Kombinatorika - zapsiski s predavanj prof. Konvalinka

Domen Vogrin Tomaž Poljanšek Yon Ploj

jesen/zima 2021

Kazalo

1 Osnovni principi kombinatorike

1.1 Funkcije in štetje

Definicija 1.1 (Funkcija)**.**

- injektivna (y je slika največ enega x) / ($x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$)
- surjektivna (y je slika vsaj enega x) / ($\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$)
- bijektivna / (y je slika natanko enega x) / (injektivna in surjektivna)

$$\exists \text{ injekcija } f : X \to Y \implies |X| \leqslant |Y|$$
$$\exists \text{ surjekcija } f : X \to Y \implies |X| \geqslant |Y|$$
$$\exists \text{ bijekcija } f : X \to Y \implies |X| = |Y|$$

$f : X \to Y$ lahko interpretiramo kot razporejanje kroglic (X) v škatle (Y).
Oznake:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$$
$$[n] := \{1, 2, ..., n\}, \quad |[n]| = n$$
$$2^X := \{A \subseteq X\}(= P(x))$$
$$Y^X := \{f : X \to Y\}$$

Izrek 1.2 (Binomski)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n$$

1.2 Osnovna načela

Izrek 1.3 (Dirichletovo načelo)**.**

$$\exists f : X \to Y \implies |X| \leqslant |Y|$$

Ekvivalentno:

$$|X| > |Y| \implies \neg\exists \; inj. \; f : X \to Y$$

ali z besedami: "če damo n kroglic v k škatel in velja $n > k$, sta v vsaj eni škatli vsaj dve kroglici."

Izrek 1.4 (Načelo vsote in produkta)**.**

$$A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$$

Izrek 1.5 (Načelo vključitev in izkjučitev)**.**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Izrek 1.6 (Načelo produkta)**.**

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Kako uporabljamo ti dve načeli?

- načelo vsote: dve (disjunktni) možnosti, obarvamo vsako posebej, rezultata seštejemo
- načelo produkta: naredimo dve neodvisni izbiri, število možnosti za eno in drugo zmnožimo

Trditev 1.7. $|2^X| = 2^{|X|}$

Dokaz. (Formalen)

$$\Phi = 2^X \to \{0,1\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1\} \text{ (n-krat)}$$

$$\Phi(A) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), A \subseteq X$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0: & x_i \notin A \\ 1; & x_i \in A \end{cases}$$

$$\Psi : \{0,1\}^n \to 2^X$$

$$\Psi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \{x_i : \varepsilon_i = 1\}$$

$$\Psi \circ \Phi = id_{2^X}$$

$$\Phi \circ \Psi = id_{\{0,1\}^n}$$

$$\implies \Phi \text{ je bijekcija}$$

$$|\{0,1\}^n| = 2^n \text{ po načelu produkta} \implies |2^X| = 2^{|X|}$$

■

Dokaz. (Intuitiven)
Za vsakega od n elementov imamo dve izbiri (damo / ne damo v podmnožico). Izbire so neodvisne, torej imamo $2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^n$ izbir. ■

Trditev 1.8. $|Y^X| = |Y|^{|X|}$

Dokaz. (Formalen)

$$\Phi : Y^X \to Y^{|X|}$$
$$X = \{x_1, ..., x_n\}$$
$$\Phi(f) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$
$$\Psi(y_1, ..., y_n) = f$$
$$f(x_i) = y_i$$

■

Dokaz. (Intuitiven)
Za vsak element iz X imamo $|Y|$ izbir. Izbire so neodvisne, torej imamo $|Y| \cdot |Y| \cdot ... \cdot |Y| = |Y|^{|X|}$ izbir. ■

Trditev 1.9. Število injektivnih preslikav v Y^X je

$$|Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot ... \cdot (|Y| - |X| + 1)$$

Dokaz. Za sliko prvega elementa imamo $|Y|$ izbir, za drugega $(|Y| - 1)$, ...

Opomba. Tu smo uporabili varianto pravila produkta - izbire niso neodvisne, je pa neodvisno število izbir.

Opomba. Velja tudi za $|X| > |Y| (= 0)$

■

1.3 Permutacije

Definicija 1.10 (Permutacija)**.** Bijektivna preslikava iz X v X se imenuje permutacija. Množico permutacij $[n]$ označimo S_n.

Definicija 1.11 (Relacija)**.** Je množica $R \subseteq X \times Y$. Zapis $(x, y) \in R$ krajšamo kot xRy.

Definicija 1.12 (Preslikava)**.** Relacija f je preslikava, kadar velja:

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y : xfy$$

Pišemo $y = f(x)$.

Trditev 1.13.

$$|S_n| = n!$$

Dokaz. Za sliko 1 imamo n možnosti, za sliko 2 jih je $(n-1)$, ... ■

Primer. Komponiranje permutacij

$$(4\ 2\ 6\ 1\ 3\ 5) \cdot (3\ 6\ 1\ 2\ 5\ 4) = (6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 1)$$

Kompozitum je asociativen, a ni komutativen. Ima enoto, $id = (1\ 2\ \dots\ n)$ in inverz, npr. $(4\ 2\ 6\ 1\ 3\ 5)^{-1} = (4\ 2\ 5\ 1\ 6\ 3)$.

Definicija 1.14 (Simetrična grupa)**.** Množica permutacij s komponiranjem tvori grupo $(S_n, \cdot)$.

Naj bo $\pi \in S_n$, $i \in [n]$

$$i, \pi(i), \pi^2(i), \pi^3(i), \cdots$$

Po Dirichletovem principu obstajata j in j', $j < j'$, tako da

$$\pi^j(i) = \pi^{j'}(i) \implies i = \pi^{j'-j}(i)$$

$$(i\ \ \pi(i)\ \ \pi^2(i)\ \ \cdots\ \ \pi^{n-1}(i))$$

Trditev 1.15. Permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov

Primer.

$$\pi = (4\ 2\ 6\ 1\ 3\ 5) = (1\ 4)(2)(3\ 6\ 5)$$

2 Podmnožice in načrti

2.1 Binomski koeficienti

Definicija 2.1 (Potenčna množica)**.**

$$2^A := \{B \subseteq A\}$$

Definicija 2.2 (Binomski simbol)**.** Lahko definiramo tudi za množice

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A : |B| = k\}$$

Beremo "A nad k".

Definicija 2.3 (Binomski koeficient)**.**

$$\binom{n}{k} := |\binom{[n]}{k}|$$

Beremo “n nad k” (“n choose k”).

Izrek 2.4 (Pomen binomskega koeficienta)**.** $\binom{n}{k}$ nam pove število k-elementnih podmnožic množice z n elementi, oziroma število načinov, da izberemo k elementov izmed n elementov.

Primer.

$$\binom{[4]}{2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

Trditev 2.5.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

Definicija 2.6 (n na k padajoče)**.** $n^{\underline{k}} := n(n-1)\cdots(n-k+1)$

Definicija 2.7 (n na k naraščajoče)**.** $n^{\overline{k}} := (n)(n+1)\cdots(n+k-1)$

Trditev 2.8.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} : & 0 \leq k \leq n \\ 0 : & \text{sicer} \end{cases}$$

Dokaz. (1. način)
Po eno strani lahko izberemo k števil izmed n števil brez ponavljanja, vrstni red je pomemben. Torej: izberemo k-terico različnih števil

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Po drugi strani pa lahko vzamemo $\binom{n}{k}$ (izberemo k-elementno podmnožico v $[n]$), krat $k!$ (izberemo vrstni red)

$$\implies \binom{n}{k} k! = n^{\underline{k}}$$

$$\implies \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

∎

Dokaz. (2. način)
Če $k < 0$ ali $k > n$, potem očitno $\binom{n}{k} = 0$. Vemo, da je $n!$ število permutacij $[n]$, a vsako k-podmnožico smo šteli $k! \cdot (n-k)!$-krat, zato delimo s tem izrazom.

$$\implies \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

■

Trditev 2.9 (Rekurzivna formula)**.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dokaz. (1. način)
k-elementna podmnožica $[n]$ bodisi vsebuje ali ne vsebuje zadnji element (n).

- vsebuje n: člen $\binom{n-1}{k-1}$ izbere ostalih $k-1$ elementov iz (preostale) $[n-1]$
- ne vsebuje n: člen $\binom{n-1}{k}$ izbere vseh potrebnih k elementov izmed preostalih $[n-1]$.

■

Dokaz. (2. način)

$$\Phi : \binom{[n]}{k} \to \binom{[n-1]}{k-1} \cup \binom{[n-1]}{k}$$

$$\Phi(A) = A \setminus \{n\}$$

$$\text{inverz} : \Psi(B) = \begin{cases} B \cup \{n\} : & |B| = k-1 \\ B : & |B| = k \end{cases}$$

■

Dokaz. (3. način)

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}(k+n-k)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!},\ k \geqslant 1$$

■

2.1.1 Pascalov trikotnik

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	
	0		1		2		3		4		5		6	

Število v n-ti vrstici in k-tem stolpcu pascalovega trikotnika je enako $\binom{n}{k}$. Trikotnik konstruiramo tako, da napišemo zunanji plašč enic, nato pa vsak par sosenjih števil seštejemo in zapišemo vsoto pod niju.

2.2 Binomski izrek

Definicija 2.10.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dokaz. (1. način) - indukcija po n
Baza indukcije, $n = 0:\ 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$ OK
Indukcijski korak, $n-1 \Rightarrow n$:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = (\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k)(a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^{k+1} =$$

$$\overset{k'=k+1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k'=1}^{n-1} \binom{n-1}{k'-1} a^{n-k'} b^{k'} =$$

$$\overset{k'=k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}) a^{n-k} b^k =$$

$$\overset{\text{rekurzija}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

■

Dokaz. (2. način) - isti
Namesto $\sum_{k=0}^{n-1}$ oz. podobno se uporabi kar $\sum_k$ - vsi ostali členi so po definiciji binomskih koeficientov enaki 0. Postopek je podoben, samo vse skupaj je malo hitreje, ker preskočimo vmesne razmiselke. ■

Dokaz. (3. način) - boljši

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

Po distributivnosti iz vsakega oklepaja izberemo a ali b. Če smo b izbrali k-krat, smo a izbrali $(n-k)$-krat in dobimo $a^{n-k}b^k$. Kolikokrat dobimo $a^{n-k}b^k$? $\binom{n}{k}$-krat, ker izberemo k oklepajev, v katerih izberemo b. ■

2.3 Izbori

Na voljo imamo b oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic? Ali dovolimo ponavljanje? Je vrstni red pomemben?

	s ponavljanjem	brez ponavljanja
vrstni red je pomemben	n^k	$n^{\underline{k}}$
vrstni red ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Opomba. V prvi vrstici gre za variacije, v drugi pa za kombinacije.

$$1 \leqslant i_1 \leqslant ... \leqslant i_k \leqslant n$$

Želimo preštetí rešitve tega sistema neenačb.
n = 4, k = 3

111	123	222	244
112	124	223	333
113	133	224	334
114	134	233	344
122	144	234	444

Ideja:

$$j_1 = i_1,\ j_2 = i_2 + 1,\ j_3 = i_3 + 2,\ ...,\ j_k = i_k + k - 1$$

2.4 Kompozicije

Definicija 2.11 (Kompozicija)**.** Kompozicija naravnega števila n je taka l-terica

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l), \quad \lambda_i > 0,$$

da velja

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$$

Lambde imenujemo členi kompozicije, l je dolžina kompozicije, n pa velikost kompozicije.

Primer. $(3, 1, 5, 2)$ je kompozicija števila 11.

Trditev 2.12. Obstaja 2^{n-1} kompozicij števila $n \geqslant 1$ in obstaja $\binom{n-1}{k-1}$ kompozicij števila n s k členi.

Dokaz. Kompozicijo lahko predstavimo s k kroglicami in pregradami:

$$3 + 1 + 5 + 2 : \quad \circ\circ\circ | \circ | \circ\circ\circ\circ\circ | \circ\circ$$

$n - 1$ prostorov za pregrado $\Longrightarrow$ 2 izbiri za vsako pregrado $(\exists,\ \nexists)$
$k - 1$ pregrad na $n - 1$ mestih: $\binom{n-1}{k-1}$ ∎

Definicija 2.13 (Šibka kompozicija)**.**

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \quad \lambda_i \geqslant 0$$

tako da velja

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$$

Opomba. Šibkih kompozicij števila n je ∞.

Primer. $(0, 0, 3, 1, 0, 5, 0, 2)$

Trditev 2.14. Število šibkih kompozicij n s k členi je $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dokaz. (1. način)
Štejemo rešitve $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$, zahtevamo $\lambda_1 \geqslant 0$.

$$\mu_i = \lambda_i + 1$$

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k = n + k, \quad \mu_i \geqslant 1$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} \text{ je rešitev.}$$

∎

Dokaz. (2. način)
Šibko kompozicijo predstavino s kroglicami in pregradami.

$$0+0+3+1+0+5+0+2: \quad ||\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ\circ\circ\circ||\circ\circ$$

Imamo $n+(k-1)$ objektov, izberemo položaje pregrad na $\binom{n+k-1}{k-1}$ načinov.

Opomba. Kombinacije s ponavljanjem (n kroglic, izberemo jih k)

x_i ... kolikokrat smo izbrali kroglico:

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\ ...,\ n$$

$$x_i + x_2 + ... + x_n = k$$

$\equiv$ šibke kompozicije k z n členi $= \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ ∎

2.5 Načelo vključitev in izključitev (NVI)

Primer. $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

Primer. $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Izrek 2.15 (NVI)**.**

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_j\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_j}|$$

Definicija 2.16.

$$A_I := \bigcap_{i\in I} A_i$$

Primer. $A_{\{1,4,6,7\}} = A_1\cap A_4\cap A_6\cap A_7$

Primer. $A_\emptyset = \cap_{i\in\emptyset} A_i = \{a;\ a\in A\ \wedge\ \forall i\in\emptyset\ a\in A_i\} = A$

Izrek 2.17 (Poenostavljen zapis NVI)**.**

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|-1}|A_i|$$

Izrek 2.18 (Druga oblika NVI)**.**

$$|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}|A_I|$$

Dokaz. Označimo $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ in se spomnimo, da $A_\emptyset = A$

$$|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c| = |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c| = |A| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_\emptyset| \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|}(A_I) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I|$$

■

Lema 2.19.

$$k \geqslant 1 \implies \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} = 0$$

Dokaz. V binomski izrek vstavimo $x = -1$

$$(1-1)^n = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j = 0$$

■

Opomba. Lema pravi $\sum_{j \text{ sod}} \binom{k}{j} = \sum_{j \text{ lih}} \binom{k}{j}$ oziroma število sodih podmnožic je vedno enako številu lihih podmnožic.

To lahko pokažemo tudi s sledečo bijekcijo

$$\varphi : \{\text{sode podmnožice } [k]\} \to \{\text{lihe podmnožice } [k]\}$$

$$\varphi(S) = \begin{cases} S \setminus \{k\} : & k \in S \\ S \cup \{k\} : & k \notin S \end{cases}$$

Dokaz. (NVI)

$$a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ a vsebovana v natanko k množicah}$$

Dokazati želimo, da je doprinos a-ju k vsoti na desni enak 1.

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - ... + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = -(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} - 1) = 1$$

k . . . doprinos v prvi vrstici
$\binom{k}{2}$ . . . doprinos v drugi vrstici
$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} = 0$ (po lemi) ■

2.6 Eulerjeva funkcija ϕ

Definicija 2.20 (Eulerjeva funkcija)**.**

$$\phi(n) = |\{i \in [n] : \gcd(i, n) = 1\}|$$

Trditev 2.21.

$$\sum_{a|n} \phi(a) = n$$

(= število števil med 1 in n, ki so tuje n)

Dokaz. Zapišimo $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ in jih pokrajšajmo.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{6}{12} & \frac{7}{12} & \frac{8}{12} & \frac{9}{12} & \frac{10}{12} & \frac{11}{12} & \frac{12}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{11}{12} & \frac{1}{1} \end{array}$$

Ulomkov je n, imenovalci so delitelji števila n, števci so števila, ki so manjša od a in tuja z a.

$$\sum_{a|n} \phi(a) = n$$

∎

Izrek 2.22 (Formula za ϕ)**.**

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

Dokaz.

$$A = [n], \quad n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \alpha_i > 0$$

$$A_i = \{j \in [n] : p_i | j\}$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$$

$$|A_I| = \frac{n}{\prod_{i \subseteq I} p_i}$$

$$\phi(n) = \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$k = 2$

$$n \cdot (1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 p_2}) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2})$$

$$\phi(n) \overset{\text{distributivnost}}{=} n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_k})$$

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

■

2.7 Multinomski koeficienti

Spomnimo se na binomske koeficiente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0 \leqslant k \leqslant n$$

Imamo a enic in b ničel. Premešamo jih lahko na

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

načinov. Kaj pa če imamo več enakih elementov? Števila $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4$ lahko premešamo na.

$$\binom{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_1} \cdot \binom{a_2 + a_3 ... + a_n}{a_2} \cdot \binom{a_3 + a_4 + ... + a_n}{a_3} ...$$

načinov. V prvem binomu izberemo enke, v drugem dvojke, v tretjem trojke .... To razpišemo kot

$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_1!(a_2 + a_3 + ... + a_n)!} \cdot \frac{(a_2 + a_3 + ... + a_n)!}{a_2!(a_3 + a_4 + ... + a_n)!} \cdot \frac{(a_3 + a_4 + ... + a_n)!}{a_1!(a_4 + a_5 + ... + a_n)!} ... \frac{(a_{n-1} + a_n)!}{a_{n-1}!a_n!} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_1!a_2!...a_n!} = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)!}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i!} = \binom{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_1, a_2, ..., a_n}$$

Alternativno: dodamo indekse $1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, 3_4, 3_5, 4_1$. Premešamo na

$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_1!a_2!...a_n!}$$

načinov; najprej smo premešali vse na $(a_1 + a_2 + ... + a_n)!$ načinov, potem pa z $a_i!$ izbrisali indekse)

Opomba.

$$\binom{a+b}{a, b} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

Izrek 2.23 (Multinomski izrek)**.**

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{(a_1,\ldots,a_n) \text{ šibka kompozicija } m} \binom{m}{a_1, \cdots, a_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

Dokaz.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Iz vsakega oklepaja izberemo x_i, kar skupaj pride $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}$, pri čemer je $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \text{m}$, $a_i \geqslant 0$. Koeficient je očitno $\binom{a_1+a_2+...+a_n}{a_1,a_2,...,a_n}$. ∎

Primer. $x_1 = x_2 = ... = x_n$

$$n^m = \sum_{(a_1,\ldots,a_n) \text{šibka kompozicija m}} \binom{m}{a_1, ..., a_n}$$

2.8 Načrti in t-načrti

Podjetje proizvaja več različic izdelka, želi jih testirati pri potrošnikih. Vsak potrošnik mora testirati enako število različic, vsako različico mora testirati enako število potrošnikov.

$$1234, 1247, 1357, 2468, 3568, 5678$$

8 različic, 6 potrošnikov, vsak potrošnik testira 4, vsako različico testirajo 3 potrošniki.

Definicija 2.24 (Načrt)**.** $B = \{B_1, \ldots, B_b\}$ je narčt s parametri (v, k, λ), kadar velja

- $B_1, \ldots, B_b \subseteq [v]$
- $|B_1| = \ldots = |B_b| = k$
- vsak $i \in [v]$ se pojavi v natanko λ množicah oz. "blokih".

Primer. Načrt s parametri $(8, 4, 3)$.

Narišemo tabelo

	B_1	...	B_b
1			
...			
v			

Kljukico damo tam, kjer je $i \in B_j$. V vsakem stolpcu tako dobimo k kljukic, skupaj $k \cdot b$, v vsaki vrstici dobimo λ kljukic, skupaj $\lambda \cdot v$. Iz tega sledi, da $k \cdot b = \lambda \cdot v$, oziroma $b = \frac{\lambda v}{k}$

Velja še b $\leqslant \binom{v}{k}$

$$\frac{\lambda v}{k} \leqslant \frac{v!}{k!(v-k)!}$$

Pokrajšamo $\frac{v}{k}$ na obeh straneh neenačbe in dobimo

$$\lambda \leqslant \frac{(v-1)!}{(k-1)!(v-k)!} = \binom{v-1}{k-1}$$

Izrek 2.25.
Načrt s parametri (v, k, λ) obstaja natanko tedaj, ko velja $k | v \cdot \lambda$ in $\lambda \leqslant \binom{v-1}{k-1}$

Dokaz.
($\Rightarrow$) Že dokazano.
($\Leftarrow$) Izberemo $\frac{\lambda v}{k}$ k-elementnih podmnožic množice $[v]$. To lahko naredimo, ker je $\frac{\lambda v}{k} \leqslant \binom{v-1}{k-1} \cdot \frac{v}{k} = \binom{v}{k}$.

$$v = 8,\ k = 4,\ \lambda = 3$$
$$\frac{\lambda v}{k} = 6 \Rightarrow 1234, 1356, 1567, 1568, 2356, 3457$$

To ni nujno načrt.

$$\lambda_i \ldots \text{v koliko blokih je vsebovan } i$$

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 2,\ \lambda_5 = 5,\ \lambda_6 = 4,\ \lambda_7 = 2,\ \lambda_8 = 1$$

Naredimo isto tabelo kot prej in ugotovimo, da je $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{v} \lambda_i}{v}$.
Če to ni načrt, zagotovo obstajata i, j, da je $\lambda_i > \lambda > \lambda_j$.

Bloki so 4 tipov:

(I) vsebujejo i in j

(II) vsebujejo i, ne pa j

(III) vsebujejo j, ne pa i

(IV) ne vsebujejo ne i ne j

Bloki tipa (I) in (IV) vsebujejo enako i-jev in j-jev.

$\lambda_i =$ blokov tipa (I) + (II)

$\lambda_j =$ blokov tipa (I) + (III)

Sledi, da je več blokov tipa (II) kot (III). Iz tega sledi, da obstaja blok tipa (II), tako da po zamenjavi i z n ne dobimo že obstoječega bloka.

$$1234, 1356, 2567, 1568, 2356, 3457$$

V splošnem: $\lambda_i --$, $\lambda_j ++$
Postopek ponovimo, dokler ni $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_6$

$$1234, 1456, 2567, 1568, 2356, 3457$$

$$1234, 1457, 2567, 1568, 2356, 3457$$

$$1234, 1457, 2678, 1568, 2356, 3457$$

$$1234, 1478, 2678, 1568, 2356, 3457$$

kar je načrt.

Na vsakem koraku se zmanjša $\sum_{i=1}^{v} (\lambda_i - \lambda)$ za 2, po končno korakih je to $= 0$ in dobimo načrt. ■

Definicija 2.26 (t-načrt)**.** $B = \{B_1, \ldots, B_b\}$ je t-narčt s parametri $(v, k\lambda_t)$, kadar velja

- $B_1, \ldots, B_b \subseteq [v]$
- $|B_1| = \cdots = |B_b| = k$

- vsaka t-elementna podmnožica $[v]$ je vsebovana v točno λ_t blokih.

Opomba. 1-načrt = načrt

Primer. $124, 137, 156, 235, 267, 346, 457$ je 2-načrt $(7, 3, 1)$

Opomba. Tudi načrt s parametri $(7, 3, 3)$ NI 3-načrt!!

Fanova ravnina:

Izrek 2.27. Če je B t-načrt s parametri (v, k, λ_t), je tudi $(t-1)$-načrt s parametri (v, k, λ_{t-1}). Velja formula

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$$

Dokaz. $S \subseteq [v]$, $|S| = t-1$. S je vsebovana v λ_s blokih. Narišemo tabelo

	B_1	$\cdots$	j	$\cdots$	B_b
1					
$\vdots$					
i			$\checkmark$		
$\vdots$					
v					

$i \notin S$, $S \cup \{i\} \subseteq B_j$. Skupno je po stolpcih:

- $S \setminus B_j$: 0 kljukic
- $S \subseteq B_j$: $k-t+1$ kljukic

  skupaj: $\lambda_s(k-t+1)$

in po vrsticah:

- $i \in S$: 0 kljukic
- $i \notin S$: λ_t kljukic

  skupaj: $\lambda_t(v-t+1)$

$$\implies \lambda_s = \frac{(v-t+1)\lambda_t}{k-t+1}$$

$\blacksquare$

3 Permutacije, razdelitve, razčlenitve

3.1 Stirlingova števila prve vrste

$\pi \in S_n$ lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov

$$(1\ 4\ 6\ 3\ 5\ 8\ 2\ 7) = (1)(2\ 4\ 3\ 6\ 8\ 7)(5)$$

Definicija 3.1 (Stirlingovo število prve vrste)**.** Je število permutacij v S_n, ki imajo natanko k ciklov (negibne točke štejemo kot cikle dolžine 1). Označimo $c(n, k)$

Za $c(n, k)$ ni "lepe" formule. Vemo pa naslednje lastnosti

- $c(n, n) = 1$
- $c(n, n-1) = \binom{n}{2}$ (transpozicija)
- $c(n, 0) = 0$ (če $n > 0$, oziroma 1, če je $n = 0$)
- $c(n, 1) = (n-1)!$
- $c(n, k) = 0$ za $k > n$ ali $k < 0$
- $\sum_k c(n, k) = n!$

Trditev 3.2 (Rekurzivna zveza)**.**

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + c(n-1, k) \cdot (n-1)$$

Dokaz. Permutacije v S_n s k cikli:

- n je negibna točka: $c(n-1, k-1)$
- n ni negibna točka: $c(n-1, k) \cdot (n-1)$ ((izbrišem n, dobim permutacijo v S_{n-1} s k cikli) $\cdot$ (vsako dobimo $(n-1)$-krat))

$\blacksquare$

Tabela Stirlingovih števil 1. vrste:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0
4	0	6	11	6	1	0
5	0	24	50	36	10	1

Konstruiramo podobno kot Pascalov trikotnik za binomske koeficiente (2.1.1), samo da uporabimo drugo rekurzivno formulo; najprej damo diagonalne elemente na 1, naddiagonalne na 0, 1. stoplec na 0 (razen prvega elementa, ki je že 1), za ostale pa uporabimo rekurzivno forumlo (seštejemo element levo zgoraj in $(n-1)$ krat zgornji).

Trditev 3.3 (Rekurzivna zveza)**.**

$$\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$$

Dokaz. Indukcija po n:
Baza indukcije: $n = 0 : (1x^0 = x^0)$. OK.
Indukcijski korak: $n-1 \implies n$:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) = \sum_k c(n-1,k)x^k(x+n-1) = \\
= \sum_k c(n-1,k)x^{k+1} + \sum_k c(n-1,k)x^k(n-1) = \\
\sum_k c(n-1,k-1)x^k + \sum_k c(n-1,k)x^k(n-1) = \\
= \sum_k c(n,k)x^k
\end{aligned}$$

■

Dokaz. Alternativno, lahko gremo tudi v obratni smeri.

$$x \leftrightarrow -x$$

$$\sum_k c(n,k)(-1)^k x^k = (-x)^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} c(n,k)x^k = x^{\underline{n}}$$

$s(n,k) := (-1)^{n-k}c(n,k)$ predznačeno stirlingovo število prve vrste

$$\sum_k s(n,k)x^k = x^{\underline{n}}$$

■

3.2 Stirlingova števila druge vrste

Definicija 3.4 (Razdelitev množice)**.** Razdelitev, razbitje ali particija je $\{B_1 \cdots B_n\}$, pri čemer

- $B_i \neq \emptyset \quad i = 1 \ldots k$
- $B_i \cap B_j = 0$ za $i \neq j$
- $\cup_{i=0}^{k} B_i = A$
- $B_1 \ldots B_n$ so bloki razdelitve

Primer.

$$A = [8] : \{\{1, 4, 5\}\{2\}\{3, 6, 7, 8\}\} \equiv 145 - 2 - 3678 \equiv 2 - 415 - 8763$$

Opomba. Če je R je ekvivalenčna relacija nad A (refleksivna, simetrična, tranzitivna), je množica ekvivalenčnih razredov R ravno razdelitev množice A.

Definicija 3.5 (Stirlingovo število druge vrste)**.** $S(n, k)$ je število razdelitev $[n]$ z natanko k bloki.

Definicija 3.6 (Bellovo število)**.** $B(n)$ je število razdelitev $[n]$. Velja

$$B(n) = \sum_k S(n, k)$$

Opomba. $B(n) \neq B_n$. $B_n =$ Bernoulijevo število

Preproste formule za $S(n, k)$ in $B(n)$ nimamo, poznamo pa naslednje identitete:

- $S(n, n) = 1$
- $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$
- $S(n, 1) = 1 - \delta_{n0}$
- $S(n, 0) = \delta_{n0}$
- $S(n, k) = 0$ za $k < 0$ ali $k > n$
- $S(n, k) \leq c(n, k)$

Trditev 3.7 (Rekurzivna formula za $S(n)$)**.**

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

Dokaz. Razdelitve $[n]$ s k bloki:

- n je (samostojen) blok: $S(n-1, k-1)$
- n je v bloku velikosti ≥ 1: $k \cdot S(n-1, k)$ (n lahko vstavimo v katerega koli izmed k blokov: n vstavimo nazaj na k načinov)

■

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$B(n)$
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	2
3	0	1	3	1	0	0	5
4	0	1	7	6	1	0	15
5	0	1	15	25	10	1	52

Opomba. Za konstrukcijo glej Stirlingova števila prve vrste.

Trditev 3.8 (Pomen $S(n)$)**.** $S(n, k)$ je število ekvivalenčnih relacij na $[n]$ s k ekvivalenčnimi razredi. $B(n)$ je število ekvivalenčnih relacij na $[n]$

Trditev 3.9. Število surjekcij $[n] \to [k]$ je $k! \cdot S(n, k)$

Dokaz. Naj bo $f : [n] \to [k]$ surjekcija. Množica $\{f^{-1}(1), f^{-1}(2) \cdots f^{-1}(k)\}$, kjer $f^{-1}(i)$ predstavlja množico praslik i-ja ($= \{j : f(j) = i\}$) je razdelitev $[n]$ s k bloki. Vsaka razdelitev $[n]$ s k bloki nam da $k!$ surjekcij (bloke linearno uredimo).
Ekvivalentno: urejena razdelitev $\equiv$ surjekcija. ■

Posledica 3.10.

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j!(k-j)!}$$

Trditev 3.11 (Rekurzivna formula za $S(n)$)**.**

$$\sum_k S(n, k) x^{\underline{k}} = x^n$$

Dokaz. (1. način) Z indukcijo (na vajah, DN?) ■

Dokaz. (2. način) Naj bo $x \in \mathbb{N}$. x^n je število preslikav iz $[n]$ v $[k]$. Vsaka preslikava je surjekcija na svojo sliko (zalogo vrednosti).

$$x^n = \sum_T \Big(|T|! \cdot S(n, |T|)\Big) = \sum_k \left(k! \cdot S(n, k) \cdot \binom{x}{k}\right)$$

kjer je T slika preslikave, $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$ pa predstavlja število k-elementnih podmnožic od $[x]$. ■

Dva polinoma stopnje $\leq n$, ki se ujemata v $n+1$ točkah, sta enaka (razlika je polonom stopnje $\leq n$ z $n+1$ ničlami, torej je ekvivalentna 0)

$\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}$ in x^n sta polinoma stopnje n, ujemata se v neskončno točkah (ker gremo v vsoti po vseh $x \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$), torej sta enaka.
Velja tudi:

$$\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k) x^{\overline{k}} = x^n$$

Trditev 3.12 (Rekurzivna formula za $B(n)$)**.**

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

Dokaz. Izberemo razdelitev $[n+1]$ (k je število elementov), ki so v istem bloku kot $n+1$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k)$$

$\binom{n}{k}$: izbira elementov, ki so v istem bloku (skupaj z $n+1$).
$B(n-k)$: izberemo razdelitev na preostalik $n-k$ elementih (ta izbira je neodvisna in takih je $B(n-k)$).

$$k \to n-k: \quad B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

■

3.3 Lahova števila

Definicija 3.13 (Lahovo število)**.** $L(n,k)$ je število razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov.

Opomba. Spomnimo se: $S(n,k)$ je število razdelitev $[n]$ na k blokov, $c(n,k)$ pa število razdelitev $[n]$ na k ciklično urejenih blokov.

- $L(n,n) = 1$
- $L(n,n-1) = 2$
- $\binom{n}{2} = n(n-1)$

- $L(n,0) = \delta_{n0}$
- $L(n,1) = n!$
- $L(n,k) = 0$ za $k < 0$ ali $k > n$
- $S(n,k) \leq c(n,k) \leq L(n,k)$

Trditev 3.14 (Rekurzivna formula za $L(n,k)$)**.**

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

Dokaz. Preštejemo urejene razdelitve $[n]$ s k linearno urejenimi bloki

$$k! \cdot L(n,k) = n! \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$k!$ - uredimo bloke, $n!$ - premutacija, $\binom{n-1}{k-1}$ - kompozicija ■

Trditev 3.15.

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k)L(n-1,k)$$

Dokaz. Ekvivalentno kot ostale rekurzije, samo "podrobnost" $(n-1+k)$: n vstavimo za obstoječim številom $(n-1)$ ali pa na začetek bloka (k) ■

Primerjajmo rekurzije:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1) \cdot c(n-1,k)$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$
- $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k) \cdot L(n-1,k)$

Trditev 3.16 (Rekurzivna formula za $L(n,k)$)**.**

$$\sum_k L(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$$

Dokaz. Dokaz bomo prepustili bralcu za vajo ■

Primerjajmo:

- $\sum_k \binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$

- $\sum_k C(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$ $\quad \sum_k (-1)^{n-k} C(n,k) x^k = x^{\underline{n}}$
- $\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}} = x^n$ $\quad \sum_k (-1)^{n-k} S(n,k) x^{\overline{k}} x^n$
- $\sum_k L(n,k)x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$ $\quad \sum_k (-1)^{n-k} L(n,k) x^{\overline{n}} x^{\underline{k}}$

3.4 Razčlenitve naravnih števil in Eulerjev petkotniški izrek

Definicija 3.17 (Razčlenitev naravnega števila)**.** Razčlenitev ali particija $n \in \mathbb{N}$ je l-terica

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$$

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_l > 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$$

λ_i so členi razčlenitve, n je velikost razčlenitve, l je dolžina razčlenitve.

Primer. $(5, 4, 4, 2, 1, 1)$ je razčlenitev števila 17 s 6 členi.

Opomba. Označimo tudi $5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1$ ali 5 4 4 2 1 1.

Razčletnive lahko prikažemo grafično s pomočjo Ferresovih diagramov.

Primer. Diagram za $\lambda = (5, 4, 3, 2, 1, 1)$

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

Definicija 3.18 (Razčlenitve)**.**

- S $p(n)$ označimo število vseh razčlenitev n.
- S $p_k(n)$ označimo število razčlenitev n s k členi.
- S $\overline{p_k}(n)$ označimo število razčlenitev n z $\leqslant k$ členi.

Opomba. Ni lepe formule za $p(n)$, $p_k(n)$ ali $\overline{p_k}(n)$.

Primer.
$n = 0 : (), p(0) = 1, p_0(0) = 1$
$n = 1 : 1$
$n = 2 : 2, 11$
$n = 3 : 3, 21, 111$
$n = 4 : 4, 31, 22, 211, 1111$
$n = 5 : 5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111$
$p(n) : 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots$
$p_2(5) = 2$
$\overline{p_3}(5) = 5$

Definicija 3.19 (Konjugirana razčlenitev λ')**.** Dobimo s transpozicijo Ferresovega diagrama (stolpce napišemo kot vrstice).

Veljajo naslednje lastnosti:

- $\lambda'_i = |\{i : \lambda_j \geqslant i\}| = \max\{j : \lambda_j \geqslant i\}$
- $\lambda'' = \lambda$
- $\lambda'_1 = l(\lambda)$
- $l(\lambda') = \lambda_1$

Primer. $5\ 4\ 4\ 2\ 1\ 1' = 6\ 4\ 3\ 3\ 1$

Trditev 3.20 (Lastnosti $p_k(n)$)**.**

1. $p_k(n) = \overline{p_{k-1}}(n-k)$
2. $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
3. $\overline{p_k}(n) = \overline{p_{k-1}}(n) + p_k(n) = \overline{p_{k-1}}(n) + \overline{p_k}(n-k)$

Dokaz. Precej trivialno;

1. Izbrišemo / dodamo prvi stolpec / stolpec dolžine k
2. Imamo razčlenitev n s k členi: $\lambda_l = 1$ $(p_{k-1}(n-1))$ in $\lambda_l \geqslant 2$ $(p_k(n-k))$
3. Očitno

■

Opomba. Do zdaj obravnavane rekurzivne formule):

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

- $c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1) \cdot c(n-1,k)$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$
- $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1) \cdot L(n-1,k)$
- $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
- $\overline{p_k}(n) = \overline{p_{k-1}}(n) + \overline{p_k}(n-k)$

Tabela za $p_k(n)$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	$\sum_k p_k(n) = p(n)$
0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	0	2
3	0	1	1	1	0	0	0	3
4	0	1	2	1	1	0	0	5
5	0	1	2	3	1	1	0	7
6	0	1	3	3	2	1	1	11

Za postopek izpolnitve tabele glej Stirlingova števila 1. vrste (3.1). Uporabi formulo $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.

Kaj pa rekurzija za $p(n)$?

$$A = \{\text{razčlenitve } n\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_i = \{\text{razčlenitve } n, \text{ ki vsebujejo } i \text{ kot člen}\}$$

$$|A_i| = p(n-i)$$

$$|A_i \bigcap_{i \neq j} A_j| = p(n-i-j)$$

$$|A_I| = p(n - \sum_{i \in I} i)$$

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =& |A_1| + ... + |A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| ... \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| ... \\
& - ... \\
& + ...
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(n) =& p(n-1) + p(n-2) + \cancel{p(n-3)} + \cancel{p(n-4)} + \cancel{p(n-5)} + ...\\
&- \cancel{p(n-1-2)} - \cancel{p(n-1-3)} - \cancel{p(n-2-3)} - \underline{p(n-1-4)} - ...\\
&+ p(n-1-2-3) + p(n-1-2-4) + ...\\
&- p(n-1-2-3-4) - ...\\
&+ ...
\end{aligned}
$$

Torej očitno: $p(n) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} ?p(n-m)$.

Relevantne so razčlenitve m z različnimi členi

$$7 = 7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1$$

$\alpha(m)$ ... število razčlenitev m z lihomnogo različnimi členi
$\beta(m)$ ... število razčlenitev m z sodo mnogo različnimi členi
$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha(m) - \beta(m) \cdot p(n-m))$

Trditev 3.21.

$$\alpha(m) - \beta(m) = \begin{cases} (-1)^{k-1}: & m = \frac{k(3k\pm1)}{2} \\ 0: & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\frac{k(3k-1)}{2} : 1, 5, 12, 22, ...$$
$$\frac{k(3k+1)}{2} : 2, 7, 15, 26, ...$$

Posledica 3.22 (Eulerjev petkotniški izrek)**.**

$p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-p(n-22)-p(n-26)\cdots$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(p(n - \frac{k(3k-1)}{2}) + p(n - \frac{k(3k+1)}{2}))$$

Dokaz. Iščemo "skoraj bijekcijo"

{razčlenitve m z liho mnogo členi} $\Longleftrightarrow$ {razčlenitve m s sodo mnogo členi}

$m = 10$:

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

s$(\lambda) \coloneqq \lambda_{l(\lambda)}$ najmanjši člen

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Recimo diagonali, ki se pojavi ob koncu prvih treh vrstic, **bok**.

$$b(\lambda) \coloneqq \max\{i : \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}$$

1. Če je $s(\lambda) > b(\lambda)$: bok postavimo pod najmanjši člen
2. Če je $s(\lambda) \leqslant b(\lambda)$: najmanjši člen postavimo desno od boka

Zakaj to ni vselej bijekcija? Prvo pravilo ne deluje, če

$$b(\lambda) = l(\lambda) = s(\lambda) - 1 = k$$

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (k+k) =$$
$$\frac{2k(2k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2}$$

Drugo pravilo ne deluje, če

$$b(\lambda) = l(\lambda) = s(\lambda) = k$$

$$k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+k-1) =$$
$$\frac{(2k-1)2k}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}$$

- če m $\neq \frac{k\cdot(3k\pm 1)}{2}$, smo našli bijekcijo, $\alpha(m) - \beta(m) = 0$.
- če m $= \frac{k\cdot(3k\pm 1)}{2}$, imamo bijekcijo, če odstavimo eno razčlenitev s k členi.
  - * k sod: $\alpha(m) - \beta(m) = -1$
  - * k lih: $\alpha(m) - \beta(m) = 1$

  Torej: $\alpha(m) - \beta(m) = (-1)^{k-1}$

■

3.5 Dvanajstera pot

Imamo $n = |N|$ kroglic in $k = |K|$ škatel. Zanimajo nas razporeditve teh kroglic v škatle, glede na to ali kroglice in škatle med seboj ločimo ali ne.

Spomnimo se na definiciji injektivnosti in surjektivnosti

- injektivna razporeditev: v vsaki škatli je največ ena kroglica
- surjektivna razporeditev: v vsaki škatli je vsaj ena kroglica

N	K	vse	injektivne	surjektivne
Ločimo	Ločimo	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k! \cdot s(n,k)$
Ne ločimo	Ločimo	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
Ločimo	Ne ločimo	$\sum_{i\leqslant k} s(n,i)$	$k \geqslant n\ ?\ 1 : 0$	$s(n,k)$
Ne ločimo	Ne ločimo	$\overline{p_k}(n)$	$k \geqslant n\ ?\ 1 : 0$	$p_k(n)$

4 Rodovne funkcije

4.1 Uvod

Na kakšne načine lahko predstavimo zaporedje?

1. Z eksplicitno formulo

$$a_n = 2^n \quad b_n = n! \quad F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

2. Z rekurzivno zvezo

$$a_n = F_{n\geqslant d}(a_{n-1}, a_{n-2}, ...) + \text{začetni členi } a_0, ...a_{d-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1}, \quad a_0 = 1$$
$$b_n = nb_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \quad b_0 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

3. Z asimptotsko formulo

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Definicija 4.1 (Asimptotska enakost)**.** $a_n \sim b_n := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Opomba. $\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ smatramo za preprostejšo formulo kot $n!$, saj je prejšnja bolj uporabna pri računanju.

Za izračun potence a^b potrebujemo $log_2(b)$ operacij, računanje $n!$ pa je izjemno počasno.

Primer. $2^{64} = (((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2$

Primer. $2^{100} = ((2^{24} \cdot 2)^2)^2$

Ponavadi zaporedja poenostavimo tako, da jih ocenimo s pribižkom, ki ima splošni člen oblike $a_n \sim An^BC^n$.

4. Z rodovno funkcijo

Spomnimo se iz analize: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je potenčna vrsta, ki konvergira na $x \in (-R, R)$, divergira pa na $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, kjer je $R \in [0, \infty]$ (lahko je tudi ∞) konvergenčni polmer. V $x = \pm R$ ne moremo zagotovo trditi ničesar.

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|, \text{ če limita obstaja}$$

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$$

Za $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, z $\in \mathbb{C}$ velja podobno: konvergira za $|z| < R$, divergira za $|z| > R$.

Primer. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$, $R = \lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n|}} = \frac{1}{2}$

Primer. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, $R = \lim_{n\to\infty}(\frac{n!}{(n+1)!}) = 0$, divergira za $x \neq 0$

Primer. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Vzemimo sedaj zaporedje $a_n = 2^n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ in ga zapišimo kot polinom, nato pa uporabimo formulo za potenčno vrsto.

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

Zaporedje lahko na ta način "zakodiramo" v funkcijo.

$$a_n = n! \to \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$$

Ampak tega (za primer $a_n = n!$) žal ne znamo izračunati. Zato bomo vpeljali eksponentno rodovno funkcijo.

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ je (običajna) rodovna funkcija $(a_n)_n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$ je eksponentna rodovna funkcija $(a_n)_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Zadnji primer bomo izpeljali kasneje.

4.2 Formalne potenčne vrste

Definicija 4.2 (Polinom)**.**

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n : a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

Množica realnih ($\mathbb{R}[x]$) oziroma kompleksnih ($\mathbb{C}[x]$) polinomov tvori polje za seštevanje in množenje (v resnici tudi $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]$ in ostali obsegi).

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{i=0}^{max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$
$$(a_i = 0 : i > n; b_j = 0, j > m)$$

Ker se želimo ukvarjati zgolj s poljem polinomov (ne s funkcijami), bomo polinom definirali drugače

Definicija 4.3 (Polinom kot zaporedje)**.**

$$\mathbb{R}[x] = \{(a_0, a_1, ...) : a_i \in \mathbb{R}. \text{ Le končno mnogo } a_i \neq 0\}$$

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ je (neskončnorazsežen) vektorski prostor (za $\cdot$ množenje s skalarjem)

$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0+a_1x+...+a_nx^n : a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ (polinomi stopnje $\leqslant n$) je $(n+1)$-dimenzionalen vektorski prostor. Njegova baza je npr. $1, x, x^2, ..., x^n$, lahko pa tudi $1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, ..., x^{\underline{n}}$ ali $1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, ..., x^{\overline{n}}$. Prehodni matriki bi bili $[c(n,k)]$ in $[S(n,k)]$.

$$\sum_k c(n,k) x^n = x^{\overline{n}} \qquad \sum_k S(n,k) x^{\overline{n}} = x^n$$

Definicija 4.4 (Konvolucijsko množenje)**.** Produkt polinomov po pravilu "vsak z vsakim".

$$\sum_n a_n x^n \cdot \sum_n b_n x^n = \sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \Big) x^n$$

Primer. $(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + ... + b_mx^m) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + ... + a_nb_mx^{n+m}$

Koeficienti pri x^k so

$$a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{\substack{i,j \geqslant 0 \\ i+j=k}} a_i b_j$$

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ je sedaj komutativen kolobar (kjer je $\cdot$ konvolucijski produkt). $\mathbb{R}[x]$, z vsemi temi operacijami tvori komutativno algebro. Lahko bi za kolobar vzeli tudi $\mathbb{C}([0,1])$. Če vzamemo polinome fiksne stopnje $\mathbb{R}^{n\times n}$, dobimo nekomutativno algebro.

Definicija 4.5 (Algebra formalnih potenčnih vrst)**.** $\mathbb{R}[[x]]$ je komutativna algebra zaporedij v $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}[[x]] = \{(a_0, a_1, a_2, ...) : a_i \in \mathbb{R}\} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Za operacije

$$\begin{aligned} (a_n)_n + (b_n)_n &= (a_n + b_n)_n \\ \lambda(a_n)_n &= (\lambda a_n)_n \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ (a_n)_n(b_n)_n &= (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})_n \end{aligned}$$

Namesto $(a_n)_n$ ali $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pišemo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oziroma $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. V tem primeru x ni spremenljivka, x^n ni potenciranje, $\cdot$ ni množenje in $+$ ni seštevanje, temveč so samo oznake, da ločimo med členi.

Z izrazom "formalna potenčna vrsta" se nanašamo na neko zaporedje. "Rodovna funkcija zaporedja" (ang. "generating function") je v bistvu tudi formalna potenčna vrsta (torej zaporedje), ampak ponavadi s tem mislimo bolj na zaporedje kot celoto, t.j. na funkcijski zapis, npr. $\frac{1}{1-2x}$.

Enota za množenje je $1 = 1+0x+0x^2+\ldots$. Velja tudi $(1+x+x^2+...)(1-x) = 1$, torej je $(1-x)$ multiplikativni inverz za $(1+x+x^2+...)$. To poznamo kot formulo za potenčno vrsto.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Trditev 4.6. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima inverz za množenje natanko tedaj, ko $a_0 \neq 0$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1$$

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ ... &= 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Skonstruirajmo inverz za $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_1 &= -\frac{a_1 b_0}{a_0} \\ b_2 &= -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0} \\ &... \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Vpeljimo nekaj oznak, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju.

$F(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$[x^n]F(x) \coloneqq a_n$ (n-ti člen zaporedja)

$F(0) \coloneqq [x^0]F(x)$

$(F \cdot G)(0) \coloneqq F(0) \cdot G(0)$

Definicija 4.7 (Odvod formalne potenčne vrste)**.** Definiramo po zgledu odvajanja polinomov pri analizi.

$$F(x) = \sum_n a_n x^n \implies F'(x) \coloneqq \sum_n (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$(a_0, a_1, a_2, ...) \longmapsto (a_1, 2a_2, 3a_3, ...)$$

Trditev 4.8 (Odvod produkta)**.** Deluje enako kot pri analizi.

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

Dokaz. Preverimo, da se koeficienti ujemajo pri splošnem členu $[x^n]$. Na levi imamo

$$(n+1)(a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + ... + a_{n+1} b_0)$$

Na desni pa

$$a_1 b_n + 2a_2 b_{n-1} 3a_3 b_{n-2} + ... + (n+1) a_{n+1} b_0 + a_0 (n+1) b_{n+1} + a_1 n b_n + a_2 (n-1) b_{n-1} + ... + a_n b_1$$

kar lahko zapišemo kot

$$(0+n+1)(a_0 b_{n+1}) + (1+n)(a_1 b_n) + (2+n-1)(a_2 b_{n-1}) + ... + (n+1)(a_n b_1) + (n+1+0)(a_{n+1} b_0)$$

Od tod neposredno sledi naša formula. $\blacksquare$

Definicija 4.9.

$$e^{\lambda x} := \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} x^n$$

Trditev 4.10. Velja $e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = e^{(\lambda+\mu)x}$

Dokaz. Uporabimo formulo za splošni člen konvolucijskega produkta

$$e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} = e^{(\lambda+\mu)x}$$

Če enakost z vprašajem pomnožimo z $n!$, dobimo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = (\lambda+\mu)^n$$

kar pa drži po binomskem izreku. ■

Opomba. Ni nujno, da se omejimo na realne polinome. Tudi $\mathbb{C}[[x]]$ in $\mathbb{Q}[[x]]$ tvorita algebri. Splošneje, vzamemo lahko poljuben $K[[x]]$, kjer je K komutativen obseg, $(K, +)$ abelova grupa, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelova grupa in med operacijama velja distributivnost. To vključuje tudi končna polja, npr. $\mathbb{Z}_p$, kjer je p praštevilo.

Izrek 4.11. Polje velikosti n obstaja natanko tedaj, ko je n potenca praštevila ($n = p^k$). Za nek n obstaja samo eno tako polje (do izomorfizma natančno).

Definicija 4.12 (Karakteristika)**.** Je najmanjše tako število k, da velja $\underbrace{1 + 1 + \cdots}_{k\text{-krat}} = id$.

Obseg ima karakteristiko 0, če $1 + 1 + ... + 1 \neq 0$.

Primer. V $\mathbb{Z}_5$ velja $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$, torej $\mathbb{Z}_5$ ima karakteristiko 5.

Primer. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ imajo karakteristiko 0.

Končna polja imajo karakteristiko p, če so velikosti p^k.

V $\mathbb{Z}_5$ za vsa števila večja od 5 velja $5! = 6! = ... = 0$. V obsegu s karakteristiko > 0 zato izraz $\frac{1}{n!}$ ni nujno definiran. Zato se omejimo na obsege s karakteristiko 0.

4.3 Uporaba rodovnih funkcij pri reševanju rekurzivnih enačb

Opomba. Dejanski primeri v tem poglavju niso vključeni.

Spomnimo se na dekompozicijo parcialnih ulomkov.

$$\frac{x+1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

Opomba (Parcialna dekompozicija z metodo prekrivanja). V zgornjem primeru obe strani pomnožimo z $(1-2x)$, nato pa vstavimo $x = \frac{1}{2}$. Ostane samo $A = 3$. Pomnožimo še z $(1-x)$ in vstavimo $x = 1$. Dobimo $B = -2$. Požvižgamo se na deljenje z nič, ker deluje.

Pozor! Ta metoda deluje samo takrat, ko imamo v imenovalcu samo enostavne ničle. Če imamo tudi ničle višjih stopenj, lahko enostavne ničle izračunamo z metodo prekrivanja, ostale pa ročno.

Ugotovili smo, da $\frac{x+1}{(1-2x)(1-x)}$, kar je v bistvu $\frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x}$ lahko interpretiramo kot $a_n = 3 \cdot 2^n - 2$.

Spomnimo se še na kvadratno enačbo.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pri kombinatoriki jo bomo nekoliko obrnili.

$$c + bx + ax^2 = c(1 - y_1 x)(1 - y_2 x)$$

$\frac{1}{y_1}$ in $\frac{1}{y_2}$ sta ničli našega polinoma $c + bx + ax^2$.

$$c + b\frac{1}{y} + a\frac{1}{y^2} = 0 \quad / \cdot y^2$$

$$a + by + cy^2 = 0$$

$y_{1,2}$ sta torej ničli obratnega polinoma.

Trditev 4.13.

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

Dokaz.

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\dots\cdot\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)$$

Tako na levi kot na desni strani je k členov. Vzemimo za primer $k = 3$ in analizirajmo člen $[x^5]$:

$$x^5 \cdot x^0 \cdot x^0, \quad x^3 \cdot x^1 \cdot x^1, \quad x^1 \cdot x^2 \cdot x^2, \quad \dots$$

Ugotovimo, da delamo šibke kompozicije moči k, teh pa je ravno $\binom{n+k-1}{k-1}$. ■

Dokaz. (Z indukcijo) Dokaz z indukcijo je bralcu prepuščen za vajo. ■

Primer. $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$.

Primer. $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_n (n+1)x^n$.

Primer. $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_n \binom{n+2}{2} x^n$.

4.3.1 Fibonaccijeva rodovna funkcija

Poskusimo sestaviti rodovno funkcijo za Fibonaccijevo zaporedje $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Uporabili bomo oznaki $F_n = n$-ti člen Fibonaccijevega zaporedja in $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_n \cdot x^n$, t.j. Fibonaccijeva formalna potenčna vrsta.

$$\begin{aligned} F_n &: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \\ F_{n-1} &: 0, 1, 1, 2, 3, 5,\ 8, 13, \dots = x \cdot F(x) \\ F_{n-2} &: 0, 0, 1, 1, 2, 3,\ 5,\ 8, \dots = x^2 \cdot F(x) \end{aligned}$$

Opazimo, da velja $F(x) = 1 + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x)$. Če ta izraz malo uredimo, dobimo

$$F(x)(1 - x - x^2) = 1$$

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Kar je rodovna funkcija za Fibonaccijevo zaporedje.

Primer. $a_n = 2a_{n-1}$, $a_0 = 1$. Pomnožimo rekurzivno formulo z x^n in seštejmo $\sum_{n=1}^{\infty}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n$$

Leva stran je $F(x) - 1$, ker seštevamo od $n = 1$ namesto od $n = 0$. Na desni strani nesemo pred vsoto 2 in izpostavimo en x, da imamo pri a isto številko.

$$F(x) - 1 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2xF(x)$$

Izpostavimo $F(x)$ kot prej

$$F(x)(1 - 2x) = 1 \implies F(x) = \frac{1}{1 - 2x}$$

Če želimo, lahko to pretvorimo še v eksplicitno formulo.

$$F(x) = \frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \implies a_n = 2^n$$

Primer. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$. Primer je prepuščen bralcu. Rešitev je $F(x) = \frac{1+x}{1-3x+2x^2}$ oziroma $a_n = 3 \cdot 2^n - 2$

Poskusimo posplošiti zgornji postopek za poljubno homogeno linearno rekurzivno enačbo.

Izrek 4.14 (Recept za reševanje homogene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti)**.**

$$c_d a_n + c_{d-1} a_{n-1} + \cdots + c_0 a_{n-d} = 0 \quad n \geqslant d$$

Zapišimo karakteristični polinom

$$c_d \lambda^d + c_{d-1} \lambda^{d-1} + \cdots + c_0 \quad (c_d, c_0 \neq 0, c_i \in \mathbb{C})$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ničle z večkratnostmi $\alpha_1, \ldots \alpha_k$.

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \lambda_i^n, \quad deg(p_i) < \alpha_i$$

Dokaz. Pomnožimo vrsto z x^n in seštejmo od d do ∞.

$$c_d a_n + c_{d-1} a_{n-1} + \cdots + c_0 a_{n-d} = 0 \quad /x^n / \sum_{n=d}^{\infty}$$

$$
\begin{aligned}
0 = {} & c_d(F(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{d-3}x^{d-3} - a_{d-2}x^{d-2} - a_{d-1}x^{d-1}) \\
& + c_{d-1}x(F(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{d-3}x^{d-3} - a_{d-2}x^{d-2}) \\
& + c_{d-2}x^2(F(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{d-3}x^{d-3}) \\
& + \cdots \\
& + c_1x^{d-1}(F(x) - a_0) \\
& + c_0x^dF(x)
\end{aligned}
$$

$F(x)(c_d + c_{d-1}x + c_{d-2}x^2 + \cdots + c_1x^{d-1} + c_0x^d) = P(x)$ polinom stopnje < d

$$F(x) = \frac{P(x)}{c_d + c_{d-1}x + c_{d-2}x^2 + \cdots + c_1x^{d-1} + c_0x^d}$$

Karakteristični polinom: $c_d\lambda^d + c_{d-1} + \lambda^{d-1} + \cdots + c_0$ z ničlami $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{P(x)}{c_d \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i x)^{\alpha_i}} = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(1 - \lambda_i x)^j} = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + j - 1}{j - 1} \lambda_i^n x^n
\end{aligned}
$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{ij} \binom{n + j - 1}{j - 1}) \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \lambda_i^n$$

$$\binom{nj - 1}{j - 1} = \frac{(n + j - 1)(n + j - 2)...(n + 1)}{(j + 1)!}$$

polinom stopnje (j - 1) $\implies deg(p_i) < \alpha_i$

■

Izrek 4.15 (Reševanje nekaterih nehomogenih rekurzivnih enačb)**.**

$$c_d a_n + c_{d-1} a_{n-1} + ... + c_0 a_{n-d} = q(n) \lambda^n$$

Rešitev je vsota rešitve homogene enačbe in partikularne rešitve, ki jo poiščemo z nastavkom

$$a_n = n^\alpha r(n) \lambda^n$$

deg$(r(n)) \leqslant$ deg(q), α-kratnost λ v karakterističnem polinomu,

$$\alpha \geqslant 0, \quad \alpha = 0 \iff \lambda \text{ ni ničla}$$

Dokaz. Prepuščen bralcu. ■

4.4 Binomska vrsta

Spomnimo se biomskega koeficienta za $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right| = \frac{n^{\underline{k}}}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} : 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 : k > n \end{cases}$$

Definicija 4.16 (Posplošeni binomski koeficient)**.** Zahtevamo samo $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1)}{n!}$$

Kjer je $\lambda \in K$, K konvergentni obseg s karakteristiko 0, npr $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{C}^2$.

Primer. $\binom{\frac{5}{2}}{3} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{16}$

Primer. $\binom{i}{2} = \frac{i(i-1)}{2} = \frac{-1-i}{2}$

Primer. $\binom{-1}{n} \frac{(-1)(-2)...(-n)}{n!} = (-1)^n$

Primer. $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{-k}{n} = \frac{-k(-k-1)...(-k-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+k-1)...(k+1)k}{n!} \cdot \frac{(k-1)!}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n(n+l+k-1)!}{n!(k-1)!} = (-1)^n \binom{n+k-1}{k-1}$$

Primer.

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!}$$

Uporabimo simbol !!. Velja $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ oziroma za soda števila: $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$. Pri sodih številih pa lahko izpostavimo 2, da dobimo $6!! = 2^3 \cdot 3!$.

$$\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} \cdot n} \binom{2n-2}{n-1}$$

Če smo malo previdni, opazimo, da to deluje samo pod pogojem $n \geqslant 1$, sicer je $\binom{\frac{1}{2}}{n} = 0$.

Definicija 4.17 (Binomska vrsta)**.** Naj bo K obseg in $\lambda \in K$.

$$B_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n$$

$$= 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6} x^3 + ...$$

Opomba. Zapis $B_\lambda(x) = \sum_{n=0} \binom{\lambda}{n} x^n$ je napačen! Lahko je bodisi $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\sum_{n=0}^{\infty}$ ali $\sum_{n=0}^{\lambda}$.

Primer. Če za λ vzamemo $n \in \mathbb{N}$, dobimo binomski izrek.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

Primer. Če za λ vzamemo $-k$, $k \in \mathbb{N}$, dobimo

$$B_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k-1}{k-1} x^n = (1+x)^{-k}$$

Zadnjo enakost smo dokazali v prejšnjem razdelku (glej 4.13).

Opazimo očiten vzorec. Ali bi lahko posplošili pravilo $B_\lambda(x) = (1+x)^\lambda$? Natančneje, če bi definirali npr. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ tako, da velja $((1+x)^{\frac{1}{2}})^2 = 1$, ali lahko pričakujemo, da je $B_{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$? Vse to in še več bomo lahko trdili, ko dokažemo $B_\lambda(x) \cdot B_\mu(x) = B_{\lambda+\mu}(x)$.

Lema 4.18 (Binomski izrek s črtico)**.**

$$(a+b)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\overline{n-k}} b^{\overline{k}}$$

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\underline{n-k}} b^{\underline{k}}$$

Dokaz. Z indukcijo.
Baza indukcije: $n = 0$, $1 = 1$ ✓

Indukcijski korak: $n-1 \implies n$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)^{\underline{n}} &= (\lambda+\mu)^{\underline{n-1}}(\lambda+\mu-n+1) = \\ &\overset{IP}{=} \sum_k \binom{n-1}{k}\lambda^{\underline{k}}\mu^{\underline{n-1-k}}(\lambda-k+\mu+k-n+1) = \\ &= \sum_k \binom{n-1}{k}\lambda^{\underline{k+1}}\mu^{\underline{n-1-k}} + \sum_k \binom{n-1}{k}\lambda^{\underline{k}}\mu^{\underline{n-k}} = \\ &= \sum_k \binom{n-1}{k-1}\lambda^{\underline{k}}\mu^{\underline{n-k}} + \sum_k \binom{n-1}{k}\lambda^{\underline{k}}\mu^{\underline{n-k}} = \\ &= \sum_k \binom{n}{k}\lambda^{\underline{k}}\mu^{\underline{n-k}}\end{aligned}$$

Dokaz za naraščajoče potence prepustimo bralcu. ■

4.4.1 Catalanova števila

Definicija 4.19 (Catalanovo število)**.** C_n je število pravilnih postavitev oklepajev na nizu $n+1$ števil $(t_0\ t_1\ t_2\ \dots\ t_n)$.

Prvih nekaj Catalanovih števil (od $n=0$ dalje): $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$.

$n=0$	(t_0)				
$n=1$	(t_0t_1)				
$n=2$	$(t_0t_1)t_2$	$t_0(t_1t_2)$			
$n=3$	$((t_0t_1)t_2)t_3$	$(t_0t_1)(t_2t_3)$	$t_0(t_1(t_2t_3))$	$(t_0(t_1t_2))t_3$	$t_0((t_1t_2)t_3)$

Poiščimo rekurzivno zvezo za C_n. Za rekurzivni korak bomo izbrali lokacijo zadnjega množenja (stik najbolj zunanjih oklepajev).

Primer. Pri $((t_0t_1)t_2)t_3$ je "zadnje množenje" med $((t_0t_1)t_2)$ in t_3, pri $(t_0t_1)(t_2t_3)$ pa med (t_0t_1) in (t_2t_3).

V splošnem, $(t_0t_1\dots t_k)\cdot(t_{k+1}\dots t_{n+1})$, kjer velja $0 \leqslant k \leqslant n$. Ostane nam še izbira oklepajev med k členi in $(n+1)-(k+1) = n-k$ členi.

Izrek 4.20 (Rekurzivna zveza za C_n)**.**

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \qquad n \geqslant 0$$

Ker smo kul matematiki, se ne bomo zadovoljili zgolj z rekurzivno zvezo.

Izrek 4.21 (Eksplicitna formula za C_n)**.**

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Dokaz. Definirajmo $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Pomnožimo rekurzijo z x^{n+1} in seštejmo člene $\sum_{n=0}^{\infty}$, kot smo to počeli pri linearnih rekurzijah.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k)x^{n+1}$$

Levo stran izrazimo kot $F(x)-1$, na desni strani pa opazimo konvolucijo $F(x)$ s samim sabo. Dobimo torej $xF^2(x)$. Če enakost preoblikujemo, dobimo $xF^2(x) - F(x) + 1 = 0$.

Kaj pa zdaj? No, ko vidimo kvadratno enačbo, nas ima, da bi jo rešili. Poskusimo s kvadratno enačbo

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Sedaj pa se vprašajmo, če je ta izraz kaj smiseln. Če začnemo s členom $\sqrt{1-4x}$, lahko uporabimo binomsko vrsto.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n}\binom{2n-2}{n-1}x^n \\
\sqrt{1-4x} &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{2^{2n}}n}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n
\end{aligned}$$

Nadaljujemo tako, da izračunano vstavimo v prvotno ničlo.

$$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n}{2x} \qquad \notin k[[x]]$$

To na žalost ni formalna potenčna vrsta, saj delimo neko vrsto z x-om, ki se ne more izpostaviti.

Po drugi strani, če vzamemo drugo ničlo, se nam člen 1 krajša, ostane pa lepa formalna potenčna vrsta.

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}$$

Ta vrsta tudi reši našo kvadratno enačbo.

$$x(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x})^2 - \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} + 1 \underset{\sqrt{1-4x}^2=1-4x}{=} 0$$

Zato je to naša rešitev.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$$

■

Primer. $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{6}} = 5$

Primer. $C_5 = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{\overset{\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 42$

Catalanova števila so zelo pogosta v kombinatoriki. Dva primera uporabe sta:

- Dyckove poti dolžine n. To so poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$ s koraki diagonalno gor $(1,1)$ in diagonalno dol $(1,-1)$, a nikoli ne grejo pod x os.
- Triangulacije $(n+2)$-kotnika. To pomeni dodajanje diagonal $(n+2)$-kotniku, dokler nimamo samih trikotnikov.

Te dve uporabi lahko dokažete bodisi tako, da najdete bijekcijo med želenimi konstrukcijami in postavljanjem oklepajev, bosidi pokažete, da ima konstrukcija isto rekurzivno zvezo.

V knjigi Enumerative Combinatorics je 66 matematičnih struktur, ki jih preštevajo Catalanova števila. Na spletni strani Richarda Stanlyja jih je še več kot 100.

4.5 Rodovne funkcije razčlenitev

Spomnimo se na razčlenitve in števila $p_k(n), \overline{p_k}(n), p(n)$.

Primer. $n = 5, k = 3 : (3\ 2), (3\ 1\ 1), (2\ 2\ 1), (2\ 1\ 1\ 1), (1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

Ugotovili smo že, kako izračunati koeficient pri $[x^5]$ pri izrazu kot je $(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\ldots$. Kaj pa če koeficienti niso povsod enaki?

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots) \qquad [x^5]$$

Izberemo nekaj iz prvega oklepaja, prištejemo 2· nekaj iz drugega in 3· nekaj iz tretjega.

$x^5 = x^{0\cdot 1}\cdot x^{1\cdot 2}\cdot x^{1\cdot 3} = x^{2\cdot 1}\cdot x^{0\cdot 2}\cdot x^{1\cdot 3} = x^{1\cdot 1}\cdot x^{2\cdot 2}\cdot x^{0\cdot 3} = x^{3\cdot 1}\cdot x^{1\cdot 2}\cdot x^{0\cdot 3} = x^{5\cdot 1}\cdot x^{0\cdot 2}\cdot x^{0\cdot 3}$

To je enak problem, kot če bi hoteli zapisati število 5 kot vsoto števil 1, 2 in 3. Zgoraj bi to izgledalo (z enakim vrstnim redom)

$$5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1$$

Trditev 4.22.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{p_k}(n)x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i}$$

Dokaz. Koeficient na obeh straneh je število rešitev enačbe

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_k \cdot k = n$$

$$\sum_n p_k(n)x^n = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^k+x^{2k}+\ldots)$$

$p_k(n)$ = število razčlenitev n s k členi $\leqslant k$, kjer je vsaj en člen $= k$. ∎

Trditev 4.23.
$$\sum_n p_k(n)x^n = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^{k}(1-x^i)}$$

Trditev 4.24.
$$\sum_n p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$$

Pri $[x^n] : (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^n+x^{2n}+\ldots)\underbrace{(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\ldots)\ldots}_{\text{ignoriramo}}$

$$\Longrightarrow \overline{p_n}(n) = p(n)$$

Primer. $o(n)$ je število razčlenitev n s samimi lihimi členi

$$\sum_n o(n)x^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i-1}}$$

Primer. $d(n)$ je število razčlenitev n z različnimi členi

$$\begin{aligned}\sum_n d(n)x^n &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)\cdot\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}\\ &= \frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}\\ &= \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}\\ &\implies o(n)=d(n)\end{aligned}$$

4.6 Uporaba rodovnih funkcij

(1) Rodovna funkcija je pogosto "lepa", tudi če za zaporedje nimamo "lepe" formule.

Primer. $\sum_k c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$.

(2) Rodovno funkcijo se da pogosto zapisati iz kombinatoričnega problema (več pri kombinatoriki 2).

Primer. i_n je število involucij v S_n, torej $\pi^2 = id$, $\sum i_n \frac{x^n}{n!} = e^{x+\frac{x^2}{2}}$. Pomen: e na nekaj sestavljeno iz x (cikli dolžine 1) in $\frac{x^2}{2}$ (cikli dolžine 2).

(3) V rodovni funkciji so "skriti" vsi drugi zapisi zaporedja.

Primer. $\sum_n F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2} \to (1-x-x^2)\sum_n F_n x^n = 1$.

$$[x^n] : F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

asimptotika: vzamemo singularnost (x_0), ki je najbližje izhodišču

$$F_n \sim An^B(\frac{1}{x_0})^n$$

(4) Iz rodovnih funkcij lahko izračunamo še drugo: povprečje, varianco ... npr. koliko elementov ima v povprečju podmnožica $[n]$?

$$\frac{\sum_{S\subseteq[n]}|S|}{2^n} = \frac{\sum_k k\cdot\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

5 Pólyeva teorija

Primer. Koliko je ogrlic z n koraldami k barv? Dve ogrlici sta enaki, če eno iz druge dobimo z rotacijo.

Primer. Koliko je zapestnic z n koraldami r barvami? Dve zapestnici sta enaki, če eno iz druge dobimo z rotacijo ali zrcaljenjem.

Nekateri objekti so ekvivalentni, zanima nas število ekvivaletnih razredov barvanj.

Definicija 5.1 (Permutacijska grupa)**.** je grupa $G \leq S_n$

Izrek 5.2 (Cayleyev)**.** Vsaka grupa je izomorfna neki permutacijski grupi.

Dokaz. Naj bo G poljubna grupa in $g \in G$. Definirajmo $T_g : G \to G$:

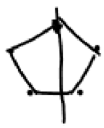
$$T_g(x) = gx$$

T_g je permutacija množice G.
$H = \{T_g : g \in G\}$ je grupa za komponiranje.
$H \cong G$ ∎

Primer (Ciklična grupa). $C_n = \{(1\ 2\ 3\ \dots\ n)^i : 0 \leq i \leq n\} \leq S_n$
$C_n \cong \mathbb{Z}_n$
$\phi : \mathbb{Z}_n \to C_n := i \to (1\ 2\ \dots\ n)^i$

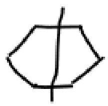
Primer (Diedrska grupa). $D_n = \{\text{rotacije} + \text{zrcaljenja}\} \leq S_n$
$|D_n| = 2n$ (n zrcaljenj in n rotacij)

n lih



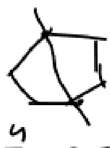
n zrcaljenj

n sod



tip I

$\frac{n}{2}$ zrcaljenj



tip

$\frac{n}{2}$ zrcaljo

Definicija 5.3 ($x \sim y$)**.** $\exists g \in G : g \cdot x = y$

Trditev 5.4. $\sim$ je ekvivalenčna relacija.

X z operacijo $\sim$ razpade na ekvivalenčne razrede, ki jih imenujemo orbite. Orbito elementa x v G označimo Gx ($\neq G_x$!!).

5.1 Orbite, stabilizatorji in negibne točke

Definicija 5.5 (Orbita)**.**

$$Gx = g \cdot x : g \in G$$

Opomba. Koncept orbit spominja na leve (desne) odseke, a ni isto. Pri odsekih imamo podgrupo, tukaj pa x niti ni element G. Pomembna posledica je, da so orbite lahko različno velike, odseki pa so po moči vedno enaki ($|aH| = |bH|$).

Primer. Za $G = C_n, D_n$ ali S_n velja $Gx = X$ (samo ena orbita).

Primer.

$$G = \{\text{id, zrcaljenje}\} \leq S_n$$

$$\text{število orbit} = \begin{cases} \frac{n+1}{2}; & n \text{ lih} \\ \frac{n}{2}; & n \text{ sod, zrcaljenje tipa 1} \\ \frac{n}{2} + 1; & n \text{ sod, zrcaljenje tipa 2} \end{cases}$$

Množico orbit označimo z X/G.

Opomba. Na enak način smo označili tudi faktorske grupe (množice odsekov), a koncept ni isti, ker orbita $\neq$ odsek (glej opombo 5.1 pri definiciji orbite).

Definicija 5.6 (Stabilizator)**.**

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Elemente G_x ($\neq Gx$!!) imenujemo stabilizatorji x-a.

Definicija 5.7 (Negibna točka)**.**

$$X_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$$

Elemente X_g imenujemo negibne točke g-ja.

Izrek 5.8.

$$G_x \leq G$$

Dokaz.

$$id \in G_x$$

$$g, h \in G_x \implies g \cdot x = x, h \cdot x = x$$

$$\implies (g \cdot h) \cdot x = g \cdot (g \cdot x) = g \cdot x = x$$

$$\implies g \cdot h \in G_x$$

$$g \in G_x \implies g \cdot x = c \implies g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot x = x$$

$$\implies g^{-1} \in G_x$$

■

Primer. $G = C_n$
$G_x = \{id\}$
$$X_g = \begin{cases} x : g = id \\ \emptyset : g \neq id \end{cases}$$

Primer. $G = D_n$
$G_x = \{id, \text{zrcaljenje}\}$
$$X_g = \begin{cases} n : g = id \\ 0 : (g \text{ rotacija) ali } (g \text{ zrcaljenje tipa 1 in } n \text{ sod}) \\ 1 : g \text{ zrcaljenje, } n \text{ lih} \\ 2 : g \text{ zrcaljenje tipa 2, } n \text{ sod} \end{cases}$$

Trditev 5.9.
$$|G| = |G_x| \cdot |Gx| \quad \forall x \in X$$

Dokaz. Spomnimo se levih odsekov ...

$$H \leq G \models g \cdot H = \{g \cdot h : h \in H\} \quad \text{je levi odsek v } G$$

$$g = e \implies g \cdot H = H$$

$g \cdot H$ in $g' \cdot H$ sta bodisi enaka, bodisi disjunktna. G torej razpade na leve odseke, ki imajo enako moč ($H \to gH$ je bijekcija; inverz $g \to g^{-1}h$).
... in kvocientnih množic

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} \quad (\text{torej } |H| \text{ deli } |G|)$$

Uporabimo za $H = G_x$ Vemo, da velja

$$|G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

Definirajmo
$$\phi : Gx \to G/G_x \quad \text{kot} \quad g \cdot x \to gG_x$$

ϕ je očitno bijekcija, torej imata Gx in G/G_x enako moč. Velja torej

$$|G_x| \cdot |Gx| = |G_x| \cdot |G/G_x| = |G_x| \cdot \frac{|G|}{|G_x|} = |G|$$

Pozor! g ni enolično določen. Pokažimo, da je ϕ dobro definirana (za nek vhod dobimo enoličen izhod).

$$g{\cdot}x = h{\cdot}x \iff h^{-1}{\cdot}g{\cdot}x = x \iff h^{-1}{\cdot}g \in G_x \iff h^{-1}{\cdot}g{\cdot}G_x = G_x \iff g{\cdot}G_x = h{\cdot}G_x$$

Hkrati smo pokazali, da je injektivna (ker so vmes ekvivalence, ne samo implikacije). Pokažimo še, da je surjektivna:

$$gG_x = \phi(g \cdot x)$$

$$\implies |G_x| = \frac{G}{G_x}$$

∎

Primer. Preštej simetrije tetraedra.
$|G| = |G_x||Gx| = 3 \cdot 4 = 12$
id + rotacije za 120° + rotacije za 180°
$1 + 4 \cdot 2 + 3 = 12$

Primer. Preštej simetrije kocke.
$|G| = |G_x||Gx| = 3 \cdot 8 = 24$

5.2 Burnsidova lema

Lema 5.10 (Burnsidova)**.** Število orbit je enako povprečnemu številu negibnih točk.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

Dokaz.

$$\sum_{g\in G} |X_g| = \sum_{g\in G} \sum_{x \in X_g} 1 = \sum_{g\in G} \sum_{\substack{x\in X \\ g\cdot x = x}} 1 = \sum_{x\in X} \sum_{\substack{g\in G \\ g\cdot x = x}} 1 = \sum_{x\in X} \sum_{g\in G_x} 1 = \sum_{x\in X} |G_x|$$

Opomba. Ta del bi lahko utemeljili tudi s tabelco: v vrstice napišemo elemente X, v stolpce elemente G. Na polju (g, x) naredimo kljukico ntk. $g \cdot x = x$. Število kljukic po vrsticah je $\sum_{x\in X} |G_x|$, število kljukic po stolpcih pa $\sum_{g\in G} |X_g|$.

$$\sum_{g\in G}|X_g| = \sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|} = |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}$$

Analizirajmo pomen faktorja $\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}$. Za vsak x iz naše množice vzamemo inverz moči njegove orbite. Ker vsak x pripada natanko eni orbiti, in ker ima vsaka orbita natanko toliko x-ov, kolikor je njena moč, dobimo sledečo sliko

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{=1}+\underbrace{\frac{1}{1}}_{=1}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=1}+\ldots = \text{število orbit}$$

oziroma računsko (oznaka σ = orbita)

$$\sum_{x\in\sigma}\frac{1}{|\sigma|} = |\sigma|\cdot\frac{1}{|\sigma|} = 1$$

kar lahko uporabimo, da poenostavimo

$$|G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = |G|\sum_{\sigma\in X/G}\sum_{x\in\sigma}\frac{1}{|\sigma|} = |G|\sum_{\sigma\in X/G}1 = |G|\cdot|X/G|$$

■

Primer. $G = C_n$. $|X/G|$ je očitno 1, saj lahko iz ene točke z rotacijami v ciklu pridemo kamorkoli, torej imamo samo eno orbito. Ko seštevamo števila negibnih točk, ugotovimo, da jih je pri identiteti n, pri ostalih $n-1$ ciklih pa nobene.

$$1 = \frac{1}{n}(n + (n-1)\cdot 0)$$

Primer. $G = D_n$. Spet imamo očitno samo 1 orbito. Na desni strani pa štejemo: n negibnih točk pri identiteti, $(n-1)$ pravih rotacij, ki nimajo nobene negibne točke, n zrcaljenj z 1 negibno točko če je n lih, sicer pa še $\frac{n}{2}$ zrcaljenj preko simetrale stranic (0 negibnih točk) in $\frac{n}{2}$ zrcaljenj preko diagonale (2 negibni točki).

$$n \text{ lih:}\quad 1 = \frac{1}{2n}(n + (n-1)\cdot 0 + n\cdot 1)$$

$$n \text{ sod:}\quad 1 = \frac{1}{2n}(n + (n-1)\cdot 0 + \frac{n}{2}\cdot 0 + \frac{n}{2}\cdot 2)$$

Primer. $G = \{\text{id}, \text{zrcaljenje}\}$. Ločimo primera glede na parnost n-ja in tip zrcaljenja.

$$n \text{ lih, zrcaljenje preko točke:} \quad 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$n \text{ sod, zrcaljenje preko točk:} \quad 2 + \frac{n-2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)$$

$$n \text{ sod, zrcaljenje preko stranice:} \quad \frac{n}{2} = \frac{1}{2}(n+0)$$

Primer. $G = S_n$.

$$1 = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \#\text{negibnih točk } \pi$$

Ugotovili smo, da je vsota števil negibnih točk vseh permutacij enaka $n!$. To ni povsem očitno, ampak lahko sami preverite.

Primer. 3×3 mreža z 2 luknjama. Koliko različnih konfiguracij obstaja, če konfiguraciji smatramo za enaki ntk. lahko eno dobimo iz druge z rotacijami in zrcaljenji?
Vzemimo za X množico vseh izbir lukenj na plošči ($|X| = \binom{9}{2} = 36$). Na tej množici deluje D_4 ($|D_4| = 8$). Pri identiteti imamo torej 36 negibnih točk, pri rotacijah za 90° vedno 0, pri rotacijah za 180° lahko izberemo katerkoli nasprotni par lukenj (4 možne izbire), pri vodoravnih in navpičnih zrcaljenjih $6+6$, pri diagonalnih zrcaljenjih pa še $2 \cdot 6$ izbir.

$$\frac{1}{8}(36 + 0 + 4 + 12 + 12) = 8$$

Opomba. Če tu ne dobimo naravnega števila, smo falili.

5.3 Ciklični indeks

Naj bo $G \leq S_n$ permuatacijska grupa, $n = |X|$. $g \in G$ je permutacija elementov iz X, ki jo seveda lahko enolično zapišemo g kot produkt disjunktih ciklov.

Definicija 5.11 (Ciklični indeks)**.** Označimo z $\alpha_i(g)$ število ciklov dolžine i. Ciklični indeks $Z_G(t_1, \ldots, t_n)$ definiramo kot

$$Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{\alpha_1(g)} t_2^{\alpha_2(g)} \cdots t_n^{\alpha_n(g)}$$

Primer. $G = C_4$. $|G| = 4$. Za vsak element grupe pogledamo kakšna je ciklična struktura. *id* ima 4 cikle dolžine 1, torej dobimo člen $(t_1)^4$. Rotacija za 180° ima 2 cikla dolžine 2 ((1 2 3 4) in (1 4 3 2)), torej $(t_2)^2$, vsaka od dveh rotacij za 90° pa je cikel dolžine 4, torej $2 \cdot (t_4)^1$.

$$Z_{C_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}((t_1)^4 + (t_2)^2 + 2 \cdot t_4)$$

Primer. $G = D_4$. Imamo identiteto, rotacijo za 180°, dve rotaciji za 90°, 4 zrcaljenja (vodoravno, navpično in dve diagonalni). $Z_{D_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{8}((t_1)^4 + (t_2)^2 + 2t_4 + 2(t_2)^2 + 2(t_1)^2 t_2)$.

Izrek 5.12 (Ciklični indeks C_n)**.**

$$Z_{C_n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) \cdot (t_{\frac{n}{d}})^d$$

Izrek 5.13 (Ciklični indeks D_n)**.**

$$Z_{D_n} = \frac{1}{2} Z_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2} t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}} & : n \text{ lih} \\ \frac{1}{4} t_2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1} & : n \text{ sod} \end{cases}$$

Opomba (Formula za Eulerjevo funkcijo).

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \in \mathbb{P}}} (1 - \frac{1}{p})$$

Dokaz. Ciklična grupa je sestavljena iz dolgega cikla in vseh njegovih potenc. $C_n = \{(1 \ \ldots \ n)^i : 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$. Kakšnega tipa je dolg cikel na neko potenco?

$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 = (1\,3\,5)(2\,4\,6)$.

$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^3 = (1\,4)(2\,5)(3\,6)$.

$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^4 = (1\,5\,3)(2\,6\,4)$.

$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^5 = (1\,6\,5\,4\,3\,2)$.

Opazimo, da velja

$$d|n \implies (1\ 2\ \ldots\ n)^d = (1\ \ (d{+}1)\ \ (2d{+}1)\ \ \ldots)(2\ \ (d{+}2)\ \ (2d{+}2)\ \ \ldots) \cdots$$

Kar pomeni, da je $(1\ 2\ \dots\ n)^d$ produkt d ciklov dolžine $\frac{n}{d}$. Hkrati, če $d \perp n$, je $(1\ 2\ \dots\ n)^d$ en sam cikel dolžine d.

Vzemimo $d = \gcd(n, i)$, $n = d \cdot n'$, $i = d \cdot i'$. Vemo, da $\gcd(n', i') = 1$. Po prejšnjih ugotovitvah velja

$$(1\ 2\ \dots\ n)^i = ((1\ 2\ \dots\ n)^d)^{i'}$$

Ker je $(1\ 2\ \dots\ n)^d$ produkt d ciklov dolžine n' in ker sta si n' in i' tuji, je rezultat še vedno produkt d ciklov dolžine $n' = \frac{n}{d}$. Doprinos k cikličnemu indeksu bo $(t_{\frac{n}{d}})^d$. Kolikokrat pa dobimo ta člen? Tolikokrat, kolikor je i-jev, da je $\gcd(n, i) = d$. To nam pove Eulerjeva funkcija $\phi(\frac{n}{d})$. ■

Opomba. d lahko zamenjamo z $\frac{n}{d}$. Dobimo popolnoma ekvivalentno formulo

$$Z_{C_n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) \cdot (t_d)^{\frac{n}{d}}$$

Dokaz. Še za D_n.

$$Z_{D_n} = \frac{1}{2} Z_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2} t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}} & : n \text{ lih} \\ \frac{1}{4} t_2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1} & : n \text{ sod} \end{cases}$$

Prvi del so rotacije, ki jih je enako kot pri C_n (deliti moramo z $\frac{1}{2}$, ker ima D_n dvakrat več elementov; na začetku delimo z $2n$ namesto z n). Prišteti moramo le še zrcaljenja.

Če je n lih, so vsa zrcaljenja istega tipa. Takih zrcaljenj je n. Ko delimo s številom elemenotov $(2n)$, je to $\frac{1}{2}$. Doprinos od enega zrcaljenja je 1 negibna točka in $\frac{n-1}{2}$ parov točk, ki se izmenjajo.

Če je n sod, ločimo na $\frac{n}{2}$ zrcaljenj prek točke in $\frac{n}{2}$ zrcaljenj prek stranice. Spet delimo še z $2n$, ostane $\frac{1}{4}$. Pri zrcaljenju čez simetralo stranic dobimo $\frac{n}{2}$ 2-ciklov. Pri zrcaljenju čez točki imamo 2 negibni točki, nato pa ostalih $n - 2$ oglišč razdelimo v pare. ■

5.4 Število ekvialentnih barvanj

V tem razdelku bomo ugotovili pravo uproabnost Burnsidove leme.

Definicija 5.14 (Barvanje)**.** Če je R množica barv, je barvanje $b \in R$ preslikava iz množice korald v množico barv $b : X \to R$. R^X je tedaj množica barvanj.

Namesto da permutiramo koralde, lahko G razumemo tudi kot grupo permutacij barvanj (podgrupo S_{R^X}). Ker je g permutacija korald, moramo posebej definirati, kako uporabimo $g \in G$ na barvnju $b \in R^X$.

Definicija 5.15 (Permutacija barvanja)**.** $g \cdot b(x) := b(g^{-1} \cdot x)$

S tem smo dobili izomorfno permutacijsko grupo. Ne bom bolj natančno povedal, kaj s tem mislim.

Nas zanima število neekvivalentnih barvanj naše ogrlice. To je ravno število orbit naše grupe permutacij barvanj ($G = C_n$ za število barvanj ogrlic, $G = D_n$ za število barvanj zapestnic). Po Burnsidovi lemi moramo izračunati povprečno število negibnih točk.

Primer. $n = 6$, $r = 2$, g je rotacija za $120°$. Koliko je negibnih točk za barvanje? Pozor: za permutacijo korald pri taki rotaciji nimamo negibnih točk. Mi štejemo negibne točke barvanj. Take negibne točke so: barvanje, kjer so vse koralde bele/črne in barvanje kjer je vsaka druga koralda bela/črna. Imamo torej 4 negibne točke.

Primer. Če bi v prejšnjem primeru vzeli rotacijo za $60°$, bi imeli 2 negibni točki. Če bi vzeli rotacijo za $180°$, bi imeli 8 negibnih točk.

V splošnem: iščemo permutacij barvanj, kjer je $b = g \cdot b$, oziroma $g \cdot b(x) = b(g^{-1} \cdot x) = b(x)$ za vsak $x \in X$. Drugače rečeno, iščemo število g-jev, kjer sta x in $g^{-1} \cdot x$ vedno iste barve. Za vsak tak g velja, da so tudi $gx, g^2x, g^3x, \ldots$ iste barve.

Ugotovimo, da je edina zahteva, da mora biti vsak cikel g v celoti iste barve. Torej je število negibnih barvanj enako $r^{c(g)}$, kjer je $c(g)$ število ciklov v g, oziroma $c(g) = \sum\limits_i \alpha_i(g)$.

Izrek 5.16 (Pólyev izrek)**.** Število neekvivalentnih barvanj je enako

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{c(g)} = Z_g(r, \ldots, r)$$

Primer. Število ogrlic z n koraldami in r barvami je $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) \cdot r^{\frac{n}{d}}$.

Primer. Število zapestnic z n koraldami in r barvami je

$$\frac{1}{2n} \sum_{d|n} \phi\Big(\frac{n}{d}\Big) r^d + \begin{cases} \frac{1}{2} r^{\frac{n+1}{2}}; n \text{ lih} \\ \frac{1}{4} r^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} r^{\frac{n}{2}+1}; n \text{ sod} \end{cases}$$

Primer. Na koliko načinov lahko pobarvamo oglišča tetraedra z r (različnimi) barvanji?
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{grupa rotacij tetraedra}}}{Z_G}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{12}(t_1^4 + 8t_1t_3 + 3t_2^2)$ (začunano prej)

Primer ($G = S_n$).

$$\frac{1}{n!}\sum_k c(n,k)r^k$$

Barvanji sta ekvivalentni, če in samo če imata enako število korald iste barve

$$\sum_k c(n,k)r^k = r^{\overline{n}}$$

Kaj, če nas zanima, koliko je zapestnic z določenim številom korald posamezne barve?

Primer. Enumerator barvanj:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{4 koralde barve 1}}}{u_1^4} + u_1^3u_2 + 2u_1^2u_2^2 + u_1u_2^3 + u_2^4$$

Definicija 5.17 (Enumerator barvanj)**.** note: R^x/G mnozica vseh neekvivalentnih barvanj

$$E_G(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{Gb \in R^x/G} \Pi_{i=1}^r u_i^{|b^{-1}(i)|}$$

Izrek 5.18 (Posplositev Pólyevega izreka)**.**

$$E_G(u_1, \ldots, \ldots_r) = Z_G(u_1 + \cdots + u_r, u_1^2 + \cdots + u_r^2, u_1^3 + \cdots + u_r^3, \ldots, u_1^n + \cdots + u_r^n)$$

Brez dokaza (Burnsidova lema na množici barvanj s fiksnimi $|b^{-1}(i)|$)

Primer ($G = C_4$). $r = 2 :$ $Z_G(u_1+u_2, u_1^2+u_2^2, u_1^3+u_2^3, u_1^4+u_2^4) = \frac{1}{4}\left((u_1 + u_2)^4 + 2(u_1^4 + u_2^4) + (u_1^2 +\right.$

Primer. Koliko je neekvivalentnih barvanj ploskev tetraedra z 2 črnima, 1 rdečo in 1 modro ploskvijo?
1 nacin

Če v posplositev Pólyevega izreka vstavimo $u_i = 1$, dobimo Pólyev izrek