

Numerične metode 2

zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

pomlad 2023

Kazalo

1	Teorija aproksimacije	1
1.1	Aproksimacija funkcij	1
1.1.1	Splošen optimalni aproksimacijski problem	3
1.2	Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)	4

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f . Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo \tilde{f} , ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant \tilde{f} ?
- V čem naj si bo \tilde{f} podobna/sorodna z f ?
- Ali \tilde{f} obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant \tilde{f} ?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan \tilde{f} ?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X , v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A}: X \rightarrow S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S'$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b])$, $X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \mathcal{L}_\rho^2([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b \rho(x) dx < \infty\}$,
pri čemer je ρ **pozitivna utež**: $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = P_n = \text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ polinom stopnje $\leq n = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}\}$
- $S = \text{Lin}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$
triginimetrični polinomi
- podprostor racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

$$f \in \mathcal{C}([a, b]), \|f\|_{\infty, [a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$$

in izračunamo

$$\|f\|_{\infty, \mathbf{x}} = \max_{i=1, \dots, N} |f(x_i)|$$

- druga norma - norma, porojena iz skalarnega produkta Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Primeri skalarnih produktov:

$$\cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, f, g \in \mathcal{L}_\rho^2([a, b])$$

$$\cdot \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$$

Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N, a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^N f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2, \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^N f^2(x_i)\rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta \tilde{f} ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = \text{dist}(f, S) \quad (1)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov
(za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)
2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = P_n$, $\|\cdot\|_{\text{inf}}$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon < 0$ obstaja polinom p , da je $\|f - p\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$\text{dist}(f, P_n) \rightarrow 0, \text{ ko gre } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x) \quad (3)$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow 0$, ko gre $n \rightarrow \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0, 1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n &: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow P_n \\
f &\mapsto \mathcal{B}_n f \\
\mathcal{B}_n f(x) &= \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) B_i^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproximacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad \mathbb{R} s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X , $S = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $\dim S = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2 \tag{6}$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (e.n.a.) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

Dokaz. (\Leftarrow) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\|f - s\|_2 = \|f - f^* + f^* - s\|_2 \tag{7}$$

$$= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle \tag{8}$$

$$= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 \tag{9}$$

$$\geq \|f - f^*\|_2^2 \tag{10}$$

(10) velja, saj je (povej zakaj - nimam označeno) ■

Dokaz. (\Leftarrow) Predpostavimo, da je f^* e.n.a. po MNK. Dokazati želimo:
 $f - f^* \perp S$ (podčrtkano)

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\|f - f^*\|_2 \leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2 \quad (11)$$

$$= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle \quad (12)$$

$$= \|f - f^*\|_2^2 + 2 * \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \quad (13)$$

$$0 \leq 2 * \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2$$

$$0 \leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda\|s\|_2^2)$$

Ker lahko $\lambda > 0$ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s \rangle$ prevlada nad $\lambda\|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem pa po istem sklepu velja, da mora biti

$$0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle \text{ oziroma } \langle f - f^*, s \rangle \leq 0 \quad (14)$$

Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0 \quad (15)$$

■