Nº: **Nome:** **Curso:**

ALGA I – 2010/2011 2º Teste - 16 de Dezembro de 2010
Teste A

O Teste que vai realizar é constituído por três partes. As respostas às perguntas/alíneas da **1ª Parte** e da **2ª Parte** devem ser dadas unicamente nos respectivos espaços do enunciado, sem apresentar os cálculos intermédios. Na resolução da **3ª Parte** deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

1ª Parte (1,2 val)

Diga (sem justificar) se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

1. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.
   (a) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 = \, x_2 + x_3^2 \, \}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$. ....
   (b) $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 - \, x_2 = 0 \wedge x_3 + \, x_2 = 1\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$. ....
   (c) $(0, 0, 5) \in < (2, 1, 0), (0, -1, -1), (2, 1, 3) >$ . ...
   (d) $< (2, 1, 0), (2, 2, 1), (2, 1, 3) > = < (2, 1, 0), (0, -1, -1), (2, 1, 3) >$ . ...
   (e) O sistema $((0, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, -2))$ é base de $\mathbb{R}^3$. ....

2. O sistema $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ é base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. ....

3. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$,
   $< (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (3, 3, 4, 3) > \subseteq < (-4, -4, -4, -4), (0, 0, -1, 0) >$ . ...

4. Seja V um espaço vectorial real e seja (v_1, v_2, v_3, v_4) uma base de V .
   (a) O sistema $(v_1 + v_2, v_1 + v_3)$ é linearmente independente. ....
   (b) O subespaço $< v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 - v_3 >$ tem dimensão 3. ....

5. O sistema $(1 + x + x^2)$ é base de $\mathbb{R}_2[x]$. ....

6. Se F e G são subespaços do esp. vectorial real $\mathbb{R}^5$ e $dim\, F = dim\, G = 3$, então $F = G$. ....

7. Se F e G são subespaços do esp. vectorial real $\mathbb{R}^5$e $dim\, F = dim\, G = 3$, então $F \cap G \neq \{0\}$. ..

Vire s. f. f.

2^{a} Parte (7 val)

As respostas às perguntas/alíneas da 2ª Parte devem ser dadas unicamente nos respectivos espaços do enunciado, sem apresentar os cálculos intermédios.

8. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Diga para que valores dos parâmetros reais t e k o vector $(1, t-1, t)$ é combinação linear do sistema $(\,(1,-1,-5), (2, 3k-2, -10)\,)$.

   ....

9. Indique uma base do subespaço $P = < \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} >$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   ....

10. Indique uma base do subespaço $Q = < x^2 + 2x, 3 >$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

    ....

11. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Indique:

    (a) Uma base do espaço das linhas de A.

    ....

    (b) Uma base do espaço das colunas de A.

    ....

    (c) Uma base do espaço nulo de A.

    ....

12. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e as suas bases $\alpha = ((0,-1),(1,1))$ e $\beta = ((2,1),(1,0))$.

    (a) Determine a matriz de mudança da base α para a base β.

    ....

    (b) Determine a matriz das componentes de $w = (-1, 5)$ na base β.

    ....

Vire s. f. f.

13. Considere os subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, $W =< (1,-1,2,1), (-1,1,-2,2), (0,0,0,1) >$ e $H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x+z+w=0, \; y+z-w=0 \;\text{ e }\; x-y+2w=0\}$.

   (a) Indique uma base de H.

   ....

   (b) Determine T tal que $T \leq \mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^4 = W \oplus T$.

   ....

14. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^5$, munido do produto interno canónico, considere os vectores $u = (0,2,1,0,2)$ e $v = (-1,1,2,3,1)$. Complete:

   (a) $\|u\| =$ .... $\|v\| =$ ....

   (b) $\|u+v\| =$ ....

   (c) $\cos \angle(u,v) =$ ....

15. Seja V um espaço euclidiano e sejam u e v vectores de V, satisfazendo $u \cdot v = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$. Então
$\|-2\,(2u+v)\| =$ ....

3^{a} Parte (3,8 val)

Na resolução da 3ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

16. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, e os seus subespaços
$$F \;=\; \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \,\wedge\, 2a_1 - a_3 = 0\,\}$$
e
$$G \;=<\; (2,1,1),\; (1,-1,0),\; (1,2,1) > .$$

   (a) Indique uma base e a dimensão de G e caracterize os vectores de G por meio de condições nas suas coordenadas.
   (b) Determine uma base de $F \cap G$.
   (c) Determine uma base ortogonal de G.
   (d) Determine uma base de $G^{\perp}$.

17. Seja V um espaço vectorial real. Demonstre que, se F e G são subespaços vectoriais de V, então também $F+G$ é subespaço vectorial de V.

Fim