Numerične metode 2

Zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

Ljubljana, pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo $\tilde{f}$, ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant $\tilde{f}$?
- V čem naj si bo $\tilde{f}$ podobna/sorodna z f?
- Ali $\tilde{f}$ obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant $\tilde{f}$?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan $\tilde{f}$?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X, v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A} \colon X \to S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A} f \in S$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a,b]), X = \mathcal{C}^k([a,b])$
- $X = \ell^2_\rho([a,b]) = \{f \colon [a,b] \to \mathbb{R} \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty\}$,
  pri čemer je ρ **pozitivna utež:** $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a,b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = Lin\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ polinomi stopnje $\leq n$:

$$S = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; a_i \in \mathbb{R}\}$$

- **triginimetrični polinomi**

$$S = Lin\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$$

- podprostori racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

  $$f \in \mathcal{C}([a, b]), \|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

  Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

  $$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$$

  in izračunamo
  $$\|f\|_{\infty,\mathbf{x}} = \max_{i=0,\dots,N} |f(x_i)|$$

- druga norma ($\|\cdot\|_2$) - norma, porojena iz skalarnega produkta. Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je

  $$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}, f \in X$$

  Primeri skalarnih produktov:

  · $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,\ f, g \in \ell_\rho^2([a, b])$

  · $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

  Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

  $$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N,\ a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) g(x_i) \rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i) \rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta $\tilde{f}$ ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = dist(f, S)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

   (za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)

2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = \mathbb{P}_n$, $\|\cdot\|_\infty$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da je $\|f - p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$dist(f, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x)$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i},\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, ko gre $n \to \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0, 1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{P}_n$$
$$f \mapsto \mathcal{B}_n f$$
$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b - a))B_i^n(\frac{x - a}{b - a})$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X, $S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $dim S = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0$$

Dokaz.
($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_2^2 &= \|f - f^* + f^* - s\|_2^2 \\
&= \langle (f - f^*) + (f^* - s), (f - f^*) + (f^* - s) \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f^* - s, f - f^* \rangle + \|f^* - s\|_2^2 \\
&\geq \|f - f^*\|_2^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Neenakost 1 velja, saj zato, ker velja tako $f^* \in S$ kot $s \in S$ velja tudi $(f^* - s) \in S$, torej veljata tudi enakost $\langle f^* - s, f - f^* \rangle = 0$ in neenakost $\|f^* - s\|_2 \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je f^* ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f - f^* \perp S$$

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\begin{aligned}
\|f - f^*\|_2^2 &\leq \|f - (f^* - \lambda s)\|_2^2 \\
&= \langle f - f^* + \lambda s, f - f^* + \lambda s \rangle \\
&= \|f - f^*\|_2^2 + 2 \cdot \langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\langle f - f^*, \lambda s \rangle + \lambda^2 \|s\|_2^2 \\
0 &\leq \lambda(2\langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2) \qquad (2) \\
0 &\leq \langle f - f^*, s \rangle + \lambda \|s\|_2^2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

pri čemer iz 2 na 3 pridemo preko začetnega izbora za $\lambda > 0$. Ker lahko λ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f - f^*, s \rangle$ prevlada nad $\lambda \|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, s \rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem po istem sklepu velja, da mora biti $0 \leq \langle f - f^*, -s \rangle$ oziroma $\langle f - f^*, s \rangle \leq 0$. Sledi, da mora biti

$$\langle f - f^*, s \rangle = 0$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza za $S \subseteq X$:

$$S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

Iščemo $f^* \in S$ ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^n$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$. To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\begin{aligned}
0 =& \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \\
=& \langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_j \rangle \\
=& \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle
\end{aligned}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle$$

iz česar skupaj dobimo sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle, \; i \in [n]$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^n$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
x^T G x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \\
=& \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\
=& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_1 \rangle \\
=& \langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1 \rangle \\
=& \| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \|_2^2 \\
>& 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Neenačaj 4 je strog, saj velja

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je $x_i > 0$ in ker je

$$\varphi_i \in Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

kar je baza za S. Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

Primer. Naj bo $f(x) = sin(x)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$. Aproksimiraj f po MNK v podprostoru $\mathbb{P}_1$.

Rešitev: Definirajmo X in S

$$X = \mathcal{C}([0, \pi])(X = \ell^2([0, \pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo f^*

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko G

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{desna stran } = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_0^\pi dx = \pi \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2} \\ \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_1 \rangle &= \int_0^\pi sinx dx = -cosx \Big|_0^\pi = 2 \\ \langle f, \varphi_2 \rangle &= \int_0^\pi x \cdot sinx dx = \cdots = \pi \end{aligned}$$

Dobimo:

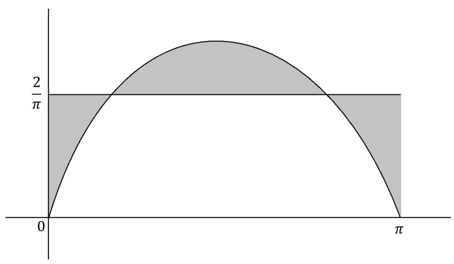
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (sinx - p(x)^2) dx}$$



Slika 1: Z MNK želimo minimizirati ploščino sivega območja.

Primer. Točke $(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)$ aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev: $S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1,x\}$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{4} f(x_i), g(x_i),\ x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

f, ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah $\mathbf{x}$.

Izračunamo:

$$\langle 1, 1\rangle = \sum_{i=1}^{4} 1\cdot 1 = 4$$
$$\langle 1, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} 1\cdot x_i = 10$$
$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30$$
$$\langle f, 1\rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i\cdot 1 = 18$$
$$\langle f, x\rangle = \sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 55$$

Dobimo sistem

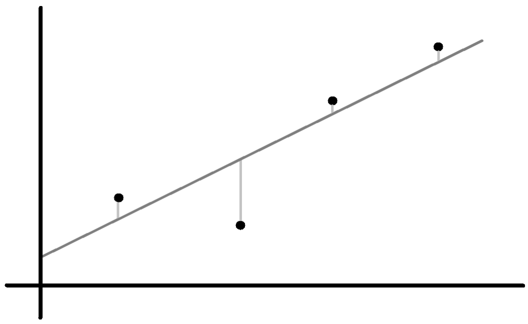
$$\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\55\end{bmatrix}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p\in\mathbb{P}_1}\|f-p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(y_i - p(x_i))^2}$$



Slika 2: Z MNK želimo najti temnosivo premico, ki minimizira svetlosive razdalje.

1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix},\ b \in R^m$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \min_{z \in ImA} \|b - z\|$$

Aproksimiramo vektor $b \in \mathbb{R}^m (X = \mathbb{R}^m)$

$$S = Lin\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = ImA$$

$$b^* = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = Ax$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = x^T y$$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$:

$$G = (\langle a_j, a_i \rangle)_{i,j=1}^{n} = A^T A \tag{5}$$

$$\text{desna stran } = (\langle a_i, b \rangle)_{i=1}^{n} = A^T b \tag{6}$$

Primer. $X = \mathcal{C}([0, 1])$

$$S = P_{n-1} = Lin\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i + j - 1}$$

$$G = (\frac{1}{i + j - 1})_{i,j=1}^{n}$$

kjer je G Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru S izberemo **ortonormirano bazo**:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_1 \perp \varphi_j \ \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

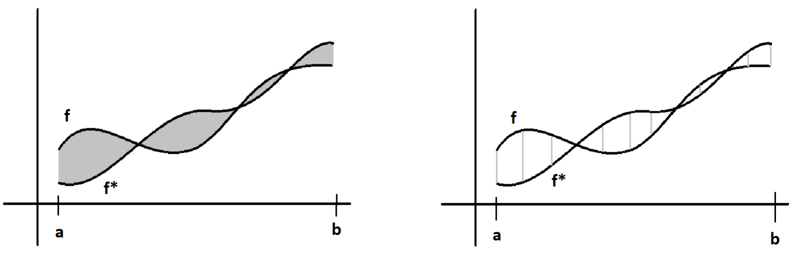
V tem primeru je $G = I$ in $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$, $f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$. Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Scmidtovim algoritmom**.

Algorithm 1 Modificiran Gram-Schmidtov algoritem

Input baza $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$
- **for** $i = 1 : n$ **do**
  - $\varphi_i = \psi_i$
- **end for**
- **for** $i = 1 : n$ **do**
  - $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$
  - **for** $j = i + 1 : n$ **do**
    - $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$
  - **end for**
- **end for**

Output ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$

$X \in \mathcal{C}([a, b])$



Slika 3: Druga norma, porojena iz zveznega (levo) in diskretnega (desno) skalarnega produkta

1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$$X = \mathcal{C}([a,b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$$

Problem: Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in Pp_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$$

p^* imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PNEA)**. Problem je nelinearen.

(vstavi skico)

Naslednji izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PNEA za neko funkcijo.

Izrek 1.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ tak, da **residual**

$$r = f - p \tag{7}$$

alternirajoče doseže svojo normo $\|p\|_{\infty,[a,b]}$ v vsaj $n+2$ različnih točkah $(x_i)_{i=0}^{n+1}$

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b$$

Potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a,b]$.

Opomba. Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)| \, \forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i) r(x_{i+1}) < 0 \forall i$$

(vstavi graf)

Dokaz. Dokaz s protislovjem.

Recimo, da p ne bi bil PNEA za f. Tedaj bi obstajal nek drug polinom $q \in \mathbb{P}_n$, da bi veljalo

$$\begin{aligned} |f(x_i) - q(x_i)| \leq & \max_{x\in[a,b]} |f(x) - q(x)| \\ =& \|f - q\|_{\infty,[a,b]} \\ <& \|f - p\|_{\infty,[a,b]} \\ =& |f(x_i) - p(x_i)| \;\; \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n+1 \end{aligned}$$

Torej za $\forall i$ velja:
$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)|$$
To razvijemo v neenakosti
$$-sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i)) < f(x_i) - q(x_i)$$
in
$$f(x_i) - q(x_i) < sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i))$$
Če v neenakostih x_i spremenimo v x_{i+1} ter upoštevamo enakost
$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = -sign(f(x_i) - p(x_i))$$
dobimo neenakosti
$$sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$$
in
$$f(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}))$$

Brez škode za splošnost (BŠS) lahko rečemo, da je $sign(f(x_i) - p(x_i)) = 1$. Potem je $f(x_i) - q(x_i) < f(x_i) - p(x_i)$, $p(x_i) - q(x_i) < 0$ in $f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$, torej $p(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) > 0$.

Vidimo, da ima razlika $p - q$ ničlo na intervalu (x_i, x_{i+1}) za $i \in [n]$. Razlika $p - q$ je polinom stopnje n, ki ima $n + 1$ ničel. Torej mora biti $p \equiv q$. ■

Izkaže se, da je pogoj tudi potreben (torej da velja ekvivalenca), a je dokaz težek, zato ga bomo izpustili.

Iskanje/računanje PNEA se prevede na iskanje ustrezne množice točk $\{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$.

Definicija 1.4. Naj bo $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$. Definirajmo **minimaks** za f na E konstruirati
$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x_i \in E} |f(x_i) - p(x_i)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na množici E**. Izračunamo ga tako, da rešimo naslednji sistem linearnih enačb: (brez izpeljave)
$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, i \in [n + 1]$$

Imamo torej $n+2$ enačb in $n+2$ neznank ($n+1$ v polinomu p in eno v m):

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

ter koeficient m, za katerega velja

$$|m| = M_n(f, E)$$

(vstavi slikco)

2 Interpolacija

Problem: Podane imamo vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na realni osi. Te točke bomo imenovali **interpolacijske točke**. Iščemo neko preprostejšo funkcijo g, ki zadošča pohojem

$$g(x_i) = f(x_i) \forall i \in [n]$$

g imenujemo **interpolacijska funkcija**. Za interpolacijske funkcije običajno izberemo polinome, odsekoma polinomske funkcije ...

Interpolacija se uporablja za

- aproksimacijo dane funkcije
- kadar funkcijo f poznamo le v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, radi pa bi izračunali vrednost te funkcije tudi za x, ki ni ena izmed interpolacijskih točk.
- za izpeljavo formul za numerično integriranje, odvajanje, reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE) ...

2.1 Polinomska interpolacija

Za $f \in \mathcal{C}([a, b])$ in interpolacijske točke $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$ iščemo **polinom** p_i, ki zadošča enačbam

$$p(x_i) = f(x_i), i = a, \ldots, n$$

Enačb je $n+1$. Da dobimo enako število enačb, moramo izbrati $p \in \mathbb{P}_n$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Enačbe (za $i = 0, 1, \ldots, n$)

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n$$

lahko zapišemo matrično

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Matriko, ki jo uporabimo, imenujemo **vandermondova matrika**.

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Ker je Vandermondova matrika obrnljiva, sledi, da imamo enolično rešitev. Torej obstaja **enoličen** polinom stopnje n, ki interpolira $n+1$ paroma različnih točk. Tak interpolacijski problem imenujemo **korenten** interpolacijski problem. Vandermondova matrika je primer **zelo občutljive** matrike. Poleg tega nimamo rešitve v **zaključeni obliki**. Spoznali bomo dva druga zapisa interpolacijskega polinoma:

- Lagrangeva oblika zapisa
- Newtonova oblika zapisa

2.1.1 Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definiramo naslednje polinome:

$$\begin{aligned} \ell_{0,n}(x) =& \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} \\ \ell_{1,n}(x) =& \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} \\ \vdots& \\ \ell_{n,n}(x) =& \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

oziroma

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

za $i = 0, 1, \ldots, n$. To imenujemo **Lagrangevi bazni polinomi**.

Velja:

$$\ell_{i,n}(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Vsi ti polinomi so stopnje točno n.

Izrek 2.1. Polinomi $\ell_{i,n}$ za $i = 0, 1, \ldots, n$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Dokaz. Dokazati moramo le, da so linearno neodvisni. Preveriti moramo, da je $\alpha_0 \ell_{i,n} + \alpha_1 \ell_{i,n} + \cdots + \alpha_n \ell_{i,n} = 0 <=> \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

$(\Longrightarrow)$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_{j,n}(x) = 0 \ \forall x$$

Vstavimo $x = x_i$ in dobimo

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_{j,n}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$$

$(\Longleftarrow)$ Očitno. ■

Iz dokaza izreka sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \ell_{j,n}(x)$$

za $c_j \in \mathbb{R}$.

Kako izbrati koeficiente, da bo polinom interpolacijski oziroma da bo zadoščal pogojem

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \ell_{j,n}(x_i) = f(x_i)$$

za $i = 1, \ldots, n$. Za vsak i je tudi vsota enaka c_i.

Dobili smo

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \ell_{j,n}(x)$$

kar je Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma.

Primer. Naj bo $f(x) = e^x$. Pošiči interpolacijski polinom za f na točkah $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$. Za $n = 3$ izračunamo

$$\begin{aligned}
\ell_{0,3}(x) =& \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{((0-1)(0-3)(0-4))} \\
=& -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) \\
\ell_{1,3}(x) =& \frac{x(x-3)(x-4)}{(1(1-3)(1-4))} \\
=& \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\
\ell_{2,3}(x) =& \frac{x(x-1)(x-4)}{(3(3-1)(3-4))} \\
=& -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) \\
\ell_{3,3}(x) =& \frac{x(x-1)(x-3)}{(4(4-1)(4-3))} \\
=& \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

in dobimo rešitev

$$p(x) = e^0\ell_{0,3}(x) + e^1\ell_{1,3}(x) + e^3\ell_{2,3}(x) + e^4\ell_{3,3}(x)$$

Časovna zahtevnost za evaluacijo $\ell_{i,n}(x)$ v x_i je $\mathcal{O}(n^2)$. Ker v praksi izpustimo skupen polinom, je končna časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n)$, tako kot Hornerjev algoritem.

Lema 2.2. Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) = f(x)$.

Dokaz. Sledi iz enoličnosti interpolacijskega polinoma. ■

Posledica 2.3.

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) = 1 \tag{8}$$

Lagrangevi bazni polinomi tvorijo **razčlenitev** oziroma **razčlenitev enote**, ki pozitivno vpliva na stabilnost baze.

Izrek 2.4 (O napaki interpolacije.). Naj bodo $a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ in naj bo p interpolacijski polinom za f na teh točkah. Potem za vsak $x \in [a,b]$ obstaja $\xi_x \in (a,b)$, da velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

kjer velja

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Dokaz. Če je $x = x_i$, potem $f(x_i) - p(x_i) = 0$ in $\omega(x_i) = 0$ ter enakost velja za vsak $\xi_x \in (a,b)$. Naj bo sedaj $x \neq x_i$, $i = 0,1,\dots,n$ in naj bo ta x fiksen. Definirajmo $F(u) = f(u) - p(u) - c\omega(u)$ za neko konstanto c, pri čemer za F velja $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - c\omega(x_i) = 0$ za $i = 0,1,\dots,n$. Konstanto c izberemo tako, da bo tudi $F(x) = 0$. Torej ima F na $[a,b]$ $n+2$ različnih ničel. Potem ima F' na (a,b) $n+1$ različnih ničel. Potem ima F'' na (a, b) n različnih ničel ... Potem ima $F^{(n+1)}$ na (a,b) vsaj eno ničlo. Označimo to ničlo z ξ_x. Torej je

$$\begin{aligned}0 =& F^{(n+1)}(\xi_x)\\ =& f^{(n+1)}(\xi_x) - p^{(n+1)}(\xi_x) - c\omega^{(n+1)}(\xi_x)\end{aligned}$$

Uporabimo razmislek od zgoraj in dobimo

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)!$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$c = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$

■

Za poljuben $c \in [a,b]$ po izreku velja

$$|f(x) - p(x)| = |\omega|\,\frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right| \leq \|\omega\|_{\infty,[a,b]}\frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Iz tega sledi

$$\|f-p\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\omega\|_{\infty,[a,b]}\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Ta ocena je uporabna v teoriji, ne pa tudi v praksi.

Lagrangeva oblika je zaradi enostavnosti zelo uporabna pri izpeljavi formul za numerično integracijo, odvajanje ..., ima pa tudi nekaj pomankljivosti pri praktični uporabi:

- numerično računanje vrednosti polinoma v Lagrangevi obliki ...
- Numerične težave, če so interpolacijske točke preblizu skupaj
- Konstrukcija ni rekurzivna. Dodajanje novih točk je zahtevno.

2.1.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo, v kateri bomo predstavili interpolacijski polinom, izberemo **prestavljene potence**.

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\}$$

Očitno je to baza: vidimo, da se stopnje povečujejo in je posledično kolokacijska matrika spodnje trikotna. V nadaljevanju bomo naredili rekurzivno konstrukcijo.

Vsak $p \in \mathbb{P}_n$ lahko zapišemo kot

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \Big)$$

Iščemo koeficiente $(c_i)_{i=0}^{n}$, da bo p interpolacijski. Ta p bomo konstruirali **rekurzivno**. Naj bo p_{k-1} interpolacijski polinom za f na točkah x_0, x_1, ..., x_{k-1}. Kako poiskati p_k, ki bo interpolacijski za f na točkah $x_0, x_1, \dots, x_k$, kjer bo $p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$ in $p_k \in \mathbb{P}_k$?

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

Vstavimo $x = x_j$, $j \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$

$$p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) + c \cdot 0 = f(x_j)$$

Ostane le pogoj za $x = x_k$

$$p_k(x_k) = f(x_k)$$

kjer lahko zapišemo

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_x) + c \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

S tem je določen c, ki je kar **vodilni koeficient** od p_k. Označimo ga z $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ in ga imenujemo **deljena diferenca**.

Definicija 2.5. **Deljena diferenca** $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k (koeficient pri x^k) za funkcijo f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Sledi, da lahko $p_k(x)$ zapišemo kot

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \ldots, x_k]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

(vstavi graf) V grafu: $p_0 \in \mathbb{P}_p$, $p_0(x) = x_0 \cdot 1$. Po definiciji je $[x_0]f = f(x_0)$.

Iz te rekurzivne konstrukcije dobimo

$$\begin{aligned}
p_n(x) =& p_{n-1}(x) + [x_0, x_1, \ldots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \\
=& \ldots \\
=& p_o(x) + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) + \\
&+ \cdots + [x_0, x_1, \ldots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_i]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})$$

Temu rečemo **Newtonova oblika** zapisa interpolacijskega polinoma.

Kako izračunati deljene diference?

- $[x_0]f = f(x_0)$
- $[x_0, x_1]f = ?$

(vstavi graf)

$$\begin{aligned}
p_1(x) =& f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
=& [x_0]f \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0)
\end{aligned}$$

V zgornji enačbi je $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ vodilni koeficient, 1 in $(x - x_0)$ pa sta baza. Iz tega sledi

$$[x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0}$$

Izrek 2.6 (Rekurzivna formula za deljene diference). Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_k$ paroma različne točke. Tedaj velja

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \ldots x_k]f - [x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

Opomba. Pazi na koeficiente! V števcu gredo pri prvem od x_1 do x_k, pri drugem pa od x_0 do x_{k-1}. Tista, ki smo ju izpustili, potem odštejemo v imenovalcu, torej $x_k - x_0$.

Dokaz. Naj bo q_0 interpolacijski za f na točkah $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ in q_1 interpolacijski za f na točkah $x_1, x_2, \dots, x_k$. Velja, da sta $q_0, q_1 \in \mathbb{P}_{k-1}$. Kako priti do polinoma p, ki bo interpolacijski na $x_0, x_1, \dots, x_k$? Ta p bo tak, da bo veljalo $p \in \mathbb{P}_k$.

Sestavimo model za p

$$p(x) = \ell_0(x)q_0(x) + \ell_1(x)q_1(x), \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{P}_1, \ell_0, \ell_1 =?$$

$$x = x_j, j \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

Dobimo tri pogoje:

($\star\star$) $x = x_j$

$$p(x_j) = \ell_0(x_j)q_0(x_j) + \ell_1(x_j)q_1(x_j) = (\ell_0(x_j) + \ell_1(x_j))f(x_j) \stackrel{?}{=} f(x_j)$$

($\star$) $x = x_0$

$$p(x_0) = \ell_0(x_0)f(x_0) + \ell_1(x_0)q(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

($\star$) $x = x_k$

$$p(x_k) = \ell_0(x_k)q(x_k) + \ell_1(x_k)f(x_k) \stackrel{?}{=} f(x_k)$$

Če izberemo

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}$$

in

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0}$$

zadostimo pogojema ($\star$). Ker pa je $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ za $\forall x$, pa velja tudi ($\star\star$).

Torej

$$p(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}q_0(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}q_1(x)$$

Opomba. V nadaljevanju se bo namesto vodilni koeficient pisalo $v.k.$

Primerjamo vodilne koeficiente na levi in desni strani in dobimo:

$$v.k.(p) = [x_0, x_1, \dots, x_k]f$$

Na desni strani:

$$\frac{1}{x_0 - x_k} \cdot v.k.(q_0) + \frac{1}{x_k - x_0} \cdot v.k.(q_1) = \frac{[x_1, x_2, ..., x_k]f - [x_0, x_1, ..., x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

■

Trikotna shema

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0}$$

Deljive diference, ki jih potrebujemo v zapisu interpolacijskega polinoma, računamo v **trikotni shemi** (primer za $n = 3$): (vstavi shemo)

Primer. Poišči polinom p, za katerega velja $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p(3) = 5$ in $p(4) = 2$.

$p \in \mathbb{P}_3$, $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 4$ baza:

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-3)\}$$

(tabela)

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x(x-1) - \frac{1}{4} \cdot x(x-1)(x-3)$$

Za splošen n: (shema)

Kako izračunati vrednost polinoma v Newtonovi bazi pri izbranem x?

Označimo $d_i = [x_0, x_1, \dots, x_i]f, i = 0, 1, \dots, n$ $n = 4$

$$\begin{aligned} p(x) = & d_0 \cdot 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ = & d_0 + (x - x_0)(d_1 - (x - x_1)(d_2 - (x - x_2)(d_3 - (x - x_3)d_4))) \end{aligned}$$

zapišemo

$$\begin{aligned} v_4 = & d_4 \\ v_3 = & d_3 + (x - x_3)v_4 \\ v_2 = & d_2 + (x - x_2)v_3 \\ v_1 = & d_1 + (x - x_1)v_2 \\ v_0 = & d_0 + (x - x_0)v_1 \end{aligned}$$

Algorithm 2 Posplošen Hornerjev algoritem

Input $\underline{d}(=[d_0, d_1, \ldots, d_n]), \underline{x}(=[x_0, x_1, \ldots ..., x_n]), x$
$v_n = d_n$
for $i = n-1 : -1 : 0$ **do**
  $v_i = d_i + (x - x_i)v_{i+1}$
end for
$v_0 = p(x)$
Output v_0

(tabelca za hronerja)

Poglejmo si za $n = 1$

(slikca)

$$\begin{aligned}
p(x) =& f(x_0) \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0)\\
=& f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) - (x_1 \to x_0)\\
\longrightarrow & f(x_0) + \left(\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) p(x) = \quad f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)
\end{aligned}$$

Iz tega dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
p(x_0) =& f(x_0)\\
p'(x_0) =& f'(x_0)
\end{aligned}$$

Definicija 2.7. Pravimo, da se polinom p s funkcijo f ujema v točki x_i $(k+1)$-kratno, če se ujema v vrednosti in prvih k odvodih. Enačbe, ki določajo te pogoje:

$$\begin{aligned}
p(x_i) =& f(x_i)\\
p'(x_i) =& f'(x_i)\\
p''(x_i) =& f''(x_i)\\
&\vdots\\
p^{(k)}(x_i) =& f^{(k)}(x_i)
\end{aligned}$$

Tak polinom je Taylorjev polinom:

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k$$

Če bomo v točki x_i zahtevali $(k+1)$-kratno ujemanje, potem bomo to točko podali $(k+1)$-kratno:

$$x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots x_{i+k} < x_{i+k+1}$$

Posplošitev deljene diference

Poglejmo si, kako posplošimo deljenje diference.

$$[x_i, x_i, \dots, x_i]f = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

Opomba. V zgornji enačbi imamo $(k+1)$ x_i-jev

Posplošitev rekurzivne formule

Opomba. Vrstni red točk v deljeni diferenci **ni** pomemben.

Naj velja $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2} \leq \dots \leq x_{i+k}$. Potem je

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & \text{sicer} \end{cases}$$

Primer. Poišči polinom p, za katerega velja $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 4$

Določimo točke $x_0, x_1, \dots, x_5$:

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 2$$

Potem sestavimo bazo:

$$\{1, c, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\} \tag{9}$$

Z uporabo trikotne sheme izračunamo koeficiente za polinom: (trikotna shema) Iz trikotne sheme preberemo koeficiente in sestavimo interpolacijski polinom:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2 \tag{10}$$