Numerične metode za linearne sisteme upravljanja - zapiski s predavanj prof. Plestenjaka

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

Poglavje 1

Klasična teorija

1.1 Sistemi upravljanja

Imamo dinamični sistem, sestavljen iz več komponent.
Stanje sistema opisujejo notranje spremenljivke, nanj vplivamo (upravljamo, vodimo) z vhodom $u(t)$, opazujemo pa lahko izhod $y(t)$.
Vhodno-izhodna oblika.
t : čas,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$,
$x(t) \in \mathbb{R}^n$,
$n >> m, r$.
Upravljanje običajno poteka preko krmilnika (regulatorja).
Sisteme ločimo na

a) odprtozančne in

b) zaprtozančne.

Pri odprtozančnih sistemih krnilnik ni povezan z izhodom (stanjem) sistema.
Npr.

- ročna klimatska naprava,
- stari parni stroji,
- glasbene skrinjice,
- svetilnik.

Pri zaprtozančnih sistemih imamo še povratno zvezo s stanjem ali izhodom sistema.
Zgledi:

- avtomatska klimatska naprava,
- tempomat,
- avtopilot,
- kotliček za izplakovanje,
- Wattov regulator parnega stroja.

Manj pretoka $\implies$ počasneje, več pretoka $\implies$ hitreje.

1.2 Lastnosti sistemov

Splošni dinamični sistem lahko predstavimo s pomočno preslikave iz vhodnih funkcij v izhodne funkcije.
Vpeljimo naslednje oznake:
T: časovni prostor, urejena podmnožica $\mathbb{R}$,
U: vhodni prostor, množica vseh možnih stanj vhoda, $\subset \mathbb{R}^m$,
$\Omega \subset \{u : T \to U\}$: prostor vseh možnih vhodnih funkcij,
X: prostor stanj, množica vseh možnih stanj sistema, $\subset \mathbb{R}^n$.
Če ima sistem izhod, imamo še
Y: izhodni prostor, množica vseh možnih stanj izhoda, $\subset \mathbb{R}^r$,
$\Gamma \subset \{y : T \to Y\}$: prostor vseh izhodnih funkcij.
Ω mora biti neprazen in za $t_1 < t_2 < t_3$ iz T in poljubni $u_1, u_2 \in \Omega$ mora

obstajati $u_3 \in \Omega$:

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{za } t_1 \leq t \leq t_2 \\ u_2(t), & \text{za } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Naš sistem opisuje preslikavo stanja
$\phi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, kjer je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u)$ stanje sistema $x(t_1)$ v času $t_1 \in T$, ki nastane iz začetnega stanja $x_0 \in X$ v času $t_0 \in T$ pod vplivom vhodne funkcije $u \in \Omega$.
ϕ mora biti dobro definirana za $t_1 \geq t_0$, ne pa tudi za $t_1 < t_0$.
Za ϕ mora veljati:

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 \quad \forall t_0 \in T, \forall x_0 \in x, \forall u \in \Omega$,

b) lastnost podgrupe: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in T : \ \phi(t_2, t_0, x_0, u) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u)$.

Če ima sistem izhod, obstaja še preslikava
$\psi : T \times X \times U \to Y$, da je
$y(t) = \psi(t, x(t), u(t))$ stanje izhoda v času t.
$\to$ izhod je odvisen samo od trenutnega stanja sistema in vhoda v času t in časa t.

Definicija 1.2.1. Sistem je vzorčen, če je za poljuben $t_1 \in T$ velja:
Če za $u_1, u_2 \in \Omega$ velja $u_1(t) = u_2(t)$ za $\forall t \leq t_1$, potem je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$ za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X$.

Vzročnost pomeni, da je stanje sistema odvisno samo od prejšnjih ali sedanjih vrednosti vhoda.

Definicija 1.2.2. Naj bosta Ω in X vektorska prostora. Sistem je linearen, če je za $\forall t_0 \leq t_1 \in T$ funkcija $\phi(t_1, t_0, ., .)$ linearna.

$$\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2)$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u_2 \end{bmatrix}$$

za $\forall x_1, x_2 \in X, \forall u_1, u_2 \in \Omega$, skalarja α_1, α_2.
Če ima sistem izhod, mora biti y vektorski prostor in $\psi(t, ., .)$ linearna za $\forall t \in T$.

Če je sistem linearen, iz

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1, t_0, x_0, 0) + \phi(t_1, t_0, 0, u);$$

$\phi(t_1, t_0, x_0, 0)$: odziv na ničelni vhod (zero input response),
$\phi(t_1, t_0, 0, u)$: odziv z ničelnim stanjem (zero state response).

Lema 1.2.3. Če je sistem linearen, je vzorčnost ekvivalentna pravilu začetnega mirovanje (p.z.m.).

Če za $u \in \Omega$ velja $u(t) = 0 \; \forall t \leq t_1$, potem je $\phi(t_1, t_0, 0, u) = 0 \; \forall t_0 \leq t_1$.

Dokaz 1.2.4.
$(\Rightarrow)$:
Denimo, da sistem ne zadošča p.z.m.
Torej $\exists \tilde{u} \in \Omega$, $\tilde{u} = 0$ za $t \leq t_1$ in za nek $t_0 \leq t_1$ je $\phi(t_1, t_0 0, \tilde{u}) \neq 0$.
Potem za poljubne u in x_0 velja
$\phi(t_1, t_0, x_0, u + \tilde{u}) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u)$, toda $u + \tilde{u}$ in u se ujemata na $t \leq t_1$.
$\implies$ sistem ni vzročen.
$(\Leftarrow)$:
Če sistem ni vzročen, $\exists u_1$ in u_2, ki se ujemata na $t \leq t_1$ in
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$.
$\implies$ če vzamemo $\tilde{u} = u_1 - u_2$, je $\tilde{u} = 0$ na $t \leq t_1$ in $\phi(t_1, t_0, 0, \tilde{u}) \neq 0$.

Lema 1.2.5. Če je sistem linearen, je $\phi(t_1, t_0, 0, 0) = 0$.

Dokaz 1.2.6. $\phi(t_1, t_0, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha \phi(t_1, t_0, x_0, u)$, vstavimo $\alpha = 0$.

Za $\sigma \in T$ definiramo operator premika: $u \to u^\sigma$, kjer je $u^\sigma(t) = u(t - \sigma)$.
Velja naj, da je T aditivna grupa in Ω zaprta za operator premika za
$\forall \sigma \in T$.

Definicija 1.2.7. Pravimo, da je sistem časovno nespremenljiv (time invariant), če za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X, \forall u \in \Omega, \forall \sigma \in T$:

$$x(t_1) := \phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1 + \sigma, t_0 + \sigma, x_0, u^\sigma) =: x^\sigma(t_1).$$

Če ima izhod, mora biti ϕ neodvisna od t.

Zgled.

	vzorčen	linearen	časovno invariantent
$x(t) = u^2(t-1)$	ja	ne	ja
$x(t) = u(-t)$	ne	ja	ne
$x(t) = 3^{-t}u(t-1)$	ja	ja	ne

Mi se bomo ukvarjali z vzorčnimi LTI (linearen + časovno invarianten) sistemi. Ukvarjali se bomo z naslednjimi oblikami vzorčnih LTI sistemov.

a Zvezni sistemi: $T = \mathbb{R}$.

a1) Klasična vhodno-izhodna oblika.
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
začetni pogoji pri t_0.

a2) Predstavitev v prostoru stanj.
$x^\cdot(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, t \geq t_0$
$x^\cdot(t) \in \mathbb{R}^n$: vektor stanja sistema,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vektor izhoda,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$: izhod,
$m, r << n$.
$A : n \times n$ matrika stanje,
$B : n \times m$: vhodna matrika,
$C : r \times n$: izhodna matrika,
$D : r \times m$: matrika diskretnega prehoda.

b Diskretni sistemi: $T = \{\delta t \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$;
δt: interval vzorčenja.

$u_k = u(k \cdot \delta t)$: iz diferencialnih enačb dobimo diferenčne enačbe

b1) $y_{j+n} + k_1 y_{j+n-1} + \cdots + k_n y_j = \beta_0 u_{j+m} + \cdots + \beta_m u_j$, $j = 0, 1 \ldots$
+ začetne vrednosti.

b2) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
$y_k = Cx_k + Du_k$.

Zgled.
$x^{'}(t) = ax(t) + u(t)$,
$x(t_0) = x_0, a \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow\ x(t) = e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} u(s) ds = \phi(t, t_0, x_0, u)$.
Preverimo lahko

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 + 0 = x_0$,

b) lastnost polgrupe:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u) \\
&= e^{a(t_2-t_1)} \cdot e^{a(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)} u(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t_2-s)} u(s) ds \\
&= \phi(t_2, t_0, x_0, u).
\end{aligned}$$

Podobno preverimo linearnost:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \\
&= e^{a(t_1-t_0)}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)}(\alpha_1 u_1(s) + \alpha_2 u_2(s)) ds \\
&= \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2).
\end{aligned}$$

Vzročnost = p.z.m. (pogoj začetnega mirovanja)
$\phi(t_0, t_0, 0, 0) = 0$.
Časovna nespremenljivost

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1 + \sigma, t_2 + \sigma, x_0, u^{\sigma}) \\
&= e^{a(t_1+\sigma-(t_0+\sigma))} x_0 + \int_{t_0+\sigma}^{t_1+\sigma} e^{a(t_1+\sigma-s)} u(s - \sigma) ds.
\end{aligned}$$

Substitucija $\tilde{s} = s - u$.

1.3 Laplaceova transformacija

Definicija 1.3.1. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Laplaceova transformacija preslika f v $F = Ł(f)$, ki je definirana za $s \in \mathbb{C}$ z

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

za vse tiste s, kjer integral obstaja.

Pišemo: $Ł(f(t))(s) = F(s)$ oz. $F = Ł(f)$.
t: običajno čas,
f original, $Ł(f)$ Laplaceova transformiranka.
Ł preslika funkcijo iz časovnega prostora spremenljivke t v funkcijo F v frekvenčnem prostoru spremenljivke s.

Izrek 1.3.2. Če je $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna in je $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t}dt < \infty$, potem Laplaceova transformacija f obstaja za vse s, kjer je $Re(s) \geq \sigma_0$.

Dokaz 1.3.3. Naj bo $Re(s) \geq \sigma_0$. Potem je

$$\begin{aligned} |f(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| \left|e^{-st}\right| dt \\ &\leq \int_0^\infty |f(t)| \left|e^{-\sigma_0 t}\right| dt < \infty. \end{aligned}$$

Konvergenčna abscisa: tak $\alpha \in \mathbb{R}$ (če obstaja), da $Ł(f)$ obstaja za vsak s z $Re(s) \geq \alpha$ in ne obstaja za $Re(s) < \alpha$.
Laplaceova transformacija odvoda:

$$\begin{aligned} Ł\left(f'(t)\right)(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\ &\overset{\text{per partes}}{=\!=\!=} f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= -f(0_-) + sf(s). \end{aligned}$$

Tukaj predpostavimo, da je f eksponentnega tipa, kar pomeni, da je $|f(t)| \leq M \cdot e^{ct}$ za konstanti $M, c \in \mathbb{R}$.

$Ł\left(f'(t)\right)(s) = sŁ(f(t))(s) - f(0_-)$.

Za naše potrebe potrebujemo malce spremenjeno Laplaceovo transformacijo Ł, kjer je

$$Ł(f(t))(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

To potrebujemo zaradi posebnih funkcij, ena izmed njih je t.j. enotski impult $\delta(t)$, definiran z $\delta(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$ in $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$.

δ: Diracova delta funkcija.

$\delta(t)$ si lahko predstavljamo kot limito ustreznih funkcij, npr.

a) $\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{za } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$ - odsekoma zvezna,

b) $\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\epsilon}}$ - neskončnokrat zvezno odvedljiva.

Za $Ł(\delta)$ potem dobimo

$$\begin{aligned} Ł(\delta(t))(s) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0-\epsilon}^{\infty}\delta_\epsilon(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1}{2\epsilon}e^{-st}dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon s}\left(e^{\epsilon s} - e^{-\epsilon s}\right) \\ &= (e^s)'(0) = 1. \end{aligned}$$

$Ł(\delta(t))(s) = 0$ za $\forall t \neq 0$.

Druga posebna funkcija je enotska stopnica - $u_s(t) = \begin{cases} 1: & t \geq 0 \\ 0: & t < 0 \end{cases}$, s: „step".

$Ł(u_s(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} = \frac{1}{s}$.

V dinamičnih sistemih lahko pišemo, da je $\delta(t) = u_s'(t)$. Argumenti so

a) $u_s'(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$,

b) $1 = Ł(\delta(t))(s) = s \cdot Ł(u_s(t))(s) - u_s(0_-) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$ ✓

Podobno velja za višje odvode

$Ł\left(\delta^{(k)}(t)\right)(s) = s^k$ (a) ni najbolj ustrezna).

Funkcija f je lahko oblike $f(t) = f_r(t) + f_{sing}(t)$;

$f_r(t)$ je regularni del, to je kosoma zvezno odvedljiva funkcija, kjer je točk nezveznosti na vsakem komčnem intervalu končno mnogo, v vseh točkah obstajajo
$\lim_{t \to t_u^-} f^{(j)}(t)$ in $\lim_{t \to t_u^+} f^{(j)}(t)$,
$f_{sing}(t)$ je oblike $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k=0}^{n_k} \alpha_{jk} \delta j_k(t - t_k)$.
Glavne lastnosti:

1. linearnost: $Ł(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$, to velja za $s \in \mathbb{C}$, kjer sta definirani hkrati F_1 in F_2,
2. transformiranka odvoda:
$$Ł(f^{'}(t))(s) = sF(s) - f^{'}(0_-)$$
$$Ł(f^{''}(t))(s) = sŁ(f^{'}(t))(s) - f^{'}(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f^{'}(0_-)$$
$$Ł(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f^{'}(0_-) + \cdots + f^{(n-1)}(0_-),$$
3. transformiranka integrala: $Ł\left(\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$,
4. časovni premik: $Ł(f(t - t_0)u_s(t - t_0))(s) = e^{-t_0 s} F(s)$;
$u_s(t - t_0)$: na ta način odrežemo vse vrednosti pred t_0,
5. frekvenčni premik: $Ł(f(t)e^{\alpha t})(s) = F(s - \alpha)$,
6. izrek o začetni vrednosti: $\lim_{s \to \infty} F(s) = f(0_+)$,
7. izrek o končni vrednosti: $\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$;
to velja, če je $sF(s)$ analitična na $\{s : Re(s) \geq 0\} \iff F$ nima polov s pozitivnim realnim delom, pri $s = 0$ pa ima največ pol stopnje 1,
8. inverzna transformacija: $f(t) = Ł^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{-st} ds$, kjer je σ večji od vseh realnih delov F,
9. če je $f_1(t) = f_2(t) = 0$ za $t < 0$, potem je konvolucija f_1 in f_2 definirana z
$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau.$$
Velja: $Ł((f_1 * f_2)(t))(s) = F_1(s) F_2(s)$;
Laplaceova transformacija konvolucije funkcij je produkt Laplaceovih

transformirank.
V drugo smer: $Ł(f_1(t)f_2(t))(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\rho)F_2(s-\rho)d\rho$;
Laplaceova transformacija produkta je konvolucija Laplaceovih transformirank.

Zgled. za konvolucijo.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1-\frac{t}{4}; & 0 \leq t \leq 4 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}-\frac{t}{2}; & 1 \leq t \leq 3 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\implies (f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 1 \text{ ali } t \geq 7 \\ g_1(t); & 1 \leq t \leq 3 \\ g_2(t); & 3 \leq t \leq 5 \\ g_3(t); & 5 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

Nekaj osnovnih transformacij

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta^k(t)$	s^k
$t^k u_s(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\frac{t^k}{k!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

1.4 Prenosna funkcija

Klasična vhodno-izhodna oblika LTI sistema je podana z
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
+ začetni pogoji.
Pravimo, da je sistem relaksiran, če je:
$y^{(j)}(0_-) = 0$ za $j = 0, 1 \ldots n-1$, $u^{(l)}(o_-) = 0$ za $l = 0, 1 \ldots m$.
Naj bo $\tilde{y}(s) = \text{Ł}(y(t))(s), \tilde{u}(s) = \text{Ł}(u(t))(s)$. Tako dobimo

$$\left(s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n\right) \tilde{y}(s) = \left(\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m\right) \tilde{u}(s);$$

$k(s) := s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n$ in
$\beta(s) := \beta_0 s^m + \cdots + \beta_m$ sta karakteristična polinoma.
$\text{Ł}\left(y(n)(t)\right)(s) = s^k \tilde{y}(s) - \ldots$
Ostalo $= 0$, ker je sistem relaksiran.
$\tilde{y}(s) = \frac{\beta(s)}{k(s)} \tilde{u}(s) = g(s)\tilde{u}(s);$
$g(s)$: prenosna funkcija.
Poli g so ničle k, označimo jih s $p_1 \ldots p_n$,
ničle g so ničle β, označimo jih z $z_1 \ldots z_m$
$\Longrightarrow$ dobimo t.i. zpk (ničle-poli-ojačanje) obliko
$g(s) = \beta_0 \frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$.
Posebni primeri izhodov (odzivov) so:

a) če je vhod enotski impulz $\delta(t)$, dobimo impulzni odziv $h(t)$,

b) če je vhod enotska stopnica $u_s(t)$, dobimo stopnični odziv $y_s(t)$.

$\text{Ł}(\delta(t))(s) = 1 \Longrightarrow \text{Ł}(h(t))(s) = g(s) \Longrightarrow$ Laplaceova transformiranka impulznega odziva je prenosna funkcija.
$h(t) = \text{Ł}^{-1}(g(s))(t)$.
Podobno iz $\text{Ł}(u_s(t))(s) = \frac{1}{s}$ sledi $y_s(t) = \text{Ł}^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
$\Longrightarrow$ izhod je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (g * u)(t)$.

Izrek 1.4.1. Odziv na poljuben vhod $u(t)$ je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

Zgled.
Imamo relaksiran sistem $y^{''}(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u^{'}(t) + u(t)$
$\implies g(s) = \frac{4s+1}{s^2+3s+2}$.
Z razvojem v parcialne ulomke lahko dobimo impulzni in stolpični odziv.

a) Impulzni odziv
 $h(t) = Ł^{-1}(g(s))(t)$
 $g(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{7}{s+2}$
 $A_1 = g(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{4s+1}{s+2}|_{s=-1} = -3$
 $A_2 = g(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{4s+1}{s+1}|_{s=-2} = 7$
 $impliesh(t) = (-3e^{-t} + 7e^{-2t})\, u_s(t);$
 $u_s(t)$, ker je odziv vedno za $t \geq 0$.

b) Stopnični odziv
 $y_s(t) = Ł^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
 $\frac{g(s)}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{s}{s+2} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2}$
 $\implies y_s(t) = \left(\frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right) u_s(t);$
 $\frac{1}{2}$: stacionarni odziv,
 $3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$: prehodni odziv.
 $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t),$
 $y_s^{'}(t) = h(t).$