Bayesova statistika - zapiski s predavanj prof. Smrekarja

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic

kratica	pomen
s.v.	slučajni vektor
B	binomska porazdelitev
NEP	neodvisen in enako porazdeljen
s.s.	slučajna spremenljivka
p.v.	pričakovana vrednost
AKI	aposteriorni kredibilnostni interval
BF	Bayesova formula
s.g.	skoraj gotovo
k.p.f.	kumulativna porazdelitvena funkcija
A/R	accept or reject
M.v.	Markovska veriga
EZVŠ	ergodični zakon veliikih števil
ECLI	ergodični CLI

Poglavje 1

Uvod

Bayesova statistika je formalni okvir za „osveževanje“ vedenja/znanja o porazdelitvi nekega slučajnega vektorja.

Zgled. 1000, $\approx$ 400Č $\to$ 600B (apriorno znanje).
Izvedemo (statistični) poskus: izvlečemo 10, dobimo 6 črnih in 4 bele

1.1 Elementarna Bayesova statistika

Privzamemo popoln sistem dogodkov $E_1, E_2 \ldots E_m : E_i \cap E_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m = \Omega$.
Če imamo še neki dogodek A, velja t.i. zakon o popolni verjetnosti
$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)$ (interpretacija: 2-fazni poskus).
V Bayesovem okviru nas zanimajo $P(E_j \mid A)$ (verjetnost, da se je v „1. fazi“ zgodil E_j, če se je „2. fazi“ zgodil A). Ker je

$$P(E_j \mid A) = \frac{P(E_j \cap A)}{P(A)}$$

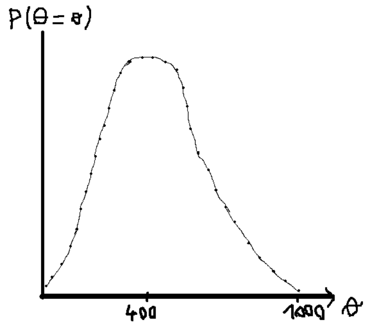
je

$$P(E_j \mid A) = \frac{P(A \mid E_j) \cdot P(E_j)}{P(A)} \quad \text{- elementarna pogojna verjetnost}$$

oziroma

$$P(E_j \mid A) = \frac{P(A \mid E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)} \quad \text{- elementarna Bayesova formula.}$$

Nadaljujemo zgled. V Bayesovi statistiki predhodno („apriorno“) vedenje formaliziramo kot realizacijo slučajnega eksperimenta. V našem primeru vpeljemo fukcijo, da smo število črnih frnikul θ (- realizacija) dobili kot rezultat slučajne spremenljivke $\Theta \in \{0, 1, 2 \ldots 1000\}$.
Informacijo $\theta \approx 400$ zakodiramo kot $E(\Theta) = 400$.



Privzamemo (kar!) $\Theta \sim B\left(1000, \frac{4}{10}\right)$
$\Longrightarrow \; P(\Theta = \theta) = \binom{1000}{\theta} \left(\frac{4}{10}\right)^{\theta} \left(1 - \frac{4}{10}\right)^{1000-\theta}.$
$P(k$ črnih od 10 izvlečenih$\mid \Theta = \theta) = \frac{\binom{\theta}{k}\binom{1000-\theta}{10-k}}{\binom{10}{k}}$ (*)
(*) pri omejitvah (k omejimo).
Osvežena porazdelitev - novo vedenje

$$P(\Theta = \theta \mid 6 \text{ črnih od 10 izvlečenih}) =$$
$$\frac{P(6 \text{ črnih od 10 izvlečenih} \mid \Theta = \theta) \cdot P(B(1000, \frac{4}{10}) = \theta)}{\sum_{i=0}^{1000} P(6 \text{ črnih od 10 izvlečenih} \mid \Theta = i) \cdot P(B(1000, \frac{4}{10})) = i}.$$

Pravimo ji aposteriorna porazdelitev.

1.2 Proučevani slučajni vektor (vzročni) parametrični model

Naj bo $X = (X_1, X_2 \ldots X_n) \in \mathbb{R}^n$ preučevani slučajni vektor. Pogosto so neodvisni in enako porazdeljeni (NEP) realizacija danega slučajnega eksperimenta. S pomočjo statistike lahko „ocenjujemo" porazdelitev slučajnega vektorja X. Zanjo privzamemo, da pripada nekemu modelu, t.j. neki množici dopustnih rešitev. Privzamemo, da je ta množica parametrizirana s parametričnim prostorom $\Theta \subset \mathbb{R}^r$. Tu si mislimo, da parameter $\theta \in \Theta$ dobimo kot realizacijo slučajnega vektorja (s.v.) Θ z vrednostmi v Θ (večinoma $r \geq 2$). Porazelitvi s.v. X_i pogojno na $\Theta = \theta$ pravimo vzorčna porazdelitev. Privzeli bomo, da imamo gostote $f(x \mid \theta)$ ali verjetnostne funkcije

$$P(X = x \mid \theta) = f(x \mid \theta),$$

torej da velja

$$P(X \in B \mid \Theta = \theta) = \int_B f(x \mid \theta) d\nu(x)$$

(v Lebesgueovi meri) ali

$$P(X \in B \mid \Theta = \theta) = \sum_{x \in B} f(x \mid \theta).$$

Modelu pogojnih porazdelitev $(X \mid \Theta = \theta)$ pravino vzorčni model.

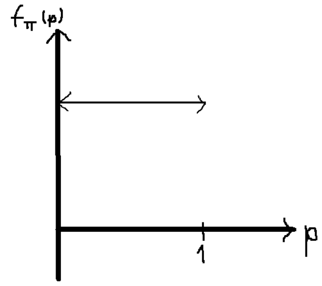
1.3 Apriorna in „robna" porazdelitev

Porazdelitvi fiktivnega slučajnega vektorja Θ pravimo apriorna porazdelitev, brezpogojni (robni) porazdelitvni slučajnega vektorja X pa pravimo „robna" porazdelitev

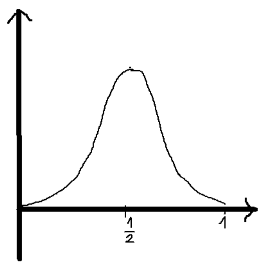
(*) v resnici sta obe porazdelitvi robni porazdelitvi družne porazdelitve vektorja (X, Θ) z vrednostmi v $\mathbb{R}^{n+r}$.

Zgled. Ocenjujemo Bernoullijevo porazdelitev. Predhodno vedenje je podano z apriorno prazdelitvijo na (0,1); mislimo si, da je p realizacija slučajne spremenljivke (s.s.) Π z vrednostmi v (0,1). Možnosti:

- nimamo apriornega mnenja o (dejanskem) p: tedaj bi (morda) vzeli zvezno porazdelitev z gostoto enakomerna porazdelitve,



- smo „zelo“ prepričani, da je (dejanski) $p \approx \frac{1}{2}$.



Recimo, da je $f(p)$ gostota apriorne porazdelitve. Tedaj so apriorne verjetnosti

$$P(\Pi \in (a,b)) = \int_a^b f(p)dp$$

in apriorna pričakovana vrednost

$$E(\Pi) = \int_0^1 pf(p)dp.$$

Pripomnimo, da pri $\Pi \sim U(0,1)$ dobimo $E(U(0,1)) = \frac{1}{2}$.
Privzemimo, da smo „vzorčili“ p, potem pa „neodvisno“ n-krat vržemo p-kovanec ($P(\text{cifra}= p)$), gre za slučajne spremenljivke $X_1, X_2 \dots X_n$, za katere

je $(X_i \mid \Pi = p) \sim Bernoulli(p)$ in so $X_1 \dots X_n$ neodvisne pogojno na p. To ne pomeni, da do $X_1 \dots X_n$ brezpogojno neodvisne.
Za $i \neq j$ je

$$
\begin{aligned}
P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) = \int_0^1 & P(X_i = 1 \wedge X_j = 1 \mid \Pi = p) f(p) dp = \\
&\overset{\text{pogojno neodvisne}}{=} \int_0^1 P(X_i = 1 \mid \Pi = p) P(X_j = 1 \mid \Pi = p) f(p) dp = \\
&= \int_0^1 p^2 f(p) dp = \\
&= E(\Pi^2).
\end{aligned}
$$

Ker je $P(X_i = 1) = \int_0^1 P(X_i = 1 \mid p) f(p) dp = \int_0^1 p f(p) dp = E(\Pi)$, je

$$Cov(X_i, X_j) = E(\Pi^2) - E(\Pi)^2 = D(\Pi)$$

za $i \neq j$, torej so X_i brezpogojno neodvisne $\iff$ $\Pi =$ konstantna (slučajna spremenljivka).
Tvorimo $X = X_1 + \cdots + X_n \in \{0, 1 \dots n\}$. To je „preučevana“ slučajna spremenljivka. Velja $(X \mid \Pi = p) \sim B(n,p)$. To je vzorčna porazdelitev; vzročni model je parametriziran s prostorom parametrov $(0,1) = \Theta$. Robna porazdelitev je podana z verjetnostmi

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \int_0^1 P(X = k \mid p) f(p) dp = \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(p) dp.
\end{aligned}
$$

Recimo, da „opazimo“ $X = k$. Aposteriorna porazdelitev (osveženo vedenje o p) je sestavljeno iz verjetnosti

$$
\begin{aligned}
P(X \in (a,b) \mid X = k) &= \frac{P(X = k \wedge \Pi \in (a,b))}{P(X = k)} = \\
&= \frac{\int_0^1 P(X = k \wedge \Pi \in (a,b) \mid \Pi = p) f(p) dp}{P(X = k)} = \\
&= \int_a^b \frac{P(X = k \mid \Pi = p)}{P(X = k)} f(p) dp.
\end{aligned}
$$

Opazimo, da ima aposteriorna porazdelitev $(\Pi \mid X = k)$ gostoto

$$f_{(\pi|X)}(p \mid k) = \frac{P(X = k \mid p) f(p)}{P(X = k)}.$$

Zgornji formuli pravimo Bayesova formula.
Za številsko oceno za p bi lahko vzeli pričakovano vrednost aposteriorne porazdelitve

$$\hat{p} = E(\Pi \mid X = k) = \int_0^1 p \cdot f(p \mid k) dp.$$

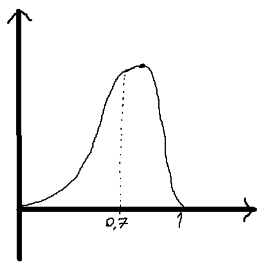
Pravimo ji aposteriorna pričakovana vrednost.
Posebej priročna družina apriornih porazdelitev (za binomske vzorčne porazdelitve) je t.i. $Beta = \{Beta(a,b) \mid a,b \in (0,\infty)\}$

$$f_{Beta(a,b)}(p) = \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} 1_{(0,1)}(p)$$

(tu je $B(a,b) = \int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp$).

$$E(Beta(a,b)) = \frac{a}{a+b}$$
$$D(Beta(a,b)) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

$D(Beta(a,b))$ predstavlja „težo“ apriornega prepričanja; večji - manj sigurni smo.



$$E(Beta(a,b)) = 0.7.$$

Aposteriorna porazdelitev ima gostoto (če je $f(p) = f_{Beta(a,b)}(p)$)

$$f(p \mid k) = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{P(X = k)} =$$
$$= \text{konst.} \cdot p^{a+k-1}(1-p)^{b+n-k-1}.$$

Vidimo, da je $(\Pi \mid X = k) \sim Beta(a+k, b+n-k)$.
Aposteriorna pričakovana vrednost (p.v.) je

$$\begin{aligned}\frac{a+k}{a+b+n} &= \frac{(a+b)\frac{a}{a+b} + n\frac{k}{n}}{a+b+n} = \\ &= \frac{a+b}{a+b+n} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{n}{a+b+n} \cdot \frac{k}{n}.\end{aligned}$$

Tukaj je

- $\frac{a}{a+b}$ apriorna ocena,
- $\frac{k}{n}$ vzorčna ocena in
- $\frac{a+b}{a+b+n}$ in $\frac{n}{a+b+b}$ faktorja pri konveksni kombinaciji obeh ocen.

Vzorec velik $\rightarrow$ prevlada mnenje vzorca.

1.4 Disperzija aposteriornih porazdelitev

Gre pravzaprav za disperzijo pogojnih porazdelitev. Naj bosta $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ in naj ima (X,Y) gostoto $f_{(X,Y)}$ glede na $\mu \times \nu$ Sledita gostoti
$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y) d\nu(y)$ za X glede na μ in
$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y) d\mu(x)$ za Y glede na ν. Dalje definiramo pogojni porazdelitvi $(Y \mid X = x)$ in $(X \mid Y = y)$ preko gostot

$$f_{(Y|X)}(y \mid x) = \frac{f_{(X,Y)}(X,Y)}{f_X(x)}$$

glede na ν: gostota v $X \to \mu$ in simetrično za $f_{(X|Y)}(x \mid y)$.
$P(Y \in B) \mid X = x = \int_B f_{(Y|X)}(y \mid x) d\nu(y)$ - porazdelitev, opremljena z gostoto.

Definicija 1.4.1.

$$E(Y \mid X = x) = \int y f_{(Y|X)}(y \mid x) d\nu(y).$$

y lahko zamenjamo s $h(y)$.
Pišemo $E(Y \mid X = x) = u(X)$ - h je identiteta.

Definicija 1.4.2.
$$E(Y \mid X) = u(X) : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Slučajni vektor $\to$ pogojna pričakovana vrednost,
oz.
$$E(Y \mid X)(\omega) = u(X(\omega)) = E(Y \mid X = X(\omega)).$$

$E(Y \mid X)(\omega)$: funkcija na X, kompozitum.
$X(\omega)$: vrednost.

Definicija 1.4.3. Pogojno varianco slučajnega vektorja Y, pogojno na $X = x$ definiramo kot varianco pogojne porazdelitve $(Y \mid X = x)$, t.j.

$$E((Y - u(X))(Y - u(X))^T \mid X = x) =: Var(Y \mid X = x).$$

Ker je E aditivna, velja

$$E((Y - u(X))(Y - u(X))^T \mid X = x) = E(YY^T \mid X = x) - u(X)u(X)^T =: v(X).$$

$v(X)$ je $n \times n$ matrika.

Definicija 1.4.4. Pogojna varianca slučajnega vektorja Y pogojno na slučajni vektor X je
$$Var(Y \mid X) = v(X).$$

Zadnjič: beta-binomski model: proučevana s.s. T; vzorčne porazdelitve $(T \mid p) \sim B(n,p)$ za $p \in \Theta = (0,1)$. Če je apriorna porazdelitev $Beta(a,b)$, je aposteriorna pri $T = k$ enaka $Beta(a + k, b + n - k)$.
Disperzija porazdelitve $(\Pi \mid T = k)$ je enaka $\frac{(a-k)(b+n-k)}{(a+b+k)^2(a+b+n+1)}$ (in je odvisna od realizacije k).
DN: za katere k je $D(\text{aposteriorne}) > D(\text{apriorne})$.
Izkaže se, da je za nekatere k manjša, za nekatere k pa večja od disperzije apriorne porazdelitve. Vendar pa velja t.i. „zakon popolne porazdelitve“
$$Var(\Theta) = E(Var(\Theta \mid X)) + Var(E(\Theta \mid X)),$$

kjer sta seveda

$$
\begin{aligned}
&E(Var(\Theta \mid X)) \geq 0 \text{ in} \\
&Var(E(\Theta \mid X)) \geq 0,
\end{aligned}
$$

(X vzorčni), iz katerega sledi $E(Var(\Pi \mid X)) \leq Var(\Theta)$ (apriori). V konkretnem primeru je

$$E(Var(\Pi \mid T)) \leq Var(\Pi).$$

Opomba.

$$E(Var(\Pi \mid T)) = \sum_{k=0}^{n} Var(\Pi \mid k) \cdot P(T = k);$$

T vzorčimo, T je robna porazdelitev (binomska pogojna?).

(V povprečju aposteriorna varianca boljša.)

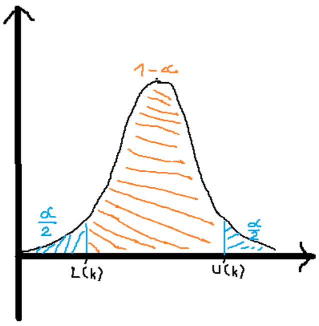
1.5 Aposteriorni kredibilnostni interval

(Bayesova različica intervala zaupanja).
V konkretnem zgledu „iščemo“ funkciji realizacije $L(k), U(k)$, za kateri velja

$$\forall k \; P\left(L(k) \leq p \leq U(k)\right) \geq 1 - \alpha.$$

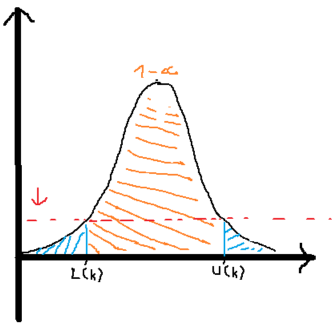
p je slučajen.
Ker za $\Pi \sim Beta(a{,}b)$, vemo $(\Pi \mid T = k) \sim Beta(a + k, b + n - k)$, lahko izberemo

$$
\begin{aligned}
L(k) &= F^{-1}_{Beta(a+k,b+n-k)}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\
U(k) &= F^{-1}_{Beta(a+k,b+n-k)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$



in v aposteriorni kredibilnostni interval (AKI) dobimo $= 1 - \alpha$. Taki konstrukciji pravimo centralni kredibilnostni interval. V praksi pogosto uporabljamo tudi t.i. kredibilnostni interval največje gostote, kjer zahtevamo

$$f_{(\Pi|T=k)}(L(k)) = f_{(\Pi|T=k)}(U(k)).$$



To ima smisel za unimodalne aposteriorne porazdelitve.

1.6 Splošne oznake

X - proučevalni vektor (z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$).

x - realizacija vektorja $X(x \in \mathbb{R}^n)$.

$\Theta \subset \mathbb{R}^n$ - parametrični prostor.
Θ - (fiktivni) vektor z realizacijo $\theta \in \Theta$.
$P = \{P_\theta = (X \mid \Pi = \theta) \mid \theta \in \Theta\}$ - družina vzorčnih porazdelitev (vzorčni model).
$f(x \mid \theta)$ - gostota (ali verjetnostna funkcija) porazdelitve $(X \mid \Theta = \theta)$ (izračunano v x).

Opomba. $f(x \mid \theta) = f_{X|\Theta}(x \mid \theta)$ - spuščamo.

V istem smislu gostota (ali verjetnostna funkcija) apriorne porazdelitve. Za aposteriorno gostoro (ali verjetnostno funkcijo) velja Bayesova formula (BF)

$$f(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta) f(\theta)}{f(\theta)} \propto f(x \mid \theta) f(\theta).$$

$f(x)$ je normalizacijski faktor.

Poglavje 2

Enoparametrični modeli

2.1 Beta-binomski model

Uvodni beta-binomski model je enoparametričen.

2.2 Poissonov model (gama-poissonov model)

Naj bo parametrični prostor $\Theta = (0, \infty)$ in naj bo $X = (X_1 \dots X_n)$, kjer so $(X_i \mid \lambda) \overset{\text{NEP}}{\sim} Poisson(\lambda)$. Za proučevano s.s. vzamemo $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$; seveda je $(T \mid \lambda) \sim Poisson(n\lambda)$.
Privzemimo apriorno porazdelitev

$$f(\lambda) = f_{Gama(a,b)}(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \cdot 1_{(0,\infty)}(\lambda).$$

(0,∞) je parametrični prostor, a in b sta pozitivni konstanti.
Izkaže se:

$$\begin{aligned} E(Gama(a,b)) &= \frac{a}{b}, \\ D(Gama(a,b)) &= \frac{a}{b^2}. \end{aligned}$$

DN.

$$P(T = k \mid \lambda) = e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

Bayesova formula se glasi

$$\begin{aligned} f(\lambda \mid T = k) &\propto P(T = k \mid \lambda) \cdot f(\lambda) \\ &\propto e^{-n\lambda}\lambda^k \cdot \lambda^{a-1}e^{-b\lambda} \\ &= \lambda^{a+k-1}e^{-(b+n)\lambda} \end{aligned}$$

$\implies$ $(\Lambda \mid T = k) \sim Gama(a + k, b + n)$.

Definicija 2.2.1. Naj bo podan vzorčni model P in naj bo K družina porazdelitev na parametričnem prostoru Θ. Pravimo, da je K konjugirana k P, če vedno velja

$$f(\theta \mid x) \in K \implies \forall x :\ (\Theta \mid X = x) \in K.$$

$f(\theta \mid x)$ je porazdelitev na Θ. Rečemo lahko tudi, da sta P in K konjugiran par.

2.3 Normalni model z znano disperzijo

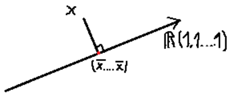
Tu je σ^2 znana disperzija, vzorec $X = (X_1 \dots X_n)$ pa zadošča
$(X_i \mid \mu) \overset{\text{NEP}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, kjer je $\mu \in \Theta = \mathbb{R}$. S katero porazdelitvijo bi zakodirali apriorno informacijo?
Recimo, da je apriorno mnenje: $\mu \approx \mu_0$. Vzemimo za apriorno porazdelitev kar $N(\mu_0, \tau_0^2)$.
Vzorčna:

$$\begin{aligned} f(x \mid \mu) &= f(x_1 \dots x_n \mid \mu) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}. \end{aligned}$$

Pripomnimo, da je

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = n \cdot (\mu - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

kjer je $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.



$\mathbb{R}(1,1\ldots1)$ - prostorska diagonala.
(Vzorčna: jih je več, apriorna: ena.)
Apriorna:

$$f(\mu) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2}.$$

Opazimo, da je

$$f(\mu) = e^{\text{kvadratni polinom}(\mu)}.$$

Velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a\mu^2+b\mu+c} d\mu < \infty \iff a < 0.$$

DN (kako se narobe lotiti): drugače koliko apriorna gostota (integral robne gostote, Bayesova formula).
V tem duhu

$$f(\mu \mid x) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau_0^2}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{n\overline{x}}{\sigma^2}-\frac{\mu_0}{\tau_0^2}\right)\mu\right)}.$$

Prepoznamo kot normalno porazdelitev. Označimo jo $N(\mu_1, \tau_1^2)$.
Velja

$$f_{N(\mu_1,\tau_1^2)}(\mu) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1^2}\mu^2 - 2\frac{\mu_2}{\tau_1^2}\mu\right)}.$$

Sledi

$$[\mu^2] : \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_0^2} = \frac{1}{\tau_1^2} \text{ in}$$
$$[\mu] : \frac{n\overline{x}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\tau_0^2} = \frac{\mu_1}{\tau_1^2}.$$

Tukaj je:

- $\frac{n}{\sigma^2}$ vzorčna preciznost,
- $\frac{1}{\tau_0^2}$ apriorna preciznost,

- $\frac{1}{\tau_1^2}$ aposteriorna preciznost,
- preciznosti se pri seštevanju neodvisnih normalnih porazdelitvah seštevajo.

Preciznost je $\frac{1}{D(..)}$.
To pomeni

$$\tau_1^2 = (\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_0^2})^{-1}$$

in

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 &= \tau_1^2(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_0^2}) \\
&= \frac{(\frac{n}{\sigma^2}\overline{x} + \frac{1}{\tau_0^2}\mu_0) \cdot \frac{\tau_0^2\sigma^2}{n}}{(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_1^2}) \cdot \frac{\tau_0^2\sigma^2}{n}} \\
&= \frac{\tau_0^2\overline{x} + \frac{\sigma^2\mu_0}{n}}{\tau_0^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \\
&= \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + \frac{\sigma^2}{n}}\overline{x} + \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\tau_0^2 + \frac{\sigma^2}{n}}\mu_0
\end{aligned}$$

2.4 Eksponentne družine porazdlitev

Vzorčni model pripada eksponentni družini porazdelitev, če velja

$$\begin{aligned}
f(x \mid \theta) &= c(\theta) \cdot e^{\langle Q(\theta), T(x) \rangle} \cdot h(x) \\
&= e^{-\psi(\theta)} e^{\langle Q(\theta), T(x) \rangle} \cdot h(x), \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
&\tau : \Theta \to \mathbb{R} \\
&T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\
&Q : \Theta \to \mathbb{R}^m \text{ in} \\
&h : \mathbb{R}^n \to [0, \infty].
\end{aligned}$$

Zgled.

① NEP Bernoullijev model:

$$
\begin{aligned}
&(X_i \mid p) \overset{\text{NEP}}{\sim} \mathit{Bernoulli}(p) = B(1,p) \\
&f(x_1 \dots x_n \mid p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \cdot 1_{\{0,1\}^n}(x_1 \dots x_n)
\end{aligned}
$$

$$f(x_1 \dots x_n \mid p) = P(X_1 = x_1 \dots X_n = x_n \mid p)$$

Preoblikujemo v:

$$(1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot 1_{\{0,1\}^n}(x_1 \dots x_n) = e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\sum_{i=1}^n x_i} \cdot 1_{\{0,1\}^n}(x_1 \dots x_n).$$

② Normalni model z znano σ^2:

$\Theta = \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(EXP)\ f(x_1 \dots x_n \mid \mu) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}.
\end{aligned}
$$

Tukaj je

$$
\begin{aligned}
c(\mu) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \\
Q(\mu) &= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}} \\
T(x) &= e^{\sum_{i=1}^n x_i} \\
h(x) &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}
$$

③ Normalni model z neznano disperzijo:

$\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty) = (\mu, \sigma^2)$

Zapišemo

$$f(x_1 \dots x_n \mid \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} e^{\left\langle\left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right), \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right\rangle}.$$

Tukaj je

$$\begin{aligned} c(\mu) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \\ Q(\mu) &= \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right) \\ T(x) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2\right). \end{aligned}$$

$m = 2$.

Preimenujemo (EXP) in definirajmo apriorne gostote

$$f(\eta, \upsilon) = \frac{1}{K(\eta, \upsilon)} \cdot e^{\langle Q(\theta), \eta\rangle - \upsilon\psi(\theta)}. \tag{2.2}$$

Tukaj je $\mu \in \mathbb{R}^n$ in $\upsilon \in \mathbb{R}$.

(Upoštevati moramo morebitne omejitve zaradi zahteve $\int F = 1$).

Seveda je

$$K(\eta, \upsilon) = \int e^{\langle Q(\theta), \upsilon\rangle - \upsilon\psi(\theta)} d\theta.$$

Aposteriorna gostota?

$$f(\theta \mid x) \propto e^{-(\upsilon+1)\psi(\theta) + \langle Q(\theta), \eta + T(x)\rangle}$$

Tukaj smo zmožili nekonstantne faktorje iz 2.1 in 2.2.

Vidimo:

$$f(\theta \mid x) = f_{(\eta + T(x), \upsilon + 1)}(\theta).$$

Gre za konjugirano družino.

Zgled. Aplicirajmo to konstrukcijo na modelu 2. Dobimo konjugirano družino

$$f_{(\eta,\upsilon)}(\mu) \propto e^{\frac{\mu}{\sigma^2 \eta} - \tau\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}},$$

kjer sta $\eta, \upsilon \in \mathbb{R}$.

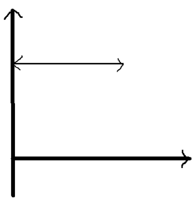
Vidimo, da mora biti $\upsilon > 0$.

DN: $\eta, \upsilon \to \mu_0, \tau_0^2$ - reparametrizacija.

2.5 Neinformirane apriorne porazdelitve

Neinformirana apriorna porazdelitev je taka, ki „ne vsebuje predhodne informacije“ o parametru. Tovrsten koncept je šibko-informativna apriorna porazdelitev. Izkaže se, da s statistični praksi (tudi v aplikacija frekventistične statistike) potrebujemo ta koncept.

Zgled. V Beta-binomskem modelu (..) je Laplace predlagal $U(0,1) = Beta(1,1)$ kot neinformirano porazdelitev.



„Ploščata porazdelitev“.
Učinek reparametrizacije

Zgled. Binomski vzorčni model: $f(k \mid p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ p \in (0,1)$. Reparametrizirajmo s parametrom $q = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = logit(p)$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(k \mid q) &= f(k \mid logit^{-1}(q)) \\
&= f\left(k \mid \frac{e^q}{1+e^q}\right) \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{e^q}{1+e^q}\right)^k \left(\frac{1}{1+e^q}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} (1+e^q)^{-k} e^{kq} \quad (q \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Kako je s transformacijo apriorne porazdelitve?
Naj bo Π slučajna spremenljivka z realizacijo p in Q slučajna spremenljivka

z realizacijo q; velja $Q = logit \circ \Pi = logit(\Pi)$:

$$f_Q(q) = f_{logit(\Pi)}(q) = f_\Pi(logit^{-1}(q)) \cdot \left| \frac{d}{dq} logit^{-1}(q) \right|$$
$$logit^{-1}(q) = 1 - \frac{1}{1+e^q} \implies \frac{d}{dq} logit^{-1}(q) = (1+e^q)^{-2} e^q.$$

Sledi: če je $\Pi \in (0{,}1)$, je

$$f_Q(q) = \frac{e^q}{(1+e^q)^2};$$

ali je to še ploščata porazdelitev?

Jeffreys je kot privzeto neinformativno porazdelitev predlagal

$$f(\theta) \propto \sqrt{|det(FI(\theta))|}. \tag{2.3}$$

Tu je $FI(\theta)$ t.i. Fisherjeva informacija:

$$\begin{aligned} FI(\theta) &= E_{(X|\Theta)}(grad_\theta \ln(f(x \mid \theta)) \cdot grad_\theta \ln(f(x \mid \theta))^T) \\ &= Var_{(X|\Theta)}(grad_\theta \ln(f(x \mid \theta))) \\ &= -E_{(X|\Theta)}(H_\theta(lnf)(x \mid \theta)). \end{aligned}$$

Za $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$ je $grad_\theta \ln(f(x \mid \theta))$ vektor s komponentami $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln(f(x \mid \theta))$ za $1 \leq i \leq r$.

<u>Učinek reparametrizacije na Jeffreysovo apriorno porazdelitev</u>

Reparametrizirajmo s parametrom $\lambda = \phi(\theta)$, kjer je

$$\phi : \Theta \subset \mathbb{R}^n \to \Lambda \subset \mathbb{R}^n$$

diferenciabilen; sledi

$$\widetilde{f}(x \mid \lambda) = f(x \mid \phi^{-1}(\lambda)).$$

Odvajajmo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln\Big(\widetilde{f}(x \mid \lambda)\Big) &= \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(f(x \mid \lambda_j)) \cdot \frac{\partial(\psi^{-1})_j}{\partial \lambda_i}(\lambda)) \\ &= \left[\frac{\partial(\psi^{-1})_j}{\partial \lambda_i} \right]_{j=1}^{n} \cdot grad_\theta(\ln f)(x \mid \phi^{-1}(\lambda)) \end{aligned}$$

$$grad_\lambda f(x \mid \lambda) = [J(\phi^{-1}(\lambda))]^T \cdot grad_\theta \ln f(x \mid \phi^{-1}(\lambda))$$

J: Jacobijeva matrika.

$$\begin{aligned}
\ln \widetilde{f}(x \mid \lambda) &= \ln\Big(f(x \mid \phi^{-1}(\lambda))\Big) \cdot grad_\lambda \ln(f(x \mid \lambda)) \cdot grad_\lambda \ln(f(x \mid \lambda))^T \\
&= [J\phi^{-1}(\lambda)]^T \cdot grad_\theta \ln f(x \mid \phi^{-1}(\lambda)) \cdot grad_\theta \ln f(x \mid \phi^{-1}(\lambda))^T \cdot [J\phi^{-1}(\lambda)] \\
&\Longrightarrow \widetilde{FI}(\lambda) = (J\phi^{-1}(\lambda))^T \cdot FI(\phi^{-1}(\lambda)) \cdot J\phi^{-1}(\lambda).
\end{aligned}$$

Kaj je Jeffreysova apriorna porazdelitev na λ?

$$\begin{aligned}
& f_{Jeffrey}(\lambda) = c\sqrt{det\widetilde{FI}(\lambda)} = \\
& = c\sqrt{detFI(\phi^{-1}(\lambda))} = c|detJ(\phi^{-1}(\lambda))|;
\end{aligned}$$

to je transformirana Jeffreysova apriorna porazdelitev (transformirana sama vase).

Poglavje 3

Monte-Carlo integracija in metode vzorčenja

Proučujemo (neznani) parameter vzorčnega povprečja, recimo da nas zanima realnoštevilska funkcija $h(\theta)$.

Zgled.

Morda nas zanima „$E(X^2)$“ naše preučevane slučajne spremenljivke. Če imamo normalni model s parametrom $\theta = (\mu, \sigma^2)$, nas torej zanima $h(\mu, \sigma^2) = (\mu^2, \sigma^2)$. V Bayesovem okviru iz apriorne porazdelitve in vzorca dobimo aposteriorno porazdelitev z gostoto

$$f(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta) f(\theta)}{f(x)},$$

kot oceno za $h(\theta)$ vzamemo npr. aposteriorno pričakovano vrednost

$$E(h(\theta) \mid X = x) = \int h(\theta) f(\theta \mid x) d\theta.$$

Problemi:

- $h(\theta) f(\theta \mid x)$ je lahko zahtevna za integracijo - numerično,
- morda je „že“ $f(x \mid \theta) f(\theta)$ zahtevna za integracijo in $f(x)$ sploh ne „poznamo“.

Odgovor na to je integracija Monte-Carlo z Markovskimi verigami.

3.1 Klasična integracija Monte-Carlo

Zgled. „Integrirajte“ $\int_0^1 |\sin(100\sin(\pi x))|\, dx$.

Spomnimo se na KZVŠ: če so $X_1, X_2 \ldots$ NEP slučajni vektorji s pričakovano vrednostjo μ, velja

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to \mu = \int x f(x) dx$$

skoraj gotovo (s.g.).
Če je h taka realnoštevilska funkcija, da obstaja $E(h(X_i))$, so tudi $h(X_1), h(X_2) \ldots$ NEP s pričakovano vrednostjo $E(h(X_i))$ in zato

$$\frac{h(x_1) + \cdots + h(x_n)}{n} \to E(h(X_i)) = \int h(x) f(x) dx$$

skoraj gotovo.
S pomočjo KZVŠ lahko ocenimo integral dane funkcije $h : (0{,}1) \to \mathbb{R}$ na naslednji način: privzamemo zaporedje NEP $X_i \sim N(0{,}1)$, torej velja

$$\frac{h(x_1) + \cdots + h(x_n)}{n} \to \int h(x).|.dx$$

skoraj gotovo.
Kaj to pomeni?
Verjetnost tistih zaporedij $(X_1, X_2 \ldots)$, pri katerih limita $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)$ obstaja in je enaka .|..
Tu manjka ocena za natančnost ocene.
DN: implementirajmo.
NEP - izziv.
Izkaže se, da s psevdonaključnimi števili znamo izvrstno simulirati NEP.
Vzorčenje iz (0,1) (za razumno velike vzorce).
Oceno natančnosti lahko dobimo s pomočjo CLI: privzemino obstoj disperzije slučajne spremenljivke X_i ($\iff$ $\int h(x)^2 f(x) dx < \infty$).

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(h(X_i) - \overline{h(X_i)})^2.$$

Po CLI velja

$$\frac{h(X_i) - E(h(X_i))}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0{,}1).$$

Za $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sledi

$$P\left(\frac{\overline{h(X_i)} - E(h(X_i))}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \in [-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}]\right) = 1 - \alpha$$

Verjamemo, da se ocena $\overline{h(x_i)}$ razlikuje od dejanskega integrala $E(h(x_i))$ za kvečjemu $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

3.2 Simulacija vzorčenja z inverzno kumulativno porazdelitveno funkcijo

Privzemimo, da je „ciljna“ kumulativna porazdelitvena funkcija (k.p.f.) $F : \mathbb{R} \to [0{,}1]$ zvezna bijekcija $\mathbb{R} \to (0{,}1)$. Velja trditev.

Trditev 3.2.1. Naj bo $U \sim U(0{,}1)$. Tedaj je $F^{-1}(U) \sim F$.

Posledica 3.2.2. Če „poznamo“ F^{-1}, znamo simulirati vzorčenje „iz F“.

Dokaz 3.2.3. $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$.

Zgled. „Poznamo“ Φ^{-1}, kjer je $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Zgornja trditev je standardna metoda za vzorčenje iz $N(0{,}1)$ ($\overset{\text{vaja}}{\Longrightarrow}$ znamo vzorčiti iz $N(\mu, \Sigma)$ za poljubne $\mu \in \mathbb{R}^d$ in $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ s.p.d.).
V splošnem, če definiramo posplošeni inverz

$$F^{-}(U) = \inf F^{-1}([u, \infty)),$$

je (še vedno) $F^{-1}(U) \sim F$. ($\overset{\text{vaja}}{\Longrightarrow}$ znamo vzorčiti iz končnih diskretnih porazdelitev).

3.3 Metoda sprejmi ali zavrni (A/R)

Motivacija: Naj bo $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ciljna (Lebesgueova) gostota. Označimo „graf“ pod njo:

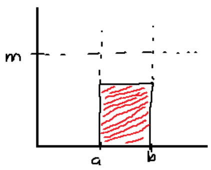
$$A_f = \{(x, u) \mid 0 \leq u \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Seveda je $S(A_f) = 1$ (ploščina).

Pripomnimo, da za $(X,U) \sim U(A_f)$ velja $X \sim f$:

$$f_X(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{(X,U)}(x,u)du = \int_0^{f(x)} du = f(x).$$

A/R #1: privzemimo $\{x \mid f(x) > 0\} \subset (a,b)$, kjer $-\infty < a < b < \infty$ in $\exists m : f(x) < m$ za vse x.



Simulacijo vzorčenja $X \sim f$ implementiramo takole:

(i) vzorčimo $Y = y$, kjer $Y \sim (a,b)$ -„x“,

(ii) vzorčimo $(V \mid Y = y) = v$ (realizacija) iz $U(0,m)$ -„y“,

(iii) če je $v < f(y)$ sprejmemo $X = y$, če je $v \geq f(y)$ zavrnemo y in ponovimo (i).

Preverimo $X \sim f$. Za $I \subset (a,b)$ je

$$\begin{aligned}
P(X \in I) &\overset{\text{vaja}}{=} P(Y \in I \mid v < f(y)) \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}} P(Y \in I \wedge v < f(Y) \mid Y = y) \cdot f_Y(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} P(v < f(Y) \mid Y = y) \cdot f_Y(y)dy} \\
&\overset{\text{pogojna}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}} P(y \in I \wedge v < f(y)) \cdot f_Y(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} P(v < f(y)) \cdot f_Y(y)dy} \\
&\overset{I \subset (a,b)}{=} \frac{\int_I P(v < f(y)) \cdot \frac{1}{b-a} dy}{\int_{(a,b)} P(v < f(y)) \cdot \frac{1}{b-a} dy} \\
&= \frac{\int_I f(y)dy}{\int_{(a,b)} f(y)dy} \\
&= \int_I f(y)dy,
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali $P(V < f(y)) = \frac{f(y)}{m}$ na (a,b). $\int_I f(y)dy$ je gostota X.

A/R #2: Privzemimo, da znamo vzorčiti iz gostote $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ in da je $f(x) < M \cdot g(x)$ za vse x (za neki M). Simulacijo vzorčenja $X \sim f$ implementiramo takole:

(i) vzorčimo $Y = y$, kjer $Y \sim g$,

(ii) vzorčimo $(V \mid Y = y) = v$ iz $U(0,M \cdot g(y))$. Lahko vzamemo $W \sim U(0,1)$ in $V \sim M \cdot g(y) \cdot W$,

(iii) če je $v < f(y)$ sprejmemo $X = y$, če je $v \geq f(y)$ zavrnemo in ponovimo (i).

Preverimo $X \sim f$. Za $I \subset \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned}
P(X \in I) &\overset{\text{vaja}}{=} P(Y \in I \mid M \cdot g(y) \cdot w < f(y)) \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}} P(Y \in I \wedge M \cdot g(y) \cdot w < f(Y) \mid Y = y) \cdot f_Y(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} P(M \cdot g(y) \cdot w < f(Y) \mid Y = y) \cdot f_Y(y)dy} \\
&\overset{\text{pogojna}}{=} \frac{\int_I P(W < \frac{f(y)}{Mg(y)}) \cdot g(y)dy}{\int_{\mathbb{R}} P(W < \frac{f(y)}{Mg(y)}) \cdot g(y)dy} \\
&= \cdots = \int_I f(y)dy,
\end{aligned}$$

kjer smo v upoštevali $P(W < \frac{f(y)}{Mg(y)}) = \frac{f(y)}{Mg(y)}$. Opazimo da je $M \cdot g(y)$ namesto m od prej (na nek način).
Pripomnimo, da je verjetnost sprejetja tu enaka

$$P(M \cdot g(y)W < f(y)) = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = \frac{1}{M}.$$

Želimo M čim bližje 1.

Zgled. Oglejmo si $f = F_{N(0,1)}$ in $g = F_{Cauchy}$ $\left(g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)$.

$$F_{Cauchy}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$
$$F_{Cauchy}^{-1}(u) = \tan\Big(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\Big).$$

u smo izrazili iz $x = \frac{1}{\pi} arctan(x) + \frac{1}{2}$.
Vzorčenje iz Cauchyja je $\tan\Big(\pi(U - \frac{1}{\pi})\Big)$, U enakomerna na (0,1).

DN: optimiziraj M.

3.4 Metode MCMC (Monte Carlo z markovskimi verigami)

Okvir:
Želeli bi simulirati vzorčenje iz „ciljne“ spremenljivke z gostoto f (ki jo morda poznamo le do multiplikativne konstante natančno). Izkaže se, da za ocenjevanje pričakovane vrednosti

$$E(h(„X“)) = \int h(x)f(x)dx \quad \text{(nevtralne črke)}$$

pravzaprav ne potrebujemo simulacije neodvisnega vzorčenja.
Aproksimacija z vzročnim povprečjem

$$E_f(h) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h\left(X^{(i)}\right)$$

dobro funkcionira tudi v primeru, ko je $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)} \ldots$ primerna markovska veriga (z vrednostmi tam, kjer $f > 0$ - prostor „stanj“) s stacionarno porazdelitvijo z gostoto f.

Definicija 3.4.1 (Markovska veriga)**.** Markovska veriga je zaporedje s.v. (na prostoru stanj), ki ima lastnost, da je

(i) $\forall n$:

$$(X^{(n)} \mid X^{(n-1)} = x^{(n-1)} \dots X^{(0)} = x^{(0)}) = (X^{(n)} \mid X^{(n-1)} = x^{(n-1)})$$

- markovska lastnost (neodvisno od n),

(ii) porazdelitve $(X^{(n)} \mid X^{(n-1)} = x)$ so za vse n enake (za vsak x imamo eno porazdelitev).

Tehnično gledano to pomeni, da Markovska veriga nastane tako, da ob času n vrednost $X^{(n)}$ dobimo z vzorčenjem iz cele porazdelitve, ki je odvisna le od stanja $x^{(n-1)}$.
$X^{(i)}$ - členi markovske verige,
$(X^{(n)} \mid X^{(n-1)} = x)$ - prehodne porazdelitve.
Markovska veriga (M.v.) ima stacionarno porazdelitev (...)f, če vedno velja sklep $(X^{(n-1)}) \sim f \implies X^{(n)} \sim f$.
(nista pa $X^{(n-1)}$ in $X^{(n)}$ neodvisna s.v.)
Za ocenjevanje potrebujemo t.i. ergodične markovske verige:

(a) EZVŠ (ergodični zakon veliikih števil): če za vsako integrabilno funkcijo h velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h\left(X^{(i)}\right) = E_f(h)$$

skoraj gotovo (s.g.) za (skoraj) vse začetne vrednosti $x^{(0)}$ (ustrezne dobimo z verjetnostjo 1),

(b) ECLI (ergodični CLI): za vsako funkcijo h, za katero obstaja $\int h^2(x)f(x)dx$, obstaja konstanta γ_n (MCMC disperzija), za katero

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h\left(X^{(i)}\right) - \int h(x)f(x)dx}{\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

(γ_n je potrebno oceniti iz vzorca, kar je težko.)

Privzamemo (i) in naj bo $A \subset \{f > 0\}$ vsako območje, za katero

$$P(„X“ \in A) = \int_A f(x)dx = a > 0.$$

Vzenimo $a := 1_A$.
Tedaj $\frac{\text{število členov (do } n\text{-tega, ki padejo v)A}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \int 1_A(x)f(x)dx = a.$

3.4.1 Metropolisov algoritem

Naj bo f ciljna gostota in naj bo $\{q(y \mid x) \mid y,x$ iz prostora stanj$\}$ družina „predlaganih“ gostot: za vsak x (iz katerih pa znamo simulirati NEP vzorčenje) je $q(\_ \mid x)$ gostota neke porazdelitve. Naj bo še $q(y \mid x) = q(x \mid y)$ za vse pare (če smo v stanju x, predlagamo y „z enako verjetnsotjo“, kot če bi predlagali x, če smo v stanju y).

Opis algoritma:

(i) od nekod dobimo $x^{(0)}$,

(ii) privzamemo, da že imamo realizacijo $X^{(n-1)} = x^{(n-1)}$. Vzorčimo kandidata y za naslednjo realizacijo iz $q(\_ \mid x^{(n-1)})$.
Če velja $f(y) \geq f\left(x^{(n-1)}\right)$, vzamemo $X^{(n)} = y$ (realizacija).
Če je $f(y) < f\left(x^{(n-1)}\right)$, vzamemo

$$\begin{cases} X^{(n)} = y \text{ z verjetnostjo } \rho = \frac{f(y)}{f\left(x^{(n-1)}\right)} \\ X^{(n)} = x^{(n-1)} \text{ z verjetnostjo } 1 - \rho \end{cases}$$

Naenkrat. $X^{(n)} = y$ z verjetnostjo $\rho = \min\{\frac{f(y)}{f\left(x^{(n-1)}\right)}, 1\}$ (*)
(*): če $f\left(x^{(n-1)}\right) = 0$, vedno vzamemo y.
Ta korak implementiramo z realizacijo $u \in U(0,1)$, vzamemo $X^{(n)} = y$, če $u \leq \rho$, oz. $X^{(n)} = x^{(n-1)}$, če $u > \rho$.

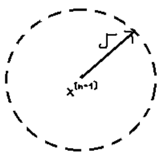
Izkaže se, da ta opis določa markovsko verigo s stacionarno porazdelitvijo f.
Če velja sklep $f(y) > 0 \implies \forall x : q(y \mid x) > 0$, ima veriga EZVŠ.
Bayesova aplikacija.
Ciljna gostota je $f(\theta \mid x)$(v θ).

Če je $\theta^{(n-1)}$ stanje v času $n-1$, za implementacijo koraka (ii) potrebujemo

$$\frac{f(\theta^* \mid x)}{f(\theta^{(n-1)} \mid x)} = \frac{f(x \mid \theta^*) f(\theta^{(*)})}{f(x \mid \theta^{(n-1)}) f(\theta^{(n-1)})};$$

v resnici ne potrebujemo normalizacijske konstante v Bayesovi formuli.
Tipični primeri predlaganih gostot:

1. $(Y \mid X^{(n-1)} = x^{(n-1)}) \sim U\left(K_\delta(X^{(n-1)})\right)$ za fiksen δ (krogla s polmerom δ), v neki metriki.

   (Povrnljivost - povsod, kjer neničelne verjetnosti, jemlje ∞-krat.)
   (To pomeni $q(y \mid x) = \frac{1}{Vol(K_\delta(x))} \cdot 1_{K_\delta(x)}(y)$ (namesto klasične uporabimo ∞ metriko).)

2. $(Y \mid X^{(n-1)} = x^{(n-1)}) \sim N\left(x^{(n-1)}, \Sigma\right)$ za fiksno Σ.
   (To pomeni $q(y \mid x) = (2\pi)^{-\frac{dim}{2}} (det\Sigma)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(y-x),(y-x)\rangle}$ - simetričnost ✓.)
   V tem primeru je $Y|X^{(n-1)} = X^{(n-1)} + N(0, \Sigma)$.

Metropolisov algoritem tipično nima ECLI :(.

3.4.2 Metropolis-Hastingov algoritem

Tu predlagane gostote $q(y \mid x)$ ne zadoščajo simetričnosti. V algoritmu namesto ρ iz 3.4.1. uporabimo

$$\rho = \rho\left(x^{(n-1)}, y\right) = \min\{1, \frac{f(y)}{f\left(x^{(n-1)}\right)} \cdot \frac{q\left(x^{(n-1)} \mid y\right)}{q\left(y \mid x^{(n-1)}\right)}\}$$

(in $\rho = 1$ če $f\left(x^{(n-1)}\right) \cdot q\left(y \mid x^{(n-1)}\right) = 0$).
Enake lastnosti kot prej:

- vedno dobimo verigo s stacionarno porazdelitvijo f
- če $\forall x: \ q(\_, x^{(n)})$ dopušča kandidate iz $\{f > 0\}$ (v končno korakih), velja EVZŠ (blagi pogoji).

Dobimo pa še:
- pri primernih predpostavkah na q dobimo tudi ECLI.

Zgled („Neodvisni“ Hastingov algoritem). Vedno „funkcionira“ (teoretično) $q(y \mid x) = q(y)$ za neko fiksno porazdelitev z gostoto g, kjer $g(y) > 0$ za $\forall f(y) > 0$.

3.4.3 Gibsov vzorčevalnik

Gibsov vzorčevalnik je algoritem za konstrukcijo markovske verige s ciljno gostoto $f(x{,}y)$ (ali $f(x_1 \dots x_n)$) na podlagi vzorčenja iz „gostot“ $f(x \mid y)$ ali $f(y \mid x)$.
Motivacija: proučujemo vzorčni model z gostotami $f(x \mid \theta_1, \theta_2) = f(x \mid \theta)$, ki je tak, da znamo simulirati neko vzorčenje iz $f(\theta_1 \mid \theta_2, x)$ in $f(\theta_2 \mid \theta_1, x)$, ne pa (neposredno) iz $f(\theta_1, \theta_2 \mid x)$.
Opis algoritma.

(i) Vzorčimo y_0 iz neke porazdelitve ali pa y_0 določimo.
Vzorčimo x_0 iz pogojne porazdelitve $f(X \mid y_0)$.

(ii) Če poznamo (x_{n-1}, y_{n-1}), vzorčimo najprej y_n iz $f(x \mid x_{n-1})$, potem pa še x_n iz $f(y \mid y_n)$ (temu koraku oz. njegovim podkorakom pravimo „osveževanje“).

Dobimo zaporedje s.s. (ali DN)

$$X^{(0)} = (x_0, y_0),\ X^{(1)} = (x_1, y_1),\ X^{(2)} = (x_2, y_2) \text{ itd.}$$

Izkaže se, da so zaporedja

$$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)} \dots$$
$$X_0, X_1, X_2 \dots$$
$$Y_0, Y_1, Y_2 \dots$$

markovske verige in da ima veriga $\{X^{(i)} \mid n\}$ stacionarno porazdelitev $f(x,y)$. Pri blagih pogojih je ta veriga ergodična.

Zgled.

Tipična aplikacija v Bayesovi statistiki je:
privzemimo model $f(x \mid \theta_1, \theta_2)$ z apriorno gostoto $f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1), f(\theta_2)$, kjer je $f(\theta_1)$ iz konjugirane družine k modelu $f(x \mid \theta_1, \text{KONST})$, $f(\theta_2)$ pa je iz konjugirane družine k modelu $f(x \mid \text{KONST}, \theta_2)$, iz katerih znamo simulirati NEP vzorčenje.
Polna aposteriorna porazdelitev

$$f(\theta_1, \theta_2 \mid x) = \frac{f(x \mid \theta_1, \theta_2) \cdot f(\theta_1) \cdot f(\theta_2)}{f(x)}$$

je tipično nedostopna, pač pa velja

$$f(\theta_1 \mid \theta_2, x) = \frac{f(x \mid \theta_1, \theta_2) \cdot f(\theta_1 \mid \theta_2)}{f(x \mid \theta_2)} = \frac{f(x \mid \theta_1, \theta_2) \cdot f(\theta_1)}{f(x \mid \theta_2)}, \tag{3.1}$$

kar je aposteriorna gostota Bayesovega modela z gostotami $f(x \mid \theta_1, \theta_2)$ iz apriorne gostote $f(\theta_1)$, kjer θ_2 razumemo kot konstanto. Po našem premisleku je torej $f(\theta_1 \mid \theta_2, x)$ iz „prave“ konjugirane družine. Simetrično je

$$f(\theta_2 \mid \theta_1, x) = \frac{f(x \mid \theta_1, \theta_2) \cdot f(\theta_2)}{f(x \mid \theta_1)}$$

iz „znane“ konjugirane družine.
Konkretno si oglejmo enorazsežni NEP-normalni model

$$(X \mid \mu, \sigma^2) \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix}, \sigma^2 I\right) \tag{3.2}$$

z gostotami

$$f(x_1 \dots x_n \mid \mu, \sigma^2) = f(x \mid \mu, \sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}.$$

Vemo, da je $\{N(\mu_*, \tau_*^2) \mid \mu_* \in \mathbb{R}, \tau_*^2 \in (0, \infty)\}$ konjugirana k enoparametričnim modelom z gostotami 3.2, kjer σ^2 poznamo.
Izkaže se (vaja), da je družina $\{\text{InvGama}(a,b) \mid a,b \in (0, \infty)\}$ konjugirana k enoparametričnim modelom z gostotami 3.2, kjer μ poznamo. Tu je $Y \sim \text{InvGama}(a,b) \iff \frac{1}{Y} \sim \text{Gama}(a,b)$, velja

$$f_{\text{InvGama}(a,b)}(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{-a-1} e^{-\frac{b}{y}}.$$

Vemo: pri $f(\mu) = f_{N(\mu_*, \tau_*^2)}(\mu)$ je

$$f(\mu \mid \sigma^2, x) \overset{3.1}{=} f_{N\left(\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau_*^2}\mu_* + \frac{\tau_*^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau_*^2}\overline{x}, \frac{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \tau_*^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau_*^2}\right)}(\mu).$$

Vidimo: pri $f(\sigma^2) = f_{\text{InvGama}(a,b)}(\sigma^2)$ je

$$f(\sigma^2 \mid \mu, x) = f_{\text{InvGama}\left(a + \frac{n}{2}, b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)}(\sigma^2).$$

<u>Gibsov vzorčevalnik</u>: ciljna porazdelitev $f(\mu, \sigma^2 \mid x)$.

(i) Določimo $\sigma_0^2 = 1$. Vzorčimo μ_0 iz

$$f_{N\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \tau_*^2}\mu + \frac{\tau_*^2}{\frac{1}{n} + \tau_*^2}\overline{x}, \frac{\frac{1}{n}\tau_*^2}{\frac{1}{n} + \tau_*^2}\right)},$$

(ii) vzorčimo σ_1^2 iz $f(\sigma^2 \mid \mu_0, x)$,
vzorčimo μ_1^2 iz ...
$\vdots$

(Blagi pogoji so izpolnjeni, veriga ergodična.)