

Numerične metode 2

Zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

Ljubljana, pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f . Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo \tilde{f} , ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant \tilde{f} ?
- V čem naj si bo \tilde{f} podobna/sorodna z f ?
- Ali \tilde{f} obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant \tilde{f} ?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan \tilde{f} ?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X , v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A}: X \rightarrow S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b])$, $X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \ell^2_\rho([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty\}$,
pri čemer je ρ **pozitivna utež**: $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = \text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ polinomi stopnje $\leq n$:

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- **triginimetrični polinomi**

$$S = \text{Lin}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$$

- podprostor racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

$$f \in \mathcal{C}([a, b]), \|f\|_{\infty, [a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$$

in izračunamo

$$\|f\|_{\infty, \mathbf{x}} = \max_{i=0, \dots, N} |f(x_i)|$$

- druga norma ($\|\cdot\|_2$) - norma, porojena iz skalarne produkta. Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}, f \in X$$

Primeri skalarnih produktov:

$$\cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, f, g \in \ell_\rho^2([a, b])$$

$$\cdot \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$$

Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^N f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^N f^2(x_i)\rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta \tilde{f} ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = \text{dist}(f, S)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov
(za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)
2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = \mathbb{P}_n$, $\|\cdot\|_\infty$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom p , da je $\|f - p\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$\text{dist}(f, \mathbb{P}_n) \rightarrow 0, \text{ ko gre } n \rightarrow \infty$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow 0$, ko gre $n \rightarrow \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0, 1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{P}_n \\ f &\mapsto \mathcal{B}_n f \\ \mathcal{B}_n f(x) &= \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) B_i^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\end{aligned}$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad \mathbb{R} s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X , $S = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $\dim S = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0$$

Dokaz.

(\Leftarrow) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_2^2 &= \|f - f^* + f^* - s\|_2^2 \\
&= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 \\
&\geq \|f - f^*\|_2^2
\end{aligned} \tag{1}$$

Neenakost ?? velja, saj zato, ker velja tako $f^* \in S$ kot $s \in S$ velja tudi $(f^* - s) \in S$, torej veljata tudi enakost $\langle f^* - s, f - f^* \rangle = 0$ in neenakost $\|f^* - s\|_2 \geq 0$.

(\implies) Predpostavimo, da je f^* ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f - f^* \perp S$$

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\begin{aligned}
\|f - f^*\|_2^2 &\leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2^2 \\
&= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \\
0 &\leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$0 \leq \langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2 \tag{3}$$

pri čemer iz ?? na ?? pridemo preko začetnega izbora za $\lambda > 0$. Ker lahko λ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s \rangle$ prevlada nad $\lambda \|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem po istem sklepu velja, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle$ oziroma $\langle f - f^*, s \rangle \leq 0$. Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ baza za $S \subseteq X$:

$$S = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

Iščemo $f^* \in S$ ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^n$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$.
To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \\ &= \langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_i \rangle \\ &= \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle$$

iz česar skupaj dobimo sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle, i \in [n]$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 x^T G x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_i \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\rangle \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|_2^2 \\
 &> 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Neenačaj ?? je strog, saj velja

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je $x_i > 0$ in ker je

$$\varphi_i \in \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

kar je baza za S . Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

Primer. Naj bo $f(x) = \sin(x)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. Aproksimiraj f po MNK v podprostoru \mathbb{P}_1 .

Rešitev: Definirajmo X in S

$$X = \mathcal{C}([0, \pi])(X = \ell^2([0, \pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = \text{Lin}\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo f^*

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko G

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{desna stran} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi dx = \pi$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$$

in

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x \cdot \sin x dx = \dots = \pi$$

Dobimo:

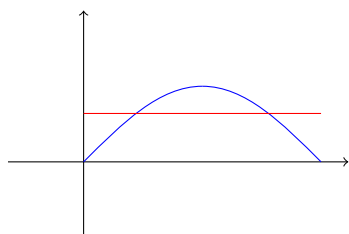
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (\sin x - p(x))^2 dx}$$



Želimo minimizirati ploščino območja med modro in rdečo črto.

Primer. Točke $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8)$ aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev: $S = \mathbb{P}_1 = \text{Lin}\{1, x\}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^4 f(x_i)g(x_i), \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

f , ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah \mathbf{x} .

Izračunamo:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= \sum_{i=1}^4 1 \cdot 1 = 4 \\ \langle 1, x \rangle &= \sum_{i=1}^4 1 \cdot x_i = 10 \\ \langle x, x \rangle &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 30 \\ \langle f, 1 \rangle &= \sum_{i=1}^4 y_i \cdot 1 = 18 \\ \langle f, x \rangle &= \sum_{i=1}^4 y_i x_i = 55 \end{aligned}$$

Dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 55 \end{bmatrix}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - p(x_i))^2}$$

1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \min_{z \in \text{Im} A} \|b - z\|$$

Aproksimiramo vektor $b \in \mathbb{R}^m$ ($X = \mathbb{R}^m$)

$$S = \text{Lin}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \text{Im}A$$

$$b^* = \sum_{j=1}^n x_j a_j = Ax$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i = x^T y$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i:$$

$$G = (\langle a_j, a_i \rangle)_{i,j=1}^n = A^T A \quad (5)$$

$$\text{desna stran} = (\langle a_i, b \rangle)_{i=1}^n = A^T b \quad (6)$$

Primer. $X = \mathcal{C}([0, 1])$

$$S = P_{n-1} = \text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}dx = \int_0^1 x^{i+j-2}dx = \frac{1}{i+j-1}$$

$$G = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^n$$

kjer je G Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru S izberemo **ortonormirano bazo**:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_1 \perp \varphi_j \quad \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

V tem primeru je $G = I$ in $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$, $f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$. Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Schmidtovim algoritmom**.

$X \in \mathcal{C}([a, b])$ (vstavi skico)

Algorithm 1 Modificiran Gram-Schmidtov algoritem

Input baza $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$

```
1: for  $i = 1 : n$  do
2:    $\varphi_i = \psi_i$ 
3: end for
4: for  $i = 1 : n$  do
5:    $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$ 
6:   for  $j = i + 1 : n$  do
7:      $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$ 
8:   end for
9: end for
```

Output ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$

1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$$X = \mathcal{C}([a, b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$$

Problem: Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|$$

p^* imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PNEA)**.

Problem je nelinearen.

(vstavi skico)

Nasledni izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PNEA za neko funkcijo.

Izrek 1.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ tak, da **residual**

$$r = f - p \tag{7}$$

alternirajoče doseže svojo normo $\|p\|_{\infty, [a, b]}$ v vsaj $n+2$ različnih točkah $(x_i)_{i=0}^{n+1}$

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

Potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a, b]$.

Opomba. Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty, [a, b]} = |r(x_i)| \forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \forall i$$

(vstavi graf)

Dokaz. Dokaz s protislovjem.

Recimo, da p ne bi bil PNEA za f . Tedaj bi obstajal nek drug polinom $q \in \mathbb{P}_n$, da bi veljalo

$$\begin{aligned} |f(x_i) - q(x_i)| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q(x)| \\ &= \|f - q\|_{\infty, [a, b]} \\ &< \|f - p\|_{\infty, [a, b]} \\ &= |f(x_i) - p(x_i)| \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Torej za $\forall i$ velja:

$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)|$$

To razvijemo v neenakosti

$$-sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i)) < f(x_i) - q(x_i)$$

in

$$f(x_i) - q(x_i) < sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i))$$

Če v neenakostih x_i spremenimo v x_{i+1} ter upoštevamo enakost

$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = -sign(f(x_i) - p(x_i))$$

dobimo neenakosti

$$sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$$

in

$$f(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}))$$

Brez škode za splošnost (BŠS) lahko rečemo, da je $sign(f(x_i) - p(x_i)) = 1$. Potem je $f(x_i) - q(x_i) < f(x_i) - p(x_i)$, $p(x_i) - q(x_i) < 0$ in $f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$, torej $p(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) > 0$.

Vidimo, da ima razlika $p - q$ ničlo na intervalu (x_i, x_{i+1}) za $i \in [n]$. Razlika $p - q$ je polinom stopnje n , ki ima $n + 1$ ničel. Torej mora biti $p \equiv q$. ■

Izkaže se, da je pogoj tudi potreben (torej da velja ekvivalenca), a je dokaz težek, zato ga bomo izpustili.

Iskanje/računanje PNEA se prevede na iskanje ustrezne množice točk $\{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b\}$.

Definicija 1.4. Naj bo $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b\}$. Definirajmo **minimaks** za f na E konstruirati

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x_i \in E} |f(x_i) - p(x_i)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na množici E** . Izračunamo ga tako, da rešimo naslednji sistem linearnih enačb: (brez izpeljave)

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, i \in [n+1]$$

Imamo torej $n+2$ enačb in $n+2$ neznank ($n+1$ v polinomu p in eno v m):

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

ter koeficient m , za katerega velja

$$|m| = M_n(f, E)$$

(vstavi slikco)

2 Interpolacija

Problem: Podane imamo vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah x_0, x_1, \dots, x_n na realni osi. Te točke bomo imenovali **interpolacijske točke**. Iščemo neko preprostejšo funkcijo g , ki zadošča pohojem

$$g(x_i) = f(x_i) \forall i \in [n]$$

g imenujemo **interpolacijska funkcija**. Za interpolacijske funkcije običajno izberemo polinome, odsekoma polinomske funkcije ...

Interpolacija se uporablja za

- aproksimacijo dane funkcije

- kadar funkcijo f poznamo le v točkah x_0, x_1, \dots, x_n , radi pa bi izračunali vrednost te funkcije tudi za x , ki ni ena izmed interpolacijskih točk.
- za izpeljavo formul za numerično integriranje, odvajanje, reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE) ...

2.1 Polinomska interpolacija

Za $f \in \mathcal{C}([a, b])$ in interpolacijske točke $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ iščemo **polinom** p_i , ki zadošča enačbam

$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

Enačb je $n + 1$. Da dobimo enako število enačb, moramo izbrati $p \in \mathbb{P}_n$.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Enačbe (za $i = 0, 1, \dots, n$)

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n$$

lahko zapišemo matrično

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Matriko, ki jo uporabimo, imenujemo **vandermondova matrika**.

$$\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Ker je Vandermondova matrika obrnljiva, sledi, da imamo enolično rešitev. Torej obstaja **enoličen** polinom stopnje n , ki interpolira $n + 1$ paroma različnih točk. Tak interpolacijski problem imenujemo **korenten** interpolacijski problem. Vandermondova matrika je primer **zelo občutljive** matrike. Poleg tega nimamo rešitve v **zaključeni obliki**. Spoznali bomo dva druga zapisa interpolacijskega polinoma:

- Lagrangeva oblika zapisa
- Newtonova oblika zapisa

2.1.1 Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definiramo naslednje polinome:

$$\begin{aligned}\ell_{0,n}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \\ \ell_{1,n}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \\ &\vdots \\ \ell_{n,n}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\end{aligned}$$

oziroma

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

za $i = 0, 1, \dots, n$. To imenujemo **Lagrangevi bazni polinomi**.

Velja:

$$\ell_{i,n}(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Vsi ti polinomi so stopnje točno n .

Izrek 2.1. Polinomi $\ell_{i,n}$ za $i = 0, 1, \dots, n$ so baza za \mathbb{P}_n .

Dokaz. Dokazati moramo le, da so linearno neodvisni. Preveriti moramo, da je $\alpha_0 \ell_{0,n} + \alpha_1 \ell_{1,n} + \dots + \alpha_n \ell_{n,n} = 0 \iff \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(\implies)

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_{j,n}(x) = 0 \quad \forall x$$

Vstavimo $x = x_i$ in dobimo

$$0 = \sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_{j,n}(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$$

(\impliedby) Očitno. ■

Iz dokaza izreka sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j \ell_{j,n}(x)$$

za $c_j \in \mathbb{R}$.

Kako izbrati koeficiente, da bo polinom interpolacijski oziroma da bo zadoščal pogojem

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n c_j \ell_{j,n}(x_i) = f(x_i)$$

za $i = 1, \dots, n$. Za vsak i je tudi vsota enaka c_i .

Dobili smo

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{j,n}(x)$$

kar je Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma.

Primer. Naj bo $f(x) = e^x$. Pošiči interpolacijski polinom za f na točkah $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$. Za $n = 3$ izračunamo

$$\begin{aligned} \ell_{0,3}(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{((0-1)(0-3)(0-4))} \\ &= -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) \\ \ell_{1,3}(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{(1(1-3)(1-4))} \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\ \ell_{2,3}(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{(3(3-1)(3-4))} \\ &= -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) \\ \ell_{3,3}(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{(4(4-1)(4-3))} \\ &= \frac{1}{12}x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

in dobimo rešitev

$$p(x) = e^0 \ell_{0,3}(x) + e^1 \ell_{1,3}(x) + e^3 \ell_{2,3}(x) + e^4 \ell_{3,3}(x)$$

Časovna zahtevnost za evaluacijo $\ell_{i,n}(x)$ v x_i je $\mathcal{O}(n^2)$. Ker v praksi izpustimo skupen polinom, je končna časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n)$, tako kot Hornerjev algoritem.

Lema 2.2. Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je $\sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x) = f(x)$.

Dokaz. Sledi iz enoličnosti interpolacijskega polinoma. ■

Posledica 2.3.

$$\sum_{i=0}^n \ell_{i,n}(x) = 1 \quad (8)$$

Lagrangevi bazni polinomi tvorijo **razčlenitev** oziroma **razčlenitev enote**, ki pozitivno vpliva na stabilnost baze.

Izrek 2.4 (O napaki interpolacije.). Naj bodo $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ in naj bo p interpolacijski polinom za f na teh točkah. Potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja $\xi_x \in (a, b)$, da velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

kjer velja

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Dokaz. Če je $x = x_i$, potem $f(x_i) - p(x_i) = 0$ in $\omega(x_i) = 0$ ter enakost velja za vsak $\xi_x \in (a, b)$. Naj bo sedaj $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ in naj bo ta x fiksni. Definirajmo $F(u) = f(u) - p(u) - c\omega(u)$ za neko konstanto c , pri čemer za F velja $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, $F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - c\omega(x_i) = 0$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Konstanto c izberemo tako, da bo tudi $F(x) = 0$. Torej ima F na $[a, b]$ $n+2$ različnih ničel. Potem ima F' na (a, b) $n+1$ različnih ničel. Potem ima F'' na (a, b) n različnih ničel ... Potem ima $F^{(n+1)}$ na (a, b) vsaj eno ničlo. Označimo to ničlo z ξ_x . Torej je

$$\begin{aligned} 0 &= F^{(n+1)}(\xi_x) \\ &= f^{(n+1)}(\xi_x) - p^{(n+1)}(\xi_x) - c\omega^{(n+1)}(\xi_x) \end{aligned}$$

Uporabimo razmislek od zgoraj in dobimo

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)!$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

■

Za poljuben $c \in [a, b]$ po izreku velja

$$|f(x) - p(x)| = |\omega| \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_x)| \leq \|\omega\|_{\infty, [a, b]} \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}$$

Iz tega sledi

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_{\infty, [a, b]} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}$$

Ta ocena je uporabna v teoriji, ne pa tudi v praksi.

Lagrangeva oblika je zaradi enostavnosti zelo uporabna pri izpeljavi formul za numerično integracijo, odvajanje ..., ima pa tudi nekaj pomankljivosti pri praktični uporabi:

- numerično računanje vrednosti polinoma v Lagrangevi obliki ...
- Numerične težave, če so interpolacijske točke preblizu skupaj
- Konstrukcija ni rekurzivna. Dodajanje novih točk je zahtevno.

2.1.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo, v kateri bomo predstavili interpolacijski polinom, izberemo **prestavljene potence**.

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\}$$

Očitno je to baza: vidimo, da se stopnje povečujejo in je posledično kolokacijska matrika spodnje trikotna. V nadaljevanju bomo naredili rekurzivno konstrukcijo.

Vsak $p \in \mathbb{P}_n$ lahko zapišemo kot $\sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$. Iščemo koeficiente $(c_i)_{i=0}^n$, da bo p interpolacijski. Ta p bomo konstruirali **rekurzivno**. Naj bo p_{k-1} interpolacijski polinom za f na točkah x_0, x_1, \dots, x_{k-1} . Kako poiskati p_k , ki bo interpolacijski za f na točkah x_0, x_1, \dots, x_k ? $p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}, p_k \in \mathbb{P}_k$

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

Vstavimo $x = x_j, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) + c \cdot 0 = f(x_j)$$

Ostane le pogoj

$$p_k(x_k) = f(x_k)$$

(poglej, ce kaj manjka)

c določimo tako, da je izpolnjen še ta pogoj. Ta c je **vodilni koeficient** od p_k . Označimo ga z $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ in ga imenujemo **deljena diferenca**.

Definicija 2.5. Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k (koeficient pri x^k) za funkcijo f na točkah x_0, x_1, \dots, x_k .

Sledi, da lahko $p_k(x)$ zapišemo kot

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

(vstavi graf)

Po definiciji je $[x_0]f = f(x_0)$.

Iz te rekurzivne konstrukcije dobimo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_{n-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= p_0(x) + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ p_n(x) &= \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i]f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Temu rečemo Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma.

Kako izračunati deljene difference?

Vemo že $[x_0]f = f(x_0)$

$[x_0, x_1]f = ?$

(vstavi graf)

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= [x_0]f \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0) \\ [x_0, x_1]f &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Izrek 2.6 (Rekurzivna formula za deljene difference). Naj bodo x_0, x_1, \dots, x_k paroma različne točke. Tedaj velja

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_k]f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

Dokaz. Naj bo q_0 interpolacijski za f na točkah x_0, x_1, \dots, x_{k-1} in q_1 interpolacijski za f na točkah x_0, x_1, \dots, x_k . Velja, da sta $q_0, q_1 \in \mathbb{P}_{k-1}$. Kako do polinoma p , ki bo interpolacijski na x_0, x_1, \dots, x_k ? Ta p bo $p \in \mathbb{P}_k$.

$$p(x) = \ell_0(x)q_0(x) + \ell_1(x)q_1(x), \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{P}_1, \ell_0, \ell_1 = ?$$

$$x = x_j, j \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

Pogoj **

$$p(x_j) = \ell_0(x_j)q_0(x_j) + \ell_1(x_j)q_1(x_j) = (\ell_0(x_j) + \ell_1(x_j))f(x_j) = ? f(x_j)$$

Pogoja *

$$p(x_0) = \ell_0(x_0)f(x_0) + \ell_1(x_0)q(x_0) = ? f(x_0)$$

$$p(x_k) = \ell_0(x_k)q(x_k) + \ell_1(x_k)f(x_k) = ? f(x_k)$$

Če izberemo

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}$$

in

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0}$$

zadostimo pogojem *. Ker pa je $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ za $\forall x$, pa velja tudi ** ■