Name student

____

Student ID

1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
0	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Calculus

Final Exam Calculus 2WBB0

5 November 2018 09:00 - 12:00

Tutor Group: ______________________________

Write down your name and your student ID and tutor group at the appropriate places above. Make sure that you enter your student ID by coloring the appropriate boxes. Use a black or blue pen and color the full box black or blue.

Provide your answers on this paper inside the answer box underneath a question. If you need more space for your answers, use the extra space at the end.
If you need even more paper, ask the invigilators for a new exam and fill out the first page before continuing with the answers.
Hand in all pages. Do not remove the staple. If you remove it anyhow, check that you hand in all pages.

Vul uw naam en student ID en tutorgroep in op de daarvoor bestemde plekken en kleur tevens de corresponderende boxen. Doe dit met zwarte of blauwe pen en maak het hele blokje zwart of blauw.

Geef uw antwoorden op dit papier in de daarvoor bestemde box onder een vraag. Als u meer ruimte nodig hebt voor uw antwoorden gebruik de extra ruimte op de pagina's aan het eind.
Als u dan nog steeds meer ruimte nodig hebt, vraag de surveillanten voor een extra toets en vul voor deze toets ook pagina 1 geheel in voor u verder gaat met uw antwoorden.
Lever alle pagina's weer in. Verwijder de nietjes niet. Als u ze toch verwijdert, controleer dan of u alle pagina's inlevert.

Formulas

Primitieven / Antiderivatives (zonder/without "$+C$")

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Taylorpolynomials rond/around $x = 0$

Function	Taylorpolynomial plus $\mathcal{O}$-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

Goniometrische identiteiten / Trigonometric identities

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \sin^2(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \cos^2(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

Vectoren / Vectors

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$.

Inproduct / Inwendig product / Inner product / Dot product:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Uitproduct / Uitwendig product / Cross product / Vector product:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Instructions on the exam

The exam consists of 8 multiple-choice (1 a–h) and 6 open questions (2–7).
For the multiple choice exercises, you are required to color the circle in front of the answer of your choice.
If you wish to change your answer, clearly indicate what your final choice is.
The solutions to the open problems 2–7 should be motivated, formulated clearly and arranged orderly.
You can give your answers in English or in Dutch.
The maximum score for the exam is 50 points. The points for each of the exercises are specified within the exercises.
The final grade for this exam is obtained by dividing the total score by 5 and rounding to one decimal place.
The final grade of the course 2WBB0 is determined according to the rules stated in the study guide.
Use of laptop, calculator, books, or written material is not allowed

Het tentamen bevat 8 meerkeuzevragen (1a–h) en 6 open vragen (2 —7).
Bij deze meerkeuzevragen hoeft u alleen het juiste antwoord aan te geven door het bolletje voor het antwoord van uw keuze in te kleuren. Indien u uw antwoord wilt veranderen, geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.
De uitwerkingen van de open opgaven 2–7 dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.
In totaal kunt u 50 punten halen. Bij elke vraag staat het aantal te behalen punten aangegeven.
Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en tot één cijfer achter de komma af te ronden.
Het eindcijfer voor het vak 2WBB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studiewijzer.
U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Exercise 1 (Multiple Choice Questions)

2.5p **1a** $\tan(\arccos(-\frac{5}{9})) =$

- ○ $\frac{1}{5}\sqrt{14}$
- ○ $\frac{1}{9}\sqrt{56}$
- ○ $\frac{56}{81}$
- ○ $-\frac{2}{5}\sqrt{14}$

2.5p **1b** The slope of the tangent line at point $(-3,1)$ of curve $x^2y + xy^2 = 6$ is:
De richtingscoëfficient van de raaklijn in het punt $(-3,1)$ aan de kromme $x^2y + xy^2 = 6$ is:

- ○ 1
- ○ $-\frac{3}{5}$
- ○ $\frac{5}{3}$
- ○ -2

2.5p **1c** In $x = 1$ the piecewise defined function
In $x = 1$ is de stuksgewijs gedefinieerde functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \text{ if } x > 1 \\ x^2 + 2x - 3 \text{ if } x \leqslant 1 \end{cases}$$

- ○ is not continuous and not differentiable
  niet continue en niet differentieerbaar
- ○ is continuous but not differentiable
  continue, maar niet differentieerbaar
- ○ is not continuous but differentiable
  niet continu maar wel differentieerbaar
- ○ is continuous and differentiable
  continu en differentieerbaar

2.5p **1d** The derivative of $\arctan(x^2) - \arctan(\frac{1}{x^2})$ with respect to x equals:
De afgeleide van $\arctan(x^2) - \arctan(\frac{1}{x^2})$ naar x is gelijk aan:

- ○ $\dfrac{4x}{1+x^4}$
- ○ 0
- ○ $\dfrac{2x+2x^3}{1+x^4}$
- ○ $\dfrac{2x-2x^3}{1+x^4}$

2.5p **1e** Linearisation of $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 49$ yields the following approximation of $\sqrt{50}$:
Linearisatie van $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 49$ geeft de volgende benadering van $\sqrt{50}$:

- ○ 7
- ○ $\dfrac{50}{7}$
- ○ $\dfrac{99}{14}$
- ○ $\dfrac{197}{28}$

2.5p **1f** For $0 \leqslant x < 1$ we have
Voor $0 \leqslant x < 1$ geldt

$$f(x) = \int_0^{\sin(x)} \arcsin(t)\, dt.$$

Then $f'(x) =$
Dan is $f'(x) =$

- ○ x
- ○ $x\cos(x)$
- ○ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- ○ $x\sin(x)$

2.5p **1g** The plane V is given by the vector representation
Het vlak V is gegeven door parameter voorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

The distance of the piont $(4, 2, 3)$ to V equals
De afstand van het punt $(4, 2, 3)$ tot V is gelijk aan

- ○ 3
- ○ $\sqrt{14}$
- ○ $\sqrt{5}$
- ○ 2

2.5p **1h** $\int_{e^2}^{e^6} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx =$

- ○ $\ln(\frac{1}{4})$
- ○ $\ln(\frac{1}{3})$
- ○ $\ln(3)$
- ○ $\ln(4)$

Exercise 2

3p **2** Give a vector representation for the intersection line ℓ of the planes V, given by the equation $3x - 2y + 4z = 5$, and W, given by the equation $x + y + 3z = 5$.
Geef een vectorvoorstelling voor de snijlijn ℓ van de vlakken V, gegeven door de vergelijking $3x - 2y + 4z = 5$, en W, gegeven door de vergelijking $x + y + 3z = 5$.

Exercise 3
Consider the function $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ given by $f(x) = x^2 + x\cos(x)$ for all $x \geqslant 0$.
Gegeven is de functie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2 + x\cos(x)$ voor alle $x \geqslant 0$.

2p **3a** Show that the function f is one-to-one.
Bewijs dat de functie f injectief is.

2p **3b** Determine $(f^{-1})'(\frac{\pi^2}{4})$.
Bepaal $(f^{-1})'(\frac{\pi^2}{4})$.

Exercise 4
Determine the following limits.
Bepaal de volgende limieten.

4p **4a** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{(x^4)} - \cos(x^2)}{x^2(\cos(x) - 1)}$.

4p **4b** $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(f(x))}{x^2 - x}$,
where f is a function satisfying $\frac{1}{2}e^{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant 2e^{3x^2+5x}$ for all $x > 0$.
waarbij f een functie is met $\frac{1}{2}e^{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant 2e^{3x^2+5x}$ voor alle $x > 0$.

Exercise 5
Determine the following integrals.
Bepaal de volgende integralen.

4p **5a** $\int_0^\pi x^2 \cos(x)\, dx.$

4p **5b** $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\, dx.$

Exercise 6

3p **6** Show that for all a, b in $\mathbb{R}$ we have:
Bewijs dat voor alle a, b in $\mathbb{R}$ geldt dat

$$|\sin^2(b) - \sin^2(a)| \leqslant |b - a|.$$

Hint: Mean-Value Theorem.

Exericse 7

4p **7** Find a solution to the following differential equation satisfying the given initial condition:
Vind een oplossing voor de volgende differentiaalvergelijking die voldoet aan de gegeven beginvoorwaarde:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1 + \frac{y}{x+1}, \quad y(0) = 2.$$

Extra Space

Please indicate clearly on which exercise you are working.