Numerične metode za linearne sisteme upravljanja - zapiski s predavanj prof. Plestenjaka

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Poglavje 1

Klasična teorija

1.1 Sistemi upravljanja

Imamo dinamični sistem, sestavljen iz več komponent.
Stanje sistema opisujejo notranje spremenljivke, nanj vplivamo (upravljamo, vodimo) z vhodom $u(t)$, opazujemo pa lahko izhod $y(t)$.
Vhodno-izhodna oblika.
t : čas,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$,
$x(t) \in \mathbb{R}^n$,
$n >> m, r$.
Upravljanje običajno poteka preko krmilnika (regulatorja).
Sisteme ločimo na

a) odprtozančne in

b) zaprtozančne.

Pri odprtozančnih sistemih krnilnik ni povezan z izhodom (stanjem) sistema.
Npr.

- ročna klimatska naprava,
- stari parni stroji,
- glasbene skrinjice,
- svetilnik.

Pri zaprtozančnih sistemih imamo še povratno zvezo s stanjem ali izhodom sistema.
Zgledi:

- avtomatska klimatska naprava,
- tempomat,
- avtopilot,
- kotliček za izplakovanje,
- Wattov regulator parnega stroja.

Manj pretoka $\implies$ počasneje, več pretoka $\implies$ hitreje.

1.2 Lastnosti sistemov

Splošni dinamični sistem lahko predstavimo s pomočno preslikave iz vhodnih funkcij v izhodne funkcije.
Vpeljimo naslednje oznake:
T: časovni prostor, urejena podmnožica $\mathbb{R}$,
U: vhodni prostor, množica vseh možnih stanj vhoda, $\subset \mathbb{R}^m$,
$\Omega \subset \{u : T \to U\}$: prostor vseh možnih vhodnih funkcij,
X: prostor stanj, množica vseh možnih stanj sistema, $\subset \mathbb{R}^n$.
Če ima sistem izhod, imamo še
Y: izhodni prostor, množica vseh možnih stanj izhoda, $\subset \mathbb{R}^r$,
$\Gamma \subset \{y : T \to Y\}$: prostor vseh izhodnih funkcij.
Ω mora biti neprazen in za $t_1 < t_2 < t_3$ iz T in poljubni $u_1, u_2 \in \Omega$ mora

obstajati $u_3 \in \Omega$:

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{za } t_1 \leq t \leq t_2 \\ u_2(t), & \text{za } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Naš sistem opisuje preslikavo stanja
$\phi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, kjer je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u)$ stanje sistema $x(t_1)$ v času $t_1 \in T$, ki nastane iz začetnega stanja $x_0 \in X$ v času $t_0 \in T$ pod vplivom vhodne funkcije $u \in \Omega$.
ϕ mora biti dobro definirana za $t_1 \geq t_0$, ne pa tudi za $t_1 < t_0$.
Za ϕ mora veljati:

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 \;\; \forall t_0 \in T, \forall x_0 \in x, \forall u \in \Omega$,

b) lastnost podgrupe: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in T : \; \phi(t_2, t_0, x_0, u) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u)$.

Če ima sistem izhod, obstaja še preslikava
$\psi : T \times X \times U \to Y$, da je
$y(t) = \psi(t, x(t), u(t))$ stanje izhoda v času t.
$\to$ izhod je odvisen samo od trenutnega stanja sistema in vhoda v času t in časa t.

Definicija 1.2.1. Sistem je vzorčen, če je za poljuben $t_1 \in T$ velja:
Če za $u_1, u_2 \in \Omega$ velja $u_1(t) = u_2(t)$ za $\forall t \leq t_1$, potem je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$ za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X$.

Vzročnost pomeni, da je stanje sistema odvisno samo od prejšnjih ali sedanjih vrednosti vhoda.

Definicija 1.2.2. Naj bosta Ω in X vektorska prostora. Sistem je linearen, če je za $\forall t_0 \leq t_1 \in T$ funkcija $\phi(t_1, t_0, ., .)$ linearna.

$\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2)$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u_2 \end{bmatrix}$$

za $\forall x_1, x_2 \in X, \forall u_1, u_2 \in \Omega$, skalarja α_1, α_2.
Če ima sistem izhod, mora biti y vektorski prostor in $\psi(t, ., .)$ linearna za $\forall t \in T$.

Če je sistem linearen, iz

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1, t_0, x_0, 0) + \phi(t_1, t_0, 0, u);$$

$\phi(t_1, t_0, x_0, 0)$: odziv na ničelni vhod (zero input response),
$\phi(t_1, t_0, 0, u)$: odziv z ničelnim stanjem (zero state response).

Lema 1.2.3. Če je sistem linearen, je vzorčnost ekvivalentna pravilu začetnega mirovanje (p.z.m.).

Če za $u \in \Omega$ velja $u(t) = 0 \ \forall t \leq t_1$, potem je $\phi(t_1, t_0, 0, u) = 0 \ \forall t_0 \leq t_1$.

Dokaz 1.2.4.
$(\Rightarrow)$:
Denimo, da sistem ne zadošča p.z.m.
Torej $\exists \tilde{u} \in \Omega$, $\tilde{u} = 0$ za $t \leq t_1$ in za nek $t_0 \leq t_1$ je $\phi(t_1, t_0 0, \tilde{u}) \neq 0$.
Potem za poljubne u in x_0 velja
$\phi(t_1, t_0, x_0, u + \tilde{u}) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u)$, toda $u + \tilde{u}$ in u se ujemata na $t \leq t_1$.
$\implies$ sistem ni vzročen.
$(\Leftarrow)$:
Če sistem ni vzročen, $\exists u_1$ in u_2, ki se ujemata na $t \leq t_1$ in
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$.
$\implies$ če vzamemo $\tilde{u} = u_1 - u_2$, je $\tilde{u} = 0$ na $t \leq t_1$ in $\phi(t_1, t_0, 0, \tilde{u}) \neq 0$.

Lema 1.2.5. Če je sistem linearen, je $\phi(t_1, t_0, 0, 0) = 0$.

Dokaz 1.2.6. $\phi(t_1, t_0, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha\phi(t_1, t_0, x_0, u)$, vstavimo $\alpha = 0$.

Za $\sigma \in T$ definiramo operator premika: $u \to u^\sigma$, kjer je $u^\sigma(t) = u(t - \sigma)$.
Velja naj, da je T aditivna grupa in Ω zaprta za operator premika za
$\forall \sigma \in T$.

Definicija 1.2.7. Pravimo, da je sistem časovno nespremenljiv (time invariant), če za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X, \forall u \in \Omega, \forall \sigma \in T$:

$$x(t_1) := \phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1 + \sigma, t_0 + \sigma, x_0, u^\sigma) =: x^\sigma(t_1).$$

Če ima izhod, mora biti ϕ neodvisna od t.

Zgled.

	vzorčen	linearen	časovno invariantens
$x(t) = u^2(t-1)$	ja	ne	ja
$x(t) = u(-t)$	ne	ja	ne
$x(t) = 3^{-t}u(t-1)$	ja	ja	ne

Mi se bomo ukvarjali z vzorčnimi LTI (linearen + časovno invarianten) sistemi. Ukvarjali se bomo z naslednjimi oblikami vzorčnih LTI sistemov.

a Zvezni sistemi: $T = \mathbb{R}$.

a1) Klasična vhodno-izhodna oblika.
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
začetni pogoji pri t_0.

a2) Predstavitev v prostoru stanj.
$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, t \geq t_0$
$x^{\cdot}(t) \in \mathbb{R}^n$: vektor stanja sistema,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vektor izhoda,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$: izhod,
$m, r << n$.
$A : n \times n$ matrika stanje,
$B : n \times m$: vhodna matrika,
$C : r \times n$: izhodna matrika,
$D : r \times m$: matrika diskretnega prehoda.

b Diskretni sistemi: $T = \{\delta t \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$;
δt: interval vzorčenja.

$u_k = u(k \cdot \delta t)$: iz diferencialnih enačb dobimo diferenčne enačbe

b1) $y_{j+n} + k_1 y_{j+n-1} + \cdots + k_n y_j = \beta_0 u_{j+m} + \cdots + \beta_m u_j$, $j = 0, 1 \ldots$
+ začetne vrednosti.

b2) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
$y_k = Cx_k + Du_k$.

Zgled.
$x^{'}(t) = ax(t) + u(t)$,
$x(t_0) = x_0, a \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \ x(t) = e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} u(s) ds = \phi(t, t_0, x_0, u)$.
Preverimo lahko

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 + 0 = x_0$,

b) lastnost polgrupe:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u) \\
&= e^{a(t_2-t_1)} \cdot e^{a(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)} u(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t_2-s)} u(s) ds \\
&= \phi(t_2, t_0, x_0, u).
\end{aligned}$$

Podobno preverimo linearnost:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \\
&= e^{a(t_1-t_0)} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)} (\alpha_1 u_1(s) + \alpha_2 u_2(s)) ds \\
&= \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2).
\end{aligned}$$

Vzročnost = p.z.m. (pogoj začetnega mirovanja)
$\phi(t_0, t_0, 0, 0) = 0$.
Časovna nespremenljivost

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1 + \sigma, t_2 + \sigma, x_0, u^{\sigma}) \\
&= e^{a(t_1+\sigma-(t_0+\sigma))} x_0 + \int_{t_0+\sigma}^{t_1+\sigma} e^{a(t_1+\sigma-s)} u(s - \sigma) ds.
\end{aligned}$$

Substitucija $\tilde{s} = s - u$.