Nº:	Nome:	Curso:

		Perg.	Cotação	
ALGA I – 2011/2012				
1ª Chamada - 9 de Janeiro de 2012		1-4	(12x0.5) 6.0	
Exame A		5	1.0	
AVISO:		6	6.5	
O Exame que vai realizar é constituído por duas partes.		7	3.5	
As respostas às perguntas/alíneas da **1ª Parte** devem		8	3.0	
ser dadas unicamente nos respectivos espaços, não				
sendo necessário apresentar os cálculos intermédios.				
Na resolução da **2ª Parte** deve apresentar todos os				
cálculos e todas as justificações necessárias.		Total	20.0	

1ª Parte

1. Para cada k e t pertencentes a $\mathbb{R}$, considere o sistema $AX = B$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2k-1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3k \\ t-3 \end{bmatrix}.$$

(a) Após discutir o sistema **em função dos parâmetros** k **e** t, complete cada alínea de modo a obter uma afirmação verdadeira:

(i) O sistema $AX = B$ é impossível se e só se ....

(ii) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2 se e só se ....

(iii) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1 se e só se ....

(b) Para $k = 1$ e $t = 0$ o conjunto das soluções do sistema $AX = B$ é:

....

2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$. Sabendo que $det(2A^T) = 40$, indique o valor de $det(A)$. ....

....

Vire s. f. f.

3. Para cada $b \in \mathbb{R}$, considere as matrizes reais

$$A_b = \begin{bmatrix} b & 0 & b \\ 2 & b-1 & 0 \\ b & 0 & b+2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Complete:

i. $A_2^T - A_2 =$ $\qquad\qquad$ $CB =$

ii. $det\,(BC) =$ $\qquad\qquad$ $det\,(D) =$

iii. $A_2^{-1} =$

(b) Indique:

i. Os valores de b para os quais A_b é invertível.

ii. Uma decomposição LU de A_4.

iii. Matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & b-1 & 0 \\ b & 0 & b+2 \end{bmatrix}$.

4. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^2$. Sabendo que $\beta = ((-1,-5),(2,3))$ e a matriz de mudança da base α para a base β é $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, determine a base α.
....

5. Enuncie a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. ....
....
....
....

Vire s. f. f.

2ª Parte

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

6. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, considere o subespaço vectorial

$$F = < (1,2,-1), (1,-2,3), (3,2,1) > .$$

   (a) Determine a dimensão de F. Justifique.

   (b) Indique uma base ortogonal de F.

   (c) Exprima o vector $(3,5,1)$ como soma de um vector de F com um vector de $F^{\perp}$.

   (d) Justifique que $F^{\perp}$ tem dimensão 1 e indique uma base de $F^{\perp}$.

   (e) Indique um subespaço G de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

   (f) Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:

$$\cos \angle(w, (-1,1,1)) = 0, \ \forall w \in F.$$

7. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço

$$F = \{(a+2b, a+2b, a-b, 3a-b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Determine uma base de F.

   (b) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua a base de F encontrada na alínea anterior.

   (c) Indique, caso exista, um subespaço G de $\mathbb{R}^4$ tal que $dim\, G = 2$ e $dim(F \cap G) = 1$. Justifique.

8. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ e seja $C \in M_n(\mathbb{R})$. Considere o conjunto

$$\mathcal{F}_C = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \ AC = CA\}.$$

   Mostre que

   (a) $\mathcal{F}_C$ é subespaço do espaço vectorial real $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Se $C = \alpha I_n$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{F}_C = M_n(\mathbb{R})$.

   (c) $dim(\mathcal{F}_C) \geq 2$. **Sugestão:** Considere separadamente o caso do sistema de vectores (I_n, C) ser linearmente dependente e o caso de (I_n, C) ser linearmente independente.

Fim