Nº: **Nome:**

ALGA I – 2010/2011 1ª Chamada - 18 de Janeiro de 2011
Exame A

O Teste que vai realizar é constituído por duas partes.

As respostas às perguntas/alíneas da 1ª Parte devem ser dadas unicamente nos respectivos espaços, não sendo necessário apresentar os cálculos intermédios.

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

1ª Parte

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine, caso existam:

(a) $det\,(B\,C) =$ $det\,(C\,B) =$

(b) $A^{-1} =$

(c) Uma decomposição LU de A.

(d) Uma matriz elementar E tal que $EB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $\det \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $\det\left(A^3\right) = -27$. Indique:

(a) $\det\left(AA^T\right) = \ldots\ldots$ $\det\left(-A\right)^{-1} = \ldots\ldots$

(b) $\det\left(AA^{-1}\right) = \ldots\ldots$ $\det\left(adj A\right) = \ldots\ldots$

4. Considere o sistema $AX = B$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k+2 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

(a) Após discutir o sistema em função do parâmetro k, complete cada alínea de modo a obter uma afirmação verdadeira:

(i) O sistema $AX = B$ é impossível se e só se ....

(ii) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação ....se e só se ....

(iii) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se...............................

(b) Para $k = -2$, o conjunto das soluções do sistema $AX = B$, é:

....

(c) O sistema $AX = B$ é sistema de Cramer se e só se ....

5. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Indique os valores de t para os quais o vector $(t, t^2, 0)$ é combinação linear do sistema $((1, t, 2), (1, t+1, 2), (-1, -t, t))$.

....

6. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Complete:

O sistema $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente ....

7. Indique uma base do subespaço $Q = < x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1, x - 1 >$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

....

8. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Indique:

(a) Uma base do espaço das linhas de A.

....

(b) Uma base do espaço das colunas de A.

....

(c) Uma base do espaço nulo de A.

....

Nº: **Nome:**

9. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e as suas bases $\alpha = ((1,-1),(2,0))$ e $\beta = ((4,-2),(0,1))$.

   (a) Determine a matriz de mudança da base β para a base α.

   (b) Determine a matriz das componentes de $w = (2,-1)$ na base α.

10. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, considere
    $F = < (1,2,1),(1,2,-1) >$ e $G = < (1,0,1),(1,0,-1) >$.
    Indique:

    (a) $dim(F+G) =$ ....

    (b) $dim(F \cap G) =$ ....

    (c) Uma base ortogonal de F. ....

    (d) Uma base do complemento ortogonal de G. ....

    (e) Um suplementar de G. ....

    (f) A projecção ortogonal de $v = (3,1,1)$ sobre F. ....

11. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno que satisfaz

$$((x_1,x_2)|(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

    Indique:

    (a) $((1,1)|(0,2)) =$

    (b) $||(1,1)|| =$

12. O paralelipípedo definido pelos vectores $(1,2,3)\,,(-2,0,1)$ e $(1,-1,k)$ tem volume 17
    para $k =$ ....

Vire s. f. f.

2^{a} Parte

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

13. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços vectoriais

$$F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a_1 + 2a_2 = a_3 \wedge a_3 - 2a_4 = 0\}$$

e

$$G = <(-1,1,1,0),\ (-4,3,0,1),\ (-2,1,-2,1)> .$$

(a) Determine uma base de F.

(b) Indique uma base de G e caracterize os vectores de G por meio de condições nas suas coordenadas.

14. Seja $n \in \mathbb{N}$, sejam $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ e seja $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, sendo $B \neq 0$. Mostre que, se os sistemas $A_1X = B$ e $A_2X = B$ são equivalentes e possíveis, então $det\,(A_1 - A_2) = 0$.

15. Sejam $m, n, k \in \mathbb{N}$. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e sejam $Z_1, \ldots, Z_k \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Mostre que, se A tem característica n e $(Z_1, \ldots, Z_k)$ é linearmente independente, então também o sistema $(AZ_1, \ldots, AZ_k)$ é linearmente independente.

16. Seja V um espaço euclidiano e seja F um subespaço vectorial de V. Defina $F^\perp$ (complemento ortogonal de F) e demonstre que $F^\perp$ é subespaço vectorial de V.

FIM