Numerične metode 2

zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo $\tilde{f}$, ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant $\tilde{f}$?
- V čem naj si bo $\tilde{f}$ podobna/sorodna z f?
- Ali $\tilde{f}$ obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant $\tilde{f}$?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan $\tilde{f}$?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X, v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A} \colon X \to S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S'$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b]), X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \mathcal{L}^2_\rho([a, b]) = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R} \int_a^b \rho(x)dx < \infty\}$,
  pri čemer je ρ **pozitivna utež:** $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = P_n = Lin\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ polinom stopnje $\leq n = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}\}$
- $S = Lin\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$ **triginimetrični polinomi**
- podprostori racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

  $$f \in \mathcal{C}([a,b]), \|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

  Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

  $$a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N}$$

  in izračunamo

  $$\|f\|_{\infty,\mathbf{x}} = \max_{i=1,\ldots,N} |f(x_i)|$$

- druga norma - norma, porojena iz skalarnega produkta Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potem je $||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Primeri skalarnih produktov:

  · $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,\ f, g \in \mathcal{L}^2_\rho([a, b])$

  · $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

  Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

  $$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N}, a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$$

  $$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)$$

  Če ga še delimo z dolž"ino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

  $$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i)\rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta $\tilde{f}$ ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = dist(f, S) \tag{1}$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

   (za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)
2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a,b])$, $S = P_n$, $\|\cdot\|_{\text{inf}}$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Potem za vsak $\varepsilon < 0$ obstaja polinom p, da je $\|f - p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$dist(f, P_n) \to 0, \text{ ko gre } n \to \infty \tag{2}$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a,b] = [0,1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0,1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x) \tag{3}$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \ i = 0, 1, \dots, n \tag{4}$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, ko gre $n \to \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0,1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to P_n$$
$$f \mapsto \mathcal{B}_n f$$
$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b-a)) B_i^n(\frac{x-a}{b-a}) \tag{5}$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom <.,.> in naj bo $\|\|_d = \sqrt{< .,. >}$.

$S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X, $S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \}$, $dimS = n$.

Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2 \tag{6}$$

f^* imenujemo element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je $f - f^* \perp S$.

$\Longleftarrow$. Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je $\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$. Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\|f-s\|_2 = \|f-f^*+f^*-s\|_2 = \langle (f-f^*)+(f^*-s), (f-f^*)+(f^*-s)\rangle = \|f-f^*\|_2^2 + 2 * \langle f^*-s, f-f^*\rangle +$$

$\blacksquare$

$\Longleftarrow$. Predpostavimo, da je f^* e.n.a. po MNK. Dokazati želimo: $f - f^* \perp S$ (podčrtkano)

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\|f-f^*\|_2 \leq \|f-(f^*-\lambda s)\|_2 = \langle f-f^*+\lambda s, f-f^*+\lambda s\rangle = \|f-f^*\|_2^2 + 2 * \langle f-f^*, \lambda s\rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \tag{8}$$

$$0 \leq 2 * \langle f - f^*, \lambda s\rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 0 \leq \lambda(2\langle f - f^*, s\rangle + \lambda \|s\|_2^2) \tag{9}$$

Ker lahko $\lambda > 0$ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s\rangle$ prevlada nad $\lambda\|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s\rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem pa po istem sklepu velja, da mora biti

$$0 \leq \langle f - f^*, -s\rangle \text{ oziroma } \langle f - f^*, s\rangle \leq 0 \tag{10}$$

Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s\rangle = 0 \tag{11}$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija .

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza za podprostor S:

$$S = Lin\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

Iščemo $f^* \in S$ e.n.a. po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^n$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$. To bo res <=> ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\langle f - f^*, \varphi_i\rangle = 0$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_j\rangle = 0$$

$$\langle f, \varphi_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i\rangle = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i\rangle = \langle f, \varphi_i\rangle$$

insert enačbo (po vektorjih)