

# Numerične metode 2

Zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

Ljubljana, pomlad 2023

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Teorija aproksimacije</b>	<b>1</b>
1.1	Aproksimacija funkcij . . . . .	1
1.1.1	Splošen optimalni aproksimacijski problem . . . . .	3
1.2	Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK) . . . . .	4
1.2.1	Normalni oziroma Gramov sistem enačb . . . . .	6
1.2.2	Povezava s predločenimi sistemi enačb . . . . .	10
1.3	Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Interpolacija</b>	<b>14</b>
2.1	Polinomska interpolacija . . . . .	14
2.1.1	Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma . . . . .	15
2.1.2	Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma . . . . .	19
2.1.2.1	Trikotna shema . . . . .	22
2.1.2.2	Posplošitev deljene difference . . . . .	24
2.1.2.3	Posplošitev rekurzivne formule . . . . .	24
2.1.2.4	Odsekoma polinomske funkcije (zlepki) . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Numerično odvajanje</b>	<b>26</b>
3.1	Ideja za izpeljavo aproksimacijskih formul . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Numerična integracija</b>	<b>29</b>
4.1	Nekaj osnovnih Newton-Cotesovih (N-C') pravil . . . . .	31
4.1.1	Alternativna izpeljava integracijskih pravil - metoda nedoločenih koeficientov . . . . .	34
4.2	Numerične napake pri integracijskih pravilih . . . . .	35
4.3	Sestavljena integracijska pravila . . . . .	36
4.3.1	Sestavljeno trapezno pravilo . . . . .	36
4.3.2	Sestavljeno Simpsonovo pravilo . . . . .	37
4.3.3	Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija . . . . .	38
4.4	Gaussova integracijska pravila . . . . .	39
4.5	Integrali v več dimenzijah . . . . .	42
4.5.1	Dvojni integral . . . . .	42
4.5.2	Tenzorska pravila . . . . .	43
4.5.3	Simpsonovo pravilo . . . . .	44
4.5.4	Metoda Monte-Carlo . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb</b>	<b>44</b>
5.0.1	Začetni problem reda 1 . . . . .	45
5.0.2	Začetni problem reda $p$ . . . . .	45

5.0.3	Robni problemi . . . . .	45
5.1	Globalna in lokalna napaka . . . . .	49
5.2	Runge-Kutta metode . . . . .	51
5.2.1	Primeri R-K metod . . . . .	52
5.2.1.1	Modificirana Eulerjeva metoda . . . . .	52

# 1 Teorija aproksimacije

## 1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo  $f$ . Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo  $\tilde{f}$ , ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

*Primer.*

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant  $\tilde{f}$ ?
- V čem naj si bo  $\tilde{f}$  podobna/sorodna z  $f$ ?
- Ali  $\tilde{f}$  obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant  $\tilde{f}$ ?
- Kako dobro nadomestilo za  $f$  je izračunan  $\tilde{f}$ ?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z  $X$  označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati,  $S \subseteq X$  naj označuje podprostor/podmnožico v  $X$ , v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A}: X \rightarrow S$$

ki vsakemu elementu  $f \in X$  priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$$

*Primer.* Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b])$ ,  $X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \ell^2_\rho([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty\}$ ,  
pri čemer je  $\rho$  **pozitivna utež**:  $\rho(x) > 0$  za vsak  $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

*Primer.* Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = \text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  polinomi stopnje  $\leq n$ :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- **triginimetrični polinomi**

$$S = \text{Lin}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$$

- podprostor racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ( $\|f\|_\infty$ )

$$f \in \mathcal{C}([a, b]), \|f\|_{\infty, [a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu  $[a, b]$  izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$$

in izračunamo

$$\|f\|_{\infty, \mathbf{x}} = \max_{i=0, \dots, N} |f(x_i)|$$

- druga norma ( $\|\cdot\|_2$ ) - norma, porojena iz skalarne produkta. Naj bo vektorski prostor  $X$  opremljen s skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Potem je

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}, f \in X$$

Primeri skalarnih produktov:

$$\cdot \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, f, g \in \ell_\rho^2([a, b])$$

$$\cdot \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$$

Za  $f(x) \equiv 1$  to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^N f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^N f^2(x_i)\rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta  $\tilde{f}$  ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

### 1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo  $X$  vektorski prostor z normo  $\|\cdot\|$ ,  $S \subseteq X$ . Za  $f \in X$  iščemo  $\tilde{f} \in S$ , da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = \text{dist}(f, S)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov  
(za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)
2. enakomerna polinomska aproksimacija ( $X = C([a, b])$ ,  $S = \mathbb{P}_n$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ )

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

**Izrek 1.1.** (Weierstrassov izrek) Naj bo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja polinom  $p$ , da je  $\|f - p\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon$ . Drugače povedano:

$$\text{dist}(f, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Dokaz.* (konstruktivni - ideja) Naj bo  $[a, b] = [0, 1]$ . Za  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$  definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

kjer je  $B_i^n(x)$  **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Da se pokazati, da gre  $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow 0$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ . ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije  $f$  (na  $[0, 1]$ ).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{P}_n \\ f &\mapsto \mathcal{B}_n f \\ \mathcal{B}_n f(x) &= \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) B_i^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\end{aligned}$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

## 1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo  $X$  normiran vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  s skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in naj bo  $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .  $S \subseteq X$  naj bo končno dimenzionalen podprostor v  $X$ ,  $S = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ,  $\dim S = n$ . Za izbran  $f \in X$  iščemo  $f^* \in S$ , da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

$f^*$  naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za  $f \in X$ .

**Izrek 1.2.** Naj bo  $S \subseteq X$  končno dimenzionalen podprostor. Element  $f^* \in S$  je element najbližje aproksimacije po MNK za  $f \in X$  natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0$$

*Dokaz.*

( $\Leftarrow$ ) Predpostavimo, da je  $f - f^* \perp S$ . Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben  $s \in S$ .

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_2^2 &= \|f - f^* + f^* - s\|_2^2 \\
&= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 \\
&\geq \|f - f^*\|_2^2
\end{aligned} \tag{1}$$

Neenakost 1 velja, saj zato, ker velja tako  $f^* \in S$  kot  $s \in S$  velja tudi  $(f^* - s) \in S$ , torej veljata tudi enakost  $\langle f^* - s, f - f^* \rangle = 0$  in neenakost  $\|f^* - s\|_2 \geq 0$ .

( $\implies$ ) Predpostavimo, da je  $f^*$  ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f - f^* \perp S$$

$\forall s \in S$  in  $\forall \lambda > 0$  velja

$$\begin{aligned}
\|f - f^*\|_2^2 &\leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2^2 \\
&= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \\
0 &\leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$0 \leq \langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2 \tag{3}$$

pri čemer iz 2 na 3 pridemo preko začetnega izbora za  $\lambda > 0$ . Ker lahko  $\lambda$  vzamemo tako majhno, da velikost člena  $2\langle f - f^*, s \rangle$  prevlada nad  $\lambda \|s\|_2^2$ , vidimo, da mora biti  $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$ . Če sedaj v  $S$  izberemo element  $-s$ , potem po istem sklepu velja, da mora biti  $0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle$  oziroma  $\langle f - f^*, s \rangle \leq 0$ . Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo  $f \in X$ . Naj bodo  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  baza za  $S \subseteq X$ :

$$S = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$



Iščemo  $f^* \in S$  ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$$

kjer so  $(\alpha_j)_{j=1}^n$  neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti  $f - f^* \perp S$ .  
To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \\ &= \langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_i \rangle \\ &= \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle$$

iz česar skupaj dobimo sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle, i \in [n]$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

### 1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
x^T G x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_i \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|_2^2 \\
&> 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Neenačaj 4 je strog, saj velja

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je  $x_i > 0$  in ker je

$$\varphi_i \in \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

kar je baza za  $S$ . Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

*Primer.* Naj bo  $f(x) = \sin(x)$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ . Aproksimiraj  $f$  po MNK v podprostoru  $\mathbb{P}_1$ .

Rešitev: Definirajmo  $X$  in  $S$

$$X = \mathcal{C}([0, \pi])(X = \ell^2([0, \pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = \text{Lin}\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo  $f^*$

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko  $G$

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{desna stran} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_0^\pi dx = \pi \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2} \\ \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_1 \rangle &= \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2 \\ \langle f, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x \cdot \sin x dx = \dots = \pi \end{aligned}$$

Dobimo:

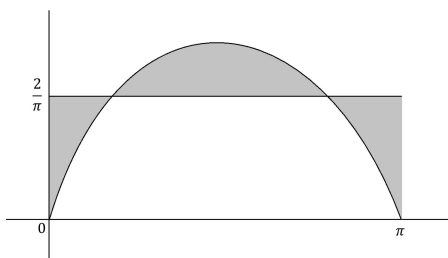
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (\sin x - p(x))^2 dx}$$



Slika 1: Z MNK želimo minimizirati ploščino sivega območja.

*Primer.* Točke  $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8)$  aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev:  $S = \mathbb{P}_1 = \text{Lin}\{1, x\}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^4 f(x_i) \cdot g(x_i), \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$f$ , ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah  $\mathbf{x}$ .

Izračunamo:

$$\langle 1, 1 \rangle = \sum_{i=1}^4 1 \cdot 1 = 4$$

$$\langle 1, x \rangle = \sum_{i=1}^4 1 \cdot x_i = 10$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 30$$

$$\langle f, 1 \rangle = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot 1 = 18$$

$$\langle f, x \rangle = \sum_{i=1}^4 y_i x_i = 55$$

Dobimo sistem

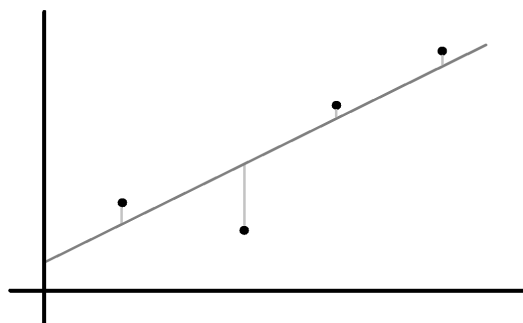
$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 55 \end{bmatrix}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - p(x_i))^2}$$



Slika 2: Z MNK želimo najti temnosivo premico, ki minimizira svetlosive razdalje.

### 1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \min_{z \in \text{Im}A} \|b - z\|$$

Aproksimiramo vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  ( $X = \mathbb{R}^m$ )

$$S = \text{Lin}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \text{Im}A$$

$$b^* = \sum_{j=1}^n x_j a_j = Ax$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i = x^T y$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i:$$

$$G = (\langle a_j, a_i \rangle)_{i,j=1}^n = A^T A \quad (5)$$

$$\text{desna stran} = (\langle a_i, b \rangle)_{i=1}^n = A^T b \quad (6)$$

*Primer.*  $X = \mathcal{C}([0, 1])$

$$S = P_{n-1} = \text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i+j-1}$$

$$G = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^n$$

kjer je  $G$  Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru  $S$  izberemo **ortonormirano bazo**:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_i \perp \varphi_j \quad \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

V tem primeru je  $G = I$  in  $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ ,  $f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$ . Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Schmidtovim algoritmom**.

---

**Algorithm 1** Modificiran Gram-Schmidtov algoritem

---

**Input** baza  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$

```

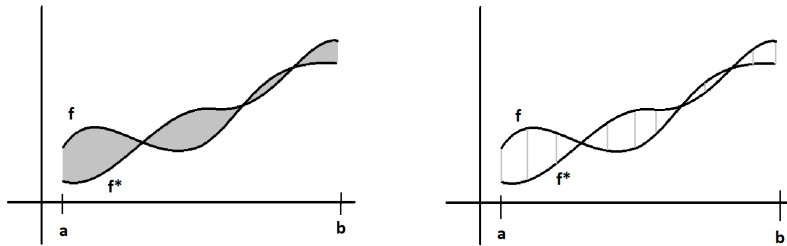
1: for  $i = 1 : n$  do
2:    $\varphi_i = \psi_i$ 
3: end for
4: for  $i = 1 : n$  do
5:    $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$ 
6:   for  $j = i + 1 : n$  do
7:      $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$ 
8:   end for
9: end for

```

**Output** ortonormirana baza  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$

---

$X \in \mathcal{C}([a, b])$



Slika 3: Druga norma, porojena iz zveznega (levo) in diskretnega (desno) skalarnega produkta

### 1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$$X = \mathcal{C}([a, b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$$

Problem: Za dano funkcijo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  iščemo polinom  $p^* \in \mathbb{P}_n$ , za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|$$

$p^*$  imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PNEA)**. Problem je nelinearen.

(vstavi skico)

Nasledni izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PNEA za neko funkcijo.

**Izrek 1.3.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Če je polinom  $p \in \mathbb{P}_n$  tak, da **residual**

$$r = f - p \tag{7}$$

alternirajoče doseže svojo normo  $\|p\|_{\infty, [a, b]}$  v vsaj  $n+2$  različnih točkah  $(x_i)_{i=0}^{n+1}$

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

Potem je  $p$  polinom najboljše enakomerne aproksimacije za  $f$  na  $[a, b]$ .

*Opomba.* Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty, [a, b]} = |r(x_i)| \quad \forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \quad \forall i$$

(vstavi graf)

*Dokaz.* Dokaz s protislovjem.

Recimo, da  $p$  ne bi bil PNEA za  $f$ . Tedaj bi obstajal nek drug polinom  $q \in \mathbb{P}_n$ , da bi veljalo

$$\begin{aligned} |f(x_i) - q(x_i)| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q(x)| \\ &= \|f - q\|_{\infty, [a, b]} \\ &< \|f - p\|_{\infty, [a, b]} \\ &= |f(x_i) - p(x_i)| \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Torej za  $\forall i$  velja:

$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)|$$

To razvijemo v neenakosti

$$-sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i)) < f(x_i) - q(x_i)$$

in

$$f(x_i) - q(x_i) < sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i))$$

Če v neenakostih  $x_i$  spremenimo v  $x_{i+1}$  ter upoštevamo enakost

$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = -sign(f(x_i) - p(x_i))$$

dobimo neenakosti

$$sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$$

in

$$f(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}))$$

Brez škode za splošnost (BŠS) lahko rečemo, da je  $sign(f(x_i) - p(x_i)) = 1$ . Potem je  $f(x_i) - q(x_i) < f(x_i) - p(x_i)$ ,  $p(x_i) - q(x_i) < 0$  in  $f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$ , torej  $p(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) > 0$ .

Vidimo, da ima razlika  $p - q$  ničlo na intervalu  $(x_i, x_{i+1})$  za  $i \in [n]$ . Razlika  $p - q$  je polinom stopnje  $n$ , ki ima  $n + 1$  ničel. Torej mora biti  $p \equiv q$ . ■

Izkaže se, da je pogoj tudi potreben (torej da velja ekvivalenca), a je dokaz težek, zato ga bomo izpustili.

Iskanje/računanje PNEA se prevede na iskanje ustrezne množice točk  $\{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b\}$ .

**Definicija 1.4.** Naj bo  $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b\}$ . Definirajmo **minimaks** za  $f$  na  $E$  konstruirati

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x_i \in E} |f(x_i) - p(x_i)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije za  $f$  na množici  $E$** . Izračunamo ga tako, da rešimo naslednji sistem linearnih enačb: (brez izpeljave)

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, i \in [n + 1]$$



Imamo torej  $n + 2$  enačb in  $n + 2$  neznank ( $n + 1$  v polinomu  $p$  in eno v  $m$ ):

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

ter koeficient  $m$ , za katerega velja

$$|m| = M_n(f, E)$$

(vstavi slikco)

## 2 Interpolacija

Problem: Podane imamo vrednosti izbrane funkcije  $f$  v  $n+1$  paroma različnih točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$  na realni osi. Te točke bomo imenovali **interpolacijske točke**. Iščemo neko preprostejšo funkcijo  $g$ , ki zadošča pohojem

$$g(x_i) = f(x_i) \forall i \in [n]$$

$g$  imenujemo **interpolacijska funkcija**. Za interpolacijske funkcije običajno izberemo polinome, odsekoma polinomske funkcije ...

Interpolacija se uporablja za

- aproksimacijo dane funkcije
- kadar funkcijo  $f$  poznamo le v točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , radi pa bi izračunali vrednost te funkcije tudi za  $x$ , ki ni ena izmed interpolacijskih točk.
- za izpeljavo formul za numerično integriranje, odvajanje, reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE) ...

### 2.1 Polinomska interpolacija

Za  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  in interpolacijske točke  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$  iščemo **polinom**  $p_i$ , ki zadošča enačbam

$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

Enačb je  $n + 1$ . Da dobimo enako število enačb, moramo izbrati  $p \in \mathbb{P}_n$ .

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Enačbe (za  $i = 0, 1, \dots, n$ )

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n$$

lahko zapišemo matrično

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Matriko, ki jo uporabimo, imenujemo **vandermondova matrika**.

$$\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Ker je Vandermondova matrika obrnljiva, sledi, da imamo enolično rešitev. Torej obstaja **enoličen** polinom stopnje  $n$ , ki interpolira  $n + 1$  paroma različnih točk. Tak interpolacijski problem imenujemo **korenten** interpolacijski problem. Vandermondova matrika je primer **zelo občutljive** matrike. Poleg tega nimamo rešitve v **zaključeni obliki**. Spoznali bomo dva druga zapisa interpolacijskega polinoma:

- Lagrangeva oblika zapisa
- Newtonova oblika zapisa

### 2.1.1 Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definiramo naslednje polinome:

$$\begin{aligned} \ell_{0,n}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\ \ell_{1,n}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \\ &\vdots \\ \ell_{n,n}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

oziroma

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

za  $i = 0, 1, \dots, n$ . To imenujemo **Lagrangevi bazni polinomi**.

Velja:

$$\ell_{i,n}(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Vsi ti polinomi so stopnje točno  $n$ .

*Izrek 2.1.* Polinomi  $\ell_{i,n}$  za  $i = 0, 1, \dots, n$  so baza za  $\mathbb{P}_n$ .

*Dokaz.* Dokazati moramo le, da so linearno neodvisni. Preveriti moramo, da je  $\alpha_0 \ell_{0,n} + \alpha_1 \ell_{1,n} + \dots + \alpha_n \ell_{n,n} = 0 \iff \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

( $\implies$ )

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_{j,n}(x) = 0 \quad \forall x$$

Vstavimo  $x = x_i$  in dobimo

$$0 = \sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_{j,n}(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$$

( $\impliedby$ ) Očitno. ■

Iz dokaza izreka sledi, da lahko vsak polinom  $p \in \mathbb{P}_n$  zapišemo kot linearno kombinacijo

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j \ell_{j,n}(x)$$

za  $c_j \in \mathbb{R}$ .

Kako izbrati koeficiente, da bo polinom interpolacijski oziroma da bo zadoščal pogojem

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n c_j \ell_{j,n}(x_i) = f(x_i)$$

za  $i = 1, \dots, n$ . Za vsak  $i$  je tudi vsota enaka  $c_i$ .

Dobili smo

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{j,n}(x)$$

kar je Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma.

*Primer.* Naj bo  $f(x) = e^x$ . Pošiši interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$ . Za  $n = 3$  izračunamo

$$\begin{aligned}\ell_{0,3}(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{((0-1)(0-3)(0-4))} \\ &= -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) \\ \ell_{1,3}(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{(1(1-3)(1-4))} \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\ \ell_{2,3}(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{(3(3-1)(3-4))} \\ &= -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) \\ \ell_{3,3}(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{(4(4-1)(4-3))} \\ &= \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

in dobimo rešitev

$$p(x) = e^0 \ell_{0,3}(x) + e^1 \ell_{1,3}(x) + e^3 \ell_{2,3}(x) + e^4 \ell_{3,3}(x)$$

Časovna zahtevnost za evaluacijo  $\ell_{i,n}(x)$  v  $x_i$  je  $\mathcal{O}(n^2)$ . Ker v praksi izpustimo skupen polinom, je končna časovna zahtevnost  $\mathcal{O}(n)$ , tako kot Hornerjev algoritem.

*Lema 2.2.* Če je  $f \in \mathbb{P}_n$ , potem je  $\sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x) = f(x)$ .

*Dokaz.* Sledi iz enoličnosti interpolacijskega polinoma. ■

*Posledica 2.3.*

$$\sum_{i=0}^n \ell_{i,n}(x) = 1 \tag{8}$$

Lagrangevi bazni polinomi tvorijo **razčlenitev** oziroma **razčlenitev enote**, ki pozitivno vpliva na stabilnost baze.

*Izrek 2.4* (O napaki interpolacije.). Naj bodo  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  in naj bo  $p$  interpolacijski polinom za  $f$  na teh točkah. Potem za vsak  $x \in [a, b]$  obstaja  $\xi_x \in (a, b)$ , da velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

kjer velja

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

*Dokaz.* Če je  $x = x_i$ , potem  $f(x_i) - p(x_i) = 0$  in  $\omega(x_i) = 0$  ter enakost velja za vsak  $\xi_x \in (a, b)$ . Naj bo sedaj  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  in naj bo ta  $x$  fiksna. Definirajmo  $F(u) = f(u) - p(u) - c\omega(u)$  za neko konstanto  $c$ , pri čemer za  $F$  velja  $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ ,  $F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - c\omega(x_i) = 0$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ . Konstanto  $c$  izberemo tako, da bo tudi  $F(x) = 0$ . Torej ima  $F$  na  $[a, b]$   $n+2$  različnih ničel. Potem ima  $F'$  na  $(a, b)$   $n+1$  različnih ničel. Potem ima  $F''$  na  $(a, b)$   $n$  različnih ničel ... Potem ima  $F^{(n+1)}$  na  $(a, b)$  vsaj eno ničlo. Označimo to ničlo z  $\xi_x$ . Torej je

$$\begin{aligned} 0 &= F^{(n+1)}(\xi_x) \\ &= f^{(n+1)}(\xi_x) - p^{(n+1)}(\xi_x) - c\omega^{(n+1)}(\xi_x) \end{aligned}$$

Uporabimo razmislek od zgoraj in dobimo

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)!$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

■

Za poljuben  $c \in [a, b]$  po izreku velja

$$|f(x) - p(x)| = |\omega| \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_x)| \leq \|\omega\|_{\infty, [a, b]} \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}$$

Iz tega sledi

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_{\infty, [a, b]} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}$$

Ta ocena je uporabna v teoriji, ne pa tudi v praksi.

Lagrangeva oblika je zaradi enostavnosti zelo uporabna pri izpeljavi formul za numerično integracijo, odvajanje ..., ima pa tudi nekaj pomankljivosti pri praktični uporabi:

- numerično računanje vrednosti polinoma v Lagrangevi obliki ...
- Numerične težave, če so interpolacijske točke preblizu skupaj
- Konstrukcija ni rekurzivna. Dodajanje novih točk je zahtevno.

### 2.1.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo, v kateri bomo predstavili interpolacijski polinom, izberemo **prestavljene potence**.

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\}$$

Očitno je to baza: vidimo, da se stopnje povečujejo in je posledično kolokacijska matrika spodnje trikotna. V nadaljevanju bomo naredili rekurzivno konstrukcijo.

Vsak  $p \in \mathbb{P}_n$  lahko zapišemo kot

$$\sum_{i=0}^n \left( c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Iščemo koeficiente  $(c_i)_{i=0}^n$ , da bo  $p$  interpolacijski. Ta  $p$  bomo konstruirali **rekurzivno**. Naj bo  $p_{k-1}$  interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ . Kako poiskati  $p_k$ , ki bo interpolacijski za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , kjer bo  $p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$  in  $p_k \in \mathbb{P}_k$ ?

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

Vstavimo  $x = x_j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) + c \cdot 0 = f(x_j)$$

Ostane le pogoj za  $x = x_k$

$$p_k(x_k) = f(x_k)$$

kjer lahko zapišemo

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

S tem je določen  $c$ , ki je kar **vodilni koeficient** od  $p_k$ . Označimo ga z  $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$  in ga imenujemo **deljena diferenca**.

**Definicija 2.5. Deljena diferenca**  $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$  je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje  $k$  (koeficient pri  $x^k$ ) za funkcijo  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

Sledi, da lahko  $p_k(x)$  zapišemo kot

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

(vstavi graf) V grafu:  $p_0 \in \mathbb{P}_p$ ,  $p_0(x) = x_0 \cdot 1$ . Po definiciji je  $[x_0]f = f(x_0)$ .

Iz te rekurzivne konstrukcije dobimo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_{n-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= p_0(x) + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ p_n(x) &= \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Temu rečemo **Newtonova oblika** zapisa interpolacijskega polinoma.

Kako izračunati deljene difference?

- $[x_0]f = f(x_0)$
- $[x_0, x_1]f = ?$

(vstavi graf)

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= [x_0]f \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0) \end{aligned}$$

V zgornji enačbi je  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  vodilni koeficient, 1 in  $(x - x_0)$  pa sta baza. Iz tega sledi

$$[x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0}$$

**Izrek 2.6** (Rekurzivna formula za deljene difference). Naj bodo  $x_0, x_1, \dots, x_k$  paroma različne točke. Tedaj velja

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

*Opomba.* Pazi na koeficiente! V števcu gredo pri prvem od  $x_1$  do  $x_k$ , pri drugem pa od  $x_0$  do  $x_{k-1}$ . Tista, ki smo ju izpustili, potem odštejemo v imenovalcu, torej  $x_k - x_0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $q_0$  interpolacijski za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  in  $q_1$  interpolacijski za  $f$  na točkah  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Velja, da sta  $q_0, q_1 \in \mathbb{P}_{k-1}$ . Kako priti do polinoma  $p$ , ki bo interpolacijski na  $x_0, x_1, \dots, x_k$ ? Ta  $p$  bo tak, da bo veljalo  $p \in \mathbb{P}_k$ .

Sestavimo model za  $p$

$$p(x) = \ell_0(x)q_0(x) + \ell_1(x)q_1(x), \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{P}_1, \ell_0, \ell_1 = ?$$

$$x = x_j, j \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

Dobimo tri pogoje:

$$(\star\star) \quad x = x_j$$

$$p(x_j) = \ell_0(x_j)q_0(x_j) + \ell_1(x_j)q_1(x_j) = (\ell_0(x_j) + \ell_1(x_j))f(x_j) \stackrel{?}{=} f(x_j)$$

$$(\star) \quad x = x_0$$

$$p(x_0) = \ell_0(x_0)f(x_0) + \ell_1(x_0)q(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

$$(\star) \quad x = x_k$$

$$p(x_k) = \ell_0(x_k)q(x_k) + \ell_1(x_k)f(x_k) \stackrel{?}{=} f(x_k)$$

Če izberemo

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}$$

in

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0}$$

zadostimo pogojema  $(\star)$ . Ker pa je  $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$  za  $\forall x$ , pa velja tudi  $(\star\star)$ .

Torej

$$p(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}q_0(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}q_1(x)$$

*Opomba.* V nadaljevanju se bo namesto vodilni koeficient pisalo  $v.k.$



Primerjamo vodilne koeficiente na levi in desni strani in dobimo:

$$v.k.(p) = [x_0, x_1, \dots, x_k]f$$

Na desni strani:

$$\frac{1}{x_0 - x_k} \cdot v.k.(q_0) + \frac{1}{x_k - x_0} \cdot v.k.(q_1) = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

■

### 2.1.2.1 Trikotna shema

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0}$$

Deljive difference, ki jih potrebujemo v zapisu interpolacijskega polinoma, računamo v **trikotni shemi** (primer za  $n = 3$ ): (vstavi shemo)

*Primer.* Poišči polinom  $p$ , za katerega velja  $p(0) = 1$ ,  $p(1) = 3$ ,  $p(3) = 5$  in  $p(4) = 2$ .

$p \in \mathbb{P}_3$ ,  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 4$  baza:

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-3)\}$$

(tabela)

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x(x-1) - \frac{1}{4} \cdot x(x-1)(x-3)$$

Za splošen  $n$ : (shema)

Kako izračunati vrednost polinoma v Newtonovi bazi pri izbranem  $x$ ?

Označimo  $d_i = [x_0, x_1, \dots, x_i]f, i = 0, 1, \dots, n, n = 4$

$$\begin{aligned} p(x) &= d_0 \cdot 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= d_0 + (x - x_0)(d_1 - (x - x_1)(d_2 - (x - x_2)(d_3 - (x - x_3)d_4))) \end{aligned}$$

zapišemo

$$\begin{aligned} v_4 &= d_4 \\ v_3 &= d_3 + (x - x_3)v_4 \\ v_2 &= d_2 + (x - x_2)v_3 \\ v_1 &= d_1 + (x - x_1)v_2 \\ v_0 &= d_0 + (x - x_0)v_1 \end{aligned}$$

---

**Algorithm 2** Posplošen Hornerjev algoritem

---

**Input**  $\underline{d}(=[d_0, d_1, \dots, d_n]), \underline{x}(=[x_0, x_1, \dots, x_n]), x$   
 $v_n = d_n$   
**for**  $i = n - 1 : -1 : 0$  **do**  
     $v_i = d_i + (x - x_i)v_{i+1}$   
**end for**  
 $v_0 = p(x)$   
**Output**  $v_0$

---

(tabelca za hronerja)

Poglejmo si za  $n = 1$

(slikca)

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) - (x_1 \rightarrow x_0) \\ &\longrightarrow f(x_0) + \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)(x - x_0)p(x) = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Iz tega dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0) \\ p'(x_0) &= f'(x_0) \end{aligned}$$

*Definicija 2.7.* Pravimo, da se polinom  $p$  s funkcijo  $f$  ujema v točki  $x_i$   $(k+1)$ -kratno, če se ujema v vrednosti in prvih  $k$  odvodih. Enačbe, ki določajo te pogoje:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \\ p''(x_i) &= f''(x_i) \\ &\vdots \\ p^{(k)}(x_i) &= f^{(k)}(x_i) \end{aligned}$$

Tak polinom je Taylorjev polinom:

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k$$

Če bomo v točki  $x_i$  zahtevali  $(k+1)$ -kratno ujemanje, potem bomo to točko podali  $(k+1)$ -kratno:

$$x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots x_{i+k} < x_{i+k+1}$$

### 2.1.2.2 Posplošitev deljene difference

Poglejmo si, kako posplošimo deljenje difference.

$$[x_i, x_i, \dots, x_i]f = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

*Opomba.* V zgornji enačbi imamo  $(k+1)$   $x_i$ -jev

### 2.1.2.3 Posplošitev rekurzivne formule

*Opomba.* Vrstni red točk v deljeni diferenci **ni** pomemben.

Naj velja  $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2} \leq \dots \leq x_{i+k}$ . Potem je

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & \text{sicer} \end{cases}$$

*Primer.* Poišči polinom  $p$ , za katerega velja  $p(0) = 1$ ,  $p'(0) = 2$ ,  $p''(0) = 3$ ,  $p(1) = -1$ ,  $p'(1) = 3$ ,  $p(2) = 4$

Določimo točke  $x_0, x_1, \dots, x_5$ :

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 2$$

Potem sestavimo bazo:

$$\{1, c, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\}$$

Z uporabo trikotne sheme izračunamo koeficiente za polinom: (trikotna shema) Iz trikotne sheme preberemo koeficiente in sestavimo interpolacijski polinom:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2$$

Brez izpeljave povejmo še sledeče trditve:

*Trditev 2.8.* Za  $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$ ,  $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_n \leq b$ , velja

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \xi \in [x_i, x_{i+k}]$$

*Trditev 2.9.* Za  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ ,  $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$  in interpolacijski polinom  $p$  za  $f$  na teh točkah velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \xi_x \in (a, b), x \in [a, b]$$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Kako izbrati interpolacijske točke na  $[a, b]$ ? Obstaja več možnosti:

1. Ekvidistantne točke:

$$x_i = a + i \cdot h$$

kjer je  $h = \frac{b-a}{n}$  in velja za  $i = 0, 1, \dots, n$ .

(slika)

2. Čebiševe točke Izbira, pri kateri je neskončna norma polinoma  $\omega$  najmanjša možna.

$$\min_{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b} \|\omega\|_{\infty, [a, b]} = \min_{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b} \max_{x \in [a, b]} |\omega(x)|$$

Rešitev so

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

za  $i = 0, 1, \dots, n$

Recimo, da izberemo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , izberemo zaporedje interpolacijskih točk  $(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})_n$  in povečujemo stopnjo  $n$ . Dobimo zaporedje interpolacijskih polinomov  $(p_n)_n$ . Zanima nas, kaj se dogaja z napako

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?? \quad (9)$$

Žal ne velja nujno, da bi šla ta napaka proti 0.

Protiprimer: (Rungejev primer)

Za funkcijo  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  na intervalu  $[-5, 5]$  interpoliramo z ekvidistantnimi točkami. Z večanjem  $n$ -ja gre napaka proti  $\infty$ .

#### 2.1.2.4 Odsekoma polinomske funkcije (zlepki)

IDEJA: Interval  $[a, b]$  razdelimo na  $m$  delov s stičnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

(slikca)

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_n$$

V stičnih točkah predpišemo red gladkosti.

*Primer.* Odsekoma linearne interpolacijske funkcije (slikca) - funkcija, označene točke, vmes povezane s premicami

*Primer.* Odsekoma kubičen interpolacijski zlepek. Polinom na  $[x_i, x_{i+1}]$  določimo tako, da zadostimo pogojem

$$p_i(x_i) = f(x_i)$$
$$p'_i(x_i) = f'(x_i)$$
$$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$
$$p'_i(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}), p_i \in \mathbb{P}_3$$

### 3 Numerično odvajanje

Naloga: Iščemo približek za vrednost odvoda funkcije  $f$  pri nekem izbranem  $x$ -u. Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije  $f$  v bližnjih točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

#### 3.1 Ideja za izpeljavo aproksimacijskih formul

Kot približek za odvod funkcije  $f$  v izbranem  $x$  vzamemo vrednost odvoda interpolacijskega polinoma za  $f$  na točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pri izbranem  $x$ -u.

Za  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  vemo že:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f \\ p(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x) \\ \omega(x) &= \prod_{i=0}^n (x - x_i) \\ f'(x) &= p'(x) + (\omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f)' \\ f'(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i)(\ell'_{i,n}(x)) + (\omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f)' \end{aligned}$$

kjer prvi sumand imenujemo **aproksimacija odvoda**, drugi pa **napaka**, ki jo označujemo z  $R(f)$  oziroma  $Rf$ .

*Opomba.* Odvod deljene difference (brez izpeljave):

$$\frac{d}{dx}[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f = [x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]f$$

Interpolacijske točke običajno izberemo **ekvidistantno**, za  $x$  pa izberemo eno od interpolacijskih točk, na primer  $x_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Tedaj dobimo:

$$f'(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell'_{i,n}(x_k) + \omega'(x_k)[x_0, x_1, \dots, x_k]f + \omega(x_k)[x_0, x_1, \dots, x_k]f$$

kjer je prvi sumand približek, drugi napaka, tretji pa je enak nič. Napako zapišemo kot

$$Rf = \omega'(x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

*Primer.* Vzemimo  $n = 1$  in  $x_1 = x_0 + h$ . Zanima nas približek za  $f'(x_0)$ .

$$f(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]f$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f(x_0) \frac{1}{(-h)} + f(x_1) \frac{1}{h} + ((x_0 - x_1) + 0) \frac{f''(\xi)}{2} + 0 \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \xi \in [x_0, x_1] \end{aligned}$$

Ulomku, ki se pojavi v formuli, pravimo **enostranska diferenca**.

*Primer.* Za  $n = 2$  izberemo  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ . Zanima nas približek za  $f'(x_1)$  in  $f''(x_1)$ .

$$f(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f$$

Funkcijo odvajamo

$$f'(x_1) = f(x_0) \frac{x_1-x_2}{2h^2} + f(x_1) \frac{x_1-x_2+x_1-x_0}{-h^2} + f(x_2) \frac{x_1-x_0}{2h^2} + Rf \\ = f(x_0) \frac{1}{2h} + 0 + f(x_2) \frac{1}{2h} + Rf \\ = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} + Rf \\ Rf = \omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x]f \\ = (x_1-x_0)(x_1-x_2) \frac{f'''(\xi)}{3!} \\ = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Ko to dvoje združimo, dobimo prvi odvod

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Za izračun drugega ponovno odvajamo

$$f''(x_1) = f(x_0) \frac{2}{2h^2} + f(x_1) \frac{2}{-h^2} + f(x_2) \frac{2}{2h^2} + (\omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f)'' \Big|_{x=x_1} \\ = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h} + Rf$$

Ulomku se reče simetrična diferenca za drugi odvod.

$$Rf = \omega''(x_1)[x_0, x_1, x_2, x_1]f + 2 * \omega(x_1)[x_0, x_1, x_2, x_1, x_1]f + 0$$

Bralec naj preveri, da je  $\omega''(x_1) = 0$  in  $\omega'(x_1) = -h^2$ .

Sledi

$$Rf = -2h^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = -\frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \\ f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h} - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)$$

(slikca)

Imamo dve vrsti napake:

- napaka metode -  $Rf$  (Pada, ko  $h$  pada)
- neodstranljiva napaka - napake pri izračunu vrednosti funkcije (Raste, ko  $h$  pada)

Ko računamo vrednosti funkcije  $f(x_i)$ , zaradi zaokrožitvenih napak aritmetike dobimo približek  $\tilde{f}(x_i)$ , da velja

$$|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon$$

*Primer.* Oцени za obe napaki odvod

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

- Napaka metode:

$$D_M \leq \frac{h^2}{6} \|f'''\|_{\infty, [x_0, x_2]}$$

- Neodstranljiva napaka:

$$D_N \leq \frac{2\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h}$$

- Skupna napaka:

$$D_S = D_M + D_N$$

(slikca)

## 4 Numerična integracija

Naloga: Radi bi izračunali približek za integral

$$Sf = \int_a^b f(x) dx$$
$$S : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$S$  je linearen funkcional.

Približek za integral bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije  $f$  v izbranih točkah  $x_0, x_1, \dots, x_n$  iz intervala  $[a, b]$ .

IDEJA: Namesto funkcije  $f$  integriramo interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ .



Vemo že:

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f \quad (f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])) \quad (10)$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_{i,n}(x)$$

Integriramo 10:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) dx + \int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x] f dx$$

$Sf$  = približek za integral + napaka

$$Sf = Ff - Rf$$

To je integracijsko pravilo oziroma kvadratna formula.

$$Ff = \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \ell_{i,n}(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Za  $i = 0, \dots, n$   $\int_a^b \ell_{i,n}(x) dx$  označimo z  $A_i$  in jih imenujemo kot uteži integracijskega pravila, točke  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pa imenujemo vozli integracijskega pravila.

*Definicija 4.1.* Red oziroma stopnja integracijskega pravila  $Sf = Ff + Rf$  je enaka  $m$ , če je pravilo točno za vse polinome stopnje  $\leq m$ . To je, če velja  $Rp = 0$  za  $\forall p \in \mathbb{P}_m$  in  $R(x^{m+1}) \neq 0$ . To ekvivalentno zapišemo kot

$$Rx^j = 0 \text{ za } j = 0, 1, \dots, m$$

kar je ekvivalentno

$$Sx^j = Fx^j$$

Glede na izbiro vozlov ločimo dve vrsti pravil:

- Newton-Cotesova pravila - vozle izberemo ekvidistantno:

$$x_0 = a, x_i = x_0 + ih, h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, \dots, n$$

Ločimo:

- zaprta pravila (upoštevamo krajišči)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

– odprta pravila (ne upoštevamo krajišč):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + Rf$$

- Gaussova pravila - vozle izračunamo oziroma določimo tako, da je pravilo čim višjega reda.

## 4.1 Nekaj osnovnih Newton-Cotesovih (N-C) pravil

*Primer.*  $n = 1$ ,  $a = x_0$ ,  $b = x_1 = x_0 + h$ ,  $h = b - a$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left( f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx \\ &\quad + \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x] f dx \\ &= f(x_0) \frac{1}{-h} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) dx + f(x_1) \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x] f dx \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + Rf \end{aligned} \quad (11)$$

Za reševanje  $Rf$  uporabimo izrek:

*Izrek 4.2.* Posplošen izrek o povprečni vrednosti:

če  $f$  na  $[a, b]$  ne spremeni predznaka, je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_a^b f(x)dx$$

za  $\xi \in [a, b]$ .

Z uporabo izreka dobimo

$$\begin{aligned} Rf &= \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x] f dx \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi) \end{aligned}$$

Uporabili smo tudi trapezno pravilo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

za  $\xi \in [x_0, x_1]$  in za  $f \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$  (skica)

Določimo še red pravila

- Red je zagotovo vsaj 1
- $Rp = ?$  za  $p \in \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
 R(x - x_0)^2 &= S(\cdot - x_0)^2 + F(\cdot - x_0)^2 \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} (\cdot - x_0)^2 d\cdot - \frac{h}{2}((x_0 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2) \\
 &= \frac{(x_1 - x_0)^3}{3} - \frac{h}{2}h^2 \\
 &= \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \\
 &= -\frac{h^3}{6} \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Red pravila je torej 1

*Primer.*  $n = 2, x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h = b, h = \frac{b-a}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}dx + \\
 &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}dx + \\
 &\quad + \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f dx
 \end{aligned}$$

Izračunamo uteži

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)(x - x_2)dx \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} h(t - 1)h(t - 2)h dt \\
 &= \dots \\
 &= \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

Podobno:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4}{3}h \\
 A_2 &= \frac{1}{3}h
 \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + Rf)$$

$$Rf = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f dx = ??$$

Določimo red pravila. Red pravila je vsaj 2.

$$\begin{aligned} R(x - x_0)^3 &= S(x - x_0)^3 - F(x - x_0)^3 \\ &= \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^3 dx - \frac{h}{3}((x_0 - x_0)^3 + 4(x_1 - x_0)^3 + (x_2 - x_0)^3) \\ &= \frac{(x_2 - x_0)^4}{4} - \frac{h}{3}(4h^3 + 8h^3) \\ &= \frac{(2h)^4}{4} - 4h^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Red je vsaj 3

$$\begin{aligned} R(x - x_0)^4 &= S(x - x_0)^4 - F(x - x_0)^4 \\ &= \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^4 dx - \frac{h}{3}((x_0 - x_0)^4 + 4(x_1 - x_0)^4 + (x_2 - x_0)^4) \\ &= \frac{(2h)^5}{5} - \frac{4}{15}h^5 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Red je 3.

Uporabimo nastavek za napako:

$$Rf = Cf^{(m+1)}(\xi), \xi \in [a, b]$$

kjer je  $C$  konstanta in  $m$  red pravila.

Za  $f$  izberemo  $f(x) = (x - x_0)^4$  in dobimo

$$F(x - x_0)^4 = C \cdot f^{(4)}(\xi) = C \cdot 4!$$

Sledi

$$C = -\frac{h^5}{90}$$

in dobimo

$$Rf = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

*Opomba.* Ta nastavek sledi iz razvoja funkcije  $f$  v Taylorjevo vrsto

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

Ostanek je

$$Rf = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}R(x-a)^{m+1}$$

Iz ostanka izpostavimo konstanto  $C$

$$C = \frac{R(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Izpeljali smo Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

(slika?)

#### 4.1.1 Alternativna izpeljava integracijskih pravil - metoda nedoločenih koeficientov

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Ideja je, da neznane uteži določimo tako, da bo red pravila čim višji. Pogledjmo si to na primeru Simpsonovega pravila:

Izberemo bazo polinomov

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots\}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + Rf$$

Če rečemo, da  $f(x) = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} 1dx &= A_0 + A_1 + A_2 \\ 2h &= A_0 + A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Če rečemo, da  $f(x) = x - x_0$ :

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0) dx = A_0(x_0 - x_0) + A_1(x_1 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)$$

$$2h = A_1 + 2A_2$$

Če rečemo, da  $f(x) = (x - x_0)^2$ :

$$\frac{8}{3}h = A_1 + 4A_2$$

Rešimo sistem in dobimo rešitev:

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \frac{4h}{3}$$

*Primer.* Primer odprtega N-C pravila - pravokotniško pravilo (skica)

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + Rf = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

## 4.2 Numerične napake pri integracijskih pravilih

Poglejmo si neodstranljivo napako. Recimo, da velja  $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \epsilon$ . Naj bo  $Ff = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ .

$$D_a = \left| \sum_{i=0}^n A_i (f(x_i) - \tilde{f}(x_i)) \right| \leq \sum_{i=0}^n |A_i| \epsilon = \epsilon \sum_{i=0}^n |A_i|$$

Upoštevamo, da je pravilo točno vsaj za konstante

$$\sum_{i=0}^n A_i \cdot 1 = F1 = S1 = \int_a^b 1 dx = b - a$$

Če so uteži vse pozitivne, potem  $D_a \leq \epsilon(b - a)$  in ni numeričnih težav, če  $n$  večamo.

Žal pa tako pri zaprtih N-C pravilih za  $n \geq 8$  kot tudi pri odprtih N-C pravilih za  $n \geq 4$  dobimo negativne uteži.

*Primer.*  $n = 50$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ , velja  $\sum_{i=0}^n |A_i| = 6.7 \cdot 10^{10}$  (zaprto N-C pravilo)

Namesto, da bi uporabljali pravila z visoko stopnjo  $n$  raje uporabljamo t.i. sestavljena pravila.

## 4.3 Sestavljena integracijska pravila

Računamo integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ideja: Interval  $[a, b]$  razdelimo na manjše podintervale in na vsakem od podintervalov uporabimo integracijsko pravilo nizkega reda in nato rezultate seštejemo.

Recimo, da želimo uporabiti  $m$  osnovnih pravil, vsak osnovno pravilo pa zahteva, da razdelimo podinterval na  $n$  delov. Imamo korak  $h = \frac{b-a}{m \cdot n}$  in točke  $x_i = a + i \cdot h$ , kjer gre  $i$  od 1 do  $mn$ . Sestavljeno pravilo bo potem oblike

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m \cdot n} A_i f(x_i) + Rf$$

Izpeljimo sestavljeno trapezno pravilo.

### 4.3.1 Sestavljeno trapezno pravilo

Osnovno:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

kjer je  $h = x_1 - x_0$ .

(skica) Sestavljeno pravilo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &= (\text{vstavimo osnovno pravilo}) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_i) \right) \\ &= \frac{h}{2}(1 \cdot f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \dots \\ &\quad + 2 \cdot f(x_{m-1}) + 1 \cdot f(x_m)) + Rf \end{aligned}$$

Ostanek določimo

$$\begin{aligned}
 Rf &= \sum_{i=0}^{m-1} \left( -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right) \\
 &= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) \\
 &= -\frac{h^3}{12} m f''(\mu) \\
 &= -\frac{h^3}{12} \frac{b-a}{h} f''(\mu) \\
 &= -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\mu)
 \end{aligned}$$

Ker predpostavimo, da je  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , obstaja  $\mu \in [a, b]$ , da je

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) = f''(\mu)$$

#### 4.3.2 Sestavljeno Simpsonovo pravilo

Osnovno:  $n = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

kjer je  $\xi \in [x_0, x_2]$  in  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$

(skica)

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right) \\
 &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) + \\
 &\quad + \dots + 2 \cdot f(x_{2m-2}) + 4 \cdot f(x_{2m-1}) + 1 \cdot f(x_{2m})) + Rf \\
 &= \frac{h}{3} f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m}) + Rf \\
 Rf &= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\mu) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\mu)
 \end{aligned}$$



### 4.3.3 Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Recimo, da računamo približek za integral s sestavljenim N-C pravilom s korakom  $h$ . Vprašanje je, kako v praksi določiti ta korak.

Označimo  $F_h$  približek, ki ga izračunamo s korakom  $h$  za neko fiksno funkcijo  $f$ . Predpostavimo, da velja

$$I = F_h + c_0 \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

kjer je  $c_0$  konstanta.

Namesto s korakom  $h$  računamo s korakom  $\frac{h}{2}$ :

$$I = F_{\frac{h}{2}} + c_0 \left(\frac{h}{2}\right)^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$2^p I = 2^p F_{\frac{h}{2}} + c_0 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad (2^p - 1)I = 2^p F_{\frac{h}{2}} - F_h + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomku pravimo ekstrapoliran približek.

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - F_h + F_{\frac{h}{2}} - F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = F_{\frac{h}{2}} + \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomek je ocena za napako približka  $F_{\frac{h}{2}}$ .

Podobno:

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - 2^p F_h + F_h - 2^p F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = F_h + 2^p \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomek je ocena za napako približka  $F_h$ .

Pri sestavljenem Simpsonovem pravilu je  $p = 4$  in

$$I = F_{\frac{h}{2}} + \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\text{Ekstrapoliran približek} = \frac{16F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15}$$

$$\text{Ekstrapoliran približek za sestavljeno trapezno pravilo} = \frac{4F_{\frac{h}{2}} - F_h}{3}$$

## 4.4 Gaussova integracijska pravila

Ideja za izpeljavo: Uteži in vozle izračunamo tako, da je pravilo čim višjega reda oziroma da je pravilo točno za polinome čim višjih stopenj.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Temu rečemo metoda nedoločenih koeficientov:

$$f(x) = x^k \int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^k, k = 0, 1, \dots, 2n+1$$

Imamo neznanke  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , ki jim rečemo uteži, in  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , ki jim pravimo vozli. Imamo torej  $2n+2$  neznank, torej rabimo tudi  $2n+2$  enačb. Zgornji sistem je nelinearen sistem  $2n+2$  enačb za  $2n+2$  neznank.

Ideja je ločiti enačbe za neznane vozle od enačb za neznane uteži. Kako?

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f$$

Če je  $f \in \mathbb{P}_{n+r}$ , je  $[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f \in \mathbb{P}_{r-1}$

$$Rf = \int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f dx$$

Definiramo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Če hočemo, da bo pravilo reda vsaj  $n+r$ , mora biti

$$\int_a^b \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f dx = 0$$

za nek  $f \in \mathbb{P}_{n+r}$ .

Če bo  $\langle w, q \rangle = 0 \ \forall q \in \mathbb{P}_{r-1}$ , bo pravilo zagotovo reda vsaj  $n+r$ . Drugače povedano: Če je  $\omega \perp \mathbb{P}_{r-1}$ , je pravilo zagotovo reda vsaj  $n+r$ . Koliko je lahko  $r$  največ?

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$\omega$  je lahko pravokoten 'največ' na  $\mathbb{P}_n$

$$\begin{aligned} r-1 &\leq n \\ r &\leq n+1 \end{aligned}$$

Če bo  $\omega \perp \mathbb{P}_n$ , potem bo pravilo reda  $n + r = n + n + 1 = 2n + 1$ . Če torej izberemo vozle  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tako, da bo  $\omega \perp \mathbb{P}_n$ , potem je pravilo reda  $2n + 1$ . To pravilo imenujemo Gaussovo pravilo. (Prva trditev velja tudi v drugo smer oziroma velja ekvivalenca).

Za neznane vozle dobimo  $n + 1$  pogojev za  $n + 1$  neznank:

$$\omega \perp 1, \omega \perp x, \omega \perp x^2, \dots, \omega \perp x^n$$

Iz pogojev sestavimo sistem nelinearnih enačb:

$$\begin{aligned} \langle \omega, 1 \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot 1 dx = 0 \\ \langle \omega, x \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot x dx = 0 \\ &\vdots \\ \langle \omega, x^n \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot x^n dx = 0 \end{aligned}$$

*Opomba.* Drug način: Iz baze  $1, x, \dots, x^{n+1}$  izračunamo ortonormirano bazo polinomov  $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$  (glede na dan skalarni produkt). Za vozle izberemo ničle polinoma  $P_{n+1}$ .

*Izrek 4.3.* Naj bo  $Ff = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$  Gaussovo integracijsko pravilo ( $Sf = Ff = Rf$ ) reda  $2n + 1$ . Uteži  $A_i = \int_a^b \ell_{i,n}(x) dx$  so pozitivne. Za  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$  je napaka oblike

$$Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx$$

*Dokaz.*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Če za  $f$  izberemo  $f(x) = \ell_{j,n}^2(x)$ , je  $Rf = 0$ .

$$\int_a^b \ell_{j,n}^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \ell_{j,n}^2(x_i) = A_j$$

iz česar sledi  $A_j > 0 \ \forall j = 0, 1, \dots, n$ .

Naj bo  $q$  interpolacijski polinom za  $f$  na točkah  $x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n$ .

Velja

$$f(x) = q(x) + \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]f$$

Vemo tudi, da je  $q \in Pp_{2n+1}$ , zato sledi, da je

$$\int_a^b q(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i q(x_i)$$

kjer je  $q(x_i) = f(x_i)$ .

Če to formulo integriramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b q(x)dx + \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]f dx$$

Leva stran je enaka  $Sf$ , desna stran pa  $Ff + Rf$ .

$$Sf = \int_a^b f(x)dx$$

$$Ff = \int_a^b q(x)dx$$

$$Rf = \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]f dx$$

Ker  $\omega^2(x)$  ne spremeni predznaka na intervalu  $[a, b]$ , dobimo

$$\begin{aligned} Rf &= \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]f dx \\ &= [x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, \tilde{\xi}]f \int_a^b \omega^2(x)dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \frac{a}{b} \omega^2(x)dx \end{aligned}$$

■

*Primer.* Določite vozla  $x_0$  in  $x_1$  ter uteži  $A_0$  in  $A_1$  v Gaussovem integracijskem pravilu

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + Rf$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Enačbe:  $\omega \perp 1, \omega \perp x$

$$0 = \int_{-1}^1 (x - x_0)(x - x_1)dx = \int_{-1}^1 (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1)dx = 2\left(\frac{1}{3} - x_0x_1\right)$$

$$0 = \int_{-1}^1 (x-x_0)(x-x_1)xdx = \int_{-1}^1 (x^3 - (x_0+x_1)x^2 + x_0x_1x)dx = -2(x_0+x_1)\frac{1}{3}$$

Dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{3} - x_0x_1\right) &= 0 \\ -\frac{2}{3}(x_0+x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo vozla:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Poračunamo tudi uteži:

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = \dots = 1 = A_1$$

kjer kot  $x_0$  in  $x_1$  vstavimo izračunani vozlišči.

Izračunamo še ostanek (za  $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1])$ ):

$$Rf = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^1 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \dots = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$

*Opomba.* V integral lahko dodamo tudi kako pozitivno utež  $\rho$ . Računamo torej približek za integral oblike  $\int_a^b f(x)\rho(x)dx$ .

## 4.5 Integrali v več dimenzijah

### 4.5.1 Dvojni integral

Za dano funkcijo  $f$ , zvezno na območju  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  iščemo integral

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

Integracijsko pravilo je oblike

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_{i,j} f(x_i, y_j) + Rf$$

kjer velja  $(x_i, y_j) \in \Omega$ .

### 4.5.2 Tenzorska pravila

(slikca)  $[a, b]$  razdelimo s korakom  $h$  na  $n$  delov:  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + i \cdot h$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ .  $[c, d]$  razdelimo s korakom  $k$  na  $m$  delov:  $k = \frac{d-c}{m}$ ,  $y_j = c + j \cdot k$  za  $j = 0, 1, \dots, m$ .

(mogoče bolje skica tu?)

Dobili smo mrežne točke  $(x_i, y_j)$ , določiti pa moramo še pripadajoče uteži  $A_{i,j}$ . Za to bomo uporabili Fubinijev izrek

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Poglejmo si natančneje uporabo trapeznega pravila.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \frac{h}{2} (g(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(x_n)) - \frac{h^2}{12} (b-a) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \Big|_{x=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y) dy \\ &= \frac{k}{2} (f(x_i, y) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, y_m)) - \frac{k^2}{12} (d-c) \frac{d^2}{dy^2} f(x_i, y) \Big|_{y=\mu} \end{aligned}$$

Dobimo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \frac{h \cdot k}{4} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_{i,j} f(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2 + k^2)$$

Za izračun  $A_{i,j}$  se uporabi

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \alpha_i \beta_j \\ \alpha &= (\alpha_i)_{i=0}^n = (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 1) \\ \beta &= (\beta_j)_{j=0}^m = (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 1) \end{aligned}$$

kjer imamo  $n-1$  dvojok pri  $\alpha$  oziroma  $m-1$  dvojok pri  $\beta$ .

(še ena slikca)

### 4.5.3 Simpsonovo pravilo

(nova skica) Napaka:  $Rf = \mathcal{O}(h^4 + k^4)$

Recimo, da računamo integral

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

kjer je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  in velja  $\Omega = [0, 1]^d$ . Recimo tudi, da v vsaki dimenziji uporabimo  $n$  točk, v katerih evaluiramo funkcijo. Torej je korak  $h = \frac{1}{n-1} \approx \frac{1}{n}$ . Število vseh izračunov vrednosti funkcije je torej  $N = n^d$  ( $n = N^{\frac{1}{d}}$ ), torej  $h \approx N^{-\frac{1}{d}}$ . Pri sestavljenem trapeznem pravilu je napaka  $\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(N^{-\frac{2}{d}})$ . Pri sestavljenem Simpsonovem pravilu je napaka  $\mathcal{O}(h^4) = \mathcal{O}(N^{-\frac{4}{d}})$ .

Pri velikih dimenzijah  $d$  so alternativa determinističnim metodam verjetnostne metode.

### 4.5.4 Metoda Monte-Carlo

Z uporabo enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke na intervalu  $[a, b]$  in krepkega zakona velikih števil pridemo do sledečega približka:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

kjer so  $x_i$  naključne vrednosti iz intervala  $[a, b]$ . Za napako velja  $I - I_N = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ . Za integral na  $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$  velja enako, le da so sedaj  $X_i$  slučajni vektorji z vrednostmi v  $\Omega$ .

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx \approx \frac{\prod_{j=1}^d (b_j - a_j)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Napaka je enaka kot prej, torej  $I - I_N = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ .

## 5 Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

Ponovitev teorije:

- NDE je funkcijska enačba, v kateri poleg neznane funkcije nastopajo tudi njeni odvodi.

- Red NDE je stopnja najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.
- Rešitev diferencialne enačbe reda  $p$  je  $p$ -parametrična družina funkcij. Če hočemo točno določeno rešitev, moramo predpisati  $p$  pogojev.

Ločimo začetne in robne probleme.

### 5.0.1 Začetni problem reda 1

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_a\end{aligned}$$

kjer je  $y_a$  podana konstanta in  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 5.0.2 Začetni problem reda $p$

$$\begin{aligned}y^{(p)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(p-q)}) \\ y(a) &= y_{a,0} \\ y'(a) &= y_{a,1} \\ &\vdots \\ y^{(p-q)}(a) &= y_{a,p-1}\end{aligned}$$

kjer so  $y(a), y'(a), \dots, y^{(p-q)}(a)$  podane konstante.

Pri numeričnem reševanju in analizi rešitev se bomo omejili na probleme, pri katerih so izpolnjeni pogoji eksistenčnega izreka (E.I.).

### 5.0.3 Robni problemi

$$\begin{aligned}x^{(4)} + x_y &= 0 \\ y(a) &= y_{a,0} \\ y'(a) &= y_{a,1} \\ y(b) &= y_{b,0} \\ y'(b) &= y_{b,1}\end{aligned}$$

Robnih primerov pri tem predmetu ne bomo reševali.

Numerične metode za reševanje teh problemov delimo na:



### 1. Diferenčne metode

Približek k rešitvi iščemo diskretno. Numerična rešitev je sestavljena iz zaporedja točk  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$  in pripadajočega zaporedja vrednosti  $y_0, y_1, \dots, y_m$ , pri čemer je

$$y_n \approx y(x_n)$$

za  $n = 0, 1, 2, \dots$ , kjer je  $y_n$  numerični približek,  $y(x_n)$  pa točna rešitev pri  $x_n$ . (slika)

### 2. Metode, pri katerih iščemo približek k rešitvi kot funkcijo v nekem izbranem podprostoru funkcij

Dve znani metodi sta kolokacija in metoda končnih elementov. Teh metod letos ne bomo obravnavali.

Diferenčne metode delimo na

#### 1. enočlenske metode

približek za  $y_{n+1}$  izračunamo iz približka za  $y_n$

#### 2. veččlenske metode ( $k$ -členske metode)

približek za  $y_{n+1}$  izračunamo iz približkov za  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}$

in na

#### 1. eksplicitne metode

imamo direktno formulo za izračun približka  $y_{n+1}$

#### 2. implicitne metode

približek za  $y_{n+1}$  izračunamo tako, da rešimo (nelinearno) enačbo.

Poglejmo si izpeljavo najbolj preproste enočlenske metode za reševanje začetnega problema 1. reda oblike

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_a \end{aligned}$$

Na vsakem 'koraku' moramo iz točke  $(x_n, y_n)$  določiti  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . Poznamo začetno točko  $x_0 = a$  ter  $y_0 = y_a$ . Za premik v  $x$  smeri uporabimo konstanten korak  $h$  (poenostavljen pristop). Vemo torej  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ ,  
...

Kako do približka  $y_1 \approx y(x_1)$ ?

(slikca)

Iz DE dobimo vrednost  $y'(a)$ , to je  $y'(a) = f(a, y(a)) = f(x_0, y_0)$ . Zdaj znamo narisat tangento na graf funkcije v točki  $(x_0, y_0)$ . Dobimo dve novi točki:  $(x_1, y(x_1))$ , kar je točka na grafu funkcije  $f$ , in  $(x_1, y_1)$ , kar je točka na tangenti od prej, za njun izračun pa uporabimo

$$\begin{aligned} p(x) &= y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) \\ &= y(x_0) + (x - x_0)f(x_0, y(x_0)) \\ &= y_0 + (x - x_0)f(x_0, y(x_0)) \end{aligned}$$

Isto idejo uporabimo za izračun vseh naslednjih približkov in dobimo metodo:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

To metodo imenujemo Eksplisitna Eulerjeva metoda.

Drug način izpeljave te metode:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_a \end{aligned}$$

Spomnimo se formule za aproksimacijo odvoda:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi)$$

Vstavimo to aproksimacijo v diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned} y'(x_n) &= f(x_n, y(x_n)) \\ \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) &= f(x_n, y(x_n)) \end{aligned}$$

Napako zanemarimo in točne vrednosti nadomestimo s približki, da ohranimo enačaj:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Dobimo torej isto enačbo kot prej.

Če bi uporabili formulo

$$y'(x_{n+1}) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi)$$

bi dobili

$$\begin{aligned}y'(x_{n+1}) &= f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\ \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi) &= f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\end{aligned}$$

Odrežemo napako in dobimo

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

oziroma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

za  $n = 0, 1, 2, \dots$ . To je implicitna Eulerjeva metoda.

Pri implicitnih metodah moramo za izračun  $y_{n+1}$  rešiti (nelinearno) enačbo. Uporabimo lahko postopek navadne iteracije.

$$y_{n+1} = g(y_{n+1})$$

pri čemer je

$$g(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

To računamo tako:

$$\begin{aligned}&y_{n+1}^{(0)} = y_n \\ &\mathbf{do} \\ &\quad y_{n+1}^{(r)} = g(y_{n+1}^{(r-1)}) \\ &\mathbf{while} \left| y_{n+1}^{(r)} - y_{n+1}^{(r-1)} \right| > \textit{toleranca} \left| y_{n+1}^{(r)} \right|\end{aligned}$$

*Primer.*

$$\begin{aligned}y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Z Eulerjevo metodo s korakom  $h = \frac{1}{10}$  določi približek za  $y_1 \approx y(0.1)$  in  $y_2 \approx y(0.2)$ .

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, f(x, y) = x^2 + y^2 \\ y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 + h(x_0^2 + y_0^2) = 1 + \frac{1}{10}(0 + 1^2) = 1.1 \\ y_2 &= y_1 + h(x_1^2 + y_1^2) = 1.1 + \frac{1}{10}(0.1^2 + 1.1^2) = 1.222\end{aligned}$$

V splošnem bi do predpisov za približke  $y_n$  lahko prišli na naslednje načine:

1. Odvod  $y'$  v DE aproksimiramo s približki izraženimi z vrednostmi funkcije  $y$  v bližnjih točkah.
2. DE  $y' = f(x, y)$  integriramo.

*Primer.*

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \frac{h}{2}(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))) + \frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi, y(\xi))$$

Napako odrežemo in točne vrednosti nadomestimo s približki in pridemo do metode:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1})))$$

To je trapezna metoda za reševanje diferencialnih enačb.

## 5.1 Globalna in lokalna napaka

Rešujemo problem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = y_a$ . Numerično rešitev iščemo na intervalu  $[a, b]$ , pri čemer predpostavimo, da so na tem intervalu izpolnjeni pogoji eksistenčnega izreka.

Interval  $[a, b]$  razdelimo na  $m$  ekvidistantnih delov s korakom  $h = \frac{b-a}{m}$ . Dobimo  $x_n = a + n \cdot h$ ,  $n = 0, 1, \dots, m$ . Numerične približke  $(y_n)_{n=0}^m$  povežemo z odsekoma linearno funkcijo  $y_h$ .

(slika)

*Definicija 5.1.* Metoda je konvergentna, če za vse DE, ki zadoščajo pogojem eksistenčnega izreka na  $[a, b]$ , velja

$$\|y - y_h\|_{\infty, [a, b]}$$

ko  $h \rightarrow 0$  (oziroma  $m \rightarrow \infty$ )

Ekvivalentno:

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n|$$

ko  $m \rightarrow \infty$

*Definicija 5.2.* Globalna napaka (na celém intervalu):

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n|$$

*Definicija 5.3.* Globalna napaka v točki  $x_n$  je  $|y(x_n) - y_n|$

*Definicija 5.4.* Metoda je reda  $r$ , če velja

$$\max_{0 \leq n \leq m} |y(x_n) - y_n| = c \cdot h^r + \mathcal{O}(h^{r+1})$$

Pri določanju reda metode oziroma reda globalne napake si pomagamo z lokalno napako.

*Definicija 5.5.* Lokalna napaka v točki  $x_n$  je razlika med točno rešitvijo v tej točki in njenim numeričnim približkom ob predpostavki, da se točna in numerična rešitev ujemata na vseh prejšnjih korakih.

$$T_n(h) = y(x_n) - y_n$$

ob predpostavki

$$y(x_{n-j}) = y_{n-j}, j = 1, 2, \dots$$

Z lokalno napako si pomagamo pri določanju reda globalne napake.

Velja (brez dokaza): Metoda je reda  $r$ , brž ko je lokalna napaka reda  $r + 1$ .

Pri določanju reda lokalne napake si pomagamo z razvoji v Taylorjevo vrsto.

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + h) \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$\begin{aligned} y' &= f \\ y'' &= f_x + f_y y' = f_x + f_y f \\ y''' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_y(f_x + f_y f) \end{aligned}$$

$$f(x' \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y) \cdot \Delta x + f_y(x, y) \cdot \Delta y + \dots$$

Določi red lokalne napake eksplcitne Eulerjeve metode.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= y(X_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + f_y(x_n, y(x_n)) \cdot f(x_n, y(x_n))) \\
&\quad + \mathcal{O}(h^3) - y_n - hf(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Vstavimo  $y(x_n) = y_n$  in dobimo

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)) = \mathcal{O}(h^2)$$

Red lokalne napake je 2, torej je Eulerjeva metoda reda 1.

## 5.2 Runge-Kutta metode

s-stopenjska R-K metoda: Izračunamo s-koeficientov

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j), i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \gamma_i k_i$$

pri tem so  $(\alpha_i)_{i=1}^s$ ,  $(\beta_{ij})_{i,j=1}^s$  in  $(\gamma_i)_{i=1}^s$  prosti koeficienti, ki jih izberemo tako, da bo metoda konvergentna in čim višjega reda.

$$\alpha_i \in [0, 1]$$

Velja še  $\alpha_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij}$ .

Da bo metoda konvergentna oziroma reda vsaj 1, če bo  $\sum_{i=1}^s \gamma_i = 1$ .

R-K metodo lahko predstavimo v t.i. Butcherjevi shemi

(tabelca)

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \beta_{i1}k_1 + \beta_{i2}k_2 + \dots + \beta_{is}k_s)$$

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \cdots + \gamma_s k_s$$

R-K metoda je eksplicitna, če bodo  $\beta_{ij} = 0$  za vse  $j \geq i$ .

R-K metoda je diagonalno implicitna, če bodo  $\beta_{ij} = 0$  za vse  $j > i$  in bo vsaj en  $\beta_{ii} \neq 0$ . Sicer je metoda implicitna.

### 5.2.1 Primeri R-K metod

#### 5.2.1.1 Modificirana Eulerjeva metoda

(shema)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 \end{aligned}$$