Numerične metode 2 2022/23: 2.domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-dn2.zip` in jih oddajte preko učilnice najkasneje dan pred kvizom.

1. **Sestavljeno Simpsonovo pravilo in sestavljeno $3/8$ pravilo.**
   Implementirajte metodi:

   - `simpson(f,a,b,m)`, ki izračuna približek za integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ z uporabo sestavljenega Simpsonovega pravila, določenega iz m osnovnih pravil z ekvidistantnimi vozli z razmikom $h = \frac{b-a}{2m}$ in
   - `triosminsko(f,a,b,m)`, ki izračuna približek za integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ z uporabo sestavljenega $3/8$ pravila, določenega iz m osnovnih pravil z ekvidistantnimi vozli z razmikom $h = \frac{b-a}{3m}$.

   Z metodama integrirajte funkcijo $f(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $[0, 1]$ ter si oglejte napake pravil za $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Za izračun natančnejšega približka uporabite vgrajeno metodo `integral`. Natančnost izračuna kontroliramo z nastavitvama relativne in absolutne tolerance; nastavite `'RelTol'=1e-10` in `'AbsTol'=1e-10`.

2. **Richardsonova ekstrapolacija.**
   Implementirajte metodo `richardson(f,a,b,m)`, ki za dano funkcijo f, interval $[a, b]$ in število osnovnih pravil m vrne:

   - približek $S_{\frac{h}{2}}$ za integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ z uporabo sestavljenega Simpsonovega pravila pri razmiku $\frac{h}{2}$,
   - oceno za napako približka $S_{\frac{h}{2}}$ iz prejšnje točke, ki je enaka $\dfrac{S_{\frac{h}{2}} - S_h}{2^p - 1}$, $p = 4$,
   - natančnejši približek I za integral funkcije f, dobljen z uporabo Richardsonove ekstrapolacije:
   $$I = \frac{2^p S_{\frac{h}{2}} - S_h}{2^p - 1}.$$

   Velja $h = \frac{b-a}{2m}$ in $\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2m}$.
   Metodo testirajte s pomočjo funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ za $m = 2^k, k = 0, 1, \ldots$, in določite najmanjši h, za katerega velja, da je ocena napake približka $S_{\frac{h}{2}}$ manjša od 10^{-5}.

3. **Reševanje navadnih diferencialnih enačb.**
   Implementirajte spodnji dve metodi za reševanje navadnih diferencialnih enačb oblike
   $$y' = f(x, y), \quad x > x_0,$$
   pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$.

   a) Trapezna metoda: `trapezna(x,f,y0,tol)`, kjer seznam `x` določa diskretizacijo domene (prvi element seznama je točka x_0), `f` ustreza funkciji f dveh spremenljivk, `y0` pa predstavlja vrednost y_0. Poleg tega metoda sprejeme tudi parameter `tol`, ki določa zaustavitveni pogoj za navadno iteracijo pri določanju približka na posameznem koraku metode. Natančneje, naj bosta x_n in x_{n+1} zaporedni točki iz seznama `x`, vrednost y_n že izračunani približek za $y(x_n)$, vrednost y_{n+1} pa iskani približek, določen z implicitno enačbo $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$. Rešitev te enačbe poiščemo z iteracijo
   $$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)})\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$
   kjer je $y_{n+1}^{(0)} = y_n$. Iteracijski postopek končamo pri najmanjšem številu k, za katerega velja
   $$|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| < \mathrm{tol} \cdot |y_{n+1}^{(k)}|$$
   in vzamemo $y_{n+1} = y_{n+1}^{(k)}$.
   Izhodni podatek metode naj bo seznam `y`, enake dolžine kot `x`, ki se začne z vrednostjo y_0, sledijo pa ji vrednosti izračunanih približkov v ostalih točkah iz seznama `x`.

b) Metoda RK4, ki je podana s spodnjo Butcherjevo shemo:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}.$$

Metoda naj bo oblike `rk4(x,f,y0)`, kjer seznam `x` določa diskretizacijo domene (prvi element seznama je točka x_0), `f` ustreza funkciji f dveh spremenljivk, `y0` pa predstavlja vrednost y_0.

Metodo implementirajte tako, da bo delovala tudi za sisteme enačb.

Metodi preizkusite na funkciji

$$f(x,y) = y + 15e^x \cos(15x)$$

na intervalu $[0,1]$ z začetnim pogojem $y_0 = 0$ v točki $x_0 = 0$ pri razmikih

$$h = 0.1 \cdot 2^{-r}, \quad r \in \{0,1,\ldots,4\}.$$

Pri trapezni metodi uporabite $\text{tol} = 10^{-3}$.

Dobljene približke primerjajte s točnimi vrednostmi, ki jih dobite s pomočjo vgrajene metode `ode45`; z `odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-10)` nastavite natančnost izračuna.