| **Nº:** | **Nome:** |
|---|---|

**ALGA I – 2010/2011** 2ª Chamada - 2 de Fevereiro de 2011
Exame A

**O Teste que vai realizar é constituído por duas partes.**

**As respostas às perguntas/alíneas da 1ª Parte devem ser dadas unicamente nos respectivos espaços, não sendo necessário apresentar os cálculos intermédios.**

**Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.**

# 1ª Parte

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine, caso existam:

(a) $A + A^T =$ $A^2 =$

(b) $det\,(A) =$ $det\,(B) =$

(c) $det\,(C) =$

(d) $B^{-1} =$

(e) Uma decomposição $LU$ de $B$.

(f) Uma matriz elementar $E$ tal que $EB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Indique os valores de $t$ para os quais o sistema de vectores $((1,1,2),(-1,2,1),(0,-3,t))$ é base de $\mathbb{R}^3$.

..........................................................................................

**Vire s. f. f.**

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Supondo que $\det(A) = \frac{1}{2}$, indique:

(a) $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$

(b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & a & c \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$

4. Considere o sistema $AX = B$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & k+3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ k+5 \\ k^2-1 \\ t+4 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

(a) Após discutir o sistema em função dos parâmetros $k$ e $t$, complete cada alínea de modo a obter uma afirmação verdadeira:

(i) O sistema $AX = B$ é impossível se e só se ........................................

(ii) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2 se e só se ........................................................................

(iii) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1 se e só se ........................................................................

(b) Para $k = -2$ e $t = -4$, o conjunto das soluções do sistema $AX = B$, é:

..............................................................................

5. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ e a sua base $(x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1, x - 1)$. Determine a matriz das componentes de $2x^2$ na base anterior.

**Vire s. f. f.**

| **Nº:** | **Nome:** |
|---|---|

6. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, considere

$$F =< (1,0,1),(0,1,1) > \quad \text{e} \quad G =< (2,-1,1),(1,-1,0) > .$$

(a) Indique uma base de $F^{\perp}$ ..................................................................

(b) Indique uma base ortogonal de $F$ ..................................................................

(c) Indique um suplementar de $F$. ..................................................................

(d) Caracterize os vectores de $G$ por meio de uma condição nas suas coordenadas .

..................................................................

(e) Seja $u = (2, b, 1)$. Complete (em função de $b$):

i. $u \in F$ se e só se ..................................................................

ii. $u$ é ortogonal a $(1, 2, -1)$ se e só se ..................................................................

iii. a projecção ortogonal do vector $u$ sobre o subespaço $< (0,1,1) >$ é $(0,2,2)$ se e só se

..................................................................

iv. $u \wedge (0,1,1) = 2(u \wedge (1,0,1))$ se e só se ..................................................................

v. $\cos\angle(u,(1,0,1)) = \cos\angle(u,(0,1,1))$ se e só se ..................................................................

**Vire s. f. f.**

# $\boxed{2^{\text{a}}\ \text{Parte}}$

**Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.**

7. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços vectoriais

$$F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4 = 0 \wedge a_2 + a_3 - a_4 = 0\}$$

e

$$G = < (1,0,1,1), (0,1,2,0), (2,-1,0,2) > .$$

(a) Determine uma base de $F$ e uma base de $G$.

(b) Determine uma base de $F + G$.

(c) Indique uma base de $F \cap G$.

8. Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que se $det(A) = 1$, então $adj(adj(A)) = A$.

9. Seja $V$ um espaço vectorial real de dimensão 3 e sejam $F$ e $G$ subespaços vectoriais de $V$ de dimensão 2. Mostre que $F + G = V$ se e só se $F \neq G$.

10. Seja $V$ um espaço vectorial real munido de produto interno. Sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$. Mostre que se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema ortonormado, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente.

**FIM**