Numerične metode za linearne sisteme upravljanja - zapiski s predavanj prof. Plestenjaka

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Poglavje 1

Klasična teorija

1.1 Sistemi upravljanja

Imamo dinamični sistem, sestavljen iz več komponent.
Stanje sistema opisujejo notranje spremenljivke, nanj vplivamo (upravljamo, vodimo) z vhodom $u(t)$, opazujemo pa lahko izhod $y(t)$.
Vhodno-izhodna oblika.
t : čas,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$,
$x(t) \in \mathbb{R}^n$,
$n >> m, r$.
Upravljanje običajno poteka preko krmilnika (regulatorja).
Sisteme ločimo na

a) odprtozančne in

b) zaprtozančne.

Pri odprtozančnih sistemih krnilnik ni povezan z izhodom (stanjem) sistema.
Npr.

- ročna klimatska naprava,
- stari parni stroji,
- glasbene skrinjice,
- svetilnik.

Pri zaprtozančnih sistemih imamo še povratno zvezo s stanjem ali izhodom sistema.
Zgledi:

- avtomatska klimatska naprava,
- tempomat,
- avtopilot,
- kotliček za izplakovanje,
- Wattov regulator parnega stroja.

Manj pretoka $\implies$ počasneje, več pretoka $\implies$ hitreje.

1.2 Lastnosti sistemov

Splošni dinamični sistem lahko predstavimo s pomočno preslikave iz vhodnih funkcij v izhodne funkcije.
Vpeljimo naslednje oznake:
T: časovni prostor, urejena podmnožica $\mathbb{R}$,
U: vhodni prostor, množica vseh možnih stanj vhoda, $\subset \mathbb{R}^m$,
$\Omega \subset \{u : T \to U\}$: prostor vseh možnih vhodnih funkcij,
X: prostor stanj, množica vseh možnih stanj sistema, $\subset \mathbb{R}^n$.
Če ima sistem izhod, imamo še
Y: izhodni prostor, množica vseh možnih stanj izhoda, $\subset \mathbb{R}^r$,
$\Gamma \subset \{y : T \to Y\}$: prostor vseh izhodnih funkcij.
Ω mora biti neprazen in za $t_1 < t_2 < t_3$ iz T in poljubni $u_1, u_2 \in \Omega$ mora

obstajati $u_3 \in \Omega$:

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{za } t_1 \leq t \leq t_2 \\ u_2(t), & \text{za } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Naš sistem opisuje preslikavo stanja
$\phi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, kjer je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u)$ stanje sistema $x(t_1)$ v času $t_1 \in T$, ki nastane iz začetnega stanja $x_0 \in X$ v času $t_0 \in T$ pod vplivom vhodne funkcije $u \in \Omega$.
ϕ mora biti dobro definirana za $t_1 \geq t_0$, ne pa tudi za $t_1 < t_0$.
Za ϕ mora veljati:

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 \quad \forall t_0 \in T, \forall x_0 \in x, \forall u \in \Omega$,

b) lastnost podgrupe: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in T : \ \phi(t_2, t_0, x_0, u) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u)$.

Če ima sistem izhod, obstaja še preslikava
$\psi : T \times X \times U \to Y$, da je
$y(t) = \psi(t, x(t), u(t))$ stanje izhoda v času t.
$\to$ izhod je odvisen samo od trenutnega stanja sistema in vhoda v času t in časa t.

Definicija 1.2.1. Sistem je vzorčen, če je za poljuben $t_1 \in T$ velja:
Če za $u_1, u_2 \in \Omega$ velja $u_1(t) = u_2(t)$ za $\forall t \leq t_1$, potem je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$ za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X$.

Vzročnost pomeni, da je stanje sistema odvisno samo od prejšnjih ali sedanjih vrednosti vhoda.

Definicija 1.2.2. Naj bosta Ω in X vektorska prostora. Sistem je linearen, če je za $\forall t_0 \leq t_1 \in T$ funkcija $\phi(t_1, t_0, ., .)$ linearna.

$\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2)$
$\alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u_2 \end{bmatrix}$
za $\forall x_1, x_2 \in X, \forall u_1, u_2 \in \Omega$, skalarja α_1, α_2.
Če ima sistem izhod, mora biti y vektorski prostor in $\psi(t, ., .)$ linearna za $\forall t \in T$.

Če je sistem linearen, iz

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1, t_0, x_0, 0) + \phi(t_1, t_0, 0, u);$$

$\phi(t_1, t_0, x_0, 0)$: odziv na ničelni vhod (zero input response),
$\phi(t_1, t_0, 0, u)$: odziv z ničelnim stanjem (zero state response).

Lema 1.2.3. Če je sistem linearen, je vzorčnost ekvivalentna pravilu začetnega mirovanje (p.z.m.).

Če za $u \in \Omega$ velja $u(t) = 0\ \forall t \leq t_1$, potem je $\phi(t_1, t_0, 0, u) = 0\ \forall t_0 \leq t_1$.

Dokaz 1.2.4.
$(\Rightarrow)$:
Denimo, da sistem ne zadošča p.z.m.
Torej $\exists \tilde{u} \in \Omega$, $\tilde{u} = 0$ za $t \leq t_1$ in za nek $t_0 \leq t_1$ je $\phi(t_1, t_0 0, \tilde{u}) \neq 0$.
Potem za poljubne u in x_0 velja
$\phi(t_1, t_0, x_0, u + \tilde{u}) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u)$, toda $u + \tilde{u}$ in u se ujemata na $t \leq t_1$.
$\implies$ sistem ni vzročen.
$(\Leftarrow)$:
Če sistem ni vzročen, $\exists u_1$ in u_2, ki se ujemata na $t \leq t_1$ in
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$.
$\implies$ če vzamemo $\tilde{u} = u_1 - u_2$, je $\tilde{u} = 0$ na $t \leq t_1$ in $\phi(t_1, t_0, 0, \tilde{u}) \neq 0$.

Lema 1.2.5. Če je sistem linearen, je $\phi(t_1, t_0, 0, 0) = 0$.

Dokaz 1.2.6. $\phi(t_1, t_0, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha\phi(t_1, t_0, x_0, u)$, vstavimo $\alpha = 0$.

Za $\sigma \in T$ definiramo operator premika: $u \to u^\sigma$, kjer je $u^\sigma(t) = u(t - \sigma)$.
Velja naj, da je T aditivna grupa in Ω zaprta za operator premika za $\forall \sigma \in T$.

Definicija 1.2.7. Pravimo, da je sistem časovno nespremenljiv (time invariant), če za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X, \forall u \in \Omega, \forall \sigma \in T$:

$$x(t_1) := \phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1 + \sigma, t_0 + \sigma, x_0, u^\sigma) =: x^\sigma(t_1).$$

Če ima izhod, mora biti ϕ neodvisna od t.

Zgled.

	vzorčen	linearen	časovno invariananten
$x(t) = u^2(t-1)$	ja	ne	ja
$x(t) = u(-t)$	ne	ja	ne
$x(t) = 3^{-t}u(t-1)$	ja	ja	ne

Mi se bomo ukvarjali z vzorčnimi LTI (linearen + časovno invarianten) sistemi. Ukvarjali se bomo z naslednjimi oblikami vzorčnih LTI sistemov.

a Zvezni sistemi: $T = \mathbb{R}$.

a1) Klasična vhodno-izhodna oblika.
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
začetni pogoji pri t_0.

a2) Predstavitev v prostoru stanj.
$x^\cdot(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, t \geq t_0$
$x^\cdot(t) \in \mathbb{R}^n$: vektor stanja sistema,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vektor izhoda,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$: izhod,
$m, r << n$.
$A : n \times n$ matrika stanje,
$B : n \times m$: vhodna matrika,
$C : r \times n$: izhodna matrika,
$D : r \times m$: matrika diskretnega prehoda.

b Diskretni sistemi: $T = \{\delta t \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$;
δt: interval vzorčenja.

$u_k = u(k \cdot \delta t)$: iz diferencialnih enačb dobimo diferenčne enačbe

b1) $y_{j+n} + k_1 y_{j+n-1} + \cdots + k_n y_j = \beta_0 u_{j+m} + \cdots + \beta_m u_j$, $j = 0, 1 \ldots$
$+$ začetne vrednosti.

b2) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
$y_k = Cx_k + Du_k$.

Zgled.
$x'(t) = ax(t) + u(t)$,
$x(t_0) = x_0, a \in \mathbb{R}$
$\implies x(t) = e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} u(s) ds = \phi(t, t_0, x_0, u)$.
Preverimo lahko

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 + 0 = x_0$,

b) lastnost polgrupe:

$$
\begin{aligned}
&\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u) \\
&= e^{a(t_2-t_1)} \cdot e^{a(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)} u(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t_2-s)} u(s) ds \\
&= \phi(t_2, t_0, x_0, u).
\end{aligned}
$$

Podobno preverimo linearnost:

$$
\begin{aligned}
&\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \\
&= e^{a(t_1-t_0)}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)}(\alpha_1 u_1(s) + \alpha_2 u_2(s)) ds \\
&= \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2).
\end{aligned}
$$

Vzročnost = p.z.m. (pogoj začetnega mirovanja)
$\phi(t_0, t_0, 0, 0) = 0$.
Časovna nespremenljivost

$$
\begin{aligned}
&\phi(t_1 + \sigma, t_2 + \sigma, x_0, u^\sigma) \\
&= e^{a(t_1+\sigma-(t_0+\sigma))} x_0 + \int_{t_0+\sigma}^{t_1+\sigma} e^{a(t_1+\sigma-s)} u(s - \sigma) ds.
\end{aligned}
$$

Substitucija $\tilde{s} = s - u$.

1.3 Laplaceova transformacija

Definicija 1.3.1. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Laplaceova transformacija preslika f v $F = Ł(f)$, ki je definirana za $s \in \mathbb{C}$ z

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

za vse tiste s, kjer integral obstaja.

Pišemo: $Ł(f(t))(s) = F(s)$ oz. $F = Ł(f)$.
t: običajno čas,
f original, $Ł(f)$ Laplaceova transformiranka.
Ł preslika funkcijo iz časovnega prostora spremenljivke t v funkcijo F v frekvenčnem prostoru spremenljivke s.

Izrek 1.3.2. Če je $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna in je $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t}dt < \infty$, potem Laplaceova transformacija f obstaja za vse s, kjer je $Re(s) \geq \sigma_0$.

Dokaz 1.3.3. Naj bo $Re(s) \geq \sigma_0$. Potem je

$$\begin{aligned} |f(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty |f(t)| \left| e^{-st} \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty |f(t)| \left| e^{-\sigma_0 t} \right| dt \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Konvergenčna abscisa: tak $\alpha \in \mathbb{R}$ (če obstaja), da $Ł(f)$ obstaja za vsak s z $Re(s) \geq \alpha$ in ne obstaja za $Re(s) < \alpha$.
Laplaceova transformacija odvoda:

$$\begin{aligned} Ł\left(f'(t)\right)(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\ &\overset{\text{per partes}}{=\!=} f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= -f(0_-) + sf(s). \end{aligned}$$

Tukaj predpostavimo, da je f eksponentnega tipa, kar pomeni, da je $|f(t)| \leq M \cdot e^{ct}$ za konstanti $M, c \in \mathbb{R}$.
$Ł\left(f'(t)\right)(s) = sŁ(f(t))(s) - f(0_-)$.
Za naše potrebe potrebujemo malce spremenjeno Laplaceovo transformacijo Ł, kjer je

$$Ł(f(t))(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

To potrebujemo zaradi posebnih funkcij, ena izmed njih je t.j. enotski impult $\delta(t)$, definiran z $\delta(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$ in $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.
δ: Diracova delta funkcija.
$\delta(t)$ si lahko predstavljamo kot limito ustreznih funkcij, npr.

a) $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{za } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$ - odsekoma zvezna,

b) $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}}$ - neskončnokrat zvezno odvedljiva.

Za $Ł(\delta)$ potem dobimo

$$\begin{aligned} Ł(\delta(t))(s) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon s}\left(e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}\right) \\ &= \left(e^s\right)'(0) = 1. \end{aligned}$$

$Ł(\delta(t))(s) = 0$ za $\forall t \neq 0$.

Druga posebna funkcija je enotska stopnica - $u_s(t) = \begin{cases} 1: & t \geq 0 \\ 0: & t < 0 \end{cases}$, s: „step“.
$Ł(u_s(t))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} = \frac{1}{s}$.
V dinamičnih sistemih lahko pišemo, da je $\delta(t) = u_s'(t)$. Argumenti so

a) $u_s'(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$,

b) $1 = Ł(\delta(t))(s) = s \cdot Ł(u_s(t))(s) - u_s(0_-) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$ ✓

Podobno velja za višje odvode
Ł $\left(\delta^{(k)}(t)\right)(s) = s^k$ (a) ni najbolj ustrezna).
Funkcija f je lahko oblike $f(t) = f_r(t) + f_{sing}(t)$;
$f_r(t)$ je regularni del, to je kosoma zvezno odvedljiva funkcija, kjer je točk nezveznosti na vsakem končnem intervalu končno mnogo, v vseh točkah obstajajo $\lim_{t\to t_u^-} f^{(j)}(t)$ in $\lim_{t\to t_u^+} f^{(j)}(t)$,
$f_{sing}(t)$ je oblike $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j_k=0}^{n_k} \alpha_{jk}\delta j_k(t-t_k)$.
Glavne lastnosti:

1. linearnost: $Ł(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$, to velja za $s \in \mathbb{C}$, kjer sta definirani hkrati F_1 in F_2,
2. transformiranka odvoda:
$$\begin{aligned} &Ł(f'(t))(s) = sF(s) - f'(0_-) \\ &Ł(f''(t))(s) = sŁ(f'(t))(s) - f'(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \\ &Ł(f^{(n)}(t))(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f'(0_-) + \cdots + f^{(n-1)}(0_-), \end{aligned}$$
3. transformiranka integrala: $Ł\left(\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$,
4. časovni premik: $Ł(f(t-t_0)u_s(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}F(s)$;
$u_s(t-t_0)$: na ta način odrežemo vse vrednosti pred t_0,
5. frekvenčni premik: $Ł(f(t)e^{\alpha t})(s) = F(s-\alpha)$,
6. izrek o začetni vrednosti: $\lim_{s\to\infty} F(s) = f(0_+)$,
7. izrek o končni vrednosti: $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$;
to velja, če je $sF(s)$ analitična na $\{s : Re(s) \geq 0\} \iff F$ nima polov s pozitivnim realnim delom, pri $s = 0$ pa ima največ pol stopnje 1,
8. inverzna transformacija: $f(t) = Ł^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{-st}ds$, kjer je σ večji od vseh realnih delov F,
9. če je $f_1(t) = f_2(t) = 0$ za $t < 0$, potem je konvolucija f_1 in f_2 definirana z
$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau.$$

Velja: $Ł((f_1 * f_2)(t))(s) = F_1(s)F_2(s)$;
Laplaceova transformacija konvolucije funkcij je produkt Laplaceovih transformirank.
V drugo smer: $Ł(f_1(t)f_2(t))(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\rho)F_2(s-\rho)d\rho$;
Laplaceova transformacija produkta je konvolucija Laplaceovih transformirank.

Zgled. za konvolucijo.

$f_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{4}; & 0 \le t \le 4 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

$f_2(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{t}{2}; & 1 \le t \le 3 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\Longrightarrow \ (f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} 0; & t \le 1 \text{ ali } t \ge 7 \\ g_1(t); & 1 \le t \le 3 \\ g_2(t); & 3 \le t \le 5 \\ g_3(t); & 5 \le t \le 7 \end{cases}$$

Nekaj osnovnih transformacij

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta^k(t)$	s^k
$t^k u_s(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\frac{t^k}{k!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

1.4 Prenosna funkcija

Klasična vhodno-izhodna oblika LTI sistema je podana z
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
+ začetni pogoji.
Pravimo, da je sistem relaksiran, če je:
$y^{(j)}(0_-) = 0$ za $j = 0, 1 \ldots n-1$,
$u^{(l)}(o_-) = 0$ za $l = 0, 1 \ldots m$.
Naj bo $\tilde{y}(s) = Ł(y(t))(s), \tilde{u}(s) = Ł(u(t))(s)$. Tako dobimo

$$\left(s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n\right) \tilde{y}(s) = \left(\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m\right) \tilde{u}(s);$$

$k(s) := s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n$ in
$\beta(s) := \beta_0 s^m + \cdots + \beta_m$ sta karakteristična polinoma.
$Ł\left(y(n)(t)\right)(s) = s^k \tilde{y}(s) - \ldots$
Ostalo $= 0$, ker je sistem relaksiran.
$\tilde{y}(s) = \frac{\beta(s)}{k(s)} \tilde{u}(s) = g(s)\tilde{u}(s)$;
$g(s)$: prenosna funkcija.
Poli g so ničle k, označimo jih s $p_1 \ldots p_n$,
ničle g so ničle β, označimo jih z $z_1 \ldots z_m$
$\implies$ dobimo t.i. zpk (ničle-poli-ojačanje) obliko
$g(s) = \beta_0 \frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$.
Posebni primeri izhodov (odzivov) so:

a) če je vhod enotski impulz $\delta(t)$, dobimo impulzni odziv $h(t)$,

b) če je vhod enotska stopnica $u_s(t)$, dobimo stopnični odziv $y_s(t)$.

$Ł(\delta(t))(s) = 1 \implies Ł(h(t))(s) = g(s) \implies$ Laplaceova transformiranka impulznega odziva je prenosna funkcija.
$h(t) = Ł^{-1}(g(s))(t)$.
Podobno iz $Ł(u_s(t))(s) = \frac{1}{s}$ sledi $y_s(t) = Ł^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
$\implies$ izhod je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (g * u)(t)$.

Izrek 1.4.1. Odziv na poljuben vhod $u(t)$ je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

Zgled.
Imamo relaksiran sistem $y^{''}(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u^{'}(t) + u(t)$
$\implies g(s) = \frac{4s+1}{s^2+3s+2}$.
Z razvojem v parcialne ulomke lahko dobimo impulzni in stolpični odziv.

a) Impulzni odziv
   $h(t) = Ł^{-1}(g(s))(t)$
   $g(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{7}{s+2}$
   $A_1 = g(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{4s+1}{s+2}|_{s=-1} = -3$
   $A_2 = g(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{4s+1}{s+1}|_{s=-2} = 7$
   $\implies h(t) = \left(-3e^{-t} + 7e^{-2t}\right) u_s(t);$
   $u_s(t)$, ker je odziv vedno za $t \geq 0$.

b) Stopnični odziv
   $y_s(t) = Ł^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
   $\frac{g(s)}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{s}{s+2} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2}$
   $\implies y_s(t) = \left(\frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right) u_s(t);$
   $\frac{1}{2}$: stacionarni odziv,
   $3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$: prehodni odziv.
   $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$,
   $y_s^{'}(t) = h(t)$.

$$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t) \tag{1.1}$$

$Ł(u(t))(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-ts}dt =: \tilde{u}(s)$,
$\tilde{y}(s) := Ł(y(t))(s)$
$\tilde{y}(s) = g(s)\tilde{u}(s)$
$g(s) = \frac{\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m}{s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n}$ prenosna funkcija,
$\delta(t)$: enotski impulz $\implies h(t)$ impulzni odziv,
$u_s(t)$: enotska stopnica $\implies y_s(t)$ stopični odziv
$Ł(\delta(t))(s) \equiv 1 \implies Ł(h(t))(s) = g(s)$
$Ł(u_s(t))(s) = \frac{1}{s}$
$y(t) = (u * h)(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$\delta(t) = u_s^{'}(t)$, na enem primeru smo videli $h(t) = y_s^{'}(t)$.

Izrek 1.4.2. Če je $h(t)$ impulzni odziv relaksiranega LTI sistema in $y_s(t)$ njegov stopični odziv, potem je $h(t) = y_s^{'}(t)$.

Dokaz 1.4.3.

a) Če uporabimo zvezo s konvolucijo, dobimo

$$\begin{aligned} y_s(t) &= (u_s * h)(t) \\ &= \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(t)d\tau \end{aligned}$$

$\implies y_s^{'}(t) = h(t)$ (oz. tudi z Laplacem).

b) Velja še bolj splošno: če je $y(t)$ izhod za $u(t)$, potem je $y^{'}(t)$ izhod za $u^{'}(t)$.
1.1 lahko zapišemo v obliki
$Ay = Bu$,
kjer sta A in B diferencialna operatorja:
$A = \frac{d^n}{dt^n} + k_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + k_n I_d$,
$B = \beta_0 \frac{d^m}{dt^m} + \cdots + \beta_m I_d$.
Ker A, B komutirata z $\frac{d}{dt} \implies \frac{d}{dt}Ay = \frac{d}{dt}Bu$
$A\left(\frac{d}{dt}y\right) = B\left(\frac{d}{dt}u\right)$.

1.5 Stabilnost

Če imamo sistem z enim vhodom in enim izhodom, je to SISO (single input-single output) sistem.

Definicija 1.5.1. SISO sistem je BIBO (bounded input-bounded output) stabilen, če je sistem tak, da je za vsak omejen vhod tudi izhod omejen.

Če $\exists c_1$, da je $|u(t)| < c_1$ za $\forall t \geq 0$, potem $\exists c_2$, da je $|y(t)| \leq c_2$ za $\forall t \geq 0$.

Izrek 1.5.2. SISO sistem je BIBO stabilen $\iff$ impulzni sistem je absolutno integrabilen: $\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$.

Dokaz 1.5.3.
($\Leftarrow$):
Naj bo $|u(t)| < c_1$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ \implies |y(t)| &\leq c_1 \int_0^t |h(\tau)|d\tau \leq c_1 \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau =: c_2 < \infty. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$):
Denimo, da $h(t)$ ni absolutno integrabilen, torej za $\forall M > 0$ $\exists T > 0$, da je $\int_0^T |h(\tau)|d\tau \geq M$.
Če za isti T vzamemo za vhod
$u(t) = sign(h(\tau - t))$, je
$y(T) = \int_0^T u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^T |h(t-\tau)|d\tau \geq M$
$\implies$ sistem ni BIBO stabilen.

V primeru standardne vhodno-izhodne oblike, kjer ima premosna funkcija obliko racionalne funkcije, je stabilnost odvisna od polov sistema.

a) Za vse pole $p_1 \dots p_n$ velja $Re(p_i) < 0 \implies$ sistem je BIBO stabilen $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.

b) Za vse pole velja $Re(p_i) \leq 0$ in vsi poli, kjer je $Re(p_i) = 0$ so enostavni. Iz enostavnosti polov $p_1 \dots p_n$ dobimo
$h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t}$.
V primeru polov $p_1 \dots p_r$ z večkratnostmi $m_1 \dots m_r, \sum_{j=1}^r m_j = n$ dobimo $h(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i e^{p_i t}$, kjer je α_i polinom stopnje $m_i - 1$
$\implies$ sistem je šibko stabilen, ni BIBO stabilen, je za $h(t)$ omejen.

c) Če obstaja pol z $Re(p_i) > 0$ ali večkraten pol z $Re(p_i) = 0 \implies$ sistem ni stabilen.

Zgled.
Splošni sistem 1. reda je
$y^{'}(t) + k_1 y(t) = \beta_0 u(t) \implies g(s) = \frac{\beta_0}{s+k_1}$
$\implies h(t) = \beta_0 e^{-k_1 t}[u_s(t)]$.
Za stabilnost potrebujemo: $k_1 > 0$ za BIBO stabilnost in $k_1 = 0$ za šibko stabilnost.
Stopnični odziv: $y_s(t) = \frac{\beta_0}{k_1}\left(1 - e^{-k_1 t}\right)$.
Splošni sistem 2. reda:
$y^{''}(t) + k_1 y^{'}(t) + k_2 y(t) = \beta_0 u(t); k_1, k_2 \geq 0$.
Tak sistem ustreza npr. situaciji [z vzmetjo].
$my^{\cdot\cdot}(t) + by^{\cdot}(t) + ky(t) = f(t)$;
b: koeficient dušenja,
k: koeficient vzmeti.
Dušenje je proporcionalno hitrosti $(y^{\cdot}(t))$,
sila vzmeti je proporcionalna raztezku $(y(t))$.
Poli: $s^2 + k_1 s + k_2 = 0 \implies s_{1,2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_1}}{2}$.

a) $k_1^2 > 4k_2$: 2 realna pola, oba sta negativna
$\implies$ nekritično dušenje.

b) $k_1^2 < 4k_2$: kompleksen par polov $p = \sigma \pm i\omega$
$\sigma = -\frac{k_1}{2}, \omega = \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}$
$\implies$ podkritično dušenje.

c) $k_1^2 = 4k_2 \implies p_{1,2} = -\frac{k_1}{2}$
$\implies$ kritično dušenje.

Impulzni odzivi so

a) $\frac{\beta_0}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$

b) $\frac{\beta_0}{\omega_0} e^{\sigma t} \sim (\omega_0 t)$

c) $\frac{\beta_0}{k_2} p^2 + e^{pt}$.

Npr. $k_1 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, k_2 = 1$:

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \to b), 2 \to a), 3, 4 \to c)$.

1.6 Bodejev diagram

Imamo relaksiran sistem v vhodno-izhodni obliki:
$\tilde{y}(s) = g(s)\tilde{u}s$,
$g(s) = \frac{\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m}{s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n}$.
Zanima nas odziv na vhod oblike $u(t) = e^{\alpha t}[u_s(t)]$.
Predpostavimo, da α ni pol
$Ł(u(t))(s) = \frac{1}{s-\alpha} \implies y(t) = Ł^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha}g(s)\right)(t)$
$\implies$ v razvoju na parcialne ulomke dobimo poleg členov s poli g še $\frac{A}{s-\alpha}$.
Ker α ni pol prenosne funkcije $\implies$
$A = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{s-\alpha} \cdot g(s)(s-\alpha)\right) = g(\alpha)$
$\implies y(t)$ vsebuje člen $g(\alpha)e^{\alpha t}$.
$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$
$\implies$ če je $u(t) = \cos(\omega t), y(t)$ vsebuje
$\frac{1}{2}g(i\omega)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}g(-i\omega)e^{-i\omega t}$;
$g(i\omega) = |g(i\omega)|e^{i\phi}$,
$g(-i\omega) = \overline{g(i\omega)}$
$\implies y(t)$ vsebuje

$$\frac{1}{2}|g(i\omega)|\left(e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} + e^{-i\phi} \cdot e^{-i\omega t}\right) = |g(i\omega)|cos(\omega t + \phi).$$

$|g(i\omega)|$: ojačanje ali amplitudni odziv,
$\phi = arg(g(i\omega))$: fazni premik.
Ojačanje merimo v decibelih: $|g(i\omega)|_{db} = 20\log_{10}(|g(i\omega)|)$.
Fazni premik merimo v stopinjah od $-180°$ do $180°$.
Bodejev diagram je graf amplitudnega in faznega odziva.
$g(i\omega)$: frekvenčna funkcija.

Zgled.
$Z_f\left([3\ 2], [1\ 1+2\alpha\ 4+2\alpha+\alpha^2\ 4+\alpha^2]\right)$
$\implies$ poli so $-1, -\alpha+2i, -\alpha-2i$

$\alpha = 0.1\ldots$
$\alpha = 0.01\ldots$

1.7 Routh-Hurtwizov kriterij

Če je $g(s)$ racionalna funkcija, je stabilnost odvisna od položaja polov oz. ničel imenovalca 1.1.

Definicija 1.7.1. Za polinom $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}$ pravimo, da je stabilen, če vse njegove ničle ležijo strogo v levi kompleksni podravnini $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.

Lema 1.7.2. Če je polinom 1.1 stabilen, potem so vsi koeficienti neničelni in istega predznaka.

Dokaz 1.7.3.
$p(x) = a_0(x - \xi_1)\ldots(x - \xi_k)$, kjer so $\xi_1 \ldots \xi_k$ ničle.
Lahko predpostavimo, da je $a_0 > 0$.

a) $\xi_i \in \mathbb{R} \implies \xi_i = -b_i$ za neki $b_i > 0 \implies \xi_i$ „pripada" faktor $(x + b_i)$.

b) $\xi_i \notin \mathbb{R} \implies \xi_{i,i+1} = -c_i \pm i d_i$ za neki $c_i > 0, d_i \neq 0$
$\implies$ „pripada" $(x + c_i - id_i)(x + c_i + id_i) = (x^2 + 2c_i x + c_i^2 + d_i^2)$
$\implies$ $p(x)$ je produkt linearnih in kvadratnih faktorjev s pozitivnimi realnimi koeficienti
$\implies$ vsi koeficienti p so neničelni in istega predznaka.

To je potreben, ne pa tudi zadosten pogoj, npr.
$p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 8 = (x + 2)(x^2 - x + 4)$;
$x^2 - x + 4$ ne ustreza pogoju $\implies$ p ni stabilen.
Za polinom 1.1 definiramo Routhovo tabelo

0	a_0	a_2	a_4	a_6	$\dots$
1	a_1	a_3	a_5	a_7	$\dots$
2	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}	$\dots$	
3	γ_{31}	γ_{32}	$\dots$		
$\vdots$					
n	γ_n				

Za $k \geq 2 : r_{k,j} = r_{k-2,j+1} - \frac{r_{k-2,1}}{r_{k-1,1}} \cdot r_{k-1,j+1}$.

Zgled.
$p(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 2$

0	1	6	4	
1	2	6	2	
2	3	3		$[6\ 4] - \frac{1}{2}[6\ 2] = [3\ 3]$
3	4	2		$[6\ 2] - \frac{2}{3}[3\ 0] = [4\ 2]$
4	$\frac{3}{2}$			$3 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$
5	2			$2 - \frac{3}{2} \cdot 0$

Izrek 1.7.4 (Routh-Horwitz)**.** Polinom 1.1 je stabilen $\iff$ vsi elementi v 1. stolpcu Routhove tabele so neničelni in istega predznaka.