$  oraz w klasie  $\mathcal{F}_{r,\varrho}^C$  dla  $p \leq \infty$ . Kluczowym parametrem algorytmu jest

$$h = T/m \quad \text{with} \quad m \geq 2r + 1,$$

gdzie  $m$  jest początkową gęstością siatki. Dodatkowo, niech  $\omega = \omega(h)$  spełnia  $0 < \omega < (r+1)h$ .

Na początku algorytm aproksymuje punkt osobliwy  $s_f$ . Jest to realizowane w trzech krokach. W kroku 1. przy pomocy siatki rozmiarze o długości  $h$  i różnic dzielonych lokalizowany jest punkt  $s_f$  na przedziale  $[u_1, v_1]$  o długości  $(r+1)h$ . W kroku 2. używamy wielomianów interpolujących  $\tilde{p}_+$  i  $\tilde{p}_-$  do zwężenia tego przedziału do  $[u_2, v_2]$ . Krok 3. produkuje przedział  $[u_3, v_3] \subseteq [u_2, v_2]$ , w którym różnica  $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$  jest nierosnąca na  $[u_3, \xi]$  i niemalejąca na  $[\xi, v_3]$ , gdzie  $\xi$  jest finalną aproksymacją  $s_f$ .

Powyższe kroki mogą być zapisane następująco; dla  $t_i = ih \forall i$ .

*Krok 1* Oblicz różnice dzielone  $\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \dots, t_{i+r+1}]$  for  $1 \leq i \leq m$  oraz znajdź  

$$i^* = \arg \max_{1 \leq i \leq m} |\tilde{d}_i|$$
  
 Niech  $u_1 = t_{i^*}$  i  $v_1 = t_{i^*+r+1}$ .

*Krok 2* Oznaczmy przez  $\tilde{p}_+$  i  $\tilde{p}_-$  wielomiany stopnia  $\leq r$ , które interpolują węzły  $(t_j, \tilde{f}(t_j))$  odpowiednio dla  $i^* - r \leq j \leq i^*$  oraz dla  $i^* + r + 1 \leq j \leq i^* + 2r + 1$ . Następnie wykonaj iterację:

$u := u_1, v := v_1$

**dopóki**  $v - u > \omega$  **wykonuj**:

$z_j := u + j(v - u)/(r + 2), \quad j = 1, 2, \dots, r + 1$

$j^* := \arg \max_{1 \leq j \leq r+1} |\tilde{p}_+(z_j) - \tilde{p}_-(z_j)|$

**jeżeli**  $|\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_-(z_{j^*})| \leq |\tilde{f}(z_{j^*}) - \tilde{p}_+(z_{j^*})|$  **wtedy**

$u := z_{j^*}$

**w p.p.**

$v := z_{j^*}$

**koniec**

Niech  $u_2 = u$  i  $v_2 = v$ .

*Krok 3* Wykonaj iterację:

$u := u_2, v := v_2$

**dopóki** istnieje maksimum lokalne  $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$  na  $(u, v)$  **wykonuj**

$z :=$  największe maksimum lokalne  $|\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$  na  $(u, v)$

**jeżeli**  $|\tilde{f}(z) - \tilde{p}_-(z)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{p}_+(z)|$  **wtedy**

$u := z$

**w p.p.**

$v := z$

**koniec**

Niech  $u_3 = u$  i  $v_3 = v$ .

Finalną aproksymacją  $s_f$  jest

$$\xi := \arg \max_{u_3 \leq x \leq v_3} |\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-|$$

## Analiza algorytmów

### 5.1. Analiza algorytmu opartego o informację dokładną

**Twierdzenie 5.1.** *Niech  $r + \varrho \geq 1$ . Istnieją stałe  $C$  i  $m_0$  takie, że dla  $m > m_0$ , przedziału  $[a, b]$  oraz wszystkich  $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$  z  $\delta_g^0 = 0$  zachodzi:*

$$\sup_{t \in [a, b]} \|g(t) - q(t)\| \leq C m^{-(r+\varrho)}$$

*Dodatkowo, obliczenie  $q$  wymaga  $O(p + \log m)$  ewaluacji fun  $g$ , gdzie  $p$  jest liczbą przedziałów w początkowym podziale  $M$  przedziału  $[a, b]$ . Czyli, aby otrzymać optymalną aproksymację  $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$  na przedziale  $[a, b]$ , wystarczy wziąć podział  $M$  z  $m + 1$  równoodległymi punktami  $x_i = a + (b - a)i/m$ , dla  $i = 0, 1, \dots, m$ . wtedy obliczenie  $q$  wymaga  $O(m)$  ewaluacji funkcji  $g$ .*

Zacznijmy od wyjaśnienia własności testu 4.1 służącego do wykrywania osobliwości. Rozważmy błąd interpolacji Lagrange’a dla nieciągłej funkcji  $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$ . Błąd jest ograniczony za względu na wielomian  $s^g$  (TODO: reference).

**Lemat 5.2.** *Istnieje stała  $C$  taka, że dla wszystkich  $[a, b]$ , wszystkich  $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$  oraz  $s = 0, 1, \dots, r$ , mamy*

$$\sup_{t \in [a, b]} \|g(t) - w_g^s([a, b])(t)\| \leq C \left( \min \left\{ \sup_{t \in [a, t_g)} \|s_g(t)\|, \sup_{t \in [t_g, b]} \|s_g(t)\| \right\} + \bar{h}^{\min\{s+1, r+\varrho\}} \right)$$

*Dowód.*  $(\dots)$  □

**Wniosek 5.3.** *Istnieje stała  $C$  taka, że dla wszystkich  $[a, b]$ , wszystkich  $g \in G^{r,\varrho}([a, b])$  z  $\delta_g^0 = 0$ ,  $0 \leq \delta \leq \min 1, \bar{h}$  oraz  $s = 0, 1, \dots, r$ , mamy*

$$\hat{t}_g \in (a, a + \delta] \cup [b - \delta, b) \implies \sup_{t \in [a, b]} \|g(t) - w_g^s([a, b])(t)\| \leq C (\delta + \bar{h}^{\min\{s+1, r+\varrho\}})$$

Dowód. (...)

□

**Lemat 5.4.** Istnieje stała  $C$  zależna od  $r$  i  $L_r$  taka, że dla wszystkich  $[a, b]$ ,  $\bar{a} \in (a, b)$ , wszystkich  $g \in G^{r,e}([a, b])$ , mamy

$$\hat{t}_g \in (\bar{a}, b) \implies g(t) - w_g^r([a, \bar{a}]) (t) = s_g(t) \mathbb{1}_{[\hat{t}_g, b]}(t) + R_g(t), \quad t \in [\bar{a}, b],$$

gdzie  $\|R_g(t)\| \leq C \bar{h}^{r+e}$ , dla  $t \in [\bar{a}, b]$

Dowód. (...)

□

**Wniosek 5.5.** Istnieje stała  $\bar{C}$  zależna od  $r$  i  $L_r$  taka, że dla wszystkich  $[a, b]$ ,  $\bar{a} \in (a, b)$ , wszystkich  $g \in G^{r,e}([a, b])$ , mamy

$$\hat{t}_g \in (a, \bar{a}) \implies g(t) - w_g^r([\bar{a}, a]) (t) = s_g(t) \mathbb{1}_{[a, \hat{t}_g]}(t) + R_g(t), \quad t \in [a, \bar{a}],$$

gdzie  $\|R_g(t)\| \leq \bar{C} \bar{h}^{r+e}$ , dla  $t \in [a, \bar{a}]$

Dowód. (...)

□

**Stwierdzenie 5.6.** Istnieje stała  $C^*$  zależna od  $r$  i  $L_r$  taka, że dla wszystkich  $a < \bar{a} < \bar{b} < b$  i  $[a, b]$  oraz wszystkich  $g \in G^{r,e}([a, b])$ , mamy

$$\hat{t}_g \text{ z niezerowym wielomianem } s_g \text{ nie jest w } (a, b) \implies A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b) \leq C^*$$

Dowód. (...)

□

**Uwaga 5.7.** Stwierdzenie 5.6 pokazuje, że procedura LOCATE-APPROXIMATE wraz z procedurą BISECTION, sukcesywnie wybiera przedziały bazując a wartościach testu. Zauważmy, że jeżeli  $\hat{t}_g$  jest unikalna, to wtedy dla jakiegokolwiek przedziału  $[a, b]$ , który nie został wybrany, mamy  $A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b) \leq C^*$

**Stwierdzenie 5.8.** Niech  $D > 0$ . Istnieją stałe  $C$  i  $\bar{N}$ , zależne tylko od parametrów klast  $G^{r,e}([a, b])$  i  $D$ , takie, że dla wszystkich  $[a, b]$ ,  $[\bar{a}, \bar{b}] \subset (a, b)$ ,  $g \in G^{r,e}([a, b])$  oraz  $s = 0, 1, \dots, r$ , mamy

$$\hat{t}_g \in (\bar{a}, \bar{b}] \wedge b - a \leq D(\bar{b} - \bar{a}) \implies \text{dla } [\gamma, \omega] = [a, b] \vee [\gamma, \omega] = [\bar{a}, \bar{b}] \text{ zachodzi}$$

$$\sup_{t \in [\gamma, \omega]} \|g(t) - w_g^s([\gamma, \omega]) (t)\| \leq C (1 + A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b)) \bar{h}^{\min\{s+1, r+e\}}$$

oraz ponadto

$$\sup_{t \in [\gamma, \omega]} \left\| \left( w_g^s([\gamma, \omega]) \right)^{(j)} (t) \right\| \leq \bar{N} (1 + \bar{h}^{\min\{s+1-j, r+\rho-j\}} + (1 + A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b)) \bar{h}^{r+\varphi-j})$$

dla  $j = 0, 1, \dots, s$ .

Dowód. (...)

□

**Uwaga 5.9.** Stwierdzenie 5.8 pokazuje, że w przypadku z osobliwością, ograniczenie górne na błąd interpolacji możemy wyrazić za pomocą  $A_g(a, \bar{a}, \bar{b}, b)$



Poniższy lemat dotyczy przypadku, gdy osobliwość znajduje się na brzegu przedziału  $[a, b]$

(lemat... dowod...)

(Dowód tw1 z 2014)

**Uwaga 5.10.** Twierdzenie 5.1 zachodzi również dla funkcji  $g$ , która ma skok w punkcie  $c_i$  początkowego podziału  $M$  oraz ma niezerowy wielomian  $s_g$  dla co najwyżej jednego nieznanego punktu  $t_g, t_g \neq c_i \forall_i$ .

## 5.2. Analiza algorytmu opartego o informację zaburzoną

Niech  $m \geq 2r + 1$ ,  $h + \frac{T}{m}$  oraz  $t_i = ih$  dla każdego  $i$ . Przez  $d_i$  oznaczmy różnicę dzieloną stopnia  $r + 1$  bazującą na wartościach  $f(t_i)$ :

$$d_i = f[t_i, \dots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

Następnie oznaczmy przez  $\tilde{d}_i$  (niedokładną) różnicę dzieloną stopnia  $r + 1$  bazującą na wartościach  $y_j = F(t_j) + e_j$ , gdzie  $|e_j| \leq \delta$

$$\tilde{d}_i = \tilde{f}[t_i, \dots, t_{i+r+1}] = \sum_{j=1}^{i+r+1} \gamma_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i+r+1} (t_k - t_j)^{-1}$$

**Lemat 5.11.** Jeżeli  $f \in H_{r,\varrho}(t_i, t_{i+r+1})$ , wtedy

$$|\tilde{d}_i| \leq \frac{c(g_f)(r+1)^\varrho}{(r+1)!} h^{\varrho-1} + \delta \frac{2^{r+1}}{(r+1)!} h^{-(r+1)}$$

Dowód. (...)

□

Teraz oszacujemy błąd interpolacji i ekstrapolacji w obecności zaburzenia wartości funkcji. Niech  $p_i$  i  $\tilde{p}_i$  odpowiadają wielomianom stopnia co najwyżej  $r$  interpolujących  $f$  opartych na dokładnych i niedokładnych wartościach funkcji  $f$  w punktach  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}$ . Dla  $r \geq 1$ , wprowadźmy oznaczenia:

$$\beta_r = \max_{0 \leq t \leq r} \left| \prod_{k=0}^r (t - k) \right|, \quad \Lambda_r = \max_{0 \leq t \leq r} \sum_{k=0}^r \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^r \left| \frac{t - l}{k - l} \right|, \quad \tilde{\Lambda}_r = \sum_{k=0}^r \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^r \left| \frac{2r+1-l}{k-l} \right|$$

**Lemat 5.12.** Niech  $f \in H_{0,\varrho}$ , wtedy:

dla  $x \in [t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}]$ :

$$|f(x) - \tilde{p}_1(x)| \leq C_{0,\varrho}(f) h^\varrho + \delta, \quad C_{0,\varrho}(f) = c(g_f) 2^{-\varrho}$$

dla  $x \in [t_{i-1}, t_{i-\frac{1}{2}}) \cup (t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}]$ :

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{0,\varrho}(f) h^\varrho + \delta, \quad \overline{C}_{0,\varrho}(f) = c(g_f)$$

Niech  $f \in H_{r,\varrho}$  i  $r \geq 1$ , wtedy:  
dla  $x \in [t_i, t_{i+r}]$  :

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq C_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r, \quad C_{r,\varrho}(f) = c(g_f)2^{-\varrho}$$

dla  $x \in [t_{i-r-1}, t_i] \cup (t_{i+r}, t_{i+2r+1}]$  :

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq \overline{C}_{r,\varrho}(f)h^{r+\varrho} + \delta\overline{\Lambda}_r, \quad \overline{C}_{r,\varrho}(f) = c(g_f)\frac{(2r+1)!(2r+1)^\varrho}{r(r!)^2}$$

Dowód. (...)

□

**Lemat 5.13.** Niech  $f \in F_{r,\varrho}$  oraz

$$s_f \in \begin{cases} (t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}], & \text{gdy } r = 0 \\ (t_i, t_{i-r}], & \text{gdy } r \geq 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że  $|\tilde{d}_k| \leq Bh^{\varrho-1}\forall_k$ . Wtedy dla każdego  $x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ , gdy  $r = 0$  lub dla każdego  $x \in [t_{i-r-1}, t_{i+2r+1}]$ , gdy  $r \geq 1$ , mamy:

$$|f(x) - \tilde{p}_i(x)| \leq D_r(B, f)h^{r+\varrho} + \delta\Lambda_r,$$

gdzie  $D_0(B, f) = c(g_f) + B$  i

$$D_r(B, f) = c(g_f)\frac{\beta_r(r+1)^\varrho}{rr!} + B(2^{r+1} - 1)\frac{(2r)!}{(r-1)!} \quad \text{for } r \geq 1.$$

Dowód. (...)

□

Przedstawiony algorytm używa  $m$  wartości funkcji w kroku 1 oraz jedną wartość funkcji w każdej iteracji w krokach 2 i 3. Czyli w kroku 2 używamy co najwyżej

$$\left\lceil \frac{\ln\left(\frac{(r+1)h}{\omega(h)}\right)}{\ln\left(\frac{r+2}{r+1}\right)} \right\rceil$$

wartości funkcji i  $(r-1)$  w kroku 3. Stąd otrzymujemy, że jeżeli  $\omega = \omega(h) \geq kh^\alpha$  dla pewnego ustalonego  $k$  i  $\alpha$ , wtedy w najgorszym przypadku liczba użytych wartości funkcji równa się asymptotycznie  $m = \frac{T}{h}$  dla  $h \rightarrow 0^+$ .

(punktowa analiza błędu...)

Podsumowując analizę błędu dla każdego punktu otrzymujemy, że gdy  $\delta \leq bh^{r+\varrho}$  wtedy:

$$\begin{cases} |f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} & \text{dla } x \notin (u_2, v_2] \\ |f(x) - \phi_h^*(y_h)(x)| \propto \max(1, c(g_f))h^{r+\varrho} + |\Delta_f^{(0)}| & \text{dla } x \in (u_2, v_2] \end{cases}$$

gdzie  $v_2 - u_2 \leq \omega$

Mamy również, że liczba ewaluacji funkcji  $n$  jest proporcjonalna do  $h^{-1}$ , tak więc  $h^{r+\varrho}$  jest proporcjonalne do  $n^{-(r+\varrho)}$ . Z tego wynika poniższe stwierdzenia:

**Stwierdzenie 5.14.** *Niech  $1 \leq p \leq \infty$ . Jeżeli  $\delta \leq bh^{r+\varrho}$  oraz  $\omega(h) = h^{(r+\varrho)p+1}$ , wtedy*

$$e_p^{wor}(\varphi_h^*, N_h^*; \mathcal{F}_{r,\varrho}^D) = \mathcal{O}(n^{-(r+\varrho)})$$

Warto wspomnieć, że powyższe ograniczenia górne nie może zostać spełnione przez algorytmy nieadaptacyjne, co zostało pokazane w [2]. Pokazano tam również, że dla  $p = \infty$  nie istnieje algorytm z błędem zbiegającym do zera, dlatego założenia  $p < \infty$  jest niezbędne. Dodatkowo, gdy rozważymy klasę  $\mathcal{F}_{r,\varrho}^C \subset \mathcal{F}_{r,\varrho}^D$ , to możemy uprościć algorytm biorąc  $\omega(h) = (r+1)h$  i unikając iteracji w kroku 2. Otrzymujemy w ten sposób algorytm, który dla  $r = 0, 1$  jest nieadaptacyjny, a dla  $r \geq 2$  używa co najwyżej  $r-1$  dodatkowych punktów, niezależnie od tego jak małe jest  $h$ . Co więcej, ograniczenie górne zachodzi dla  $p = \infty$  Stosując powyższą modyfikację możemy sformułować następujące stwierdzenie.

**Stwierdzenie 5.15.** *Jeżeli  $\delta \leq bh^{r+\varrho}$  i  $\omega(h) = (r+1)h$ , wtedy:*

$$e_\infty^{wor}(\varphi_h^*, N_h^*; \mathcal{F}_{r,\varrho}^C) = \mathcal{O}(n^{-(r+\varrho)}). \quad (5.1)$$

Ponownie, dla  $r \geq 2$  użycie informacji adaptacyjnej jest konieczne. Łącząc wyniki 5.14, 5.15 i 2.1(i) otrzymujemy 2.2. Faktycznie, dla ustalonego  $\delta$  i  $n$  możemy wybrać  $h = \frac{T}{m}$  takie, że

$$m = m(n, \delta) = \left\lfloor \min \left( \beta n, \frac{1}{T} \left( \frac{b}{\delta} \right)^{\frac{1}{r+\varrho}} \right) \right\rfloor = \Theta(\min(n, \delta^{-1/(r+\varrho)})), \quad (5.2)$$

**Uwaga 5.16.** *Zauważmy, że dla ustalonej precyzji  $\delta$  nie ma sensu brać  $m$  większego niż  $m_{max} = \Theta(\delta^{-1/(r+\varrho)})$  wartości funkcji, ponieważ dla  $m = m_{max}$  osiągamy maksymalną dokładność dla danego  $\delta$ .*

---

## Rozdział 6

---

# Testy numeryczne

porównanie algorytmów

# Bibliografia

- [1] F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, N. Dyn, *Interpolation and approximation of piecewise smooth functions*, SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 41–57
- [2] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, Y. Zhao, *The power of adaption for approximating functions with singularities*, Mathematics Of Computation 77 2008, p. 2309–2338
- [3] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, *Uniform approximation of piecewise  $r$ -smooth and globally continuous functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 47, No. 1 (2008/2009)
- [4] B. Kacewicz, P. Przybyłowicz, *Complexity of the derivative-free solution of systems of IVPs with unknown singularity hypersurface*, Journal of Complexity
- [5] P. M. Morkisz, L. Plaskota, *Approximation of piecewise Hölder functions from inexact information*, Journal of Complexity
- [6] J. F. Traub, H. Woźniakowski, G. W. Wasilkowski *Information-Based Complexity*, Academic Press, Inc.