ALGA I – 2009/2010 Teste - 14 de Novembro de 2009

Resolva grupos diferentes em cadernos diferentes.
Escreva o seu nome completo e o seu número em todos os cadernos.
Justifique todas as respostas.

Grupo I

TESTE A

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, caso estejam definidos:

$A + B^T$

$B + C^T$

CB

$det\,(BC)$

$det\,(B)$

(b) Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

(c) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Indique, caso exista, uma matriz elementar E tal que $EA = D$.

(d) Determine uma decomposição LU de A.

2. Diga, justificando, se o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

é de Cramer; em caso afirmativo, sendo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ a sua solução, determine α_4 pela Regra de Cramer.

3. Seja $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Supondo que $det\, M = \frac{1}{4}$, calcule:

i) $det\,(2M)$

ii) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 8g+a & 8h+b & 8i+c \end{bmatrix}$

iii) $det \begin{bmatrix} a & b & b & c \\ d & e & e & f \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ g & h & h & i \end{bmatrix}$.

Grupo II

4. Para cada k e cada t pertencentes a $\mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 de coeficientes reais,

$$S_{k,t} = \begin{cases} kx_1 - x_2 + 2x_3 + kx_4 = 1 + 2k \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + kx_4 = 7 - t \\ 3x_1 - 3x_2 + 3\,x_4 = 6 \end{cases}$$

(a) Discuta, em função de k e t, o sistema $S_{k,t}$.

(b) Resolva, pelo Método de Eliminação de Gauss-Jordan, o sistema $S_{1,-5}$ $(k = 1$ e $t = -5)$.

5. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

   (a) Para quaisquer matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, tem-se $r\,(A + B) \;=\; r(A) + r(B)$.

   (b) Para quaisquer $A, D, E \in M_3(\mathbb{R})$, se $A \neq 0$ e $det\,(DA) = det\,(EA)$, então $det\,D = det\,E$.

   (c) $F_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; a_1 = 2a_2\,a_3\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(d) $F_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a_1 = 5a_2 + a_3\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(e) $(-1, 4, 6)$ é combinação linear de $((2, 1, 0), (-1, 1, 2))$.

(f) $< (1, 2, -1), (0, 0, 1) > = < (0, 0, -2), (1, 2, 0) >$.

6. Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Demonstre que $\alpha\, 0_V = 0_V$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

FIM