ENGLISH VERSION: SEE PAGE 5–7, **FORMULES: ZIE PAGINA 4**

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 29 januari 2018, 18:00–21:00 uur

---

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle gelinieerde bladen die u inlevert. **Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het einde van het tentamen worden ingeleverd.**

Het tentamen bevat 5 meerkeuze en 5 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de meerkeuze vragen 1–5. Bij deze vragen hoeft u alleen **het juiste antwoord te omcirkelen**. Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven 6–10 dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen, voor de meerkeuze vragen 4 punten per vraag, voor de overige vragen het aantal punten dat bij de vraag staat aangegeven.
Het cijfer voor dit tentamen 2WBB1 wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en tot één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WBB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studiewijzer.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Opleiding	
Naam tutor	
Tutorgroep	

---

zie volgende pagina

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 29 januari 2018, 18:00–21:00 uur

---

Meerkeuze vragen

1. $\cos\big(\arcsin\big(\dfrac{2}{5}\big)\big)$ is gelijk aan:

   (a) $\dfrac{1}{7}\sqrt{17}$ **(b)** $\dfrac{1}{9}\sqrt{19}$ **(c)** $\dfrac{1}{5}\sqrt{21}$ **(d)** $\dfrac{1}{7}\sqrt{29}$

2. Het aantal hongerige bacteriën op een WC bril op tijdstip t wordt gemodelleerd door de differentiaalvergelijking $y'(t) = \frac{1}{10}\,y(t)$ (of, met andere woorden, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10}\,y$). Hierbij wordt t in seconden gemeten. Op tijdstip $t = 0$ zijn er 10 hongerige bacteriën. Na ongeveer hoeveel seconden zijn het er 4000 ? (**Hint:** $e^6 \approx 403$).

   (a) 29 sec. **(b)** 60 sec. **(c)** 108 sec. **(d)** 114 sec.

3. Bepaal de Taylorreeks in $a = 0$ tot en met de 2e-orde term van de functie

   $$f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2$$

   (a) $2 - x + \dfrac{1}{2}x^2$ **(b)** $1 - 2x$ **(c)** $2 + x$ **(d)** $1 + 2x + x^2$

4. Op de kromme gegeven door $x^3 + xy^2 + y^3 = 1$ geldt dat $\dfrac{dy}{dx}$ gelijk is aan

   (a) $\dfrac{3x^2 + xy}{2xy + 3y^2}$ **(b)** $-\dfrac{3x^2 + xy}{2xy + 3y^2}$ **(c)** $\dfrac{3x^2 + y^2}{2xy + 3y^2}$ **(d)** $-\dfrac{3x^2 + y^2}{2xy + 3y^2}$

5. De hoek tussen 2 vlakken in de $\mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd als de hoek die hun normaalvectoren met elkaar maken.
   Welke hoek maakt het vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $3x + 2y + z = 0$ met het vlak W in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $2x - y + 3z = 0$?

   (a) $\dfrac{\pi}{6}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{4}$ **(c)** $\dfrac{\pi}{3}$ **(d)** $\dfrac{\pi}{2}$

---

zie volgende pagina

Tentamen Calculus B (2WBB1) op maandag 29 januari 2018, 18:00–21:00 uur

---

Open vragen

[4] 6. Zij gegeven $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Het getal α wordt zo gekozen dat $x - \alpha y \perp y$.

Bepaal α. (Zoals bekend betekent "$\perp$": "staat loodrecht op".)

7. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x) - 1}$ met als domein het interval (e, ∞).

Deze functie is 1-op-1 en heeft een inverse.

[3] **(a)** Bepaal de inverse functie $f^{-1}(y)$.

[2] **(b)** Wat is het domein en bereik van $f^{-1}(y)$?

8. Bereken de volgende limieten (geef een goede argumentatie):

[4] **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \; x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

[4] **(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \; \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

9. Bepaal de volgende integralen: (geef een duidelijke uitwerking)

[4] **(a)** $\displaystyle\int x^5 \sqrt{x^2+1}\; dx$

[4] **(b)** $\displaystyle\int e^{2x} \sin(x)\; dx$

[5] 10. Bepaal de oplossing y van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\, y = 2\, \frac{e^{x^2}}{x},$$

met beginwaarde $y(1) = 2$.

Tabellen staan op volgende pagina.

Primitieven / Antiderivatives (zonder/without "$+C$")

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Taylorpolynomials rond/around $x = 0$

Function	Taylorpolynomial plus $\mathcal{O}$-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$

Goniometrische identiteiten / Trigonometric identities

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\sin^2(x) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) \\
\cos^2(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

Vectoren / Vectors

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be vectors in $\mathbb{R}^3$.

- Inproduct / Inwendig product / Inner product / Dot product:

  $$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

- Uitproduct / Uitwendig product / Cross product / Vector product:

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

NEDERLANDSE VERSIE: PAGINA 1–3,   FORMULAS: PAGE 4

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Department of Mathematics and Computer Science

Exam Calculus, 2WBB1, Monday 29 January 2018, 18:00–21:00

Please detach this sheet from the rest of the exam. **Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in.** Scratch paper need not be handed in.

The exam consists of 5 multiple-choice and 5 open questions. The backside of this sheet contains the multiple choice questions 1–5. **You are required to circle the correct answer**. If you wish to change your answer: clearly indicate what your final choice is.

The solutions to the open problems 6–10 should be motivated, formulated clearly and arranged orderly. You can give your answers in English or in Dutch.

The maximum score for the exam is 50 points, where 4 points can be earned for each of the multiple choice questions. The points for each of the open exercises are specified within the exercises.
The final grade for the exam 2WBB1 is obtained by dividing the total score by 5 and rounding to one decimal place.

The final grade of the course 2WBB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books, or written material is not allowed.

Last name and initials	
Identity number	
Program	
Name tutor	
Tutor group	

---

see next page

Multiple choice questions

1. $\cos\big(\arcsin\big(\frac{2}{5}\big)\big)$ is equal to:

   (a) $\frac{1}{7}\sqrt{17}$ **(b)** $\frac{1}{9}\sqrt{19}$ **(c)** $\frac{1}{5}\sqrt{21}$ **(d)** $\frac{1}{7}\sqrt{29}$

2. The number of hungry bacteria on a toilet seat at time t is modeled by the differential equation $y'(t) = \frac{1}{10}y(t)$ (or, in other words, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10}\,y$). Here, t is measured in seconds. At time $t = 0$ there are 10 hungry bacteria. After approximately how many seconds are there 4000 of them? (**Hint:** $e^6 \approx 403$).

   (a) 29 secs. **(b)** 60 secs. **(c)** 108 secs. **(d)** 114 secs.

3. Determine the Taylor series in $a = 0$ up to and including the 2nd-order term of the function

   $$f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2$$

   (a) $2 - x + \frac{1}{2}x^2$ **(b)** $1 - 2x$ **(c)** $2 + x$ **(d)** $1 + 2x + x^2$

4. On the curve given by $x^3 + xy^2 + y^3 = 1$ it holds that $\frac{dy}{dx}$ is equal to

   (a) $\frac{3x^2 + xy}{2xy + 3y^2}$ **(b)** $-\frac{3x^2 + xy}{2xy + 3y^2}$ **(c)** $\frac{3x^2 + y^2}{2xy + 3y^2}$ **(d)** $-\frac{3x^2 + y^2}{2xy + 3y^2}$

5. The angle between 2 planes in $\mathbb{R}^3$ is defined by the angle between their normal vectors.
   What is the angle between plane V in $\mathbb{R}^3$ given by the equation $3x + 2y + z = 0$ and plane W in $\mathbb{R}^3$ given by the equation $2x - y + 3z = 0$?

   (a) $\frac{\pi}{6}$ **(b)** $\frac{\pi}{4}$ **(c)** $\frac{\pi}{3}$ **(d)** $\frac{\pi}{2}$

see next page

Exam Calculus, 2WBB1, Monday 29 January 2018, 18:00–21:00

Open questions

[4] 6. Let $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. The number α is chosen such that $x - \alpha y \perp y$.

Determine α. (As you know, "$\perp$" means "is perpendicular to".)

7. Consider the function $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x) - 1}$ with the interval (e, ∞) as its domain.

This function is 1-to-1 and has an inverse.

[3] **(a)** Determine the inverse function $f^{-1}(y)$.

[2] **(b)** What is the domain and range of $f^{-1}(y)$?

8. Compute the following limits (give a good argumentation):

[4] **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

[4] **(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

9. Determine the following integrals (show your answer in clear steps):

[4] **(a)** $\displaystyle\int x^5 \sqrt{x^2+1}\, dx$

[4] **(b)** $\displaystyle\int e^{2x} \sin(x)\, dx$

[5] 10. Determine the solution y of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\, y = 2\, \frac{e^{x^2}}{x},$$

with initial value $y(1) = 2$.

You can find tables on page 4.