Sprawozdanie MNUM Projekt 03

Autor: **TOMASZ SACHANOWSKI**

Grupa: **czwartek 8-10**

Nr. Indexu: **276467**

Nr. Zadania**: 3.55**

Spis treści

Treść zadań

MNUM–PROJEKT, zadanie 3.55

I Proszę znaleźć wszystkie zera funkcji

$$f(x) = 0.5*x*\cos(x) - \ln(x)$$

w przedziale [2, 11], używając dla każdego zera programu z implementacją:
a) metody bisekcji,
b) metody siecznych.

IIa Używając metody Newton'a, proszę znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad [a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0] = [2\ \ 5\ \ -2\ \ 3\ \ 7]$$

IIb Proszę znaleźć wszystkie pierwiastki (rzeczywiste i zespolone) wielomianu używając do tego celu metod Müllera MM1 i MM2. Proszę porównać efektywność szukania pierwiastków przez metody MM1, MM2 i Newtona.

Sprawozdanie powinno zawierać:
- krótki opis zastosowanych algorytmów,
- przybliżony wykres funkcji z p. I z zaznaczonymi zerami i punktami (lub przedziałami) startowymi,
- porównanie wyników otrzymanych przy użyciu poszczególnych metod, zawierające tablicę ze wszystkimi punktami, otrzymanymi w kolejnych iteracjach (argument i wartość funkcji) dla wszystkich metod dla wybranego punktu (lub przedziału) startowego,
- komentarz do otrzymanych wyników i wnioski,
- wydruk dobrze skomentowanych programów z implementacją metod.

Uwagi:
- Podczas testów należy wybierać szerokie przedziały startowe (lub punkty startowe znacznie oddalone od zer funkcji), dopiero w razie potrzeby należy te przedziały odpowiednio modyfikować;
- We wnioskach dotyczących p. I powinna znaleźć się odpowiedź na pytanie: czy i kiedy każda z metod może zawieść i dlaczego?

Sprawozdanie powinno być wysłane na adres prowadzącego:
a.krzemienowski@elka.pw.edu.pl.

Zadanie 1

Cel:

Celem zadania jest znalezienie wszystkich pierwiastków funkcji w zadanym przedziale przy pomocy wskazanych metod.

Teoria:

Pierwiastek jest argument x dla którego funkcja przyjmuje wartość zero, czyli f(x_0) = 0. Aby wyznaczyć takie miejsca zerowe, trzeba najpierw oszacować przedziały w którym znajdują się nasze rozwiązania (pierwiastki zerowe). Jest to tak zwane ***przedziały izolacji pierwiastka***. Przedział taki możemy odczytać w najprostszy sposób z uproszczonego wykresu funkcji (np. narysowanego w programie graficznym). Podstawową metodą wyznaczenia tego przedziału jest badanie iloczynu wartości funkcji na końcach przedziału – jeśli ten iloczyn jest ujemny (a funkcja ta jest ciągła) wówczas w przedziale tym znajduje się co najmniej jeden pierwiastek. Warto zaznaczyć, że taki przedział nie powinien być zbytnio szeroki i pochodna powinny być w nim monotoniczna (nie zmieniać się).

Po wyznaczeniu przedziału izolacji pierwiastka, kolejnym krokiem jest znalezienie naszego miejsca zerowego. Mamy do dyspozycji wiele metod iteracyjnych:

- Bisekcji
- Siecznych

Szybkość zbieżności metody określamy za pomocą rzędu (wykładnika zbieżności). Jest to największa liczba $p \geq 1$ taka, że:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = k < \infty,$$

k– współczynnik lub iloraz zbieżności.

p=1 metoda jest zbieżna liniowo
p=2 metoda jest zbieżna kwadratowo

Im większy jest rząd metody, tym metoda jest szybsza.

Metody iteracyjne dla problemów nieliniowych są ,na ogół, zbieżne tylko lokalnie.

Kulą zbieżności metody iteracyjnej nazywamy otoczenie rozwiązanie α o takim promieniu δ, że dla każdego punktu początkowego x0 spełniającego:

$$\|x_0 - \alpha\| \leq \delta$$

Metoda bisekcji

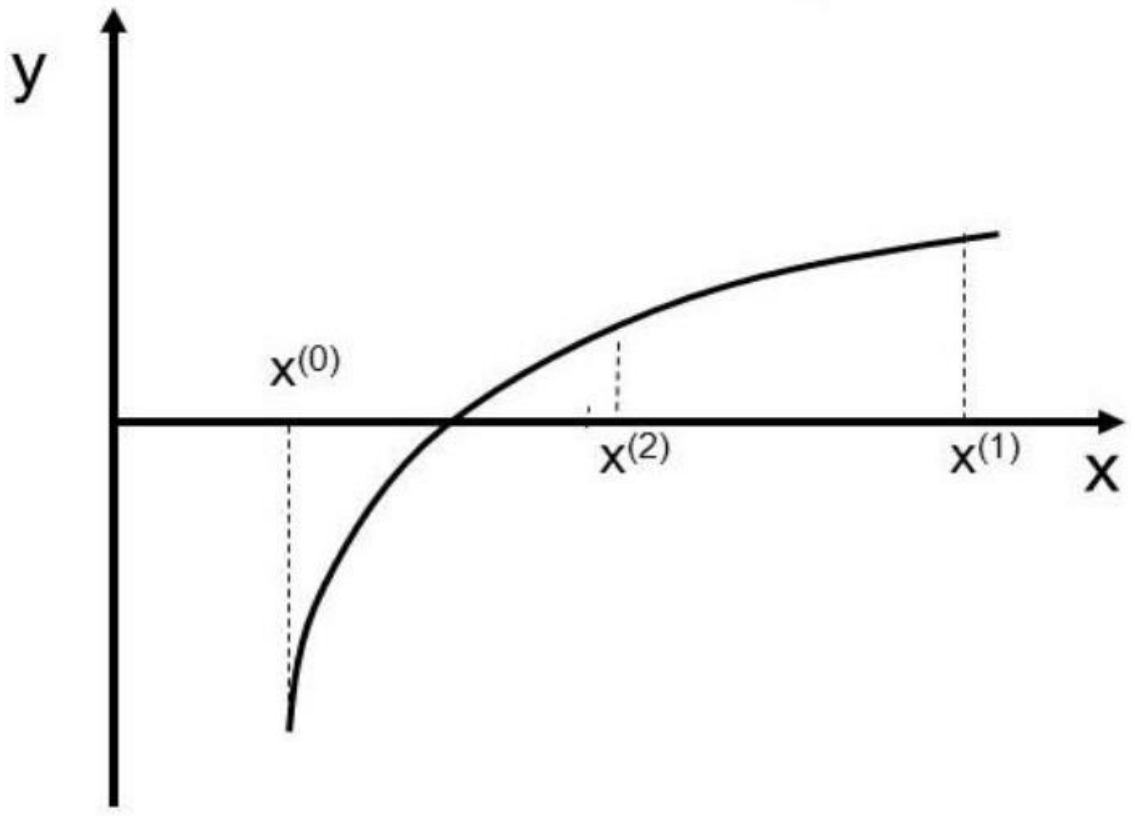
Dość naturalna metoda obliczeniowa zer skalarnych funkcji ciągłych określonych na danym przedziale [a, b] i zmieniających znak (tzn. funkcja przyjmuje na końcu przedziałów wartości przeciwnego znaku). Na mocy twierdzenia *Darboux* wiemy, że jest przynajmniej jedno zero funkcji.

Algorytm:

1. Aktualny przedział zawierający zero funkcji $[a_i, b_i]$ jest dzielony na dwie połowy:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

2. Liczymy wartość funkcji w punkcie c_i.
3. Liczymy iloczyny f(a_i) * f(c_i) i f(c_i) * f(b_i)
4. Nowym przedziałem będzie ten podprzedział, gdzie odpowiada ujemna wartość funkcji na jego końcach.
5. Procedura jest postarzana tak długo, aż zostanie osiągnięta zakładana dokładność.



Jeśli przez ε_n oznaczymy długość przedziału w n-tym kroku, to:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n.$$

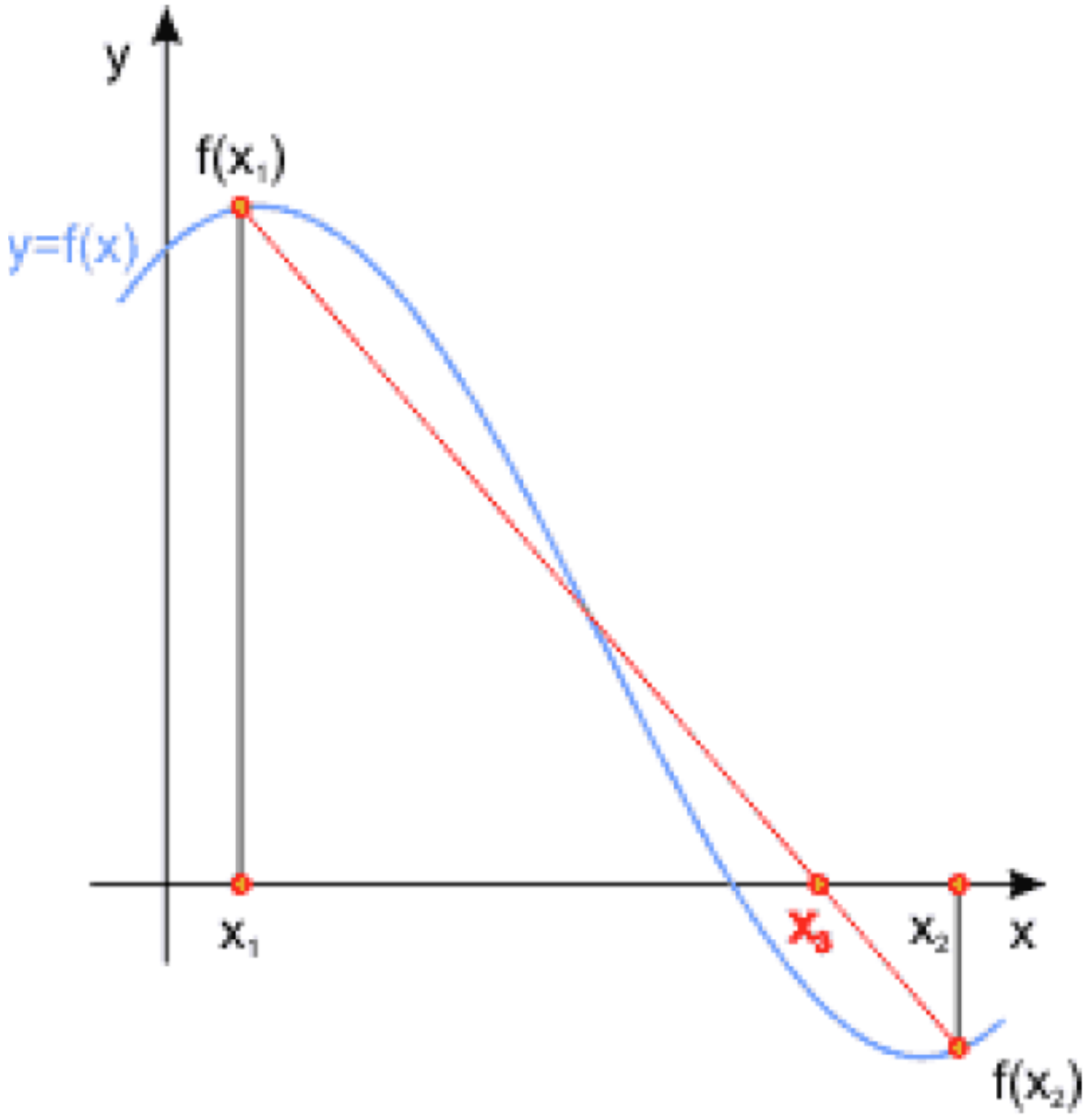
Dokładność rozwiązania zależy jedynie od ilości wykonanych iteracji, jest ona zbieżna liniowo). Jest to metoda zbieżna globalnie, co oznacza, że zawsze znajdziemy pierwiastek w danym przedziale, jeżeli ten tylko istnieje. Metoda bisekcji jest zbieżna globalnie(znajdzie się miejsce zerowe funkcji, choćby początkowa długość przedziału była bardzo duża).

Metoda siecznych

Metoda siecznych różni się tym od metody bisekcji, że aktualny przedział izolacji pierwiastka dzielony jest nie na dwa równe, ale na dwa najczęściej nierówne podprzedziały, prostą (sieczną) łączącą na płaszczyźnie dwa punkty (f(a_n) , a_n) i (f(b_n), b_n), przecinającą oś rzędnych w punkcie oznaczonym jako c_n, gdzie a_ni b_n to dwa ostatnio wyznaczone punkty. Nowy punkt określony jest wzorem:

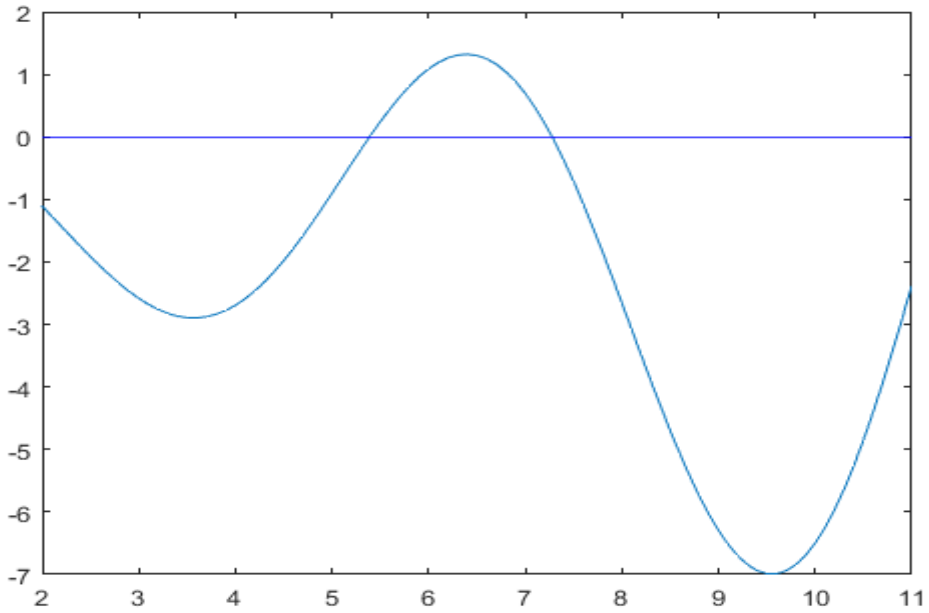
$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Metoda ta jest szybsza od metody bisekcji, gdyż Rząd zbieżności metody siecznych p =(1 + √5)/2 ≈ 1.618. Jednakże, jest ona zbieżna tylko lokalnie, stąd w praktyce może być niezbieżna (przedział izolacji nie dostatecznie mały). Dlatego też algorytm wymaga użycia określonej ilości iteracji, gdyż rozwiązanie może nie zostać znalezione albo gdy sieczna jest równoległa do osi OX.


y
f(x1)
y=f(x)
x1
x3
x2
x
f(x2)

Wynik:

Wykres funkcji ***0.5 * x * cos(x) - log(x)*** na przedziale ***<2, 11>***



Na postawie wykresu określone są przedziały izolacji:

Duże przedziały:

<4, 6>

<6, 8>

EPS	Bisekcja				Sieczne			
	Przedzial_1		Przedzial_2		Przedzial_1		Przedzial_2	
	iter	wynik	iter	wynik	iter	wynik	iter	wynik
0.0010	11	5.3876953125	9	7.27734375	5	5.387894529147541	7	7.276905962745723
0.00010	11	5.3876953125	15	7.27703857421875	6	5.387698378950402	8	7.276999699969140
0.000010	17	5.387741088867188	17	7.277023315429688	8	5.387735529347010	10	7.277023303042951
0.0000010	21	5.387738227844238	21	7.277024269104004	10	5.387737921754509	11	7.277024151067826
0.00000010	24	5.387738108634949	24	7.277024388313293	11	5.387738128220748	13	7.277024364577876
0.000000010	28	5.387738086283207	27	7.277024373412132	13	5.387738089121902	14	7.277024372248815
0.0000000010	28	5.387738086283207	31	7.277024374343455	15	5.387738086603932	16	7.277024374180153
0.00000000010	34	5.387738086399622	35	7.277024374285247	16	5.387738086386628	17	7.277024374249542
0.000000000010	36	5.387738086428726	37	7.277024374270695	18	5.387738086427780	19	7.277024374267013
0.0000000000010	40	5.387738086430545	41	7.277024374267967	20	5.387738086430430	20	7.277024374267638

Małe przedziały

<5, 5.5>

<7, 7.5>

EPS	Bisekcja				Sieczne			
	Przedzial_1		Przedzial_2		Przedzial_1		Przedzial_2	
	iter	wynik	iter	wynik	iter	wynik	iter	wynik
0.0010	9	5.3876953125	7	7.27734375	2	5.387594617550044	3	7.276760254516209
0.00010	9	5.3876953125	13	7.27703857421875	3	5.387741727294921	4	7.277000277488797
0.000010	15	5.387741088867188	15	7.277023315429688	3	5.387741727294921	5	7.277022176193655
0.0000010	19	5.387738227844238	19	7.277024269104004	4	5.387737994017899	6	7.277024173765735
0.00000010	22	5.387738108634949	22	7.277024388313293	5	5.387738088776229	7	7.277024355978603
0.000000010	26	5.387738086283207	25	7.277024373412132	5	5.387738088776229	8	7.277024372599518
0.0000000010	26	5.387738086283207	29	7.277024374343455	6	5.387738086371076	9	7.277024374115628
0.00000000010	32	5.387738086399622	33	7.277024374285247	7	5.387738086432124	10	7.277024374253924
0.000000000010	34	5.387738086428726	35	7.277024374270695	7	5.387738086432124	11	7.277024374266539
0.0000000000010	38	5.387738086430545	39	7.277024374267967	8	5.387738086430575	12	7.277024374267690

Podsumowanie:

Obje metody wykazały możliwość znalezienia miejsca zerowego. Z powyższych tabel wynika, że metoda bisekcji jest wolniejsza i potrzebuje znacznie więcej iteracji niż metoda siecznych. Jest to ponad dwa razy więcej iteracji a przy większej dokładności nawet 4 razy więcej. Szerokość przedziału izolacji wpływa w obu metodach na szybkość algorytmu. Mniejszy przedział pozwala wykonać algorytmy w mniejszej ilości iteracji.

Ponadto dla przedziału <3,7> metoda bisekcji znalazła poprawny pierwiastek 5.38 natomiast metoda siecznych już nie. Wynik dla niej był drugim pierwiastkiem 7.27

Metoda bisekcji:

Wadą metody jest to, iż zbieżność ta nie jest imponująca. Ma ona parę zalet jest: ona w pewien sposób uniwersalna, ma ona zbieżność globalną, wystarczy dla niej jedynie ciągłość funkcji.

Metoda siecznych:

Metoda siecznych może zawieść. Jeśli jest ona jedynie lokalnie, stąd w praktyce może być niezbieżna – jeśli początkowy przedział izolacji pierwiastka nie jest dostatecznie mały. Ponadto, gdy żądanie przez użytkownik dokładności są bardzo wielkie, a sama funkcja „złośliwa", metoda siecznych może cierpieć z powodu redukcji cyfr przy odejmowaniu.

Zadanie 2

Cel:

Celem jest znalezienie wszystkich pierwiastków rzeczywistych wielomianu przy pomocy metody Newtona oraz znalezienie pierwiastków rzeczywistych i zespolonych przez metody MM1 MM2.

Teoria:

Wielomian stopnia n podsiada dokładnie n pierwiastków:

- pierwiastki mogą być zarówno rzeczywiste oraz zespolone
- pierwiastki mogą być pojedyncze lub wielokrotne

Do poszukiwania pierwiastków rzeczywistych możemy korzystać z metod wyznaczania przeszukiwania zer funkcji nieliniowej (np. Newton).
Jednak istnieją metody bardziej złożone, które są opracowane specjalnie dla wielomianów (wykorzystują właściwość – wielokrotna różniczkowalność).
Do metod tych należą:

- metoda Müllera (aproksymacja wielomianu funkcją kwadratową w otoczeniu rozwiązania – uogólniona metoda siecznych – MM1, wykorzystanie informacji o wielomianie

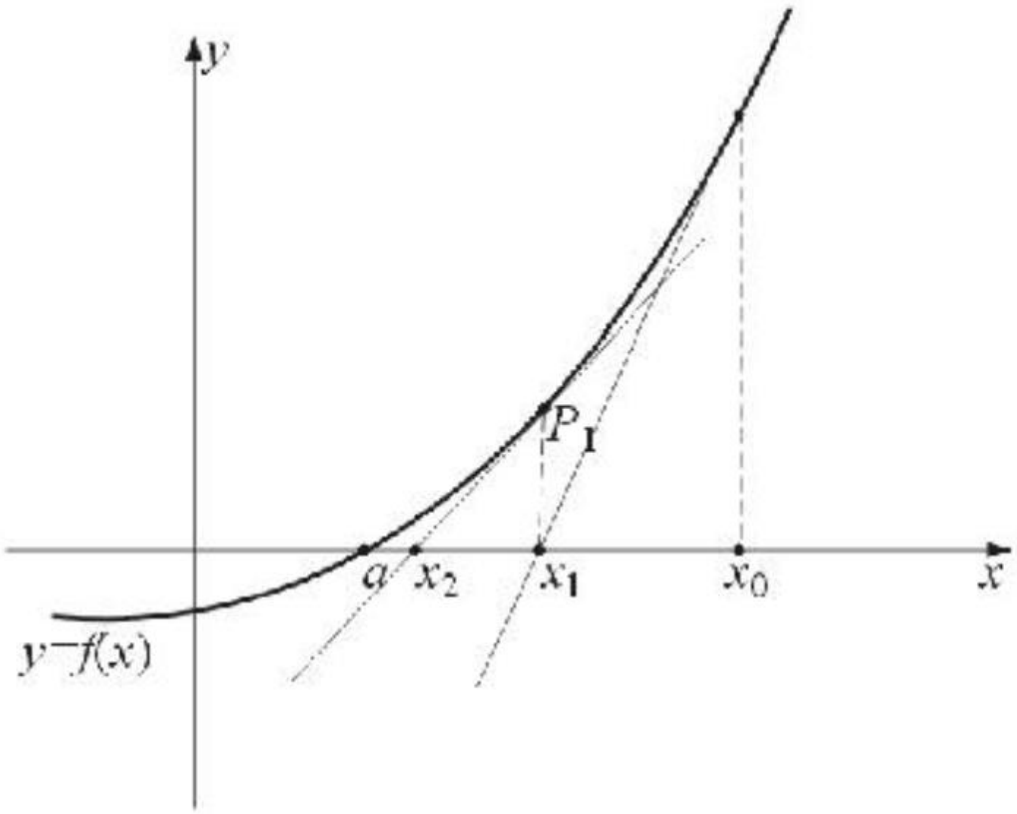
jedynie w jednym punkcie, tzn. wykorzystująca do wyznaczenia funkcji kwadratowej wartości wielomianu i jego pierwszej i drugiej pochodnej w danym punkcie – MM2)

- metoda Laguerre'a.

Metoda Newtona

Metoda Newtona, zwana też metodą stycznych zakłada aproksymację funkcji jej liniowym przybliżeniem wynikającym z uciętego rozwinięcia w szereg Taylora w aktualnym punkcie x_i (aktualnym przybliżeniu pierwiastka), a następnie przyrównania do zera sformułowanej lokalnej aproksymacji funkcji f(x), co prowadzi do zależności iteracyjnej:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Metoda Newtona jest zbieżna lokalnie (jeśli zaczniemy ją stosować w punkcie zbytnio oddalonym od rozwiązania, to może być ona rozbieżna). Jej zbieżność jest kwadratowa.

Metoda stycznych jest szczególnie efektywna w przypadku, gdy krzywa jest bardzo stroma w otoczeniu danego pierwiastka (nie zaleca się stosowania, gdy krzywa jest w otoczeniu pierwiastka pozioma – innymi słowy pochodna w tym punkcie ma bardzo małą wartość).
Metoda Newtona znajduje tylko pierwiastki rzeczywiste.

Metoda Müllera

Metoda polega na aproksymacji wielomianu w otoczeniu rozwiązania funkcją kwadratową. Może być traktowana jako uogólnienie metody siecznych - zamiast interpolacji w dwóch punktach funkcją liniową (tzn. sieczną) wykonujemy interpolację w trzech punktach funkcją kwadratową. Istnieje również efektywna realizacja oparta na wykorzystaniu informacji o wielomianie jedynie w jednym punkcie, tzn. wykorzystująca do wyznaczenia funkcji kwadratowej wartości wielomianu i jego pierwszej i drugiej pochodnej w aktualnym punkcie.

MM1

Rozważmy trzy punkty x_0, x_1, $x_2$wraz z wartościami wielomianu w tych punktach $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$. Skonstruujemy funkcję kwadratową przechodzącą przez te punkty, a następnie wyznaczymy pierwiastki tej funkcji i potraktujemy jeden z nich jako kolejne, poprawione przybliżenie rozwiązania (pierwiastka wielomianu).

Wprowadzamy zmienną przyrostową $z = x - x_2$ i różnice:

$$z_0 = x_0 - x_2$$
$$z_1 = x_1 - x_2$$

oznaczając poszukiwaną parabolę przez:

$$y(z) = az^2 + bz + c$$

Biorąc pod uwagę trzy dane punkty, mamy:

$$y(z_0) = f(x_0) = az_0^2 + bz_0 + c$$
$$y(z_1) = f(x_1) = az_1^2 + bz_1 + c$$
$$y(0) = f(x_2) = c$$

Stąd, do wyznaczenia a i b należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$f(x_0) - f(x_2) = az_0^2 + bz_0$$
$$f(x_1) - f(x_2) = az_1^2 + bz_1$$

Ponieważ interesuje nas pierwiastek paraboli o najmniejszym module (tzn. położony jak najbliżej x_2), więc do numerycznego wyznaczenia tego pierwiastka najlepiej wykorzystać wzory:

$$z_+ = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$z_- = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Do kolejnego przybliżenia rozwiązania bierzemy pierwiastek położony jak najbliżej x_2, tj. o mniejszym module:

$$z_3 = x_2 + z_{min}$$

$z_{min} = z_+$ jeśli $\left|b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right| \geq \left| b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right|$, w przeciwnym razie $z_{min} = z_-$.

Przed przejściem do następnej iteracji odrzucamy spośród x_0, x_1, x_2 punkt położony najdalej od ostatnio wyznaczonego przybliżenia rozwiązania, tj. punktu x_3. Algorytm działa prawidłowo również w przypadku, gdy $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, prowadzi to do wyznaczenia zera zespolonego.

MM2

Ta wersja metody wykorzystuje informację o wartości wielomianu i jego pochodnych, pierwszego i drugiego w aktualnym punkcie (przybliżeniu zera). Wersja nieco efektywniejsza obliczeniowo z powodu, iż obliczenie wartości wielomianu w k+1 punktach jest kosztowniejsze niż obliczanie wartości wielomianów i jego k kolejnych pochodnych w jednym punkcie.

Wiemy, iż:

$$y(0) = c = f(x_k)$$
$$y'(0) = b = f'(x_k)$$
$$y''(0) = 2a = f''(x_k)$$

co prowadzi do wzoru na pierwiastki:

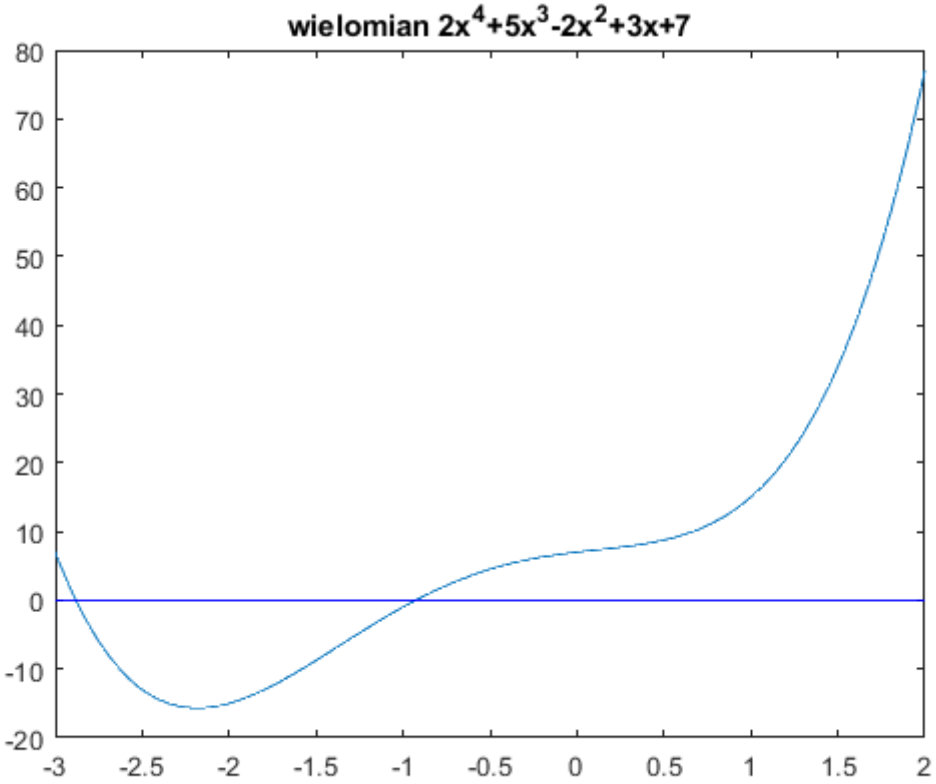
$$Z = \frac{-2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}$$

Do przybliżenia zera α bierzemy pierwiastek paraboli o mniejszym module:

$$x_{k+1} = x_k + z_{min}$$

Gdzie z_{min} jest wybierany spośród {$z+$, $z-$} w taki sam sposób jak w wersji MM1.
Podobnie jak MM1, MM2 znajduje zespolone pierwiastki wielomianu. Metoda Müllera jest zbieżna lokalnie, z rzędem zbieżności 1.84. Jest więc (lokalnie) bardziej efektywna niż metoda siecznych, jest niewiele wolniejsza od metody Newtona. Z konstrukcji metody wynika, że może ona być stosowana do poszukiwania zer rzeczywistych i zespolonych nie tylko wielomianów, ale i innych funkcji nieliniowych (analitycznych).

Wynik



Pierwiastki wielomianu wyliczone za pomocą funkcji roots():

```
>> roots([2 5 -2 3 7])

ans =

 -2.881416761653131 + 0.000000000000000i
  0.653990753283228 + 0.939811840639350i
  0.653990753283228 - 0.939811840639350i
 -0.926564744913323 + 0.000000000000000i
```

Newton

Iteracja	Punkt startowy			
	-4		1	
	x	y	x	y
1	-4.0581395348837	170.1540580308711	0.318181818181818	7.933628167474899
2	-3.4241628096059	47.4841874695916	-1.946260167752689	-14.579304169415323
3	- 3.0549620725214	10.8149402214608	-0.256026234945652	6.025504012886236
4	- 2.9065660079964	1.3505357750028	-1.492512156700246	-8.631929231036642
5	- 2.8820518766141	0. 0332518257881	-0.945712191777129	-0.255169129479358
6	- 2.8814171807482	0.0000219275005	-0.926714912232297	-0.001985380334572
7	- 2.8814167616533	0.0000000000096	-0.926564754456485	-0.000000126163282
8	-2.8814167616531	0.0000000000000	-0.926564744913323	-0.000000000000000
9	-2.8814167616531	0.0000000000000	-0.926564744913323	-0.000000000000000

Przy dalszych liczbach np. zamiast 1 wybrać 10 potrzeba 15 iteracji.

Iteracja	Punkt startowy	
	10	
	x	y
1	7.375356652224	7844.104359982050
2	5.413815325157	2476.082381276474
3	0.003949016682629	0781.968263365834
4	2.853509732667	0248.050454548380
5	2.025575824497	80.093588627872
6	1.374031648209	27.445581717420
7	0.784770788198	11.297726902040
8	-0.086604407580	6.722050834808
9	2.032922919376	-15.212722844532
10	0.540962524213	9.000421126069
11	-0.845377666505	1.035225367226
12	-0.929760643411	-0.042307755407
13	-0.926569044876	-0.000056846818
14	-0.926564744921	-0.000000000103
15	-0.926564744913	-0.000000000000

MM1

Iteracja	Punkty startowe x0, x1, x2							
	{-10, 0, 10}		{-2,2,3}		{2, -2, -3}		{-50, -49, -48}	
	x	y	x	y	x	y	x	y
1	-0.0140 + 0.0000i	6.9576 + 0.0000i	1.5195 + 0.0000i	35.1465 + 0.0000i	- 2.7571	-5.6993	-32.877105816 + 11.382766213i	0.573901646632334 - 2.669456182012985i
2	-0.0172 + 0.2166i	7.0580 + 0.6164i	1.0109 + 0.0000i	15.2417 + 0.0000i	- 2.8774	-0.2106	- 26.376510579 + 13.363875118i	-481365.906018125 – 1329287.732593518i
3	-1.1766 - 0.1715i	-3.5194 - 2.6712i	0.8619 + 0.5404i	6.7809 + 6.6696i	- 2.8814	-0.0011	-20.090785714 + 14.453855359i	-576802.628071662 – 378751.076674116i
4	-0.9096 + 0.0030i	0.2221 + 0.0389i	0.6555 + 0.7599i	3.0516 + 2.4015i	2.8814	-0.0000	-13.953173900 + 14.725133625i	-304929.457805091 + 64293.605359580i
5	-0.9267 - 0.0004i	-0.0024 - 0.0048i	0.6271 + 0.9171i	0.8542 - 0.0556i	- 2.8814	0.0000	-9.412341374 + 13.899543734i	-91746.421939821 + 115090.725117909i
6	-0.9266 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.6528 + 0.9406i	0.0071 - 0.0344i	- 2.8814	0.0000	-5.756425277 + 12.581348731i	2319.682676483 + 69136.187982402i
7	-0.9266 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.6540 + 0.9398i	-0.0001 + 0.0001i			-2.922617144 + 10.972147036i	22167.486243304 + 236553.73517508i
8	-0.9266 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.6540 + 0.9398i	-0.0000 - 0.0000i			-0.875252590 + 9.248045403i	15137.857253547 + 1700.285620649i
9	-0.9266 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.6540 + 0.9398i	-0.0000 - 0.0000i			5.52998290 + 7.546738994i	5928.909825376 – 3999.762855613i
10	-0.9266 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.6540 + 0.9398i	-0.0000 - 0.0000i			1.476775210 + 5.956743366i	907.106999747 – 3222.858823751i
11							2.001784147 + 4.535455841i	-642.168305974 – 1419.596620488i
12							2.226829567 + 3.312172665i	648.444990719 – 309.604600075i
13							2.232151177 + 2.296249462i	12.736439055 + 68.107562466i
14							2.082227405 + 1.481118292i	28.307112780 + 20.004763623i
15							1.826912307 + 0.846125108i	19.249731391 – 1.096745719i
16							1.505904453 + 0.356281304i	9.645464288 – 5.101285504i
17							1.162390716 – 0.035192098i	4.583989924 – 2.798619853i
18							0.852495346 – 0.368527709i	1.664727370 + 0.063581096i
19							0. 649874972 - 0. 943757030i	0. 005556893 + 0. 144133549i
20							0. 654042975 - 0. 939796609i	-0. 000674451 - 0. 001198952i
21							0. 653990758 - 0. 939811850i	-0. 000000265 + 0. 000000085i
22							0. 653990753 - 0. 939811841i	0
23							0. 653990753 - 0. 939811841i	0

MM2

Iteracja	Punkty startowe x0							
	-2		-8		2		8	
	x	y	X	Y	x	y	x	y
1	-1.22610123910821 3	-4.381123241495223	-5.599845201238 + 1.653198412628i	237.684849604767 – 322.997684776859i	1.217105263157895 + 0.6326402814884 40i	7.791489110302638 +18.26888030092 6476i	5.163092550790 1.994471231320i	537.629510166468 + 2591.010183082 371i
2	-0.9344663403730 82	-0.104809514192177	-4.470758055 054 + 0.015075876 042i	305.787710856789 – 5.942539107 302i	0.7428413108806 78 + 0.9097838900950 00i	-0.894643640791758 + 2.2996957896487 31i	3.759075115397 - 0. 000525716811i	654.956962625370 - 0. 328503951709i
3	-0.9265648367066 02	-0.00000121 3532979	-3.322010510 607 - 0.668071940 422i	-0.340767034 154 + 68.03172439 8398i	0.6543802867912 91 + 0.9399703778800 37i	-0.009847824810922 + 0.0040277262707 36i	2.363870878929 - 0. 989414778669i	34.930570190877 - 157.937983815370i
4	-0.9265647449133 23	-0.000000000 000000	-3.002006805 545 - 0.039022708 619i	7.039636281 266 + 2.583931684 862i	0.6539907532518 56 + 0.9398118406596 30i	0.0000000002083 82 - 0.0000000009213 91i	1.253583319196 - 1.301337210448i	-32.249381390757 - 154.426688695 60i
5			-2.881416761 517 - 0.000000000 035i	-0.000000007 115 + 0.000000001 850i	0.6539907532832 28 + 0.9398118406393 51i	0.0000000000000 03 + 0.0000000000000 00i	0.577010487981 - 1.128839411265i	-1.076666950734 + 5.6787502718 61i
6			-2.881416761 653 - 0.000000000 000i	0.000000000 000 + 0.000000000 000i			0. 655765188385 - 0.943608978952i	-0.099644120266 + 0.037543463304i
7							0.653990756897 - 0.939811803782i	0.000000586538 - 0.000000730094i
8							0.653990753283 - 0.939811840639i	0.000000000000 - 0.000000000000i

Podsumowanie:

Metoda Newtona poradziła sobie dobrze, znalazła rozwiązanie w dość szybkim czasie bo poniżej 10 iteracji. Niestety potrafi ona znaleźć tylko rzeczywiste pierwiastki to co jest dużym minusem. Ważny jest tu też punkt startowy, zbyt odległy przyczynia się do znacznego zwiększenia czasu znalezienia rozwiązania.

Podobnie mają się metody MM1 i MM2 dla dobrze dobranych punktów ilość iteracji jest niewielka będąca mniejsza niż przy

metodzie Newtona. Dużą korzyścią w tych metodach jest możliwość znalezienia pierwiastków zespolonych. Niestety problemem na jaki się natknąłem przy metodzie MM1 było znalezienie 3 punktów startowych dla jednego pierwiastka. Bez problemu znalazłem 3 punkty lasowe dla 3 różnych pierwiastków. Dlatego też jeden pierwiastek ma tak odległe punkty {-50, -49, -48}. Zalazłem to w sposób „brutal force”. Przez 3 pętle iteracyjne od 50 do -50 dla każdej iteracji wstawiłem punkty do zaimplementowanej metody mm1 a następnie porównywałem czy otrzymany pierwiastek był tym którego szukam. Z przeprowadzonych testów metoda MM2 okazała się mniej zawodniejsza przy szukaniu punktów startowych i szybka.

Dodatek do zadania 1

Func

```
function [y] = func(x)
    y = 0.5 * x * cos(x) - log(x);
end
```

bisection

```
function [c, iter] = bisection(a, b, eps, iter_max)
    iter = 0; % ilosc iteracji
    c = (a + b)/2; % sordek przedzialu
    value_c = func(c); % wartosc dla srodka (rozwiazanie)
    tmp_a = a;
    tmp_b= b;
    while((abs(value_c) > eps)&& iter <= iter_max)
        % koniec gdy osiagniemy dobra dokladnosc albo ilosc iteracji
        value_a = func(tmp_a); % wartosci na koncach przedzialu
        value_b = func(tmp_b);
        %sprawdzamy obszar izolacji
        if(value_a*value_b>0)
            error('Brak obszaru izolacji');
        end
        c = (tmp_a + tmp_b)/2; % nowy srodek przedzialu
        value_c = func(c);
        if (value_a*value_c < 0) % sprawdzenie zmiany znaku
           tmp_b = c;
        end
        if (value_b*value_c < 0)
           tmp_a = c;
        end
        iter = iter + 1;
    end
end
```

secant

```
function [c, iter] = secant(a, b, eps, iter_max)
    iter = 0; % ilosc iteracji
    c = (a + b)/2; % sordek przedzialu
    value_c = func(c); % wartosc dla srodka (rozwiazanie)
    tmp_a = a;
    tmp_b= b;
    value_a = func(tmp_a); % wartosci na koncach przedzialu
    value_b = func(tmp_b);
    %sprawdzamy obszar izolacji
    if(value_a*value_b>0)
        error('Brak obszaru izolacji');
    end
    while((abs(value_c) > eps)&& iter <= iter_max)
        % koniec gdy osiagniemy dobra dokladnosc albo limit iteracji
        value_a = func(tmp_a); % wartosci na koncach przedzialu
        value_b = func(tmp_b);
        c = (tmp_a*value_b - tmp_b*value_a)/(value_b - value_a); % nowa wartosc
        % dla metody siecznych
        value_c = func(c); % wartosc dla siecnych (rozwiazanie)
        tmp_a = b;
        tmp_b = c;
        iter = iter + 1;
    end
    if iter > iter_max
        disp("Przekorczono limit iteracji");
    end
end
```

compose_task_1

```
function [results] = compose_task_1()
    format long;
    results = zeros(9,10);
    eps = 0.001;
    iter_max = 100;
    X = 2:0.1:11; % Nasza dziedzina
    Y = arrayfun(@(x) func(x),X); %Wartosc funkcji w dziedzinie
    figure;
    % rysuje wykres funkcji
    plot(X,Y);
    % os OX
    line([2,11],[0,0],'Color','b')
    % dla 10 coraz to mniejszych eps
    for i=1:10
        [x0, iter] = bisection(3, 7, eps, iter_max);
        results(1, i) = eps;
        results(2, i) = x0;
        results(3, i) = iter;
        [x0, iter] = bisection(7, 7.5, eps, iter_max);
        results(4, i) = x0;
        results(5, i) = iter;
        [x0, iter] = secant(3, 7, eps, iter_max);
        results(6, i) = x0;
        results(7, i) = iter;
        [x0, iter] = secant(7, 7.5, eps, iter_max);
        results(8, i) = x0;
        results(9, i) = iter;
        eps = eps/10; % zminejszam eps
    end
end
```

Dodatek do zadania 2

newton

```
function [iter_results] = newton(x0,iter_max)%(x0, eps, iter_max)
    iter = 0; % ilosc iteracji
    % mamy tu tylko dwa pierwiastki
    % y to wartosc wielomianu w punkcie x0
    % y_2 to wartosc pochodnej wielomianu w punkcjie x0
    [y, y_2] = wielomian(x0);
    % zapiansie naszych wynikow w danej iteracji
    iter_results = zeros(iter_max, 2);
    for i=0:iter_max
    %while abs(y) > eps && iter <= iter_max
        x0 = x0 - y/y_2;
        [y, y_2] = wielomian(x0);
        iter = iter + 1;
        iter_results(iter, 1) = x0;
        iter_results(iter, 2) = y;
    end
end
```

mm1

```
function [iter_results] = mm1( x0, x1, x2, iter_max)
    iter = 0; % ilosc iteracji
    % zapiansie naszych wynikow w danej iteracji
    iter_results = zeros(iter_max, 2);
    %while abs(y) > eps && iter <= iter_max
    for i = 1:iter_max
        % zmienne przyrostowe
        z0 = x0 - x2;
        z1 = x1 - x2;
        [c, ~]= wielomian(x2);
        %tworzymy układ równań do obliczenia a,b i rozwiązujemy go
        A = [z0^2 , z0; z1^2, z1];
        [f_x0, ~] = wielomian(x0);
        [f_x1, ~] = wielomian(x1);
        B = [f_x0 - c; f_x1 - c];
        [w] = linsolve(A, B);
        a = w(1);
        b = w(2);
        %wybieramy zmin jako ten o najmniejszym module
        if(abs(b + sqrt(b^2 - 4*a*c)) >= abs(b - sqrt(b^2 - 4*a*c)))
            zmin = (-2*c)/(b + sqrt(b^2 - 4*a*c));
        else
            zmin = (-2*c)/(b - sqrt(b^2 - 4*a*c));
        end
        %obliczamy kolejne przybliżenie miejsca zerowego
        x3 = x2 + zmin;
        % zapisujemy wyniki
        iter_results(i, 1) = x3;
        [iter_results(i, 2), ~] = wielomian(x3);
        % polozenie punktow
        d0 = abs(x3-x0);
        d1 = abs(x3-x1);
        d2 = abs(x3-x2);
        %Odrzucamy spośród x0,x1,x3 to przybliżenie które jest najbardziej
        %oddalone of x3
        if(d1 < d0)
            u = x1;
            x1 = x0;
            x0 = u;
        end
        if(d2<d1)
            u = x2;
            x2 = x1;
            x1 = u;
        end
        %Przygotowujemy się do kolejnej iteracji
        x2 = x3;
        iter =iter + 1;
    end
end
```

mm2

```
function [iter_results] = mm2(x,iter_max)
    iter = 0;% ilosc iteracji
    % zapiansie naszych wynikow w danej iteracji
    iter_results = zeros(iter_max, 2);
    for i = 1:iter_max
        [y, der1] = wielomian(x);
        % wspolcynik dla 2 pochodnej wielomianu
        der2 = polyval([24 30 -4], x);
        %Wybiermay pierwiastek o mniejszym module
        z1 = -2*y/(der1+sqrt(der1^2-2*y*der2));
        z2 = -2*y/(der1-sqrt(der1^2-2*y*der2));
        if abs(z1) > abs(z2)
            z_min = z2;
        else
            z_min = z1;
        end
        %obliczmy kolejne przybliżenie miejsca zerowego
        x = x + z_min;
        iter =iter + 1;
        %zapisujemy wyniki
        iter_results(iter, 1) = x;
        [iter_results(iter, 2), ~] = wielomian(x);
    end
end
```