Kombinatorika 2 - zapiski s predavanj prof. Konvalinke

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Kazalo

1 Osnove **1**

1.1 Kako štejemo? 1

1.2 Osnovne Kombinatorične strukture 3

1.3 Osnovna načela preštevanja 6

1.4 Binomski koeficienti 8

Poglavje 1

Osnove

1.1 Kako štejemo?

S končna množica, $|S| = ?$

Pogosto $S_n, n \in \mathbb{N}$.

Preštevalno zaporedje $|S_0|, |S_1|, |S_2| \dots$

Kaj je odgovor?

(1) Formula.

$[n] = \{1, 2 \dots n\}$.

$S_n = 2^{[n]} = P([n])$.

$|S_n| = 2^n$.

$S_n = \{\text{permutacije n elementov}\}$.

$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ „n fakulteta“ „n factorial“.

$S_n = \{\text{kompozicije n s členi 1 ali 2}\}$, npr. $5 = 1+2+1$.

$|S_5| = 8$.

$1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots$

$|S_n| = F_n$ - Fibonaccijevo zaporedje.

(2) Asimptotska formula.

$|S_n| \sim a_n$ (to pomeni $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|S_n|} = 1$).

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ - Stirlingova formula.

$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

(3) Z rekurzijo.

$S_n = 2^{[n]}$.

$a_n = |S_n|, a_n = 2a_{n-1};\ n \geq 1,\ a_0 = 1$.

$S_n = \{$kompozicije s členi 1 ali 2$\}$.

$S_n = F_n, F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1$.

F_{n-1} - kompozicije, ki se končajo z 1, F_{n-2} - končajo z 2.

(4) Z rodovno funkcijo (generating function).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_n a_nx^n$ običajna (ordinary) rodovna funkcija - ORF.

$a_n = 2^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^nx^n = \frac{1}{1-2x}$.

$\sum_n F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$.

$\sum_n n!x^n$ //.

$\sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$ eksponentna rodovna funkcija.

$\sum_n 2^n\frac{x^n}{n!} = e^{2x}$.

$\sum_n \frac{n!}{n!}x^n = \frac{1}{1-x}$.

(4) je najboljši način, da poznamo zaporedje.

- Rodovna funkcija je velikokrat „lepa“, tudi če ni lepe formule za zaporedje.

  $i_n \ldots$ # involucij z n elementi ($\pi^2 = \mathrm{id}$).

  ni enostavnejše formule za i_n.

  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{n!}x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}$

- Do rodovne funkcije lahko pogosto pridemo neposredno s kombinatoričnim premislekom.

  Involucija = permutacija s cikli dolžine 1 ali 2.

  $\sum F_nx^n = \frac{1}{1-x-x^2}$; x - cikli dolžine 1, x^2 - cikli dolžine 2.

- V rodovni funkciji so „skrite“ (1)-(3).

1.2 Osnovne Kombinatorične strukture

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$.

$[n] = \{1, 2 \dots n\}$.

$2^A = P(A) = \{B \subseteq A\}$.

$\binom{A}{k} = \{B \subseteq A : |B| = k\}$ „A nad k“ (angl. „A choose k“).

$\binom{[4]}{2} = \{\{1,2\}, \{1,3\} \dots \{3,4\}\}$.

$Y^X = \{f : X \to Y\}$.

Statistika na množici S je preslikava $S \to \mathbb{N}$.

$S = 2^A$.

Moč je statistika.

S končna množica, f statistika na S.

Pogosto gledamo polinom $\sum_{s \in S} x^{f(s)}$ (enumeration).

$|.|$ na $2^{[3]} : 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3$.

$S_n = \{\text{permutacije } [n]\} = \{f : [n] \to [n] : f \text{ bijektivna}\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ - dvovrstična notacija.

2 1 3 - enovrstična notacija.

(1 2)~~(3)~~ - produkt disjunktnih ciklov.

$i, \pi(i), \pi^2(i) \dots$

Gotovo $\exists j_1 < j_2 : \pi^{j_1}(i) = \pi^{j_2}(i) \implies i = \pi^j(i);\ j > 0$.

$(i\ \pi(i) \dots \pi^{j-1}(i))$ cikel.

38241765 = (1 3 2 8 5)(4)(6 7) = (4)(2 8 5 1 3)(7 6).

Množenje permutacij: kompozicije.

Nekomutativno za $n > 2$.

Disjunktni cikli komutirajo.

Zapis: enoličen do vrstnega reda ciklov in ciklične ureditve ciklov.

Cikel dolžine 1 = negibna točka.

Cikel dolžine 2 = transpozicija.

$(S_n \cdot)$ simetrična grupa.

$e = id = 1\ 2 \dots n$.

π^{-1} inverz (kot preslikava).

$3\ 8\ 2\ 4\ 1\ 7\ 6\ 5^{-1} = 5\ 3\ 1\ 4\ 8\ 7\ 6\ 2$.

$3\ 1\ 4\ 2 \cdot 4\ 2\ 3\ 1 = 2\ 1\ 4\ 3$ - množimo z desne.

Statistika: # ciklov = $c(\pi)$ (štejemo tudi cikle dolžine 1).

$n = 3 : x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$.

$\sum_{\pi \in S_n} x^{c(\pi)} = \sum_k |\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| x^k$.

$|\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| =: c(n,k)$ - Stirlingovo število 1. vrste.

$\sum_{B \subseteq [n]} x^{|B|} = \sum_k |\binom{[n]}{k}| x^k$.

$|\binom{[n]}{k}| =: \binom{n}{k}$ - binomski koeficient.

Inverzija $\pi \in S_n$ je (i,j), da je za $i < j$ $\pi_i > \pi_j$.

$inv(\pi) = \#$ inverzij π.

$inv(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 7$.

$0 \leq inv(\pi) \leq \binom{n}{2}$.

Signatura permutacije: $(-1)^{inv(\pi)}$.

$sg\pi = 1$ - soda permutacija: produkt sodo mnogo transpozicij.

$sg\pi = -1$ - liha permutacija: produkt liho mnogo transpozicij.

$detA = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{inv(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}$.

Izraz brez $(-1)^{inv(\pi)}$: permanenta.

$n = 3 :$

$1 + 2x + 2x^2 + x^3 = 1 + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 = (1+x)(1+x^2)$.

$\sum_{\pi in S_n} x^{inv(\pi)} = 1 \cdot (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{n-1})$ - kasneje.

permutacij v S_n s k inverzijami: ni standardne oznake.

spust/padec (descent) $i : \pi_i > \pi_{i+1}$.

$des(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 3$.

$0 \leq des(\pi) \leq n - 1$.

permutacij v S_n s $k-1$ spusti = $A(n,k)$ - Eulersko število ($k-1$ iz zgodovinskih razlogov).

$\sum_k A(n,k) x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{1+des(\pi)} = A_n(x)$ - eulerski polinom.

$n = 3 :$

$x + 4x^2 + x^3$.

razdelitev/razbitje (angl. set partition) A je $\{B_1, B_2 \ldots B_n\}, davelja :$

- $B_i \neq \emptyset\ i = 1 \ldots k$,

- $B_i \cap B_j = \emptyset \; 1 \leq i < j \leq k$,
- $\cup_{i=1}^k B_i = A$.

B_i: bloki razdelitve,
blokov,
razdelitev $[n]$ s k bloki $= S(n{,}k)$ - Stirlingovo število druge vrste.
$A = [3] \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1{,}2\},\{3\}\}\dots\{\{1{,}2{,}3\}\}$.
$x + 3x^2 + x^3$.
$S(4{,}2) = 4 + 3 = 7$.
Kompozicija # n je $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_l), \lambda_i > 0$ člen kompozicije, $\lambda_i \in \mathbb{N}$,
$\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$.
$l(\lambda)$ # členov - dolžina.
$\lambda \models n$ - λ je kompozicija n.
Razčlenitev # n je $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_l), \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{N}$.
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l, \sum_{i=1}^l = n$
(angl. integer partition).
$p(n)$ - # razčlenitev n.
$p_k(n)$ - # razčlenitev n s k členi.
$n = 4:$
$4, 31, 22, 13, 211, 121, 112, 1111$ - 8 kompozicij.
$4, 31, 22, 221, 1111$ - 5 razčlenitev.
$p(4) = 5, p_2(4) = 2$.
$B(n) = \sum_k S(n{,}k)$ - # razčlenitev $[n]$, Bellovo število.
$B(3) = 5$.
$L(n{,}k)$ - razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov.
$L(4{,}2) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ - Lahovo število.
$E_n = \#$ alternirajočih permutacij v S_n - Eulerjevo število (Euler number).
$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 \dots$
Primerjaj: eulerska števila (eulerian number).
$1, 1, 1, 2, 5$.
Poti:

npr. poti od (0,0) do (n,m) s korakom (1,0) (vzhod) in (0,1) (sever);
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$;
npr. poti od (0,0) do $(2n,0)$ s korakoma (1,1) in $(1,-1)$, nikoli pod x osjo - Dyckove poti;
$c_n = \#$ Dyckovih poti dolžine n (konec v $(2n,0)$) - Catalanova števila.
$1,1,2,5,14,42\ldots$
Drevesa (povezani aciklični grafi).
\# označenih dreves na n vozliščih.
Cayleyev izrek: n^{n-2}.
Ravninska drevesa.
(Vrstni red pomemben).
Dvojiška drevesa: vsako vozlišče ima 2 ali 0 naslednikov.

1.3 Osnovna načela preštevanja

Načelo vsote: $A \cap B = \emptyset \implies |A \cap B| = |A| + |B|$.
$i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.
Načelo produkta: $|A \times B| = |A| \cdot |B|, |\prod_{i=1}^n A_i| = \prod_{i=1}^n |A_i|$.
Kombinatorično:

> 2 možnosti, izberemo eno ali drugo (ne pa obe) $\implies$ # načinov je vsota # načinov,
>
> dvakrat izbiramo, izbiri sta neodvisni $\implies$ # načinov je produkt # načinov.

Trditev 1.3.1. $|2^A| = 2^{|A|}$.

Dokaz 1.3.2. Za vsak element se odločimo, ali ga damo v podmnožico ali ne. 2 izbiri, izbiramo $|A|$-krat, izbire so neodvisne $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{|A|}$.
$\phi : 2^A \to \{0,1\}^{|A|}, A = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$.
$$\phi(B) = (\epsilon_1 \ldots \epsilon_n), \epsilon_i = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$\psi : \{0{,}1\}^{|A|} \to 2^A$.
$\psi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = \{a_i : \epsilon_i = 1\}$.
$\psi \circ \phi, \phi \circ \psi$ identiteti.
$|\{0{,}1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$. ■

Trditev 1.3.3.

1. $|K^N| = |K|^{|N|}$.

2. $|\{f \in K^n \text{ injektivna}\}| = |K|(|K|-1)\dots(|K|-|N|+1)$.

3. $|S_n| = n(n-1)\dots 1 = n!$.

oznake:
$n^{\underline{k}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$: n na k padajoče.
$n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1)$: n na k naraščajoče.

Opomba. Pri 2. in 3. smo uporabili varianto načela produkta: izbire sicer niso neodvisne, je pa neodvisno število izbir.

Dirichletov princip (pigeon-hole principle):
$\phi : X \to Y$ injektivna $\implies |X| \le |Y|$.
Če damo n kroglic v k škatel, $n > k$, sta v vsaj eni škatli vsaj 2 kroglici.

Primer.

(1) n ljudi, med njimi sta dva, ki poznata enako mnogo ljudi.
$X =$ljudje, $f = \#$ znanstev.
n kroglic, n škatel, ampak škatli 0 in $n-1$ ne moreta biti obe neprazni.

(2) $X \subseteq [2n], |X| = n+1$.
Obstajata $x{,}y \in X, x \neq y, x|y$.
$x = 2^k \cdot l, k \geq 0, k$ lih.
$Y = \{i \in [2n] \text{ liho}\}$.
$x \mapsto l$.

1.4 Binomski koeficienti

$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$ = število k-elementnih podmnoživ v $[n]$ = število izbir k elementov izmed n elementov.
$\binom{4}{2} = 6, \binom{5}{0} = 1, \binom{8}{-2} = 0, \binom{8}{9} = 0.$
$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n.$
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$
$\phi : \binom{[n]}{n-k} \to \binom{[n]}{k}.$
$\phi(A) = A^c.$
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$
$\binom{n-1}{k-1}$: izberemo n.
$\binom{n-1}{k}$: ne izberemo n-ja.
Pascalov trikotnik:

$n=0$											
$n=1$						1					
$n=2$					1		1				
$n=3$				1		2		1			
$n=4$			1		3		3		1		
$n=5$		1		4		6		4		1	
	1		5		10		10		5		1

Trditev 1.4.1. $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{n!(n-k)!} & 0 \leq k \leq 0 \\ 0 & k > n \end{cases}$

Dokaz 1.4.2. Izberemo 1 element na n načinov, 2 na $n-1 \cdots \implies n^{\underline{k}}$ načinov, vsak izbor smo šteli $k!$-krat.
Ali: preštejemo urejene izbire k različnih elementov iz $[n]$;
$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} \cdot k!$.
$\binom{n}{k}$: najprej izberemo k elementov.
k: nato jih uredimo. ■

Izrek 1.4.3 (Binomski izrek). $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$;
$a,b \in K$ komutativni kolobar, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz 1.4.4.

D1. Indukcija po n:

$n = 0$: $1 = 1$

$n-1 \to n$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \\
&\overset{\text{IP}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}(a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k}^{n} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

D2. $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ DN.

D3. $(a+b)\dots(a+b) = \sum_{\text{izbira } a \text{ ali } b}$ produkt izbranih $=$
$= \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
a izberemo k-krat.

Izberemo k oklepajev, pri katerih izberemo a.

$\blacksquare$

$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$.
$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.
Izbori: n kroglic, k izberemo.

	s ponavljanjem	brez ponavljanja	
vrstni red pomemben	n^k	$n^{\underline{k}}$	variacije
ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	kombinacije

$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.

$j_1 = i_1, j_2 = i_2 + 1 \ldots j_k = i_k + k - 1$.

$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n + k - 1$.

Trditev 1.4.5. Število kompozicij n je 2^{n-1} $(n \geq 1)$, število kompozicij s k členi je $\binom{n-1}{k-1}$ $(n \geq 1)$.

Dokaz 1.4.6. n kroglic $\circ | \circ \circ \circ | \circ \circ - 6 = 1 + 3 + 2$.

$k - 1$ pregrad, $n - 1$ mest za pregrade. ■