Numerične metode 2

Zapiski s predavanj prof. Marjetke Knez

Domen Vogrin

Ljubljana, pomlad 2023

Kazalo

1 Teorija aproksimacije

1.1 Aproksimacija funkcij

Denimo, da imamo podano funkcijo f. Radi bi jo aproksimirali s kakšno 'preprostejšo' funkcijo $\tilde{f}$, ki bi bila lažje izračunljiva, bi se jo dalo enostavno odvajati, integrirati ...

Primer.

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ključna vprašanja, ki se nam postavijo, so:

- V kakšni množici/podprostoru naj iščemo aproksimant $\tilde{f}$?
- V čem naj si bo $\tilde{f}$ podobna/sorodna z f?
- Ali $\tilde{f}$ obstaja (v množici, kjer jo iščemo)?
- če obstaja, ali je določen enolično?
- Kako konstruirati aproksimant $\tilde{f}$?
- Kako dobro nadomestilo za f je izračunan $\tilde{f}$?

V splošnem aproksimacijski problem formaliramo takole:

z X označimo vektorski prostor, katerega elemente želimo aproksimirati, $S \subseteq X$ naj označuje podprostor/podmnožico v X, v katerem iščemo aproksimante. Aproksimacijska shema je operator

$$\mathcal{A} \colon X \to S$$

ki vsakemu elementu $f \in X$ priredi aproksimacijski element (aproksimant)

$$\tilde{f} = \mathcal{A}f \in S$$

Primer. Vektorski prostori:

- $X = \mathcal{C}([a, b]), X = \mathcal{C}^k([a, b])$
- $X = \ell^2_\rho([a, b]) = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R}\ \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty\}$,
  pri čemer je ρ **pozitivna utež:** $\rho(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$
- $X = \mathbb{R}^n$

Primer. Podprostori, v katerih iščemo aproksimante:

- $S = \mathbb{P}_n = Lin\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ polinomi stopnje $\leq n$:

$$S = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i ; a_i \in \mathbb{R}\}$$

- **triginimetrični polinomi**

$$S = Lin\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$$

- podprostori racionalnih funkcij, odsekoma polinomskih funkcij

Da bomo lahko definirali aproksimacijski problem in tudi ocenili napako aproksimacije, potrebujemo **normo**. Najbolj znane norme na prostoru funkcij so naslednje:

- neskončna norma ($\|f\|_\infty$)

$$f \in \mathcal{C}([a,b]), \|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

  Za izračun numeričnega približka za neskončno normo na intervalu $[a, b]$ izberemo dovolj gosto zaporedje točk:

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b, \mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$$

  in izračunamo

$$\|f\|_{\infty,\mathbf{x}} = \max_{i=0,\ldots,N} |f(x_i)|$$

- druga norma ($\|\cdot\|_2$) - norma, porojena iz skalarnega produkta. Naj bo vektorski prostor X opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}, f \in X$$

  Primeri skalarnih produktov:

  · $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx,\ f, g \in \ell^2_\rho([a, b])$

  · $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}$

  Za $f(x) \equiv 1$ to imenujemo **standardni skalarni produkt**

- diskretni semi-skalarni produkt

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N,\ a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) g(x_i) \rho(x_i)$$

Če ga še delimo z dolžino intervala, dobimo približek za prejšnjega.

$$\|f\|_{2,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f^2(x_i) \rho(x_i)}$$

Za določanje aproksimanta $\tilde{f}$ ločimo dva primera:

1. Optimalni aproksimacijski problemi
2. interpolacija

1.1.1 Splošen optimalni aproksimacijski problem

Naj bo X vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$. Za $f \in X$ iščemo $\tilde{f} \in S$, da velja

$$\|f - \tilde{f}\| = \inf_{s \in S} \|f - s\| = dist(f, S)$$

Torej, izmed možnih približkov izberemo najboljšega.

Pri tem predmetu si bomo ogledali:

1. aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov

   (za normo izberemo drugo normo - normo iz skalarnega produkta)

2. enakomerna polinomska aproksimacija ($X = C([a, b])$, $S = \mathbb{P}_n$, $\|\cdot\|_\infty$)

Polinomi so zelo uporabni pri aproksimaciji funkcij, saj so gosti v prostoru zveznih funkcij.

Izrek 1.1. (Weierstrassov izrek) Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom p, da je $\|f - p\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$. Drugače povedano:

$$dist(f, \mathbb{P}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dokaz. (konstruktivni - ideja) Naj bo $[a, b] = [0, 1]$. Za $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definiramo t.i. **Bernsteinov polinom**:

$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x)$$

kjer je $B_i^n(x)$ **Bernsteinov bazni polinom**:

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i},\ i = 0, 1, \ldots, n$$

Da se pokazati, da gre $\|f - \mathcal{B}_n f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, ko gre $n \to \infty$. ■

Bernsteinov aproksimacijski polinom nam poda en možen način aproksimacije funkcije f (na $[0,1]$).

Bernsteinov aproksimacijski operator:

$$\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{P}_n$$
$$f \mapsto \mathcal{B}_n f$$
$$\mathcal{B}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a + \frac{i}{n}(b-a)) B_i^n(\frac{x-a}{b-a})$$

Po Weierstrassovem izreku imamo zagotovljeno konvergenco v neskončni normi, žal pa je konvergenca zelo počasna.

1.2 Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov (MNK)

Sodi pod optimalne aproksimacijske probleme.

Naj bo X normiran vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. $S \subseteq X$ naj bo končno dimenzionalen podprostor v X, $S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $dim S = n$. Za izbran $f \in X$ iščemo $f^* \in S$, da bo veljalo

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

f^* naj bo element najbližje aproksimacije (ENA) po MNK za $f \in X$.

Izrek 1.2. Naj bo $S \subseteq X$ končno dimenzionalen podprostor. Element $f^* \in S$ je element najbližje aproksimacije po MNK za $f \in X$ natanko takrat, ko je

$$f - f^* \perp S$$

oziroma

$$\langle f - f^*, S \rangle = 0$$

Dokaz.
($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $f - f^* \perp S$. Dokazati moramo, da je

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{s \in S} \|f - s\|_2$$

Izberimo poljuben $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\|f-s\|_2^2 &= \|f-f^*+f^*-s\|_2^2 \\
&= \langle (f-f^*)+(f^*-s), (f-f^*)+(f^*-s)\rangle \\
&= \|f-f^*\|_2^2 + 2\cdot\langle f^*-s, f-f^*\rangle + \|f^*-s\|_2^2 \\
&\geq \|f-f^*\|_2^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Neenakost 1 velja, saj zato, ker velja tako $f^* \in S$ kot $s \in S$ velja tudi $(f^*-s) \in S$, torej veljata tudi enakost $\langle f^*-s, f-f^*\rangle = 0$ in neenakost $\|f^*-s\|_2 \geq 0$.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je f^* ENA po MNK. Dokazati želimo

$$f-f^* \perp S$$

$\forall s \in S$ in $\forall \lambda > 0$ velja

$$\begin{aligned}
\|f-f^*\|_2^2 &\leq \|f-(f^*-\lambda s)\|_2^2 \\
&= \langle f-f^*+\lambda s, f-f^*+\lambda s\rangle \\
&= \|f-f^*\|_2^2 + 2\cdot\langle f-f^*, \lambda s\rangle + \lambda^2\|s\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\langle f-f^*, \lambda s\rangle + \lambda^2\|s\|_2^2 \\
0 &\leq \lambda(2\langle f-f^*, s\rangle + \lambda\|s\|_2^2) \qquad (2) \\
0 &\leq \langle f-f^*, s\rangle + \lambda\|s\|_2^2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

pri čemer iz 2 na 3 pridemo preko začetnega izbora za $\lambda > 0$. Ker lahko λ vzamemo tako majhno, da velikost člena $2\langle f-f^*, s\rangle$ prevlada nad $\lambda\|s\|_2^2$, vidimo, da mora biti $0 \leq \langle f-f^*, s\rangle$. Če sedaj v S izberemo element $-s$, potem po istem sklepu velja, da mora biti $0 \leq \langle f-f^*, -s\rangle$ oziroma $\langle f-f^*, s\rangle \leq 0$. Sledi, da mora biti

$$\langle f-f^*, s\rangle = 0$$

■

Iz izreka sledi konstrukcija.

Izberemo $f \in X$. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ baza za $S \subseteq X$:

$$S = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

Iščemo $f^* \in S$ ENA po MNK.

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$$

kjer so $(\alpha_j)_{j=1}^{n}$ neznani koeficienti. Iz izreka sledi, da mora biti $f - f^* \perp S$. To bo res, ko bo

$$f - f^* \perp \varphi_i, i \in [n]$$

$$\begin{aligned} 0 =& \langle f - f^*, \varphi_i \rangle \\ =& \langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_j \rangle \\ =& \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

Za vsak i tako dobimo enačbo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle$$

iz česar skupaj dobimo sistem linearnih enačb. Če zgornje zapišemo po vektorjih, dobimo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \langle f, \varphi_i \rangle, \, i \in [n]$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

1.2.1 Normalni oziroma Gramov sistem enačb

Gramova matrika G

$$G = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{i,j=1}^{n}$$

je **simetrična** matrika. Gramova matrika je tudi pozitivno definitna. To dokažemo tako, da izberemo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
x^T G x = &\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \\
=&\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle \\
=&\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_j \varphi_j, x_i \varphi_1 \rangle \\
=&\langle \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_1 \rangle \\
=&\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \|_2^2 \\
>&0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Neenačaj 4 je strog, saj velja

$$\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \neq 0$$

To je res zato, ker je $x_i > 0$ in ker je

$$\varphi_i \in Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

kar je baza za S. Dobljeni sistem enačb lahko rešimo z razcepom Choleskega.

Primer. Naj bo $f(x) = sin(x)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$. Aproksimiraj f po MNK v podprostoru $\mathbb{P}_1$.

Rešitev: Definirajmo X in S

$$X = \mathcal{C}([0, \pi])(X = \ell^2([0, \pi]))$$

$$S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}, \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$$

Zdaj definiramo f^*

$$f^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

Imamo Gramovo matriko G

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{desna stran } = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Zgornji izračuni prihajajo iz postopkov

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi dx = \pi$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$$

in

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi sinx dx = -cosx \Big|_0^\pi = 2$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi x \cdot sinx dx = \cdots = \pi$$

Dobimo:

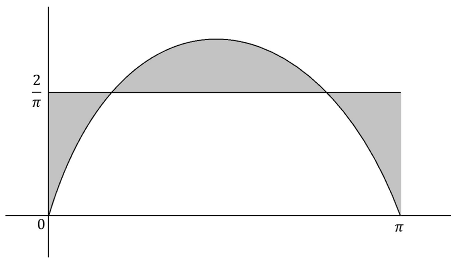
$$\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Ko poračunamo sistem enačb, dobimo

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_1} \|f - p\|_2 = \min_{p \in \mathbb{P}_1} \sqrt{\int_0^\pi (sinx - p(x)^2) dx}$$



Slika 1: Z MNK želimo minimizirati ploščino sivega območja.

Primer. Točke $(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)$ aproksimiraj po MNK s premico.

Rešitev: $S = \mathbb{P}_1 = Lin\{1, x\}$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{4} f(x_i), g(x_i),\ x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

f, ki jo aproksimiramo, je znana le v točkah $\mathbf{x}$.

Izračunamo:

$$\begin{aligned}
\langle 1,1\rangle &= \sum_{i=1}^{4} 1\cdot 1 = 4\\
\langle 1,x\rangle &= \sum_{i=1}^{4} 1\cdot x_i = 10\\
\langle x,x\rangle &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30\\
\langle f,1\rangle &= \sum_{i=1}^{4} y_i\cdot 1 = 18\\
\langle f,x\rangle &= \sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 55
\end{aligned}$$

Dobimo sistem

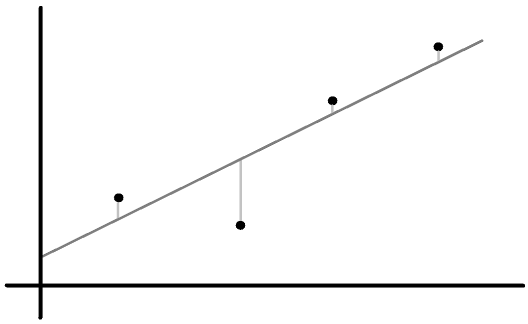
$$\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\55\end{bmatrix}$$

iz katerega dobimo rezultat

$$\alpha = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}$$

Geometrijska interpretacija rešitve:

$$\min_{p\in\mathbb{P}_1}\|f-p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(y_i - p(x_i))^2}$$



Slika 2: Z MNK želimo najti temnosivo premico, ki minimizira svetlosive razdalje.

1.2.2 Povezava s predoločenimi sistemi enačb

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix},\ b \in R^m$$
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \min_{z \in ImA} \|b - z\|$$

Aproksimiramo vektor $b \in \mathbb{R}^m (X = \mathbb{R}^m)$

$$S = Lin\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = ImA$$
$$b^* = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = Ax$$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = x^T y$$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$:

$$G = (\langle a_j, a_i \rangle)_{i,j=1}^{n} = A^T A \tag{5}$$
$$\text{desna stran } = (\langle a_i, b \rangle)_{i=1}^{n} = A^T b \tag{6}$$

Primer. $X = \mathcal{C}([0, 1])$

$$S = P_{n-1} = Lin\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i + j - 1}$$
$$G = (\frac{1}{i + j - 1})_{i,j=1}^{n}$$

kjer je G Hilbertova matrika. Te so zelo občutljive.

Gramova matrika je lahko zelo občutljiva. Reševanju sistema linearnih enačb se izognemo, če v podprostoru S izberemo **ortonormirano bazo**:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

je ortonormirana baza, če

$$\varphi_1 \perp \varphi_j \ \forall i \neq j \text{ in } \|\varphi_i\|_2 = 1$$

V tem primeru je $G = I$ in $\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle$, $f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$. Ortonormirano bazo izračunamo z **modificiranim Gram-Scmidtovim algoritmom**.

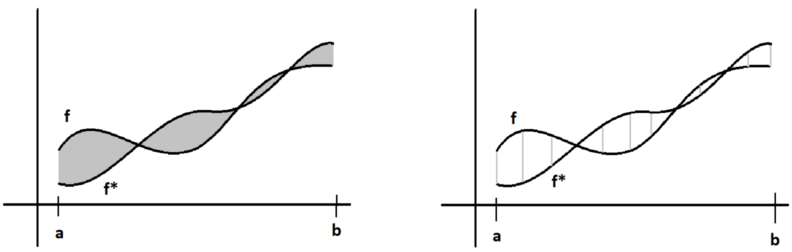
Algorithm 1 Modificiran Gram-Schmidtov algoritem

Input baza $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$

for $i = 1 : n$ **do**
  $\varphi_i = \psi_i$
end for
for $i = 1 : n$ **do**
  $\varphi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_2}$
  for $j = i + 1 : n$ **do**
    $\varphi_j = \varphi_j - \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \varphi_i$
  end for
end for

Output ortonormirana baza $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$

$X \in \mathcal{C}([a, b])$



Slika 3: Druga norma, porojena iz zveznega (levo) in diskretnega (desno) skalarnega produkta

1.3 Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

$$X = \mathcal{C}([a,b]), S = \mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty$$

Problem: Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n}\|f-p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in Pp_n}\max_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)|$$

p^* imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije (PNEA)**. Problem je nelinearen.

(vstavi skico)

Naslednji izrek nam poda **zadostni pogoj**, da je nek polinom PNEA za neko funkcijo.

Izrek 1.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ tak, da **residual**

$$r = f - p \tag{7}$$

alternirajoče doseže svojo normo $\|p\|_{\infty,[a,b]}$ v vsaj $n+2$ različnih točkah $(x_i)_{i=0}^{n+1}$

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$$

Potem je p polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na $[a,b]$.

Opomba. Kaj pomeni "alternirajoče doseže svojo normo"?

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} = |r(x_i)|\,\forall i \in [n]$$

in

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \forall i$$

(vstavi graf)

Dokaz. Dokaz s protislovjem.

Recimo, da p ne bi bil PNEA za f. Tedaj bi obstajal nek drug polinom $q \in \mathbb{P}_n$, da bi veljalo

$$\begin{aligned}|f(x_i)-q(x_i)| \le& \max_{x\in[a,b]}|f(x)-q(x)|\\ =&\|f-q\|_{\infty,[a,b]}\\ <&\|f-p\|_{\infty,[a,b]}\\ =&|f(x_i)-p(x_i)|\;\;\forall i = 0,1,2,\ldots,n+1\end{aligned}$$

Torej za $\forall i$ velja:

$$|f(x_i) - q(x_i)| < |f(x_i) - p(x_i)|$$

To razvijemo v neenakosti

$$-sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i)) < f(x_i) - q(x_i)$$

in

$$f(x_i) - q(x_i) < sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_i) - p(x_i))$$

Če v neenakostih x_i spremenimo v x_{i+1} ter upoštevamo enakost

$$sign(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) = -sign(f(x_i) - p(x_i))$$

dobimo neenakosti

$$sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1})) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$$

in

$$f(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) < -sign(f(x_i) - p(x_i))(f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}))$$

Brez škode za splošnost (BŠS) lahko rečemo, da je $sign(f(x_i) - p(x_i)) = 1$. Potem je $f(x_i) - q(x_i) < f(x_i) - p(x_i)$, $p(x_i) - q(x_i) < 0$ in $f(x_{i+1}) - p(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) - q(x_{i+1})$, torej $p(x_{i+1}) - q(x_{i+1}) > 0$.

Vidimo, da ima razlika $p - q$ ničlo na intervalu (x_i, x_{i+1}) za $i \in [n]$. Razlika $p - q$ je polinom stopnje n, ki ima $n + 1$ ničel. Torej mora biti $p \equiv q$. ■

Izkaže se, da je pogoj tudi potreben (torej da velja ekvivalenca), a je dokaz težek, zato ga bomo izpustili.

Iskanje/računanje PNEA se prevede na iskanje ustrezne množice točk $\{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$.

Definicija 1.4. Naj bo $E = \{x_i, a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\}$. Definirajmo **minimaks** za f na E konstruirati

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x_i \in E} |f(x_i) - p(x_i)|$$

Polinom, pri katerem je ta minimum dosežen, imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f na množici E**. Izračunamo ga tako, da rešimo naslednji sistem linearnih enačb: (brez izpeljave)

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i m, i \in [n + 1]$$

Imamo torej $n+2$ enačb in $n+2$ neznank ($n+1$ v polinomu p in eno v m):

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

ter koeficient m, za katerega velja

$$|m| = M_n(f, E)$$

(vstavi slikco)

2 Interpolacija

Problem: Podane imamo vrednosti izbrane funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na realni osi. Te točke bomo imenovali **interpolacijske točke**. Iščemo neko preprostejšo funkcijo g, ki zadošča pohojem

$$g(x_i) = f(x_i) \forall i \in [n]$$

g imenujemo **interpolacijska funkcija**. Za interpolacijske funkcije običajno izberemo polinome, odsekoma polinomske funkcije ...

Interpolacija se uporablja za

- aproksimacijo dane funkcije
- kadar funkcijo f poznamo le v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, radi pa bi izračunali vrednost te funkcije tudi za x, ki ni ena izmed interpolacijskih točk.
- za izpeljavo formul za numerično integriranje, odvajanje, reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE) ...

2.1 Polinomska interpolacija

Za $f \in \mathcal{C}([a, b])$ in interpolacijske točke $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$ iščemo **polinom** p_i, ki zadošča enačbam

$$p(x_i) = f(x_i), i = a, \ldots, n$$

Enačb je $n+1$. Da dobimo enako število enačb, moramo izbrati $p \in \mathbb{P}_n$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Enačbe (za $i = 0, 1, \ldots, n$)

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n$$

lahko zapišemo matrično

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Matriko, ki jo uporabimo, imenujemo **vandermondova matrika**.

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Ker je Vandermondova matrika obrnljiva, sledi, da imamo enolično rešitev. Torej obstaja **enoličen** polinom stopnje n, ki interpolira $n+1$ paroma različnih točk. Tak interpolacijski problem imenujemo **korenten** interpolacijski problem. Vandermondova matrika je primer **zelo občutljive** matrike. Poleg tega nimamo rešitve v **zaključeni obliki**. Spoznali bomo dva druga zapisa interpolacijskega polinoma:

- Lagrangeva oblika zapisa
- Newtonova oblika zapisa

2.1.1 Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Definiramo naslednje polinome:

$$\begin{aligned} \ell_{0,n}(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} \\ \ell_{1,n}(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} \\ & \vdots \\ \ell_{n,n}(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

oziroma

$$\ell_{i,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

za $i = 0, 1, \ldots, n$. To imenujemo **Lagrangevi bazni polinomi**.

Velja:

$$\ell_{i,n}(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Vsi ti polinomi so stopnje točno n.

Izrek 2.1. Polinomi $\ell_{i,n}$ za $i = 0, 1, \ldots, n$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Dokaz. Dokazati moramo le, da so linearno neodvisni. Preveriti moramo, da je $\alpha_0 \ell_{i,n} + \alpha_1 \ell_{i,n} + \cdots + \alpha_n \ell_{i,n} = 0 <=> \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

($\Longrightarrow$)

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_{j,n}(x) = 0 \ \forall x$$

Vstavimo $x = x_i$ in dobimo

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_{j,n}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$$

($\Longleftarrow$) Očitno. ■

Iz dokaza izreka sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \ell_{j,n}(x)$$

za $c_j \in \mathbb{R}$.

Kako izbrati koeficiente, da bo polinom interpolacijski oziroma da bo zadoščal pogojem

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \ell_{j,n}(x_i) = f(x_i)$$

za $i = 1, \ldots, n$. Za vsak i je tudi vsota enaka c_i.

Dobili smo

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \ell_{j,n}(x)$$

kar je Lagrangeva oblika zapisa interpolacijskega polinoma.

Primer. Naj bo $f(x) = e^x$. Pošiči interpolacijski polinom za f na točkah $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$. Za $n = 3$ izračunamo

$$\begin{aligned}
\ell_{0,3}(x) =& \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{((0-1)(0-3)(0-4))} \\
=& -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) \\
\ell_{1,3}(x) =& \frac{x(x-3)(x-4)}{(1(1-3)(1-4))} \\
=& \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) \\
\ell_{2,3}(x) =& \frac{x(x-1)(x-4)}{(3(3-1)(3-4))} \\
=& -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4) \\
\ell_{3,3}(x) =& \frac{x(x-1)(x-3)}{(4(4-1)(4-3))} \\
=& \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

in dobimo rešitev

$$p(x) = e^0\ell_{0,3}(x) + e^1\ell_{1,3}(x) + e^3\ell_{2,3}(x) + e^4\ell_{3,3}(x)$$

Časovna zahtevnost za evaluacijo $\ell_{i,n}(x)$ v x_i je $\mathcal{O}(n^2)$. Ker v praksi izpustimo skupen polinom, je končna časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n)$, tako kot Hornerjev algoritem.

Lema 2.2. Če je $f \in \mathbb{P}_n$, potem je $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) = f(x)$.

Dokaz. Sledi iz enoličnosti interpolacijskega polinoma. ■

Posledica 2.3.

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) = 1 \tag{8}$$

Lagrangevi bazni polinomi tvorijo **razčlenitev** oziroma **razčlenitev enote**, ki pozitivno vpliva na stabilnost baze.

Izrek 2.4 (O napaki interpolacije.)*.* Naj bodo $a \leq x_0 < x_1 \cdots < x_n \leq b$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ in naj bo p interpolacijski polinom za f na teh točkah. Potem za vsak $x \in [a,b]$ obstaja $\xi_x \in (a,b)$, da velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

kjer velja

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Dokaz. Če je $x = x_i$, potem $f(x_i) - p(x_i) = 0$ in $\omega(x_i) = 0$ ter enakost velja za vsak $\xi_x \in (a,b)$. Naj bo sedaj $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ in naj bo ta x fiksen. Definirajmo $F(u) = f(u) - p(u) - c\omega(u)$ za neko konstanto c, pri čemer za F velja $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - c\omega(x_i) = 0$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Konstanto c izberemo tako, da bo tudi $F(x) = 0$. Torej ima F na $[a,b]$ $n+2$ različnih ničel. Potem ima F' na (a,b) $n+1$ različnih ničel. Potem ima F'' na (a, b) n različnih ničel ... Potem ima $F^{(n+1)}$ na (a,b) vsaj eno ničlo. Označimo to ničlo z ξ_x. Torej je

$$\begin{aligned} 0 =& F^{(n+1)}(\xi_x) \\ =& f^{(n+1)}(\xi_x) - p^{(n+1)}(\xi_x) - c\omega^{(n+1)}(\xi_x) \end{aligned}$$

Uporabimo razmislek od zgoraj in dobimo

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)!$$

Ko to preuredimo, dobimo

$$c = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$

■

Za poljuben $c \in [a,b]$ po izreku velja

$$|f(x) - p(x)| = |\omega| \frac{1}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right| \leq \|\omega\|_{\infty,[a,b]} \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Iz tega sledi

$$\|f - p\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_{\infty,[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}$$

Ta ocena je uporabna v teoriji, ne pa tudi v praksi.

Lagrangeva oblika je zaradi enostavnosti zelo uporabna pri izpeljavi formul za numerično integracijo, odvajanje ..., ima pa tudi nekaj pomankljivosti pri praktični uporabi:

- numerično računanje vrednosti polinoma v Lagrangevi obliki ...
- Numerične težave, če so interpolacijske točke preblizu skupaj
- Konstrukcija ni rekurzivna. Dodajanje novih točk je zahtevno.

2.1.2 Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo, v kateri bomo predstavili interpolacijski polinom, izberemo **prestavljene potence**.

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)\}$$

Očitno je to baza: vidimo, da se stopnje povečujejo in je posledično kolokacijska matrika spodnje trikotna. V nadaljevanju bomo naredili rekurzivno konstrukcijo.

Vsak $p \in \mathbb{P}_n$ lahko zapišemo kot

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \Big)$$

Iščemo koeficiente $(c_i)_{i=0}^{n}$, da bo p interpolacijski. Ta p bomo konstruirali **rekurzivno**. Naj bo p_{k-1} interpolacijski polinom za f na točkah x_0, x_1, ..., x_{k-1}. Kako poiskati p_k, ki bo interpolacijski za f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$, kjer bo $p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$ in $p_k \in \mathbb{P}_k$?

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

Vstavimo $x = x_j$, $j \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$

$$p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) + c \cdot 0 = f(x_j)$$

Ostane le pogoj za $x = x_k$

$$p_k(x_k) = f(x_k)$$

kjer lahko zapišemo

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_x) + c \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)$$

S tem je določen c, ki je kar **vodilni koeficient** od p_k. Označimo ga z $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ in ga imenujemo **deljena diferenca**.

Definicija 2.5. **Deljena diferenca** $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k (koeficient pri x^k) za funkcijo f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Sledi, da lahko $p_k(x)$ zapišemo kot

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \ldots, x_k]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

(vstavi graf) V grafu: $p_0 \in \mathbb{P}_p$, $p_0(x) = x_0 \cdot 1$. Po definiciji je $[x_0]f = f(x_0)$.

Iz te rekurzivne konstrukcije dobimo

$$\begin{aligned}
p_n(x) =& p_{n-1}(x) + [x_0, x_1, \ldots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \\
=& \ldots \\
=& p_o(x) + [x_0, x_1]f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f(x - x_0)(x - x_1) + \\
& + \cdots + [x_0, x_1, \ldots, x_n]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_i]f(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})$$

Temu rečemo **Newtonova oblika** zapisa interpolacijskega polinoma.

Kako izračunati deljene diference?

- $[x_0]f = f(x_0)$
- $[x_0, x_1]f = ?$

(vstavi graf)

$$\begin{aligned}
p_1(x) =& f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
=& [x_0]f \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0)
\end{aligned}$$

V zgornji enačbi je $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ vodilni koeficient, 1 in $(x - x_0)$ pa sta baza. Iz tega sledi

$$[x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0}$$

Izrek 2.6 (Rekurzivna formula za deljene diference). Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_k$ paroma različne točke. Tedaj velja

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, x_2, \ldots x_k]f - [x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

Opomba. Pazi na koeficiente! V števcu gredo pri prvem od x_1 do x_k, pri drugem pa od x_0 do x_{k-1}. Tista, ki smo ju izpustili, potem odštejemo v imenovalcu, torej $x_k - x_0$.

Dokaz. Naj bo q_0 interpolacijski za f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ in q_1 interpolacijski za f na točkah $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Velja, da sta $q_0, q_1 \in \mathbb{P}_{k-1}$. Kako priti do polinoma p, ki bo interpolacijski na $x_0, x_1, \ldots, x_k$? Ta p bo tak, da bo veljalo $p \in \mathbb{P}_k$.

Sestavimo model za p

$$p(x) = \ell_0(x)q_0(x) + \ell_1(x)q_1(x), \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{P}_1, \ell_0, \ell_1 =?$$

$$x = x_j, j \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$$

Dobimo tri pogoje:

($\star\star$) $x = x_j$

$$p(x_j) = \ell_0(x_j)q_0(x_j) + \ell_1(x_j)q_1(x_j) = (\ell_0(x_j) + \ell_1(x_j))f(x_j) \stackrel{?}{=} f(x_j)$$

($\star$) $x = x_0$

$$p(x_0) = \ell_0(x_0)f(x_0) + \ell_1(x_0)q(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

($\star$) $x = x_k$

$$p(x_k) = \ell_0(x_k)q(x_k) + \ell_1(x_k)f(x_k) \stackrel{?}{=} f(x_k)$$

Če izberemo

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}$$

in

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0}$$

zadostimo pogojema ($\star$). Ker pa je $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ za $\forall x$, pa velja tudi ($\star\star$).

Torej

$$p(x) = \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}q_0(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}q_1(x)$$

Opomba. V nadaljevanju se bo namesto vodilni koeficient pisalo $v.k.$

Primerjamo vodilne koeficiente na levi in desni strani in dobimo:

$$v.k.(p) = [x_0, x_1, \dots, x_k]f$$

Na desni strani:

$$\frac{1}{x_0 - x_k} \cdot v.k.(q_0) + \frac{1}{x_k - x_0} \cdot v.k.(q_1) = \frac{[x_1, x_2, ..., x_k]f - [x_0, x_1, ..., x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

■

2.1.2.1 Trikotna shema

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0}$$

Deljive diference, ki jih potrebujemo v zapisu interpolacijskega polinoma, računamo v **trikotni shemi** (primer za $n = 3$): (vstavi shemo)

Primer. Poišči polinom p, za katerega velja $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p(3) = 5$ in $p(4) = 2$.

$p \in \mathbb{P}_3$, $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 4$ baza:

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-3)\}$$

(tabela)

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x(x-1) - \frac{1}{4} \cdot x(x-1)(x-3)$$

Za splošen n: (shema)

Kako izračunati vrednost polinoma v Newtonovi bazi pri izbranem x?

Označimo $d_i = [x_0, x_1, \dots, x_i]f, i = 0, 1, \dots, n$ $n = 4$

$$\begin{aligned} p(x) =& d_0 \cdot 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ =& d_0 + (x - x_0)(d_1 - (x - x_1)(d_2 - (x - x_2)(d_3 - (x - x_3)d_4))) \end{aligned}$$

zapišemo

$$\begin{aligned} v_4 =& d_4 \\ v_3 =& d_3 + (x - x_3)v_4 \\ v_2 =& d_2 + (x - x_2)v_3 \\ v_1 =& d_1 + (x - x_1)v_2 \\ v_0 =& d_0 + (x - x_0)v_1 \end{aligned}$$

Algorithm 2 Posplošen Hornerjev algoritem

Input $\underline{d}(= [d_0, d_1, \ldots, d_n]), \underline{x}(= [x_0, x_1, \ldots ..., x_n]), x$

$v_n = d_n$

for $i = n-1 : -1 : 0$ **do**

$v_i = d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

end for

$v_0 = p(x)$

Output v_0

(tabelca za hronerja)

Poglejmo si za $n = 1$

(slikca)

$$
\begin{aligned}
p(x) =& f(x_0) \cdot 1 + [x_0, x_1]f(x - x_0) \\
=& f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) - (x_1 \to x_0) \\
\longrightarrow & f(x_0) + \left(\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)p(x) = \quad f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)
\end{aligned}
$$

Iz tega dobimo sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
p(x_0) =& f(x_0) \\
p'(x_0) =& f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Definicija 2.7. Pravimo, da se polinom p s funkcijo f ujema v točki x_i $(k+1)$-kratno, če se ujema v vrednosti in prvih k odvodih. Enačbe, ki določajo te pogoje:

$$
\begin{aligned}
p(x_i) =& f(x_i) \\
p'(x_i) =& f'(x_i) \\
p''(x_i) =& f''(x_i) \\
&\vdots \\
p^{(k)}(x_i) =& f^{(k)}(x_i)
\end{aligned}
$$

Tak polinom je Taylorjev polinom:

$$
p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k
$$

Če bomo v točki x_i zahtevali $(k+1)$-kratno ujemanje, potem bomo to točko podali $(k+1)$-kratno:

$$x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots x_{i+k} < x_{i+k+1}$$

2.1.2.2 Posplošitev deljene diference

Poglejmo si, kako posplošimo deljenje diference.

$$[x_i, x_i, \dots, x_i]f = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

Opomba. V zgornji enačbi imamo $(k+1)$ x_i-jev

2.1.2.3 Posplošitev rekurzivne formule

Opomba. Vrstni red točk v deljeni diferenci **ni** pomemben.

Naj velja $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2} \leq \dots \leq x_{i+k}$. Potem je

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & \text{sicer} \end{cases}$$

Primer. Poišči polinom p, za katerega velja $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 4$

Določimo točke $x_0, x_1, \dots, x_5$:

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 2$$

Potem sestavimo bazo:

$$\{1, c, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\}$$

Z uporabo trikotne sheme izračunamo koeficiente za polinom: (trikotna shema) Iz trikotne sheme preberemo koeficiente in sestavimo interpolacijski polinom:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2$$

Brez izpeljave povejmo še sledeče trditve:

Trditev 2.8. Za $f \in \mathcal{C}^k([a,b]), a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_n \leq b$, velja

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \xi \in [x_i, x_{i+k}]$$

Trditev 2.9. Za $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b]), a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ in interpolacijski polinom p za f na teh točkah velja

$$f(x) - p(x) = \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f = \omega(x)\frac{f^{(n+1)(\xi_x)}}{(n+1)!}, \xi_x in(a,b), x \in [a,b]$$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Kako izbrati interpolacijske točke na $[a,b]$? Obstaja več možnosti:

1. Ekvidistantne točke:

   $$x_i = a + i \cdot h$$

   kjer je $h = \frac{b-a}{n}$ in velja za $i = 0, 1, \dots, n$.

   (slikca)

2. Čebiševe točke Izbira, pri kateri je neskončna norma polinoma ω najmanjša možna.

   $$\min_{a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b} \|\omega\|_{\infty,[a,b]} = \min_{a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b} \max_{x \in [a,b]} |\omega(x)|$$

   Rešitev so

   $$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-1}{2}\cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$$

   za $i = 0, 1, \dots, n$

Recimo, da izberemo $f \in \mathcal{C}([a,b])$, izberemo zaporedje interpolacijskih točk $(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})_n$ in povečujemo stopnjo n. Dobimo zaporedje interpolacijskih polinomov $(p_n)_n$. Zanima nas, kaj se dogaja z napako

$$\|f - p\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{n \to \infty} ?? \tag{9}$$

Žal ne velja nujno, da bi šla ta napaka proti 0.

Protiprimer: (Rungejev primer)

Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ na interalu $[-5,5]$ interpoliramo z ekvidistantnimi točkami. Z večanjem n-ja gre napaka proti ∞.

2.1.2.4 Odsekoma polinomske funkcije (zlepki)

IDEJA: Interval $[a, b]$ razdelimo na m delov s stičnimi točkami

$$a = x_0 < x_q < \cdots < x_m = b$$

(slikca)

$$s : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$s\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_n$$

V stičnih točkah predpišemo red gladkosti.

Primer. Odsekoma linearne interpolacijske tunkcije (slikca) - funkcija, označene točke, vmes povezane s premicami

Primer. Odsekoma kubičen interpolacijski zlepek. Polinom na $[x_i, x_{i+1})$ določimo tako, da zadostimo pogojem

$$\begin{aligned}
p_i(x_i) =& f(x_i) \\
p_i'(x_i) =& f'(x_i) \\
p_i(x_[i+1]) =& f(x_{i+1}) \\
p_i'(x_[i+1]) =& f'(x_{i+1}), p_i \in \mathbb{P}_3
\end{aligned}$$

3 Numerično odvajanje

Naloga: Iščemo približek za vrednost odvoda funkcije f pri nekem izbranem x-u. Približek bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v bližnjih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

3.1 Ideja za izpeljavo aproksimacijskih formul

Kot približek za odvod funkcije f v izbranem x vzamemo vrednost odvoda interpolacijskega polinoma za f na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pri izbranem x-u.

Za $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ vemo že:

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f$$
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$$
$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$
$$f'(x) = p'(x) + (\omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f)'$$
$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(\ell'_{i,n}(x)) + (\omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f)'$$

kjer prvi sumand imenujemo **aproksimacija odvoda**, drugi pa **napaka**, ki jo označujemo z $R(f)$ oziroma Rf.

Opomba. Odvod deljene diference (brez izpeljave):

$$\frac{d}{dx}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f = [x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]f$$

Interpolacijske točke običajno izberemo **ekvidistantno**, za x pa izberemo eno od interpolacijskih točk, na primer x_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Tedaj dobimo:

$$f'(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x_k) + \omega'(x_k)[x_0, x_1, \ldots, x_k]f + \omega(x_k)[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$$

kjer je prvi sumand približek, drugi napaka, tretji pa je enak nič. Napako zapišemo kot

$$Rf = \omega'(x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Primer. Vzemimo $n = 1$ in $x_1 = x_0 + h$. Zanima nas približek za $f'(x_0)$.

$$f(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]f$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) =& f(x_0)\frac{1}{(-h)} + f(x_1)\frac{1}{h} + ((x_0 - x_1) + 0)\frac{f''(\xi)}{2} + 0 \\ =& \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi), \xi in [x_0, x_1] \end{aligned}$$

Ulomku, ki se pojavi v formuli, pravimo **enostranska diferenca**.

Primer. Za $n = 2$ izberemo $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$. Zanima nas približek za $f'(x_1)$ in $f''(x_1)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0,x_1,x_2,x]f \end{aligned}$$

Funkcijo odvajamo

$$\begin{aligned} f'(x_1) =& f(x_0)\frac{x_1-x_2}{2h^2} + f(x_1)\frac{x_1-x_2+x_1-x_0}{-h^2} + f(x_2)\frac{x_1-x_0}{2h^2} + Rf \\ =& f(x_0)\frac{1}{2h} + 0 + f(x_2)\frac{1}{2h} + Rf \\ =& \frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h} + Rf \\ Rf =& \omega'(x_1)[x_0,x_1,x_2,x]f \\ =& (x_1-x_0)(x_1-x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!} \\ =& -\frac{h^2}{6}f'''(\xi) \end{aligned}$$

Ko to dvoje združimo, dobimo prvi odvod

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

Za izračun drugega ponovno odvajamo

$$\begin{aligned} f''(x_1) =& f(x_0)\frac{2}{2h^2} + f(x_1)\frac{2}{-h^2} + f(x_2)\frac{2}{2h^2} + (\omega(x)[x_0,x_1,x_2,x]f)''\Big|_{x=x_1} \\ =& \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h} + Rf \end{aligned}$$

Ulomku se reče simetrična diferenca za drugi odvod.

$$Rf = \omega''(x_1)[x_0,x_1,x_2,x_1]f + 2*\omega(x_1)[x_0,x_1,x_2,x_1,x_1]f + 0$$

Bralec naj preveri, da je $\omega''(x_1) = 0$ in $\omega'(x_1) = -h^2$.

Sledi

$$Rf = -2h^2\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = -\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h} - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

(slikca)

Imamo dve vrsti napake:

- napaka metode - Rf (Pada, ko h pada)
- neodstranljiva napaka - napake pri izračunu vrednosti funkcije (Raste, ko h pada)

Ko računamo vrednosti funkcije $f(x_i)$, zaradi zaokrožitvenih napak aritmetike dobimo približek $\tilde{f}(x_i)$, da velja

$$\left| f(x_i) - \tilde{f}(x_i) \right| \leq \varepsilon$$

Primer. Oceni za obe napaki odvod

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

- Napaka metode:
$$D_M \leq \frac{h^2}{6} \|f'''\|_{\infty,[x_0,x_2]}$$
- Neodstranljiva napaka:
$$D_N \leq \frac{2\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon}{h}$$
- Skupna napaka:
$$D_S = D_M + D_N$$

(slikca)

4 Numerična integriracija

Naloga: Radi bi izračunali približek za integral

$$Sf = \int_a^b f(x)dx$$
$$S : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$$

S je linearen funkcional.

Približek za integral bi radi izrazili s kombinacijo vrednosti funkcije f v izbranih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz intervala $[a, b]$.

IDEJA: Namesto funkcije f integriramo interpolacijski polinom za f na točkah $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.

Vemo že:

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f(zaf \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])) \tag{10}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x)$$

Integriramo 10:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f dx$$
$$Sf = \text{približek za integral} + \text{napaka}$$
$$Sf = Ff - Rf$$

To je integracijsko pravilo oziroma kvadratna formula.

$$Ff = \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \ell_{i,n}(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Za $i = 0, \ldots, n$ $\int_a^b \ell_{i,n}(x)dx$ označimo z A_i in jih imenujemo kot uteži integracijskega pravila, točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pa imenujemo vozli integracijskega pravila.

Definicija 4.1. Red oziroma stopnja integracijskega pravila $Sf = Ff + Rf$ je enaka m, če je pravilo točno za vse polinome stopnje $\leq m$. To je, če velja $Rp = 0$ za $\forall p \in \mathbb{P}_m$ in $R(x^{m+1}) \neq 0$. To ekvivalentno zapišemo kot

$$Rx^j = 0 \text{ za } j = 0, 1, \ldots, m$$

kar je ekvivalentno

$$Sx^j = Fx^j$$

Glede na izbiro vozlov ločimo dve vrsti pravil:

- Newton-Cotesova pravila - vozle izberemo ekvidistantno:

  $$x_0 = a, x_i = x_0 + ih, h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, \ldots, n$$

  Ločimo:

  - zaprta pravila (upoštevamo krajišči)

    $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + Rf$$

– odprta pravila (ne upoštevamo krajišč):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + Rf$$

- Gaussova pravila - vozle izračunamo oziroma določimo tako, da je pravilo čim višjega reda.

4.1 Nekaj osnovnih Newton-Cotesovih (N-C) pravil

Primer. $n = 1$, $a = x_0$, $b = x_1 = x_0 + h$, $h = b - a$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx =& \int_a^b (f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})dx \\
&+ \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]f dx \\
=& f(x_0)\frac{1}{-h}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1)dx + f(x_1)\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)dx \\
&+ \int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]f dx \\
=& \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf
\end{aligned} \tag{11}$$

Za reševanje Rf uporabimo izrek:

Izrek 4.2. Posplošen izrek o povprečni vrednosti:

če f na $[a, b]$ ne spremeni predznaka, je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi)\int_a^b f(x)dx$$

za $\xi \in [a, b]$.

Z uporabo izreka dobimo

$$\begin{aligned}
Rf =& \int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]f dx \\
=& \dots \\
=& -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi)
\end{aligned}$$

Uporabili smo tudi trapezno pravilo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi)$$

za $\xi \in [x_0, x_1]$ in za $f \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ (skica)

Določimo še red pravila

- Red je zagotovo vsaj 1
- $Rp = ?$ za $p \in \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned} R(x-x_0)^2 =& S(\cdot - x_0)^2 + F(\cdot - x_0)^2 \\ =& \int_{x_0}^{x_1} (\cdot - x_0)^2 d\cdot - \frac{h}{2}((x_0-x_0)^2 + (x_1-x_0)^2) \\ =& \frac{(x_1-x_0)^3}{3} - \frac{h}{2}h^2 \\ =& \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \\ =& -\frac{h^3}{6} \\ \neq& 0 \end{aligned}$$

Red pravila je torej 1

Primer. $n = 2, x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h = b, h = \frac{b-a}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f dx \end{aligned}$$

Izračunamo uteži

$$\begin{aligned} A_0 =& \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_1)(x-x_2)dx \\ =& \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} h(t-1)h(t-2)hdt \\ =& \dots \\ =& \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Podobno:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4}{3}h \\ A_2 &= \frac{1}{3}h \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + Rf)$$
$$Rf = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f dx = ??$$

Določimo red pravila. Red pravila je vsaj 2.

$$\begin{aligned}
R(x - x_0)^3 =& S(x - x_0)^3 - F(x - x_0)^3 \\
=& \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^3 dx - \frac{h}{3}((x_0 - x_0)^3 + 4(x_1 - x_0)^3 + (x_2 - x_0)^3) \\
=& \frac{(x_2 - x_0)^4}{4} - \frac{h}{3}(4h^3 + 8h^3) \\
=& \frac{(2h)^4}{4} - 4h^4 \\
=& 0
\end{aligned}$$

Red je vsaj 3

$$\begin{aligned}
R(x - x_0)^4 =& S(x - x_0)^4 - F(x - x_0)^4 \\
=& \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^4 dx - \frac{h}{3}((x_0 - x_0)^4 + 4(x_1 - x_0)^4 + (x_2 - x_0)^4) \\
=& \frac{(2h)^5}{5} - \frac{4}{15}h^5 \\
\neq& 0
\end{aligned}$$

Red je 3.

Uporabimo nastavek za napako:

$$Rf = Cf^{(m+1)}(\xi),\ \xi \in [a, b]$$

kjer je C konstanta in m red pravila.

Za f izberemo $f(x) = (x - x_0)^4$ in dobimo

$$F(x - x_0)^4 = C \cdot f^{(4)}(\xi) = C \cdot 4!$$

Sledi

$$C = -\frac{h^5}{90}$$

in dobimo

$$Rf = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Opomba. Ta nastavek sledi iz razvoja funkcije f v Taylorjevo vrsto

$$f(x) = f(a) + f(a)'(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

Ostanek je

$$Rf = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}R(x-a)^{m+1}$$

Iz ostanka izpostavimo konstanto C

$$C = \frac{R(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Izpeljali smo Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

(slikca?)

4.1.1 Alternativna izpeljava integracijskih pravil - metoda nedoločenih koeficientov

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)dx + Rf$$

Ideja je, da neznane uteži določimo tako, da bo red pravila čim višji. Poglejmo si to na primeru Simpsonovega pravila:

Izberemo bazo polinomov

$$\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \dots\}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + Rf$$

Če rečemo, da $f(x) = 1$:

$$\int_{x_0}^{x_2} 1dx = A_0 + A_1 + A_2$$

$$2h = A_0 + A_1 + A_2$$

Če rečemo, da $f(x) = x - x_0$:

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)dx = A_0(x_0 - x_0) + A_1(x_1 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)$$
$$2h = A_1 + 2A_2$$

Če rečemo, da $f(x) = (x - x_0)^2$:

$$\frac{8}{3}h = A_1 + 4A_2$$

Rešimo sistem in dobimo rešitev:

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{3}$$
$$A_1 = \frac{4h}{3}$$

Primer. Primer odprtega N-C pravila - pravokotniško pravilo (skica)

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 f(x_1) + Rf = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

4.2 Numerične napake pri integracijskih pravilih

Poglejmo si neodstranljivo napako. Recimo, da velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \epsilon$. Naj bo $Ff = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$.

$$D_a = \left| \sum_{i=0}^{n} A_i(f(x_i) - \tilde{f}(x_i)) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |A_i| \, \epsilon = \epsilon \sum_{i=0}^{n} |A_i|$$

Upoštevamo, da je pravilo točno vsaj za konstante

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \cdot 1 = F1 = S1 = \int_a^b 1dx = b - a$$

Če so uteži vse pozitivne, potem $D_a \leq \epsilon(b - a)$ in ni numeričnih težav, če n večamo.

Žal pa tako pri zaprtih N-C pravilih za $n \geq 8$ kot tudi pri odprtih N-C pravilih za $n \geq 4$ dobimo negativne uteži.

Primer. $n = 50, [a, b] = [0, 1]$, velja $\sum_{i=0}^{n} |A_i| = 6.7 \cdot 10^{10}$ (zaprto N-C pravilo)

Namesto, da bi uporabljali pravila z visoko stopnjo n raje uporabljamo t.i. sestavljena pravila.

4.3 Sestavljena integracijska pravila

Računamo integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ideja: Interval $[a, b]$ razdelimo na manjše podintervale in na vsakem od podintervalov uporabimo integracijsko pravilo nizkega reda in nato rezultate seštejemo.

Recimo, da želimo uporabiti m osnovnih pravil, vsak osnovno pravilo pa zahteva, da razdelimo podinterval na n delov. Imamo korak $h = \frac{b-a}{m \cdot n}$ in točke $x_i = a + i \cdot h$, kjer gre i od 1 do mn. Sestavljeno pravilo bo potem oblike

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m \cdot n} A_i f(x_i) + Rf$$

Izpeljimo sestavljeno trapezno pravilo.

4.3.1 Sestavljeno trapezno pravilo

Osnovno:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) - f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

kjer je $h = x_1 - x_0$.

(skica) Sestavljeno pravilo:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx =& \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \\ =& (\text{vstavimo osnovno pravilo}) \\ =& \sum_{i=0}^{m-1} (\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)) \\ =& \frac{h}{2}(1 \cdot f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \ldots \\ & + 2 \cdot f(x_{m-1}) + 1 \cdot f(x_m)) + Rf\end{aligned}$$

Ostanek določimo

$$\begin{aligned} Rf &= \sum_{i=0}^{m-1}(-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)) \\ &= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) \\ &= -\frac{h^3}{12}mf''(\mu) \\ &= -\frac{h^3}{12}\frac{b-a}{h}f''(\mu) \\ &= -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\mu) \end{aligned}$$

Ker predpostavimo, da je $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, obstaja $\mu \in [a,v]$, da je

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f''(\xi_i) = f''(\mu)$$

4.3.2 Sestavljeno Simpsonovo pravilo

Osnovno: $n = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

kjer je $\xi \in [x_0, x_2]$ in $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$

(skica)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx =& \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \\ =& \sum_{i=0}^{m-1}(\frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)) \\ =& \frac{h}{3}(f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + 2\cdot f(x_4) + \\ & + \cdots + 2\cdot f(x_{2m-2}) + 4\cdot f(x_{2m-1}) + 1\cdot f(x_{2m})) + Rf \\ =& \frac{h}{3}f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) + Rf \end{aligned}$$

$$Rf = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{90}mf^{(4)}(\mu) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\mu)$$

4.3.3 Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Recimo, da računamo približek za integral s sestavljenim N-C pravilom s korakom h. Vprašanje je, kako v praksi določiti ta korak.

Označimo F_h približek, ki ga izračunamo s korakom h za neko fiksno funkcijo f. Predpostavimo, da velja

$$I = F_h + c_0 \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

kjer je c_0 konstanta.

Namesto s korakom h računamo s korakom $\frac{h}{2}$:

$$I = F_{\frac{h}{2}} + c_0(\frac{h}{2})^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$2^p I = 2^p F_{\frac{h}{2}} + c_0 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})(2^p - 1)I = 2^p F_{\frac{h}{2}} - F_h + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomku pravimo ekstrapoliran približek.

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - F_{\frac{h}{2}} + F_{\frac{h}{2}} - F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = F_{\frac{h}{2}} + \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomek je ocena za napako približka $F_{\frac{h}{2}}$.

Podobno:

$$I = \frac{2^p F_{\frac{h}{2}} - 2^p F_h + F_h - 2^p F_h}{(2^p - 1)} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = F_h + 2^p \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ulomek je ocena za napako približka F_h.

Pri sestavljenem Simpsonovem pravilu je $p = 4$ in

$$I = F_{\frac{h}{2}} + \frac{F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Ekstrapoliran približek $= \frac{16F_{\frac{h}{2}} - F_h}{15}$

Ekstrapoliran približek za sestavljeno trapezno pravilo $= \frac{4F_{\frac{h}{2}} - F_h}{3}$

4.4 Gaussova integracijska pravila

Ideja za izpeljavo: Uteži in vozle izračunamo tako, da je pravilo čim višjega reda oziroma da je pravilo točno za polinome čim višjih stopenj.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Temu rečemo metoda nedoločenih koeficientov:

$$f(x) = x^k \int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^k, k = 0, 1, \dots 2n+1$$

Imamo neznanke $A_0, A_1, \dots A_n$, ki jim rečemo uteži, in $x_0, x_1, \dots, x_n$, ki jim pravimo vozli. Imamo torej $2n+2$ neznank, torej rabimo tudi $2n+2$ enačb. Zgornji sistem je nelinearen sistem $2n+2$ enačb za $2n+2$ neznank.

Ideja je ločiti enačbe za neznane vozle od enačb za neznane uteži. Kako?

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f$$

Če je $f \in \mathbb{P}_{n+r}$, je $[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f \in \mathbb{P}_{r-1}$

$$Rf = \int_a^b \omega(x)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]f dx$$

Definiramo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Če hočemo, da bo pravilo reda vsaj $n+r$, mora biti

$$\int_a^b \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f dx = 0$$

za nek $f \in \mathbb{P}_{n+r}$.

Če bo $\langle w, q \rangle = 0 \ \forall q \in \mathbb{P}_{r-1}$, bo pravilo zagotovo reda vsaj $n+r$. Drugače povedano: Če je $\omega \perp \mathbb{P}_{r-1}$, je pravilo zagotovo reda vsaj $n+r$. Koliko je lahko r največ?

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

ω je lahko pravokoten 'največ' na $\mathbb{P}_n$

$$r - 1 \leq n$$
$$r \leq n + 1$$

Če bo $\omega \perp \mathbb{P}_n$, potem bo pravilo reda $n + r = n + n + 1 = 2n + 1$. Če torej izberemo vozle $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tako, da bo $\omega \perp \mathbb{P}_n$, potem je pravilo reda $2n + 1$. To pravilo imenujemo Gaussovo pravilo. (Prva trditev velja tudi v drugo smer oziroma velja ekvivalenca).

Za neznane vozle dobimo $n + 1$ pogojev za $n + 1$ neznank:

$$\omega \perp 1, \omega \perp x, \omega \perp x^2, \ldots, \omega \perp x^n$$

Iz pogojev sestavimo sistem nelinearnih enačb:

$$\begin{aligned}
\langle \omega, 1 \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot 1 dx = 0 \\
\langle \omega, x \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot x dx = 0 \\
&\vdots \\
\langle \omega, x^n \rangle &= \int_a^b \omega(x) \cdot x^n dx = 0
\end{aligned}$$

Opomba. Drug način: Iz baze $1, x, \ldots, x^{n+1}$ izračunamo ortonormirano bazo polinomov $P_0, P_1, \ldots P_{n+1}$ (glede na dan skalarni produkt). Za vozle izberemo ničle polinoma P_{n+1}.

Izrek 4.3. Naj bo $Ff = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ Gaussovo integracijsko pravilo ($Sf = Ff = Rf$) reda $2n + 1$. Uteži $A_i = \int_a^b \ell_{i,n}(x) dx$ so pozitivne. Za $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$ je napaka oblike

$$Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx$$

Dokaz.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Če za f izberemo $f(x) = \ell_{j,n}^2(x)$, je $Rf = 0$.

$$\int_a^b \ell_{j,n}^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \ell_{j,n}^2(x_i) = A_j$$

iz česar sledi $A_j > 0 \ \forall j = 0, 1, \ldots, n$.

Naj bo q interpolacijski polinom za f na točkah $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$.

Velja

$$f(x) = q(x) + \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]f$$

Vemo tudi, da je $q \in Pp_{2n+1}$, zato sledi, da je

$$\int_a^b q(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i q(x_i)$$

kjer je $q(x_i) = f(x_i)$.

Če to formulo integriramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b q(x)dx + \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]fdx$$

Leva stran je enaka Sf, desna stran pa $Ff + Rf$.

$$\begin{aligned} Sf &= \int_a^b f(x)dx \\ Ff &= \int_a^b q(x)dx \\ Rf &= \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]fdx \end{aligned}$$

Ker $\omega^2(x)$ ne spremeni predznaka na intervalu $[a, b]$, dobimo

$$\begin{aligned} Rf &= \int_a^b \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]fdx \\ &= [x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, \tilde{\xi}]f \int_a^b \omega^2(x)dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \frac{a}{b} \omega^2(x)dx \end{aligned}$$

■

Primer. Določite vozla x_0 in x_1 ter uteži A_0 in A_1 v Gaussovem integracijskem pravilu

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = A_0 fx(x_0) + A_1 f(x_1) + Rf$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Enačbe: $\omega \perp 1, \omega \perp x$

$$0 = \int_{-1}^1 (x - x_0)(x - x_1)dx = \int_{-1}^1 (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1)dx = 2(\frac{1}{3} - x_0 x_1)$$

$$0 = \int_{-1}^{1}(x-x_0)(x-x_1)xdx = \int_{-1}^{1}(x^3-(x_0+x_1)x^2+x_0x_1x)dx = -2(x_0+x_1)\frac{1}{3}$$

Dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} 2(\frac{1}{3} - x_0x_1) &= 0 \\ -\frac{2}{3}(x_0 + x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo vozla:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Poračunamo tudi uteži:

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \cdots = 1 = A_1$$

kjer kot $x_0 in x_1$ vstavimo izračunani vozlišči.

Izračunamo še ostanek (za $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1])$):

$$Rf = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1}(x - \frac{\sqrt{3}}{3})^2(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^2dx = \cdots = \frac{1}{135}f^{(4)}(\xi)$$

Opomba. V integral lahko dodamo tudi kako pozitivno utež ρ. Računamo torej približek za integral oblike $\int_a^b f(x)\rho(x)dx$.

4.5 Integrali v več dimenzijah

4.5.1 Dvojni integral

Za dano funkcijo f, zvezno na območju $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ iščemo integral

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy$$

Integracijsko pravilo je oblike

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{i,j} f(x_i, y_j) + Rf$$

kjer velja $(x_i, y_j) \in \Omega$.

4.5.2 Tenzorska pravila

(slikca) $[a, b]$ razdelimo s korakom h na n delov: $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \cdot h$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. $[c, d]$ razdelimo s korakom k na m delov: $k = \frac{d-c}{m}, y_j = c + j \cdot k$ za $j = 0, 1, \ldots, m$.

(mogoče bolje skica tu?)

Dobili smo mrežne točke (x_i, y_j), določiti pa moramo še pripadajoče uteži $A_{i,j}$. Za to bomo uporabili Fubinijev izrek

$$\iint_\omega f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Poglejmo si natančneje uporabo trapeznega pravila.

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)dxdy =& \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \\ &= \frac{h}{2}(g(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(x_n)) - \frac{h^2}{12}(b-a)\frac{d^2}{dx^2}g(x)\Big|_{x=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x_i) =& \int_c^d f(x_i,y)dy \\ &= \frac{k}{2}(f(x_i,y) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_i,y_j) + f(x_i,y_m)) - \frac{k^2}{12}(d-c)\frac{d^2}{dx^2}f(x_i,y)\Big|_{y=\mu}\end{aligned}$$

Dobimo

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \frac{h \cdot k}{4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{i,j} f(x_i,y_j) + \mathcal{O}(h^2 + k^2)$$

Za izračun $A_{i,j}$ se uporabi

$$\begin{gathered}A_{i,j} = \alpha_i \beta_j \\ \alpha = (\alpha_i)_{i=0}^n = (1,2,2,2,\ldots,2,1) \\ \beta = (\beta_j)_{j=0}^m = (1,2,2,2,\ldots,2,1)\end{gathered}$$

kjer imamo $n-1$ dvojk pri α oziroma $m-1$ dvojk pri β.

(še ena slikca)

4.5.3 Simpsonovo pravilo

(nova skica) Napaka: $Rf = \mathcal{O}(h^4 + k^4)$