# Numerične metode za linearne sisteme upravljanja - zapiski s predavanj prof. Plestenjaka

Tomaž Poljanšek

študijsko leto 2023/24

# Poglavje 1

# Klasična teorija

## 1.1 Sistemi upravljanja

Imamo dinamični sistem, sestavljen iz več komponent.
Stanje sistema opisujejo notranje spremenljivke, nanj vplivamo (upravljamo, vodimo) z vhodom $u(t)$, opazujemo pa lahko izhod $y(t)$.
Vhodno-izhodna oblika.
$t$ : čas,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$,
$x(t) \in \mathbb{R}^n$,
$n >> m, r$.
Upravljanje običajno poteka preko krmilnika (regulatorja).
Sisteme ločimo na

a) odprtozančne in

b) zaprtozančne.

Pri odprtozančnih sistemih krnilnik ni povezan z izhodom (stanjem) sistema.
Npr.

- ročna klimatska naprava,
- stari parni stroji,
- glasbene skrinjice,
- svetilnik.

Pri zaprtozančnih sistemih imamo še povratno zvezo s stanjem ali izhodom sistema.
Zgledi:

- avtomatska klimatska naprava,
- tempomat,
- avtopilot,
- kotliček za izplakovanje,
- Wattov regulator parnega stroja.

Manj pretoka $\implies$ počasneje, več pretoka $\implies$ hitreje.

## 1.2 Lastnosti sistemov

Splošni dinamični sistem lahko predstavimo s pomočno preslikave iz vhodnih funkcij v izhodne funkcije.
Vpeljimo naslednje oznake:
$T$: časovni prostor, urejena podmnožica $\mathbb{R}$,
$U$: vhodni prostor, množica vseh možnih stanj vhoda, $\subset \mathbb{R}^m$,
$\Omega \subset \{u : T \to U\}$: prostor vseh možnih vhodnih funkcij,
$X$: prostor stanj, množica vseh možnih stanj sistema, $\subset \mathbb{R}^n$.
Če ima sistem izhod, imamo še
$Y$: izhodni prostor, množica vseh možnih stanj izhoda, $\subset \mathbb{R}^r$,
$\Gamma \subset \{y : T \to Y\}$: prostor vseh izhodnih funkcij.
$\Omega$ mora biti neprazen in za $t_1 < t_2 < t_3$ iz $T$ in poljubni $u_1, u_2 \in \Omega$ mora

obstajati $u_3 \in \Omega$:

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{za } t_1 \leq t \leq t_2 \\ u_2(t), & \text{za } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Naš sistem opisuje preslikavo stanja
$\phi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, kjer je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u)$ stanje sistema $x(t_1)$ v času $t_1 \in T$, ki nastane iz začetnega stanja $x_0 \in X$ v času $t_0 \in T$ pod vplivom vhodne funkcije $u \in \Omega$.
$\phi$ mora biti dobro definirana za $t_1 \geq t_0$, ne pa tudi za $t_1 < t_0$.
Za $\phi$ mora veljati:

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 \quad \forall t_0 \in T, \forall x_0 \in x, \forall u \in \Omega$,

b) lastnost podgrupe: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in T : \ \phi(t_2, t_0, x_0, u) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u)$.

Če ima sistem izhod, obstaja še preslikava
$\psi : T \times X \times U \to Y$, da je
$y(t) = \psi(t, x(t), u(t))$ stanje izhoda v času $t$.
$\to$ izhod je odvisen samo od trenutnega stanja sistema in vhoda v času $t$ in časa $t$.

**Definicija 1.2.1.** Sistem je vzorčen, če je za poljuben $t_1 \in T$ velja:
Če za $u_1, u_2 \in \Omega$ velja $u_1(t) = u_2(t)$ za $\forall t \leq t_1$, potem je
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$ za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X$.

Vzročnost pomeni, da je stanje sistema odvisno samo od prejšnjih ali sedanjih vrednosti vhoda.

**Definicija 1.2.2.** Naj bosta $\Omega$ in $X$ vektorska prostora. Sistem je linearen, če je za $\forall t_0 \leq t_1 \in T$ funkcija $\phi(t_1, t_0, ., .)$ linearna.

$$\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2)$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u_2 \end{bmatrix}$$

za $\forall x_1, x_2 \in X, \forall u_1, u_2 \in \Omega$, skalarja $\alpha_1, \alpha_2$.
Če ima sistem izhod, mora biti $y$ vektorski prostor in $\psi(t, ., .)$ linearna za $\forall t \in T$.

Če je sistem linearen, iz

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ u \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1, t_0, x_0, 0) + \phi(t_1, t_0, 0, u);$$

$\phi(t_1, t_0, x_0, 0)$: odziv na ničelni vhod (zero input response),
$\phi(t_1, t_0, 0, u)$: odziv z ničelnim stanjem (zero state response).

**Lema 1.2.3.** Če je sistem linearen, je vzorčnost ekvivalentna pravilu začetnega mirovanje (p.z.m.).

Če za $u \in \Omega$ velja $u(t) = 0\ \forall t \leq t_1$, potem je $\phi(t_1, t_0, 0, u) = 0\ \forall t_0 \leq t_1$.

**Dokaz 1.2.4.**
$(\Rightarrow)$ :
Denimo, da sistem ne zadošča p.z.m.
Torej $\exists \tilde{u} \in \Omega$, $\tilde{u} = 0$ za $t \leq t_1$ in za nek $t_0 \leq t_1$ je $\phi(t_1, t_0 0, \tilde{u}) \neq 0$.
Potem za poljubne $u$ in $x_0$ velja
$\phi(t_1, t_0, x_0, u + \tilde{u}) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u)$, toda $u + \tilde{u}$ in $u$ se ujemata na $t \leq t_1$.
$\implies$ sistem ni vzročen.
$(\Leftarrow)$:
Če sistem ni vzročen, $\exists u_1$ in $u_2$, ki se ujemata na $t \leq t_1$ in
$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) \neq \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$.
$\implies$ če vzamemo $\tilde{u} = u_1 - u_2$, je $\tilde{u} = 0$ na $t \leq t_1$ in $\phi(t_1, t_0, 0, \tilde{u}) \neq 0$.

**Lema 1.2.5.** Če je sistem linearen, je $\phi(t_1, t_0, 0, 0) = 0$.

**Dokaz 1.2.6.** $\phi(t_1, t_0, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha\phi(t_1, t_0, x_0, u)$, vstavimo $\alpha = 0$.

Za $\sigma \in T$ definiramo operator premika: $u \to u^\sigma$, kjer je $u^\sigma(t) = u(t - \sigma)$.
Velja naj, da je $T$ aditivna grupa in $\Omega$ zaprta za operator premika za $\forall \sigma \in T$.

**Definicija 1.2.7.** Pravimo, da je sistem časovno nespremenljiv (time invariant), če za $\forall t_0 \leq t_1 \in T, \forall x_0 \in X, \forall u \in \Omega, \forall \sigma \in T$:

$$x(t_1) := \phi(t_1, t_0, x_0, u) = \phi(t_1 + \sigma, t_0 + \sigma, x_0, u^\sigma) =: x^\sigma(t_1).$$

Če ima izhod, mora biti $\phi$ neodvisna od $t$.

*Zgled.*

| | vzorčen | linearen | časovno invariant 
en |
|---|---|---|---|
| $x(t) = u^2(t-1)$ | ja | ne | ja |
| $x(t) = u(-t)$ | ne | ja | ne |
| $x(t) = 3^{-t}u(t-1)$ | ja | ja | ne |

Mi se bomo ukvarjali z vzorčnimi LTI (linearen + časovno invarianten) sistemi. Ukvarjali se bomo z naslednjimi oblikami vzorčnih LTI sistemov.

a Zvezni sistemi: $T = \mathbb{R}$.

a1) Klasična vhodno-izhodna oblika.
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
začetni pogoji pri $t_0$.

a2) Predstavitev v prostoru stanj.
$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, t \geq t_0$
$x^{\cdot}(t) \in \mathbb{R}^n$: vektor stanja sistema,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vektor izhoda,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$: izhod,
$m, r << n$.
$A : n \times n$ matrika stanje,
$B : n \times m$: vhodna matrika,
$C : r \times n$: izhodna matrika,
$D : r \times m$: matrika diskretnega prehoda.

b Diskretni sistemi: $T = \{\delta t \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$;
$\delta t$: interval vzorčenja.

$u_k = u(k \cdot \delta t)$: iz diferencialnih enačb dobimo diferenčne enačbe

b1) $y_{j+n} + k_1 y_{j+n-1} + \cdots + k_n y_j = \beta_0 u_{j+m} + \cdots + \beta_m u_j$, $j = 0, 1 \ldots$
+ začetne vrednosti.

b2) $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
$y_k = Cx_k + Du_k$.

*Zgled.*
$x^{'}(t) = ax(t) + u(t)$,
$x(t_0) = x_0, a \in \mathbb{R}$
$\implies x(t) = e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} u(s) ds = \phi(t, t_0, x_0, u)$.
Preverimo lahko

a) lastnost identitete: $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0 + 0 = x_0$,

b) lastnost polgrupe:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u) \\
&= e^{a(t_2-t_1)} \cdot e^{a(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)} u(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t_2-s)} u(s) ds \\
&= \phi(t_2, t_0, x_0, u).
\end{aligned}$$

Podobno preverimo linearnost:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \\
&= e^{a(t_1-t_0)}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \int_{t_0}^{t_1} e^{a(t_1-s)}(\alpha_1 u_1(s) + \alpha_2 u_2(s)) ds \\
&= \alpha_1 \phi(t_1, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \phi(t_1, t_0, x_2, u_2).
\end{aligned}$$

Vzročnost = p.z.m. (pogoj začetnega mirovanja)
$\phi(t_0, t_0, 0, 0) = 0$.
Časovna nespremenljivost

$$\begin{aligned}
&\phi(t_1 + \sigma, t_2 + \sigma, x_0, u^{\sigma}) \\
&= e^{a(t_1+\sigma-(t_0+\sigma))} x_0 + \int_{t_0+\sigma}^{t_1+\sigma} e^{a(t_1+\sigma-s)} u(s - \sigma) ds.
\end{aligned}$$

Substitucija $\tilde{s} = s - u$.

## 1.3 Laplaceova transformacija

**Definicija 1.3.1.** Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Laplaceova transformacija preslika $f$ v $F = Ł(f)$, ki je definirana za $s \in \mathbb{C}$ z

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

za vse tiste $s$, kjer integral obstaja.

Pišemo: $Ł(f(t))(s) = F(s)$ oz. $F = Ł(f)$.
$t$: običajno čas,
$f$ original, $Ł(f)$ Laplaceova transformiranka.
Ł preslika funkcijo iz časovnega prostora spremenljivke $t$ v funkcijo $F$ v frekvenčnem prostoru spremenljivke $s$.

**Izrek 1.3.2.** Če je $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna in je $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t}dt < \infty$, potem Laplaceova transformacija $f$ obstaja za vse $s$, kjer je $Re(s) \geq \sigma_0$.

**Dokaz 1.3.3.** Naj bo $Re(s) \geq \sigma_0$. Potem je

$$\begin{aligned}
|f(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \right| \\
&\leq \int_0^\infty |f(t)| \left| e^{-st} \right| dt \\
&\leq \int_0^\infty |f(t)| \left| e^{-\sigma_0 t} \right| dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Konvergenčna abscisa: tak $\alpha \in \mathbb{R}$ (če obstaja), da $Ł(f)$ obstaja za vsak $s$ z $Re(s) \geq \alpha$ in ne obstaja za $Re(s) < \alpha$.
Laplaceova transformacija odvoda:

$$\begin{aligned}
Ł\left(f'(t)\right)(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\
&\overset{\text{per partes}}{=\!=} f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= -f(0_-) + sf(s).
\end{aligned}$$

Tukaj predpostavimo, da je $f$ eksponentnega tipa, kar pomeni, da je $|f(t)| \leq M \cdot e^{ct}$ za konstanti $M, c \in \mathbb{R}$.
$Ł\left(f'(t)\right)(s) = sŁ(f(t))(s) - f(0_-)$.
Za naše potrebe potrebujemo malce spremenjeno Laplaceovo transformacijo Ł, kjer je

$$Ł(f(t))(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

To potrebujemo zaradi posebnih funkcij, ena izmed njih je t.j. enotski impult $\delta(t)$, definiran z $\delta(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$ in $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$.
$\delta$: Diracova delta funkcija.
$\delta(t)$ si lahko predstavljamo kot limito ustreznih funkcij, npr.

a) $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{za } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$ - odsekoma zvezna,

b) $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\varepsilon}}$ - neskončnokrat zvezno odvedljiva.

Za $Ł(\delta)$ potem dobimo

$$\begin{aligned} Ł(\delta(t))(s) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{\infty}\delta_\varepsilon(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon s}\left(e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}\right) \\ &= \left(e^s\right)'(0) = 1. \end{aligned}$$

$Ł(\delta(t))(s) = 0$ za $\forall t \neq 0$.
Druga posebna funkcija je enotska stopnica - $u_s(t) = \begin{cases} 1: & t \geq 0 \\ 0: & t < 0 \end{cases}$, $s$: „step“.
$Ł(u_s(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} = \frac{1}{s}$.
V dinamičnih sistemih lahko pišemo, da je $\delta(t) = u_s'(t)$. Argumenti so

a) $u_s'(t) = 0$ za $\forall t \neq 0$,

b) $1 = Ł(\delta(t))(s) = s \cdot Ł(u_s(t))(s) - u_s(0_-) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$ ✓

Podobno velja za višje odvode
Ł $\left(\delta^{(k)}(t)\right)(s) = s^k$ (a) ni najbolj ustrezna).
Funkcija $f$ je lahko oblike $f(t) = f_r(t) + f_{sing}(t)$;
$f_r(t)$ je regularni del, to je kosoma zvezno odvedljiva funkcija, kjer je točk nezveznosti na vsakem končnem intervalu končno mnogo, v vseh točkah obstajajo $\lim_{t\to t_u^-} f^{(j)}(t)$ in $\lim_{t\to t_u^+} f^{(j)}(t)$,
$f_{sing}(t)$ je oblike $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j_k=0}^{n_k} \alpha_{jk}\delta j_k(t-t_k)$.
Glavne lastnosti:

1. linearnost: $Ł(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$, to velja za $s \in \mathbb{C}$, kjer sta definirani hkrati $F_1$ in $F_2$,

2. transformiranka odvoda:

$$\begin{aligned}
&Ł(f^{'}(t))(s) = sF(s) - f^{'}(0_-)\\
&Ł(f^{''}(t))(s) = sŁ(f^{'}(t))(s) - f^{'}(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f^{'}(0_-)\\
&Ł(f^{(n)}(t))(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f^{'}(0_-) + \cdots + f^{(n-1)}(0_-),
\end{aligned}$$

3. transformiranka integrala: $Ł\left(\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$,

4. časovni premik: $Ł(f(t-t_0)u_s(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}F(s)$;
$u_s(t-t_0)$: na ta način odrežemo vse vrednosti pred $t_0$,

5. frekvenčni premik: $Ł(f(t)e^{\alpha t})(s) = F(s-\alpha)$,

6. izrek o začetni vrednosti: $\lim_{s\to\infty} F(s) = f(0_+)$,

7. izrek o končni vrednosti: $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$;
to velja, če je $sF(s)$ analitična na $\{s : Re(s) \geq 0\} \iff F$ nima polov s pozitivnim realnim delom, pri $s = 0$ pa ima največ pol stopnje 1,

8. inverzna transformacija: $f(t) = Ł^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{-st}ds$, kjer je $\sigma$ večji od vseh realnih delov $F$,

9. če je $f_1(t) = f_2(t) = 0$ za $t < 0$, potem je konvolucija $f_1$ in $f_2$ definirana z

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau.$$

Velja: $Ł((f_1 * f_2)(t))(s) = F_1(s)F_2(s)$;
Laplaceova transformacija konvolucije funkcij je produkt Laplaceovih transformirank.
V drugo smer: $Ł(f_1(t)f_2(t))(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\rho)F_2(s-\rho)d\rho$;
Laplaceova transformacija produkta je konvolucija Laplaceovih transformirank.

*Zgled.* za konvolucijo.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{4}; & 0 \le t \le 4 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{t}{2}; & 1 \le t \le 3 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\implies (f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} 0; & t \le 1 \text{ ali } t \ge 7 \\ g_1(t); & 1 \le t \le 3 \\ g_2(t); & 3 \le t \le 5 \\ g_3(t); & 5 \le t \le 7 \end{cases}$$

Nekaj osnovnih transformacij

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $u_s(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $e^{-at}u_s(t)$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta^k(t)$ | $s^k$ |
| $t^k u_s(t)$ | $\frac{k!}{s^{k+1}}$ |
| $\frac{t^k}{k!}e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |

## 1.4 Prenosna funkcija

Klasična vhodno-izhodna oblika LTI sistema je podana z
$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t)$
+ začetni pogoji.
Pravimo, da je sistem relaksiran, če je:
$y^{(j)}(0_-) = 0$ za $j = 0, 1 \ldots n-1$,
$u^{(l)}(o_-) = 0$ za $l = 0, 1 \ldots m$.
Naj bo $\tilde{y}(s) = Ł(y(t))(s), \tilde{u}(s) = Ł(u(t))(s)$. Tako dobimo

$$\left(s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n\right) \tilde{y}(s) = \left(\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m\right) \tilde{u}(s);$$

$k(s) := s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n$ in
$\beta(s) := \beta_0 s^m + \cdots + \beta_m$ sta karakteristična polinoma.
$Ł\left(y(n)(t)\right)(s) = s^k \tilde{y}(s) - \ldots$
Ostalo $= 0$, ker je sistem relaksiran.
$\tilde{y}(s) = \frac{\beta(s)}{k(s)} \tilde{u}(s) = g(s)\tilde{u}(s)$;
$g(s)$: prenosna funkcija.
Poli $g$ so ničle $k$, označimo jih s $p_1 \ldots p_n$,
ničle $g$ so ničle $\beta$, označimo jih z $z_1 \ldots z_m$
$\Longrightarrow$ dobimo t.i. zpk (ničle-poli-ojačanje) obliko
$g(s) = \beta_0 \frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$.
Posebni primeri izhodov (odzivov) so:

a) če je vhod enotski impulz $\delta(t)$, dobimo impulzni odziv $h(t)$,

b) če je vhod enotska stopnica $u_s(t)$, dobimo stopnični odziv $y_s(t)$.

$Ł(\delta(t))(s) = 1 \Longrightarrow Ł(h(t))(s) = g(s) \Longrightarrow$ Laplaceova transformiranka impulznega odziva je prenosna funkcija.
$h(t) = Ł^{-1}(g(s))(t)$.
Podobno iz $Ł(u_s(t))(s) = \frac{1}{s}$ sledi $y_s(t) = Ł^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
$\Longrightarrow$ izhod je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (g * u)(t)$.

**Izrek 1.4.1.** Odziv na poljuben vhod $u(t)$ je konvolucija impulznega odziva in vhoda $y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

*Zgled.*
Imamo relaksiran sistem $y^{''}(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u^{'}(t) + u(t)$
$\implies g(s) = \frac{4s+1}{s^2+3s+2}$.
Z razvojem v parcialne ulomke lahko dobimo impulzni in stolpični odziv.

a) Impulzni odziv
   $h(t) = Ł^{-1}(g(s))(t)$
   $g(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{7}{s+2}$
   $A_1 = g(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{4s+1}{s+2}|_{s=-1} = -3$
   $A_2 = g(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{4s+1}{s+1}|_{s=-2} = 7$
   $\implies h(t) = (-3e^{-t} + 7e^{-2t})\, u_s(t);$
   $u_s(t)$, ker je odziv vedno za $t \geq 0$.

b) Stopnični odziv
   $y_s(t) = Ł^{-1}\left(\frac{g(s)}{s}\right)(t)$
   $\frac{g(s)}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{s}{s+2} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2}$
   $\implies y_s(t) = \left(\frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right) u_s(t);$
   $\frac{1}{2}$: stacionarni odziv,
   $3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$: prehodni odziv.
   $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$,
   $y_s^{'}(t) = h(t)$.

$$y^{(n)}(t) + k_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_m u(t) \tag{1.1}$$

$Ł(u(t))(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-ts}dt =: \tilde{u}(s)$,
$\tilde{y}(s) := Ł(y(t))(s)$
$\tilde{y}(s) = g(s)\tilde{u}(s)$
$g(s) = \frac{\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m}{s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n}$ prenosna funkcija,
$\delta(t)$: enotski impulz $\implies h(t)$ impulzni odziv,
$u_s(t)$: enotska stopnica $\implies y_s(t)$ stopični odziv
$Ł(\delta(t))(s) \equiv 1 \implies Ł(h(t))(s) = g(s)$
$Ł(u_s(t))(s) = \frac{1}{s}$
$y(t) = (u * h)(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$\delta(t) = u_s^{'}(t)$, na enem primeru smo videli $h(t) = y_s^{'}(t)$.

**Izrek 1.4.2.** Če je $h(t)$ impulzni odziv relaksiranega LTI sistema in $y_s(t)$ njegov stopični odziv, potem je $h(t) = y_s^{'}(t)$.

**Dokaz 1.4.3.**

a) Če uporabimo zvezo s konvolucijo, dobimo

$$\begin{aligned} y_s(t) &= (u_s * h)(t) \\ &= \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(t)d\tau \end{aligned}$$

$\implies y_s^{'}(t) = h(t)$ (oz. tudi z Laplacem).

b) Velja še bolj splošno: če je $y(t)$ izhod za $u(t)$, potem je $y^{'}(t)$ izhod za $u^{'}(t)$.
1.1 lahko zapišemo v obliki
$Ay = Bu$,
kjer sta $A$ in $B$ diferencialna operatorja:
$A = \frac{d^n}{dt^n} + k_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + k_n I_d$,
$B = \beta_0\frac{d^m}{dt^m} + \cdots + \beta_m I_d$.
Ker $A, B$ komutirata z $\frac{d}{dt} \implies \frac{d}{dt}Ay = \frac{d}{dt}Bu$
$A\left(\frac{d}{dt}y\right) = B\left(\frac{d}{dt}u\right)$.

## 1.5 Stabilnost

Če imamo sistem z enim vhodom in enim izhodom, je to SISO (single input-single output) sistem.

**Definicija 1.5.1.** SISO sistem je BIBO (bounded input-bounded output) stabilen, če je sistem tak, da je za vsak omejen vhod tudi izhod omejen.

Če $\exists c_1$, da je $|u(t)| < c_1$ za $\forall t \geq 0$, potem $\exists c_2$, da je $|y(t)| \leq c_2$ za $\forall t \geq 0$.

**Izrek 1.5.2.** SISO sistem je BIBO stabilen $\iff$ impulzni sistem je absolutno integrabilen: $\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$.

**Dokaz 1.5.3.**
($\Leftarrow$):
Naj bo $|u(t)| < c_1$,

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$
$$\implies |y(t)| \leq c_1 \int_0^t |h(\tau)|d\tau \leq c_1 \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau =: c_2 < \infty.$$

($\Rightarrow$):
Denimo, da $h(t)$ ni absolutno integrabilen, torej za $\forall M > 0$ $\exists T > 0$, da je $\int_0^T |h(\tau)|d\tau \geq M$.
Če za isti $T$ vzamemo za vhod
$u(t) = sign(h(\tau - t))$, je
$y(T) = \int_0^T u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^T |h(t-\tau)|d\tau \geq M$
$\implies$ sistem ni BIBO stabilen.

V primeru standardne vhodno-izhodne oblike, kjer ima premosna funkcija obliko racionalne funkcije, je stabilnost odvisna od polov sistema.

a) Za vse pole $p_1 \ldots p_n$ velja $Re(p_i) < 0 \implies$ sistem je BIBO stabilen $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.

b) Za vse pole velja $Re(p_i) \leq 0$ in vsi poli, kjer je $Re(p_i) = 0$ so enostavni.
Iz enostavnosti polov $p_1 \ldots p_n$ dobimo
$h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t}$.
V primeru polov $p_1 \ldots p_r$ z večkratnostmi $m_1 \ldots m_r, \sum_{j=1}^r m_j = n$ dobimo $h(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i e^{p_i t}$, kjer je $\alpha_i$ polinom stopnje $m_i - 1$
$\implies$ sistem je šibko stabilen, ni BIBO stabilen, je za $h(t)$ omejen.

c) Če obstaja pol z $Re(p_i) > 0$ ali večkraten pol z $Re(p_i) = 0 \implies$ sistem ni stabilen.

*Zgled.*
Splošni sistem 1. reda je
$y'(t) + k_1 y(t) = \beta_0 u(t) \implies g(s) = \frac{\beta_0}{s+k_1}$
$\implies h(t) = \beta_0 e^{-k_1 t}[u_s(t)]$.
Za stabilnost potrebujemo: $k_1 > 0$ za BIBO stabilnost in $k_1 = 0$ za šibko stabilnost.
Stopnični odziv: $y_s(t) = \frac{\beta_0}{k_1}\left(1 - e^{-k_1 t}\right)$.
Splošni sistem 2. reda:
$y''(t) + k_1 y'(t) + k_2 y(t) = \beta_0 u(t); k_1, k_2 \geq 0$.
Tak sistem ustreza npr. situaciji [z vzmetjo].
$my^{\cdot\cdot}(t) + by^{\cdot}(t) + ky(t) = f(t)$;
$b$: koeficient dušenja,
$k$: koeficient vzmeti.
Dušenje je proporcionalno hitrosti $(y^{\cdot}(t))$,
sila vzmeti je proporcionalna raztezku $(y(t))$.
Poli: $s^2 + k_1 s + k_2 = 0 \implies s_{1,2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_1}}{2}$.

a) $k_1^2 > 4k_2$: 2 realna pola, oba sta negativna
   $\implies$ nekritično dušenje.

b) $k_1^2 < 4k_2$: kompleksen par polov $p = \sigma \pm i\omega$
   $\sigma = -\frac{k_1}{2}, \omega = \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}$
   $\implies$ podkritično dušenje.

c) $k_1^2 = 4k_2 \implies p_{1,2} = -\frac{k_1}{2}$
   $\implies$ kritično dušenje.

Impulzni odzivi so

a) $\frac{\beta_0}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$

b) $\frac{\beta_0}{\omega_0} e^{\sigma t} \sim (\omega_0 t)$

c) $\frac{\beta_0}{k_2} p^2 + e^{pt}$.

Npr. $k_1 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, k_2 = 1$:

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \to b), 2 \to a), 3, 4 \to c)$.

## 1.6 Bodejev diagram

Imamo relaksiran sistem v vhodno-izhodni obliki:
$\tilde{y}(s) = g(s)\tilde{u}s$,
$g(s) = \frac{\beta_0 s^m + \cdots + \beta_m}{s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_n}$.
Zanima nas odziv na vhod oblike $u(t) = e^{\alpha t}[u_s(t)]$.
Predpostavimo, da $\alpha$ ni pol
$Ł(u(t))(s) = \frac{1}{s-\alpha} \implies y(t) = Ł^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha} g(s)\right)(t)$
$\implies$ v razvoju na parcialne ulomke dobimo poleg členov s poli $g$ še $\frac{A}{s-\alpha}$.
Ker $\alpha$ ni pol prenosne funkcije $\implies$
$A = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{s-\alpha} \cdot g(s)(s-\alpha)\right) = g(\alpha)$
$\implies y(t)$ vsebuje člen $g(\alpha)e^{\alpha t}$.
$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$
$\implies$ če je $u(t) = \cos(\omega t), y(t)$ vsebuje
$\frac{1}{2} g(i\omega)e^{i\omega t} + \frac{1}{2} g(-i\omega)e^{-i\omega t}$;
$g(i\omega) = |g(i\omega)|e^{i\phi}$,
$g(-i\omega) = \overline{g(i\omega)}$
$\implies y(t)$ vsebuje

$$\frac{1}{2}|g(i\omega)|\left(e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} + e^{-i\phi} \cdot e^{-i\omega t}\right) = |g(i\omega)|cos(\omega t + \phi).$$

$|g(i\omega)|$: ojačanje ali amplitudni odziv,
$\phi = arg(g(i\omega))$: fazni premik.
Ojačanje merimo v decibelih: $|g(i\omega)|_{db} = 20\log_{10}(|g(i\omega)|)$.
Fazni premik merimo v stopinjah od $-180°$ do $180°$.
Bodejev diagram je graf amplitudnega in faznega odziva.
$g(i\omega)$: frekvenčna funkcija.

*Zgled.*
$Z_f\left([3\ 2], [1\ 1+2\alpha\ 4+2\alpha+\alpha^2\ 4+\alpha^2]\right)$
$\implies$ poli so $-1, -\alpha+2i, -\alpha-2i$

$\alpha = 0.1 \dots$
$\alpha = 0.01 \dots$

## 1.7 Routh-Hurtwizov kriterij

Če je $g(s)$ racionalna funkcija, je stabilnost odvisna od položaja polov oz. ničel imenovalca 1.1.

**Definicija 1.7.1.** Za polinom $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}$ pravimo, da je stabilen, če vse njegove ničle ležijo strogo v levi kompleksni podravnini $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.

**Lema 1.7.2.** Če je polinom 1.1 stabilen, potem so vsi koeficienti neničelni in istega predznaka.

**Dokaz 1.7.3.**
$p(x) = a_0(x - \xi_1) \dots (x - \xi_k)$, kjer so $\xi_1 \dots \xi_k$ ničle.
Lahko predpostavimo, da je $a_0 > 0$.

a) $\xi_i \in \mathbb{R} \implies \xi_i = -b_i$ za neki $b_i > 0 \implies \xi_i$ „pripada“ faktor $(x + b_i)$.

b) $\xi_i \notin \mathbb{R} \implies \xi_{i,i+1} = -c_i \pm id_i$ za neki $c_i > 0, d_i \neq 0$
$\implies$ „pripada“ $(x + c_i - id_i)(x + c_i + id_i) = (x^2 + 2c_ix + c_i^2 + d_i^2)$
$\implies$ $p(x)$ je produkt linearnih in kvadratnih faktorjev s pozitivnimi realnimi koeficienti
$\implies$ vsi koeficienti $p$ so neničelni in istega predznaka.

To je potreben, ne pa tudi zadosten pogoj, npr.
$p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 8 = (x + 2)(x^2 - x + 4)$;
$x^2 - x + 4$ ne ustreza pogoju $\implies$ $p$ ni stabilen.
Za polinom 1.1 definiramo Routhovo tabelo

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $a_0$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_6$ | $\dots$ |
| 1 | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_7$ | $\dots$ |
| 2 | $\gamma_{21}$ | $\gamma_{22}$ | $\gamma_{23}$ | $\dots$ | |
| 3 | $\gamma_{31}$ | $\gamma_{32}$ | $\dots$ | | |
| $\vdots$ | | | | | |
| $n$ | $\gamma_n$ | | | | |

Za $k \geq 2 : r_{k,j} = r_{k-2,j+1} - \frac{r_{k-2,1}}{r_{k-1,1}} \cdot r_{k-1,j+1}$.

*Zgled.*
$p(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 4 | |
| 1 | 2 | 6 | 2 | |
| 2 | 3 | 3 | | $[6\ 4] - \frac{1}{2}[6\ 2] = [3\ 3]$ |
| 3 | 4 | 2 | | $[6\ 2] - \frac{2}{3}[3\ 0] = [4\ 2]$ |
| 4 | $\frac{3}{2}$ | | | $3 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ |
| 5 | 2 | | | $2 - \frac{3}{2} \cdot 0$ |

**Izrek 1.7.4** (Routh-Horwitz)**.** Polinom 1.1 je stabilen $\iff$ vsi elementi v 1. stolpcu Routhove tabele so neničelni in istega predznaka.

Routh-Hurwitzov kriterij

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n;\ a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Polinom je stabilen, če vse njegove ničle ležijo v $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \neq 0\}$
$\implies$ vsi koeficienti so neničelni in istega predznaka.
Routhova tabela

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
2 & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \\
3 & r_{31} & r_{32} & & \\
\vdots & & & & \\
n & r_{n1} & & &
\end{array}
$$

$r_{k,j} = r_{k-2,j+1} - \frac{r_{k-2,1}}{r_{k-1,1}} \cdot r_{k-1,j+1}$.

**Izrek 1.7.5.** Polinom 1.2 je stabilen $\iff$ vsi elementi v 1. stoplcu Routhove tabele so neničelni in istega predznaka.

**Lema 1.7.6.** Polinom 1.2 je stabilen $\iff$ $a_0a_1 > 0$ in je polinom $q(x) = p(x) - \frac{a_0}{a_1}(a_1x^n + a_3x^{n-2} + a_5x^{n-4} + \dots)$ stabilen.

**Dokaz 1.7.7.** izreka (ob predpostavkah, da lema velja).
Uporabimo indukcijo:
$n = 1$:

$$a_0 + a_1x = 0 \implies x = -\frac{a_1}{a_0} < 0 \text{ za } a_0a_1 > 0.$$

$n - 1 \to n$:
ključna je ugotovitev, da spodnjih $n$ vrstic Routhove tabele ustreza Routhovi tabeli za polinom $q$ stopnje $n-1$ iz leme.
Res:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} \\
&\quad + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3\right)x^{n-2} + \left(a_4 - \frac{a_0}{a_1}a_5\right)x^{n-4} + \dots
\end{aligned}
$$

1. del: 1. vrstica,
2. del: $[a_2\ a_4 \dots] - \frac{a_0}{a_1}[a_3\ a_5 \dots] \to$ formula.
$p$ je stabilen
$\iff$ $a_0a_1 > 0$ in vsi elementi iz 1. stolpca Routhove tabele za $f$ so neničelni in istega predznaka

$\iff$ $a_0a_1 > 0$ in elementi od 1. do zadnjega iz Routhove tabele so neničelni in istega predznaka
$\iff$ vsi elementi 1. stolpca Routhove tabele so neničelni in istega predznaka.

**Dokaz 1.7.8.** leme.
Predpostavimo lahko $a_1 \neq 0$ (vsi koeficienti so $> 0$ ali $< 0$).
Razdelimo: $p(x) = p_{sod}(x) + p_{lih}(x)$ - sode, lihe potence.
Definiramo

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= p(x) - \lambda \frac{a_0}{a_1}\left(a_1x^n + a_2x^{n-2} + \dots\right) \\ &= \begin{cases} p(x) - \lambda\frac{a_0}{a_1}x \cdot p_{lih}(x); \ n \text{ sod} \\ p(x) - \lambda\frac{a_0}{a_1}x \cdot p_{sod}(x); \ n \text{ lih} \end{cases} \end{aligned}$$

$h_\lambda(x)$ je polinom stopnje $n$ za vsak $\lambda \neq 1$, pri $\lambda = 1$ dobimo $h_\lambda(x) = q(x)$, pri $\lambda = 0$ pa $h_\lambda(x) = p(x)$.
Pokažemo lahko, da ima $h_\lambda$ vedno isto število ničel na imaginarni osi, neodvisno od $\lambda$.
Denimo, da je $n$ sod (za lih primer je dokaz podoben).
$h_\lambda(x) = p_{sod}(x) - \lambda\frac{a_0}{a_1}p_{lih}(x) + p_{lih}(x)$;
$p_{sod}(x) - \lambda\frac{a_0}{a_1}p_{lih}(x)$: sod polinom,
$p_{lih}(x)$: lih polinom. Naj bo $h_\lambda(i\alpha) = 0$ za $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ za nek $\lambda$.
Vemo: $g_\lambda(x) \in \mathbb{R}$ (sod) in $p_{lih}(i\alpha) \in i\mathbb{R}$
$\implies$ iz $h_s(i\alpha) = 0$ sledi $p_{lih}(i\alpha) = 0 i n g_\lambda(i\alpha) = 0$
$\implies$ $p_{sod}(i\alpha) = 0$
$\implies$ za $\forall\lambda$ je $h_\lambda(i\alpha) = 0$.
(Podobno: če je $\alpha$ $k$-kratna ničla $h_\lambda$ za nek $\lambda \implies k$-kratna ničla za vsak $\lambda$.)
Ostane še $h_\lambda(0) = 0$
$\implies$ $p(0) = 0$ in spet $h_\lambda(0) = 0$ za vsak $\lambda$.

Pogledamo situacijo pri $\lambda = 1 - \varepsilon$, ko gre $\varepsilon \to 0$.
$h_{1-\varepsilon}(x) = \varepsilon a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots$
$\implies$ $h_{1-\varepsilon}(x)$ ima ničlo $\chi \approx -\frac{a_1}{\varepsilon a_0} \to \infty$ ko gre $\varepsilon \to 0$.

$x^n h_{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\right) = rev(h_{1-\varepsilon})(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + \varepsilon a_0$.
Ko gre $\varepsilon \to 0$, gre ena ničla proti 0, v bližini pa je $\approx -\frac{\varepsilon a_0}{a_1}$.
Iz $-\infty$, ker $a_0 a_1 > 0$, $q$ stabilen: vsi levo, se ne premakne desno $\implies$ vse ničle $p$ levo.
Ničla „se pojavi".
—
$p_1(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$
$p_n(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$.
Metode zveznega nadaljevanja - homostopske metode. $q_1(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$
$q_n(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$.
$H(\lambda, x) = (1-\lambda)Q(x) + \lambda P(x)$
$H(0, x) = Q(x)$
$H(1, x) = P(x)$.
Rešimo npr. z Newtonovo metodo.

*Zgled.*
$g(s) = s^3 + 4s^2 + ks + 8$.
Za kakšne vrednosti $k$ je sistem stabilen?

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $k$ |
| 1 | 4 | 8 |
| 2 | $k-2$ | |
| 3 | 8 | |

$\implies$ $g$ bo stabilen $\iff$ $k > 2$.

## 1.8 Napaka ustaljenega stanja

Imamo sistem z referenčnim vhodom in povratno zanko.
$r(t)$: referenčni vhod (želena vrednost), npr. hitrost, temperatura,
$y(t)$: izhod (dejanska vrednost),
$e(t) = r(t) - y(t)$: razlika, odstopanje

$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)(R(s) - Y(s)) \implies Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$
$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1+Y(s)}R(s)$.
Napaka ustaljenega stanja (steady-state error) je limita $e(t)$, ko gre $t \to \infty$.

$$e_{ss} := \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+Y(s)};$$

2. enakost velja zaradi izreka o končni vrednosti, če limita obstaja.
Za večino sistemov zadošča, da poznamo napako ustaljenega stanja za

a) enotsko stopnico $r(t) = u_s(t), R(s) = \frac{1}{s} \implies e_{ss1}$

b) enotsko rampo (unit ramp) $r(t) = tu_s(t), R(s) = \frac{1}{s^2} \implies e_{ss2}$

c) enotsko parabolo $r(t) = \frac{1}{2}t^2u_s(t), R(s) = \frac{1}{s^3} \implies e_{ss3}$.

Pravimo, da je sistem tipa $r$, če ima $G(s)$ pol stopnje $r$ pri $s = 0$ (po krajšanju števca in imenovalca). Večina sistemov je tipa 0,1,2. Tip operacij, da $G(s)$ nima pola pri $s = 0$.

a) Enotska stopnica, $R(s) = \frac{1}{s}$
$e_{ss0} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$
$K_p := \lim_{s\to 0} G(s)$: konstanta napake položaja.
Če je sistem tipa 0 $\implies K_p$ je končen, $\implies e_{ss0} = \frac{1}{1+K_p}$,
če je sistem tipa $\geq 1 \implies K_p = \infty, \implies e_{ss0} = 0$.
Tip pomeni število idealnih integratorjev, ki jih vsebuje sistem (šibka vezava).

b) Enotska rampa, $R(s) = \frac{1}{s^2}$
$e_{ss1} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^2}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sG(s)} = \frac{1}{K_v}$
$K_v := \lim_{s\to 0} sG(s)$: konstanta napake hitrosti.
Če je sistem tipa 0 $\implies K_v = 0, \implies e_{ss1} = \infty$,
če je sistem tipa 1 $\implies K_v$ končen, $\implies e_{ss1} = \frac{1}{K_v}$,
če je sistem tipa $\geq 2 \implies K_v = \infty, \implies e_{ss1} = 0$,

c) Enotska parabola, $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$e_{ss2} = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^3}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)} = \frac{1}{K_a}$
$K_a := \lim_{s\to 0} s^2G(s)$: konstanta napake pospeška.
Če je sistem tipa $\leq 1 \implies K_a = 0, \implies e_{ss2} = \infty$,
če je sistem tipa 2 $\implies K_v$ končna, $\implies e_{ss2} = \frac{1}{K_a}$.

| tip | $K_p$ | $K_v$ | $K_a$ | $e_{ss0}$ | $e_{ss1}$ | $e_{ss2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $K_p$ | 0 | 0 | $\frac{1}{1+K_p}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | $\infty$ | $K_v$ | 0 | 0 | $\frac{1}{K_v}$ | $\infty$ |
| 2 | $\infty$ | $\infty$ | $K_a$ | 0 | 0 | $\frac{1}{K_a}$ |

MO: maksimalni prevzpon (maximal overshoot) - najjvečje odstopanje v prehodni fazi,
ST: čas izravnave (setting time) - od kod naprej je napaka $< 5\%$ ($< 2\%$),
RT: čas vzpona (rise time): od 10% do 90%,
DT: čas zakasnitve (delay time): od 0% do 50%.

## 1.9 PID regulator

$e(t) = y(t) - r(t)$.
Regulator na podlagi napake (odstopanja) $e(t)$ pripravi vhod $u(t)$ na sistem s ciljem da gre $e(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.
Prva ideja: dvopoložajno vodenje (on-off control)

$$u(t) \begin{cases} u_{max}: & e(t) \geq 0 \\ u_{min}: & e(t) < 0 \end{cases}$$

Težave:

- oscilacije,
- pogosto vklapljanje in izklapljanje.

Izboljšava: vpeljemo mrtvo cono (dead zone)

$$u(t) \begin{cases} u_{max}: & e(t) > \varepsilon \\ u_{min}: & e(t) < -\varepsilon \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Proporcionalno vodenje:

$$u(t) = K_p \cdot e(t).$$

$K_p$: koeficient proporcionalnega vodenja (proportional gain).
Težava: $e_{ss0} = \frac{1}{1+K_p}$.
Integrirano vodenje:

$$u(t) K_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau,$$
$$C(s) = \frac{K_i}{s}.$$

PI (proporcionalno-integrirno vodenje):
$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$.
Diferencirno vodenje

$$u(t) = K_d \cdot e(t).$$

PID (proporcionalno-integrirno-diferencirno vodenje):
$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{1}{s}\left(K_i + K_p s + K_d s^2\right)$.
PID regulator,
$G(s)$: sistem.

# Poglavje 2

# Predstavitev v prostoru stanj

## 2.1 Uvod

Klasična predstavitev:

- vhodno-izhodni model,
- sistem je določen s prenosno funkcijo,
- pokrije LTI SISO.

Prostor stanj:
$x(t) \in \mathbb{R}^n$: stanje sistema,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: vhod,
$y(t) \in \mathbb{R}^r$: izhod.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2}$$

$m, r \leq n$, lahko tudi $m$,$r << n$.
2.1: enačba sistema,
2.2: izhodna enačba
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matrika sistema,
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: matrika vhoda,

$C \in \mathbb{R}^{r\times n}$: matrika izhoda,

$D \in \mathbb{R}^{r\times m}$: matrika direktnega prehoda.

$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$
integrator.

$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t)$;

$A$: povratna zanka,

$B\cdot$ vhod.

Predstavitev ni enolična. Če je $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nesingularna in naredimo substitucijo $x(t) = S\hat{x}(t)$ oz. $\hat{x}(t) = S^{-1}x(t)$, dobimo

$$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad / \cdot S^{-1}$$
$$S^{-1}x^{\cdot}(t) = S^{-1}AS\hat{x}(t) + S^{-1}Bu(t).$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad / \cdot S^{-1}$$
$$\hat{y}(t) = CS\hat{x}(t) + S^{-1}Du(t).$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

$\implies$ substitucija $x(t) = S\hat{x}(t)$

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1}AS & S^{-1}B \\ \hline CS & D \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} S^{-1} & \\ \hline & I_r \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} S & \\ \hline & I_m \end{array}\right]$$

$\hat{x}^{\cdot}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$
$\hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$.

## 2.2 Odziv sistema

Naj bo $u(t) \equiv 0$ (nevsiljen signal).

$x^{\cdot}(t) = Ax(t), t \geq t_0, x(t_0) = x_0$

$\implies x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$

$\implies y_{zi} = C \cdot e^{A(t-t_0)}x_0$ odziv na ničelni vhod (zero-input response).

$y_{zi}$: zero input.

$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ eksponentna matrična funkcija, konvergira za vsako matriko, $\left\|e^{At}\right\| \leq e^{\|At\|}$.

Matlab:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$exp(A) = \begin{bmatrix} e^{a_{11}} & e^{a_{12}} \\ e^{a_{21}} & e^{a_{22}} \end{bmatrix} \neq e^A = exmp(A)$.

Osnovne lastnosti matrične eksponentne funkcije:

1) $e^{At} \cdot e^{As} = e^{A(t+s)}, \qquad e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$ (enakost, če komutirata),

2) $e^{At}$ je vedno nesingularna (eksponenti lastnih vrednosti?),

3) $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$,

4) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At} = e^{At}A$.

**Izrek 2.2.1.** Rešitev sistema $x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geq t_0, x(t_0) = x_0$ je $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$.

**Dokaz 2.2.2.** Odvajamo in preverimo, da ustreza

$x^{\cdot}(t) = Ae^{A(t-t_0)}x_0 + A\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$\implies$

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t); \end{aligned}$$

$y_{zs}(s)$: odziv na ničelno začetno stanje - zero state response.

$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \geq t_0, x(t_0) = x_0$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$m = 1 : B = b \in \mathbb{R}^n$

$r = 1 : C = c^T \in \mathbb{R}^n$

$m = 1$ in $r = 1$: SISO

$m > 1$ in $r > 1$: MIMO

$t_0 = 0$

$\xRightarrow{\text{Laplaceova transformacija}}$

$$\begin{aligned}
s\hat{x}(s) - x(0) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\
(sI - A)\hat{x}(s) &= B\hat{u}(s) + x_0 \\
\Longrightarrow \hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}(B\hat{u}(s) + x_0) \\
\hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \\
\Longrightarrow \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) + C(sI - A)^{-1}x_0 + D\hat{u}(s)
\end{aligned}$$

$G(s) := \hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ prenosna funkcija (matrika $r \times m$, elementi so racionalne funkcije $s$).

Če gledamo rešitev pri $x_0 = 0$ ($y_{zs}$)

$\widehat{y_{zs}}(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) + D\hat{u}(s)$

$\hat{f}_1(s) = C(sI - A)^{-1} \implies f_1(t) = Ce^{At}$

$\hat{f}_2(s) = B\hat{u}(s) \implies f_2(t) = Bu(t)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad y_{zs}(t) &= (f_1 f_2)(t) + Du(t) = \\
&= \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau + Du(t) \\
&= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t).
\end{aligned}$$

**Lema 2.2.3.** Prenosna funkcija $G(s)$ je neodvisna od izbire baze v prostoru stanj.

**Dokaz 2.2.4.**

$x(t) = S\hat{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \overset{\text{substitucija}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1}AS & S^{-1}B \\ CS & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\ &= CS(sI - S^{-1}AS)^{-1}S^{-1}BD \\ &= CS \cdot S^{-1}(sI - A)^{-1}S \cdot S^{-1}B + D \\ &= G(s). \end{aligned}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & & \\ g_{r1}(s) & \dots & g_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

$g_{ij}$ : prenosna funkcija, ki opisuje kako $j$-ti vhod deluje na $i$-ti izhod.

$i = 1 \dots r,\ j = 1 \dots m$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$: prenosna funkcija sistema.

*Zgled.*

Imamo sistem

$x^{\cdot}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) - SISO$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \qquad (D = 0).$

Določi prenosno funkcijo in impulzni odziv.

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

$sI - A = \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ & s+4 \end{bmatrix}$

$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ & s+4 \end{bmatrix}$

$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} 2s+5 \\ s+2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+4} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}.$

Če bi bila $G(s)$ matrika $r \times m$, bi bil impulzni odziv
$h_{13}$: odziv $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = \delta t$ (m=3. r=3).
Matlab: sistem = $ss(A, B, C, D) \to tf$, impulse...
Predstavitev v prostoru stanje se lahko uporablja tudi za

a) časovno spremenljive sisteme (linearne)
   $x^{\cdot}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
   $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),$
   matrike $A, B, C, D$ so funkcije $t$,

b) nelinearne sisteme
   $x^{\cdot}(t) = f(t, x(t), u(t))$
   $y(t) = g(t, x(t), u(t)).$

## 2.3 Predstavitev klasičnih sistemov

Denimo, da imamo sistem podan v obliki vhodno izhodne enačbe
$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = \beta_0u(t) + \beta_1u^{'}(t) + \cdots + \beta_nu^{(n)}(t).$
Tak sistem lahko zapišemo iz prostora stanj z ustrezno izbiro spremenljivk stanja
$= u(t).$

1) Predpostavimo, da je na desni strani $\beta_0 = 1$ in $\beta_i = 0$ za $i \geq 1$.
   $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = u(t).$
   Imamo diferencialno enačbo reda $n$, ki jo lahko prevedemo na sistem diferencialnih enačb 1. reda.
   Za spremenljivke stanja vzamemo $y, y^{'} \ldots y^{(n-1)}$
   $x_1 = y \qquad x_1^{\cdot} = x_2$
   $x_2 = y^{'} \qquad x_2^{\cdot} = x_3$
   $\vdots$
   $x_n = y^{(n-1)} \qquad x_n^{\cdot} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u.$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$b = e_n \qquad B = b$

$D = 0$

$c = e_1 \qquad C = c^T.$

2) Obravnavamo primer, kjer je na desni strani
$\beta_0 u(t) + \beta_1 u'(t) + \cdots + \beta_n u^{(n)}(t)$
(vedno je $m \leq n$, zato pišemo koeficiente $\beta_i$ do vključno $i = n$).
V točki 1) smo imeli problem z $\beta(s) = 1$.
Ekvivalentno:
Prvi del:
rešujemo po postopku iz 1):

$x_1 = w \qquad \dot{x_1} = x_2$

$x_2 = w' \qquad \dot{x_2} = x_3$

$\vdots$

$x_n = w^{(n-1)} \qquad \dot{x_n} = u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n.$

Drugi del:

$$y = \begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \beta_n \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n u.$$

$A, b$ ista kot pri 1),

$c = \begin{bmatrix}\beta_0 - \beta_n a_0 & \beta_1 - \beta_n a_1 & \dots & \beta_{n-1} - \beta_n a_{n-1}\end{bmatrix}$,

$D = \beta_n$.

(v večini primerov je $m < n \implies \beta_n = 0$).

Vodljivostna kanonična oblika.

3) Uporabimo integriranje

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_0 u + b_1 u' + \dots + b_n u^{(n)}$ + relaksiran sistem.

Preuredimo tako, da odvode istega reda zložimo skupaj:

$y(n) = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} - a_{n-1}y^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} - a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots +$ $b_0 u - a_0 y$ $\quad \int\int\cdots\int$ $n$-krat integriramo

$\implies y = b_n + \int (b_{n-1}u - a_{n-1}y + \int (b_{n-2}u - a_{n-2}y + \cdots \int(b_0 u - a_0 y)dt_1))\, dt_n;$

$x_1 = \int (b_{n-1}u - a_{n-1}y + \int (b_{n-2}u - a_{n-2}y + \cdots \int(b_0 u - a_0 y)dt_1))\, dt_n,$

$x_2 = \int (b_{n-2}u - a_{n-2}y + \cdots \int(b_0 u - a_0 y)dt_1)\, dt_{n-1},$

$x_n = \int(b_0 u - a_0 y)dt_1$

$y = b_1 u + x_1$

$\dot{x_1} = b_{n-1}u - a_{n-1}y + x_2 \implies \dot{x_1} = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})u - a_{n-1}x_1 + x_2$

$\dot{x_2} = b_{n-2}u - a_{n-2}y + x_3 \implies \dot{x_2} = (b_{n-2} - b_n a_{n-2})u - a_{n-2}x_2 + x_3$

$\vdots$

$\dot{x_n} = b_0 u - a_0 y \implies \dot{x_n} = (b_n - b_0 a_0)u - a_0 x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & & & \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & & \\ -a_{n-3} & & & 1 & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - b_n a_{n-1} \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 - b_0 a_0 \end{bmatrix} u.$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$$

Spoznavnostna kanonična oblika.

## 2.4 Numerične metode za $e^{At}$

$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ vedno konvergira,

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, t \geq 0$ (za naše potrebe).

Osnovne lastnosti:

1) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$
2) $det\left(e^{At}\right) \neq 0$
3) $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$
4) $detP \neq 0 \implies e^{PAP^{-1}t} = Pe^{At}P^{-1}$
5) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At} = e^{At}A$
6) $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \iff A, B$ komutirata

   ($\Leftarrow$): očitno

   ($\Rightarrow$): razvoj se mora ujemati pri vseh potencah $t$.

   Pri $t^2$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{(A+B)^2}{2} &= \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} \\ \frac{A^2 + AB + BA + B^2}{2} &= \\ &\iff AB = BA. \end{aligned}$$

Večina metod bo uporabnih tudi za izračun $f(A)$, kjer je $f$ splošna funkcija, definirana v lastnih vrednostih $A$ plus ustrezno število odvodov in veljati mora

1) $Af(A) = f(A)A$

2) $detP \neq 0 \implies f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}$.

### 2.4.1 Občutljivost

Zanima nas, kako se lahko $e^{(A+E)t}$ razlikuje od $e^{At}$ za majhen $t$.
$\frac{||e^{(A+E)t}-e^{At}||}{||e^{At}||} \leq ? \frac{||E||}{||A||}$;
Leva stran: $\phi(A, E, t)$, ?: $\mu(A, t)(m?) :=$ občutljivost.
$\mu(A, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{||E||<\varepsilon} \frac{||e^{(A+E)t}-e^{At}||\cdot||A||}{||e^{At}||\varepsilon}$.

a) $AE = EA$
$\implies e^{(A+E)t} - e^{At} = e^{At}(e^{Et} - I) = e^{At}Et \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Et)^k}{(k+1)!}$
$\implies \phi(A, E, t) \leq ||E||t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||E||^k t^k}{(k+1)!} \leq ||E|| \cdot te^{||E||t}$
$\implies \mu(A, t) = ||A||t$

b) $AE \neq EA$
$e^{At}$ je rešitev $x^{\cdot}(t) = Ax(t)$, $x(0) = I$,
$e^{(A+E)t}$ je rešitev $y^{\cdot}(t) = (A + E)y(t)$, $y(0) = I$.
Naj bo $z(t) = y(t) - x(t)$. Velja
$z^{\cdot}(t) = Az(t) + Ey(t), z(0) = 0$ - enačba stanja.
Uporabimo formulo za rešitev enačbe stanja sistema in dobimo

$$z(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} E^{(A+E)s} ds \overset{\text{Če je}||E||<1}{=\!=\!=} \int_0^t e^{A(t-s)} Ee^{As} ds + O\left(||E||^2\right)$$

$\implies \mu(A, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{||E||<\varepsilon} \frac{||\int_0^t e^{A(t-s)}Ee^{As}ds||\cdot||A||}{||e^{At}||\varepsilon} = \max_{||E||=1} \frac{||\int_0^t e^{A(t-s)}Ee^{As}ds||\cdot||A||}{||e^{At}||}$.
Če vzamemo $E = 1$
$\implies \mu(A, t) \geq \frac{||\int_0^t e^{At}ds||\cdot||A||}{||e^{At}||} = ||A|| \cdot t$.
Izkaže se: če je matrika $A$ normalna: $AA^T = A^T A$, je $\mu(A, t) = ||A|| \cdot t$,
sicer pa lahko dobimo polinom $t$.

### 2.4.2 Ocene za $e^{At}$

a) Iz Taylorjeve vrste sledi $||e^{At}|| \leq e^{||A||t}$ (za $t \geq 0$).
Ocena je praktična, če je $\alpha(A) = \max(Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)) < 0$,
$\rightarrow$ sprektralna abscisa
saj je potem $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{||A||t}$ pa je $\infty$.

b) Dahlquistova ocena $||e^{At}|| \leq e^{u(A)t}$;
$u(A) = \max\{u : u \in \sigma\left(\frac{1}{2}(A^T + A)\right)\}$.
Običajno boljša od a), ampak še vedno je možno, da je $\mu(A) > 0$, čeprav je $\alpha(A) < 0$.

c) Uporabimo Jordanovo formo: to je tudi metoda za izračun $e^{At}$ (deluje tudi za splošno $f(A)$).

$$A = XJX^{-1}, J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} n_i \times n_i,\ \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

$$e^{J_i \cdot t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ e^{At} = Xe^{Jt}X^{-1} = X \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_k t} \end{bmatrix} X^{-1}.$$

Uporabimo oceno $||A||_2 \leq n \cdot N_\infty(A)$;
$N_\infty(A) = \max_{i,j} |A_{ij}|$.
Dobimo oceno $||e^{At}|| \leq ||X|| \cdot ||X^{-1}|| \cdot e^{\alpha(A)t} \max_{1 \leq j \leq n_{max}-1} \left(\frac{t^j}{j!}\right)$;
$||X|| \cdot ||X^{-1}||$ je lahko zelo veliko.

d) Schurova forma: $A = URU^H$, $U$ unitarna, $R$ zgornja trikotna.
$R = D + N$;
$D = diag(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n), N$ nilpotentna: $N^n = 0$
$\Longrightarrow\ e^{\alpha(A)t} \leq ||e^{At}||_2 \leq e^{\alpha(A)t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{||Nt||_2^k}{k!}$;

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{||Nt||_2^k}{k!}$ - odstopanje od normalnosti.
Če je $\alpha(A) < 0$ : $e^{\alpha(A)t}$ pada eksponentno, $\sum\dots$ narašča polinomsko.
Prehodno obdobje, grba.

*Zgled.*
$A = \begin{bmatrix} -1 & M \\ & -1 \end{bmatrix} \implies e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & tM \\ & 1 \end{bmatrix}.$

### 2.4.3 Diagonalizacija (tudi za splošno $f(A)$)

$A = XDX^{-1}, D = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
$\implies e^{At} = Xdiag\left(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}\right) X^{-1}.$
Težave:

- ni nujno, da lahko $A$ diagonaliziramo,
- v praksi lahko vedno, a je potem $K_2(x)$ zelo velika.

Ocena: $||f(e^{At}) - e^{At}||_2 \leq n \cdot u \cdot e^{\rho(A)t} K_2(x)$;
$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$: spektralni radij.

*Zgled.*
$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ & \mu \end{bmatrix} \implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & \xi \\ & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \lambda \neq \mu.$
$\xi$ dobimo iz zveze $Ae^{At} = e^{At}A$ :

$$\lambda\xi + \alpha e^{\mu t} = \alpha e^{\lambda t} + \mu\xi$$
$$\implies \xi = \frac{\alpha e^{\lambda t} - \alpha e^{\mu t}}{\lambda - \mu} \xrightarrow{\mu \to \lambda} \alpha \cdot te^{\lambda t}.$$

### 2.4.4 Schur-Parlettova metoda

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies A = QRQ^T$;
$Q$ ortogonalna, $R$ kvazi zgornja trikotna.
(Možni so $2 \times 2$ diagonalni bloki v primeru kompleksnih lastnih vrednosti).
Za začetek predpostavimo, da je $R$ zgornja trikotna in so vsi diagonalni elementi paroma različni.

$f(A) = Qf(R)Q^T, f(R)$ je tudi zgornja trikotna, diagonalni elementi so $f(r_{11}) \dots f(r_{nn})$.

$$f(e^{At}) = Qe^{Rt}Q^T, e^{Rt} = \begin{bmatrix} e^{r_{11}t} & \dots & & \\ & e^{r_{22}t} & \dots & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & e^{r_{nn}t} \end{bmatrix}.$$

Upoštevamo, da velja $Rf(R) = f(R)R$ in tako izračunamo ostale elemente $f(R)$ po diagonalah.

$S = f(R)$

$RS = SR$

$i < j$:

$\sum_{k=i}^{j} r_{ik}s_{kj} = \sum_{k=i}^{j} s_{ik}r_{kj}$

$\implies s_{ij} = \frac{1}{r_{ii}-r_{ij}}\left(\sum_{k=i}^{j-1} s_{ik}r_{kj} - \sum_{k=i+1}^{j} r_{ik}s_{kj}\right)$.

Algoritem.

$i = 1 \dots n$

$s_{ii} = f(r_{ii})$

$p = 1 \dots n-1$

$i = 1 \dots n-p$

$j = i + p$

$s_{ij} = \frac{1}{r_{ii}-r_{ij}}(\sum - \sum)$:

$\frac{2}{3}n^3$ operacij + Schurova forma,

$\frac{2}{3}n^3$ za izračun $f(R)$.

Če ima matrika kompleksne ali večkratne (bližnje) lastne vrednosti, uporabimo bločno obliko algoritma.

$R, S = R$ $m \times m$ bločna matrika, enako $S$.

$i = 1 \dots m$

$s_{ii} = f(r_{ii})$

$p = 1 \ldots m-1$

$i = 1 \ldots m-p$

$j = i+p$

izračunamo $s_{ij}$ iz enačbe

$R_{ii}S_{ij} - S_{ij}R_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} S_{ik}R_{kj} - \sum_{k=i+1}^{j} R_{ik}S_{kj}$: Sylvesterjeva matrična enačba.

$AX - XB = C$;
$A, B$ kvadratni, $C, X$ ustreznih dimenzij.
Rešljivo $\iff$ $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ ($A$ in $B$ nimata skupne lastne vrednosti).

### 2.4.5 Taylorjeva vrsta

$e^{At}$ aproksimiramo z $T_k(At) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(At)^j}{j!}$.
Npr. seštevamo, dokler ni razlika med $T_k(At)$ in $T_{k+1}(At)$ dovolj majhna:

- počasna konvergenca,
- lahko velike napake kadar imamo veliko grbov.

$e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$.

### 2.4.6 Padejeva aproksimacija

**Definicija 2.4.1.** Za dano $f \in C^{p+q+1}$ v okolici 0 ima Padejeva aproksimacija $(p,q)$ obliko $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_px^p}{1+b_1x+\cdots+b_qx^q}$, kjer velja
$r(0) = f(0), r'(0) = f'(0) \ldots r^{p+q}(0) = f^{(p+q)}(0)$.

Pade($p$,0) je Taylorjev poliniom stopnje $p$.
Če bi $r(x)$ razvili v Taylorjevo vrsto, je $f(x) - r(x) = O\left(x^{p+q-1}\right)$ (vsi členi do vključno $x^{p+q}$ se pokrajšajo).
Za $e^A$ poznamo eksplicitno formulo za $R_{pq}(A) = (D_{pq}(A))^{-1}N_{pq}(A)$, smiselno je vzeti $p = q$:

$D_{pp}(A) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(2p-j)!p!}{(2p)!(p-j)!}(-A)^j = \sum_{j=0}^{p} b_j(-A)^j$,
$N_{pp}(A) = \sum_{j=0}^{p} b_j A^j$.
Npr. pri $p = 3$:
$e^x \approx \frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{120}x^3}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{120}x^3}$.
Napaka: $e^A - R_{pq}(A) = \frac{(-1)^p}{(2p)!}A^{2p+1}D_{pq}(A)^{-1}\int_0^1 u^p(1-p)^p e^{Au}du$.

Dobra aproksimacija blizu izhodišča.

Potem:

1) $\widetilde{A} = 2^{-k}A$, kjer je $||2^{-k}A||$ dovolj majhno,

2) $B = R_{pp}\left(\widetilde{A}\right)$
$\left(e^{\frac{1}{m}A}\right)^m = e^A$
$\Longrightarrow$

3) $e^A = B^{2^k}$ - $k$ kvadriranj.