ALGA I – 2009/2010 Exame - 18 de Janeiro de 2010

Resolva grupos diferentes em cadernos diferentes.
Escreva o seu nome completo e o seu número em todos os cadernos.
Justifique todas as respostas.

EXAME A

Grupo I

1. (6.5 val) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule :

$det\,(B^T B)$

$det\,(C)$

A^{-1}

(b) Determine uma decomposição LU de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ e resolva o sistema $AX = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, mediante a resolução de sistemas triangulares.

(c) Sejam $Y, Z \in M_3(\mathbb{R})$. Calcule $det\,(Y)$ sabendo que Z é invertível e $2Z^T = C^{-1}YZ$.

$\boxed{\textbf{Grupo II}}$

2. (2.5 val) Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ que tem a seguinte matriz ampliada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & k-2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-1 & 1-t \end{array}\right],$$

sendo k e t parâmetros reais. Indique, justificando, todos os valores de k e t que tornam o sistema:

i) Impossível. ii) Possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.

iii) Possível e indeterminado com grau de indeterminação 1. iv) Possível e determinado.

Vire s. f. f.

3. (4.5 val) Considere os subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$,

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x + y + z = 0 \ \text{ e } \ x + 2y - w = 0\}$$

e

$$G = < (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, -1), (-2, 2, 2, 4) > \ .$$

   (a) Determine bases e as dimensões de F e G.

   (b) Determine bases e as dimensões de $F + G$ e $F \cap G$.

4. (3 val) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, o subespaço $W = <\ (-1, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 1, 0) >$ e o vector $v = (2, 2, 3)$.

   (a) Determine uma base ortogonal de W.

   (b) Exprima o vector v como soma de um vector de W com um vector ortogonal a todos os vectores de W.

5. (1 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Demonstre que se o sistema (u, v) de vectores de $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente, então $||u \wedge v||$ é a área do paralelogramo definido por u e v.

6. (2.5 val) Uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ diz-se *nilpotente* se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $B^k = 0$.

   (a) Prove que, se $B \in M_n(\mathbb{R})$ é nilpotente, então $r(B) < n$.

   (b) Seja $B \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente e seja t o menor natural tal que $B^t = 0$. Seja $Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e considere o subespaço de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$,

   $$F = < Y, BY, B^2Y, \ldots, B^{t-1}Y > .$$

   Mostre que, se $B^{t-1}Y \neq 0$, então F tem dimensão t.

FIM