Kombinatorika 2 - zapiski s predavanj prof. Konvalinke

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Kazalo

Poglavje 1

Osnove

1.1 Kako štejemo?

S končna množica, $|S| = ?$

Pogosto $S_n, n \in \mathbb{N}$.

Preštevalno zaporedje $|S_0|, |S_1|, |S_2| \ldots$

Kaj je odgovor?

(1) Formula.

$[n] = \{1, 2 \ldots n\}$.

$S_n = 2^{[n]} = P([n])$.

$|S_n| = 2^n$.

$S_n = \{$permutacije n elementov$\}$.

$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ „n fakulteta“ „n factorial“.

$S_n = \{$kompozicije n s členi 1 ali 2$\}$, npr. 5 = 1+2+1.

$|S_5| = 8$.

$1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$

$|S_n| = F_n$ - Fibonaccijevo zaporedje.

(2) Asimptotska formula.

$|S_n| \sim a_n$ (to pomeni $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|S_n|} = 1$).

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ - Stirlingova formula.
$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

(3) Z rekurzijo.
$S_n = 2^{[n]}$.
$a_n = |S_n|, a_n = 2a_{n-1};\ n \geq 1,\ a_0 = 1$.
$S_n = \{\text{kompozicije s členi 1 ali 2}\}$.
$S_n = F_n, F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1$.
F_{n-1} - kompozicije, ki se končajo z 1, F_{n-2} - končajo z 2.

(4) Z rodovno funkcijo (generating function).
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje.
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_n a_nx^n$ običajna (ordinary) rodovna funkcija - ORF.
$a_n = 2^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^nx^n = \frac{1}{1-2x}$.
$\sum_n F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$.
$\sum_n n!x^n$ //.
$\sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$ eksponentna rodovna funkcija.
$\sum_n 2^n\frac{x^n}{n!} = e^{2x}$.
$\sum_n \frac{n!}{n!}x^n = \frac{1}{1-x}$.

(4) je najboljši način, da poznamo zaporedje.

– Rodovna funkcija je velikokrat „lepa“, tudi če ni lepe formule za zaporedje.
  $i_n \ldots$ # involucij z n elementi ($\pi^2 = \text{id}$).
  ni enostavnejše formule za i_n.
  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{n!}x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}$
– Do rodovne funkcije lahko pogosto pridemo neposredno s kombinatoričnim premislekom.
  Involucija = permutacija s cikli dolžine 1 ali 2.
  $\sum F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$; x - cikli dolžine 1, x^2 - cikli dolžine 2.
– V rodovni funkciji so „skrite“ (1)-(3).

1.2 Osnovne Kombinatorične strukture

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$.

$[n] = \{1, 2 \dots n\}$.

$2^A = P(A) = \{B \subseteq A\}$.

$\binom{A}{k} = \{B \subseteq A : |B| = k\}$ „A nad k“ (angl. „A choose k“).

$\binom{[4]}{2} = \{\{1{,}2\}, \{1{,}3\} \dots \{3{,}4\}\}$.

$Y^X = \{f : X \to Y\}$.

Statistika na množici S je preslikava $S \to \mathbb{N}$.

$S = 2^A$.

Moč je statistika.

S končna množica, f statistika na S.

Pogosto gledamo polinom $\sum_{s \in S} x^{f(s)}$ (enumeration).

$|.|$ na $2^{[3]} : 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3$.

$S_n = \{$permutacije $[n]\} = \{f : [n] \to [n] : f$ bijektivna$\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ - dvovrstična notacija.

2 1 3 - enovrstična notacija.

(1 2)~~(3)~~ - produkt disjunktnih ciklov.

$i, \pi(i), \pi^2(i) \dots$

Gotovo $\exists j_1 < j_2 : \pi^{j_1}(i) = \pi^{j_2}(i) \implies i = \pi^j(i);\ j > 0$.

$(i\ \pi(i) \dots \pi^{j-1}(i))$ cikel.

38241765 = (1 3 2 8 5)(4)(6 7) = (4)(2 8 5 1 3)(7 6).

Množenje permutacij: kompozicije.

Nekomutativno za $n > 2$.

Disjunktni cikli komutirajo.

Zapis: enoličen do vrstnega reda ciklov in ciklične ureditve ciklov.

Cikel dolžine 1 = negibna točka.

Cikel dolžine 2 = transpozicija.

$(S_n \cdot)$ simetrična grupa.

$e = id = 1\ 2 \dots n$.

π^{-1} inverz (kot preslikava).

$3\ 8\ 2\ 4\ 1\ 7\ 6\ 5^{-1} = 5\ 3\ 1\ 4\ 8\ 7\ 6\ 2$.

$3\ 1\ 4\ 2 \cdot 4\ 2\ 3\ 1 = 2\ 1\ 4\ 3$ - množimo z desne.

Statistika: # ciklov $= c(\pi)$ (štejemo tudi cikle dolžine 1).

$n = 3 : x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$.

$\sum_{\pi \in S_n} x^{c(\pi)} = \sum_k |\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| x^k$.

$|\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| =: c(n,k)$ - Stirlingovo število 1. vrste.

$\sum_{B \subseteq [n]} x^{|B|} = \sum_k |\binom{[n]}{k}| x^k$.

$|\binom{[n]}{k}| =: \binom{n}{k}$ - binomski koeficient.

Inverzija $\pi \in S_n$ je (i,j), da je za $i < j\ \pi_i > \pi_j$.

$inv(\pi) =$ # inverzij π.

$inv(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 7$.

$0 \leq inv(\pi) \leq \binom{n}{2}$.

Signatura permutacije: $(-1)^{inv(\pi)}$.

$sg\pi = 1$ - soda permutacija: produkt sodo mnogo transpozicij.

$sg\pi = -1$ - liha permutacija: produkt liho mnogo transpozicij.

$detA = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{inv(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}$.

Izraz brez $(-1)^{inv(\pi)}$: permanenta.

$n = 3 :$

$1 + 2x + 2x^2 + x^3 = 1 + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 = (1+x)(1+x^2)$.

$\sum_{\pi in S_n} x^{inv(\pi)} = 1 \cdot (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{n-1})$ - kasneje.

permutacij v S_n s k inverzijami: ni standardne oznake.

spust/padec (descent) $i : \pi_i > \pi_{i+1}$.

$des(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 3$.

$0 \leq des(\pi) \leq n - 1$.

permutacij v S_n s $k-1$ spusti $= A(n,k)$ - Eulersko število ($k-1$ iz zgodovinskih razlogov).

$\sum_k A(n,k) x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{1+des(\pi)} = A_n(x)$ - eulerski polinom.

$n = 3 :$

$x + 4x^2 + x^3$.

razdelitev/razbitje (angl. set partition) A je $\{B_1, B_2 \ldots B_n\}, davelja :$

- $B_i \neq \emptyset\ i = 1 \ldots k$,

– $B_i \cap B_j = \emptyset \; 1 \leq i < j \leq k$,

– $\cup_{i=1}^{k} B_i = A$.

B_i: bloki razdelitve,

blokov,

razdelitev $[n]$ s k bloki $= S(n{,}k)$ - Stirlingovo število druge vrste.

$A = [3] \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1{,}2\},\{3\}\}\ldots\{\{1{,}2{,}3\}\}$.

$x + 3x^2 + x^3$.

$S(4{,}2) = 4 + 3 = 7$.

Kompozicija # n je $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_l), \lambda_i > 0$ člen kompozicije, $\lambda_i \in \mathbb{N}$,

$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$.

$l(\lambda)$ # členov - dolžina.

$\lambda \models n$ - λ je kompozicija n.

Razčlenitev # n je $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_l), \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{N}$.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l, \sum_{i=1}^{l} = n$

(angl. integer partition).

$p(n)$ - # razčlenitev n.

$p_k(n)$ - # razčlenitev n s k členi.

$n = 4:$

$4, 31, 22, 13, 211, 121, 112, 1111$ - 8 kompozicij.

$4, 31, 22, 221, 1111$ - 5 razčlenitev.

$p(4) = 5, p_2(4) = 2$.

$B(n) = \sum_k S(n{,}k)$ - # razčlenitev $[n]$, Bellovo število.

$B(3) = 5$.

$L(n{,}k)$ - razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov.

$L(4{,}2) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ - Lahovo število.

$E_n = $ # alternirajočih permutacij v S_n - Eulerjevo število (Euler number).

$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 \ldots$

Primerjaj: eulerska števila (eulerian number).

$1, 1, 1, 2, 5$.

Poti:

npr. poti od (0,0) do (n,m) s korakom (1,0) (vzhod) in (0,1) (sever);
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$;
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$, nikoli pod x osjo - Dyckove poti;
$c_n = \#$ Dyckovih poti dolžine n (konec v $(2n,0)$) - Catalanova števila.
$1,1,2,5,14,42\dots$
Drevesa (povezani aciklični grafi).
$\#$ označenih dreves na n vozliščih.
Cayleyev izrek: n^{n-2}.
Ravninska drevesa.
(Vrstni red pomemben).
Dvojiška drevesa: vsako vozlišče ima 2 ali 0 naslednikov.

1.3 Osnovna načela preštevanja

Načelo vsote: $A \cap B = \emptyset \implies |A \cap B| = |A| + |B|$.
$i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.
Načelo produkta: $|A \times B| = |A| \cdot |B|, |\prod_{i=1}^n A_i| = \prod_{i=1}^n |A_i|$.
Kombinatorično:

> 2 možnosti, izberemo eno ali drugo (ne pa obe) $\implies$ $\#$ načinov je vsota $\#$ načinov,
>
> dvakrat izbiramo, izbiri sta neodvisni $\implies$ $\#$ načinov je produkt $\#$ načinov.

Trditev 1.3.1. $|2^A| = 2^{|A|}$.

Dokaz 1.3.2. Za vsak element se odločimo, ali ga damo v podmnožico ali ne. 2 izbiri, izbiramo $|A|$-krat, izbire so neodvisne $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{|A|}$.
$\phi : 2^A \to \{0,1\}^{|A|}, A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$.

$$\phi(B) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_n), \epsilon_i = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$\psi : \{0,1\}^{|A|} \to 2^A$.
$\psi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = \{a_i : \epsilon_i = 1\}$.
$\psi \circ \phi, \phi \circ \psi$ identiteti.
$|\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$. ■

Trditev 1.3.3.

1. $|K^N| = |K|^{|N|}$.

2. $|\{f \in K^n \text{ injektivna}\}| = |K|(|K|-1)\dots(|K|-|N|+1)$.

3. $|S_n| = n(n-1)\dots 1 = n!$.

oznake:
$n^{\underline{k}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$: n na k padajoče.
$n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1)$: n na k naraščajoče.

Opomba. Pri 2. in 3. smo uporabili varianto načela produkta: izbire sicer niso neodvisne, je pa neodvisno število izbir.

Dirichletov princip (pigeon-hole principle):
$\phi : X \to Y$ injektivna $\implies |X| \leq |Y|$.
Če damo n kroglic v k škatel, $n > k$, sta v vsaj eni škatli vsaj 2 kroglici.

Primer.

(1) n ljudi, med njimi sta dva, ki poznata enako mnogo ljudi.
X =ljudje, $f = \#$ znanstev.
n kroglic, n škatel, ampak škatli 0 in $n-1$ ne moreta biti obe neprazni.

(2) $X \subseteq [2n], |X| = n+1$.
Obstajata $x,y \in X, x \neq y, x|y$.
$x = 2^k \cdot l, k \geq 0, k$ lih.
$Y = \{i \in [2n] \text{ liho}\}$.
$x \mapsto l$.

1.4 Binomski koeficienti

$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$ = število k-elementnih podmnoživ v $[n]$ = število izbir k elementov izmed n elementov.
$\binom{4}{2} = 6, \binom{5}{0} = 1, \binom{8}{-2} = 0, \binom{8}{9} = 0.$
$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n.$
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$
$\phi : \binom{[n]}{n-k} \to \binom{[n]}{k}.$
$\phi(A) = A^c.$
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$
$\binom{n-1}{k-1}$: izberemo n.
$\binom{n-1}{k}$: ne izberemo n-ja.
Pascalov trikotnik:

$n = 0$											
$n = 1$						1					
$n = 2$					1		1				
$n = 3$				1		2		1			
$n = 4$			1		3		3		1		
$n = 5$		1		4		6		4		1	
	1		5		10		10		5		1

Trditev 1.4.1. $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{n!(n-k)!} & 0 \le k \le 0 \\ 0 & k > n \end{cases}$

Dokaz 1.4.2. Izberemo 1 element na n načinov, 2 na $n-1 \cdots \implies n^{\underline{k}}$ načinov, vsak izbor smo šteli $k!$-krat.
Ali: preštejemo urejene izbire k različnih elementov iz $[n]$;
$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} \cdot k!.$
$\binom{n}{k}$: najprej izberemo k elementov.
k: nato jih uredimo. ∎

Izrek 1.4.3 (Binomski izrek)**.** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$;
$a,b \in K$ komutativni kolobar, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz 1.4.4.

D1. Indukcija po n:

$n = 0$: $1 = 1$

$n - 1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \\
&\overset{\text{IP}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} (a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k}^{n} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}
$$

D2. $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ DN.

D3. $(a+b)\ldots(a+b) = \sum_{\text{izbira } a \text{ ali } b}$ produkt izbranih $=$
$= \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
a izberemo k-krat.
Izberemo k oklepajev, pri katerih izberemo a.

■

$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$.
$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$.
Izbori: n kroglic, k izberemo.

	s ponavljanjem	brez ponavljanja	
vrstni red pomemben	n^k	$n^{\underline{k}}$	variacije
ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	kombinacije

$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.
$j_1 = i_1, j_2 = i_2 + 1 \ldots j_k = i_k + k - 1$.
$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n + k - 1$.

Trditev 1.4.5. Število kompozicij n je 2^{n-1} $(n \geq 1)$, število kompozicij s k členi je $\binom{n-1}{k-1}$ $(n \geq 1)$.

Dokaz 1.4.6. n kroglic $\circ| \circ \circ \circ | \circ \circ :\ 6 = 1 + 3 + 2$.
$k - 1$ pregrad, $n - 1$ mest za pregrade. ■

Kompozicije: $2^{n-1}, \binom{n-1}{k-1}$.
Šibka kompozicija: $(\lambda_1 \ldots \lambda_l);\ \lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$.
$3 : 12, 3, 21, 102, 300, 0102 \ldots$
Število šibkih kompozicij n s k členi.
$n + k - 1$ objektov, premešamo na $\binom{n+k-1}{k-1}$ oz. $\binom{n+k-1}{n}$ načinov.
Še en dokaz:
$\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n,\ \lambda_i \geq 0$.
$\mu_i = \lambda_i + 1\ \mu_i \geq 1$.
$\mu_1 + \cdots + \mu_l = n + k \implies \binom{n+k-1}{n-1}$.
Primerjaj z: kombinacije s ponavljanjem.
n kroglic, k-krat izbiram.
λ_i: kolikokrat izberemo i-to kroglico.
$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k,\ \lambda_i \geq 0$.
Šibke kompozicije k z n členi: $\binom{k+n-1}{k}$.

Trditev 1.4.7.

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz 1.4.8. Koliko je urejenih razdelitev na linearno urejene bloke:

$$k! \cdot L(n,k) = n! \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Tukaj predstavljajo

- $L(n,k)$: urejene bloke,

- $k!$: njihov vrstni red,
- $n!$: permutacije,
- $\binom{n-1}{k-1}$: šibke kompozicije.

Poti iz (0,0) v (n,m), premikamo se gor ali desno.

n-krat gor, m-krat desno: $\binom{n+m}{m}$ možnosti.

Poti iz (0,0) v (2n,0), desno-gor ali desno-dol.

n-krat gor, n-krat dol: $\binom{2n}{n}$.

Dyckove poti: isto kot prej, se ne spustimo pod x-os.

Pot je slaba, če gre pod x-os:

Od tam naprej, kjer 1. doseže $y = -1$, prezrcalimo pot preko $y = -1$.

Konča se v $y = -2$.

Število slabih poti = število poti od (0,0) do $(2n, -2)$.

Teh je $\binom{2n}{n-1}$: $(n-1)$-krat gor, $(n+1)$-krat dol.

C_n = število Dyckovih poti doižine $n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$= \frac{(2n!)}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Multinomski koeficienti:

$\alpha_1 \times 1, \alpha_2 \times 2 \ldots \alpha_k \times k :\ 11..12..2..k$.

Na koliko načinov lahko premešamo:

$$\binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1}\binom{\alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_2} \cdots \binom{\alpha_k}{\alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}.$$

Definiramo

$$\binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k} := \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}. \tag{1.1}$$

Izrazu 1.1 pravimo multinomski simbol.

Figure v 1. vrsti pri šahu: $\frac{8!}{1!1!2!2!} = 7!$.

i-jem damo indekse $\alpha_1 \ldots \alpha_k :\ 1_1 \ldots 1_{\alpha_1} 2_1 \ldots k_{\alpha_k}$

Premešamo na $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!$ načinov.

Eno permutacijo dobimo $(\alpha_1! \ldots \alpha_k!)$-krat.

Multimnožica M je množica, v kateri se elementi lahko ponavljajo.

$M = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\} = \{1^3, 2^2, 3^4\}$.

Število permutacij multimnožice je multinomski simbol.

Formalno je multimnožica (S,f), kjer je S množica, $f : S \to \mathbb{N}$ šteje kolikokrat se posamezen element ponovi.

1.5 Dvanajstera pot

n kroglic, k škatel; na koliko načinov lahko damo kroglice v škatle.

$N \setminus K$	vse	injekcije	surjekcije	
L L	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$	
N L	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	„kompozicije“
L N	$\sum_i S(n,i)$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n,k)$	razdelitve
N N	$\overline{p_k(n)}$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$	razčlenitve

Vpeljemo ekvivalenčne relacije

- $f \sim_N g : \exists \pi \in S_n : f \circ \pi = g$
- $f \sim_K g : \exists \sigma \in S_k : \sigma \circ f = g$
- $f \sim_{N,k} g : \exists \pi \in S_n, \sigma \in S_k : \sigma \circ f \circ \pi = g.$

1.6 Rekurzije

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)$;
$c(n-1,k-1)$: n negibna, $(n-1)$: za kateri element vstavimo.
$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$;
$S(n-1,k-1)$: n v svojem bloku, k: v kateri blok vstavimo.
$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$;
$L(n-1,k-1)$: n v svojem bloku, $(n+k-1)$: kam vstavimo.
$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$;
odstranimo blok, v katerem je $n+1$, k: število elementov v bloku skupaj

z $n+1$, $\binom{n}{k}$: kateri elementi v bloku skupaj z $n+1$, $B(n-k)$: razdelimo ostale.

$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$;

$p_{k-1}(n-1)$: $\lambda_l = 1$, $p_k(n-k)$: $\lambda_l \geq 2$ (odstranimo 1. stolpec v Ferrersovem diagramu).

$A(n{,}k) = (n+1-k)A(n-1{,}k-1) + kA(n-1{,}k)$. ostranimo n, k: n damo na konec ali za spust, $(n+1-k)$: n damo na začetek ali za vzpon. V S_n velja še: števio spustov + število vzponov $= n-1$.

$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$ $n \geq 1$;

k: koliko elementov je pred $n+1$, število obratno alternirajočih = število alternirajočih ($i \to n+1-i$), E_k: pred $n+1$, E_{n-k}: za $n+1$, štejemo in alternirajoče in obratno alternirajoče permutacije.

$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$;

k: ko 1. pridemo v $y=0$: pred in za tem sta Dyckovi poti.

$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots$ Eulerjev petkotniški izrek (dokaz kasneje) (pentagonal).

1.7 Načelo vklučitev in izključitev (NVI)

(Principle of inclusion and exclusion).

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Izrek 1.7.1 (NVI)**.**

$$\begin{aligned}
|\cup_{i=1}^n A_i| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- \dots \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}| \\
&= \sum_{\emptyset \ne S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |A_S|,
\end{aligned}$$

kjer je $A_S := \cap_{i \in S} A_i$.

Dokaz 1.7.2.

$x \in \cup_{i=1}^n A_i$.

Trdimo, da x prispeva 1 k vsoti na desni.

Recimo, da je x v natanko m množicah A_i $(1 \le m \le n)$:

$$\begin{aligned}
&m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} \\
&= 1 - \left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \right) \\
&= 1 - (1-1)^m = 1.
\end{aligned}$$

Trditev 1.7.3 (NVI, 2. verzija)**.**

$$\left| \cap_{i=1}^n A_i^C \right| = \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|.$$

Dokaz 1.7.4.

$$\begin{aligned}
\left| \cap_{i=1}^n A_i^C \right| &= \left| (\cup_{i=1}^n A_i)^C \right| \\
&= |A| - |\cup_{i=1}^n A_i| \\
&= |A| + \sum_{\emptyset \ne S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |A_S| \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|,
\end{aligned}$$

kjer velja še $A_\emptyset = A$.

Primer.

(1) Koliko je k-elementnih antiverig v B_n?
$B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$ Boolova algebra, antiveriga - množica neprimerljivih elementov.

k=1: 2^n (vsi elementi).

k=2:

$$S = \{(A,B) : A, B \subseteq [n]\}$$
$$S_1 = \{(A,B) : A \subseteq B\}$$
$$S_2 = \{(A,B) : B \subseteq A\}$$
$$|S_1^C \cap S_2^C| = |S| - |S_1| - |S_2| + |S_1 \cap S_2| = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n;$$

4^n: vse možnosti $x \in, \notin A,B$, 3^n: vse razen $x \in A, \notin B \ldots$
$\implies \frac{1}{2}(4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n)$.

k=3:

$$S = \{(A,B,C) : A,B,C \in 2^{[n]}\}$$
$$S_1 : A \subseteq B, S_2 : B \subseteq A, S_3 : A \subseteq C, S_4 : C \subseteq A$$
$$S_5 : B \subseteq C, S_6 : C \subseteq B.$$
$$|\cap_{i=1}^6 S_i^C| = 8^n - 6 \cdot 6^n + 3 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n - 6 \cdot 4^n - \overset{\text{DN}}{\cdots}$$

$6^n : S_i$, 4^n : npr. $S_1 \cap S_2$, 5^n: npr. $S_1 \cap S_3$, 4^n : npr. $S_1 \cap S_4$.

(2) i_n: število premestitev v S_n = število permutacij v S_n brez negibne

točke (dearangement).

$$\begin{aligned} A &= S_n \\ A_i &= \{\pi \in S_n : \pi_i = i\} \\ |A_I| &= (n - |I|)! \\ i_n &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}(n - |I|)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

$P(\text{število premestitev}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-1}$.

(3) Število surjekcij iz $[n]$ v $[k]$.

$$\begin{aligned} A &= [k]^{[n]} \\ A_i &= ([k] \setminus \{i\})^{[n]} \\ \left|\cap_{i=1}^{n} A_i^C\right| &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}(k - |I|)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n \\ &\overset{i=k-i}{=} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\ &= k! S(n,k); \end{aligned}$$

surjekcija je urejena razdelitev;

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j!(k-j)!}.$$

(4) Eulerjev petkotniški izrek:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - \ldots$$

$$\begin{aligned}
&A = \{\text{razčlenitve } n\}\\
&A_i = \{\text{razčlenitve } n\text{, ki vsebujejo } i \text{ za člen}\}\ i = 1{,}2\dots n\\
&|A_i| = p(n-i)\\
&|A_i \cap A_j| = p(n-k-j)\\
&|A_I| = p(n - \sum_{i\in I} i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(n) &= p(n-1) + p(n-2) + p(n-3) + \dots\\
&\quad - p(n-1-2) - p(n-1-3) - p(n-2-3) - \dots\\
&\quad + p(n-1-2-3) - \dots\\
&= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots
\end{aligned}$$

Franklinova bijekcija:
$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha(m) - \beta(m))p(n-m)$; m - razčlenitve z različnimi členi,
$\alpha(m) =$ število razčlenitev m z liho mnogo različnimi členi,
$\beta(m) =$ število razčlenitev m z sodo mnogo različnimi členi,
Bijekcija

$$\begin{aligned}
\Phi :&\{\text{razčlenitev } m \text{ z liho mnogo različnimi členi}\}(\backslash\{\dots\})\\
&\to \{\text{razčlenitev } m \text{ z sodo mnogo različnimi členi}\}(\backslash\{\dots\}).
\end{aligned}$$

$f(\lambda) = \max\{i : \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}$ - bok,
$g(\lambda) = \lambda_{l(\lambda)}$ - najmanjši člen,

a) $f(\lambda) \geq g(\lambda)$: min $\to$ bok,

b) $f(\lambda) < g(\lambda)$: bok $\to$ min,

a) ne dela (število členov se ohrani),
b) ne dela (2 člena enako dolga),
a) ne dela, ko:
$f(\lambda) = g(\lambda) = l(\lambda)$
$m = k + (k+1) + \dots + (2k-1) = \frac{2k(2k-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}$
$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1}$ (k lih ali sod).
b) ne dela, ko:

$f(\lambda) = g(\lambda) - 1 = l(\lambda)$
$m = (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k) = \cdots = \frac{k(3k+1)}{2}$
$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1}$.
Eulerjev petkotniški izrek:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right)$$
$$\text{oz.} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) = 0.$$

Tukaj smo upoštevali ko vstavimo $-k$: $\frac{-k(-3k-1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2}$ in $p(0) = 0$.

Izrek 1.7.5 („NVI“)**.**
$f, g : B_n \to K$, K komutativni kolobar.

$$f(T) = \sum_{S\subseteq T} g(S)(\forall T \in B_n) \iff g(T) = \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|} f(S)(\forall T \in B_n).$$

Zgled.
$des(\pi) = |\{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}|$
$D(\pi) = \{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}$
$D(1\ 4\ 2\ 6\ 5\ 3) = \{2{,}4{,}5\}$
$f_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) = T\}|$
npr. $n = 8, T = \{1{,}5\}$
$g_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) \subseteq T\}|$
$T = \{t_1, t_2 \ldots t_k\}$
$g_n(T) = \binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{t_2-t_1}\binom{n-t_1-\cdots-t_{k-1}}{t_k} = \binom{n}{t_1, t_2-t_1 \ldots t_k - t_{k-1}, n-t_k}$
$\_ < \_ < \_ < \underline{t_i} \lesseqgtr \_$: zaradi $\subseteq$: tam lahko spust ali pa ne.
// če lastnosti točno določene: težko $(f_n(T))$, če „vsebovano“ $(g_n(T))$: lažje
$g_n(T) = \sum_{S\subseteq T} f_n(S)$

$$\begin{aligned} f_n(T) &= \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T\setminus S|}g_n(S) \\ &= \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T\setminus S|}\binom{n}{s_1, s_2-s_1\ldots n-s_k} \\ &\overset{\text{vaje}}{=} det\left[\binom{n-t_i}{t_{j+1}-t_j}\right]_{i,j=0}^{|T|}. \end{aligned}$$

npr. $n = 8$, $T = \{1,5\}, t_0 = 0, t_{|T|} = n + 1 = 9$

$$f_8(\{1,5\}) = \begin{vmatrix} \binom{8}{1} & \binom{8}{5} & \binom{8}{8} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{7} \\ \binom{3}{-4} & \binom{3}{0} & \binom{3}{3} \end{vmatrix} = 217.$$

Dokaz 1.7.6.

$(\implies)$:

$$\begin{aligned} \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T\setminus S|}f(S) &= \sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T\setminus S|}f(S)\sum_{U\subseteq S}g(U) \\ &= \sum_{U\subseteq T}\left(\sum_{U\subseteq S\subseteq T}(-1)^{|T\setminus S|}\right)g(U) \\ &\overset{k=|S\subseteq U|}{=} \sum_{U\subseteq T}\sum_{k=0}^{|U|}\binom{|T\setminus U|}{k}(-1)^{|T\setminus U|-k}g(U) \\ &= g(T). \end{aligned}$$

Na notranji vsoti uporabimo binomski izrek za -1 in 1 :

$$(1-1)^{|T\setminus S|} = \begin{cases} 1 : U = T \\ 0 : U \subset T \end{cases}$$

1.8 Polinomske enkosti

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

Izrek 1.8.1.

(a) $\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$

(b) $\sum_k (-1)^{n-k} c(n,k)x^k = x^{\underline{n}}$

(c) $\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}} = x^n$

(d) $\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k)x^{\overline{k}} = x^n$

(e) $\sum_k L(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$

(f) $\sum_k (-1)^{n-k} L(n,k)x^{\overline{k}} = x^{\underline{n}}$

Opomba. $K[x] = \{\text{polinomi v } x\}$ vektorski prostor (celo algebra), K komutativen obseg.
$\{x^n\}, \{x^{\underline{n}}\}, \{x^{\overline{n}}\}$ naravne baze.

Dokaz 1.8.2.

(a) Indukcija (na vajah drugače):
$n = 0$: 1=1
$n - 1 \to n$:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= x^{\overline{n-1}}(x + n - 1) \overset{\text{IP}}{=} (x + n - 1) \sum_k c(n-1,k)x^k \\ &= \sum_k c(n-1,k-1)x^k + (n-1) \sum_k c(n-1,k)x^k = \sum_k c(n,k)x^k, \end{aligned}$$

(b) $x \to -x$ v (a),

(c) Preslikava = razdelitev + injekcija,
število preslikav iz $[n]$ v $[k] = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}$, kjer predstavljajo

- k: število blokov,
- $S(n,k)$: razdelimo $[n]$ na k blokov,
- $x^{\underline{k}}$: injekcija $[k] \to [x]$.

Dokazali smo za $x \in \mathbb{N} \implies$ polinoma sta enaka (ujemanje v ∞ točkah).

(e) Z indukcijo DN.

$\pi = 4\ 2\ 5\ 1\ 6\ 3$

$inv(\pi) = 7$

$I(\pi) = \{(1{,}2), (1{,}4), (1{,}6) \dots\}$

$TI(\pi) = (a_1 \dots a_n)$; $a_k = \{(i{,}j) : \pi_i > \pi_j = k\}$ („desna stran“) - tabela inverzij.

$TI(\pi) = (3{,}1{,}3{,}0{,}0{,}0)$

$0 \leq a_i \leq n - i$, a_i: koliko levo od i večjih od i.

Trditev 1.8.3.

$TI : S_n \to [0{,}n-1] \times [0{,}n-2] \times \cdots \times [0{,}0]$ je bijekcija.

Posledica 1.8.4.

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \underline{n!} = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\cdots+q^{n-1}).$$

$\pi = 4\ 1\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5$,

$TI(\pi) = (1, 5, 2, 0, 4, 2, 0, 1, 0)$,

inverz: $9 \to 9\ 8 \to 7\ 9\ 8 \to 7\ 9\ 6\ 8 \to 7\ 9\ 6\ 8\ 5 \to 4\ 7\ 9\ 6\ 8\ 5$
$\to 4\ 7\ 3\ 9\ 6\ 8\ 5 \to 4\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5 \to 4\ 1\ 7\ 3\ 9\ 6\ 2\ 8\ 5$.

Dokaz 1.8.5. trditve.

Skonstruiramo inverz:

$(a_1 \dots a_n),\ 0 \leq a_i \leq n - i$.

Vpisujemo $n, n-1 \dots 1$: i pišemo za a_i elementi.

Dokaz 1.8.6. posledice.

$\sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = n!_q = \underline{n!} = \underline{n}\underline{(n-1)} \dots 1$ - q fakulteta, $\underline{i} = 1 + q + \cdots + q^{i-1}$ - polinom, q-naravno število (q-integer).

$$\begin{aligned} D &= (1+q+\cdots+q^{n-1})(1+q+\cdots+q^{n-2})\dots 1 \\ &= \sum_{0 \leq a_i \leq n-i} q^{a_1} q^{a_2} \dots q^{a_n} \\ &\overset{\text{trditev}}{=} \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)}. \end{aligned}$$

Opomba. $maj(\pi) = \sum_{i \text{ spust } \pi} i$ oz. $\sum_{i \in D(\pi)} i$ - majorski indeks

$maj(4\ 2\ 5\ 1\ 3) = 1 + 3 = 4$

$\sum_{\pi \in S_n} q^{maj(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \underline{n!}$.

Definicija 1.8.7 (q-binomski koeficient)**.**

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}_q = \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}}.$$

$\binom{\underline{n}}{\underline{0}} = \binom{\underline{n}}{\underline{n}} = 1$

$\binom{\underline{n}}{\underline{1}} = \underline{n}$ $\binom{\underline{4}}{\underline{2}} = \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)(1+q)}{(1+q)(1+q)} = (1+q^2)(1+q+q^2)$ $q = 1 : \binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}$.

Trditev 1.8.8.

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = q^{n-k}\binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + \binom{\underline{n-1}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + q^k\binom{\underline{n-1}}{\underline{k}}.$$

Dokaz 1.8.9.

$$\begin{aligned}
&q^{n-1}\frac{\underline{(n-1)!}}{\underline{(k-1)!}\,\underline{(n-k)!}} + \frac{\underline{(n-1)!}}{\underline{(k)!}\,\underline{(n-1-k)!}} \\
&= \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}}(q^{n-k}\underline{k!} + \underline{n-k}) \\
&= \frac{\underline{n!}}{\underline{k!}\,\underline{(n-k)!}} \\
&= \binom{\underline{n}}{\underline{k}},
\end{aligned}$$

kjer je

$$q^{n-k}\underline{k!} + \underline{n-k} = q^{n-k} + \cdots + q^n + 1 + \cdots + q^{n-k-1} = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Posledica 1.8.10. $\binom{\underline{n}}{\underline{k}}$ je polinom v q.

Trditev 1.8.11.

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + q^{i-1}x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\underline{n}}{\underline{k}}x^k.$$

Dokaz 1.8.12. Indukcija:
$n = 0 : 1 = 1$
$n - 1 \to n$:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1+q^{i-1}x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{\underline{k}}x^k\right)\cdot(1+q^{n-1}x)\\
&= \sum_k q^{\binom{k}{2}}\binom{\text{n-1}}{\underline{k}}x^k + \sum_k q^{\binom{k-1}{2}+n-1}\binom{n-1}{\underline{k-1}}x^k\\
&= \sum_k q^{\binom{k}{2}}\left(\binom{n-1}{k} + q^{\binom{k-1}{2}+n-1-\binom{k}{2}}\binom{n-1}{\underline{k-1}}\right)x^k.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo $\binom{k-1}{2} - \binom{k}{2} = -\binom{k-1}{1}$.

$\mathbb{Z}_p, p$ praštevilo končen obseg.

Izrek 1.8.13. Obseg moči $n \in \mathbb{N}$ obstaja $\iff$ $n = p^k$ p praštevilo. Obseg je do izomorfizma natančno določen.
$\mathbb{F}_q$ - oznaka.

Izrek 1.8.14. V $\mathbb{F}_q^n$ je $\binom{n}{\underline{k}}$ k-dimenzionalnih podprostorov.

Primer. $q = 4, n = 4, k = 2 :\ (1+4^2) + (1+4+4^2) = 38.$

Dokaz 1.8.15. Spomnimo se: $[n]$ ima $\binom{n}{k}$ k-podmnožic, štejemo urejene k-terice različnih števil: $k!\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}$.
Štejemo k-terice linearno neodvisnih vektorjev v $\mathbb{F}_q^n$:

$$(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1})X = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1});$$

$q^k - q^i$: vsi v podprostoru brez linearnih kombinacij že vzetih,
$q^n - q^i$: vsi brez linearnih kombinacij že vzetih.
X: število izbir podprostora.

$$X = \frac{q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k\underline{n}\underline{(n-1)}\dots\underline{(n-k+1)}}{q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k\underline{k!}} = \binom{n}{\underline{k}}.$$

Definicija 1.8.16 (q-multinomski koeficient)**.**

$$\binom{a_1+\cdots+a_k}{\underline{a_1},\underline{a_2}\ldots\underline{a_k}} = \frac{\underline{(a_1+\cdots+a_k)!}}{\underline{a_1}!\ldots\underline{a_k}!}$$
$$= \binom{a_1+\cdots+a_k}{\underline{a_1}}\binom{a_2+\cdots+a_k}{\underline{a_2}}\cdots\binom{a_k}{\underline{a_k}}.$$

$\implies$ je polinom (produkt polinomov).

$x_1\ldots x_n$ permutacija multimnožice $\{1^{a_1},2^{a_2}\ldots n^{a_n}\}$
inverzija: $(i,j): i<j, x_i>x_j$
inv: število inverzij
$inv(1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 3)=2$.

Izrek 1.8.17. $M=\{1^{a_1},2^{a_2}\ldots n^{a_n}\}$

$$\sum_{\pi\in S(M)} q^{inv(\pi)} = \binom{a_1+\cdots+a_n}{\underline{a_1}\cdots\underline{a_n}}.$$

Primer.
$q=1: |S(M)|=\binom{a_1+\cdots+a_n}{a_1\ldots a_n}$
$a_1=\cdots=a_n=1: \sum_{\pi\in S_n} q^{inv(\pi)}=n!$ - posplošitev formul za multinomske koeficiente in Stirlingova števila 1. vrste.

Dokaz 1.8.18.

$$\sum_{\pi\in S(M)} q^{inv(\pi)}\underline{a_1}!\ldots\underline{a_n}! = \underline{(a_1+\cdots+a_n)!}$$
$$\sum_{\pi_0\in S(M)} q^{inv(\pi_0)}\cdot\sum_{\pi_1\in S_{a_1}} q^{inv(\pi_1)}\cdots\sum_{\pi_n\in S_{a_n}} q^{inv(\pi_n)} = \sum_{\pi\in S_{a_1+\cdots+a_n}} q^{inv(\pi)}.$$

Iščemo bijekcijo

$$\Phi: (\pi_0\pi_1\ldots\pi_n)\to\pi$$
$$S(M)S_{a_1}\ldots S_{a_n}\mapsto S_{a_1+\cdots+a_n}.$$

$M=\{1^4,2^2,3^3\}$
$(1\ 2\ 2\ 1\ 3\ 1\ 3\ 3\ 1, 2\ 4\ 1\ 3, 2\ 1, 1\ 3\ 2)$

$\mapsto$ 2 6 5 4 7 1 9 8 3.
V π_0 enke spremenimo v $1 \dots a_1$ v vrstnem redu, ki ga določa π_1, v π_0 dvojke spremenimo v $a_1 + 1 \dots a_2$ v vrstnem redu, ki ga določa π_2, itn.
$inv(\pi_0) + \cdots + inv(\pi_n) = inv(\Phi(\pi_0 \dots \pi_n))$.
Vsaka inverzija $\Phi(\pi_0 \dots \pi_n)$ prihaja bodisi od inverzije π_i bodisi od inverzije π_0 (glede na „indeks“ v π_0) $\implies$ vsota enaka.

Poglavje 2

Formalne potenčne vrste

2.1 Uvod

$\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$

$\sum_n S(n,k)x^n$ neskončna vsota.

V analizi: potenčne vrste:

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Konvergira za $|x| < R$ - konvergenčni polmer:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{če obstaja}}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, \infty].$$

Primer. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n : R = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} : R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n : R = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ - definirana samo v 0, obe z vrednostjo 1 tam.

$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} x \neq 0 \\ 0 \; x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F^{(n)}(0) = 0 \; \forall n \geq 0 \implies F(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$

Potenčne vrste niso „najboljše“ za študij zaporedij.

2.2 Formalne potenčne vrste

K komutativni obseg s karakteristiko $0 : 1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0\ \forall n \geq 1$.
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\frac{1}{n!}$ je definirano
$K[[x]] = \{(a_n)_n : a_n \in K\} = K^{\mathbb{N}}$ - množica formalnih potenčnih vrst (FPV) = zaporedje
$K[x] = \{(a_n)_n : a_n \in K, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ - množica polinomov.
V $K[[x]]$ vpeljemo operacije:

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n,$$

$$\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n,$$

$((a_n)_n \cdot (b_n)_n) = (c_n)_n;\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ - konvolucijsko množenje.

$K[[x]]$ algebra formalnih potenčnih vrst: komutativna, $(1,0,0,0\dots)$ enota za množenje: $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \delta_{n-k,0} = a_n$.
Oznake:

$(a_n)_n \leftrightarrow \sum_n a_n x^n$: ni vsota (samo oznaka), x je ločilo (ni spremenljivka, ne „vstavljamo“),

$$(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \dots,$$

$$1 + 0x + 0x^2 + \cdots = 1,$$

$[x^n]F(x) := a_n$ - „koeficient pred x^n“,

$$F(0) := [x^0]F(x).$$

Trditev 2.2.1. $F(x)$ ima inverz $\iff F(0) \neq 0$.

Dokaz 2.2.2.
$(\implies)$:

$$F(x)G(x) = 1$$
$$F(0)G(0) = 1 \implies F(0) = 0$$

$(\Longleftarrow):$

$$\begin{aligned}
&F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots, a_0 \neq 0\\
&G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\\
&F(x)G(x) = 1\\
&a_0b_0 = 1 \implies b_0 = \frac{1}{a_0}\\
&a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \implies b_1 = \frac{-a_1b_0}{a_0}\\
&a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \implies b_2 = \frac{-a_1b_1 - a_2b_0}{a_0}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Opomba. K komutativen kolobar s karakteristiko 0.
$F(x)$ ima inverz $\iff$ $F(0)$ ima inverz v K.

$v(F(x)) = \begin{cases} \min n : [x^n]F(x) \neq 0 & F(x) \neq 0 \\ \infty & F(x) = 0 \end{cases}$ - valuacija.
$v(F(x)G(x)) = v(F(x))v(G(x))$ ($\implies$ ni deliteljev niča)
$v(F(X) + G(x)) \geq \min\{v(F(x)), v(G(x))\}$
$v(\lambda F(x)) = \begin{cases} v(F(x)) \; \lambda \neq 0 \\ \infty \; \lambda = 0 \end{cases}$
$d(F(x), G(x)) = 2^{-v(F(x)-G(x))}$ - metrika
$d(F(x), G(x)) = 2^{-k} \iff [x^n]F(x) = [x^n]G(x) \; \forall n \leq k.$

Trditev 2.2.3. $(K[[x]], d)$ je poln metrični prostor.

Dokaz 2.2.4.

$$\begin{aligned} & d \geq 0, d = 0 \iff F = G \\ & d(F(x), G(x)) = d(G(x), F(x)) \\ d(F(x), H(x)) &= 2^{-v(F(x)-H(x))} \\ &= 2^{-v(F(x)-G(x)+G(x)-H(x))} \\ &\leq \max\{2^{-v(F(x)-G(x))}, 2^{-v(G(x)-H(x))}\} \\ &= \max\{d(F(x), G(x)), d(G(x), H(x))\} \\ &\leq d(F(x), G(x)) + d(G(x), H(x)). \end{aligned}$$

$F_m(x) = \sum_n a_n^{(m)} x^n$ Cauchyjevo zaporedje
$\forall k \exists M: \ M_1, M_2 \geq M \implies d(F_{M_1}(x), F_{M_2}(x)) < 2^{-k}$
oz. $[x^n]F_{M_1}(x) = [x^n]F_{M_2}(x) \ \forall n \leq k$.
Torej za vsak $[x^n]F_n(x)$ konstantni od nekod naprej in enaki npr. a_n.
$F(x) = \sum_n a_n x^n$ je limita $(F_n(x))_m$.

Primer.
$(\sum_n x^n)(1-x) = 1$
$c_n = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \ \forall n \geq 1$
$c_0 = 1$. Torej $\sum_n x^n = \frac{1}{1-x} \implies 1-x$ inverz od $\sum_n x^n$.
$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1}{1-x}$.

Opomba. $(F_m(x))_m$ konvergira v $K[[x]]$, če je $([x^n]F_m(x))_m$ od nekod naprej konstantno, npr a_n; v tem primeru je $\lim_{m\to\infty} F_m(x) = \sum_n a_n x^n$.

Odvajanje:
$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.
Za $K[[x]]$:
$[x^n]F'(x) := (n+1)[x^{n+1}]F(x)$
$(\sum_n a_n x^n)' = F(x)'G(x) + F(x)G(x)'$.
Dokaz: DN.
$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F(x)'G(x) - F(x)G(x)'}{G(x)^2}$; $G(0) \neq 0$

Primer.

$F'(x) = F(x)$

$(n+1)a_{n+1} = a_n$

$na_n = a_{n-1}$

a_0 poljubno

$a_n = \frac{a_0}{n!}$.

$e^{\lambda x} := \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} x^n$

$e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = e^{(\lambda+\mu)x}$

$L = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} = D.$

Binomski izrek v K: enakost velja.

$F'(x) = \frac{1}{1-x},\ F(0) = 0$

$(n+1)a_{n+1} = 1$

$a_n = \frac{a_0}{n}$

$\log \frac{1}{1-x} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^{\log \frac{1}{1-x}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-x}.$

Najprej definicija kompozituma, dokaz enakosti kasneje.

Bolj splošno:

$F(0) = 1$

$\log(F(x)G(x)) = \log F(x) + \log G(x)$: DN.

Binomska vrsta:

$\lambda \in K, n \in \mathbb{N},\ \binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$ posplošen binomski koeficient.

$B_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n$

$n \in \mathbb{N}:\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = (1+x)^n.$

Trditev 2.2.5.

$B_\lambda(x) \cdot B_\mu(x) = B_{\lambda+\mu}(x).$

Dokaz 2.2.6.

$D = \frac{(\lambda+\mu)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{\underline{k}}}{k!} \frac{\mu^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} = L$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{\underline{k}} \mu^{\underline{n-k}} = (\lambda+\mu)^{\underline{n}}.$

Indukcija: DN.

$B_\lambda(x) := (1+x)^\lambda$

$n \in \mathbb{N}: \ B_n(x) \cdot B_{-n}(x) = 1$

$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n}$

$(1+x)^{-n} = \sum_k \binom{-n}{k} x^n$

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k(n+k-1)\dots n}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^{-k} &= \frac{1}{1-x} \cdots \frac{1}{1-x}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n_i \geq 0, \sum n_i = k} 1 \right) x^n\\ &= \sum_n (\text{število šibkih kompozicij } n \text{ s } k \text{ členi}) x^n\\ &= \sum_n \binom{n+k-1}{k-1} x^n\end{aligned}$$

$F(x)G(x)H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1,n_2,n_3 \geq 0, n_1+n_2+n_3=n} a_{n_1} b_{n_2} c_{n_3} \right) x^n$

$\binom{-1}{n} = (-1)^n \binom{n}{0} = (-1)^n$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n$

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \binom{2n-2}{n-1} \ n \geq 1.\end{aligned}$$

2.3 Kompozitum

$F(x) = \sum_n a_n x^n$
$G(x) = \sum_n b_n x^n$
$F \circ G(x) = F(G(x)) =?$
$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 G(x) + a_2 G^2(x) + \cdots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n G^n(x)$.
Kdaj ta limita obstaja?

Trditev 2.3.1. $(F_n(x))_n$.
$\lim_{N\to\infty} F_n(x)$ obstaja $\iff$ $\lim_{n\to\infty} v\left(F_n(x)\right) = \infty$.

Dokaz 2.3.2.
$(\Longrightarrow)$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right)_N \text{ je Cauchyjevo :}$$
$$\forall x\ \exists N_0\ \forall N,M \geq N_0 : d\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x), \sum_{m=0}^{M} F_m(x)\right) \leq 2^{-k}$$
$$M = N-1 :\ v\left(F_N(x)\right) \geq k.$$

$(\Longleftarrow)$:

$$\begin{aligned} &\forall k \exists N_0\ \forall N \geq N_0 : v\left(F_n(x)\right) \geq k \text{ (predpostavka)} \\ N > M \geq N_0 : &d\left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x), \sum_{m=0}^{M} F_m(x)\right) \\ &= 2^{-v(F_{M+1}(x)+\cdots+F_N(x))} \\ &\leq \max\{2^{-v(F_{M+1}(x))} \ldots 2^{-v(F_N(x))}\} \\ &\leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \circ G(x) \text{ obstaja} &\iff \lim_{n\to\infty} v\left(a_n G^n(x)\right) = \infty \\ &\iff v(G(x)) > 0 \text{ ali } a_n = 0 \text{ od nekod naprej} \\ &\iff F \text{ polinom ali } G(0) = 0. \end{aligned}$$

Velja $v\left(a_n G^n(x)\right) = \begin{cases} n \cdot v(G(x)) & a_n \neq 0 \\ \infty & a_n = 0 \end{cases}$

Primer.
$F(x) = x^2 - 3x + 1$
$G(x) = e^x$
$(F \circ G)(x) = e^{2x} - 3e^x + 1$ - ok
$F(x) = G(x) = e^x$ - ni ok
$F(x) = e^x$
$G(x) = e^x - 1$
$e^{e^x - 1}$ - ok.

Opomba.
$F(x) = \sum_n a_n x^n$
$G(x) = \sum_n b_n x^n$ $b_0 = 0$
$a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + a_2(b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2 + \dots$
Za izračun koeficienta pri x^5 izračunamo končno vsoto.
Enota za kompozitum: $x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$
$F \circ x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = F = x \circ F = 1 \cdot (a_0 + a_1 x + \dots)$

Izrek 2.3.3.
$F \in K[[x]]$ ima inverz za kompozitum $\iff$ $F(x) = a_0 + a_1 x;\ a_1 \neq 0$ ali $v(F(x)) = 1$.

Primer.
$x - x^2$ ima inverz,
$e^x - 1$ ima inverz,
x^2 nima inverza.

$F^{<-1>}$ - inverz za kompozitum.

Dokaz 2.3.4.

$(\Longrightarrow)$:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_n b_n x^n \text{ inverz od } F$$

$$a_0 = 0 \overset{?}{\iff} b_0 = 0$$

$$(\Longleftarrow) : F \circ G = a_0 + a_1(b_1 x + \dots) + a_2(\dots)^2 + \dots$$

$$[x^0]F(G(x)) = a_0 = [x^0]x = 0$$

$(\Longrightarrow)$: isto?

$$1. a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$$

$$\Longrightarrow F,G \text{ polinoma, } deg(F \circ g) = deg(F) \cdot deg(G) = 1$$

$$\Longrightarrow deg(F) = deg(G) = 1$$

$$2. a_0 = b_0 = 0$$

$$v(F \circ G) = v(F) \cdot v(G) = 1$$

$$\Longrightarrow v(F) = v(G) = 1$$

$$\Longrightarrow F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots \ a_1 \neq 0.$$

($\Longleftarrow$):

$$F(x) = a_0 + a_1 x \; a_1 \neq 0$$

$$a_0 + a_1 y = x \implies y = \dots$$

$$F^{<-1>}(x) = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{x}{a_1}$$

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_1 \neq 0$$

levi inverz: $G_1(x) = b_0 + b_1 x + \dots$

$$G_1 \circ F = x$$

$$b_0 + b_1(a_1 x + \dots) + b_2(a_1 x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : b_0 = 0$$

$$[x^1] : a_1 b_1 = 0 \implies b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : b_1 a_2 + b_1 a_1^2 = 0 \implies b_2 = -\frac{b_1 a_2}{a_1^2}$$

$$[x^3] : b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3 = 0 \implies b_3 = \dots \frac{\cdot\cdot}{a_1^3}$$

$$[x^n] : \dots + b_n a_1^n = 0 \; n \geq 1$$

$b_n = \dots$ rekurzivno

desni inverz: $G_2(x) = c_0 + c_1 x + \dots, \; c_0 = 0$

$$F \circ G_2 = x$$

$$a_1(c_1 x + \dots) + a_2(c_1 x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : 0 = 0$$

$$[x^1] : a_1 c_1 = 1 \implies c_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : a_1 c_2 + a_2 c_1^2 = 0 \implies c_2 = -\frac{a_2 c_1^2}{a_1}$$

$$[x^3] : a_1 c_3 + 2 a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3 = 0 \implies c_3 = \frac{\cdot\cdot}{a_1}$$

$$[x^n] : a_1 c_n + \dots = 0 \implies c_n = \frac{\cdot\cdot}{a_1}.$$

■

$(G_1 \circ F) \circ G_2 = G_2$
$G_1 \circ (F \circ G_2) = G_1$.
Iz asociativnosti (ki je nismo dokazali) sledi $G_1 = G_2 = F^{<-1>}$.

Trditev 2.3.5.
$F_n(0) = 0$
$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1 + F_n(x))$ obstaja $\iff$ $\lim_{n\to\infty} v(F_n(x)) = \infty$.
Dokaz DN.

Primer.
$(1 + x)(1 + x)(1 + x) \dots$ - ni ok,
$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots$ - ok.

Opomba.
$K[[x]]$
$K[[x,y]] = K^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$
$\sum a_{n,m}x^n y^m$ bivariantna potenčna vrsta.
$\sum_{k,m} \binom{n}{k} x^k y^m = \sum_m (1 + x)^n y^n = \frac{1}{1-(1+x)y}$.
$K[[x_1, x_2 \dots]]$
$x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3 + \dots$ - ok
$x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$ - ni ok.

2.4 Reševanje linearnih rekurzivnih enačb s konstantnimi koeficienti

Primer.

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $n \geq 1, a_0 = 1$
$1, 3, 7, 15 \dots$
$F(x) = \sum_n a_n x^n$ rodovna funkcija (angl. generating function) zapo-

redja.

$$
\begin{aligned}
F(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1}+1)x^n = 2xF(x) + \frac{x}{1-x} \\
F(x)(1-2x) &= 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} \\
F(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.
\end{aligned}
$$

Ekvivalentno:

$$
\begin{aligned}
& a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=1}^{\infty} \\
& F(x) - 1 = \frac{x}{1-x} + 2xF(x) \\
& F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)} \\
& / \cdot (1-x), x = 1 \\
& \frac{1}{-1} = A \implies A = -1 \\
& / \cdot (1-2x), x = \frac{1}{2} \\
& B = 2
\end{aligned}
$$

$a_n = -1 + 2^{n+1}$.

(b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ n \geq 2, F_0 = F_1 = 1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=2}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
& F(x) = \sum_n F_n x^n \\
& F(x) - 1 - x = x(F(x) - 1) + x^2 F(x) \\
& F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-y_1x)(1-y_2x)}.
\end{aligned}
$$

Ničli $1 - x - x^2$ sta $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}$

y_1, y_2 sta ničli $y^2 - y - 1$ (obrnjen polinom), torej $x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

V splošnem:

$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_d x^d;\ c_d \neq 0$

ima ničle $\lambda_1 \ldots \lambda_d$, ima
$p^{\mathrm{obr}}(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \cdots + x_d$ (obrnjeni polinom) ničle $\frac{1}{\lambda_1} \ldots \frac{1}{\lambda_d}$:

$$\begin{aligned} p^{\mathrm{obr}}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) &= c_0 \cdot \frac{1}{\lambda_i^d} + c_1 \cdot \frac{1}{\lambda_i^{d-1}} + \cdots + c_d \\ &= \frac{c_0 + c_1 \lambda_i + \cdots + c_d \lambda_i^d}{\lambda_i^d} = 0. \end{aligned}$$