Nº:	Nome:	Curso:

		Perg.	Cotação	
ALGA I – 2011/2012		Perg.	Cotação	
2ª Chamada - 25 de Janeiro de 2012		1-4	(12x0.5) 6.0	
Exame A		5	1.0	
AVISO:		6	6	
O Exame que vai realizar é constituído por duas partes.		7	2.5	
As respostas às perguntas/alíneas da **1ª Parte** devem		8	3.0	
ser dadas unicamente nos respectivos espaços, não		9	1.5	
sendo necessário apresentar os cálculos intermédios.				
Na resolução da **2ª Parte** deve apresentar todos os				
cálculos e todas as justificações necessárias.		Total	20.0	

1ª Parte

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Complete:

i. $BB^T =$ $\qquad\qquad$ $A + C^T =$

ii. $det\,(2A) =$ $\qquad\qquad$ $det\,(2BB^TA) =$

iii. $A^{-1} =$

(b) Indique:

i. uma matriz elementar E tal que $E^{-1}C = A$.

ii. uma solução do sistema $AX = B$.

Vire s. f. f.

2. Para cada k pertencente a $\mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e coeficientes reais,

$$S_k = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + k^2\, x_3 = k + 2 \end{cases}$$

Complete cada alínea, **em função de** k, de modo a obter uma afirmação verdadeira.

(i) O sistema S_k é de Cramer se e só se ....

(ii) O sistema S_k é impossível se e só se ....

3. Indique uma base para o subespaço vectorial $H = \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, a, b, c \in \mathbb{R} \wedge 2a+b = 0\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

....

4. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, considere o subespaço vectorial

$$F =< (1, 2, 3, 4), (1, 2, 0, 0), (-1, -2, 3, 4), (3, 6, 3, 4) > .$$

Indique:

(a) uma base de F ....
....

(b) um suplementar de F ....
....

(c) a dimensão de $F^\perp$ ....
....

(d) os valores de y e z para os quais $(0, y, z, 3) \in F^\perp$ ....
....

5. Enuncie o Teorema de Steinitz. ....
....
....
....
....

Vire s. f. f.

2ª Parte

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

6. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico e os seus subespaços

$$F = <(1,1,1),\ (1,2,2)>$$

e

$$G = \{(b, a+b, 2b-a) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Determine uma base de G. Justifique.

   (b) Caracterize os vectores de F por meio de condições nas suas coordenadas. Justifique.

   (c) Indique, justificando, uma base de $F+G$.

   (d) Determine uma base e a dimensão de $F \cap G$. Justifique.

   (e) Determine $(0,1,-1) \wedge (1,2,2)$.

7. Seja V um espaço vectorial real de dimensão 3 e sejam $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ tais que

$$V = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$$

e

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0.$$

   (a) Mostre que $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ e $\beta = (v_1, v_3, v_4)$ são bases de V.

   (b) Determine a matriz de mudança da base α para a base β.

8. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.

   (a) Para qualquer $B \in M_2(\mathbb{R})$, existem $L, U \in M_2(\mathbb{R})$, sendo L triangular inferior e U triangular superior, tais que $B = LU$.

   (b) Se $A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior com determinante nulo, então existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $a_{ii} = 0$.

   (c) Se T e L são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ e $T \cap L = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, então $dimT + dimL \leq 3$.

9. Sejam $p, q, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $r(AB) \leq r(B)$.

   Sugestão: Considere os subespaços F e G de $\mathbb{R}^n$ constituídos, respectivamente, pelas soluções de $BX = 0$ e pelas soluções de $(AB)X = 0$.

Fim