Numerične metode 2

zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo $\tilde{f}$, ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant $\tilde{f}$?
- V čem naj si bo $\tilde{f}$ podobna/sorodna z f?
- Ali $\tilde{f}$ obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant $\tilde{f}$?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan $\tilde{f}$?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X, v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A} \colon X \to S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S'$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a,b]), X = \mathcal{C}^k([a,b])$
- $X = \mathcal{L}^2_\rho([a,b]) = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R} \int_a^b \rho(x)dx < \infty\}$,
  pri čemer je ρ **pozitivna utež:** $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a,b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = Lin\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ polinom stopnje $\leq n =$ $\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}\}$
- $S = Lin\{1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, \ldots, sinnx, cosnx\}$ **triginimetrični polinomi**
- podprostori racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

$$f \in \mathcal{C}([a,b]), \|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

  Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N}$$

  in izračunamo

$$\|f\|_{\infty,\mathbf{x}} = \max_{i=1,\ldots,N} |f(x_i)|$$

- druga norma - norma, porojena iz skalarnega produkta Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je $||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Primeri skalarnih produktov:
  - $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,\ f, g \in \mathcal{L}^2_\rho([a,b])$
  - $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

  Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^{N}, a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)$$

  Če ga še delimo z dolž"ino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i)\rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta $\tilde{f}$ ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = dist(f, S) \tag{1}$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

   (za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)
2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = \mathbb{P}_n$, $\|\cdot\|_{\inf}$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon < 0$ obstaja polinom p, da je $\|f - p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$dist(f, \mathbb{P}_n) \to 0, \text{ ko gre } n \to \infty \tag{2}$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x) \tag{3}$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}, \; i = 0, 1, \ldots, n \tag{4}$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, ko gre $n \to \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0, 1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{P}_n$$
$$f \mapsto \mathcal{B}_n f$$
$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b-a)) B_i^n(\frac{x-a}{b-a}) \tag{5}$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X, $S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $dimS = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2 \tag{6}$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S \tag{7}$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0 \tag{8}$$

Dokaz.
($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_2 &= \|f - f^* + f^* - s\|_2 && (9)\\
&= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle && (10)\\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 * \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 && (11)\\
&\geq \|f - f^*\|_2^2 && (12)
\end{aligned}$$

(10) velja, saj sta tako $f^* - s \in S$, torej veljata enakost $\langle f^* - s, f - f^* \rangle = 0$ in neenakost $\|f^* - s\|_2 \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je f^* ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f - f^* \perp S \tag{13}$$

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\begin{aligned} \|f - f^*\|_2 &\leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2 & (14)\\ &= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle & (15)\\ &= \|f - f^*\|_2^2 + 2 * \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 & (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 & (17)\\ 0 &\leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2) & (18)\\ 0 &\leq \langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2 & (19) \end{aligned}$$

pri čemer iz (18) na (19) pridemo preko začetnega izbora za $\lambda > 0$. Ker lahko λ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s \rangle$ prevlada nad $\lambda \|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem po istem sklepu velja, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle$ oziroma $\langle f - f^*, s \rangle \leq 0$. Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0 \tag{20}$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza za $S \subseteq X$:

$$S = Lin \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

Iščemo $f^* \in S$ ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^n$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$. To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$0 = \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \tag{21}$$
$$= \langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_j \rangle \tag{22}$$
$$= \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \tag{23}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle \tag{24}$$

kar skupaj nanese sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle,\ i \in [n] \tag{25}$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \tag{26}$$

1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^{n}$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

$$x^T G x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \tag{28}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_1 \rangle \tag{29}$$

$$= \langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1 \rangle \tag{30}$$

$$= \| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \|_2^2 > 0 \tag{31}$$

Neenačaj je strog, saj

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je $x_i > 0$ in ker je

$$\varphi_i \in Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

kar je baza za S. Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

Primer. Naj bo $f(x) = sin(x)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$. Aproksimiraj f po MNK v podprostoru $\mathbb{P}_1$.

Rešitev: Definirajmo X in S

$$X = \mathcal{C}([0, \pi])(X = \mathcal{L}^2([0, \pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo f^*

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko G

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\text{desna stran } = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix} \tag{33}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi dx = \pi \tag{34}$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2} \tag{35}$$

$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3} \tag{36}$$

in

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi sinx dx = -cosx \Big|_0^\pi = 2 \tag{37}$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x \cdot sinx dx = \cdots = \pi \tag{38}$$

Dobimo:

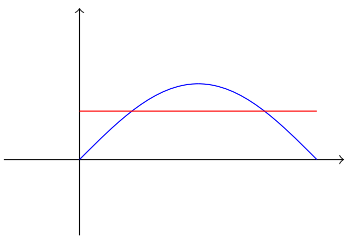
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix} \tag{39}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \pi \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (sinx - p(x)^2) dx}$$



Želimo minimizirati ploščino območja med modro in rdečo črto.

Primer. Točke $(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)$ aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev: $S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{4} f(x_i), g(x_i),\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

f, ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah $\mathbf{x}$.

Izračunamo:

$$\langle 1, 1 \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot 1 = 4 \tag{40}$$

$$\langle 1, x \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot x_i = 10 \tag{41}$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30 \tag{42}$$

$$\langle f, 1 \rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot 1 = 18 \tag{43}$$

$$\langle f, x \rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 55 \tag{44}$$

Dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 55 \end{bmatrix} \tag{45}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i \cdot -p(x_i))^2}$$

1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix},\ b \in R^m$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \min_{z \in ImA} \|b - z\|$$

Aproksimiramo vektor $b \in \mathbb{R}^m (X = \mathbb{R}^m)$

$$S = Lin\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = ImA$$

$$b^* = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = Ax$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = x^T y$$

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$:

$$G = (\langle a_j, a_i\rangle)_{i,j=1}^{n} = A^T A \tag{46}$$

$$\text{desna stran } = (\langle a_i, b\rangle)_{i=1}^{n} = A^T b \tag{47}$$

Primer. $X = \mathcal{C}([0,1])$

$$S = P_{n-1} = Lin\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}dx = \int_0^1 x^{i+j-2}dx = \frac{1}{i+j-1}$$

$$G = (\frac{1}{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$$

kjer je G Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru S izberemo **ortonormirano bazo**

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_1 \varphi_j \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

V tem primeru je $G = I$ in $\alpha_i = \langle f, \varphi_i\rangle$ in $f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i\rangle \varphi_i$. Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Schmidtovim algoritmom**.

Algoritem: (daj v psevdokodo) Vhodni podatki: baza $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ for i = 1:n $\varphi_i = \psi_i$ end for i = 1:n $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$ for j = i+1:n $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i\rangle \varphi_i$ end end izhod: $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ortonormirana baza

$X \in \mathcal{C}([a,b])$ (vstavi skico)

1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$X = \mathcal{C}([a,b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$

Problem: Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in Pp_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

p^* imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PENA)**. Problem je nelinearen.

(skica2) Naslednji izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PENA za neko funkcijo.

Izrek 1.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in Pp_n$ tak, da **residual**

$$p = f - p \tag{48}$$

alternirajoče doseže svojo normo $\|p\|_{\infty,[a,b]}$ v vsaj $n+2$ različnih točkah $(x_i)_{i*0}^{n+1}$

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots <_{n+1} \leq b$$

potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a,b]$.

OPOMBA: Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)| \forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i) r(x_{i+1}) < 0 \forall i$$

(vstavi graf)

Dokaz. Dokaz s protislovjem.

Recimo, da p ne bi bil PNEA za f. Tedaj bi obstajal nek drug polinom $q \in \mathbb{P}_n$, da bi veljalo

$$|f(x_i) - q(x_i)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x_i) - q(x_i)| = \|f - q\|_{\infty,[a,b]} < \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = |f(x_i) - p(x_i)| \forall i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{49}$$

Torej

$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)| \forall i$$

$$-sign((f(x_i)-p(x_i))(f(x_i)-p(x_i))) < f(x_i)-q(x_i) < sign((f(x_i)-p(x_i))(f(x_i)-p(x_i)))$$

Dalje velja

$$sign(f(x_i)-p(x_i))(f(x_{i+1})-p(x_{i+1})) < f(x_{i+1})-q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i)-p(x_i))(f(x_{i+1})-p(x_{i+1}))$$

Opomba:

$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = sign(f(x_i) - p(x_i))$$

$\blacksquare$