ENGLISH VERSION: SEE PAGE 5–8

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 7 november 2016, 9:00–12:00 uur

---

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle gelinieerde bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het einde van het tentamen worden ingeleverd.

Het tentamen bevat 5 meerkeuze en 6 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de meerkeuze vragen 1–5. Bij deze vragen hoeft u alleen het juiste antwoord te omcirkelen. Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven 6–11 dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen, voor de meerkeuze vragen 4 punten per vraag, voor de overige vragen het aantal punten dat bij de vraag staat aangegeven.
Het cijfer voor dit tentamen 2WBB1 wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en tot één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WBB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studiewijzer

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Opleiding	

---

zie volgende pagina

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 7 november 2016, 9:00–12:00 uur

---

Meerkeuze vragen

1. Een parametervoorstelling (of vectorvoorstelling) van het vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de punten $P = (1,1,7)$, $Q = (2,1,5)$, en $R = (4,2,0)$ wordt gegeven door :

   (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$;

   (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; **(d)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Voor de hoeken α in het tweede en β in het eerste kwadrant geldt $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ en $\sin(\beta) = \frac{5}{13}$. Nu is $\sin(\alpha + \beta)$ gelijk aan:

   (a) $\dfrac{14}{65}$; **(b)** $\dfrac{33}{65}$; **(c)** $-\dfrac{33}{65}$; **(d)** $-\dfrac{63}{65}$.

3. Bereken de volgende limiet:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x) - \arctan(x) - x\cos(x)}{x^3} .$$

   (a) $\dfrac{1}{3}$; **(b)** $\dfrac{1}{2}$; **(c)** $\dfrac{2}{3}$; **(d)** 1 .

4. Bepaal de afgeleide $F'(x)$ van de functie $F(x)$ gegeven door

   $$F(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt.$$

   (a) $e^{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}$; **(b)** $\dfrac{e^{4x}}{4\sqrt{x}} - \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$; **(c)** $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$; **(d)** $e^{4x^2} + e^{x^2}$.

5. Bereken de volgende integraal:

   $$\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1 - 2\sqrt{x}}\, dx .$$

   (a) $\frac{1}{3}$; **(b)** $\frac{1}{4}\sqrt{3}$; **(c)** $-\frac{1}{3} + \ln(\sqrt{3})$; **(d)** $\frac{1}{3}\arcsin(\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

---

zie volgende pagina

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 7 november 2016, 9:00–12:00 uur

---

Open vragen

[3] 6. In de ruimte $\mathbb{R}^3$ ligt de driehoek ABC, met $A = (1,1,1)$, $B = (4,3,3)$ en $C = (1,2,5)$. Laat zien dat deze driehoek gelijkbenig is (dus twee van de drie zijden zijn even lang), en bepaal de cosinus van de tophoek (de hoek tussen deze twee zijden).

7. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x) = (x^2+1)\arctan(x) - x$.

[2] **(a)** Bepaal de afgeleide $f'(x)$ en laat zien dat $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en $f'(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

[4] **(b)** Uit **(a)** volgt dat f inverteerbaar is. Bepaal de afgeleide van de inverse f^{-1} van f in het punt $1 - \frac{1}{2}\pi$, dus $(f^{-1})'(1-\frac{1}{2}\pi)$.

[4] 8. Bepaal het Taylorpolynoom van graad 3 rond $a = \pi$ van de functie $f(x) = e^{\sin(x)}$.

9. Bepaal de volgende integralen (vereenvoudig het antwoord indien mogelijk).

[4] **(a)** $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} e^x \sin(\tfrac{1}{3}\pi - e^x)\, dx$.

[4] **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^4 - 6x^3 + 7x^2}{x^2 - 6x + 8}\, dx$.

[4] 10. Bepaal de vergelijking van de raaklijn door het punt $(1,2)$ aan de kromme, gegeven door de vergelijking

$$2x^2y - e^{xy-2} = 3.$$

[5] 11. Bepaal de oplossing y van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x-1} = 4,$$

met beginwaarde $y(0) = 1$.

Tabellen staan op volgende pagina.

Primitieven / Antiderivatives (zonder/without “$+C$”)

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Taylorpolynomials rond/around $x = 0$

Function	Taylorpolynomial plus $\mathcal{O}$-term
e^x	$1 + x + \dfrac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$
$\sin(x)$	$x - \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \dfrac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

Goniometrische identiteiten / Trigonometric identities

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\sin^2(x) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\\
\cos^2(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}$$

Vectoren / Vectors

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$.

- Inproduct / Inwendig product / Inner product / Dot product:

  $$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

- Uitproduct / Uitwendig product / Cross product / Vector product:

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

NEDERLANDSE VERSIE: BLADZIJ 1–4

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Department of Mathematics and Computer Science

Exam Calculus, 2WBB1, Monday 7 November 2016, 9:00–12:00

Please detach this sheet from the rest of the exam. Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in. Scratch paper need not be handed in.

The exam consists of 5 multiple-choice and 6 open questions. The backside of this sheet contains the multiple choice questions 1–5. You are required to circle the correct answer. If you wish to change your answer: clearly indicate what your final choice is.

The solutions to the open problems 6–11 should be motivated, formulated clearly and arranged orderly. You can give your answers in English or in Dutch.

The maximum score for the exam is 50 points, where 4 points can be earned for each of the multiple choice questions. The points for each of the open exercises are specified within the exercises.
The final grade for the exam 2WBB1 is obtained by dividing the total score by 5 and rounding to one decimal place.

The final grade of the course 2WBB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books, or written material is not allowed.

Last name and initials	
Identity number	
Program	

---

see next page

Multiple choice questions

1. A parameter or vector representation of the plane V in $\mathbb{R}^3$ containing the points $P=(1,1,7)$, $Q=(2,1,5)$, and $R=(4,2,0)$ is given by:

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; **(d)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. For the angles α in the second and β in the first quadrant we have $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ and $\sin(\beta) = \frac{5}{13}$. Then $\sin(\alpha+\beta)$ equals:

(a) $\dfrac{14}{65}$; **(b)** $\dfrac{33}{65}$; **(c)** $-\dfrac{33}{65}$; **(d)** $-\dfrac{63}{65}$.

3. Compute the following limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \arctan(x) - x\cos(x)}{x^3} .$$

(a) $\dfrac{1}{3}$; **(b)** $\dfrac{1}{2}$; **(c)** $\dfrac{2}{3}$; **(d)** 1 .

4. Determine the derivative $F'(x)$ of the function $F(x)$ given by

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} e^{t^2} \, dt .$$

(a) $e^{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}$; **(b)** $\dfrac{e^{4x}}{4\sqrt{x}} - \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$; **(c)** $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$; **(d)** $e^{4x^2} + e^{x^2}$.

5. Compute the following integral:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1-2\sqrt{x}} \, dx .$$

(a) $\frac{1}{3}$; **(b)** $\frac{1}{4}\sqrt{3}$; **(c)** $-\frac{1}{3} + \ln(\sqrt{3})$; **(d)** $\frac{1}{3}\arcsin(\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

see next page

Exam Calculus, 2WBB1, Monday 7 November 2016, 9:00–12:00

Open questions

[3] 6. In $\mathbb{R}^3$ is given the triangle ABC, with $A = (1, 1, 1)$, $B = (4, 3, 3)$ and $C = (1, 2, 5)$. Show that this triangle is isosceles (so two of the three sides have the same length) and determine the cosine of the angle at the apex (so the angle between these two sides).

7. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function given by $f(x) = (x^2 + 1) \arctan(x) - x$.

[2] **(a)** Determine the derivative $f'(x)$ and show that $f'(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $f'(x) > 0$ for $x \neq 0$.

[4] **(b)** From **(a)** it follows that f is invertible. Determine the derivative of the inverse f^{-1} of f in the point $1 - \frac{1}{2}\pi$, so $(f^{-1})'(1 - \frac{1}{2}\pi)$.

[4] 8. Determine the Taylor polynomial of degree 3 around $a = \pi$ of $f(x) = e^{\sin(x)}$.

9. Compute the following integrals (simplify the answer if possible):

[4] **(a)** $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} e^x \sin(\tfrac{1}{3}\pi - e^x)\, dx.$

[4] **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^4 - 6x^3 + 7x^2}{x^2 - 6x + 8}\, dx.$

[4] 10. Determine an equation of the tangent line at the point $(1, 2)$ to the curve, given by the equation

$$2x^2y - e^{xy-2} = 3.$$

[5] 11. Determine the solution y of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x-1} = 4,$$

with initial value $y(0) = 1$.

You can find tables on the next page.

Primitieven / Antiderivatives (zonder/without "$+C$")

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Taylorpolynomials rond/around $x = 0$

Function	Taylorpolynomial plus $\mathcal{O}$-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

Goniometrische identiteiten / Trigonometric identities

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\sin^2(x) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) \\
\cos^2(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

Vectoren / Vectors

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$.

- Inproduct / Inwendig product / Inner product / Dot product:

  $$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Uitproduct / Uitwendig product / Cross product / Vector product:

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$