Numerične metode 2

zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo $\tilde{f}$, ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant $\tilde{f}$?
- V čem naj si bo $\tilde{f}$ podobna/sorodna z f?
- Ali $\tilde{f}$ obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant $\tilde{f}$?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan $\tilde{f}$?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X, v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A} \colon X \to S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A} f \in S$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b]), X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \mathcal{L}^2_\rho([a, b]) = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R} \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty\}$,
  pri čemer je ρ **pozitivna utež:** $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = Lin\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ polinomi stopnje $\leq n$:

$$S = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}\}$$

- **triginimetrični polinomi**

$$S = Lin\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$$

- podprostori racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

$$f \in \mathcal{C}([a, b]), \|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

  Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N}$$

  in izračunamo

$$\|f\|_{\infty,\mathbf{x}} = \max_{i=0,\ldots,N} |f(x_i)|$$

- druga norma ($\|\cdot\|_2$) - norma, porojena iz skalarnega produkta. Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Potem je

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}, f \in X$$

  Primeri skalarnih produktov:

  · $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,\ f, g \in \mathcal{L}^2_\rho([a, b])$

  · $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

  Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N},\ a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) g(x_i) \rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i) \rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta $\tilde{f}$ ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = dist(f, S)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

   (za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)

2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = \mathbb{P}_n$, $\|\cdot\|_\infty$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da je $\|f - p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$dist(f, \mathbb{P}_n) \to 0, \text{ ko gre } n \to \infty \tag{1}$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x) \tag{2}$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}, \; i = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, ko gre $n \to \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0,1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{P}_n$$
$$f \mapsto \mathcal{B}_n f$$
$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b-a)) B_i^n(\frac{x-a}{b-a})$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X, $S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $dim S = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0$$

Dokaz.
($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\begin{aligned} \|f - s\|_2^2 &= \|f - f^* + f^* - s\|_2^2 \\ &= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle \\ &= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 \\ &\geq \|f - f^*\|_2^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Neenakost 4 velja, saj zato, ker velja tako $f^* \in S$ kot $s \in S$ velja tudi $(f^* - s) \in S$, torej veljata tudi enakost $\langle f^* - s, f - f^* \rangle = 0$ in neenakost $\|f^* - s\|_2 \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je f^* ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f - f^* \perp S$$

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\begin{aligned} \|f - f^*\|_2^2 &\leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2^2 \\ &= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle \\ &= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \end{aligned}$$

$$0 \leq 2\langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2$$

$$0 \leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2) \tag{5}$$

$$0 \leq \langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2 \tag{6}$$

pri čemer iz 5 na 6 pridemo preko začetnega izbora za $\lambda > 0$. Ker lahko λ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s \rangle$ prevlada nad $\lambda \|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem po istem sklepu velja, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle$ oziroma $\langle f - f^*, s \rangle \leq 0$. Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza za $S \subseteq X$:

$$S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

Iščemo $f^* \in S$ ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^n$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$. To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\begin{aligned}
0 =& \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \\
=& \langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_j \rangle \\
=& \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle
\end{aligned}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle$$

iz česar skupaj dobimo sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle, \, i \in [n]$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
x^T G x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_1 \rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1 \rangle \\
&= \| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \|_2^2 \\
&> 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Neenačaj 7 je strog, saj velja

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je $x_i > 0$ in ker je

$$\varphi_i \in Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

kar je baza za S. Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

Primer. Naj bo $f(x) = sin(x)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. Aproksimiraj f po MNK v podprostoru $\mathbb{P}_1$.

Rešitev: Definirajmo X in S

$$X = \mathcal{C}([0,\pi])(X = \mathcal{L}^2([0,\pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo f^*

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko G

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{desna stran } = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi dx = \pi$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi xdx = \frac{\pi^2}{2}$$
$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x^2dx = \frac{\pi^3}{3}$$

in

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi sinxdx = -cosx\Big|_0^\pi = 2$$
$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x \cdot sinxdx = \cdots = \pi$$

Dobimo:

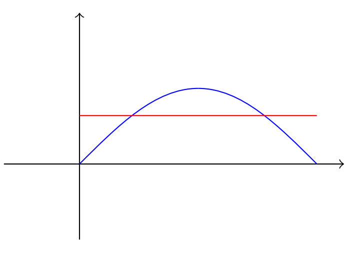
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (sinx - p(x)^2)dx}$$



Želimo minimizirati ploščino območja med modro in rdečo črto.

Primer. Točke $(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)$ aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev: $S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{4} f(x_i), g(x_i),\ x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

f, ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah $\mathbf{x}$.

Izračunamo:

$$\langle 1, 1\rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot 1 = 4$$

$$\langle 1, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot x_i = 10$$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30$$

$$\langle f, 1\rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot 1 = 18$$

$$\langle f, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 55$$

Dobimo sistem

$$\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\55\end{bmatrix}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p\in\mathbb{P}_1}\|f-p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(y_i - p(x_i))^2}$$

1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{bmatrix},\ b \in R^m$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|_2 = \min_{z\in ImA}\|b-z\|$$

Aproksimiramo vektor $b \in \mathbb{R}^m (X = \mathbb{R}^m)$

$$S = Lin\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = ImA$$

$$b^* = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = Ax$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = x^T y$$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$:

$$G = (\langle a_j, a_i \rangle)_{i,j=1}^{n} = A^T A \tag{8}$$

$$\text{desna stran } = (\langle a_i, b \rangle)_{i=1}^{n} = A^T b \tag{9}$$

Primer. $X = \mathcal{C}([0, 1])$

$$S = P_{n-1} = Lin\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i+j-1}$$

$$G = (\frac{1}{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$$

kjer je G Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru S izberemo **ortonormirano bazo**:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_1 \perp \varphi_j \ \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

V tem primeru je $G = I$ in $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$, $f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$. Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Scmidtovim algoritmom**.

$X \in \mathcal{C}([a, b])$ (vstavi skico)

Algorithm 1 Modificiran Gram-Schmidtov algoritem

Input baza $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$

for $i = 1 : n$ **do**
    $\varphi_i = \psi_i$
end for
for $i = 1 : n$ **do**
    $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$
    for $j = i + 1 : n$ **do**
        $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$
    end for
end for

Output ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$

1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$$X = \mathcal{C}([a, b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$$

Problem: Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in Pp_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

p^* imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PNEA)**. Problem je nelinearen.

(vstavi skico)

Nasledni izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PNEA za neko funkcijo.

Izrek 1.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ tak, da **residual**

$$r = f - p \tag{10}$$

alternirajoče doseže svojo normo $\|p\|_{\infty,[a,b]}$ v vsaj $n+2$ različnih točkah $(x_i)_{i=0}^{n+1}$

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b$$

Potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a, b]$.

Opomba. Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)| \, \forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \forall i$$

(vstavi graf)

Dokaz. Dokaz s protislovjem.

Recimo, da p ne bi bil PNEA za f. Tedaj bi obstajal nek drug polinom $q \in \mathbb{P}_n$, da bi veljalo

$$\begin{aligned} |f(x_i) - q(x_i)| \leq & \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q(x)| \\ =& \|f - q\|_{\infty,[a,b]} \\ <& \|f - p\|_{\infty,[a,b]} \\ =& |f(x_i) - p(x_i)| \ \ \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n+1 \end{aligned}$$

Torej za $\forall i$ velja:

$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)|$$

To razvijemo v neenakosti

$$-sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i)) < f(x_i) - q(x_i)$$

in

$$f(x_i) - q(x_i) < sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i))$$

Če v neenakostih x_i spremenimo v x_{i+1} ter upoštevamo enakost

$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = -sign(f(x_i) - p(x_i))$$

dobimo neenakosti

$$sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$$

in

$$f(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}))$$

Brez škode za splošnost (BŠS) lahko rečemo, da je $sign(f(x_i) - p(x_i)) = 1$. Potem je $f(x_i) - q(x_i) < f(x_i) - p(x_i)$, $p(x_i) - q(x_i) < 0$ in $f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$, torej $p(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) > 0$.

Vidimo, da ima razlika $p - q$ ničlo na intervalu (x_i, x_{i+1}) za $i \in [n]$. Razlika $p - q$ je polinom stopnje n, ki ima $n + 1$ ničel. Torej mora biti $p \equiv q$. ∎

Izkaže se, da je pogoj tudi potreben (torej da velja ekvivalenca), a je dokaz težek, zato ga bomo izpustili.

Iskanje/računanje PNEA se prevede na iskanje ustrezne množice točk $\{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$.

Definicija 1.4. Naj bo $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$. Definirajmo **minimaks** za f na E konstruirati

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x_i \in E} |f(x_i) - p(x_i)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na množici E**. Izračunamo ga tako, da rešimo naslednji sistem linearnih enačb: (brez izpeljave)

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, i \in [n+1]$$

Imamo torej $n+2$ enačb in $n+2$ neznank ($n+1$ v polinomu p in eno v m):

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

ter koeficient m, za katerega velja

$$|m| = M_n(f, E)$$

(vstavi slikco)

2 Interpolacija

Problem: Podane imamo vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na realni osi. Te točke bomo imenovali **interpolacijske točke**. Iščemo neko preprostejšo funkcijo g, ki zadošča pohojem

$$g(x_i) = f(x_i) \forall i \in [n]$$

g imenujemo **interpolacijska funkcija**. Za interpolacijske funkcije običajno izberemo polinome, odsekoma polinomske funkcije ...

Interpolacija se uporablja za

- aproksimacijo dane funkcije

- kadar funkcijo f poznamo le v točkah $x_0, x_1, \dots, x_n$, radi pa bi izračunali vrednost te funkcije tudi za x, ki ni ena izmed interpolacijskih točk.
- za izpeljavo formul za numerično integriranje, odvajanje, reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE) ...

2.1 Polinomska interpolacija

Za $f \in \mathcal{C}([a,b])$ in interpolacijske točke $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$ iščemo **polinom**p_i, ki zadošča enačbam

$$p(x_i) = f(x_i), i = a, \dots, n$$

Enačb je $n+1$. Da dobimo enako število enačb, moramo izbrati $p \in \mathbb{P}_n$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Enačbe:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n \text{ za } i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

matriko imenujemo **vandermondova matrika**.

$$detV(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Pi_{0 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$$

Ker je Vandermondova matrika obrnljiva, sledi, da imamo enolično rešitev. Torej obstaja **enoličen** polinom stopnje n, ki interpolira $n+1$ paroma različnih točk. Tak interpolacijski problem imenujemo **korenten** interpolacijski problem. Vandermondova matrika je primer **zelo občutljive** matrike. Poleg tega nimamo rešitve v **zaključeni obliki**. Spoznali bomo dva druga zapisa interpolacijskega polinoma:

- Lagrangeva oblika zapisa
- Newtonova oblika zapisa

2.1.1 Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definiramo naslednje polinome:

$$
\begin{aligned}
{}_{0,n}(x) =& \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \\
{}_{1,n}(x) =& \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \\
\vdots_{n,n}(x) =& \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
{}_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}
$$

za $i = 0, 1, \dots, n$. To imenujemo **Lagrangebi bazni polinomi**.

Velja:

$$
{}_{i,n}(x) = \delta_{i,j} = (1, i = j, 0, i \neq j)
$$

Vsi ti polinomi so stopnje točno n.

Izrek 2.1. Polinomi ${}_{i,n}$ za $i = 0, 1, \dots, n$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Dokaz. Dokazati moramo le, da so linearno neodvisni. Preveriti moramo, da je $\alpha_{0i,n} + \alpha_{1i,n} + \cdots + \alpha_{ni,n} = 0 <=> \alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. (=>)

$$
\sum_{j=0}^{n} \alpha_{jj,n}(x) = 0 \forall x
$$

Vstavimo $x = x_i$ in dobimo

$$
0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{jj,n}(x_i) = \alpha_i
$$

(<=) Očitno. ■

Iz dokaza sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$
p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_{jj,n}(x)
$$

za $c_j \in \mathbb{R}$.

Kako izbrati koeficiente, da bo polinom interpolacijski oziroma da bo zadoščal pogojem

$$p(x_i) = f(x_i), i = 1, ..., n$$

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_{j j,n}(x_i) = f(x_i)$$

Vsota je enaka c_i.

Dobili smo

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)_{j,n}(x)$$

kar je Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma.