

## 1 Osnovne enačbe

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\kappa_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} u'_x + \cos \varphi_0 \\ u'_z + \sin \varphi_0 \\ \varphi' \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_z \\ m_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{(\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{(n)}_{(\varphi)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \mathbf{R}_{(\varphi)}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}_{(\varphi)} \mathbf{d} + \mathbf{e}_0 \quad \mathcal{R} = \mathbf{R}^T_{(\varphi)} \mathbf{C} \mathbf{e} \quad \mathcal{N} = \mathbf{C} \mathbf{e}$$

$$\delta \mathbf{e} = \delta \varphi \mathbf{R}^{(1)}_{(\varphi)} \mathbf{d} + \mathbf{R}_{(\varphi)} \delta \mathbf{d}$$

$$\delta \mathcal{R} = \delta \varphi ((\mathbf{R}^{(1)})^T_{(\varphi)} \mathbf{C} \mathbf{e} + \mathbf{R}^T_{(\varphi)} \mathbf{C} \mathbf{R}^{(1)}_{(\varphi)} \mathbf{d}) + \mathbf{R}^T_{(\varphi)} \mathbf{C} \mathbf{R}_{(\varphi)} \delta \mathbf{d}$$

$$\delta \mathcal{N} = \delta \varphi \mathbf{C} \mathbf{R}^{(1)}_{(\varphi)} \mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{R}_{(\varphi)} \delta \mathbf{d}$$

$$\mathcal{F} = \int_0^l -\mathcal{R} \mathcal{P}'_i + (\mathbf{p} - \rho_A \dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{N}_1 \mathbf{e}_2 - (1 + \mathbf{e}_1) \mathcal{N}_2 \end{bmatrix}) \mathcal{P}_i \, dx + \mathcal{R} \mathcal{P}_i \Big|_0^l$$

$$\delta \mathcal{F} = \int_0^l -\delta \mathcal{R} \mathcal{P}'_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}_2 \delta \mathcal{N}_1 + \delta \mathbf{e}_2 \mathcal{N}_1 - (1 + \mathbf{e}_1) \delta \mathcal{N}_2 - \delta \mathbf{e}_1 \mathcal{N}_2 \end{bmatrix} \mathcal{P}_i \, dx$$

Bi moral v  $\delta \mathcal{F}_3$  (enačba 3) namesto  $\delta \mathcal{R}_3$  uporabiti  $\delta \mathcal{N}_3$ ? Sta različna? Če ja, potem sta najverjetneje zaradi člena  $\delta \varphi$ . Mislim, da sta enaka. Člen pri  $\delta \varphi$  odpade zaradi ničelne 3. vrstice v  $\mathbf{R}^{(1)}$ , člen z  $\delta \mathbf{d}$  pa ima v  $\mathbf{R}$  vrstico indentitete.

Zdelo bi se smiselno, da bi bile nekatere izmed matrik  $\mathbf{R}$  transponirane.  $\mathbf{d}$  slikamo v lokalno bazo, množimo z  $\mathbf{C}$ , da dobimo sile v lokalnih oseh in nato transformiramo z  $\mathbf{R}^T$  nazaj v izvirne koordinate. Lahko je tudi obratni vrstni red transponirane in ne transponirane.

## 2 Numerični račun

Poznamo količine v času  $t_n$ . Za  $t_{n+1}$  predpostavimo hitrosti  $\mathbf{v}_{n+1}$ .

$$\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)/2 \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_n + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{v}} \quad \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_n + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{v}}'$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\bar{\mathbf{v}} \quad \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + h\bar{\mathbf{v}}'$$

$$\delta\bar{\mathbf{u}} = \frac{h}{2}\delta\bar{\mathbf{v}} \quad \delta\bar{\mathbf{d}} = \frac{h}{2}\delta\bar{\mathbf{v}}'$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathbf{R}^T_{(\bar{\varphi})}\mathbf{C}\bar{\mathbf{e}} \quad \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{e}_0 \quad \bar{\mathcal{N}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{e}}$$

$$\delta\bar{\mathcal{R}} = \frac{h}{2}(\delta\bar{\Omega}((\mathbf{R}^{(1)})^T_{(\bar{\varphi})}\mathbf{C}\bar{\mathbf{e}} + \mathbf{R}^T_{(\bar{\varphi})}\mathbf{C}\mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})}\bar{\mathbf{d}}) + \mathbf{R}^T_{(\bar{\varphi})}\mathbf{C}\mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}\delta\bar{\mathbf{v}}')$$

$$\delta\bar{\mathbf{e}} = \frac{h}{2}(\delta\bar{\Omega}\mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})}\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}\delta\bar{\mathbf{v}}')$$

$$\delta\bar{\mathcal{N}} = \frac{h}{2}(\delta\bar{\Omega}\mathbf{C}\mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})}\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}\delta\bar{\mathbf{v}}')$$

V programu je napaka ker ne računam količin v  $t_{n+1}$  z pravimi  $u_{n+1}$ . Najprej bi moral poračunati hitrosti za  $n+1$  in  $n$  in od tod hitrosti za  $n + \frac{1}{2}$ . Z temi izračunam  $\mathbf{u}_{n+1}$  in  $\mathbf{d}_{n+1}$  in od tod  $\mathcal{R}_{n+1}$ . Nadaljni postopek bi moral biti pravilen.

Kaj bi moral narediti z energijama?

Če prav razumem sta hitrosti ob časih  $n+1$  in  $n$  neki funkciji. Zato ker jih ne znamo izvednostit moramo uporabiti ravnotežne enačbe  $\mathcal{F}$  in iz njih izraziti diferenco hitrosti (pospešek), kar se pojavi tudi v enačbi energije. Po drugi strani pa je funkcija vmesne hitrosti linearna kombinacija robnih.

Kakšen bi bil pravilen postopek za račun  $\delta\bar{\mathcal{R}}$ , če za  $\bar{\mathcal{R}}$  vzamem povprečnega? Ker je  $\delta\mathcal{R}_n$  neodvisna od  $\bar{\mathbf{v}}$  je variacija enaka 0. Razlika med povprečnim in analitično formulo je ta, da so v vseh členih nevariirane količine tiste ob drugem oziroma vmesnem času. Najprej bi raje poskusil doseči smiselne rezultate z izvorno formulo za  $\mathcal{R}$ .

### 3 Implementacija v program

$$\delta \bar{\mathbf{e}} = \frac{h}{2} \mathcal{P}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})} \bar{\mathbf{d}} \\ 0 & 0 & | \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \mathcal{P}'_j \mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}$$

$$\delta \bar{\mathcal{N}} = \frac{h}{2} \mathcal{P}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})} \bar{\mathbf{d}} \\ 0 & 0 & | \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \mathcal{P}'_j \mathbf{C} \mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}$$

$$\delta \bar{\mathcal{R}} = \frac{h}{2} \mathcal{P}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & (\mathbf{R}^{(1)})^T_{(\bar{\varphi})} \mathbf{C} \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{R}^T_{(\bar{\varphi})} \mathbf{C} \mathbf{R}^{(1)}_{(\bar{\varphi})} \bar{\mathbf{d}} \\ 0 & 0 & | \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \mathcal{P}'_j \mathbf{R}^T_{(\bar{\varphi})} \mathbf{C} \mathbf{R}_{(\bar{\varphi})}$$

Za enostaven primer konzole se komponente zadnjega stolpca in vrstice hitro povečujejo. Preveri ečbe ki prispevajo k temu delu.