Kombinatorika 2 - zapiski s predavanj prof. Konvalinke

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Kazalo

kratica	izraz
NSTE	naslednje trditve so ekvivalentne
orf	običajna rodovna funkcija
erf	eksponentna rodovna funkcija
fp	formalni polinom
fpv	formalna potenčna vrsta

Poglavje 1

Osnove

1.1 Kako štejemo?

S končna množica, $|S| = ?$

Pogosto $S_n, n \in \mathbb{N}$.

Preštevalno zaporedje $|S_0|, |S_1|, |S_2| \dots$

Kaj je odgovor?

(1) Formula.

$[n] = \{1, 2 \dots n\}$.

$S_n = 2^{[n]} = P([n])$.

$|S_n| = 2^n$.

$S_n = \{\text{permutacije n elementov}\}$.

$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ „n fakulteta“ „n factorial“.

$S_n = \{\text{kompozicije n s členi 1 ali 2}\}$, npr. $5 = 1{+}2{+}1$.

$|S_5| = 8$.

$1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots$

$|S_n| = F_n$ - Fibonaccijevo zaporedje.

(2) Asimptotska formula.

$|S_n| \sim a_n$ (to pomeni $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|S_n|} = 1$).

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ - Stirlingova formula.

$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

(3) Z rekurzijo.

$S_n = 2^{[n]}$.

$a_n = |S_n|, a_n = 2a_{n-1};\ n \geq 1,\ a_0 = 1$.

$S_n = \{\text{kompozicije s členi 1 ali 2}\}$.

$S_n = F_n, F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1$.

F_{n-1} - kompozicije, ki se končajo z 1, F_{n-2} - končajo z 2.

(4) Z rodovno funkcijo (generating function).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_n a_nx^n$ običajna (ordinary) rodovna funkcija - ORF.

$a_n = 2^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^nx^n = \frac{1}{1-2x}$.

$\sum_n F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$.

$\sum_n n!x^n$ $//$.

$\sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$ eksponentna rodovna funkcija.

$\sum_n 2^n\frac{x^n}{n!} = e^{2x}$.

$\sum_n \frac{n!}{n!}x^n = \frac{1}{1-x}$.

(4) je najboljši način, da poznamo zaporedje.

– Rodovna funkcija je velikokrat „lepa“, tudi če ni lepe formule za zaporedje.

  $i_n \ldots$ # involucij z n elementi ($\pi^2 = \mathrm{id}$).

  ni enostavnejše formule za i_n.

  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{n!}x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}$

– Do rodovne funkcije lahko pogosto pridemo neposredno s kombinatoričnim premislekom.

  Involucija = permutacija s cikli dolžine 1 ali 2.

  $\sum F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$; x - cikli dolžine 1, x^2 - cikli dolžine 2.

– V rodovni funkciji so „skrite“ (1)-(3).

1.2 Osnovne Kombinatorične strukture

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$.

$[n] = \{1, 2 \dots n\}$.

$2^A = P(A) = \{B \subseteq A\}$.

$\binom{A}{k} = \{B \subseteq A : |B| = k\}$ „A nad k“ (angl. „A choose k“).

$\binom{[4]}{2} = \{\{1{,}2\}, \{1{,}3\} \dots \{3{,}4\}\}$.

$Y^X = \{f : X \to Y\}$.

Statistika na množici S je preslikava $S \to \mathbb{N}$.

$S = 2^A$.

Moč je statistika.

S končna množica, f statistika na S.

Pogosto gledamo polinom $\sum_{s\in S} x^{f(s)}$ (enumeration).

$|.|$ na $2^{[3]} : 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3$.

$S_n = \{\text{permutacije } [n]\} = \{f : [n] \to [n] : f \text{ bijektivna}\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ - dvovrstična notacija.

2 1 3 - enovrstična notacija.

(1 2)~~(3)~~ - produkt disjunktnih ciklov.

$i, \pi(i), \pi^2(i) \dots$

Gotovo $\exists j_1 < j_2 : \pi^{j_1}(i) = \pi^{j_2}(i) \implies i = \pi^j(i);\ j > 0$.

$(i\ \pi(i) \dots \pi^{j-1}(i))$ cikel.

38241765 = (1 3 2 8 5)(4)(6 7) = (4)(2 8 5 1 3)(7 6).

Množenje permutacij: kompozicije.

Nekomutativno za $n > 2$.

Disjunktni cikli komutirajo.

Zapis: enoličen do vrstnega reda ciklov in ciklične ureditve ciklov.

Cikel dolžine 1 = negibna točka.

Cikel dolžine 2 = transpozicija.

$(S_n\cdot)$ simetrična grupa.

$e = id = 1\ 2 \dots n$.

π^{-1} inverz (kot preslikava).

$3\ 8\ 2\ 4\ 1\ 7\ 6\ 5^{-1} = 5\ 3\ 1\ 4\ 8\ 7\ 6\ 2$.

$3\ 1\ 4\ 2 \cdot 4\ 2\ 3\ 1 = 2\ 1\ 4\ 3$ - množimo z desne.

Statistika: # ciklov = $c(\pi)$ (štejemo tudi cikle dolžine 1).

$n = 3 : x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$.

$\sum_{\pi \in S_n} x^{c(\pi)} = \sum_k |\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| x^k$.

$|\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| =: c(n,k)$ - Stirlingovo število 1. vrste.

$\sum_{B \subseteq [n]} x^{|B|} = \sum_k |\binom{[n]}{k}| x^k$.

$|\binom{[n]}{k}| =: \binom{n}{k}$ - binomski koeficient.

Inverzija $\pi \in S_n$ je (i,j), da je za $i < j$ $\pi_i > \pi_j$.

$inv(\pi) = \#$ inverzij π.

$inv(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 7$.

$0 \leq inv(\pi) \leq \binom{n}{2}$.

Signatura permutacije: $(-1)^{inv(\pi)}$.

$sg\pi = 1$ - soda permutacija: produkt sodo mnogo transpozicij.

$sg\pi = -1$ - liha permutacija: produkt liho mnogo transpozicij.

$detA = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{inv(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}$.

Izraz brez $(-1)^{inv(\pi)}$: permanenta.

$n = 3 :$

$1 + 2x + 2x^2 + x^3 = 1 + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 = (1+x)(1+x^2)$.

$\sum_{\pi in S_n} x^{inv(\pi)} = 1 \cdot (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{n-1})$ - kasneje.

permutacij v S_n s k inverzijami: ni standardne oznake.

spust/padec (descent) $i : \pi_i > \pi_{i+1}$.

$des(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 3$.

$0 \leq des(\pi) \leq n - 1$.

permutacij v S_n s $k-1$ spusti = $A(n,k)$ - Eulersko število ($k-1$ iz zgodovinskih razlogov).

$\sum_k A(n,k) x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{1+des(\pi)} = A_n(x)$ - eulerski polinom.

$n = 3 :$

$x + 4x^2 + x^3$.

razdelitev/razbitje (angl. set partition) A je $\{B_1, B_2 \ldots B_n\}, davelja :$

- $B_i \neq \emptyset\ i = 1 \ldots k$,

– $B_i \cap B_j = \emptyset$ $1 \leq i < j \leq k$,

– $\cup_{i=1}^{k} B_i = A$.

B_i: bloki razdelitve,

\# blokov,

\# razdelitev $[n]$ s k bloki $= S(n,k)$ - Stirlingovo število druge vrste.

$A = [3] \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1,2\},\{3\}\} \ldots \{\{1,2,3\}\}$.

$x + 3x^2 + x^3$.

$S(4,2) = 4 + 3 = 7$.

Kompozicija # n je $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_l), \lambda_i > 0$ člen kompozicije, $\lambda_i \in \mathbb{N}$,

$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$.

$l(\lambda)$ # členov - dolžina.

$\lambda \models n$ - λ je kompozicija n.

Razčlenitev # n je $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_l), \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{N}$.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l, \sum_{i=1}^{l} = n$

(angl. integer partition).

$p(n)$ - # razčlenitev n.

$p_k(n)$ - # razčlenitev n s k členi.

$n = 4:$

$4, 31, 22, 13, 211, 121, 112, 1111$ - 8 kompozicij.

$4, 31, 22, 221, 1111$ - 5 razčlenitev.

$p(4) = 5, p_2(4) = 2$.

$B(n) = \sum_k S(n,k)$ - # razčlenitev $[n]$, Bellovo število.

$B(3) = 5$.

$L(n,k)$ - razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov.

$L(4,2) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ - Lahovo število.

$E_n =$ # alternirajočih permutacij v S_n - Eulerjevo število (Euler number).

$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 \ldots$

Primerjaj: eulerska števila (eulerian number).

$1, 1, 1, 2, 5$.

Poti:

npr. poti od (0,0) do (n,m) s korakom (1,0) (vzhod) in (0,1) (sever);
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$;
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$, nikoli pod x osjo - Dyckove poti;
$c_n = \#$ Dyckovih poti dolžine n (konec v $(2n,0)$) - Catalanova števila.
$1,1,2,5,14,42\dots$
Drevesa (povezani aciklični grafi).
označenih dreves na n vozliščih.
Cayleyev izrek: n^{n-2}.
Ravninska drevesa.
(Vrstni red pomemben).
Dvojiška drevesa: vsako vozlišče ima 2 ali 0 naslednikov.

1.3 Osnovna načela preštevanja

Načelo vsote: $A \cap B = \emptyset \implies |A \cap B| = |A| + |B|$.
$i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.
Načelo produkta: $|A \times B| = |A| \cdot |B|, |\prod_{i=1}^n A_i| = \prod_{i=1}^n |A_i|$.
Kombinatorično:

> 2 možnosti, izberemo eno ali drugo (ne pa obe) $\implies$ # načinov je vsota # načinov,
>
> dvakrat izbiramo, izbiri sta neodvisni $\implies$ # načinov je produkt # načinov.

Trditev 1.3.1. $|2^A| = 2^{|A|}$.

Dokaz 1.3.2. Za vsak element se odločimo, ali ga damo v podmnožico ali ne. 2 izbiri, izbiramo $|A|$-krat, izbire so neodvisne $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{|A|}$.
$\phi : 2^A \to \{0,1\}^{|A|}, A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$.
$\phi(B) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_n), \epsilon_i = \begin{cases} 1 \; a_i \in B \\ 0 \text{ sicer} \end{cases}$

$\psi : \{0,1\}^{|A|} \to 2^A$.
$\psi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = \{a_i : \epsilon_i = 1\}$.
$\psi \circ \phi, \phi \circ \psi$ identiteti.
$|\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$. ■

Trditev 1.3.3.

1. $|K^N| = |K|^{|N|}$.

2. $|\{f \in K^n \text{ injektivna}\}| = |K|(|K|-1)\dots(|K|-|N|+1)$.

3. $|S_n| = n(n-1)\dots 1 = n!$.

oznake:
$n^{\underline{k}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$: n na k padajoče.
$n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1)$: n na k naraščajoče.

Opomba. Pri 2. in 3. smo uporabili varianto načela produkta: izbire sicer niso neodvisne, je pa neodvisno število izbir.

Dirichletov princip (pigeon-hole principle):
$\phi : X \to Y$ injektivna $\implies |X| \leq |Y|$.
Če damo n kroglic v k škatel, $n > k$, sta v vsaj eni škatli vsaj 2 kroglici.

Primer.

(1) n ljudi, med njimi sta dva, ki poznata enako mnogo ljudi.
X =ljudje, $f = \#$ znanstev.
n kroglic, n škatel, ampak škatli 0 in $n-1$ ne moreta biti obe neprazni.

(2) $X \subseteq [2n], |X| = n+1$.
Obstajata $x,y \in X, x \neq y, x|y$.
$x = 2^k \cdot l, k \geq 0, k$ lih.
$Y = \{i \in [2n] \text{ liho}\}$.
$x \mapsto l$.

1.4 Binomski koeficienti

$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$ = število k-elementnih podmnoživ v $[n]$ = število izbir k elementov izmed n elementov.

$\binom{4}{2} = 6, \binom{5}{0} = 1, \binom{8}{-2} = 0, \binom{8}{9} = 0.$

$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n.$

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$

$\phi : \binom{[n]}{n-k} \to \binom{[n]}{k}.$

$\phi(A) = A^c.$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$

$\binom{n-1}{k-1}$: izberemo n.

$\binom{n-1}{k}$: ne izberemo n-ja.

Pascalov trikotnik:

$n = 0$

$n = 1$ 1

$n = 2$ 1 1

$n = 3$ 1 2 1

$n = 4$ 1 3 3 1

$n = 5$ 1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Trditev 1.4.1. $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{n!(n-k)!} & 0 \leq k \leq 0 \\ 0 & k > n \end{cases}$

Dokaz 1.4.2. Izberemo 1 element na n načinov, 2 na $n - 1 \cdots \implies n^{\underline{k}}$ načinov, vsak izbor smo šteli k!-krat.

Ali: preštejemo urejene izbire k različnih elementov iz $[n]$;

$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} \cdot k!.$

$\binom{n}{k}$: najprej izberemo k elementov.

k: nato jih uredimo. ■

Izrek 1.4.3 (Binomski izrek)**.** $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$;
$a,b \in K$ komutativni kolobar, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz 1.4.4.

D1. Indukcija po n:

$n = 0$: $1 = 1$

$n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \\
&\overset{\text{IP}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}(a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k}^{n} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}
$$

D2. $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ DN.

D3. $(a+b)\dots(a+b) = \sum_{\text{izbira } a \text{ ali } b}$ produkt izbranih $=$
$= \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
a izberemo k-krat.
Izberemo k oklepajev, pri katerih izberemo a.

■

$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 120$.
$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot11}{2} = 66$.
Izbori: n kroglic, k izberemo.

	s ponavljanjem	brez ponavljanja	
vrstni red pomemben	n^k	$n^{\underline{k}}$	variacije
ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	kombinacije

$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n.$
$j_1 = i_1, j_2 = i_2 + 1 \ldots j_k = i_k + k - 1.$
$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n + k - 1.$

Trditev 1.4.5. Število kompozicij n je 2^{n-1} $(n \geq 1)$, število kompozicij s k členi je $\binom{n-1}{k-1}$ $(n \geq 1)$.

Dokaz 1.4.6. n kroglic $\circ| \circ \circ \circ | \circ \circ :\; 6 = 1 + 3 + 2.$
$k - 1$ pregrad, $n - 1$ mest za pregrade. ■

Kompozicije: 2^{n-1}, $\binom{n-1}{k-1}$.
Šibka kompozicija: $(\lambda_1 \ldots \lambda_l)$; $\lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n.$
$3 : 12, 3, 21, 102, 300, 0102 \ldots$
Število šibkih kompozicij n s k členi.
$n + k - 1$ objektov, premešamo na $\binom{n+k-1}{k-1}$ oz. $\binom{n+k-1}{n}$ načinov.
Še en dokaz:
$\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n,\ \lambda_i \geq 0.$
$\mu_i = \lambda_i + 1\ \mu_i \geq 1.$
$\mu_1 + \cdots + \mu_l = n + k \implies \binom{n+k-1}{n-1}.$
Primerjaj z: kombinacije s ponavljanjem.
n kroglic, k-krat izbiram.
λ_i: kolikokrat izberemo i-to kroglico.
$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k,\ \lambda_i \geq 0.$
Šibke kompozicije k z n členi: $\binom{k+n-1}{k}$.

Trditev 1.4.7.

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz 1.4.8. Koliko je urejenih razdelitev na linearno urejene bloke:

$$k! \cdot L(n,k) = n! \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Tukaj predstavljajo

- $L(n,k)$: urejene bloke,

- $k!$: njihov vrstni red,
- $n!$: permutacije,
- $\binom{n-1}{k-1}$: šibke kompozicije.

Poti iz (0,0) v (n,m), premikamo se gor ali desno.
n-krat gor, m-krat desno: $\binom{n+m}{m}$ možnosti.
Poti iz (0,0) v $(2n,0)$, desno-gor ali desno-dol.
n-krat gor, n-krat dol: $\binom{2n}{n}$.
Dyckove poti: isto kot prej, se ne spustimo pod x-os.
Pot je slaba, če gre pod x-os:
Od tam naprej, kjer 1. doseže $y = -1$, prezrcalimo pot preko $y = -1$.
Konča se v $y = -2$.
Število slabih poti = število poti od (0,0) do $(2n, -2)$.
Teh je $\binom{2n}{n-1}$: $(n-1)$-krat gor, $(n+1)$-krat dol.
C_n = število Dyckovih poti doižine $n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$
$= \frac{(2n!)}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Multinomski koeficienti:
$\alpha_1 \times 1, \alpha_2 \times 2 \ldots \alpha_k \times k :\ 11..12..2..k$.
Na koliko načinov lahko premešamo:

$$\binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1}\binom{\alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_2} \cdots \binom{\alpha_k}{\alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}.$$

Definiramo

$$\binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k} := \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}. \tag{1.1}$$

Izrazu 1.1 pravimo multinomski simbol.
Figure v 1. vrsti pri šahu: $\frac{8!}{1!1!2!2!} = 7!$.
i-jem damo indekse $\alpha_1 \ldots \alpha_k :\ 1_1 \ldots 1_{\alpha_1} 2_1 \ldots k_{\alpha_k}$
Premešamo na $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!$ načinov.
Eno permutacijo dobimo $(\alpha_1! \ldots \alpha_k!)$-krat.
Multimnožica M je množica, v kateri se elementi lahko ponavljajo.
$M = \{1,1,1,2,2,3,3,3,3\} = \{1^3, 2^2, 3^4\}$.
Število permutacij multimnožice je multinomski simbol.

Formalno je multimnožica (S,f), kjer je S množica, $f : S \to \mathbb{N}$ šteje kolikokrat se posamezen element ponovi.

1.5 Dvanajstera pot

n kroglic, k škatel; na koliko načinov lahko damo kroglice v škatle.

$N \setminus K$	vse	injekcije	surjekcije	
L L	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$	
N L	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	„kompozicije“
L N	$\sum_i S(n,i)$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$	razdelitve
N N	$\overline{p_k(n)}$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$	razčlenitve

Vpeljemo ekvivalenčne relacije

- $f \sim_N g : \exists \pi \in S_n : f \circ \pi = g$
- $f \sim_K g : \exists \sigma \in S_k : \sigma \circ f = g$
- $f \sim_{N,k} g : \exists \pi \in S_n, \sigma \in S_k : \sigma \circ f \circ \pi = g.$

1.6 Rekurzije

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$
$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k);$

$c(n-1,k-1)$: n negibna, $(n-1)$: za kateri element vstavimo.

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k);$

$S(n-1,k-1)$: n v svojem bloku, k: v kateri blok vstavimo.

$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k);$

$L(n-1,k-1)$: n v svojem bloku, $(n+k-1)$: kam vstavimo.

$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k);$
odstranimo blok, v katerem je $n+1$, k: število elementov v bloku skupaj

z $n+1$, $\binom{n}{k}$: kateri elementi v bloku skupaj z $n+1$, $B(n-k)$: razdelimo ostale.
$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$;
$p_{k-1}(n-1)$: $\lambda_l = 1$, $p_k(n-k)$: $\lambda_l \geq 2$ (odstranimo 1. stolpec v Ferrersovem diagramu).
$A(n{,}k) = (n+1-k)A(n-1{,}k-1) + kA(n-1{,}k)$. ostranimo n, k: n damo na konec ali za spust, $(n+1-k)$: n damo na začetek ali za vzpon. V S_n velja še: števio spustov + število vzponov $= n-1$.
$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$ $n \geq 1$;
k: koliko elementov je pred $n+1$, število obratno alternirajočih = število alternirajočih $(i \to n+1-i)$, E_k: pred $n+1$, E_{n-k}: za $n+1$, štejemo in alternirajoče in obratno alternirajoče permutacije.
$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$;
k: ko 1. pridemo v $y=0$: pred in za tem sta Dyckovi poti.
$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots$
Eulerjev petkotniški izrek (dokaz kasneje) (pentagonal).

1.7 Načelo vklučitev in izključitev (NVI)

(Principle of inclusion and exclusion).
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Izrek 1.7.1 (NVI)**.**

$$
\begin{aligned}
| \cup_{i=1}^n A_i| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- \dots \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}| \\
&= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |A_S|,
\end{aligned}
$$

kjer je $A_S := \cap_{i \in S} A_i$.

Dokaz 1.7.2.

$x \in \cup_{i=1}^n A_i$.

Trdimo, da x prispeva 1 k vsoti na desni.

Recimo, da je x v natanko m množicah A_i ($1 \le m \le n$):

$$
\begin{aligned}
&m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \\
&= 1 - \left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \right) \\
&= 1 - (1-1)^m = 1.
\end{aligned}
$$

Trditev 1.7.3 (NVI, 2. verzija)**.**

$$
\left| \cap_{i=1}^n A_i^C \right| = \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|.
$$

Dokaz 1.7.4.

$$
\begin{aligned}
\left| \cap_{i=1}^n A_i^C \right| &= \left| (\cup_{i=1}^n A_i)^C \right| \\
&= |A| - | \cup_{i=1}^n A_i| \\
&= |A| + \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |A_S| \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|,
\end{aligned}
$$

kjer velja še $A_\emptyset = A$.

Primer.

(1) Koliko je k-elementnih antiverig v B_n?
$B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$ Boolova algebra, antiveriga - množica neprimerljivih elementov.

k=1: 2^n (vsi elementi).

k=2:

$$
\begin{aligned}
&S = \{(A,B) : A, B \subseteq [n]\}\\
&S_1 = \{(A,B) : A \subseteq B\}\\
&S_2 = \{(A,B) : B \subseteq A\}\\
&|S_1^C \cap S_2^C| = |S| - |S_1| - |S_2| + |S_1 \cap S_2| = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n;
\end{aligned}
$$

4^n: vse možnosti $x \in, \notin A,B$, 3^n: vse razen $x \in A, \notin B \dots$
$\implies \frac{1}{2}(4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n)$.

k=3:

$$
\begin{aligned}
&S = \{(A,B,C) : A,B,C \in 2^{[n]}\}\\
&S_1 : A \subseteq B, S_2 : B \subseteq A, S_3 : A \subseteq C, S_4 : C \subseteq A\\
&S_5 : B \subseteq C, S_6 : C \subseteq B.\\
&|\cap_{i=1}^{6} S_i^C| = 8^n - 6 \cdot 6^n + 3 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n - 6 \cdot 4^n - \overset{\text{DN}}{\dots}
\end{aligned}
$$

$6^n : S_i$, 4^n : npr. $S_1 \cap S_2$, 5^n: npr. $S_1 \cap S_3$, 4^n : npr. $S_1 \cap S_4$.

(2) i_n: število premestitev v S_n = število permutacij v S_n brez negibne

točke (dearangement).

$$
\begin{aligned}
A &= S_n \\
A_i &= \{\pi \in S_n : \pi_i = i\} \\
|A_I| &= (n - |I|)! \\
i_n &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}(n - |I|)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

$P(\text{število premestitev}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-1}$.

(3) Število surjekcij iz $[n]$ v $[k]$.

$$
\begin{aligned}
A &= [k]^{[n]} \\
A_i &= ([k] \setminus \{i\})^{[n]} \\
\left|\cap_{i=1}^{n} A_i^C\right| &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}(k - |I|)^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n \\
&\overset{i=k-i}{=} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\
&= k! S(n,k);
\end{aligned}
$$

surjekcija je urejena razdelitev;

$$
S(n,k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j!(k-j)!}.
$$

(4) Eulerjev petkotniški izrek:

$$
p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - \dots
$$

$$A = \{\text{razčlenitve } n\}$$
$$A_i = \{\text{razčlenitve } n\text{, ki vsebujejo } i \text{ za člen}\}\ i = 1{,}2 \dots n$$
$$|A_i| = p(n-i)$$
$$|A_i \cap A_j| = p(n-k-j)$$
$$|A_I| = p(n - \sum_{i\in I} i)$$

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) + p(n-3) + \dots \\ &\quad - p(n-1-2) - p(n-1-3) - p(n-2-3) - \dots \\ &\quad + p(n-1-2-3) - \dots \\ &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots \end{aligned}$$

Franklinova bijekcija:
$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha(m)-\beta(m))p(n-m)$; m - razčlenitve z različnimi členi,
$\alpha(m) =$ število razčlenitev m z liho mnogo različnimi členi,
$\beta(m) =$ število razčlenitev m z sodo mnogo različnimi členi,
Bijekcija

$$\begin{aligned} \Phi :&\{\text{razčlenitev } m \text{ z liho mnogo različnimi členi}\}(\backslash\{\dots\}) \\ &\to \{\text{razčlenitev } m \text{ z sodo mnogo različnimi členi}\}(\backslash\{\dots\}). \end{aligned}$$

$f(\lambda) = \max\{i : \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}$ - bok,
$g(\lambda) = \lambda_{l(\lambda)}$ - najmanjši člen,

a) $f(\lambda) \geq g(\lambda)$: min $\to$ bok,

b) $f(\lambda) < g(\lambda)$: bok $\to$ min,

a) ne dela (število členov se ohrani),
b) ne dela (2 člena enako dolga),
a) ne dela, ko:
$f(\lambda) = g(\lambda) = l(\lambda)$
$m = k + (k+1) + \dots + (2k-1) = \frac{2k(2k-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}$
$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1}$ (k lih ali sod).
b) ne dela, ko:

$f(\lambda) = g(\lambda) - 1 = l(\lambda)$
$m = (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k) = \cdots = \frac{k(3k+1)}{2}$
$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1}$.
Eulerjev petkotniški izrek:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right)$$
$$\text{oz.} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) = 0.$$

Tukaj smo upoštevali ko vstavimo $-k$: $\frac{-k(-3k-1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2}$ in $p(0) = 0$.

Izrek 1.7.5 („NVI“)**.**
$f, g : B_n \to K$, K komutativni kolobar.

$$f(T) = \sum_{S\subseteq T} g(S)(\forall T \in B_n) \iff g(T) = \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} f(S)(\forall T \in B_n).$$

Zgled.
$des(\pi) = |\{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}|$
$D(\pi) = \{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}$
$D(1\ 4\ 2\ 6\ 5\ 3) = \{2,4,5\}$
$f_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) = T\}|$
npr. $n = 8, T = \{1,5\}$
$g_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) \subseteq T\}|$
$T = \{t_1, t_2 \ldots t_k\}$
$g_n(T) = \binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{t_2-t_1}\binom{n-t_1-\cdots-t_{k-1}}{t_k} = \binom{n}{t_1, t_2-t_1 \ldots t_k-t_{k-1}, n-t_k}$
$\_ < \_ < \_ < \underline{t_i} \lesseqgtr \_$: zaradi $\subseteq$: tam lahko spust ali pa ne.
// če lastnosti točno določene: težko $(f_n(T))$, če „vsebovano“ $(g_n(T))$: lažje
$g_n(T) = \sum_{S\subseteq T} f_n(S)$

$$\begin{aligned}
f_n(T) &= \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} g_n(S) \\
&= \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} \binom{n}{s_1, s_2 - s_1 \ldots n - s_k} \\
&\overset{\text{vaje}}{=} det \left[\binom{n - t_i}{t_{j+1} - t_j} \right]_{i,j=0}^{|T|}.
\end{aligned}$$

npr. $n = 8$, $T = \{1{,}5\}, t_0 = 0, t_{|T|} = n + 1 = 9$

$$f_8(\{1{,}5\}) = \begin{vmatrix} \binom{8}{1} & \binom{8}{5} & \binom{8}{8} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{7} \\ \binom{3}{-4} & \binom{3}{0} & \binom{3}{3} \end{vmatrix} = 217.$$

Dokaz 1.7.6.

$(\implies)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} f(S) &= \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} f(S) \sum_{U\subseteq S} g(U) \\
&= \sum_{U\subseteq T} \left(\sum_{U\subseteq S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} \right) g(U) \\
&\overset{k=|S\subseteq U|}{=} \sum_{U\subseteq T} \sum_{k=0}^{|U|} \binom{|T\setminus U|}{k} (-1)^{|T\setminus U|-k} g(U) \\
&= g(T).
\end{aligned}$$

Na notranji vsoti uporabimo binomski izrek za -1 in 1 :

$$(1-1)^{|T\setminus S|} = \begin{cases} 1 : U = T \\ 0 : U \subset T \end{cases}$$

1.8 Polinomske enkosti

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Izrek 1.8.1.

(a) $\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$

(b) $\sum_k (-1)^{n-k} c(n,k)x^k = x^{\underline{n}}$

(c) $\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}} = x^n$

(d) $\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k)x^{\overline{k}} = x^n$

(e) $\sum_k L(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$

(f) $\sum_k (-1)^{n-k} L(n,k)x^{\overline{k}} = x^{\underline{n}}$

Opomba. $K[x] = \{\text{polinomi v } x\}$ vektorski prostor (celo algebra), K komutativen obseg.
$\{x^n\}, \{x^{\underline{n}}\}, \{x^{\overline{n}}\}$ naravne baze.

Dokaz 1.8.2.

(a) Indukcija (na vajah drugače):
$n = 0$: 1=1
$n - 1 \to n$:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= x^{\overline{n-1}}(x + n - 1) \overset{\text{IP}}{=} (x + n - 1)\sum_k c(n-1,k)x^k \\ &= \sum_k c(n-1,k-1)x^k + (n-1)\sum_k c(n-1,k)x^k = \sum_k c(n,k)x^k, \end{aligned}$$

(b) $x \to -x$ v (a),

(c) Preslikava = razdelitev + injekcija,
število preslikav iz $[n]$ v $[k] = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}$, kjer predstavljajo

- k: število blokov,
- $S(n,k)$: razdelimo $[n]$ na k blokov,
- $x^{\underline{k}}$: injekcija $[k] \to [x]$.

Dokazali smo za $x \in \mathbb{N} \implies$ polinoma sta enaka (ujemanje v ∞ točkah).

(e) Z indukcijo DN.

$\pi = 4\ 2\ 5\ 1\ 6\ 3$

$inv(\pi) = 7$

$I(\pi) = \{(1{,}2), (1{,}4), (1{,}6) \ldots\}$

$TI(\pi) = (a_1 \ldots a_n);\ \ a_k = \{(i{,}j) : \pi_i > \pi_j = k\}$ („desna stran") - tabela inverzij.

$TI(\pi) = (3{,}1{,}3{,}0{,}0{,}0)$

$0 \leq a_i \leq n - i$, a_i: koliko levo od i večjih od i.

Trditev 1.8.3.

$TI : S_n \to [0{,}n-1] \times [0{,}n-2] \times \cdots \times [0{,}0]$ je bijekcija.

Posledica 1.8.4.

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \underline{n!} = (1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\cdots+q^{n-1}).$$

$\pi = 4\ 1\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5,$

$TI(\pi) = (1, 5, 2, 0, 4, 2, 0, 1, 0),$

inverz: $9 \to 9\ 8 \to 7\ 9\ 8 \to 7\ 9\ 6\ 8 \to 7\ 9\ 6\ 8\ 5 \to 4\ 7\ 9\ 6\ 8\ 5$

$\to 4\ 7\ 3\ 9\ 6\ 8\ 5 \to 4\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5 \to 4\ 1\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5.$

Dokaz 1.8.5. trditve.

Skonstruiramo inverz:

$(a_1 \ldots a_n),\ 0 \leq a_i \leq n - i.$

Vpisujemo $n, n-1 \ldots 1$: i pišemo za a_i elementi.

Dokaz 1.8.6. posledice.

$\sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = n!_q = \underline{n!} = \underline{n}\underline{(n-1)}\ldots 1$ - q fakulteta, $\underline{i} = 1 + q + \cdots + q^{i-1}$ - polinom, q-naravno število (q-integer).

$$\begin{aligned} D &= (1+q+\cdots+q^{n-1})(1+q+\cdots+q^{n-2})\ldots 1 \\ &= \sum_{0 \leq a_i \leq n-i} q^{a_1} q^{a_2} \ldots q^{a_n} \\ &\overset{\text{trditev}}{=} \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)}. \end{aligned}$$

Opomba. $maj(\pi) = \sum_{i \text{ spust } \pi} i$ oz. $\sum_{i \in D(\pi)} i$ - majorski indeks
$maj(4\ 2\ 5\ 1\ 3) = 1 + 3 = 4$
$\sum_{\pi \in S_n} q^{maj(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \underline{n!}$.

Definicija 1.8.7 (q-binomski koeficient)**.**

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}_q = \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}}.$$

$\binom{\underline{n}}{\underline{0}} = \binom{\underline{n}}{\underline{n}} = 1$
$\binom{\underline{n}}{\underline{1}} = \underline{n}$ $\binom{\underline{4}}{\underline{2}} = \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)(1+q)}{(1+q)(1+q)} = (1+q^2)(1+q+q^2)$ $q = 1 : \binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}$.

Trditev 1.8.8.

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = q^{n-k}\binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + \binom{\underline{n-1}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + q^k\binom{\underline{n-1}}{\underline{k}}.$$

Dokaz 1.8.9.

$$\begin{aligned}
& q^{n-1}\frac{\underline{(n-1)!}}{\underline{(k-1)!(n-k)!}} + \frac{\underline{(n-1)!}}{\underline{(k)!(n-1-k)!}} \\
&= \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}}(q^{n-k}\underline{k!} + \underline{n-k}) \\
&= \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}} \\
&= \binom{\underline{n}}{\underline{k}},
\end{aligned}$$

kjer je

$$q^{n-k}\underline{k!} + \underline{n-k} = q^{n-k} + \cdots + q^n + 1 + \cdots + q^{n-k-1} = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Posledica 1.8.10. $\binom{\underline{n}}{\underline{k}}$ je polinom v q.

Trditev 1.8.11.

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + q^{i-1}x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\underline{n}}{\underline{k}}x^k.$$

Dokaz 1.8.12. Indukcija:
$n = 0 : 1 = 1$
$n - 1 \to n$:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1 + q^{i-1}x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{\underline{k}} x^k\right) \cdot (1 + q^{n-1}x) \\
&= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \binom{\text{n-1}}{\underline{k}} x^k + \sum_k q^{\binom{k-1}{2}+n-1} \binom{n-1}{\underline{k-1}} x^k \\
&= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \left(\binom{n-1}{k} + q^{\binom{k-1}{2}+n-1-\binom{k}{2}} \binom{n-1}{\underline{k-1}} \right) x^k.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo $\binom{k-1}{2} - \binom{k}{2} = -\binom{k-1}{1}$.

$\mathbb{Z}_p, p$ praštevilo končen obseg.

Izrek 1.8.13. Obseg moči $n \in \mathbb{N}$ obstaja $\iff$ $n = p^k$ p praštevilo. Obseg je do izomorfizma natančno določen.
$\mathbb{F}_q$ - oznaka.

Izrek 1.8.14. V $\mathbb{F}_q^n$ je $\binom{n}{\underline{k}}$ k-dimenzionalnih podprostorov.

Primer. $q = 4, n = 4, k = 2 :$ $(1 + 4^2) + (1 + 4 + 4^2) = 38$.

Dokaz 1.8.15. Spomnimo se: $[n]$ ima $\binom{n}{k}$ k-podmnožic, štejemo urejene k-terice različnih števil: $k!\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}$.
Štejemo k-terice linearno neodvisnih vektorjev v $\mathbb{F}_q^n$:

$$(q^k - 1)(q^k - q)\dots(q^k - q^{k-1})X = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1});$$

$q^k - q^i$: vsi v podprostoru brez linearnih kombinacij že vzetih,
$q^n - q^i$: vsi brez linearnih kombinacij že vzetih.
X: število izbir podprostora.

$$X = \frac{q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k \underline{\underline{n\,\underline{(n-1)}\dots(n-k+1)}}}{q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k \underline{k!}} = \binom{n}{\underline{k}}.$$

Definicija 1.8.16 (q-multinomski koeficient)**.**

$$\binom{\underline{a_1+\cdots+a_k}}{\underline{a_1},\underline{a_2}\ldots\underline{a_k}} = \frac{\underline{(a_1+\cdots+a_k)!}}{\underline{a_1}!\ldots\underline{a_k}!}$$
$$= \binom{\underline{a_1+\cdots+a_k}}{\underline{a_1}}\binom{\underline{a_2+\cdots+a_k}}{\underline{a_2}}\cdots\binom{\underline{a_k}}{\underline{a_k}}.$$

$\implies$ je polinom (produkt polinomov).

$x_1\ldots x_n$ permutacija multimnožice $\{1^{a_1},2^{a_2}\ldots n^{a_n}\}$
inverzija: $(i,j) : i<j, x_i>x_j$
inv: število inverzij
$inv(1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3)=2.$

Izrek 1.8.17. $M=\{1^{a_1},2^{a_2}\ldots n^{a_n}\}$

$$\sum_{\pi\in S(M)} q^{inv(\pi)} = \binom{\underline{a_1+\cdots+a_n}}{\underline{a_1}\cdots\underline{a_n}}.$$

Primer.
$q=1 : |S(M)| = \binom{a_1+\cdots+a_n}{a_1\ldots a_n}$
$a_1=\cdots=a_n=1 : \sum_{\pi\in S_n} q^{inv(\pi)} = n!$ - posplošitev formul za multinomske koeficiente in Stirlingova števila 1. vrste.

Dokaz 1.8.18.

$$\sum_{\pi\in S(M)} q^{inv(\pi)}\underline{a_1}!\ldots\underline{a_n}! = \underline{(a_1+\cdots+a_n)!}$$
$$\sum_{\pi_0\in S(M)} q^{inv(\pi_0)}\cdot\sum_{\pi_1\in S_{a_1}} q^{inv(\pi_1)}\cdots\sum_{\pi_n\in S_{a_n}} q^{inv(\pi_n)} = \sum_{\pi\in S_{a_1+\cdots+a_n}} q^{inv(\pi)}.$$

Iščemo bijekcijo

$$\begin{aligned}\Phi :&(\pi_0\pi_1\ldots\pi_n)\to\pi\\ &S(M)S_{a_1}\ldots S_{a_n}\mapsto S_{a_1+\cdots+a_n}.\end{aligned}$$

$M=\{1^4,2^2,3^3\}$
$(1\ 2\ 2\ 1\ 3\ 1\ 3\ 3\ 1, 2\ 4\ 1\ 3, 2\ 1, 1\ 3\ 2)$

$\mapsto 2\ 6\ 5\ 4\ 7\ 1\ 9\ 8\ 3$.
V π_0 enke spremenimo v $1 \dots a_1$ v vrstnem redu, ki ga določa π_1, v π_0 dvojke spremenimo v $a_1 + 1 \dots a_2$ v vrstnem redu, ki ga določa π_2, itn.
$inv(\pi_0) + \cdots + inv(\pi_n) = inv(\Phi(\pi_0 \dots \pi_n))$.
Vsaka inverzija $\Phi(\pi_0 \dots \pi_n)$ prihaja bodisi od inverzije π_i bodisi od inverzije π_0 (glede na „indeks“ v π_0) $\implies$ vsota enaka.

Poglavje 2

Formalne potenčne vrste

2.1 Uvod

$\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$

$\sum_n S(n,k)x^n$ neskončna vsota.

V analizi: potenčne vrste:

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Konvergira za $|x| < R$ - konvergenčni polmer:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{če obstaja}}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, \infty].$$

Primer. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n : R = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} : R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n : R = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ - definirana samo v 0, obe z vrednostjo 1 tam.

$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} x \neq 0 \\ 0 \; x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F^{(n)}(0) = 0 \; \forall n \geq 0 \implies F(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$

Potenčne vrste niso „najboljše“ za študij zaporedij.

2.2 Formalne potenčne vrste

K komutativni obseg s karakteristiko $0 : 1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0 \; \forall n \geq 1$.
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\frac{1}{n!}$ je definirano
$K[[x]] = \{(a_n)_n : a_n \in K\} = K^{\mathbb{N}}$ - množica formalnih potenčnih vrst (FPV) = zaporedje
$K[x] = \{(a_n)_n : a_n \in K, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ - množica polinomov.
V $K[[x]]$ vpeljemo operacije:

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n,$$

$$\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n,$$

$((a_n)_n \cdot (b_n)_n) = (c_n)_n; \; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ - konvolucijsko množenje.

$K[[x]]$ algebra formalnih potenčnih vrst: komutativna, (1,0,0,0 . . .) enota za množenje: $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \delta_{n-k,0} = a_n$.
Oznake:

$(a_n)_n \leftrightarrow \sum_n a_n x^n$: ni vsota (samo oznaka), x je ločilo (ni spremenljivka, ne „vstavljamo“),

$$(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \dots,$$

$$1 + 0x + 0x^2 + \cdots = 1,$$

$[x^n]F(x) := a_n$ - „koeficient pred x^n“,

$$F(0) := [x^0]F(x).$$

Trditev 2.2.1. $F(x)$ ima inverz $\iff F(0) \neq 0$.

Dokaz 2.2.2.
$(\Longrightarrow)$:

$$F(x)G(x) = 1$$
$$F(0)G(0) = 1 \implies F(0) = 0$$

$(\Longleftarrow)$:

$$
\begin{aligned}
&F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, a_0 \neq 0 \\
&G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \\
&F(x)G(x) = 1 \\
&a_0 b_0 = 1 \implies b_0 = \frac{1}{a_0} \\
&a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \implies b_1 = \frac{-a_1 b_0}{a_0} \\
&a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \implies b_2 = \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_0} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Opomba. K komutativen kolobar s karakteristiko 0.
$F(x)$ ima inverz $\iff$ $F(0)$ ima inverz v K.

$v(F(x)) = \begin{cases} \min n : [x^n]F(x) \neq 0 & F(x) \neq 0 \\ \infty & F(x) = 0 \end{cases}$ - valuacija.
$v(F(x)G(x)) = v(F(x))v(G(x))$ ($\implies$ ni deliteljev niča)
$v(F(X) + G(x)) \geq \min\{v(F(x)), v(G(x))\}$
$v(\lambda F(x)) = \begin{cases} v(F(x)) \ \lambda \neq 0 \\ \infty \ \lambda = 0 \end{cases}$
$d(F(x), G(x)) = 2^{-v(F(x)-G(x))}$ - metrika
$d(F(x), G(x)) = 2^{-k} \iff [x^n]F(x) = [x^n]G(x) \ \forall n \leq k.$

Trditev 2.2.3. $(K[[x]], d)$ je poln metrični prostor.

Dokaz 2.2.4.

$$\begin{aligned} d \geq 0, d = 0 &\iff F = G \\ d(F(x), G(x)) &= d(G(x), F(x)) \\ d(F(x), H(x)) &= 2^{-v(F(x)-H(x))} \\ &= 2^{-v(F(x)-G(x)+G(x)-H(x))} \\ &\leq \max\{2^{-v(F(x)-G(x))}, 2^{-v(G(x)-H(x))}\} \\ &= \max\{d(F(x), G(x)), d(G(x), H(x))\} \\ &\leq d(F(x), G(x)) + d(G(x), H(x)). \end{aligned}$$

$F_m(x) = \sum_n a_n^{(m)} x^n$ Cauchyjevo zaporedje
$\forall k \exists M: \ M_1, M_2 \geq M \implies d(F_{M_1}(x), F_{M_2}(x)) < 2^{-k}$
oz. $[x^n]F_{M_1}(x) = [x^n]F_{M_2}(x) \ \forall n \leq k$.
Torej za vsak $[x^n]F_n(x)$ konstantni od nekod naprej in enaki npr. a_n.
$F(x) = \sum_n a_n x^n$ je limita $(F_n(x))_m$.

Primer.
$(\sum_n x^n)(1-x) = 1$
$c_n = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \ \forall n \geq 1$
$c_0 = 1$. Torej $\sum_n x^n = \frac{1}{1-x} \implies 1 - x$ inverz od $\sum_n x^n$.
$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Opomba. $(F_m(x))_m$ konvergira v $K[[x]]$, če je $([x^n]F_m(x))_m$ od nekod naprej konstantno, npr a_n; v tem primeru je $\lim_{m\to\infty} F_m(x) = \sum_n a_n x^n$.

Odvajanje:
$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.
Za $K[[x]]$:
$[x^n]F'(x) := (n+1)[x^{n+1}]F(x)$
$(\sum_n a_n x^n)' = F(x)'G(x) + F(x)G(x)'$.
Dokaz: DN.
$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F(x)'G(x)-F(x)G(x)'}{G(x)^2}$; $G(0) \neq 0$

Primer.

$F'(x) = F(x)$

$(n+1)a_{n+1} = a_n$

$na_n = a_{n-1}$

a_0 poljubno

$a_n = \frac{a_0}{n!}$.

$e^{\lambda x} := \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} x^n$

$e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = e^{(\lambda+\mu)x}$

$L = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} = D.$

Binomski izrek v K: enakost velja.

$F'(x) = \frac{1}{1-x},\ F(0) = 0$

$(n+1)a_{n+1} = 1$

$a_n = \frac{a_0}{n}$

$\log \frac{1}{1-x} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^{\log \frac{1}{1-x}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-x}.$

Najprej definicija kompozituma, dokaz enakosti kasneje.

Bolj splošno:

$F(0) = 1$

$\log(F(x)G(x)) = \log F(x) + \log G(x)$: DN.

Binomska vrsta:

$\lambda \in K, n \in \mathbb{N}$, $\binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$ posplošen binomski koeficient.

$B_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n$

$n \in \mathbb{N}:\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = (1+x)^n.$

Trditev 2.2.5.

$B_\lambda(x) \cdot B_\mu(x) = B_{\lambda+\mu}(x).$

Dokaz 2.2.6.

$D = \frac{(\lambda+\mu)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{\underline{k}}}{k!} \frac{\mu^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} = L$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{\underline{k}} \mu^{\underline{n-k}} = (\lambda+\mu)^{\underline{n}}.$

Indukcija: DN.

$B_\lambda(x) := (1+x)^\lambda$

$n \in \mathbb{N}: \; B_n(x) \cdot B_{-n}(x) = 1$

$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n}$

$(1+x)^{-n} = \sum_k \binom{-n}{k} x^n$

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k(n+k-1)\dots n}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^{-k} &= \frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n_i\geq 0, \sum n_i = k} 1\right) x^n\\ &= \sum_n (\text{število šibkih kompozicij } n \text{ s } k \text{ členi}) x^n\\ &= \sum_n \binom{n+k-1}{k-1} x^n\end{aligned}$$

$F(x)G(x)H(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n_1,n_2,n_3\geq 0, n_1+n_2+n_3=n} a_{n_1}b_{n_2}c_{n_3}\right)x^n$

$\binom{-1}{n} = (-1)^n\binom{n}{0} = (-1)^n$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}x^n$

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1} \; n\geq 1.\end{aligned}$$

2.3 Kompozitum

$F(x) = \sum_n a_n x^n$
$G(x) = \sum_n b_n x^n$
$F \circ G(x) = F(G(x)) = ?$
$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 G(x) + a_2 G^2(x) + \cdots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n G^n(x)$.
Kdaj ta limita obstaja?

Trditev 2.3.1. $(F_n(x))_n$.
$\lim_{N\to\infty} F_n(x)$ obstaja $\iff$ $\lim_{n\to\infty} v(F_n(x)) = \infty$.

Dokaz 2.3.2.
$(\Longrightarrow)$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right)_N \text{ je Cauchyjevo :}$$
$$\forall x\ \exists N_0\ \forall N,M \geq N_0 : d\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x), \sum_{m=0}^{M} F_m(x)\right) \leq 2^{-k}$$
$$M = N-1 :\ v(F_N(x)) \geq k.$$

$(\Longleftarrow)$:

$$\begin{aligned}
&\forall k \exists N_0\ \forall N \geq N_0 : v(F_n(x)) \geq k \text{ (predpostavka)}\\
N > M \geq N_0 : &d\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x), \sum_{m=0}^{M} F_m(x)\right)\\
&= 2^{-v(F_{M+1}(x)+\cdots+F_N(x))}\\
&\leq \max\{2^{-v(F_{M+1}(x))} \ldots 2^{-v(F_N(x))}\}\\
&\leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F \circ G(x) \text{ obstaja} &\iff \lim_{n\to\infty} v(a_n G^n(x)) = \infty\\
&\iff v(G(x)) > 0 \text{ ali } a_n = 0 \text{ od nekod naprej}\\
&\iff F \text{ polinom ali } G(0) = 0.
\end{aligned}$$

Velja $v\left(a_n G^n(x)\right) = \begin{cases} n \cdot v(G(x)) & a_n \neq 0 \\ \infty & a_n = 0 \end{cases}$

Primer.
$F(x) = x^2 - 3x + 1$
$G(x) = e^x$
$(F \circ G)(x) = e^{2x} - 3e^x + 1$ - ok
$F(x) = G(x) = e^x$ - ni ok
$F(x) = e^x$
$G(x) = e^x - 1$
$e^{e^x - 1}$ - ok.

Opomba.
$F(x) = \sum_n a_n x^n$
$G(x) = \sum_n b_n x^n \; b_0 = 0$
$a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + a_2(b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2 + \dots$
Za izračun koeficienta pri x^5 izračunamo končno vsoto.
Enota za kompozitum: $x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$
$F \circ x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = F = x \circ F = 1 \cdot (a_0 + a_1 x + \dots)$

Izrek 2.3.3.
$F \in K[[x]]$ ima inverz za kompozitum $\iff F(x) = a_0 + a_1 x; \; a_1 \neq 0$ ali $v(F(x)) = 1$.

Primer.
$x - x^2$ ima inverz,
$e^x - 1$ ima inverz,
x^2 nima inverza.

$F^{<-1>}$ - inverz za kompozitum.

Dokaz 2.3.4.

($\Longrightarrow$):

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_n b_n x^n \text{ inverz od } F$$

$$a_0 = 0 \overset{?}{\iff} b_0 = 0$$

$$(\Longleftarrow): F \circ G = a_0 + a_1(b_1 x + \dots) + a_2(\dots)^2 + \dots$$

$$[x^0]F(G(x)) = a_0 = [x^0]x = 0$$

($\Longrightarrow$) : isto?

$$1. a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$$

$$\Longrightarrow F{,}G \text{ polinoma, } deg(F \circ g) = deg(F) \cdot deg(G) = 1$$

$$\Longrightarrow deg(F) = deg(G) = 1$$

$$2. a_0 = b_0 = 0$$

$$v(F \circ G) = v(F) \cdot v(G) = 1$$

$$\Longrightarrow v(F) = v(G) = 1$$

$$\Longrightarrow F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots \; a_1 \neq 0.$$

($\Longleftarrow$):

$$F(x) = a_0 + a_1 x \; a_1 \neq 0$$

$$a_0 + a_1 y = x \implies y = \dots$$

$$F^{<-1>}(x) = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{x}{a_1}$$

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_1 \neq 0$$

levi inverz: $G_1(x) = b_0 + b_1 x + \dots$

$$G_1 \circ F = x$$

$$b_0 + b_1(a_1 x + \dots) + b_2(a_1 x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : b_0 = 0$$

$$[x^1] : a_1 b_1 = 0 \implies b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : b_1 a_2 + b_1 a_1^2 = 0 \implies b_2 = -\frac{b_1 a_2}{a_1^2}$$

$$[x^3] : b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3 = 0 \implies b_3 = \dots \frac{\cdot\cdot}{a_1^3}$$

$$[x^n] : \dots + b_n a_1^n = 0 \; n \geq 1$$

$$b_n = \dots \text{ rekurzivno}$$

desni inverz: $G_2(x) = c_0 + c_1 x + \dots, \; c_0 = 0$

$$F \circ G_2 = x$$

$$a_1(c_1 x + \dots) + a_2(c_1 x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : 0 = 0$$

$$[x^1] : a_1 c_1 = 1 \implies c_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : a_1 c_2 + a_2 c_1^2 = 0 \implies c_2 = -\frac{a_2 c_1^2}{a_1}$$

$$[x^3] : a_1 c_3 + 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3 = 0 \implies c_3 = \frac{\cdot\cdot}{a_1}$$

$$[x^n] : a_1 c_n + \dots = 0 \implies c_n = \frac{\cdot\cdot}{a_1}.$$

$\blacksquare$

$(G_1 \circ F) \circ G_2 = G_2$
$G_1 \circ (F \circ G_2) = G_1$.
Iz asociativnosti (ki je nismo dokazali) sledi $G_1 = G_2 = F^{<-1>}$.

Trditev 2.3.5.
$F_n(0) = 0$
$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1 + F_n(x))$ obstaja $\iff$ $\lim_{n\to\infty} v(F_n(x)) = \infty$.
Dokaz DN.

Primer.
$(1 + x)(1 + x)(1 + x)\dots$ - ni ok,
$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\dots$ - ok.

Opomba.
$K[[x]]$
$K[[x,y]] = K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$
$\sum a_{n,m}x^n y^m$ bivariantna potenčna vrsta.
$\sum_{k,m} \binom{n}{k} x^k y^m = \sum_m (1 + x)^n y^n = \frac{1}{1-(1+x)y}$.
$K[[x_1, x_2 \dots]]$
$x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3 + \dots$ - ok
$x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$ - ni ok.

2.4 Reševanje linearnih rekurzivnih enačb s konstantnimi koeficienti

Primer.

(1) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $n \geq 1, a_0 = 1$
$1, 3, 7, 15 \dots$
$F(x) = \sum_n a_n x^n$ rodovna funkcija (angl. generating function) zapo-

redja.

$$\begin{aligned}
F(x)-1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n = 2xF(x) + \frac{x}{1-x}\\
F(x)(1-2x) &= 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}\\
F(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.
\end{aligned}$$

Ekvivalentno:

$$a_n = 2a_{n-1}+1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$F(x)-1 = \frac{x}{1-x} + 2xF(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$/ \cdot (1-x), x = 1$$

$$\frac{1}{-1} = A \implies A = -1$$

$$/ \cdot (1-2x), x = \frac{1}{2}$$

$$B = 2$$

$a_n = -1 + 2^{n+1}$.

(2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ n \geq 2, F_0 = F_1 = 1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=2}^{\infty}$

$$F(x) = \sum_n F_n x^n$$

$$F(x) - 1 - x = x(F(x)-1) + x^2 F(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-y_1x)(1-y_2x)}.$$

Ničli $1-x-x^2$ sta $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}$

y_1, y_2 sta ničli $y^2 - y - 1$ (obrnjen polinom), torej $x_1,x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

V splošnem:

$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_d x^d;\ c_d \neq 0$

ima ničle $\lambda_1 \dots \lambda_d$, ima
$p^{\mathrm{obr}}(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \cdots + x_d$ (obrnjeni polinom) ničle $\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_d}$:

$$\begin{aligned} p^{\mathrm{obr}}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) &= c_0 \cdot \frac{1}{\lambda_i^d} + c_1 \cdot \frac{1}{\lambda_i^{d-1}} + \cdots + c_d \\ &= \frac{c_0 + c_1\lambda_i + \cdots + c_d\lambda_i^d}{\lambda_i^d} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-y_1x)(1-y_2x)} \\ &= \frac{\frac{1}{1-\frac{y_2}{y_1}}}{1-y_1x} + \frac{\frac{1}{1-\frac{y_1}{y_2}}}{1-y_2x} \\ &= \frac{1}{y_1-y_2}\left(\frac{y_1}{1-y_1x} - \frac{y_2}{1-y_2x}\right) \\ & y_1 - y_2 = 5 \\ \implies F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Izrek 2.4.1. NSTE (naslednje trditve so ekvivalentne) za $(a_n)_n, a_n \in \mathbb{C}$:

(1) $c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \cdots + c_n a_{n-d} = 0, \quad n \geq d,\ c_0, c_d \neq 0,$

(2) $F(x) = \sum_n a_n x^n = \frac{P(x)}{c_d + \cdots + c_0 x^d},\ deg\ P < d,$

(3) $a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n)\lambda_i^n,\ \lambda_1 \dots \lambda_k$ ničle $c_d y^d + \cdots + c_0$ (karakteristični polinom) s kratnostmi $\alpha_1 \dots \alpha_k$, $deg\ p_i < \alpha_i$.

Dokaz 2.4.2.

$(1) \implies (2)$:

$$\begin{aligned}
c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \cdots + c_n a_{n-d} = 0 \qquad / \cdot x^n \sum_{n=d}^{\infty} \\
c_d(F(x) - a_0 - \cdots - a_{d-1}x^{d-1}) \\
+c_{d-1}(F(x) - a_0 - \cdots - a_{d-2}x^{d-2}) \\
+ \cdots + c_0 x^d F(x) = 0 \\
F(x) = (c_d + c_{d-1}x + c_{d-2}x^2 + \cdots + c_0 x^d) = P(x) \quad degP < d.
\end{aligned}$$

$(2) \implies (1)$:

$$(c_d + c_{d-1}x + \cdots + c_0 x^d) \cdot \sum_n a_n x^n = P(x)$$
$$n \geq d: \; [x^n]: \; c_d a_n + \cdots + c_0 a_{n-d} = 0.$$

$(2) \implies (3)$:

$$\begin{aligned}
\sum_n a_n x^n &= \frac{P(x)}{c_d(1-\lambda_1 x)^{\alpha_1} \ldots (1-\lambda_m x)^{\lambda_m}} \\
&\overset{\text{parc}}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(1-\lambda_i x)^j} \\
\frac{1}{(1-x)^d} &= \sum_n \binom{n+d-1}{d-1} x^n \\
a_n &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} \cdot \binom{n+j-1}{j-1} \right) \lambda_i^n, \\
\binom{n+j-1}{j-1} &\text{binom v } n \text{ stopnje } j-1 < \alpha_i.
\end{aligned}$$

$(3) \implies (2)$: podobno: $p_i(n)$ zapišemo v bazi $\binom{n+j-1}{j-1}$.

Primer.

$a_n - 7a_{n-1} + 18a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$, a_0, a_1, a_2 dani.

$y^3 - 7y^2 + 18y - 12 = (y-2)^2(y-3)$

$\implies a_n = 2^n(An + B) + 3^n \cdot C$.

A,B,C dobimo iz a_0, a_1, a_2 (vstavimo, dobimo sistem).

Opomba.

$\sum_n a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)},\ degP \geq degQ \iff c_d a_n + \cdots + c_n a_{n-d} = 0$ za $n \geq N$ (dovolj velik).

Opomba.

$c_d a_n + \cdots + c_0 a_{n-d} = r(n) \cdot \lambda^n,\ deg\ r = \alpha.$

Homogena + partikularna

$\sum_n r(n)\lambda^n x^n = \frac{R(x)}{(1-\lambda x)^\alpha}.$

Če λ α_i-kratna ničla karakterističnega polinoma: $\sum_{j=1}^{\alpha+\alpha_i} \ldots$

Nastavek: $n^{\alpha_i} q(n)\lambda^n,\ deg\ q = \alpha_i - 1.$

Primer.

$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n \cdot 2^n,\ n \geq 2.$

Partikularna: $n^2 \cdot (An + B)2^n.$

2.5 Nadaljevanje uporabe običajnih rodovnih funkcij

$F(x) = \sum_n a_n x^n$

$F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (a_n)_n$

$F'(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} ((n+1)a_{n+1})_n$

$xF'(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (na_n)_n$

$DF(x) := F'(x)$, D: operator odvajanja.

$(xD)^2 F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (n^2 a_n)_n$

$p(xD)F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (p(n)a_n)_n, \quad p$ polinom.

Primer.

$\sum_j j^2$

$\frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} (1)_n$

$(xD)^2 \frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} \left(\sum_{j=0}^n a_j\right)_n$

$x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ - samo členi. $F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (a_n)_n$

$F(x) \cdot \frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} \left(\sum_{j=0}^n a_j\right)_n$ - konvolucija z $(1)_n$.

$$\begin{aligned}[X^n]\left(F(x)\cdot\frac{1}{1-x}\right) &= [x^n]\left(\frac{x^2}{(1-x)^4}+\frac{x^2}{(1-x)^4}\right)\\ &= \binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

$F(x)\cdot G(x)=\sum_n a_n x^n\cdot\sum_n b_n x^n=\sum_n\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)x^n$.
Naj bo 1. del struktura A ($(a_n)_n$ preštevalno zaporedje),
naj bo 2. del struktura B ($(b_n)_n$ preštevalno zaporedje):
$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Primer.

(1) m kroglic, rdeče, črne, zelene, zelenih kroglic sodo in so na koncu.
$1,2,5,10\ldots$
A: rdeče / črne kroglice: $2^n\to\frac{1}{1-2x}$
B: sodo mnogo zelenih kroglic: $1,0,1,0,1\cdots\to\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{1-2x}\cdot\frac{1}{1-x^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-2x}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{6}}{1+x}$
$a_n=\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(-1)^n$.

(2) Kompozicije s k členi
A: neničelno število: $0,1,1,1,1\cdots\to\frac{x}{1-x}$
$\left(\frac{x}{1-x}\right)^k=\sum_n\binom{n+k-1}{k-1}x^{n+k}=\sum_n\binom{n-1}{k-1}x^n$,
šibke kompozicije:
$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k$,
kompozicije z lihimi členi: $0,1,0,1,0,1\cdots\to\frac{x}{1-x^2}$
$\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^k$.

(3) $S(n,k)$
$n=7,k=3:\{\{1,4,5\},\{2,7\},\{3,6\}\}$
$\sum_n S(n,k)x^n=?$
Vrstni red določimo: 1 v 1. bloku, v 2. bloku najmanjše število, ki ni v

1. bloku …

$\to$ 1 2 3 1 1 3 2 (primer od prej).

Dobimo: zaporedje n števil v $[k]$, vsa od 1 do k se pojavijo, 1. pojavitev i je pred 1. pojavitvijo $i+1$

$1\ (1\dots 1)2(1/2\dots 1/2)3(\dots)\dots$

$x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot x \cdot \frac{1}{1-2x} \cdots$

$\sum_n S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$.

Ekvivalentno: $(1-kx)\sum_n S(n,k)x^n = \sum_n S(n-1,k-1)x^n$

$[x^n] : S(n,k) - kS(n-1,k) = S(n-1,k-1)$

$\frac{x^k}{(1-x)\dots(1-kx)} = \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{1-jx} \overset{DN}{=} \dots$

(4) Razčlenitve

$\overline{p_k}(n) \overset{\text{konjugiranje}}{=}$ število razčlenitev n s členi $\leq k$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^k}$$
$$= \sum_n \overline{p_k}(n)x^n$$
$$= (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+\dots)\dots(1+x^k+\dots)$$

$[x^n] : x^n = x^{m_1} \cdot x^{2m_2} \dots x^{km_k}$

$n = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$

$k \dots k \dots 32 \dots 21 \dots 1$

$$\begin{aligned}\sum_n p_n(n)x^n &= \lim_{k\to\infty} \sum_n \overline{p_k}(n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^n} \\ &= \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x^i}.\end{aligned}$$

$d(n)$: število razčlenitev n z različnimi členi

$\sum_n d(n)x^n = \prod_{i=1}^\infty (1-x^i)$ (0 ali 1-krat vedno)

$o(n)$ = število razčlenitev n z lihimi členi

$\sum_n o(n)x^n = \prod_{i=0}^\infty \frac{1}{1-x^{2i+1}}$

$\prod_i (1+x^i) \cdot \frac{1-x^i}{1+x^i} = \prod_i \frac{1-1^{2i}}{1-x} = \prod_i \frac{1}{1-x^{2i+1}}$
$\implies o(n) = d(n)$.
DN: bijekcija.

(5) c_n: Dyckove poti dolžine n
$c_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} c_k \cdot c_{n-k} \qquad / \cdot x^{n+1} \sum_n$
$F(x) - 1 = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k cn - k\right) x^n = x \cdot F^2(x)$
$F(x) = 1 + xF^2(x)$:
1: prazna, $xF^2(x)$: dolžine n, $2n$ korakov
Motzkinova pot: v smeri $(1{,}1), (1, -1), (1{,}0)$
$M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x)$:
1: prazna, $xM(x)$: naravnost, $x^2M^2(x)$: desno-gor
$xF^2 - F + 1 = 0$
$F = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$
$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}(-4x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n$
$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ - ne, ker $\frac{2+\dots}{2x}$
$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$.
Druga utemeljitev:
$4x^2F^2 - 4xF + 4x = 0$
$(2xF - \left(1 - \sqrt{1-4x}\right))(2xF - \left(1 + \sqrt{1-4x}\right)) = 0$ v $K[[x]]$.
$2xF - \left(1 + \sqrt{1-4x}\right) \neq 0$ (konstantni koeficient nima 0)
$\implies 2xF = 1 - \sqrt{1-4x}$.

$F^k(x)$: razdelimo na k delov, vsakemu damo strukturo F.
$\sum_{k=0}^{\infty} F^k(x) = \frac{1}{1-F^k(x)}$: razdelimo na poljubno mnogo delov, vsakemu F.

Primer.

(1) Kompozicije n.
$\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x} = \begin{cases} 2^{n-1} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
kompozicije s členi 1 in 2
$\frac{1}{1-(x+x^2)}$.

(2) $2 \times n$ plošča, domine 2×1.
Primitivni tlakovanji
$\frac{1}{1-x-x^2}$
Domini 1×1 in 2×1
$n = 1$: 1 možnost,
$n = 2$: 3,
$n = 3$: 2,
$n = 4$: 2,
$\vdots$
$\frac{1}{1-(2x+3x^2+2x^3+\dots)} = \frac{1}{1-x^2-\frac{2x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-3x-x^2+x^3}$.

(3) Primitivna Dyckova pot: se ne dotakne x osi.
$F(x) = \frac{1}{1-xF(x)}$,
$M(x) = \frac{1}{1-x-x^2F(x)}$.
Levi faktor Dyckove poti: $L(x) = \frac{F(x^2)}{1-x-x^2F(x)} = \dots = \frac{2}{1-2x+\sqrt{1-4x^2}}$
$F(x^2)$: Dyckova pot (na začetku), $xF(x^2)$: korak + Dyckova pot.
DN: $L_n = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, namig: $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} =?$

$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1G(x) + a_2G^2(x) + \dots$: razdelimo na poljubno delov, vsakemu delu damo strukturo G, delom da strukturo F.

Primer.
Število kompozicij s sodo mnogo lihimi členi.
$n = 0 : 1$
$n = 1 : 0$
$n = 2 : 1$
$n = 3 : 0$
$n = 4 : 3$
$n = 5 : 0$
$n = 6 : 8$
$n = 7 : 0$
$n = 8 : 21$
$G(x) = \frac{x}{1-x^2}$ - lihi

$F(x) = \frac{1}{1-x^2}$ - sodo mnogo.

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(x) &= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2} \\
&= \frac{(1-x^2)^2}{(1-x-x^2)(1+x-x^2)} \\
&= \dots \\
&= 1 + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1+x-x^2}\right) \\
&= \sum_{n \text{ lih}} F_n x^n
\end{aligned}$$

kjer se, ko razpišemo $\left(\frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1+x-x^2}\right)$ sodi odštejejo, lihi štejejo 2-krat, to delimo z 2.

Primer (Dobri Will Hunting).

(1) Matrika sosednosti: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) Matrika, ki opisuje sprehode dolžine 3 : $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(3) Poišči rodovno funkcijo za sprehode $i \to j$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k x^k = (I - Ax)^{-1} = \frac{1}{det(I - Ax)}\left[\dots\right]$$

(4) $1 \to 3$:
$\frac{2x^2+2x^3}{1-7x^2-2x^3+4x^4}$.

2.6 Uporaba eksponentnih rodovnih funkcij

$F(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$
$F(x) \overset{\text{erf}}{\longleftrightarrow} (a_n)_n$
$\left[\frac{x^n}{n!}\right] F(x) = a_n$
$\left[\frac{x^n}{n!}\right] F(x) = n![x^n]F(x)$
$F'(x) \overset{\text{erf}}{\longleftrightarrow} (a_{n+1})_n$
$xF'(x) \overset{\text{erf}}{\longleftrightarrow} (n \cdot a_n)_n$
$p(xD)F(x) \overset{\text{erf}}{\longleftrightarrow} (p(n)a_n)_n.$

Primer.

(1) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n;\ n \geq 0$
$F(x) = \sum_n \frac{F_n}{n!} x^n$
$F''(x) - F'(x) - F(x) = 0$
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$F(x) = Ae^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + Be^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$
$F_n = \left[\frac{x^n}{n!}\right] F(x) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

(2) i_n: število involucij v S_n ($\pi^2 = id$).
$i_n = i_{n-1} + (n-1)i_{n-2};\ n \geq 2$:
i_{n-1}: n fiksna točka
i_{n-2}: n v transpoziciji z enim od $n-1$ ostalih.
$I(x) = \sum_n \frac{i_n}{n!} x^n$
$I'' - I' - (xI' + I) = 0$
$I'' - (x+1)I' - I = 0$
$(I' - (x+1)I')' = 0$
$I' - (x+1)I = c$
$x = 0:\ 1 - 1 = 0 = c$
$I' = (x+1)I$
$\int \frac{dI}{I} = \int (x+1)dx$
$\ln I = \frac{x^2}{2} + x + \log D$

$I = De^{x+\frac{x^2}{2}} \overset{x=0}{\Longrightarrow} D = 1$
$I(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

$F(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$
$G(x) = \sum_n \frac{b_n}{n!} x^n$
$F(x)G(x) = \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!}$
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$: binomska konvolucija.
orf: neoznačene strukture,
erf: označene strukture.

Primer.
d_n: premestitve v S_n (dearangement) - permutacije brez negibne točke.
$D(x) = \sum_n \frac{d_n}{n!} x^n$.
Permutacija = premestitev + množica negibnih točk.
(1 5 2) (3) (4 8 7) (6)
$\frac{1}{1-x} = D(x) \cdot e^x$
$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$
$e^{-x} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} x^n$
$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$
$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_n \left(\sum_{(S_1,S_2), S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = [n]} a_{|S_1|} b_{|S_2|}\right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$F^k(x) = \sum_n \left(\sum_{(i_1 \dots i_k), i_j \geq 0, i_1 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1 \dots i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

Predpostavimo $F(0) = 0$!!

$$\begin{aligned} F^k(x) &= \sum_n \left(\sum_{(S_1 \dots S_k), S_i \neq \emptyset, S_i \cap S_j = \emptyset, S_1 \cup \dots \cup S_k = n} a_{|S_1|} \dots a_{|S_k|} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= k! \sum_n \left(\sum_{(B_1 \dots B_k) \text{razdelitev } [n]} a_{|B_1|} \dots a_{|B_k|} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Izrek 2.6.1.
$F(0) = 0$.
$\frac{1}{k!} F^k(x)$ je erf za strukturo: izberemo razdelitev in vsakemu bloku damo strukturo F.

Primer.
$\sum_n S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^k - 1)^k$
F: neprazna množica: $0,1,1 \dots \overset{\text{erf}}{\Longrightarrow} e^x - 1$.
Binomski izrek $(e^x - 1)k = e^{-kx} - \dots$ nam da formulo za $S(n,k)$.
$\sum_n c(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^k$
F: cikel: $a_n = (n-1)!$ za $n \geq 1 \overset{\text{erf}}{\Longrightarrow} \log \frac{1}{1-x}$
$\sum_n L(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k$
F: neprazna linearno urejena množica: $a_n = (n)!$ za $n \geq 1 \overset{\text{erf}}{\Longrightarrow} \log \frac{1}{1-x}$.

Izrek 2.6.2 (Eksponentna formula)**.**
$F(0) = 0$.
$e^{F(x)}$ je erf za strukturo: izberemo razdelitev, vsakemu (bloku) damo strukturo F.

Dokaz 2.6.3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k(x) = e^{F(x)}$.

Primer.

(1) Permutacija = množica disjunktnih ciklov.
$\frac{1}{1-x} = e^{\log \frac{1}{1-x}}$.
DN: direktno.

(2) Involucija = množica ciklov dolžine 1 in 2: (0,1,1,0,0 ...)
$\sum_n \frac{i_n}{n!} = e^{x+\frac{x^2}{2}}$
$a_n = |\{\pi \in S_n : \pi^6 = id\}|$
$\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}}$
$\sum_n \frac{d_n}{n!} x^n = e^{\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n}} = e^{\log \frac{1}{1-x} - x} = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

(3) $\sum_n \frac{B(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$.

(4) a_n: število 2-regularnih grafov ($degv = 2\ \forall v \in V(G)$),
F : moč množice neusmerjenih ciklov dolžime ≥ 3: $a_n = \frac{(n-1)!}{2}$; $n \geq 3$
$\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n = e^{\sum_{n\geq 3} \frac{(n-1)!}{2} \frac{x^n}{n}} = e^{\frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}$.

Kompozitum:
$(F \circ G)(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} G^k(x)$.

Izrek 2.6.4 (O kompoziciji)**.**
$F(x), G(x), F(0) = 0$.
Potem je $(F \circ G)(x)$ erf za strukturo: množico razdelimo na bloke, vsakemu bloku damo strukturo G, množici blokov damo strukturo F.

Primer.

(1) $\tilde{B(n)}$: urejena Bellova števila = število urejenih razdelitev množice $[n]$.
$\tilde{B(2)} = 3 :\ \{1,2\}; \{1\},\{2\}; \{2\},\{1\}$
$\tilde{B(n)} = \sum_k S(n,k)$.
$\tilde{B(n)}$: število vseh surjekcij iz $[n]$.
$\sum_n \frac{\tilde{B(n)}}{n!} x^n = \frac{1}{1-(e^x-1)} = \frac{1}{2-e^x}$
$G(x) = e^x - 1$
$F(x) = \frac{1}{1-x}$.

(2) Permutacije z lihim številom ciklov
$\sum_n a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{\log \frac{1}{1-x}} - e^{-\log \frac{1}{1-x}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - (1-x)\right)$.
$G(x) = \log \frac{1}{1-x}$
$F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad (F(x) - F(-X) : \text{lihi })$

$$a_n = \begin{cases} 0 \; n = 0 \\ 1 \; n = 1 \\ \frac{n}{2} \; n \geq 2 \end{cases}$$

orf	erf
$F(x)G(x)$	$F(x)G(x)$
$F^k(x)$	$\frac{1}{k!}F^k(x)$
$\frac{1}{1-F(x)}, \; F(0) = 0$	$e^{F(x)}$
$F \circ G$	$F \circ G$

2.7 Algebraične rodovne funkcije

$K[x]$ polinomi,

$K[[x]]$ formalni polimon (fp?),

$K(x)$ racionalne funkcije (polje ulomkov za $K[x]$),

$\frac{1}{x} \in K(x), \; \frac{1}{x} \notin K[[x]]$,

$K(x) \cap K[[x]]$ racionalna rodovna funkcija.

Za taka zaporedja imamo linearne rekurzije.

$F(x) = \sum_n a_n x^n$

$xF^2 - F + 1 = 0$

$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ kvadratična rekurzija.

Ali je $F(x) \in K(x)$?

$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$xP^2 = PQ - Q^2 = Q(P - Q)$

L : deg $P \cdot 2 + 1$ - liha stopnja,

$$D : \begin{cases} \deg P < \deg Q \implies Q(P-Q) \text{ sode stopnje} \\ \deg P \geq \deg Q \implies \deg Q(P-Q) \leq 2 \cdot \deg P \end{cases}$$

Definicija 2.7.1.

$F(x) \in K[[x]]$ je algebraična reda d, če

$Q_d(x)F^d(x) + Q_{d-1}(x)F^{d-1}(x) + \cdots + Q_0(x) = 0$ za $Q_0 \cdot Q_d \in K[X]$, $Q_0, Q_0 \neq 0$,

ne obstaja taka enačba stopnje $< d$.

Algebraična reda d = racionalna fpv (formalna potenčna vrsta).

$F(x) = \sum_n F_n x^n,\ M(x) = \sum_n M_n x^n$ algebraični reda 2.

$Q_d(x)F^d(x) + \cdots + Q_0(x) = 0$ za $Q_0, Q_d \neq 0$

$C_n : xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0$

$M_n : x^2F(x)^2 + xF(x) + 1 = 0.$

S-drevo:

$S \subseteq \{1, 2, 3 \dots\}.$

Drevo s korenom, vsak element je list ali pa je število naslednikov v S.

{2,3}-drevo

a_n: število S-dreves z n vozlišči,

b_n: število S-dreves z n listi.

$U(x) = \sum_n a_n x^n$

$V(t) = \sum_n b_n t^n.$

$S = \{2,3\}$

$U(x) = x + xU^2(x) + xU^3(x)$:

x: 1 vozlišče.

$V(t) = t + v^2(t) + v^3(t)$:

koren ne prispeva k številu listov.

$U(x) = x + \sum_{k \in S} xU^k(x)$

$V(t) = t + \sum_{k \in S} tV^k(t)$, $1 \notin S$.

S končna $\implies$ S algebraična.

Če S neskončna, sta U in V vseeno lahko algebraični.

Primer.

- $S = \{2\}$ - dvojiška drevesa.
  $v = t + v^2$
  $v^2 - v + t = 0 \implies v = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} t^n$
  C_n: število dvojiških dreves z $n+1$ listi.

- $S = \{k\}$
  $v = t + v^k$ - Lagrangeeva inverzija (kasneje).

- $S = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$
  $U = x + x\sum_{k=1}^{\infty} U^k = x + x\frac{U}{1-U}$
  $U - U^2 = x - xU + xU = x$
  $U^2 - U + x = 0 \implies U = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}x^n$
  C_n: število ravninskih dreves z $n+1$ vozlišči.

Izkaže se: U,V algebraični $\iff$ S se za končno množico razlikuje od končne unije aritmetičnih zaporedij.

Trditev 2.7.2.
$K_{alg}[[x]] = \{F[x] \in K[[x]] \text{ algebraična}\}$ je podalgebra $K[[x]]$.

$xF^2 - F + 1 = 0$
$F^2 + 2xFF' = 0$
$F' = \frac{F^2}{1-2xF} \stackrel{?}{=} a + bF;\ a, b \in K(x)$
$F^2 = a + bF - 2axF - 2bxF^2$
$(1 - 2bx)F^2 + (2ax - b)F - ax = 0$
$(1 - 2bx + (2ab - x))F - 1 - 2bx - ax = 0$
$\rightarrow$: 2 enačbi, 2 neznanki.
$a = \frac{1}{x(1-4x)}$
$b = \frac{2x-1}{x(1-4x)}$
$F' - \frac{1}{x(1-4x)} - \frac{2x-1}{x(1-4x)}F = 0$
$x(1 - 4x)F' - 1 - (2x - 1)F = 0$
$F' = \sum_n nC_nx^{n+1}$
$[x^n] : nC_n - 4(n - 1)C_{n-1} + 2C_{n-1} + C_n$ za $n > 1$
$C_n = \frac{2(n-1)}{n+1}C_{n-1} \implies \dots C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Definicija 2.7.3.
$F(x) \in K[[x]]$ je D-končna, če je

$R_n(x)F^{(d)}(x) + \cdots + R_1 F^{'}(x) + R_0 = 0$ za $R_i(x) \in K[x]$.
Ekvivalentno: vektorski prostor nad $K(x)$, generiran z $F, F^{'}, F^{''} \ldots$ je končno razsežen.

Definicija 2.7.4.
$(a_n)_n$ je P-rekurzivna, če je $p_d(n)a_n + \cdots + p_0(n)a_{n-d} = 0$ za $n \geq d$.

Trditev 2.7.5.
$F(x) = \sum_n a_n x^n$ je D-končna $\iff$ $(a_n)_n$ je P-rekurzivna.

Torej: za P-rekurzivno zaporedje lahko člene hitro izračunamo.

Zgled.
$F(x) = \sum_n C_n x^n$ je D-končna,
e^x je D-končna: $F^{'} - F = 0$,
e^x ni algebraična.

Izrek 2.7.6.
$F(x)$ algebraična $\implies$ D-končna.

Dokaz 2.7.7. (skica):
$Q_d(x)F^d(x) + \cdots + Q_0(x) = 0 \quad /^{'}$
$Q_d(x)^{'}F^d(x) + dQ_d(x)F^{d-1}(x)F^{'}(x) + \cdots + Q_0^{'}(x) = 0$
$F^{'}(x) \in K(x, F(x))$
Iz algebre:
K obseg, u v večjem obsegu;

(i) v algebraičnem: $K[u] = K(u)$ končno razsežen VP,

(ii) v transcendentnem: $K[u] \subseteq K[x]$ („u spremenljivka“).

$K = K[x]$
$u = F(x)$
$K[u] = K(x, F(x))$.
Torej: $K(x, F(x))$ je končno razsežen VP nad $K(x)$, torej so $1, F, F^{'} \ldots$ linearno neodvisni $\implies$ F je D-končna.

2.8 Eulerjeva in eulerska števila

E_n: število alternirajočih permutacij v S_n.

$E_3 = 2$ $(231), (132)$

$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k} + \delta_{n0}$

$E(x) = \sum_n \frac{E_n}{n!} x^n$

$2F' = F^2 + 1$

$\int \frac{2dF}{F^2+1} = \int dx$

$2 \arctan F = x + 2c$

$F = \tan\left(\frac{x}{2} + c\right)$

$F(0) = 1 = \tan c \implies c = \frac{\pi}{4}$

$\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$.

Izrek 2.8.1.

$\sum_n \frac{E_n}{n!} x^n = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ oz.

$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n \text{ sod}} \frac{E_n}{n!} x^n$

$\frac{1}{\sin x} = \sum_{n \text{ lih}} \frac{E_n}{n!} x^n$

Opomba.

Bernoullijeva števila.

$$B_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1, n \text{ lih} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} E_{n-1}}{2^n(2^n-1)} & n > 0, n \text{ sod} \end{cases}$$

$\sum_n B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{xe^x}{e^x-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2n}(-1)^{k+1}\pi^{2k}}{2\cdot(2k)!} = \frac{E_{2k-1}\pi^{2k}}{2(2k-1)!(2^{2k}-1)} = \zeta(2k)$

Riemmanova funkcija ζ:

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ za $Re\ s > 1$.

Z analitičnim nadaljevanjem lahko ζ definiramo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{n+1}$ - soda negativna števila so ničle - trivialne ničle.

Riemmanova hipoteza:

$Re\ z = \frac{1}{2}$ za vsako netrivialno ničlo z funkcije ζ.

$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}$

„$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$“

Faulhaberjeva formula:

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}B_l n^{k+1-l}$

$= \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{l+1}\binom{k}{2l-1}}{2^{2l}(2^{2l}-1)} E_{2l-1} n^{k-1-2l}$

$= \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k \cdot n^{2k}}$

$= \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k-1}}{2^{2k}(2^{2k}-1)n^{2k}}$,

kjer je $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n-to harmoično število.

$A(n,k)$: število permutacij v S_n z $k-1$ spusti.

$A(n,k) = (n+1-k)A(n-1,k-1) + kA(n-1,k)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad /'/ \cdot x$

$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots \quad /'/ \cdot x$

$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \dots \quad /'/ \cdot x$

$\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4} = x + 8x^2 + 27x^3 + \dots$

$A_n(x) = \sum_k A(n,k)x^k$ eulerski polinom.

Izrek 2.8.2.

$\sum_m m^n x^m = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n-1}}$.

Dokaz 2.8.3.

Indukcija:

$n = 0$: $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

$n-1 \to n$:

$$\sum_m m^{n-1}x^m = \frac{A_{n-1}(x)}{(1-x)^n} \quad /'/ \cdot x$$

$$x \cdot \sum_m m^{n-1}x^{m-1} = \frac{A'_{n-1}(x)(1-x)^n + A_{n-1}(x)n(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{2n}} \stackrel{?}{=} \frac{A_n(x)}{(1+x)^{n+1}}$$

$[x^k]$: $(k+1)A(n-1,k-1) - kA(n-1,k) + nA(n-1,k) = A(n,k)$ ✓

$A_{n-1}(x) = \sum_k A(n-1,k)x^k$

$A'_{n-1}(x) = \sum_k kA(n-1,k)x^{k-1}$.

Izrek 2.8.4.
$\sum_{n,k} A(n,k)x^k \frac{y^n}{n!} = \frac{1-x}{1-xe^{xy(1-y)}}$ - mešana rodovna funkcija (običajna v x, eksponentna v y).

Dokaz 2.8.5.
$\sum_{n,k} A(n,k)x^k \frac{y^n}{n!}$
$= (1-x)\left(\sum_k \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \cdot \frac{y^n}{n!}(1-x)^n\right)$
$= (1-x)\sum_n \left(\sum_m m^n x^m\right) \frac{y^n(1-x)^n}{n!}$
$= (1-x)\sum_m \left(\sum_n \frac{m^n y^n (1-x)^n}{n!}\right) x^n$
$= (1-x)\sum_m e^{xy(1-x)}x^m$
$= \frac{1-x}{1-e^{xy(1-x)}}$.

2.9 Izračun povprečij in variance

Koliko elementov ima v povprečju podmnožica $[n]$?
$\frac{\sum_{T\subseteq[n]}|T|}{2^n} = \frac{\sum_n k\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n\cdot 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$
$(1+x)^n = \sum_k \binom{n}{k}x^k \quad /'$
$n(1+x)^{n-1} = \sum_k k\binom{n}{k}x^{n-1}$
$x = 1$:
$n\cdot 2^{n-1} = \sum_k k\binom{n}{k}$.
S končna množica.
$F(x) = \sum_{a\in S} x^{f(a)}$
$F(1) = |S|$
$F'(x) = \sum_{a\in S} f(a)\cdot x^{f(a)-1}$
$F'(1) = \sum_{a\in S} f(a)$
$\mu = \frac{F'(1)}{F(1)} = (\log' F)(1)$
$F(x) = (1+x)^n$
$\log F(x) = n\log(1+x)$

$\log' F(x) = \frac{n}{1+x}$
$(\log' F)(1) = \frac{n}{2}$
$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$
$E(x^2) = \frac{\sum_n f^2(s)}{|S|}$
$F'(x) + xF''(x) = (xF'(x))' = \sum_{a \in S} f^2(a) x^{f(a)-1}$
$x = 1$:
$\sigma^2 = \frac{F'(1)+F''(1)}{F(1)} - \frac{F'(1)^2}{F(1)^2} = \frac{F'(1)}{F(1)} + \frac{F''(1)F(1)-F'(1)^2}{F(1)^2}$.
Torej
$\mu = (\log' F)(1)$
$\sigma^2 = (\log' F)(1) + (\log'' F)(1)$
$F(x) = (1+x)^n$
$\mu = \frac{n}{2}$
$\log' F(x) = \frac{n}{1+x}$
$\log'' F(x) = -\frac{n}{(1-x)^2}$
$\sigma^2 = \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}$
$\frac{n}{2} \pm \frac{\sqrt{n}}{2}$.
Koliko ciklov ima v povprečju permutacija v S_n?
$\sum_{\pi \in S_n} x^{f(\pi)} = \sum_k c(n,k) x^k = x^{\overline{n}} = F(x)$
$\log F(x) = \log x + \log(x+1) + \cdots + \log(x+n-1)$
$\log' F(x) = \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}$
$\mu = H_n = \log n + \gamma + o(1)$
$\log'' F(x) = -\frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{1}{(x+n-1)^2}$
$\sigma^2 = H_n - \sum_{i=1}^n i^2 = \log n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + o(1)$
$\log n \pm \sqrt{\log n}$.