Consideremos $f : E \to \mathbb{R}$ una función a minimizar (no necesariamente no negativa)
f es además acotada (al menos las funciones que tomamos son acotadas por la compacidad)

Si tomamos a $g(x) = e^{-f(x)}$

Consideremos x_i tal que $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos entonces que: $\sum_{i=1}^{n} e^{-f(x_i)} \geq e^{-f(x_i)} \geq 0$

$$\implies 1 \geq \frac{e^{-f(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-f(x_i)}} \geq 0$$

Así, podríamos tomar

$$\boxed{P_i = \frac{e^{-f(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-f(x_i)}}}$$

Si tienes una función $f(x)$ que deseas minimizar, puedes transformar la función usando la exponencial inversa $e^{-f(x)}$ y convertir el problema en uno de maximización.

- **Minimización:** Minimizar $f(x)$
- **Maximización:** Maximizar $e^{-f(x)}$

Por qué funciona: La función exponencial es **monótonamente decreciente** cuando se usa el exponente negativo. Entonces, al maximizar $e^{-f(x)}$, estás indirectamente minimizando $f(x)$, ya que los valores más pequeños de $f(x)$ corresponden a valores más grandes de $e^{-f(x)}$.

$$\min f(x) \ \text{s.a} \ x \in \mathcal{X} \iff \max e^{-f(x)} \ \text{s.a} \ x \in \mathcal{X}$$

Si consideramos ahora $g(x) = -f(x)$, tenemos que

$$\min f(x) \ \text{s.a} \ x \in \mathcal{X} \iff -\max -f(x) \ \text{s.a} \ x \in \mathcal{X}$$

Si consideramos x_i :. $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos $g(x_i) := -f(x_i) \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $g(x_i) \leq \max_i g(x_i)$

Además, como nuestra f es acotada, entonces existe m de tal manera que $\forall x$, $f(x) \geq m \implies -f(x) \leq -m$

$\implies g(x) \leq -m$. Tomemos $M = -m \implies g(x) \leq M$

En particular, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $g(x_i) \leq \max_i g(x_i) \leq M$

$$\implies 0 \leq \max_i g(x_i) - g(x_i) \leq M - g(x_i)$$

$$\implies 0 \leq \frac{\max_i g(x_i) - g(x_i)}{M - g(x_i)} \leq 1$$

Tomando, $\boxed{P_i = \frac{\max_i g(x_i) - g(x_i)}{M - g(x_i)}}$ $\leftarrow$ **Basta con que la M sea muy grande**

Otra medida que podemos asignar para $g(x) = -f(x)$ es

Como $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\min_i g(x_i) \leq g(x_i) \leq \max_i g(x_i)$

$$\Longrightarrow \quad -g(x_i) \leq -\min_i g(x_i)$$

$$\Longrightarrow \quad \max_i g(x_i) - g(x_i) \leq \max_i g(x_i) - \min_i g(x_i)$$

Además, como $g(x_i) \leq \max_i g(x_i) \Rightarrow \max_i g(x_i) - g(x_i) \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad \max_i g(x_i) - \min_i g(x_i) \geq 0$$

Por tanto, podemos tomar $\boxed{p_i = \dfrac{\max_i g(x_i) - g(x_i)}{\max_i g(x_i) - \min_i g(x_i)}}$