

# **Kombinatorika 2 - zapiski s predavanj prof. Konvalinke**

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Osnove</b>	<b>1</b>
1.1	Kako štejemo? . . . . .	1
1.2	Osnovne Kombinatorične strukture . . . . .	3
1.3	Osnovna načela preštevanja . . . . .	6
1.4	Binomski koeficienti . . . . .	8
1.5	Dvanajstera pot . . . . .	12
1.6	Rekurzije . . . . .	12
1.7	Načelo vključitev in izključitev (NVI) . . . . .	13
1.8	Polinomske enkosti . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Formalne potenčne vrste</b>	<b>26</b>
2.1	Uvod . . . . .	26
2.2	Formalne potenčne vrste . . . . .	27
2.3	Kompozitum . . . . .	32
2.4	Reševanje linearnih rekurzivnih enačb s konstantnimi koeficienti	36
2.5	Nadaljevanje uporabe običajnih rodovnih funkcij . . . . .	40
2.6	Uporaba eksponentnih rodovnih funkcij . . . . .	46
2.7	Algebraične rodovne funkcije . . . . .	50
2.8	Eulerjeva in eulerska števila . . . . .	54
2.9	Izračun povprečij in variance . . . . .	56
2.10	Lagrangeeva inverzija . . . . .	57
2.11	Asimptotika koeficientov . . . . .	60

<b>kratica</b>	izraz
<b>NSTE</b>	naslednje trditve so ekvivalentne
<b>orf</b>	običajna rodovna funkcija
<b>erf</b>	eksponentna rodovna funkcija
<b>fp</b>	formalni polinom
<b>fpv</b>	formalna potenčna vrsta

# Poglavje 1

## Osnove

### 1.1 Kako štejemo?

$S$  končna množica,  $|S| = ?$

Pogosto  $S_n, n \in \mathbb{N}$ .

Preštevalno zaporedje  $|S_0|, |S_1|, |S_2| \dots$

Kaj je odgovor?

(1) Formula.

$$[n] = \{1, 2 \dots n\}.$$

$$S_n = 2^{[n]} = P([n]).$$

$$|S_n| = 2^n.$$

$$S_n = \{\text{permutacije } n \text{ elementov}\}.$$

$$|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n \text{ „}n \text{ fakulteta“ „}n \text{ factorial“}.$$

$$S_n = \{\text{kompozicije } n \text{ s členi } 1 \text{ ali } 2\}, \text{ npr. } 5 = 1+2+1.$$

$$|S_5| = 8.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8 \dots$$

$$|S_n| = F_n - \text{Fibonaccijevo zaporedje.}$$

(2) Asimptotska formula.

$$|S_n| \sim a_n \text{ (to pomeni } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{|S_n|} = 1).$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  - Stirlingova formula.

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

(3) Z rekurzijo.

$$S_n = 2^{[n]}.$$

$$a_n = |S_n|, a_n = 2a_{n-1}; \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

$$S_n = \{\text{kompozicije s členi 1 ali 2}\}.$$

$$S_n = F_n, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad n \geq 2, \quad F_0 = F_1 = 1.$$

$F_{n-1}$  - kompozicije, ki se končajo z 1,  $F_{n-2}$  - končajo z 2.

(4) Z rodovno funkcijo (generating function).

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_n a_n x^n \text{ običajna (ordinary)}$$

rodovna funkcija - ORF.

$$a_n = 2^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}.$$

$$\sum_n F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

$$\sum_n n! x^n //.$$

$\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  eksponentna rodovna funkcija.

$$\sum_n 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}.$$

$$\sum_n \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(4) je najboljši način, da poznamo zaporedje.

- Rodovna funkcija je velikokrat „lepa“, tudi če ni lepe formule za zaporedje.

$i_n \dots \#$  involucij z  $n$  elementi ( $\pi^2 = \text{id}$ ).

ni enostavnejše formule za  $i_n$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{n!} x^n = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

- Do rodovne funkcije lahko pogosto pridemo neposredno s kombinatoričnim premislekom.

Involucija = permutacija s cikli dolžine 1 ali 2.

$$\sum F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}; \quad x - \text{cikli dolžine 1, } x^2 - \text{cikli dolžine 2.}$$

- V rodovni funkciji so „skrite“ (1)-(3).

## 1.2 Osnovne Kombinatorične strukture

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$2^A = P(A) = \{B \subseteq A\}.$$

$$\binom{A}{k} = \{B \subseteq A : |B| = k\} \text{ „A nad } k\text{“ (angl. „A choose } k\text{“).}$$

$$\binom{[4]}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{3, 4\}\}.$$

$$Y^X = \{f : X \rightarrow Y\}.$$

Statistika na množici  $S$  je preslikava  $S \rightarrow \mathbb{N}$ .

$$S = 2^A.$$

Moč je statistika.

$S$  končna množica,  $f$  statistika na  $S$ .

Pogosto gledamo polinom  $\sum_{s \in S} x^{f(s)}$  (enumeration).

$$| \cdot | \text{ na } 2^{[3]} : 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3.$$

$$S_n = \{\text{permutacije } [n]\} = \{f : [n] \rightarrow [n] : f \text{ bijektivna}\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \text{dvovrstična notacija.}$$

2 1 3 - enovrstična notacija.

(1 2)(3) - produkt disjunktne ciklov.

$$i, \pi(i), \pi^2(i) \dots$$

$$\text{Gotovo } \exists j_1 < j_2 : \pi^{j_1}(i) = \pi^{j_2}(i) \implies i = \pi^j(i); j > 0.$$

$$(i \ \pi(i) \dots \pi^{j-1}(i)) \text{ cikel.}$$

$$38241765 = (1 \ 3 \ 2 \ 8 \ 5)(4)(6 \ 7) = (4)(2 \ 8 \ 5 \ 1 \ 3)(7 \ 6).$$

Množenje permutacij: kompozicije.

Nekomutativno za  $n > 2$ .

Disjunktne cikli komutirajo.

Zapis: enoličen do vrstnega reda ciklov in ciklične ureditve ciklov.

Cikel dolžine 1 = negibna točka.

Cikel dolžine 2 = transpozicija.

$(S_n \cdot)$  simetrična grupa.

$$e = id = 1 \ 2 \dots n.$$

$\pi^{-1}$  inverz (kot preslikava).

$$3\ 8\ 2\ 4\ 1\ 7\ 6\ 5^{-1} = 5\ 3\ 1\ 4\ 8\ 7\ 6\ 2.$$

$$3\ 1\ 4\ 2 \cdot 4\ 2\ 3\ 1 = 2\ 1\ 4\ 3 - \text{množimo z desne.}$$

Statistika:  $\#$  ciklov  $= c(\pi)$  (štejemo tudi cikle dolžine 1).

$$n = 3 : x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2).$$

$$\sum_{\pi \in S_n} x^{c(\pi)} = \sum_k |\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| x^k.$$

$|\{\pi \in S_n : c(\pi) = n\}| =: c(n, k)$  - Stirlingovo število 1. vrste.

$$\sum_{B \subseteq [n]} x^{|B|} = \sum_k \binom{[n]}{k} x^k.$$

$|\binom{[n]}{k}| =: \binom{n}{k}$  - binomski koeficient.

Inverzija  $\pi \in S_n$  je  $(i, j)$ , da je za  $i < j$   $\pi_i > \pi_j$ .

$$\text{inv}(\pi) = \# \text{ inverzij } \pi.$$

$$\text{inv}(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 7.$$

$$0 \leq \text{inv}(\pi) \leq \binom{n}{2}.$$

Signatura permutacije:  $(-1)^{\text{inv}(\pi)}$ .

$sg\pi = 1$  - soda permutacija: produkt sodo mnogo transpozicij.

$sg\pi = -1$  - liha permutacija: produkt liho mnogo transpozicij.

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\pi)} a_{1, \pi(1)} \cdots a_{n, \pi(n)}.$$

Izraz brez  $(-1)^{\text{inv}(\pi)}$ : permanenta.

$$n = 3 :$$

$$1 + 2x + 2x^2 + x^3 = 1 + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 = (1+x)(1+x^2).$$

$$\sum_{\pi \in S_n} x^{\text{inv}(\pi)} = 1 \cdot (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{n-1}) - \text{kasneje.}$$

$\#$  permutacij v  $S_n$  s  $k$  inverzijami: ni standardne oznake.

spust/padec (descent)  $i : \pi_i > \pi_{i+1}$ .

$$\text{des}(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 3) = 3.$$

$$0 \leq \text{des}(\pi) \leq n - 1.$$

$\#$  permutacij v  $S_n$  s  $k - 1$  spusti  $= A(n, k)$  - Eulersko število ( $k - 1$  iz zgodovinskih razlogov).

$$\sum_k A(n, k) x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{1+\text{des}(\pi)} = A_n(x) - \text{eulerski polinom.}$$

$$n = 3 :$$

$$x + 4x^2 + x^3.$$

razdelitev/razbitje (angl. set partition)  $A$  je  $\{B_1, B_2 \dots B_n\}$ , davelja :

$$- B_i \neq \emptyset \ i = 1 \dots k,$$

$$- B_i \cap B_j = \emptyset \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

$$- \cup_{i=1}^k B_i = A.$$

$B_i$ : bloki razdelitve,

# blokov,

# razdelitev  $[n]$  s  $k$  bloki =  $S(n,k)$  - Stirlingovo število druge vrste.

$$A = [3] \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1,2\}, \{3\}\} \dots \{\{1,2,3\}\}.$$

$$x + 3x^2 + x^3.$$

$$S(4,2) = 4 + 3 = 7.$$

Kompozicija #  $n$  je  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_l)$ ,  $\lambda_i > 0$  člen kompozicije,  $\lambda_i \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i = n.$$

$l(\lambda)$  # členov - dolžina.

$\lambda \models n$  -  $\lambda$  je kompozicija  $n$ .

Razčlenitev #  $n$  je  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_l)$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N}$ .

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l, \sum_{i=1}^l \lambda_i = n$$

(angl. integer partition).

$p(n)$  - # razčlenitev  $n$ .

$p_k(n)$  - # razčlenitev  $n$  s  $k$  členi.

$$n = 4 :$$

4, 31, 22, 13, 211, 121, 112, 1111 - 8 kompozicij.

4, 31, 22, 221, 1111 - 5 razčlenitev.

$$p(4) = 5, p_2(4) = 2.$$

$B(n) = \sum_k S(n,k)$  - # razčlenitev  $[n]$ , Bellovo število.

$$B(3) = 5.$$

$L(n,k)$  - razdelitev  $[n]$  na  $k$  linearno urejenih blokov.

$$L(4,2) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 - \text{Lahovo število.}$$

$E_n = \#$  alternirajočih permutacij v  $S_n$  - Eulerjevo število (Euler number).

$$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 \dots$$

Primerjaj: eulerska števila (eulerian number).

$$1, 1, 1, 2, 5.$$

Poti:



npr. poti od  $(0,0)$  do  $(n,m)$  s korakom  $(1,0)$  (vzhod) in  $(0,1)$  (sever);  
 npr. poti od  $(0,0)$  do  $(2n,0)$  s korakoma  $(1,1)$  in  $(1,-1)$ ;  
 npr. poti od  $(0,0)$  do  $(2n,0)$  s korakoma  $(1,1)$  in  $(1,-1)$ , nikoli pod  $x$  osjo -  
 Dyckove poti;  
 $c_n = \#$  Dyckovih poti dolžine  $n$  (konec v  $(2n,0)$ ) - Catalanova števila.  
 $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$   
 Drevesa (povezani aciklični grafi).  
 $\#$  označenih dreves na  $n$  vozliščih.  
 Cayleyev izrek:  $n^{n-2}$ .  
 Ravninska drevesa.  
 (Vrstni red pomembnosti).  
 Dvojiška drevesa: vsako vozlišče ima 2 ali 0 naslednikov.

### 1.3 Osnovna načela preštevanja

Načelo vsote:  $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$ .

$i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ .

Načelo produkta:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|, |\prod_{i=1}^n A_i| = \prod_{i=1}^n |A_i|$ .

Kombinatorično:

2 možnosti, izberemo eno ali drugo (ne pa obe)  $\implies \#$  načinov je  
 vsota  $\#$  načinov,

dvakrat izbiramo, izbiri sta neodvisni  $\implies \#$  načinov je produkt  $\#$   
 načinov.

**Trditev 1.3.1.**  $|2^A| = 2^{|A|}$ .

**Dokaz 1.3.2.** Za vsak element se odločimo, ali ga damo v podmnožico ali ne. 2 izbiri, izbiramo  $|A|$ -krat, izbire so neodvisne  $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{|A|}$ .

$\phi : 2^A \rightarrow \{0,1\}^{|A|}, A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$ .

$\phi(B) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_n), \epsilon_i = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$

$$\psi : \{0,1\}^{|A|} \rightarrow 2^A.$$

$$\psi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = \{a_i : \epsilon_i = 1\}.$$

$$\psi \circ \phi, \phi \circ \psi \text{ identiteti.}$$

$$|\{0,1\}^{|A|}| = 2^{|A|}.$$



### Trditev 1.3.3.

$$1. \quad |K^N| = |K|^{|N|}.$$

$$2. \quad |\{f \in K^n \text{ injektivna}\}| = |K|(|K| - 1) \dots (|K| - |N| + 1).$$

$$3. \quad |S_n| = n(n-1) \dots 1 = n!.$$

oznake:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1) \dots (n-k+1): n \text{ na } k \text{ padajoče.}$$

$$n^{\overline{k}} = n(n+1) \dots (n+k-1): n \text{ na } k \text{ naraščajoče.}$$

*Opomba.* Pri 2. in 3. smo uporabili varianto načela produkta: izbire sicer niso neodvisne, je pa neodvisno število izbir.

Dirichletov princip (pigeon-hole principle):

$$\phi : X \rightarrow Y \text{ injektivna} \implies |X| \leq |Y|.$$

Če damo  $n$  kroglic v  $k$  škatel,  $n > k$ , sta v vsaj eni škatli vsaj 2 kroglici.

*Primer.*

(1)  $n$  ljudi, med njimi sta dva, ki poznata enako mnogo ljudi.

$$X = \text{ljudje}, f = \# \text{ znanstev.}$$

$n$  kroglic,  $n$  škatel, ampak škatli 0 in  $n-1$  ne moreta biti obe neprazni.

(2)  $X \subseteq [2n], |X| = n+1.$

$$\text{Obstajata } x, y \in X, x \neq y, x|y.$$

$$x = 2^k \cdot l, k \geq 0, k \text{ lih.}$$

$$Y = \{i \in [2n] \text{ liho}\}.$$

$$x \mapsto l.$$

## 1.4 Binomski koeficienti

$\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$  = število  $k$ -elementnih podmnoživ v  $[n]$  = število izbir  $k$  elementov izmed  $n$  elementov.

$$\binom{4}{2} = 6, \binom{5}{0} = 1, \binom{8}{-2} = 0, \binom{8}{9} = 0.$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

$$\phi : \binom{[n]}{n-k} \rightarrow \binom{[n]}{k}.$$

$$\phi(A) = A^c.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

$$\binom{n-1}{k-1}: \text{izberemo } n.$$

$$\binom{n-1}{k}: \text{ne izberemo } n\text{-ja.}$$

Pascalov trikotnik:

$$n = 0$$

$$n = 1 \quad \quad \quad 1$$

$$n = 2 \quad \quad \quad 1 \quad 1$$

$$n = 3 \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$n = 4 \quad \quad \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$n = 5 \quad \quad \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

**Trditev 1.4.1.**  $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{n!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$

**Dokaz 1.4.2.** Izberemo 1 element na  $n$  načinov, 2 na  $n-1 \dots \implies n^k$  načinov, vsak izbor smo šteli  $k!$ -krat.

Ali: preštejemo urejene izbire  $k$  različnih elementov iz  $[n]$ ;

$$n^k = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

$$\binom{n}{k}: \text{najprej izberemo } k \text{ elementov.}$$

$k$ : nato jih uredimo. ■

**Izrek 1.4.3** (Binomski izrek).  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k};$

$a, b \in K$  komutativni kolobar,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Dokaz 1.4.4.**

D1. Indukcija po  $n$ :

$$n = 0: 1 = 1$$

$$n - 1 \rightarrow n:$$

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \\ &\stackrel{\text{IP}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_k \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

$$\text{D2. } (a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ DN.}$$

$$\begin{aligned} \text{D3. } (a+b) \dots (a+b) &= \sum_{\text{izbira } a \text{ ali } b} \text{produkt izbranih} = \\ &= \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

$a$  izberemo  $k$ -krat.

Izberemo  $k$  oklepajev, pri katerih izberemo  $a$ .



$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

$$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Izbori:  $n$  kroglic,  $k$  izberemo.

	s ponavljanjem	brez ponavljanja	
vrstni red pomemben	$n^k$	$n^{\underline{k}}$	variacije
ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	kombinacije

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n.$$

$$j_1 = i_1, j_2 = i_2 + 1 \dots j_k = i_k + k - 1.$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n + k - 1.$$

**Trditev 1.4.5.** Število kompozicij  $n$  je  $2^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ), število kompozicij s  $k$  členi je  $\binom{n-1}{k-1}$  ( $n \geq 1$ ).

**Dokaz 1.4.6.**  $n$  kroglic  $\circ | \circ \circ \circ | \circ \circ : 6 = 1 + 3 + 2.$

$k - 1$  pregrad,  $n - 1$  mest za pregrade. ■

Kompozicije:  $2^{n-1}, \binom{n-1}{k-1}.$

Šibka kompozicija:  $(\lambda_1 \dots \lambda_l); \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_l = n.$

$3 : 12, 3, 21, 102, 300, 0102 \dots$

Število šibkih kompozicij  $n$  s  $k$  členi.

$n + k - 1$  objektov, premešamo na  $\binom{n+k-1}{k-1}$  oz.  $\binom{n+k-1}{n}$  načinov.

Še en dokaz:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n, \lambda_i \geq 0.$$

$$\mu_i = \lambda_i + 1 \mu_i \geq 1.$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_l = n + k \implies \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Primerjaj z: kombinacije s ponavljanjem.

$n$  kroglic,  $k$ -krat izbiram.

$\lambda_i$ : kolikokrat izberemo  $i$ -to kroglico.

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k, \lambda_i \geq 0.$$

Šibke kompozicije  $k$  z  $n$  členi:  $\binom{k+n-1}{k}.$

**Trditev 1.4.7.**

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}.$$

**Dokaz 1.4.8.** Koliko je urejenih razdelitev na linearno urejene bloke:

$$k! \cdot L(n, k) = n! \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Tukaj predstavljajo

- $L(n, k)$ : urejene bloke,

- $k!$ : njihov vrstni red,
- $n!$ : permutacije,
- $\binom{n-1}{k-1}$ : šibke kompozicije.

Poti iz  $(0,0)$  v  $(n,m)$ , premikamo se gor ali desno.

$n$ -krat gor,  $m$ -krat desno:  $\binom{n+m}{m}$  možnosti.

Poti iz  $(0,0)$  v  $(2n,0)$ , desno-gor ali desno-dol.

$n$ -krat gor,  $n$ -krat dol:  $\binom{2n}{n}$ .

Dyckove poti: isto kot prej, se ne spustimo pod  $x$ -os.

Pot je slaba, če gre pod  $x$ -os:

Od tam naprej, kjer 1. doseže  $y = -1$ , prezrcalimo pot preko  $y = -1$ .

Konča se v  $y = -2$ .

Število slabih poti = število poti od  $(0,0)$  do  $(2n, -2)$ .

Teh je  $\binom{2n}{n-1}$ :  $(n-1)$ -krat gor,  $(n+1)$ -krat dol.

$$C_n = \text{število Dyckovih poti dožine } n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\ = \frac{(2n!)}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Multinomski koeficienti:

$$\alpha_1 \times 1, \alpha_2 \times 2 \dots \alpha_k \times k : 11..12..2..k.$$

Na koliko načinov lahko premešamo:

$$\binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1} \binom{\alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_2} \dots \binom{\alpha_k}{\alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!}.$$

Definiramo

$$\binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k} := \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!}. \quad (1.1)$$

Izrazu 1.1 pravimo multinomski simbol.

Figure v 1. vrsti pri šahu:  $\frac{8!}{1!1!2!2!} = 7!$ .

$i$ -jem damo indekse  $\alpha_1 \dots \alpha_k : 1_1 \dots 1_{\alpha_1} 2_1 \dots k_{\alpha_k}$

Premešamo na  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!$  načinov.

Eno permutacijo dobimo  $(\alpha_1! \dots \alpha_k!)$ -krat.

Multimnožica  $M$  je množica, v kateri se elementi lahko ponavljajo.

$$M = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\} = \{1^3, 2^2, 3^4\}.$$

Število permutacij multimnožice je multinomski simbol.

Formalno je multimnožica  $(S, f)$ , kjer je  $S$  množica,  $f : S \rightarrow \mathbb{N}$  šteje kolikokrat se posamezen element ponovi.

## 1.5 Dvanajstera pot

$n$  kroglic,  $k$  škatel; na koliko načinov lahko damo kroglice v škatle.

$N \setminus K$	vse	injekcije	surjekcije	
L L	$k^n$	$k^n$	$k!S(n, k)$	„kompozicije“
N L	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	
L N	$\sum_i S(n, i)$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$S(n, k)$	razdelitve
N N	$\overline{p_k(n)}$	$\begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$	$p_k(n)$	razčlenitve

Vpeljemo ekvivalenčne relacije

- $f \sim_N g : \exists \pi \in S_n : f \circ \pi = g$
- $f \sim_K g : \exists \sigma \in S_k : \sigma \circ f = g$
- $f \sim_{N,k} g : \exists \pi \in S_n, \sigma \in S_k : \sigma \circ f \circ \pi = g.$

## 1.6 Rekurzije

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k);$$

$c(n-1, k-1)$ :  $n$  negibna,  $(n-1)$ : za kateri element vstavimo.

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k);$$

$S(n-1, k-1)$ :  $n$  v svojem bloku,  $k$ : v kateri blok vstavimo.

$$L(n, k) = L(n-1, k-1) + (n+k-1)L(n-1, k);$$

$L(n-1, k-1)$ :  $n$  v svojem bloku,  $(n+k-1)$ : kam vstavimo.

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k);$$

odstranimo blok, v katerem je  $n+1$ ,  $k$ : število elementov v bloku skupaj

$z\ n+1, \binom{n}{k}$ : kateri elementi v bloku skupaj  $z\ n+1$ ,  $B(n-k)$ : razdelimo ostale.

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k);$$

$p_{k-1}(n-1)$ :  $\lambda_l = 1$ ,  $p_k(n-k)$ :  $\lambda_l \geq 2$  (odstranimo 1. stolpec v Ferrersovem diagramu).

$A(n,k) = (n+1-k)A(n-1,k-1) + kA(n-1,k)$ . odstranimo  $n, k$ :  $n$  damo na konec ali za spust,  $(n+1-k)$ :  $n$  damo na začetek ali za vzpon. V  $S_n$  velja še: število spustov + število vzponov =  $n-1$ .

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k} \quad n \geq 1;$$

$k$ : koliko elementov je pred  $n+1$ , število obratno alternirajočih = število alternirajočih ( $i \rightarrow n+1-i$ ),  $E_k$ : pred  $n+1$ ,  $E_{n-k}$ : za  $n+1$ , štejemo in alternirajoče in obratno alternirajoče permutacije.

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k};$$

$k$ : ko 1. pridemo v  $y=0$ : pred in za tem sta Dyckovi poti.

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \dots$$

Eulerjev petkotniški izrek (dokaz kasneje) (pentagonal).

## 1.7 Načelo vključitev in izključitev (NVI)

(Principle of inclusion and exclusion).

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



**Izrek 1.7.1** (NVI).

$$\begin{aligned}
|\cup_{i=1}^n A_i| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad - \cdots \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}| \\
&= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |A_S|,
\end{aligned}$$

kjer je  $A_S := \cap_{i \in S} A_i$ .

**Dokaz 1.7.2.**

$x \in \cup_{i=1}^n A_i$ .

Trdimo, da  $x$  prispeva 1 k vsoti na desni.

Recimo, da je  $x$  v natanko  $m$  množicah  $A_i$  ( $1 \leq m \leq n$ ):

$$\begin{aligned}
&m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} \\
&= 1 - \left( \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \right) \\
&= 1 - (1 - 1)^m = 1.
\end{aligned}$$

**Trditev 1.7.3** (NVI, 2. verzija).

$$|\cap_{i=1}^n A_i^C| = \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|.$$

**Dokaz 1.7.4.**

$$\begin{aligned}
|\cap_{i=1}^n A_i^C| &= |(\cup_{i=1}^n A_i)^C| \\
&= |A| - |\cup_{i=1}^n A_i| \\
&= |A| + \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |A_S| \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} |A_S|,
\end{aligned}$$

kjer velja še  $A_\emptyset = A$ .

*Primer.*

(1) Koliko je  $k$ -elementnih antiverig v  $B_n$ ?

$B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$  Boolova algebra, antiveriga - množica neprimerljivih elementov.

$k=1$ :  $2^n$  (vsi elementi).

$k=2$ :

$$S = \{(A, B) : A, B \subseteq [n]\}$$

$$S_1 = \{(A, B) : A \subseteq B\}$$

$$S_2 = \{(A, B) : B \subseteq A\}$$

$$|S_1^C \cap S_2^C| = |S| - |S_1| - |S_2| + |S_1 \cap S_2| = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n;$$

$4^n$ : vse možnosti  $x \in, \notin A, B$ ,  $3^n$ : vse razen  $x \in A, \notin B \dots$

$$\implies \frac{1}{2}(4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n).$$

$k=3$ :

$$S = \{(A, B, C) : A, B, C \in 2^{[n]}\}$$

$$S_1 : A \subseteq B, S_2 : B \subseteq A, S_3 : A \subseteq C, S_4 : C \subseteq A$$

$$S_5 : B \subseteq C, S_6 : C \subseteq B.$$

$$|\cap_{i=1}^6 S_i^C| = 8^n - 6 \cdot 6^n + 3 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n - 6 \cdot 4^n - \dots$$

$$6^n : S_i, 4^n : \text{npr. } S_1 \cap S_2, 5^n : \text{npr. } S_1 \cap S_3, 4^n : \text{npr. } S_1 \cap S_4.$$

(2)  $i_n$ : število premestitev v  $S_n$  = število permutacij v  $S_n$  brez negibne

točke (dearangement).

$$\begin{aligned}
 A &= S_n \\
 A_i &= \{\pi \in S_n : \pi_i = i\} \\
 |A_I| &= (n - |I|)! \\
 i_n &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} (n - |I|)! \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n - k)! \\
 &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

$$P(\text{število premestitev}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

(3) Število surjekcij iz  $[n]$  v  $[k]$ .

$$\begin{aligned}
 A &= [k]^{[n]} \\
 A_i &= ([k] \setminus \{i\})^{[n]} \\
 \left| \cap_{i=1}^n A_i^C \right| &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} (k - |I|)^n \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{k}{i} (-1)^i (k - i)^n \\
 &\stackrel{i=k-i}{=} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\
 &= k! S(n, k);
 \end{aligned}$$

surjekcija je urejena razdelitev;

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j! (k-j)!}.$$

(4) Eulerjev petkotniški izrek:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - \dots$$

$$A = \{\text{razčlenitve } n\}$$

$$A_i = \{\text{razčlenitve } n, \text{ ki vsebujejo } i \text{ za člen}\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$|A_i| = p(n - i)$$

$$|A_i \cap A_j| = p(n - k - j)$$

$$|A_I| = p(n - \sum_{i \in I} i)$$

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n - 1) + p(n - 2) + p(n - 3) + \dots \\ &\quad - p(n - 1 - 2) - p(n - 1 - 3) - p(n - 2 - 3) - \dots \\ &\quad + p(n - 1 - 2 - 3) - \dots \\ &= p(n - 1) + p(n - 2) - p(n - 5) - p(n - 7) + \dots \end{aligned}$$

Franklinova bijekcija:

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha(m) - \beta(m))p(n - m); \quad m - \text{razčlenitve z različnimi členi,}$$

$$\alpha(m) = \text{število razčlenitev } m \text{ z liho mnogo različnimi členi,}$$

$$\beta(m) = \text{število razčlenitev } m \text{ z sodo mnogo različnimi členi,}$$

Bijekcija

$$\begin{aligned} \Phi : \{\text{razčlenitev } m \text{ z liho mnogo različnimi členi}\} \setminus \{\dots\} \\ \rightarrow \{\text{razčlenitev } m \text{ z sodo mnogo različnimi členi}\} \setminus \{\dots\}. \end{aligned}$$

$$f(\lambda) = \max\{i : \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\} - \text{bok},$$

$$g(\lambda) = \lambda_{l(\lambda)} - \text{najmanjši člen},$$

$$\text{a) } f(\lambda) \geq g(\lambda): \text{ min} \rightarrow \text{bok},$$

$$\text{b) } f(\lambda) < g(\lambda): \text{ bok} \rightarrow \text{min},$$

$$\text{a) ne dela (število členov se ohrani),}$$

$$\text{b) ne dela (2 člena enako dolga),}$$

$$\text{a) ne dela, ko:}$$

$$f(\lambda) = g(\lambda) = l(\lambda)$$

$$m = k + (k + 1) + \dots + (2k - 1) = \frac{2k(2k-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}$$

$$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1} \quad (k \text{ lih ali sod}).$$

$$\text{b) ne dela, ko:}$$

$$f(\lambda) = g(\lambda) - 1 = l(\lambda)$$

$$m = (k+1) + (k+2) + \dots + (2k) = \dots = \frac{k(3k+1)}{2}$$

$$(\alpha(m) - \beta(m)) = (-1)^{k-1}.$$

Eulerjev petkotniški izrek:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left( p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right)$$

$$\text{oz. } \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) = 0.$$

Tukaj smo upoštevali ko vstavimo  $-k$ :  $\frac{-k(-3k-1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2}$  in  $p(0) = 0$ .

**Izrek 1.7.5** („NVI“).

$f, g : B_n \rightarrow K$ ,  $K$  komutativni kolobar.

$$f(T) = \sum_{S \subseteq T} g(S) (\forall T \in B_n) \iff g(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} f(S) (\forall T \in B_n).$$

*Zgled.*

$$des(\pi) = |\{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}|$$

$$D(\pi) = \{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}$$

$$D(1\ 4\ 2\ 6\ 5\ 3) = \{2, 4, 5\}$$

$$f_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) = T\}|$$

$$\text{npr. } n = 8, T = \{1, 5\}$$

$$g_n(T) = |\{\pi \in S_n : D(\pi) \subseteq T\}|$$

$$T = \{t_1, t_2 \dots t_k\}$$

$$g_n(T) = \binom{n}{t_1} \binom{n-t_1}{t_2-t_1} \binom{n-t_1-\dots-t_{k-1}}{t_k} = \binom{n}{t_1, t_2-t_1, \dots, t_k-t_{k-1}, n-t_k}$$

$\_ < \_ < \_ < \underline{t_i} \leq \_ :$  zaradi  $\subseteq$ : tam lahko spust ali pa ne.

// če lastnosti točno določene: težko  $(f_n(T))$ , če „vsebovano“  $(g_n(T))$ : lažje

$$g_n(T) = \sum_{S \subseteq T} f_n(S)$$

$$\begin{aligned}
f_n(T) &= \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} g_n(S) \\
&= \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} \binom{n}{s_1, s_2 - s_1, \dots, n - s_k} \\
&\stackrel{\text{vaje}}{=} \det \left[ \binom{n - t_i}{t_{j+1} - t_j} \right]_{i,j=0}^{|T|}.
\end{aligned}$$

npr.  $n = 8$ ,  $T = \{1, 5\}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{|T|} = n + 1 = 9$

$$f_8(\{1, 5\}) = \begin{vmatrix} \binom{8}{1} & \binom{8}{5} & \binom{8}{8} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{7} \\ \binom{3}{-4} & \binom{3}{0} & \binom{3}{3} \end{vmatrix} = 217.$$

**Dokaz 1.7.6.**

( $\implies$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} f(S) &= \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} f(S) \sum_{U \subseteq S} g(U) \\
&= \sum_{U \subseteq T} \left( \sum_{U \subseteq S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} \right) g(U) \\
&\stackrel{k=|S \setminus U|}{=} \sum_{U \subseteq T} \sum_{k=0}^{|U|} \binom{|T \setminus U|}{k} (-1)^{|T \setminus U| - k} g(U) \\
&= g(T).
\end{aligned}$$

Na notranji vsoti uporabimo binomski izrek za  $-1$  in  $1$ :

$$(1 - 1)^{|T \setminus S|} = \begin{cases} 1 : U = T \\ 0 : U \subset T \end{cases}$$

## 1.8 Polinomske enкости

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

**Izrek 1.8.1.**

- (a)  $\sum_k c(n,k)x^k = x^{\bar{n}}$
- (b)  $\sum_k (-1)^{n-k} c(n,k)x^k = x^{\underline{n}}$
- (c)  $\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\bar{n}}$
- (d)  $\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k)x^{\bar{k}} = x^{\underline{n}}$
- (e)  $\sum_k L(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\bar{n}}$
- (f)  $\sum_k (-1)^{n-k} L(n,k)x^{\bar{k}} = x^{\underline{n}}$

*Opomba.*  $K[x] = \{\text{polinomi v } x\}$  vektorski prostor (celo algebra),  $K$  komutativen obseg.

$\{x^n\}, \{x^{\underline{n}}\}, \{x^{\bar{n}}\}$  naravne baze.

### Dokaz 1.8.2.

(a) Indukcija (na vajah drugače):

$$n = 0: 1=1$$

$$n - 1 \rightarrow n:$$

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= x^{\overline{n-1}}(x + n - 1) \stackrel{\text{IP}}{=} (x + n - 1) \sum_k c(n-1, k)x^k \\ &= \sum_k c(n-1, k-1)x^k + (n-1) \sum_k c(n-1, k)x^k = \sum_k c(n, k)x^k, \end{aligned}$$

(b)  $x \rightarrow -x$  v (a),

(c) Preslikava = razdelitev + injekcija,

število preslikav iz  $[n]$  v  $[k] = \sum_k S(n, k)x^{\underline{k}}$ , kjer predstavljajo

- $k$ : število blokov,
- $S(n, k)$ : razdelimo  $[n]$  na  $k$  blokov,
- $x^{\underline{k}}$ : injekcija  $[k] \rightarrow [x]$ .

Dokazali smo za  $x \in \mathbb{N} \implies$  polinoma sta enaka (ujemanje v  $\infty$  točkah).

(e) Z indukcijo DN.

$$\pi = 4 \ 2 \ 5 \ 1 \ 6 \ 3$$

$$\text{inv}(\pi) = 7$$

$$I(\pi) = \{(1,2), (1,4), (1,6) \dots\}$$

$TI(\pi) = (a_1 \dots a_n); a_k = \{(i,j) : \pi_i > \pi_j = k\}$  („desna stran“) - tabela inverzij.

$$TI(\pi) = (3,1,3,0,0,0)$$

$0 \leq a_i \leq n - i$ ,  $a_i$ : koliko levo od  $i$  večjih od  $i$ .

### Trditev 1.8.3.

$TI : S_n \rightarrow [0, n-1] \times [0, n-2] \times \dots \times [0, 0]$  je bijekcija.

### Posledica 1.8.4.

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)} = \underline{n!} = (1+q)(1+q+q^2) \dots (1+q+\dots+q^{n-1}).$$

$$\pi = 4 \ 1 \ 7 \ 3 \ 9 \ 6 \ 2 \ 8 \ 5,$$

$$TI(\pi) = (1, 5, 2, 0, 4, 2, 0, 1, 0),$$

$$\text{inverz: } 9 \rightarrow 9 \ 8 \rightarrow 7 \ 9 \ 8 \rightarrow 7 \ 9 \ 6 \ 8 \rightarrow 7 \ 9 \ 6 \ 8 \ 5 \rightarrow 4 \ 7 \ 9 \ 6 \ 8 \ 5$$

$$\rightarrow 4 \ 7 \ 3 \ 9 \ 6 \ 8 \ 5 \rightarrow 4 \ 7 \ 3 \ 9 \ 6 \ 2 \ 8 \ 5 \rightarrow 4 \ 1 \ 7 \ 3 \ 9 \ 6 \ 2 \ 8 \ 5.$$

### Dokaz 1.8.5. trditve.

Skonstruiramo inverz:

$$(a_1 \dots a_n), \ 0 \leq a_i \leq n - i.$$

Vpisujemo  $n, n-1 \dots 1$ :  $i$  pišemo za  $a_i$  elementi.

### Dokaz 1.8.6. posledice.

$\sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)} = n!_q = \underline{n!} = \underline{n(n-1)} \dots 1$  - q fakulteta,  $\underline{i} = 1 + q + \dots + q^{i-1}$  - polinom, q-naravno število (q-integer).

$$\begin{aligned} D &= (1 + q + \dots + q^{n-1})(1 + q + \dots + q^{n-2}) \dots 1 \\ &= \sum_{0 \leq a_i \leq n-i} q^{a_1} q^{a_2} \dots q^{a_n} \\ &\stackrel{\text{trditev}}{=} \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)}. \end{aligned}$$



*Opomba.*  $maj(\pi) = \sum_{i \text{ spust } \pi} i$  oz.  $\sum_{i \in D(\pi)} i$  - majorski indeks

$$maj(4 \ 2 \ 5 \ 1 \ 3) = 1 + 3 = 4$$

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{maj(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \underline{n}!$$

**Definicija 1.8.7** (q-binomski koeficient).

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}_q = \frac{\underline{n}!}{\underline{k}! \underline{(n-k)}!}.$$

$$\begin{aligned} \binom{\underline{n}}{\underline{0}} &= \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{\underline{n}}{\underline{1}} &= \underline{n} \binom{\underline{4}}{\underline{2}} = \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)(1+q)}{(1+q)(1+q)} = (1+q^2)(1+q+q^2) \quad q = 1 : \binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

**Trditev 1.8.8.**

$$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = q^{n-k} \binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + \binom{\underline{n-1}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + q^k \binom{\underline{n-1}}{\underline{k}}.$$

**Dokaz 1.8.9.**

$$\begin{aligned} & q^{n-1} \frac{(\underline{n-1})!}{(\underline{k-1})! \underline{(n-k)}!} + \frac{(\underline{n-1})!}{(\underline{k})! \underline{(n-1-k)}!} \\ &= \frac{\underline{n}!}{\underline{k}! \underline{(n-k)}!} (q^{n-k} \underline{k}! + \underline{n-k}) \\ &= \frac{\underline{n}!}{\underline{k}! \underline{(n-k)}!} \\ &= \binom{\underline{n}}{\underline{k}}, \end{aligned}$$

kjer je

$$q^{n-k} \underline{k}! + \underline{n-k} = q^{n-k} + \dots + q^n + 1 + \dots + q^{n-k-1} = 1 + q + \dots + q^n.$$

**Posledica 1.8.10.**  $\binom{\underline{n}}{\underline{k}}$  je polinom v  $q$ .

**Trditev 1.8.11.**

$$\prod_{i=1}^n (1 + q^{i-1}x) = \sum_{k=0}^n \binom{\underline{n}}{\underline{k}} x^k.$$

**Dokaz 1.8.12.** Indukcija:

$$n = 0 : 1 = 1$$

$$n - 1 \rightarrow n:$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 + q^{i-1}x) &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} x^k \right) \cdot (1 + q^{n-1}x) \\ &= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_k q^{\binom{k-1}{2} + n-1} \binom{n-1}{k-1} x^k \\ &= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \left( \binom{n-1}{k} + q^{\binom{k-1}{2} + n-1 - \binom{k}{2}} \binom{n-1}{k-1} \right) x^k. \end{aligned}$$

$$\text{Upoštevali smo } \binom{k-1}{2} - \binom{k}{2} = -\binom{k-1}{1}.$$

$\mathbb{Z}_p, p$  praštevilo končen obseg.

**Izrek 1.8.13.** Obseg moči  $n \in \mathbb{N}$  obstaja  $\iff n = p^k$   $p$  praštevilo. Obseg je do izomorfizma natančno določen.

$\mathbb{F}_q$  - oznaka.

**Izrek 1.8.14.** V  $\mathbb{F}_q^n$  je  $\binom{n}{k}$   $k$ -dimenzionalnih podprostorov.

$$\text{Primer. } q = 4, n = 4, k = 2 : (1 + 4^2) + (1 + 4 + 4^2) = 38.$$

**Dokaz 1.8.15.** Spomnimo se:  $[n]$  ima  $\binom{n}{k}$   $k$ -podmnožic, štejemo urejene  $k$ -terice različnih števil:  $k! \binom{n}{k} = n^{\underline{k}}$ .

Štejemo  $k$ -terice linearno neodvisnih vektorjev v  $\mathbb{F}_q^n$ :

$$(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1})X = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1});$$

$q^k - q^i$ : vsi v podprostoru brez linearnih kombinacij že vzetih,

$q^n - q^i$ : vsi brez linearnih kombinacij že vzetih.

$X$ : število izbir podprostora.

$$X = \frac{q^{\binom{k}{2}} (q-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1)}{q^{\binom{k}{2}} (q-1)^k k!} = \binom{n}{k}.$$

**Definicija 1.8.16** (q-multinomski koeficient).

$$\begin{aligned} \binom{a_1 + \dots + a_k}{\underline{a_1}, \underline{a_2} \dots \underline{a_k}} &= \frac{(a_1 + \dots + a_k)!}{\underline{a_1}! \dots \underline{a_k}!} \\ &= \binom{a_1 + \dots + a_k}{\underline{a_1}} \binom{a_2 + \dots + a_k}{\underline{a_2}} \dots \binom{a_k}{\underline{a_k}}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  je polinom (produkt polinomov).

$x_1 \dots x_n$  permutacija multimnožice  $\{1^{a_1}, 2^{a_2} \dots n^{a_n}\}$

inverzija:  $(i, j) : i < j, x_i > x_j$

$inv$ : število inverzij

$inv(1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3) = 2$ .

**Izrek 1.8.17.**  $M = \{1^{a_1}, 2^{a_2} \dots n^{a_n}\}$

$$\sum_{\pi \in S(M)} q^{inv(\pi)} = \binom{a_1 + \dots + a_n}{\underline{a_1} \dots \underline{a_n}}.$$

*Primer.*

$$q = 1 : |S(M)| = \binom{a_1 + \dots + a_n}{a_1 \dots a_n}$$

$a_1 = \dots = a_n = 1 : \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = n!$  - posplošitev formul za multinomske koeficiente in Stirlingova števila 1. vrste.

**Dokaz 1.8.18.**

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S(M)} q^{inv(\pi)} \underline{a_1}! \dots \underline{a_n}! &= \underline{(a_1 + \dots + a_n)!} \\ \sum_{\pi_0 \in S(M)} q^{inv(\pi_0)} \cdot \sum_{\pi_1 \in S_{a_1}} q^{inv(\pi_1)} \dots \sum_{\pi_n \in S_{a_n}} q^{inv(\pi_n)} &= \sum_{\pi \in S_{a_1 + \dots + a_n}} q^{inv(\pi)}. \end{aligned}$$

Iščemo bijekcijo

$$\begin{aligned} \Phi : (\pi_0 \pi_1 \dots \pi_n) &\rightarrow \pi \\ S(M) S_{a_1} \dots S_{a_n} &\mapsto S_{a_1 + \dots + a_n}. \end{aligned}$$

$$M = \{1^4, 2^2, 3^3\}$$

$$(1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1, 2 \ 4 \ 1 \ 3, 2 \ 1, 1 \ 3 \ 2)$$

$\mapsto 2\ 6\ 5\ 4\ 7\ 1\ 9\ 8\ 3$ .

V  $\pi_0$  enke spremenimo v  $1 \dots a_1$  v vrstnem redu, ki ga določa  $\pi_1$ , v  $\pi_0$  dvojke spremenimo v  $a_1 + 1 \dots a_2$  v vrstnem redu, ki ga določa  $\pi_2$ , itn.

$$\text{inv}(\pi_0) + \dots + \text{inv}(\pi_n) = \text{inv}(\Phi(\pi_0 \dots \pi_n)).$$

Vsaka inverzija  $\Phi(\pi_0 \dots \pi_n)$  prihaja bodisi od inverzije  $\pi_i$  bodisi od inverzije  $\pi_0$  (glede na „indeks“ v  $\pi_0$ )  $\implies$  vsota enaka.

## Poglavje 2

# Formalne potenčne vrste

### 2.1 Uvod

$$\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$$

$\sum_n S(n,k)x^n$  neskončna vsota.

V analizi: potenčne vrste:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Konvergira za  $|x| < R$  - konvergenčni polmer:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{če obstaja}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, \infty].$$

*Primer.*  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n : R = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} : R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n : R = 0$$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  - definirana samo v 0, obe z vrednostjo 1 tam.

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 0 \implies F(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$$

Potenčne vrste niso „najboljše“ za študij zaporedij.

## 2.2 Formalne potenčne vrste

$K$  komutativni obseg s karakteristiko  $0 : 1 + 1 + \dots + 1 \neq 0 \ \forall n \geq 1$ .

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\frac{1}{n!}$  je definirano

$K[[x]] = \{(a_n)_n : a_n \in K\} = K^{\mathbb{N}}$  - množica formalnih potenčnih vrst (FPV)

= zaporedje

$K[x] = \{(a_n)_n : a_n \in K, a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$  - množica polinomov.

V  $K[[x]]$  vpeljemo operacije:

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n,$$

$$\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n,$$

$$((a_n)_n \cdot (b_n)_n) = (c_n)_n; \ c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \text{ - konvolucijsko množenje.}$$

$K[[x]]$  algebra formalnih potenčnih vrst: komutativna,  $(1, 0, 0, 0, \dots)$  enota za množenje:  $\sum_{k=0}^n a_k \cdot \delta_{n-k,0} = a_n$ .

Oznake:

$(a_n)_n \leftrightarrow \sum_n a_n x^n$ : ni vsota (samo oznaka),  $x$  je ločilo (ni spremenljivka, ne „vstavljamo“),

$$(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \dots,$$

$$1 + 0x + 0x^2 + \dots = 1,$$

$$[x^n]F(x) := a_n \text{ - „koeficient pred } x^n\text{“,}$$

$$F(0) := [x^0]F(x).$$

**Trditev 2.2.1.**  $F(x)$  ima inverz  $\iff F(0) \neq 0$ .

**Dokaz 2.2.2.**

$(\implies)$  :

$$F(x)G(x) = 1$$

$$F(0)G(0) = 1 \implies F(0) \neq 0$$

$(\Longleftarrow) :$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, a_0 \neq 0 \\
 G(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \\
 F(x)G(x) &= 1 \\
 a_0b_0 &= 1 \implies b_0 = \frac{1}{a_0} \\
 a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \implies b_1 = \frac{-a_1b_0}{a_0} \\
 a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \implies b_2 = \frac{-a_1b_1 - a_2b_0}{a_0} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

*Opomba.*  $K$  komutativen kolobar s karakteristiko 0.

$F(x)$  ima inverz  $\iff F(0)$  ima inverz v  $K$ .

$$v(F(x)) = \begin{cases} \min n : [x^n]F(x) \neq 0 & F(x) \neq 0 \\ \infty & F(x) = 0 \end{cases} \text{ - valuacija.}$$

$$v(F(x)G(x)) = v(F(x))v(G(x)) \text{ (} \implies \text{ni deliteljev nič)} \text{)}$$

$$v(F(x) + G(x)) \geq \min\{v(F(x)), v(G(x))\}$$

$$v(\lambda F(x)) = \begin{cases} v(F(x)) & \lambda \neq 0 \\ \infty & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$d(F(x), G(x)) = 2^{-v(F(x)-G(x))} \text{ - metrika}$$

$$d(F(x), G(x)) = 2^{-k} \iff [x^n]F(x) = [x^n]G(x) \forall n \leq k.$$

**Trditev 2.2.3.**  $(K[[x]], d)$  je poln metrični prostor.

**Dokaz 2.2.4.**

$$\begin{aligned}
d &\geq 0, d = 0 \iff F = G \\
d(F(x), G(x)) &= d(G(x), F(x)) \\
d(F(x), H(x)) &= 2^{-v(F(x)-H(x))} \\
&= 2^{-v(F(x)-G(x)+G(x)-H(x))} \\
&\leq \max\{2^{-v(F(x)-G(x))}, 2^{-v(G(x)-H(x))}\} \\
&= \max\{d(F(x), G(x)), d(G(x), H(x))\} \\
&\leq d(F(x), G(x)) + d(G(x), H(x)).
\end{aligned}$$

$F_m(x) = \sum_n a_n^{(m)} x^n$  Cauchyjevo zaporedje

$$\forall k \exists M : M_1, M_2 \geq M \implies d(F_{M_1}(x), F_{M_2}(x)) < 2^{-k}$$

$$\text{oz. } [x^n]F_{M_1}(x) = [x^n]F_{M_2}(x) \quad \forall n \leq k.$$

Torej za vsak  $[x^n]F_n(x)$  konstantni od nekod naprej in enaki npr.  $a_n$ .

$F(x) = \sum_n a_n x^n$  je limita  $(F_n(x))_m$ .

*Primer.*

$$(\sum_n x^n)(1-x) = 1$$

$$c_n = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$c_0 = 1. \text{ Torej } \sum_n x^n = \frac{1}{1-x} \implies 1-x \text{ inverz od } \sum_n x^n.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1}{1-x}.$$

*Opomba.*  $(F_m(x))_m$  konvergira v  $K[[x]]$ , če je  $([x^n]F_m(x))_m$  od nekod naprej konstantno, npr  $a_n$ ; v tem primeru je  $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \sum_n a_n x^n$ .

Odvajanje:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Za  $K[[x]]$  :

$$[x^n]F'(x) := (n+1)[x^{n+1}]F(x)$$

$$(\sum_n a_n x^n)' = F(x)'G(x) + F(x)G(x)'$$

Dokaz: DN.

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F(x)'G(x) - F(x)G(x)'}{G(x)^2}; \quad G(0) \neq 0$$



*Primer.*

$$F'(x) = F(x)$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n$$

$$na_n = a_{n-1}$$

$a_0$  poljubno

$$a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

$$e^{\lambda x} := \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} x^n$$

$$e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = e^{(\lambda+\mu)x}$$

$$L = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} = D.$$

Binomski izrek v  $K$ : enakost velja.

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}, \quad F(0) = 0$$

$$(n+1)a_{n+1} = 1$$

$$a_n = \frac{a_0}{n}$$

$$\log \frac{1}{1-x} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\log \frac{1}{1-x}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-x}.$$

Najprej definicija kompozituma, dokaz enakosti kasneje.

Bolj splošno:

$$F(0) = 1$$

$$\log(F(x)G(x)) = \log F(x) + \log G(x): \text{ DN.}$$

Binomska vrsta:

$$\lambda \in K, n \in \mathbb{N}, \binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda^n}{n!} \text{ posplošen binomski koeficient.}$$

$$B_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n$$

$$n \in \mathbb{N}: B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

### Trditev 2.2.5.

$$B_\lambda(x) \cdot B_\mu(x) = B_{\lambda+\mu}(x).$$

### Dokaz 2.2.6.

$$D = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = L$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = (\lambda + \mu)^n.$$

Indukcija: DN.

$$B_\lambda(x) := (1+x)^\lambda$$

$$n \in \mathbb{N} : B_n(x) \cdot B_{-n}(x) = 1$$

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n}$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_k \binom{-n}{k} x^k$$

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k(n+k-1)\dots n}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x)^{-k} &= \frac{1}{1-x} \dots \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{n_i \geq 0, \sum n_i = k} 1 \right) x^n \\ &= \sum_n (\text{število šibkih kompozicij } n \text{ s } k \text{ členi}) x^n \\ &= \sum_n \binom{n+k-1}{k-1} x^n \end{aligned}$$

$$F(x)G(x)H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 0, n_1+n_2+n_3=n} a_{n_1} b_{n_2} c_{n_3} \right) x^n$$

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n \binom{n}{0} = (-1)^n$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \binom{2n-2}{n-1} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

## 2.3 Kompozitum

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_n b_n x^n$$

$$F \circ G(x) = F(G(x)) = ?$$

$$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 G(x) + a_2 G^2(x) + \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n G^n(x).$$

Kdaj ta limita obstaja?

**Trditev 2.3.1.**  $(F_n(x))_n$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_n(x) \text{ obstaja} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} v(F_n(x)) = \infty.$$

**Dokaz 2.3.2.**

$(\implies)$  :

$$\left( \sum_{n=0}^N F_n(x) \right)_N \text{ je Cauchyjevo :}$$

$$\forall x \exists N_0 \forall N, M \geq N_0 : d \left( \sum_{n=0}^N F_n(x), \sum_{m=0}^M F_m(x) \right) \leq 2^{-k}$$

$$M = N - 1 : v(F_N(x)) \geq k.$$

$(\impliedby)$  :

$$\forall k \exists N_0 \forall N \geq N_0 : v(F_N(x)) \geq k \text{ (predpostavka)}$$

$$\begin{aligned} N > M \geq N_0 : d \left( \sum_{n=0}^N F_n(x), \sum_{m=0}^M F_m(x) \right) \\ &= 2^{-v(F_{M+1}(x) + \dots + F_N(x))} \\ &\leq \max \{ 2^{-v(F_{M+1}(x))} \dots 2^{-v(F_N(x))} \} \\ &\leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

$$F \circ G(x) \text{ obstaja} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} v(a_n G^n(x)) = \infty$$

$$\iff v(G(x)) > 0 \text{ ali } a_n = 0 \text{ od nekod naprej}$$

$$\iff F \text{ polinom ali } G(0) = 0.$$

$$\text{Velja } v(a_n G^n(x)) = \begin{cases} n \cdot v(G(x)) & a_n \neq 0 \\ \infty & a_n = 0 \end{cases}$$

*Primer.*

$$F(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$G(x) = e^x$$

$$(F \circ G)(x) = e^{2x} - 3e^x + 1 - \text{ok}$$

$$F(x) = G(x) = e^x - \text{ni ok}$$

$$F(x) = e^x$$

$$G(x) = e^x - 1$$

$$e^{e^x - 1} - \text{ok.}$$

*Opomba.*

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_n b_n x^n \quad b_0 = 0$$

$$a_0 + a_1(b_1x + b_2x^2 + \dots) + a_2(b_1x + b_2x^2 + \dots)^2 + \dots$$

Za izračun koeficienta pri  $x^5$  izračunamo končno vsoto.

$$\text{Enota za kompozitum: } x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$

$$F \circ x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = F = x \circ F = 1 \cdot (a_0 + a_1x + \dots)$$

### Izrek 2.3.3.

$F \in K[[x]]$  ima inverz za kompozitum  $\iff F(x) = a_0 + a_1x$ ;  $a_1 \neq 0$  ali  $v(F(x)) = 1$ .

*Primer.*

$$x - x^2 \text{ ima inverz,}$$

$$e^x - 1 \text{ ima inverz,}$$

$$x^2 \text{ nima inverza.}$$

$$F^{<-1>} - \text{inverz za kompozitum.}$$

### Dokaz 2.3.4.

$(\implies):$

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_n b_n x^n \text{ inverz od } F$$

$$a_0 = 0 \stackrel{?}{\iff} b_0 = 0$$

$$(\Longleftarrow) : F \circ G = a_0 + a_1(b_1x + \dots) + a_2(\dots)^2 + \dots$$

$$[x^0]F(G(x)) = a_0 = [x^0]x = 0$$

$(\implies) : \text{isto?}$

$$1. a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$$

$$\implies F, G \text{ polinoma, } \deg(F \circ G) = \deg(F) \cdot \deg(G) = 1$$

$$\implies \deg(F) = \deg(G) = 1$$

$$2. a_0 = b_0 = 0$$

$$v(F \circ G) = v(F) \cdot v(G) = 1$$

$$\implies v(F) = v(G) = 1$$

$$\implies F(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots \quad a_1 \neq 0.$$

( $\Leftarrow$ ):

$$F(x) = a_0 + a_1x \quad a_1 \neq 0$$

$$a_0 + a_1y = x \implies y = \dots$$

$$F^{<-1>}(x) = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{x}{a_1}$$

$$F(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots \quad a_1 \neq 0$$

$$\text{levi inverz: } G_1(x) = b_0 + b_1x + \dots$$

$$G_1 \circ F = x$$

$$b_0 + b_1(a_1x + \dots) + b_2(a_1x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : b_0 = 0$$

$$[x^1] : a_1b_1 = 0 \implies b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : b_1a_2 + b_1a_1^2 = 0 \implies b_2 = -\frac{b_1a_2}{a_1^2}$$

$$[x^3] : b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3 = 0 \implies b_3 = \dots \frac{\ddots}{a_1^3}$$

$$[x^n] : \dots + b_na_1^n = 0 \quad n \geq 1$$

$$b_n = \dots \text{ rekurzivno}$$

$$\text{desni inverz: } G_2(x) = c_0 + c_1x + \dots, \quad c_0 = 0$$

$$F \circ G_2 = x$$

$$a_1(c_1x + \dots) + a_2(c_1x + \dots)^2 + \dots = x$$

$$[x^0] : 0 = 0$$

$$[x^1] : a_1c_1 = 1 \implies c_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$[x^2] : a_1c_2 + a_2c_1^2 = 0 \implies c_2 = -\frac{a_2c_1^2}{a_1}$$

$$[x^3] : a_1c_3 + 2a_2c_1c_2 + a_3c_1^3 = 0 \implies c_3 = \frac{\ddots}{a_1}$$

$$[x^n] : a_1c_n + \dots = 0 \implies c_n = \frac{\ddots}{a_1}.$$



$$(G_1 \circ F) \circ G_2 = G_2$$

$$G_1 \circ (F \circ G_2) = G_1.$$

Iz asociativnosti (ki je nismo dokazali) sledi  $G_1 = G_2 = F^{<-1>}$ .

### Trditev 2.3.5.

$$F_n(0) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + F_n(x)) \text{ obstaja} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} v(F_n(x)) = \infty.$$

Dokaz DN.

*Primer.*

$$(1+x)(1+x)(1+x)\dots - \text{ni ok,}$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots - \text{ok.}$$

*Opomba.*

$$K[[x]]$$

$$K[[x,y]] = K^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

$\sum a_{n,m} x^n y^m$  bivariantna potenčna vrsta.

$$\sum_{k,m} \binom{n}{k} x^k y^m = \sum_m (1+x)^n y^m = \frac{1}{1-(1+x)y}.$$

$$K[[x_1, x_2 \dots]]$$

$$x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3 + \dots - \text{ok}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots - \text{ni ok.}$$

## 2.4 Reševanje linearnih rekurzivnih enačb s konstantnimi koeficienti

*Primer.*

$$(1) \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1, a_0 = 1$$

$$1, 3, 7, 15 \dots$$

$F(x) = \sum_n a_n x^n$  rodovna funkcija (angl. generating function) zapo-

redja.

$$\begin{aligned} F(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n = 2xF(x) + \frac{x}{1-x} \\ F(x)(1-2x) &= 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} \\ F(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)}. \end{aligned}$$

Ekvivalentno:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=1}^{\infty} \\ F(x) - 1 &= \frac{x}{1-x} + 2xF(x) \\ F(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x) + B(1-x)}{(1-x)(1-2x)} \\ / \cdot (1-x), x=1 \\ \frac{1}{-1} &= A \implies A = -1 \\ / \cdot (1-2x), x=\frac{1}{2} \\ B &= 2 \end{aligned}$$

$$a_n = -1 + 2^{n+1}.$$

$$(2) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2, F_0 = F_1 = 1 \quad / \cdot x^n \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_n F_n x^n \\ F(x) - 1 - x &= x(F(x) - 1) + x^2 F(x) \\ F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-y_1x)(1-y_2x)}. \end{aligned}$$

Ničli  $1-x-x^2$  sta  $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}$

$$y_1, y_2 \text{ sta ničli } y^2 - y - 1 \text{ (obrnjen polinom), torej } x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

V splošnem:

$$p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_dx^d; \quad c_d \neq 0$$



ima ničle  $\lambda_1 \dots \lambda_d$ , ima

$p^{\text{obr}}(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \dots + c_d$  (obrtni polinom) ničle  $\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_d}$ :

$$\begin{aligned} p^{\text{obr}}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) &= c_0 \cdot \frac{1}{\lambda_i^d} + c_1 \cdot \frac{1}{\lambda_i^{d-1}} + \dots + c_d \\ &= \frac{c_0 + c_1 \lambda_i + \dots + c_d \lambda_i^d}{\lambda_i^d} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-y_1x)(1-y_2x)} \\ &= \frac{\frac{1}{1-\frac{y_2}{y_1}}}{1-y_1x} + \frac{\frac{1}{1-\frac{y_1}{y_2}}}{1-y_2x} \\ &= \frac{1}{y_1-y_2} \left( \frac{y_1}{1-y_1x} - \frac{y_2}{1-y_2x} \right) \\ y_1 - y_2 &= 5 \\ \Rightarrow F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

**Izrek 2.4.1.** NSTE (naslednje trditve so ekvivalentne) za  $(a_n)_n, a_n \in \mathbb{C}$ :

- (1)  $c_d a_n + c_{d-1} a_{n-1} + \dots + c_n a_{n-d} = 0, \quad n \geq d, \quad c_0, c_d \neq 0,$
- (2)  $F(x) = \sum_n a_n x^n = \frac{P(x)}{c_d + \dots + c_0 x^d}, \quad \deg P < d,$
- (3)  $a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \lambda_i^n, \quad \lambda_1 \dots \lambda_k$  ničle  $c_d y^d + \dots + c_0$  (karakteristični polinom) s kratnostmi  $\alpha_1 \dots \alpha_k, \quad \deg p_i < \alpha_i.$

**Dokaz 2.4.2.**

(1)  $\implies$  (2):

$$\begin{aligned}
 c_d a_n + c_{d-1} a_{n-1} + \cdots + c_n a_{n-d} &= 0 \quad / \cdot x^n \sum_{n=d}^{\infty} \\
 c_d (F(x) - a_0 - \cdots - a_{d-1} x^{d-1}) \\
 + c_{d-1} (F(x) - a_0 - \cdots - a_{d-2} x^{d-2}) \\
 + \cdots + c_0 x^d F(x) &= 0 \\
 F(x) = (c_d + c_{d-1} x + c_{d-2} x^2 + \cdots + c_0 x^d) &= P(x) \quad \deg P < d.
 \end{aligned}$$

(2)  $\implies$  (1):

$$\begin{aligned}
 (c_d + c_{d-1} x + \cdots + c_0 x^d) \cdot \sum_n a_n x^n &= P(x) \\
 n \geq d: [x^n]: c_d a_n + \cdots + c_0 a_{n-d} &= 0.
 \end{aligned}$$

(2)  $\implies$  (3):

$$\begin{aligned}
 \sum_n a_n x^n &= \frac{P(x)}{c_d (1 - \lambda_1 x)^{\alpha_1} \cdots (1 - \lambda_m x)^{\lambda_m}} \\
 &\stackrel{\text{parc}}{=} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(1 - \lambda_i x)^j} \\
 \frac{1}{(1-x)^d} &= \sum_n \binom{n+d-1}{d-1} x^n \\
 a_n &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} \cdot \binom{n+j-1}{j-1} \right) \lambda_i^n, \\
 \binom{n+j-1}{j-1} &\text{binom v } n \text{ stopnje } j-1 < \alpha_i.
 \end{aligned}$$

(3)  $\implies$  (2): podobno:  $p_i(n)$  zapišemo v bazi  $\binom{n+j-1}{j-1}$ .

*Primer.*

$$a_n - 7a_{n-1} + 18a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \text{ dani.}$$

$$y^3 - 7y^2 + 18y - 12 = (y-2)^2(y-3)$$

$$\implies a_n = 2^n(An + B) + 3^n \cdot C.$$

$A, B, C$  dobimo iz  $a_0, a_1, a_2$  (vstavimo, dobimo sistem).

*Opomba.*

$\sum_n a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $\deg P \geq \deg Q \iff c_d a_n + \dots + c_n a_{n-d} = 0$  za  $n \geq N$  (dovolj velik).

*Opomba.*

$c_d a_n + \dots + c_0 a_{n-d} = r(n) \cdot \lambda^n$ ,  $\deg r = \alpha$ .

Homogena + partikularna

$\sum_n r(n) \lambda^n x^n = \frac{R(x)}{(1-\lambda x)^\alpha}$ .

Če  $\lambda^{\alpha_i}$  –kratna ničla karakterističnega polinoma:  $\sum_{j=1}^{\alpha+\alpha_i} \dots$

Nastavek:  $n^{\alpha_i} q(n) \lambda^n$ ,  $\deg q = \alpha_i - 1$ .

*Primer.*

$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n \cdot 2^n$ ,  $n \geq 2$ .

Partikularna:  $n^2 \cdot (An + B)2^n$ .

## 2.5 Nadaljevanje uporabe običajnih rodovnih funkcij

$F(x) = \sum_n a_n x^n$

$F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (a_n)_n$

$F'(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} ((n+1)a_{n+1})_n$

$xF'(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (na_n)_n$

$DF(x) := F'(x)$ ,  $D$ : operator odvajanja.

$(xD)^2 F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (n^2 a_n)_n$

$p(xD)F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (p(n)a_n)_n$ ,  $p$  polinom.

*Primer.*

$\sum_j j^2$

$\frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} (1)_n$

$(xD)^2 \frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} \left( \sum_{j=0}^n a_j \right)_n$

$x \cdot \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \dots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$  - samo členi.  $F(x) \xleftrightarrow{\text{orf}} (a_n)_n$

$F(x) \cdot \frac{1}{1-x} \xleftrightarrow{\text{orf}} \left( \sum_{j=0}^n a_j \right)_n$  - konvolucija z  $(1)_n$ .

$$\begin{aligned}
[X^n] \left( F(x) \cdot \frac{1}{1-x} \right) &= [x^n] \left( \frac{x^2}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4} \right) \\
&= \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

$$F(x) \cdot G(x) = \sum_n a_n x^n \cdot \sum_n b_n x^n = \sum_n \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Naj bo 1. del struktura  $A$   $((a_n)_n)$  preštevalno zaporedje,

naj bo 2. del struktura  $B$   $((b_n)_n)$  preštevalno zaporedje:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

*Primer.*

- (1)  $m$  kroglic, rdeče, črne, zelene, zelenih kroglic sodo in so na koncu.

1, 2, 5, 10 ...

$A$ : rdeče / črne kroglice:  $2^n \rightarrow \frac{1}{1-2x}$

$B$ : sodo mnogo zelenih kroglic:  $1, 0, 1, 0, 1 \dots \rightarrow \frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1-2x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{6}}{1+x}$$

$$a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n.$$

- (2) Kompozicije s  $k$  členi

$A$ : neničelno število:  $0, 1, 1, 1, 1 \dots \rightarrow \frac{x}{1-x}$

$$\left( \frac{x}{1-x} \right)^k = \sum_n \binom{n+k-1}{k-1} x^{n+k} = \sum_n \binom{n-1}{k-1} x^n,$$

šibke kompozicije:

$$\left( \frac{1}{1-x} \right)^k,$$

kompozicije z lihimi členi:  $0, 1, 0, 1, 0, 1 \dots \rightarrow \frac{x}{1-x^2}$

$$\left( \frac{x}{1-x^2} \right)^k.$$

- (3)  $S(n, k)$

$$n = 7, k = 3 : \{ \{1, 4, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 6\} \}$$

$$\sum_n S(n, k) x^n = ?$$

Vrstni red določimo: 1 v 1. bloku, v 2. bloku najmanjše število, ki ni v

1. bloku ...

$\rightarrow 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 3\ 2$  (primer od prej).

Dobimo: zaporedje  $n$  števil v  $[k]$ , vsa od 1 do  $k$  se pojavijo, 1. pojavitev

$i$  je pred 1. pojavitvijo  $i + 1$

$1\ (1 \dots 1)2(1/2 \dots 1/2)3(\dots) \dots$

$$x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot x \cdot \frac{1}{1-2x} \dots$$

$$\sum_n S(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \dots (1-kx)}.$$

$$\text{Ekvivalentno: } (1-kx) \sum_n S(n, k) x^n = \sum_n S(n-1, k-1) x^n$$

$$[x^n] : S(n, k) - kS(n-1, k) = S(n-1, k-1)$$

$$\frac{x^k}{(1-x) \dots (1-kx)} = \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{1-jx} \stackrel{DN}{=} \dots$$

(4) Razčlenitve

$\overline{p}_k(n)$   $\stackrel{\text{konjugiranje}}{=}$  število razčlenitev  $n$  s členi  $\leq k$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^k}$$

$$= \sum_n \overline{p}_k(n) x^n$$

$$= (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+\dots) \dots (1+x^k+\dots)$$

$$[x^n] : x^n = x^{m_1} \cdot x^{2m_2} \dots x^{km_k}$$

$$n = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$$

$$k \dots k \dots 32 \dots 21 \dots 1$$

$$\sum_n p_n(n) x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_n \overline{p}_k(n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1-x^j)}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

$d(n)$ : število razčlenitev  $n$  z različnimi členi

$$\sum_n d(n) x^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i) \quad (0 \text{ ali } 1\text{-krat vedno})$$

$o(n)$  = število razčlenitev  $n$  z lihimi členi

$$\sum_n o(n) x^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

$$\prod_i (1+x^i) \cdot \frac{1-x^i}{1+x^i} = \prod_i \frac{1-1^{2i}}{1-x} = \prod_i \frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

$$\implies o(n) = d(n).$$

DN: bijekcija.

(5)  $c_n$ : Dyckove poti dolžine  $n$

$$c_{n+1} = \prod_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k} \quad / \cdot x^{n+1} \sum_n$$

$$F(x) - 1 = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} - k) x^n = x \cdot F^2(x)$$

$$F(x) = 1 + xF^2(x):$$

1: prazna,  $xF^2(x)$ : dolžine  $n$ ,  $2n$  korakov

Motzkinova pot: v smeri  $(1,1), (1, -1), (1,0)$

$$M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x):$$

1: prazna,  $xM(x)$ : naravnost,  $x^2M^2(x)$ : desno-gor

$$xF^2 - F + 1 = 0$$

$$F = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} (-4x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} - \text{ne, ker } \frac{2+\dots}{2x}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Druga utemeljitev:

$$4x^2F^2 - 4xF + 4x = 0$$

$$(2xF - (1 - \sqrt{1-4x}))(2xF - (1 + \sqrt{1-4x})) = 0 \text{ v } K[[x]].$$

$$2xF - (1 + \sqrt{1-4x}) \neq 0 \text{ (konstantni koeficient nima 0)}$$

$$\implies 2xF = 1 - \sqrt{1-4x}.$$

$F^k(x)$ : razdelimo na  $k$  delov, vsakemu damo strukturo  $F$ .

$\sum_{k=0}^{\infty} F^k(x) = \frac{1}{1-F(x)}$ : razdelimo na poljubno mnogo delov, vsakemu  $F$ .

*Primer.*

(1) Kompozicije  $n$ .

$$\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x} = \begin{cases} 2^{n-1} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

kompozicije s členi 1 in 2

$$\frac{1}{1-(x+x^2)}.$$

(2)  $2 \times n$  plošča, domine  $2 \times 1$ .

Primitivni tlakovanji

$$\frac{1}{1-x-x^2}$$

Domini  $1 \times 1$  in  $2 \times 1$

$n = 1$ : 1 možnost,

$n = 2$ : 3,

$n = 3$ : 2,

$n = 4$ : 2,

$\vdots$

$$\frac{1}{1-(2x+3x^2+2x^3+\dots)} = \frac{1}{1-x^2-\frac{2x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-3x-x^2+x^3}.$$

(3) Primitivna Dyckova pot: se ne dotakne x osi.

$$F(x) = \frac{1}{1-xF(x)},$$

$$M(x) = \frac{1}{1-x-x^2F(x)}.$$

Levi faktor Dyckove poti:  $L(x) = \frac{F(x^2)}{1-x-x^2F(x)} = \dots = \frac{2}{1-2x+\sqrt{1-4x^2}}$

$F(x^2)$ : Dyckova pot (na začetku),  $xF(x^2)$ : korak + Dyckova pot.

DN:  $L_n = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , namig:  $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = ?$

$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1G(x) + a_2G^2(x) + \dots$ : razdelimo na poljubno delov, vsakemu delu damo strukturo  $G$ , delom da strukturo  $F$ .

*Primer.*

Število kompozicij s sodo mnogo lihimi členi.

$n = 0 : 1$

$n = 1 : 0$

$n = 2 : 1$

$n = 3 : 0$

$n = 4 : 3$

$n = 5 : 0$

$n = 6 : 8$

$n = 7 : 0$

$n = 8 : 21$

$G(x) = \frac{x}{1-x^2}$  - lihi

$F(x) = \frac{1}{1-x^2}$  - sodo mnogo.

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^2}{(1-x-x^2)(1+x-x^2)} \\ &= \dots \\ &= 1 + \frac{x}{2} \left( \frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1+x-x^2} \right) \\ &= \sum_{n \text{ lih}} F_n x^n\end{aligned}$$

kjer se, ko razpišemo  $\left(\frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1+x-x^2}\right)$  sodi odštejejo, lihi štejejo 2-krat, to delimo z 2.

*Primer* (Dobri Will Hunting).

$$(1) \text{ Matrika sosednosti: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ Matrika, ki opisuje sprehode dolžine 3 : } A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) Poišči rodovno funkcijo za sprehode  $i \rightarrow j$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k x^k = (I - Ax)^{-1} = \frac{1}{\det(I - Ax)} [\dots]$$

(4)  $1 \rightarrow 3$ :

$$\frac{2x^2+2x^3}{1-7x^2-2x^3+4x^4}.$$



## 2.6 Uporaba eksponentnih rodovnih funkcij

$$F(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$$

$$F(x) \xleftrightarrow{\text{erf}} (a_n)_n$$

$$\left[ \frac{x^n}{n!} \right] F(x) = a_n$$

$$\left[ \frac{x^n}{n!} \right] F(x) = n! [x^n] F(x)$$

$$F'(x) \xleftrightarrow{\text{erf}} (a_{n+1})_n$$

$$xF'(x) \xleftrightarrow{\text{erf}} (n \cdot a_n)_n$$

$$p(xD)F(x) \xleftrightarrow{\text{erf}} (p(n)a_n)_n.$$

*Primer.*

$$(1) \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad n \geq 0$$

$$F(x) = \sum_n \frac{F_n}{n!} x^n$$

$$F''(x) - F'(x) - F(x) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F(x) = Ae^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + Be^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$F_n = \left[ \frac{x^n}{n!} \right] F(x) = A \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$(2) \quad i_n: \text{število involucij v } S_n \text{ } (\pi^2 = id).$$

$$i_n = i_{n-1} + (n-1)i_{n-2}; \quad n \geq 2:$$

$$i_{n-1}: n \text{ fiksna točka}$$

$$i_{n-2}: n \text{ v transpoziciji z enim od } n-1 \text{ ostalih.}$$

$$I(x) = \sum_n \frac{i_n}{n!} x^n$$

$$I'' - I' - (xI' + I) = 0$$

$$I'' - (x+1)I' - I = 0$$

$$(I' - (x+1)I')' = 0$$

$$I' - (x+1)I = c$$

$$x=0: 1-1=0=c$$

$$I' = (x+1)I$$

$$\int \frac{dI}{I} = \int (x+1) dx$$

$$\ln I = \frac{x^2}{2} + x + \log D$$

$$I = D e^{x + \frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x=0} D = 1$$

$$I(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}.$$

$$F(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$$

$$G(x) = \sum_n \frac{b_n}{n!} x^n$$

$$F(x)G(x) = \sum_n \left( \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_n \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}: \text{ binomska konvolucija.}$$

orf: neoznačene strukture,

erf: označene strukture.

*Primer.*

$d_n$ : premestitve v  $S_n$  (dearangement) - permutacije brez negibne točke.

$$D(x) = \sum_n \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Permutacija = premestitev + množica negibnih točk.

$$(1\ 5\ 2)\ (3)\ (4\ 8\ 7)\ (6)$$

$$\frac{1}{1-x} = D(x) \cdot e^x$$

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$e^{-x} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_n \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= \sum_n \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_n \left( \sum_{(S_1, S_2), S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = [n]} a_{|S_1|} b_{|S_2|} \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$F^k(x) = \sum_n \left( \sum_{(i_1 \dots i_k), i_j \geq 0, i_1 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1 \dots i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Predpostavimo  $F(0) = 0!!$

$$\begin{aligned} F^k(x) &= \sum_n \left( \sum_{(S_1 \dots S_k), S_i \neq \emptyset, S_i \cap S_j = \emptyset, S_1 \cup \dots \cup S_k = n} a_{|S_1|} \dots a_{|S_k|} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= k! \sum_n \left( \sum_{(B_1 \dots B_k) \text{ razdelitev } [n]} a_{|B_1|} \dots a_{|B_k|} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

**Izrek 2.6.1.**

$F(0) = 0$ .

$\frac{1}{k!} F^k(x)$  je erf za strukturo: izberemo razdelitev in vsakemu bloku damo strukturo  $F$ .

*Primer.*

$$\sum_n S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^k - 1)^k$$

$F$ : neprazna množica:  $0, 1, 1 \dots \xrightarrow{\text{erf}} e^x - 1$ .

Binomski izrek  $(e^x - 1)^k = e^{-kx} - \dots$  nam da formulo za  $S(n, k)$ .

$$\sum_n c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \log \frac{1}{1-x} \right)^k$$

$F$ : cikel:  $a_n = (n-1)!$  za  $n \geq 1 \xrightarrow{\text{erf}} \log \frac{1}{1-x}$

$$\sum_n L(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k$$

$F$ : neprazna linearno urejena množica:  $a_n = (n)!$  za  $n \geq 1 \xrightarrow{\text{erf}} \log \frac{1}{1-x}$ .

**Izrek 2.6.2** (Eksponentna formula).

$F(0) = 0$ .

$e^{F(x)}$  je erf za strukturo: izberemo razdelitev, vsakemu (bloku) damo strukturo  $F$ .

**Dokaz 2.6.3.**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k(x) = e^{F(x)}$ .

*Primer.*

(1) Permutacija = množica disjunktnih ciklov.

$$\frac{1}{1-x} = e^{\log \frac{1}{1-x}}.$$

DN: direktno.

(2) Involucija = množica ciklov dolžine 1 in 2:  $(0,1,1,0,0,\dots)$

$$\begin{aligned}\sum_n \frac{i_n}{n!} &= e^{x+\frac{x^2}{2}} \\ a_n &= |\{\pi \in S_n : \pi^6 = id\}| \\ \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n &= e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}} \\ \sum_n \frac{d_n}{n!} x^n &= e^{\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n}} = e^{\log \frac{1}{1-x} - x} = \frac{e^{-x}}{1-x}.\end{aligned}$$

(3)  $\sum_n \frac{B(n)}{n!} x^n = e^{e^x-1}$ .

(4)  $a_n$ : število 2-regularnih grafov ( $deg v = 2 \forall v \in V(G)$ ),

$F$ : moč množice neusmerjenih ciklov dolžine  $\geq 3$ :  $a_n = \frac{(n-1)!}{2}$ ;  $n \geq 3$

$$\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n = e^{\sum_{n \geq 3} \frac{(n-1)!}{2} \frac{x^n}{n}} = e^{\frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2} \right)} = \frac{e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}.$$

Kompozitum:

$$(F \circ G)(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} G^k(x).$$

**Izrek 2.6.4** (O kompoziciji).

$$F(x), G(x), F(0) = 0.$$

Potem je  $(F \circ G)(x)$  erf za strukturo: množico razdelimo na bloke, vsakemu bloku damo strukturo  $G$ , množici blokov damo strukturo  $F$ .

*Primer.*

(1)  $B(\tilde{n})$ : urejena Bellova števila = število urejenih razdelitev množice  $[n]$ .

$$B(\tilde{2}) = 3 : \{1,2\}; \{1\},\{2\}; \{2\},\{1\}$$

$$B(\tilde{n}) = \sum_k S(n,k).$$

$B(\tilde{n})$ : število vseh surjekcij iz  $[n]$ .

$$\sum_n \frac{B(\tilde{n})}{n!} x^n = \frac{1}{1-(e^x-1)} = \frac{1}{2-e^x}$$

$$G(x) = e^x - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(2) Permutacije z lihim številom ciklov

$$\sum_n a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{\log \frac{1}{1-x}} - e^{-\log \frac{1}{1-x}}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - (1-x) \right).$$

$$G(x) = \log \frac{1}{1-x}$$

$$F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (F(x) - F(-x) : \text{lihi})$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ \frac{n}{2} & n \geq 2 \end{cases}$$

orf	erf
$F(x)G(x)$	$F(x)G(x)$
$F^k(x)$	$\frac{1}{k!}F^k(x)$
$\frac{1}{1-F(x)}, F(0) = 0$	$e^{F(x)}$
$F \circ G$	$F \circ G$

## 2.7 Algebraične rodovne funkcije

$K[x]$  polinomi,

$K[[x]]$  formalni polimon (fp?),

$K(x)$  racionalne funkcije (polje ulomkov za  $K[x]$ ),

$\frac{1}{x} \in K(x)$ ,  $\frac{1}{x} \notin K[[x]]$ ,

$K(x) \cap K[[x]]$  racionalna rodovna funkcija.

Za taka zaporedja imamo linearne rekurzije.

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$xF^2 - F + 1 = 0$$

$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$  kvadratična rekurzija.

Ali je  $F(x) \in K(x)$ ?

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$xP^2 = PQ - Q^2 = Q(P - Q)$$

$L$  :  $\deg P \cdot 2 + 1$  - liha stopnja,

$$D : \begin{cases} \deg P < \deg Q \implies Q(P - Q) \text{ sode stopnje} \\ \deg P \geq \deg Q \implies \deg Q(P - Q) \leq 2 \cdot \deg P \end{cases}$$

### Definicija 2.7.1.

$F(x) \in K[[x]]$  je algebraična reda  $d$ , če

$$Q_d(x)F^d(x) + Q_{d-1}(x)F^{d-1}(x) + \dots + Q_0(x) = 0 \text{ za } Q_0 \cdot Q_d \in K[X], Q_0, Q_d \neq 0,$$

ne obstaja taka enačba stopnje  $< d$ .

Algebraična reda  $d =$  racionalna fpv (formalna potenčna vrsta).

$F(x) = \sum_n F_n x^n$ ,  $M(x) = \sum_n M_n x^n$  algebraični reda 2.

$Q_d(x)F^d(x) + \dots + Q_0(x) = 0$  za  $Q_0, Q_d \neq 0$

$C_n : xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0$

$M_n : x^2 F(x)^2 + xF(x) + 1 = 0$ .

$S$ -drevo:

$S \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Drevo s korenom, vsak element je list ali pa je število naslednikov v  $S$ .

$\{2, 3\}$ -drevo

$a_n$ : število  $S$ -dreves z  $n$  vozlišči,

$b_n$ : število  $S$ -dreves z  $n$  listi.

$U(x) = \sum_n a_n x^n$

$V(t) = \sum_n b_n t^n$ .

$S = \{2, 3\}$

$U(x) = x + xU^2(x) + xU^3(x)$ :

$x$ : 1 vozlišče.

$V(t) = t + v^2(t) + v^3(t)$ :

koren ne prispeva k številu listov.

$U(x) = x + \sum_{k \in S} xU^k(x)$

$V(t) = t + \sum_{k \in S} tV^k(t)$ ,  $1 \notin S$ .

$S$  končna  $\implies S$  algebraična.

Če  $S$  neskončna, sta  $U$  in  $V$  vseeno lahko algebraični.

*Primer.*

- $S = \{2\}$  - dvojiška drevesa.

$$v = t + v^2$$

$$v^2 - v + t = 0 \implies v = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} t^n$$

$C_n$ : število dvojiških dreves z  $n + 1$  listi.

- $S = \{k\}$   
 $v = t + v^k$  - Lagrangeeva inverzija (kasneje).
- $S = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$   
 $U = x + x \sum_{k=1}^{\infty} U^k = x + x \frac{U}{1-U}$   
 $U - U^2 = x - xU + xU = x$   
 $U^2 - U + x = 0 \implies U = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$   
 $C_n$ : število ravninskih dreves z  $n + 1$  vozlišči.

Izkaže se:  $U, V$  algebraični  $\iff S$  se za končno množico razlikuje od končne unije aritmetičnih zaporedij.

### Trditev 2.7.2.

$K_{alg}[[x]] = \{F[x] \in K[[x]] \text{ algebraična}\}$  je podalgebra  $K[[x]]$ .

$$xF^2 - F + 1 = 0$$

$$F^2 + 2xF F' = 0$$

$$F' = \frac{F^2}{1-2xF} \stackrel{?}{=} a + bF; \quad a, b \in K(x)$$

$$F^2 = a + bF - 2a x F - 2b x F^2$$

$$(1 - 2bx)F^2 + (2ax - b)F - ax = 0$$

$$(1 - 2bx + (2ab - x))F - 1 - 2bx - ax = 0$$

$\rightarrow$ : 2 enačbi, 2 neznanki.

$$a = \frac{1}{x(1-4x)}$$

$$b = \frac{2x-1}{x(1-4x)}$$

$$F' - \frac{1}{x(1-4x)} - \frac{2x-1}{x(1-4x)} F = 0$$

$$x(1-4x)F' - 1 - (2x-1)F = 0$$

$$F' = \sum_n n C_n x^{n+1}$$

$$[x^n] : n C_n - 4(n-1)C_{n-1} + 2C_{n-1} + C_n \text{ za } n > 1$$

$$C_n = \frac{2(n-1)}{n+1} C_{n-1} \implies \dots C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

### Definicija 2.7.3.

$F(x) \in K[[x]]$  je  $D$ -končna, če je

$R_n(x)F^{(d)}(x) + \dots + R_1F'(x) + R_0 = 0$  za  $R_i(x) \in K[x]$ .

Ekvivalentno: vektorski prostor nad  $K(x)$ , generiran z  $F, F', F'' \dots$  je končno razsežen.

**Definicija 2.7.4.**

$(a_n)_n$  je  $P$ -rekurzivna, če je  $p_d(n)a_n + \dots + p_0(n)a_{n-d} = 0$  za  $n \geq d$ .

**Trditev 2.7.5.**

$F(x) = \sum_n a_n x^n$  je  $D$ -končna  $\iff (a_n)_n$  je  $P$ -rekurzivna.

Torej: za  $P$ -rekurzivno zaporedje lahko člene hitro izračunamo.

*Zgled.*

$F(x) = \sum_n C_n x^n$  je  $D$ -končna,

$e^x$  je  $D$ -končna:  $F' - F = 0$ ,

$e^x$  ni algebraična.

**Izrek 2.7.6.**

$F(x)$  algebraična  $\implies D$ -končna.

**Dokaz 2.7.7.** (skica):

$$Q_d(x)F^d(x) + \dots + Q_0(x) = 0 \quad /'$$

$$Q_d(x)'F^d(x) + dQ_d(x)F^{d-1}(x)F'(x) + \dots + Q_0'(x) = 0$$

$$F'(x) \in K(x, F(x))$$

Iz algebre:

$K$  obseg,  $u$  v večjem obsegu;

(i) v algebraičnem:  $K[u] = K(u)$  končno razsežen VP,

(ii) v transcendentnem:  $K[u] \subseteq K[x]$  („ $u$  spremenljivka“).

$$K = K[x]$$

$$u = F(x)$$

$$K[u] = K(x, F(x)).$$

Torej:  $K(x, F(x))$  je končno razsežen VP nad  $K(x)$ , torej so  $1, F, F' \dots$  linearno neodvisni  $\implies F$  je  $D$ -končna.



## 2.8 Eulerjeva in eulerska števila

$E_n$ : število alternirajočih permutacij v  $S_n$ .

$$E_3 = 2 \text{ (231), (132)}$$

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k} + \delta_{n0}$$

$$E(x) = \sum_n \frac{E_n}{n!} x^n$$

$$2F' = F^2 + 1$$

$$\int \frac{2dF}{F^2+1} = \int dx$$

$$2 \arctan F = x + 2c$$

$$F = \tan\left(\frac{x}{2} + c\right)$$

$$F(0) = 1 = \tan c \implies c = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

### Izrek 2.8.1.

$$\sum_n \frac{E_n}{n!} x^n = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \text{ oz.}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_n \text{sod } \frac{E_n}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_n \text{lih } \frac{E_n}{n!} x^n$$

*Opomba.*

Bernoullijeva števila.

$$B_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1, n \text{ lih} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} E_{n-1}}{2^n (2^n - 1)} & n > 0, n \text{ sod} \end{cases}$$

$$\sum_n B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2n} (-1)^{k+1} \pi^{2k}}{2 \cdot (2k)!} = \frac{E_{2k-1} \pi^{2k}}{2(2k-1)!(2^{2k}-1)} = \zeta(2k)$$

Riemmanova funkcija  $\zeta$ :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ za } \operatorname{Re} s > 1.$$

Z analitičnim nadaljevanjem lahko  $\zeta$  definiramo na  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

$\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{n+1}$  - soda negativna števila so ničle - trivialne ničle.

Riemmanova hipoteza:

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$  za vsako netrivialno ničlo  $z$  funkcije  $\zeta$ .

$$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}$$

$$„\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}“$$

Faulhaberjeva formula:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} B_l n^{k+1-l}$$

$$= \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{l+1} \binom{k}{2l-1}}{2^{2l}(2^{2l}-1)} E_{2l-1} n^{k-1-2l}$$

$$= \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k \cdot n^{2k}}$$

$$= \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k-1}}{2^{2k}(2^{2k}-1)n^{2k}},$$

kjer je  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$   $n$ -to harmoično število.

$A(n, k)$ : število permutacij v  $S_n$  z  $k-1$  spusti.

$$A(n, k) = (n+1-k)A(n-1, k-1) + kA(n-1, k)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad /' / \cdot x$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots \quad /' / \cdot x$$

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \dots \quad /' / \cdot x$$

$$\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4} = x + 8x^2 + 27x^3 + \dots$$

$$A_n(x) = \sum_k A(n, k)x^k \text{ eulerski polinom.}$$

### Izrek 2.8.2.

$$\sum_m m^n x^m = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

### Dokaz 2.8.3.

Indukcija:

$$n=0: \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$n-1 \rightarrow n:$$

$$\sum_m m^{n-1} x^m = \frac{A_{n-1}(x)}{(1-x)^n} \quad /' / \cdot x$$

$$x \cdot \sum_m m^{n-1} x^{m-1} = \frac{A'_{n-1}(x)(1-x)^n + A_{n-1}(x)n(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{2n}} \stackrel{?}{=} \frac{A_n(x)}{(1+x)^{n+1}}$$

$$[x^k]: (k+1)A(n-1, k-1) - kA(n-1, k) + nA(n-1, k) = A(n, k) \quad \checkmark$$

$$A_{n-1}(x) = \sum_k A(n-1, k)x^k$$

$$A'_{n-1}(x) = \sum_k kA(n-1, k)x^{k-1}.$$

**Izrek 2.8.4.**

$\sum_{n,k} A(n, k)x^k \frac{y^n}{n!} = \frac{1-x}{1-xe^{xy(1-y)}}$  - mešana rodovna funkcija (običajna v  $x$ , eksponentna v  $y$ ).

**Dokaz 2.8.5.**

$$\begin{aligned} & \sum_{n,k} A(n, k)x^k \frac{y^n}{n!} \\ &= (1-x) \left( \sum_k \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \cdot \frac{y^n}{n!} (1-x)^n \right) \\ &= (1-x) \sum_n \left( \sum_m m^n x^m \right) \frac{y^n (1-x)^n}{n!} \\ &= (1-x) \sum_m \left( \sum_n \frac{m^n y^n (1-x)^n}{n!} \right) x^m \\ &= (1-x) \sum_m e^{xy(1-x)} x^m \\ &= \frac{1-x}{1-e^{xy(1-x)}}. \end{aligned}$$

## 2.9 Izračun povprečij in variance

Koliko elementov ima v povprečju podmnožica  $[n]$ ?

$$\frac{\sum_{T \subseteq [n]} |T|}{2^n} = \frac{\sum_n k \binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

$$(1+x)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k \quad /'$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_k k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$x = 1$ :

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_k k \binom{n}{k}.$$

$S$  končna množica.

$$F(x) = \sum_{a \in S} x^{f(a)}$$

$$F(1) = |S|$$

$$F'(x) = \sum_{a \in S} f(a) \cdot x^{f(a)-1}$$

$$F'(1) = \sum_{a \in S} f(a)$$

$$\mu = \frac{F'(1)}{F(1)} = (\log' F)(1)$$

$$F(x) = (1+x)^n$$

$$\log F(x) = n \log(1+x)$$

$$\log' F(x) = \frac{n}{1+x}$$

$$(\log' F)(1) = \frac{n}{2}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$E(x^2) = \frac{\sum_n f^2(s)}{|S|}$$

$$F'(x) + xF''(x) = (xF'(x))' = \sum_{a \in S} f^2(a)x^{f(a)-1}$$

$$x = 1:$$

$$\sigma^2 = \frac{F'(1)+F''(1)}{F(1)} - \frac{F'(1)^2}{F(1)^2} = \frac{F'(1)}{F(1)} + \frac{F''(1)F(1)-F'(1)^2}{F(1)^2}.$$

$$\text{Torej}$$

$$\mu = (\log' F)(1)$$

$$\sigma^2 = (\log' F)(1) + (\log'' F)(1)$$

$$F(x) = (1+x)^n$$

$$\mu = \frac{n}{2}$$

$$\log' F(x) = \frac{n}{1+x}$$

$$\log'' F(x) = -\frac{n}{(1-x)^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}$$

$$\frac{n}{2} \pm \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

$$\text{Koliko ciklov ima v povprečju permutacija v } S_n?$$

$$\sum_{\pi \in S_n} x^{f(\pi)} = \sum_k c(n,k)x^k = x^{\bar{n}} = F(x)$$

$$\log F(x) = \log x + \log(x+1) + \dots + \log(x+n-1)$$

$$\log' F(x) = \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x+n-1}$$

$$\mu = H_n = \log n + \gamma + o(1)$$

$$\log'' F(x) = -\frac{1}{x^2} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)^2}$$

$$\sigma^2 = H_n - \sum_{i=1}^n i^2 = \log n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + o(1)$$

$$\log n \pm \sqrt{\log n}.$$

## 2.10 Lagrangeeva inverzija

$K[x]$  algebra polinomov,

$K(x)$  obseg racionalnih funkcij (obseg ulomkov  $K[x]$ ),

$K[[x]]$  algebra formalnih potenčnih vrst,

$K((x)) = \{\sum_{n \geq n_0} a_n x^n; n_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in K\}$  obseg formalnih Laurentovih vrst

(obseg ulomkov  $K[[x]]$ ).

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)}{x^m H(x)}, \frac{F(x)}{H(x)} \in K[[x]], H(0) \neq 0.$$

Seštevanje, množenje, odvod, kompozitum, valuacija ( $\in \mathbb{Z}$ ).

$$\text{res}F(x) = [x^{-1}]F(x) \text{ residuum.}$$

**Lema 2.10.1.**  $\text{res}F(x) = 0 \leftrightarrow F(x) = G'(x)$  za  $K((x))$ .

**Dokaz 2.10.2.**

( $\Leftarrow$ )

$$F(x) = \left( \sum_{n \geq n_0} b_n x^n \right) = \left( \sum_{n \geq n_0} n b_n x^{n-1} \right)$$

$$[x^{-1}]F(x) = 0 \cdot b_0 = 0.$$

( $\Rightarrow$ )

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_{n-1} x^n}{n}$$

$$a_{-1} = 0.$$

**Lema 2.10.3.**

$$F(x) \in K((x)), F(x) \neq 0, \text{res}_{F(x)}^{F'(x)} = v(F(x)).$$

**Dokaz 2.10.4.**

$$F(x) = x^{n_0} G(x)$$

$$n_0 = v(F(x))$$

$$G(x) \in K[[x]], G(0) \neq 0$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{n_0 x^{n_0-1} G(x) + x^{n_0} x^{n_0} G'(x)}{x^{n_0} G(x)} = \frac{n_0}{x} + \frac{G'(x)}{G(x)}$$

$$\frac{G'(x)}{G(x)} \in K[[x]].$$

Lagrangeeva inverzija (1. verzija):

$$F \in K[[x]]$$

$$v(F(x)) = 1$$

$$n \cdot [x^n] (F^{<-1>}(x))^k = k \cdot [x^{-k}] F^{-n}(x);$$

$$F^{-n}(x) \in K((x)).$$

$$\text{Torej: } n \cdot [x^n] F^{<-1>}(x) = \text{res} F^{-1}(x).$$

$$\textbf{Dokaz 2.10.5. } (F^{<-1>}(x))^k = \sum_{m \geq k} c_m x^m$$

$$x \leftrightarrow F(x)$$

$$x^k = \sum_{m \geq k} c_m (F(x))^m \quad /'$$

$$kx^{k-1} = \sum_{m \geq k} m c_m F^{m-1}(x) F'(x) \quad / : F^n(x)$$

$$\frac{kx^{k-1}}{F^n(x)} = \sum_{m \geq k} m c_m F^{m-n-1}(x) F'(x) \quad / \text{res}$$

$$[x^{-1}] \frac{kx^{k-1}}{F^n(x)} = [x^{-k}] \frac{k}{F^n(x)}$$

$$F^{m-n-1}(x) F'(x) = \frac{(F^{m-n}(x))'}{m-n}; \quad m \neq n$$

$$\text{res} \left( F^{m-n-1}(x) F'(x) \right) = 0 \text{ \u0107e } m \neq n \text{ in 1 sicer (lemi)}$$

$$\rightarrow n \cdot a_n \cdot 1 \text{ (leva stran).} \quad \blacksquare$$

*Primer.*

$$F(x) = x - x^2$$

$$F^{<-1>}(x) = ?$$

$$n[x^n] F^{<-1>}(x) = [x^{-1}] \left( \frac{1}{1-x^2} \right)^n = [x^{-n}] \frac{x^{-n}}{(1-x)^n}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_m \binom{m+n-1}{n-1} x^m$$

$$[x^n] F^{<-1>}(x) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}.$$

\u0160e ena razlaga:

$$y - y^2 = x$$

$$y^2 - y + x = 0 \implies y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \implies y = x \sum_n C_n x^n.$$

Lagrangeeva inverzija (2. verzija)

$$F(x) = xG(F(x))$$

$$F(x) \in K[[x]]$$

$$G(x) \in K[[x]], G(0) \neq 0, v(F) = 1$$

$$[x^k] F(x)^k = k[x^{n-k}] G(x)^n.$$

**Dokaz 2.10.6.**

$$f(x) := \frac{x}{G(x)}, v(f) = 1$$

$$f(F(x)) = \frac{F(x)}{G(F(x))} = 1 \rightarrow \text{ima levi inverz, tudi desni.}$$

$$n[x^n] F(x)^k = k[x^n] (f^{<-1>}(x))^k$$

$$= k[x^{-k}]f^{-k}(x) = k[x^{-k}]x^{-n}G^n(x).$$

*Primer.*

$$(a) \ S = \{k\}$$

$$k = 3$$

$a_n$ : število  $k$ -dreves na  $n$  vozliščih.

$$v(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$V(x) = x + xV^k(x) = x(1 + V^k(x))$$

$$G(x) = (1 + x)^n$$

$$n[x^n]V(x)[x^{n-1}](1 + x^k)^n = k[x^{n-1}]\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{k_i};$$

$$n = ki + 1, i \in \mathbb{N}, a_n = a_{ki+1} = \frac{1}{n} \cdots = \frac{1}{ki+1} \binom{ki+1}{i}.$$

$$(b) \text{ Vpeta drevesa v } K_n.$$

$r_n$ : število vpetih dreves s korenem v  $K_n$ .

$$R(x) = \sum_n \frac{r_n}{n!} x^n \text{ (vozlišča so označena).}$$

Označimo drevo s korenem = koren + množica blokov, ki jim damo strukturo označenega drevesa s korenem.

$$R(x) = xe^{R(x)}$$

$$G(x) = e^x$$

$$n[x^n]R(x) = [x^{n-1}]e^{nx}$$

$$e^n = \sum_k \frac{n^k x^k}{n!}$$

$$\frac{nr_n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$r_n = n^{n-1}$$

Število vpetih dreves v  $K_n$  je  $n^{n-2}$ .

## 2.11 Asimptotika koeficientov

$$K = \mathbb{C}$$

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  ima pozitiven konvergenčni polmer

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

$F$  je holomorfna v okolici 0.

Za  $\forall \epsilon > 0$ :

- $|a_n| < \frac{1}{R} + \epsilon$  za  $\forall n \geq n_0$ ,
- $|a_n| > \frac{1}{R} - \epsilon$  za neskončno mnogo  $n$ .

Npr.  $F(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$

$R = 1$ ,

$|a_n| < (1 + \epsilon)^n$  za  $\forall n$ ,

$|a_n| > (1 - \epsilon)^n$  za vse sode  $n$ .

$R = \infty \implies F(z)$  cela funkcija.

$R < \infty \implies F(z)$  ima singularnost v  $z_0$ ,  $|z_0| = R$ .

**Definicija 2.11.1.**  $f$  ima v  $z_0$  pol reda  $r$ , če ima  $f(z)(z - z_0)^r$  odpravljivo singularnost v  $z_0$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^r \neq 0$ .

Funkcija je meromorfna, če so vse singularnosti poli in množica polov nima stekališč (oz. je diskretna).

$$f(z)(z - z_0)^r = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots \quad / : (z - z_0)^n$$

V kombinatoriki:  $1 - \frac{z}{z_0}$ ,  $b_i \mapsto b_{i-r}$

$$f(z) = b_{-r} + b_{-r+1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) + \dots + b_{-1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-1} + b_0 + b_1 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) + \dots$$

Glavni del (angl. principal part):

$$PP_{f,z_0}(z) = b_{-r} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^r + \dots + b_{-1} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-1}.$$

Če je  $z_0$  edina singularnost na  $|z| = R$ :

$f(z) - PP_{f,z_0}(z)$  ima konvergenčni polmer  $R' > R$ .

$$[z^n]PP_{f,z_0}(z) = \left(\sum_{i=1}^r b_{-i} \binom{n+i-1}{i-1}\right) z_0^n \sim \frac{b_{-r} n^{r-1}}{z_0^n (r-1)!}.$$

$\forall \epsilon > 0 : [z^n] |f(z) - PP_{f,z_0}(z)| < \left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n$  za  $n \geq n_0$ .

$$\frac{1}{R'} + \epsilon < \frac{1}{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n}{\left(\frac{1}{R}\right)^n} = 0.$$

**Izrek 2.11.2.**

$F(z) \in \mathbb{C}[[x]]$ ,  $R \in (0, \infty)$ ,  $z_0$  edina singularnost na  $|z_0| = R$ ,  $z_0$  je pol reda  $r$ . Potem je



$$[z^n]F(z) \sim \frac{b_{-r}n^{r-1}}{z_0^n(r-1)!}, \text{ kjer je}$$

$$b_{-r} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^r.$$

*Primer.*

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)}$$

$$R = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{1}{2}, r = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{(1-z)(1-2z)} (1-2z) = 2 = b_{-1}$$

$$a_n \sim \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^{n+1}.$$

$$(2) \quad d_n: \text{ število premestitev v } S_n$$

$$\sum_n \frac{d_n}{n!} z^n = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

$$z_0 = 1, r = 1$$

$$b_{-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{-z}}{1-z} (1-z) = e^{-1}$$

$$\frac{d_n}{n!} \sim \frac{e^{-1}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{e}$$

$$d_n \sim \frac{n!}{e}.$$

Koliko dober je za približek?

$\frac{e^{-z}}{1-z} - \frac{e^{-1}}{1-z}$  je cela funkcija.

$$[z^n] (\text{cela funkcija}) < \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n = \epsilon^n \text{ za } n \geq n_0.$$

Koeficienti celih funkcij hitro padajo proti 0.

Ker je  $z_0 = 1$  edini pol in ker je enostaven, je  $\frac{b_{-1}}{z_0^n}$  odličen približek.

$$d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor.$$

$$(3) \quad \tilde{B}(n): \text{ urejena Bellova števila}$$

$$\tilde{B}(n) = \sum_k k! S(n, k)$$

$$\sum_n \tilde{B}(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1-(e^z-1)} = \frac{1}{2-e^z}.$$

Poli so  $\log 2 + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$z_0 = \log 2, r = 1$$

$$b_{-1} = \lim_{z \rightarrow \log 2} \frac{1 - \frac{z}{\log 2}}{2 - e^z} \stackrel{L'H}{=} \lim_{z \rightarrow \log 2} \frac{-\frac{1}{\log 2}}{-e^z} = \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{\log 4}$$

$$\tilde{B}(n) \sim \frac{n!}{2(\log 2)^{n+1}}$$

$$\tilde{B}(20) = 267 \dots 115 \text{ (23 števk)}$$

$$\left\lfloor \frac{20!}{2(\log 2)^{21}} \right\rfloor = 267 \dots 088$$

$$\frac{\log 2}{\log 2 + 2\pi i} \doteq 0.11.$$

(4)  $n$  hiš.

1. družina se vseli v naključno hišo,

2. družina se vseli v naključno naslednjo hišo,

$a_n$ : pričakovano število zasedenih hiš,  $\frac{n}{3} < a_n < \frac{n}{2}$ ?

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{i-2} + a_{n-i-1} + 1) \quad / \cdot n$$

$$na_n = n + 2(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2})$$

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$xF'(x) + 2xF(x) + 2F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2F(x)}{1-x} - \text{linearna DE 1. reda.}$$

$$F(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2(1-x)^2}$$

$$z_0 = 1, r = 2$$

$$b_{-2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-e^{-2z}}{2(1-z)^2} (1-z)^2 = \frac{1-e^{-2}}{2 \cdot 1!}$$

$$a_n \sim \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^n$$

$$\frac{1-e^{-2}}{2} \doteq 0.423 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Kaj pa, če imamo več singularnosti na  $|z| = R$ ?

$z_1 \dots z_k$  poli redov  $r_1 \dots r_k$

$$[z^n]f(z) = \sum_{i=1}^k \frac{b_{-r_i} n^{r_i-1}}{z_i^n (r_i-1)!} + O\left(\left(\frac{1}{R'}\right)^n\right), R' > R.$$

*Primer.*

$$r(x) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z^2}$$

$$a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n} \asymp 1 + (-1)^n.$$

V praksi štejejo le najvišji poli.

*Primer.*

$$(a) \sum_n \overline{p}_k(n) x^n = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i}.$$

Racionalna funkcija, poli

1 reda  $k$ ,  $-1$  reda  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ,  $e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}$  reda  $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor \dots$

1 ima najvišji red.

$$z_0 = 1, r = k$$

$$b_{-k} = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-z^i} (1-z)^k = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+z+\dots+z^{i-1}} = \frac{1}{k!}$$

$$\overline{p_k}(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$$

$$\sum_k p_k(n) x^k = x^k \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i}$$

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

(Šibke) kompozicije  $n$  s  $k$  členi

$$\binom{n+k-1}{k-1} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\sum_n p(n) x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$  - ni racionalna funkcija.

Singularnosti so bistvene, množica singularnosti ima stekališča.