Sprawozdanie MNUM Projekt 02

Autor: **TOMASZ SACHANOWSKI**

Grupa: **czwartek 8-10**

Nr. Indexu: **276467**

Nr. Zadania**: 2.55**

Spis treści

[Treść zadań 2](#_Toc37277636)

[Zadanie 1 3](#_Toc37277637)

[Cel: 3](#_Toc37277638)

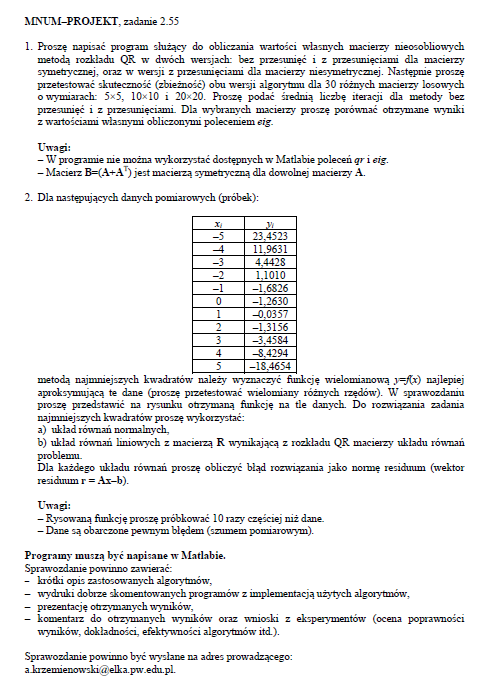
[Teoria: 3](#_Toc37277639)

[Rozwiązanie: 7](#_Toc37277640)

[Wynik: 7](#_Toc37277641)

[Podsumowanie: 7](#_Toc37277642)

# Treść zadań



# Zadanie 1

## Cel:

Celem jest napisanie programu do obliczenia wartości własnych macierzy nieosobliwych metodą rozkładu QR w wersjach z przesunięciem i bez przesunięcia dla macierzy symetrycznych oraz w wersji z przesunięciem dla macierzy niesymetrycznej.

## Teoria:

Zdefiniowanie pojęć:

* macierz ortogonalna –jest to taka macierz Q, która: 𝐐∗= 𝐈 (jej kolumny są wektorami ortonormalnymi, I–macierz jednostkowa).
* macierz ortonormalne –macierz ortogonalna oraz długości jednostkowej.

Rozkład macierzy ***A*** do postaci iloczynu dwóch macierzy ***Q*** i ***R***, gdzie ***Q*** jest macierzą ortonormalną (lub ogólniej ortogonalną), a ***R*** jest macierzą trójkątną górną.

Możemy rozłożyć dowolną macierzy na iloczyn macierzy ***Q*** i ***R***.

Sposoby numeryczne rozkładu QR:

* metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta (ew. zmodyfikowany algorytm Grama-Schmidta).
* metoda odbić Householdera.
* metoda obrotów Givensa (szczególnie macierze rzadkie tj.: macierz w której większość elementów ma wartość 0).

Wartości i wektory własne macierzy kwadratowej rzeczywistej 𝐴 są to takie liczby λ i odpowiadające im wektory 𝑣, że

***𝐴𝑣= 𝜆𝑣,***

gdzie λ – wartość własna, 𝑣 – odpowiadający jej wektor własny. Wartości i wektory własne spełniają więc równanie:

***(𝐴− 𝜆 𝐼) 𝑣 =0.***

Macierz kwadratowa ***𝑛***-wymiarowa ma dokładnie 𝑛 wartości własnych i odpowiadających im wartości własnych. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy nazywany jest widmem macierzy.

Wartości własne odgrywają ważną rolę w wielu dziedzinach nauki i techniki.

Z faktu, iż wektorem własnych jest każdy wektor pomnożony przez pewną stałą α, wprowadza się pojęcie wektorów unormowanych. Są to takie wektory własne, których długość jest równa 1.

Wybrane metody wyznaczania wartości własnych

* metoda QR (wykorzystana przeze mnie w tym zadaniu, opisana w następnym punkcie)
* metoda Jacobiego:

Służy ona do wyznaczania wartości własnych tylko macierzy symetrycznej ***A*** polegająca na przekształceniu macierzy do postaci diagonalnej ***P*** ciągiem obrotów Givensa. W macierzy diagonalnej na przekątnej głównej znajdą się wartości własne macierzy ***A***, natomiast wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym będą zapisane w kolumnach macierzy P.

* metoda wyznacznikowa:

Metoda korzysta z faktu, iż wartości własne są zerami wielomianu charakterystycznego obliczając wartości własne wprost z definicji ***det(A− λI) = 0.***

* metoda QR – najbardziej ogólna, efektywna

Rozkład QR

Każdą macierz rzeczywistą (𝑚≥𝑛) o liniowo niezależnych kolumnach można przedstawić w postaci:

**=**

gdzie jest macierzą o kolumnach ortonormalnych, a jest macierzą trójkątną górną z dodatnimi elementami na diagonali.

algorytm podstawowy bez przesunięć:

Pojedynczy krok algorytmu ***QR*** (w k+i kroku):

***=*** (𝑓𝑎𝑘𝑡𝑜𝑟𝑦𝑧𝑎𝑐𝑗𝑎)

***=***

jest ortogonalna, więc:

***= =***

skąd mamy

**=**

Widzimy, że macierz jest przekształconą przez podobieństwo macierzą , więc ma te same wartości własne.

Czyli macierz jest przekształconą przez podobieństwo macierzą . Mają te same wartości własne.

Podsumowując dla macierzy symetrycznej ***A***, zbiega do macierzy diagonalnej.

Metoda QR bez przesunięć – algorytm podstawowy:

***=*** (𝑓𝑎𝑘𝑡𝑜𝑟𝑦𝑧𝑎𝑐𝑗𝑎)

***= =* =**

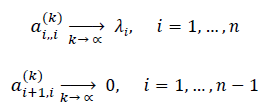
***= =* =**

***→ 𝐴𝑉=𝑑𝑖𝑎𝑔{}***

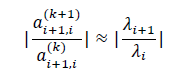
Dla macierzy ***𝐴*** symetrycznej macierz zbiega do macierzy diagonalnej ***𝑑𝑖𝑎𝑔{}.***Jeśli macierz 𝐴 ma 𝑛 wartości o własnych o różnych modułach,



to można pokazać, że:



i zbieżność elementu poddiagonalnego do zera jest liniowa z ilorazem zbieżności |𝜆𝑖+1𝜆𝑖|, czyli

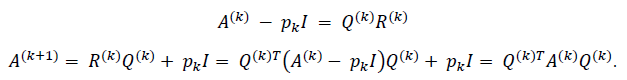


Stąd jeśli wartości własne leżą blisko siebie, to metoda jest wolno zbieżna. Aby poprawić szybkość zbieżności stosuje się algorytm metody QR z przesunięciami.

Algorytm z przesunięciami:

Gdy wartości własne λ leżą blisko siebie to metoda z algorytmem podstawowym jest wolno zbieżna. Wówczas stosuje się algorytm metody ***QR*** z przesunięciami (w celu poprawienia szybkości zbieżności).

Pojedynczy krok algorytmu QR z przesunięciami (w k+i kroku):



Zbieżność jest wtedy liniowa z ilorazem. Wynika z tego, że najlepszym przesunięciem byłoby aktualne przybliżenie.

Metoda ***QR*** wyznaczania wartości własnych dla macierzy niesymetrycznej

Podobnie jak w macierzy symetrycznej macierz wyjściową zaleca się przekształcić do postaci Hessenberga. Konstrukcja algorytmu QR dla macierzy dowolnych pozostaje w istocie taka sama jak dla macierzy symetrycznych, musimy wziąć pod uwagę możliwość wystąpienia wartości własnych zespolonych. Dlatego ważne jest wybieranie przesunięcia zawsze jako wartości własnej podmacierzy 2x2 z prawego dolnego rogu aktualnej macierzy. Macierz przekształcona zbiega na ogół do macierzy trójkątnej górnej. Metoda QR dla macierzy niesymetrycznych nie zawsze jest zbieżna.

## Rozwiązanie:

## Wynik:

## Podsumowanie: