ENGLISH VERSION: SEE PAGES 5-7

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Calculus B (2WBB0) op maandag 6 november 2017, 09:00–12:00

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle gelinieerde bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het einde van het tentamen worden ingeleverd.

Het tentamen bevat 5 meerkeuze vragen en 5 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat 5 meerkeuze vragen. Bij deze vragen hoeft u alleen het juiste antwoord te omcirkelen. Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven 6-10 dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen. Het aantal punten dat u voor een onderdeel kunt halen, staat tussen rechte haken voor het betreffende onderdeel vermeld.
Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en tot één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WBB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studiehandleiding.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Opleiding	
Tutorgroep/Tutor	

---

zie volgende pagina

Tentamen Calculus B (2WBB0) op maandag 6 november 2017, 09:00–12:00

Meerkeuze vragen

[4] 1. De punten (x, y) in het vlak $\mathbb{R}^2$, gegeven door de vergelijking

$$25(x^2 + y^2) - 100(x - y) = -184$$

vormen een cirkel met middelpunt M en straal r. Geef M en r.

(a) $\begin{array}{rcl} r &=& 2/5 \\ M &=& (2,2) \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (-2,2) \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (2,2) \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (2,-2) \end{array}$

[4] 2. De waarde van $\sin(\arctan(\frac{1}{9}))$ is gelijk aan:

(a) $\frac{1}{\sqrt{82}}$ (b) $\frac{1}{81}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $-\frac{1}{9}$

[4] 3. In $\mathbb{R}^3$ zijn drie vlakken U, V en W gegeven door hun vergelijkingen $U : y = 2$, $V : 3x - \sqrt{3}z = 0$, en $W : x = 1$.
Zij ℓ de snijlijn van de vlakken U en V. Bepaal de hoek tussen de normaalvector van het vlak W en de snijlijn ℓ.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

[4] 4. De functie $P(t)$ meet de hoeveelheid zuurstof in een vijver op tijdstip t, waarbij $P(t) = 1$ het normaal (niet-verontreinigd) niveau is en $0 \leq P(t) \leq 1$. De tijd t wordt gemeten in weken. Op $t = 0$ wordt afval in de vijver gedumpt en, terwijl het afval oxideert, wordt de hoeveelheid zuurstof gegeven door

$$P(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ voor } t \geq 0.$$

Op welke tijd t is de hoeveelheid zuurstof in de vijver het laagst?

(a) 0 weken (b) $\sqrt{3}$ weken (c) 1 week (d) 3 weken

[4] 5. De f functie gegeven door $f(x) = x^3 + x$ is inverteerbaar. Als $g(x) = f^{-1}(x)$, bepaal dan $g'(2)$.

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

zie volgende pagina

Open vragen

[4] 6. Bepaal een vergelijking van de raaklijn door het punt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ aan de kromme gegeven door de vergelijking

$$y + x\ln(y) - 2x = 0.$$

[4] 7. Bepaal het Taylorpolynoom van graad 3 rond $a = 0$ van de functie

$$f(x) = \ln(1 + \sin(x)) .$$

8. Bepaal de volgende limieten:

[4] **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$

[4] **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x)$

9. Bepaal de volgende integralen:

[4] **(a)** $\displaystyle\int_0^{\pi} 5(5 - 4\cos(x))^{1/4}\sin(x)\,dx.$

[5] **(b)** $\displaystyle\int x^7\sin(2x^4)\,dx.$

[5] 10. Bepaal de oplossing y van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -2xy + 3x^2e^{-x^2}$$

met beginwaarde $y(0) = 1$.

Tabellen staan op volgende pagina 4.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Department of Mathematics and Computer Science

Primitieven / Antiderivatives (zonder/without "$+C$")

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Taylorpolynomials rond/around $x = 0$

Function	Taylorpolynomial plus $\mathcal{O}$-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

Goniometrische identiteiten / Trigonometric identities

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\sin^2(x) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\\
\cos^2(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}$$

Vectoren / Vectors

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$.

- Inproduct / Inwendig product / Inner product / Dot product:

  $$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Uitproduct / Uitwendig product / Cross product / Vector product:

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Department of Mathematics and Computer Science

Exam Calculus B (2WBB0), Monday 6 November 2017, 09:00–12:00

Please detach this sheet from the rest of the exam. Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in. Scratch paper need not be handed in.

The exam consists of 5 multiple choice questions and 5 open questions.

You can give your solutions in English (preferred) or in Dutch.

The backside of this sheet contains the multiple choice questions. You are required to circle the correct answer. If you wish to change your answer: clearly indicate what your final choice is.

The solutions to the open problems should be motivated, formulated clearly and arranged orderly.

The maximum score for the exam is 50 points. The maximal number of points you can get for a (sub)part, is indicated in front of the part between brackets.
The final grade for the exam is obtained by dividing the total score by 5, rounding to one decimal place.

The final grade of the course 2WBB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books, or written material is not allowed.

Last name and initials	
Identity number	
Program	
Tutorgroup/Tutor	

---

see next page

Exam Calculus B (2WBB0), Monday 6 November 2017, 09:00–12:00

Multiple Choice questions

[4] 1. The points (x, y) in the $\mathbb{R}^2$ plane, described by the equation

$$25(x^2 + y^2) - 100(x - y) = -184$$

form a circle with center M and radius r. Give M and r.

(a) $\begin{array}{rcl} r &=& 2/5 \\ M &=& (2,2) \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (-2,2) \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (2,2) \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcl} r &=& 4/5 \\ M &=& (2,-2) \end{array}$

[4] 2. The value of $\sin(\arctan(\frac{1}{9}))$ is equal to:

(a) $\frac{1}{\sqrt{82}}$ (b) $\frac{1}{81}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $-\frac{1}{9}$

[4] 3. Given the three planes in $\mathbb{R}^3$ with equations $U : y = 2$, $V : 3x - \sqrt{3}z = 0$, and $W : x = 1$. Let ℓ be the intersection line of the planes U and V. Determine the angle between the normal of the plane W and the intersection line ℓ.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

[4] 4. The function $P(t)$ measures the level of oxygen in a pond, where $P(t) = 1$ is the normal (un-polluted) level and $0 \leq P(t) \leq 1$. Time t is measured in weeks. At $t = 0$ waste is dumped into the pond and, while the waste material is oxidized, the level of oxygen is given by

$$P(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ for } t \geq 0.$$

At which time t is the level of oxygen in the pond the lowest?

(a) 0 weeks (b) $\sqrt{3}$ weeks (c) 1 week (d) 3 weeks

[4] 5. The function f given by $f(x) = x^3 + x$ is invertible. If $g(x) = f^{-1}(x)$, determine $g'(2)$.

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

see next page

Open questions

[4] 6. Determine an equation for the tangent line to the curve given by the equation

$$y + x\ln(y) - 2x = 0$$

in the point $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

[4] 7. Determine the Taylor polynomial of degree 3 around $a = 0$ of the function

$$f(x) = \ln(1 + \sin(x))\,.$$

8. Calculate the following limits:

[4] **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$

[4] **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(x)$

9. Calculate the following integrals:

[4] **(a)** $\displaystyle\int_0^{\pi} 5(5 - 4\cos(x))^{1/4}\sin(x)\,dx$

[5] **(b)** $\displaystyle\int x^7\sin(2x^4)\,dx$

[5] 10. Determine the solution y of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = -2xy + 3x^2e^{-x^2}$$

with initial value $y(0) = 1$.

See Tables on page 4.