# Exercícios de ALGA I

## 2010/2011

1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$ , $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4, 5\}$ . Determine em extensão os conjuntos:

   a) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $A \cap (B \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$;

   b) $A \times B$, $B \times A$, $A^2$, $A^3$, $A \times B \times A$, $B \times C \times A$.

   c) $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$ , $B \setminus (C \cup A)$, $(B \setminus C) \cup A$ .

2. (Avançada) Dê exemplos de conjuntos $A, B$ e $C$ tais que $C \subseteq A \times B$ e não existem $D \subseteq A$ e $E \subseteq B$ tais que $C = D \times E$ .

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ .

   Determine $A+B$ , $B+A$ , $A+C$ , $(A+C)+B$ , $A+(B+C)$ , $2A$ , $iC$ , $3(A+C)$ , $C^T$ , $(A+B)^T$ e $A^T + B^T$ .

   (Definição: Se $A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ chamamos **matriz transposta de** $A$ à matriz do tipo $n \times m$ cuja entrada $(i, j)$ é igual à entrada $(j, i)$ de $A$ . Denotamos a matriz transposta de $A$ por $A^T$ .)

4. Sejam

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Determine as seguintes matrizes, caso estejam definidas:

   a) $D + E$ b) $D - E$ c) $2B - C$ d) $A^T - C$ e) $iC$ f) $A - A$; g) $B - B$ h) $BC$

   i) $B(3C)$ j) $AB$ k) $BA$ l) $(AB)C$ m) $A(BC)$ n) $DE$ o) $ED$

5. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine, caso estejam definidas, $A + B$, $A + 2A^T$, $AB$, $BA$ e $A^3$.

6. Suponhamos que:

   - $A$ é uma matriz do tipo $4 \times 5$
   - $B$ é uma matriz do tipo $4 \times 5$
   - $C$ é uma matriz do tipo $5 \times 2$

- $D$ é uma matriz do tipo $4 \times 2$
- $E$ é uma matriz do tipo $5 \times 4$.

Determine quais das seguintes expressões estão definidas e para as expressões definidas indique o tipo da matriz resultante:

a) $AB$ b) $BA$ c) $A^TB$ d) $AC+D$ e) $AE+B$ f) $AB+D$ g) $E(A+B)$ h) $E(AC)$ i) $2A$
j) $CD^T+B^T$ k) $(A^T)^T$ l) $(EA)^T$ m) $A^TE^T$

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $AB$ e $BA$ .

8. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$. Determine $AB$ e $BA$ .

9. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determine $AB$ e $AC$ .

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Calcule $A^2$, $A^3$, $A^4$ e $A^5$.

11. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

    Calcule
    $$X = A^TB - C^T$$
    e
    $$Y = 2(BA) - 3C.$$

12. Seja $A$ uma matriz do tipo $m \times n$. Prove que as matrizes $A^TA$ e $AA^T$ são simétricas. Dê um exemplo que mostre que estes dois produtos podem ser diferentes, mesmo que $A$ seja quadrada.

13. Mostre que

    (a) A soma de duas matrizes simétricas da mesma ordem é ainda uma matriz simétrica.

    (b) O produto de duas matrizes simétricas da mesma ordem é uma matriz simétrica se e só se as duas matrizes comutarem.
    (Definição: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Dizemos que $A$ **comuta** com $B$, ou $A$ e $B$ **comutam**, se $A \cdot B = B \cdot A$.)

14. Indique, justificando, quais das seguintes matrizes estão em forma de escada:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. Indique, justificando, quais das matrizes apresentadas no exercício anterior estão em forma de escada reduzida.

16. Diga, justificando, quais das seguintes matrizes estão em forma de escada reduzida:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{b)}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{c)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{d)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{e)}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{f)}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{g)}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{h)}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{i)}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\ \text{j)}\begin{bmatrix}1&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{k)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{l)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

17. Diga, justificando, quais das seguintes matrizes estão em forma de escada e (ou) em forma de escada reduzida:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&7\end{bmatrix}\ \text{b)}\begin{bmatrix}1&0&0&-7&8\\0&1&0&3&2\\0&0&1&-1&8\end{bmatrix}\ \text{c)}\begin{bmatrix}1&-6&0&0&3&-2\\0&0&1&0&4&7\\0&0&0&1&5&8\end{bmatrix}\ \text{d)}\begin{bmatrix}1&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

18. Efectuando transformações elementares em linhas obtenha matrizes em forma de escada , partindo das matrizes seguintes:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}2&4&0&3\\0&0&2&3\\1&2&0&2\\-1&4&0&4\end{bmatrix}\ \text{b)}\begin{bmatrix}0&0&1\\4&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\ \text{c)}\begin{bmatrix}0&0&3&-3&7\\1&3&2&0&3\\2&6&3&1&4\end{bmatrix}\ \text{d)}\begin{bmatrix}2&0&2&-2\\0&0&0&0\\4&-4&4&4\\0&2&0&0\end{bmatrix}\ \text{e)}\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&2&1&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\text{f)}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{bmatrix}\ \text{g)}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\ \text{h)}\begin{bmatrix}3\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\ \text{i)}\begin{bmatrix}3&0&-1&0&1\end{bmatrix}\ \text{j)}\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}.$$

19. Efectuando transformações elementares em linhas obtenha matrizes em forma de escada reduzida, partindo das matrizes do exercício anterior.

20. Efectuando transformações elementares em linhas obtenha matrizes em forma de escada reduzida, partindo das matrizes seguintes:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&2&2\end{bmatrix}\ \text{b)}\begin{bmatrix}2&2&2\\1&-1&0\\1&3&2\end{bmatrix}\ \text{c)}\begin{bmatrix}0&2&0&1\\0&4&2&4\\0&0&6&3\end{bmatrix}\ \text{d)}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\-1&0&1&1\end{bmatrix}\ \text{e)}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&1&2\\2&4&1&2\end{bmatrix}.$$

21. Determine a característica das matrizes consideradas nos dois exercícios anteriores.

22. Considere as matrizes reais

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\-2&-1&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\-2&-1&-1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&2\\-2&-1&-1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&-4&-6\\-2&-1&-1\end{bmatrix}.$$

(a) Sejam:

- $L$ a matriz que se obtém de $I_3$ multiplicando a primeira linha por 2
- $F$ a matriz que se obtém de $I_3$ trocando a primeira e a segunda linhas,
- $G$ a matriz que se obtém de $I_3$ substituindo a terceira linha pela sua soma com a segunda multiplicada por 3 .

Sem efectuar o produto, determine $L \cdot A$, $F \cdot A$ e $G \cdot A$.

(b) Determine matrizes elementares $H, J$ e $K$ tais que $H\,A = B$, $J\,A = C$ e $K\,A = D$.

(c) Determine, caso existam, $s \in \mathbb{N}$ e matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que

$$E_s \cdots E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

23. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz <u>invertível</u>. Mostre que

(a) Se $B \in M_n(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$, então $B = A^{-1}$;

(b) Se $B \in M_n(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$, então $B = A^{-1}$;

24. Indique quais das seguintes matrizes sobre $\mathbb{R}$ são invertíveis e determine a inversa sempre que tal seja possível:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

25. Considere a matriz

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+3 & \alpha+2 \\ 1 & \alpha & \alpha & -1 \\ -1 & 1-\alpha & 1 & 7 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(a) Indique os valores de $\alpha$ para os quais a matriz $B_\alpha$ é invertível.

(b) Determine a inversa de $B_0$ $(\alpha = 0)$.

26. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_k = \begin{bmatrix} k & 2 & k & 3k \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & k & 12 \\ 2 & k & 2 & k \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, caso estejam definidas, $A+B,\ A+2A^T,\ AB,\ BA$ e $A^3$.

(b) Indique, justificando:

i) ordem de $C$; ii) característica de $C$;

(c) Determine, caso exista, uma matriz elementar $E$ tal que $EC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) Determine os valores de $k$ para os quais a matriz $D_k$ é invertível.

(e) Determine a inversa de $D_5$ ($k=5$).

27. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que se uma linha (ou coluna) da matriz $A$ é nula, então $A$ não é invertível.

28. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz <u>invertível</u>. Mostre que

(a) Se $C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ é tal que $AC = 0_{n\times m}$, então $C = 0_{n\times m}$;

(b) Se $D \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $DA = 0_{m\times n}$, então $D = 0_{m\times n}$;

(c) Se $C, B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $AC = AB$, então $C = B$;

(d) Se $D, E \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $DA = EA$, então $D = E$;

(e) Se $\alpha$ é um elemento de $\mathbb{K}$ não nulo, então a matriz $\alpha A$ é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;

29. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que se $A$ comuta com $B$ e $B$ é invertível, então $A$ também comuta com $B^{-1}$.

30. Sejam $A \in M_m(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que, se $A$ é invertível, então $r(AB) = r(B)$.

31. Dê exemplos de matrizes $A \in M_3(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $r(AB) \neq r(B)$.

32. Seja $A$ uma matriz do tipo $m \times n$.

(a) Prove que multiplicar $A$ à esquerda por uma matriz diagonal de elementos principais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ equivale a multiplicar a 1ª linha por $\alpha_1$, a 2ª linha por $\alpha_2$, etc.

(b) Prove que multiplicar $A$ à direita por uma matriz diagonal de elementos principais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ equivale a multiplicar a 1ª coluna por $\alpha_1$, a 2ª coluna por $\alpha_2$, etc.

33. Prove que uma matriz que comuta com uma matriz diagonal de elementos principais todos distintos tem de ser ela própria uma matriz diagonal.

34. Seja $A$ uma matriz de ordem $n$ sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se $A$ comuta com todas as matrizes de ordem $n$ sobre $\mathbb{K}$, então $A$ é uma matriz escalar.

35. Mostre que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.

36. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos principais nesses casos?

37. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ . Mostre que, $r([A|B] = r(A)$ ou $r([A|B] = r(A)+1$ .

38. Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$ e coeficientes reais:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \quad S_3 = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$S_4 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \quad S_5 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad S_6 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$S_7 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad S_8 = \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \\ -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad S_9 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$S_{10} = \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

39. Resolva os sistemas possíveis considerados no exercício anterior.

40. (Mat I teste 08/09) Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, x_4$ e coeficientes reais,

$$S = \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

a) Sem resolver o sistema $S$ mostre que $(3, 1, 5, 0)$ é solução de $S$ e $(3, 2, 3, 1)$ não é solução de $S$ .

b) Resolva o sistema $S$, pelo método de Gauss-Jordan.

c) Indique duas soluções de $S$ distintas da considerada em a).

41. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ , $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ e seja $S$ o sistema de equações lineares $AX = B$ .

a) Sem resolver o sistema $S$ mostre que $(-1, 1, 1, 3)$ é solução de $S$ e $(1, 0, 1, 0)$ não é solução de $S$ .

b) Resolva o sistema $S$.

42. Discuta e resolva os sistemas seguintes nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$ sobre $\mathbb{R}$:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

43. Sem efectuar nenhuns cálculos indique quais dos seguintes sistemas homogéneos nas incógnitas indicadas têm soluções não triviais:

$$S_1 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_4 = \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

44. Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ e $(S)$ o sistema de equações lineares $AX = B$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $m > n$, então $(S)$ é impossível;

   (b) Se $m < n$, então $(S)$ é impossível;

   (c) Se $m < n$, então ou $(S)$ é impossível ou $(S)$ é possível e indeterminado;

   (d) Se $(S)$ é possível e determinado, então $m = n$;

   (e) Se $m = n$, então $(S)$ é possível e determinado;

   (f) Se $m = n$ e $A$ é invertível, então $(S)$ é possível e determinado;

   (g) Se $m = n$ e $(S)$ é possível e determinado, então $A$ é invertível;

45. (Mat I Jan 08) Para cada $k$ e cada $t$ pertencentes a $\mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$ e coeficientes reais,

$$S_{k,t} = \begin{cases} x_1 - kx_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - kx_3 = t \\ -x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

   (a) Discuta, em função de $k$ e $t$, o sistema $S_{k,t}$.

   (b) Resolva, pelo método de Gauss-Jordan, o sistema $S_{2,2}$ $(k = 2$ e $t = 2)$.

46. (Mat I 23 Nov 07) Para cada $k$ e cada $t$ pertencentes a $\mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$ e coeficientes reais,

$$S_{k,t} = \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - kx_3 = 3 - k \\ x_1 + (k-2)x_2 + (2k-4)x_3 = (k-2)t + k + 1 \\ (k-2)x_2 + (k-2)x_3 = kt - 2 \end{cases}$$

(a) Discuta, em função de $k$ e $t$, o sistema $S_{k,t}$.

(b) Resolva, pelo método de Gauss-Jordan, o sistema $S_{2,1}$ $\;(k = 2$ e $t = 1)$.

47. Para cada $k$ pertencente a $\mathbf{R}$, considere as matrizes

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k-1 & -6 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_k = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de $k$ para os quais o sistema de equações lineares $A_kX = B_k$ é impossível.

(b) Indique o conjunto das soluções do sistema $A_1\,X = B_1$ $\;(k = 1)$.

48. (ALGA 29 Nov 03) Para cada $k$ e cada $t$ pertencentes a $\mathbf{R}$, considere as matrizes

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 2k & k & -k & 0 \\ 2 & 4 & k & k & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_t = \begin{bmatrix} t+2 \\ 2t+1 \\ t \end{bmatrix}.$$

a) Discuta, em função de $k$ e $t$, o sistema de equações lineares $A_kX = B_t$.

b) Resolva o sistema $A_2X = B_0$ $\;(k = 2$ e $t = 0)$.

49. Mostre que, se $A$ é uma matriz triangular superior (respectivamente inferior) de elementos principais não nulos, então $A$ é invertível, $A^{-1}$ também é triangular superior (respectivamente inferior) e os elementos principais de $A^{-1}$ são os inversos dos elementos principais de $A$.

50. Considere as matrizes $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ e $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{bmatrix}$.

a) Decomponha, de várias maneiras diferentes, $L_1$ e $L_2$ como produto de matrizes elementares triangulares inferiores.

b) Use a alínea anterior para escrever $L_1^{-1}$ e $L_2^{-1}$ como produto de matrizes elementares triangulares inferiores.

b) Calcule $L_1^{-1}$ e $L_2^{-1}$.

51. Determine uma decomposição $LU$ das matrizes simples dos sistemas considerados nas alíneas seguintes. Em seguida resolva esses sistemas, mediante a resolução de sistemas triangulares (sistemas cuja matriz simples é triangular).

a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

52. Mostre que não existe decomposição $LU$ da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

53. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Encontre uma decomposição LU de $A$.

b) Exprima $A$ na forma

$$A = L_1 \, D \, U_1 \, ,$$

sendo $L_1$ uma matriz triangular inferior com 1's ao longo da diagonal principal, $U_1$ uma matriz triangular superior com 1's ao longo da diagonal principal e $D$ uma matriz diagonal.

c) Exprima $A$ na forma

$$A = L_2 \, U_2 \, ,$$

sendo $L_2$ uma matriz triangular inferior e $U_2$ uma matriz triangular superior com 1's ao longo da diagonal principal.

54. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ determine uma matriz de permutação $P$ para a qual exista decomposição $LU$ de $PA$ e determine os factores dessa decomposição.

55. Calcule:

a) $\begin{vmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ c & b & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1+2\alpha & 2+\alpha & 1+3\alpha \\ 2+\beta & 1+2\beta & \beta \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

56. Determine os valores reais que são soluções das equações em $x$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & x & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 4 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$

57. (Mat I 23 Nov 07) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

(a) Calcule $det(A)$, usando o Teorema de Laplace.

(b) Calcule $det(B)$, através do cálculo do determinante de uma matriz triangular superior.

(c) Calcule $det(AB)$ e $det(A+B)$.

(d) Mostre que $B$ é invertível e calcule $det(B^{-1})$.

58. Considere as matrizes de elementos reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $det\, A$, $det\, B$ , $det\, (AB)$ , $det\, C$ e $det\, D$ ;

b) Diga quais das matrizes $A, B, AB, C$ e $D$ são invertíveis e indique o determinante das respectivas inversas.

c) Indique, justificando, se os sistemas $A\,X = 0$ e $C\,X = 0$ são determinados.

59. Para cada $b \in \mathbb{R}$ seja

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -7 & b+3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Determine os valores de $b$ para os quais a matriz $A_b$ é invertível.

60. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & k & k & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & k & 1 & 2k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})\,.$$

Determine os valores de $k$ para os quais $det\, B_k = -4$.

61. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -4 & -7 & t+3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Determine os valores de $t$ para os quais a matriz $A_t$ é invertível.

62. Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2t+1 & -2 \end{bmatrix}, B_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & t & -1 \\ 1 & 0 & -t-1 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{K})$$

de determinante igual a 2 e a $(-4t^2 - t)$, respectivamente.

a) Calcule $det\,(-3A_t\,B_t^T)$ e $det\,(A_t + B_t)$;

b) Mostre que a matriz $B_{-1}$ é invertível e diga qual o determinante da sua inversa.

c) Diga, justificando, se o sistema homogéneo $B_{-1}\,X = 0$ é determinado.

63. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $B \in M_3(\mathbb{R})$ tais que $det\,(A) = 2$ e $det\,(B^{-1}) = 7$.

(a) Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2$; ii) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g+a & -h+b & -i+c \end{bmatrix} = 2$;

iii) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4g+a & 4h+b & 4i+c \end{bmatrix} = 8$; iv) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ g & h & i \end{bmatrix} = -6$.

(b) Determine, justificando, o valor dos seguintes determinantes:

i) $det(AB)$; ii) $det(4B)$ iii) $det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ -2g & -2h & -2i \end{bmatrix}$; iv) $det \begin{bmatrix} a & b & b & c \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ d & e & e & f \\ g & h & h & i \end{bmatrix}$.

64. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Sabendo que $det\,A = -7$, calcule

a) $det\,(3\,A)$ b) $det\,(A^{-1})$ c) $det\,(2A^{-1})$ d) $det\,((2A)^{-1})$ e) $det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$.

65. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ e $det\,(A) = det\,(B)$, então $A = B$;

(b) Para quaisquer $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $det\,(A+B) = det\,(A) + det\,(B)$;

(c) Para quaisquer $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $det\,(A\,B) = det\,(A)\,det\,(B)$;

(d) Para qualquer $A \in M_n(\mathbb{K})$, $det\,(-A) = det\,(A)$;

(e) Para qualquer $A \in M_n(\mathbb{K})$, $det\,(-A) = -det\,(A)$;

(f) Para qualquer $A \in M_n(\mathbb{K})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, $det\,(\alpha A) = \alpha\, det\,(A)$;

66. Considere a matriz

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades dos determinantes e o Teorema de Laplace mostre que

$$det\ A_{\alpha,\beta} = 5\ det \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & \beta & 3 \end{bmatrix}.$$

67. Sem calcular os determinantes, mostre que:

$$det \begin{bmatrix} a+b & b & 3c \\ x+y & y & 3z \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a+2x & x & 3 \\ b+2y & y & 6 \\ c+2z & z & 9 \end{bmatrix}.$$

68. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que:

a) $det\,(A\,B) = det\,(B\,A)$.

b) Se $A\,B$ é uma matriz invertível, então também $A$ e $B$ são invertíveis.

c) Se $A\,B = I_n$, então $A$ é invertível e $B = A^{-1}$.

69. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Calcule $det\,(A\,B)$ e $det\,(B\,A)$.

70. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calcule $det\,A$ e conclua que $A$ é invertível.

b) Determine a matriz dos complementos algébricos de $A$.

c) Calcule $A^{-1}$ usando b).

71. Verifique se os seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$, são sistemas de Cramer e, em caso afirmativo, resolva-os pela Regra de Cramer:

$$S_1 = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad S_3 = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

72. Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores de $\alpha$ para os quais o sistema $A_\alpha X = B$ é sistema de Cramer.

   (b) Resolva o sistema, pela Regra de Cramer, para $\alpha = 1$.

73. (ALGA I 6Fev 06) Para cada $k$ pertencente a $\mathbf{R}$, considere as matrizes reais

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k^2+1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -k^2-1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que o sistema de equações lineares $A_k\, X = B$ é de Cramer, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Sendo $(a, b, c, d)$ a solução de $A_k\, X = B$, determine o valor de $c$, usando a Regra de Cramer.

   (c) Considere $k = 0$. Diga, justificando, se $A_0(1|3)$ é invertível e, em caso afirmativo, calcule a sua inversa.

74. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

   a) Determine $B^{-1}$.

   b) Resolva, por quatro métodos diferentes, o sistema

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

75. (ALGA I 21 Nov 05) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $BC$, $CB$, $det\,(BC)$ e $det\,(CB)$.

   (b) Determine $adj\,(A)$.

   (c) Determine $A^{-1}$.

   (d) Determine uma decomposição $LU$ de $A$ e resolva o sistema $AX = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, mediante a resolução de sistemas triangulares.

76. (ALGA I 21 Nov 05) Mostre que, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$det \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix} = (det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})^2 .$$

77. Seja $A \in M_4(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Relacione o determinante da adjunta de $A$ com o determinante de $A$.

78. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Indique, justificando, quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

    a) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2 = x_1 - x_3\}$
    
    b) $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2 = 1 + x_3\}$
    
    c) $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_3 \text{ é racional}\}$
    
    d) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, |x_1| = |x_2|\}$
    
    e) $F_5 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$
    
    f) $F_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2 + x_3 \geq 0\}$
    
    g) $F_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3 = 0\}$
    
    h) $F_8 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 = 0 \vee x_3 = 0\}$
    
    i) $F_9 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + 2 = 0 \wedge x_3 = 0\}$

79. Seja $V$ espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, sejam $u, v \in V$ e $F$ subespaço vectorial de $V$. Mostre que:

    a) Se $u \in F$, então $-u \in F$.

    b) Se $u, v \in F$, então $u - v \in F$.

    c) Se $u + v \in F$ e $u \in F$, então $v \in F$.

    d) Se existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $au \in F$, então $u \in F$.

80. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, $H = < (0, 1, 3, 1), (1, 0, 0, -1) >$ . Indique, caso existam, 4 elementos de $H$ distintos.

81. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

    (a) $(4, 4, 4)$ é combinação linear do sistema $((1, 2, 1), (1, 0, 1))$.

    (b) $(1, 2, 2)$ é combinação linear do sistema $((1, 2, 1), (1, 0, 1))$.

    (c) $< (1, 2, -1), (0, 3, 0) >= \{(1, 2, -1), (0, 3, 0)\}$.

    (d) $< (1, 2, -1), (0, 3, 0) >\subseteq \{(1, 2, -1), (0, 3, 0)\}$.

    (e) $< (1, 2, -1), (0, 3, 0) >\supseteq \{(1, 2, -1), (0, 3, 0)\}$.

(f) $< (3,0,-1) >= \{(3,0,-1)\}$.

(g) $< (0,0,0) >= \{(0,0,0)\}$.

(h) $(4,4,4) \in < (1,2,1),(1,0,1) >$.

(i) $(1,2,2) \in < (1,2,1),(1,0,1) >$.

(j) $(0,0,0) \in < (1,2,1),(1,0,1) >$.

(k) $< (4,4,4),(1,2,2) >=< (1,2,1),(1,0,1) >$ .

(l) $< (1,1,-1),(0,0,0) >=< (2,2,-2) >$ .

(m) $< (1,1,-1),(2,2,0) >=< (0,0,-2),(3,3,3),(3,3,-1) >$ .

(n) $< (1,1,-1),(2,2,0) >=< (3,3,3),(3,3,-1),(1,2,-1) >$ .

(o) $< (1,1,1),(1,-1,-1) >=< (1,1,-1),(1,-1,1) >$ .

82. (Mat I 30 Jan 09) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $t$ para os quais o vector $(t,t^2,0)$ é combinação linear do sistema $((1,t,2),(1,t+1,2),(-1,-t,t))$.

83. (ALGA I - 6 Fev 06) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, para que valores dos parâmetros reais $k$ e $t$ o vector $(-t,1,k)$ é combinação linear do sistema
$$((t,1,2t),(0,1,2t),(2t,-1,t+2))\,.$$

84. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $\alpha$ para que o vector $(1,-2,\alpha)$ seja combinação linear do sistema $((3,0,-2),(2,-1,-5))$.

85. Seja $V$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $F$ e $G$ subespaços vectoriais de $V$. Mostre que $F \cup G$ é subespaço vectorial de $V$ se e só se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

86. Mostre que é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de $M_n(\mathbb{R})$:

    a) Triangulares superiores. b) Diagonais. c) Escalares d) Simétricas e) Anti-simétricas.

87. Justifique que não é um subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de $M_3(\mathbb{R})$:

    a) Invertíveis. b) Não invertíveis.

88. Verifique se os sistemas de vectores seguintes são linearmente independentes, nos espaços vectoriais indicados:

    a) $((1,2),(-2,-4))$, em $\mathbb{R}^2$;

    b) $((1,1),(-1,-2))$, em $\mathbb{R}^2$;

    c) $((2,-1,2),(2,2,2),(4,1,4))$, em $\mathbb{R}^3$;

    d) $((2,-1,2),(2,2,2),(1,1,-1))$, em $\mathbb{R}^3$;

    e) $((0,1,2,0),(2,0,1,1),(-2,4,8,-1))$, em $\mathbb{R}^4$;

f) $\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$ , em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ;

g) $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$, em $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ;

h) $(2x, x^2+3x, x^2+3x+2)$, em $\mathbb{R}_2[x]$.

89. Determine uma base para o subespaço

(a) $F = < (-1,2),(0,1),(1,3) >$ de $\mathbb{R}^2$;

(b) $G = < (1,-1),(-1,1) >$ de $\mathbb{R}^2$;

(c) $W = < (2,-1,2),(2,2,2),(4,1,4) >$ de $\mathbb{R}^3$;

(d) $E = < (2,-1,2),(2,2,2),(1,1,-1) >$ de $\mathbb{R}^3$;

(e) $T = < \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} >$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

(f) $N = < \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} >$ de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ,

(g) $H =< 2x, x^2+3x, x^2+3x+2 >$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

90. Determine uma base para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^3$ encontrados no exercício 78.

91. Verifique se os sistemas de vectores seguintes são bases de $\mathbb{R}^3$ :

(a) $((0,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$

(b) $((0,0,1),(1,0,1),(0,0,0))$

(c) $((2,1,1),(1,2,1),(1,-1,1))$

(d) $((1,0,0),(0,1,1))$

(e) $((0,1,1),(0,1,0),(1,1,-1),(2,1,3))$

92. Considere o sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = ((1,1,0),(1,2,1),(1,0,-1))$. Seja $W$ o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\mathcal{S}$.

(a) Diga, justificando, se $\mathcal{S}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base e a dimensão de $W$.

(c) Mostre que $(2,5,3) \in W$ e determine as suas coordenadas na base indicada na alínea anterior.

(d) Caracterize os vectores $(x,y,z) \in W$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

93. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e os seus subespaços

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 7z = 0\,,\, -4x + 8y + 5z = 0\,, 2x - 4y + 3z = 0\,\}$$

e

$$G = <\ (-4,-2,3),\ (2,1,5),\ (0,0,1) > .$$

(a) Determine uma base e a dimensão de $W$.

(b) Indique uma base e a dimensão de $G$ e caracterize os vectores de $G$ por meio de uma condição nas suas coordenadas.

(c) Determine uma base e a dimensão de $W \cap G$.

(d) Diga, justificando, se $W \cup G$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

94. (Mat I 14 Jan 09) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $b$ para os quais o sistema de vectores $((1,1,b),(1,3,b),(1,3,2))$ é base de $\mathbb{R}^3$.

95. (Mat I 14 Jan 09) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço vectorial

$$F = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 : 2a_1 + a_3 = 0 \ \wedge \ \ a_3 + 2a_4 = 0\}.$$

(a) Determine uma base de $F$.

(b) Diga, justificando, se $(-2,1,4,-2) \in F$ e, em caso afirmativo, determine a matriz das componentes de $(-2,1,4,-2)$ na base que indicou na alínea anterior.

96. (ALGA I 14 Jan 05) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3\,,\, x_3 = x_4\,\}$$

e

$$G = <\ (1,1,-3,-1),\ (-3,-1,1,-1),\ (5,1,1,3) > .$$

Determine:

(a) Uma base de $F$.

(b) Uma base de $G$.

(c) Uma base de $F \cap G$.

97. Seja $V$ um espaço vectorial real e seja $(u_1,u_2,u_3)$ um sistema linearmente independente de vectores de $V$.

(a) Classifique quanto à independência linear os seguintes sistemas de vectores:

i. $(u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$;

ii. $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1)$;

iii. $(u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_1)$;

iv. $(2u_1, 3u_2, 4u_3)$.

(b) Diga, justificando, quais dos sistemas da alínea (a) geram $< u_1, u_2, u_3 >$.

98. Indique, caso exista, uma base do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vectores:

a) $(-1, 1, 0, 0), (1, -1, -2, 1)$;

b) $(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0)$;

c) $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0)$.

99. (ALGA I 6 Fev 06) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$. Seja

$$W =< (1, -1, 2, 3), (1, 0, 1, 0), (3, -2, 5, 7) > \ .$$

(a) Determine uma base de $W$ .

(b) Mostre que $v = (0, 1, -1, -2) \in W$. Determine uma base de $W$ que contenha $v$.

(c) Indique, justificando, uma base de $W \cap F$, sendo

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

100. Seja $V$ um espaço vectorial real e suponhamos que $(u_1, u_2, u_3)$ é uma base de $V$. Sejam $z_1 = u_1 + u_2$ e $z_2 = u_1 + u_2 - u_3$ .

(a) Mostre que o sistema $(z_1, z_2)$ é linearmente independente.

(b) Determine uma base de $V$ da qual façam parte $z_1$ e $z_2$.

101. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e as suas bases $\beta = ((1, 0), (0, 1))$ e $\beta' = ((2, 1), (-3, 4))$.

(a) Determine a matriz de mudança da base $\beta'$ para a base $\beta$.

(b) Determine a matriz de mudança da base $\beta$ para a base $\beta'$.

(c) Determine a matriz das componentes de $w = (3, -5)$ na base $\beta$.

(d) Determine a matriz das componentes de $w = (3, -5)$ na base $\beta'$.

102. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}_1[x]$ e as suas bases $\beta = (p_1, p_2)$ e $\beta' = (q_1, q_2)$, onde

$$p_1 = 6 + 3x \ , \ \ p_2 = 10 + 2x \ , \ \ q_1 = 2 \ , \ \ q_2 = 3 + 2x \ .$$

(a) Determine a matriz de mudança da base $\beta'$ para a base $\beta$.

(b) Determine a matriz de mudança da base $\beta$ para a base $\beta'$.

(c) Determine a matriz das componentes de $p = -4 + x$ na base $\beta$.

(d) Determine a matriz das componentes de $p = -4 + x$ na base $\beta'$.

103. (ALGA I 17 Jan 06) Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) Uma base do espaço das linhas de $A$ .

(b) Uma base do espaço das colunas de $A$ .

(c) Uma base do espaço nulo de $A$ .

104. Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha$ é um parâmetro real. Determine, em função de $\alpha$, bases para:

(a) O espaço das linhas de $A_\alpha$;

(b) O espaço das colunas de $A_\alpha$;

(c) O espaço nulo de $A_\alpha$.

105. Discuta, em função de $\lambda$, a dimensão do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$ :

$$< (1, 2, 3, \lambda), (0, 1, 1, \lambda), (2, 1, 2, 0), (\lambda, 1, 0, 1) > .$$

106. Considere os subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$,

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1 = x_3 \;\text{ e }\; x_4 = 2x_2\}$$

e

$$G =< (2, 2, 2, 1), (0, 2, 0, 1), (-1, 2, -1, 1) > \; .$$

Determine a dimensão e indique bases para $F$, $G$, $F \cap G$ e $F + G$ .

107. Construa uma matriz de ordem 3, com elementos em $\mathbb{R}$, cujo espaço nulo seja gerado pelo vector $(1, 0, 1)$ .

108. Considere os subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0\} \, .$$

Mostre que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

109. (ALGA I 17 Jan 06) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1 + x_2 = x_3 \}.$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja

$$G_\alpha = < (1, -1, \alpha + 1, \alpha), \, (-1, \alpha, -2, -\alpha) > .$$

(a) Determine uma base de $F$.

(b) Determine, em função de $\alpha$, a dimensão de $G_\alpha$, indicando uma sua base.

(c) Indique, caso existam, os valores de $\alpha$ para os quais $\mathbb{R}^4 = F + G_\alpha$. Justifique.

(d) Indique, caso existam, os valores de $\alpha$ para os quais $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_\alpha$. Justifique.

110. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço vectorial

$$G = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, a_2 - a_3 = 0 \, \wedge \, a_3 - a_4 = 0\} .$$

(a) Determine uma base de $G$. Diga, justificando, qual a dimensão de $G$ .

(b) Determine um suplementar de $G$ em $\mathbb{R}^4$ .

111. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço

$$W = < (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0) > .$$

a) Diga, justificando, se $(0, 0, 0, 0) \in W$ .

b) Diga, justificando, se $(0, 1, 1, 0) \in W$ .

c) Indique, justificando, para que valores de $k$ e $t$ se tem $(0, t - 1, 0, k + t) \in W$.

d) Determine uma base de $W$. Qual a dimensão de $W$?

e) Determine um suplementar de $W$ em $\mathbb{R}^4$ .

112. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e o seu subconjunto:

$$T = \{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \, : \, a_{12} = a_{21} + a_{22} \, \wedge \, a_{21} = 3a_{11} \} .$$

a) Mostre que $T$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ .

d) Determine uma base de $T$. Qual a dimensão de $T$?

e) Determine um suplementar de $T$ em $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ .

113. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$F = < (0, 0, -1), (1, 0, 2) > \quad \text{e} \quad G = < (0, 1, 1), (-1, 3, 2) > .$$

a) Determine uma base de $F \cap G$ .

b) Determine uma base de $F + G$ .

114. Mostre que, se $F$ e $G$ são subespaços de $\mathbb{R}^5$ de dimensão 3, então têm pelo menos um vector não nulo em comum.

115. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Sejam $u = (-1, 1, -4)$, $v = (-1, 0, 2)$, $w = (-2, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

    (a) Determine o ângulo entre $u$ e $v$.

    (b) Indique, caso exista, um vector $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que o sistema de vectores $(z, u, w)$ seja ortogonal. Justifique.

    (c) Indique, caso existam, três vectores do subespaço $< w >$ com norma 1. Justifique.

116. Seja $\varphi$ a aplicação de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

    (a) Mostre que $\varphi$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

    (b) Considerando $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\varphi$, determine

        i. O ângulo do vector $(1, 1)$ com o vector $(2, 1)$.

        ii. Os valores de $m$ para os quais os vectores $(m, 1)$ e $(1, -m)$ são ortogonais.

117. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Sejam

$$v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \ , v_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \ , v_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathbb{R}^3.$$

    (a) Mostre que $(v_1, v_2, v_3)$ é base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Exprima o vector $(5, -3, 2)$ como combinação linear de $(v_1, v_2, v_3)$.

118. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^5$ munido do produto interno canónico. Seja $F =< (1, 2, 1, -1, 1), (2, 4, 1, 0, -1) >$. Determine uma base de $F^\perp$.

119. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, o subespaço

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 5x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 0 \ \wedge -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0\}.$$

    Determine uma base de $F^\perp$.

120. Considerando os respectivos produtos internos canónicos, determine a projecção ortogonal do vector $v$ sobre o subespaço vectorial $W$ quando :

    (a) $v = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ , $W =< (2, 3) > \subseteq \mathbb{R}^2$;

    (b) $v = (3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ , $W =< (1, 1, 2), (1, 0, 0) > \subseteq \mathbb{R}^3$;

    (c) $v = (1, -1, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$ , $W =< (1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

121. Considerando os respectivos produtos internos canónicos, exprima $v$ como soma de um elemento de $W$ e de um elemento de $W^\perp$, quando :

   (a) $v = (1,3,5) \in \mathbb{R}^3$ , $W =< (1,3,-2),(6,4,2) >\subseteq \mathbb{R}^3$;

   (b) $v = (4,3,3,-1) \in \mathbb{R}^4$ , $W =< (1,1,0,1),(0,4,1,-1),(-1,0,1,1) >\subseteq \mathbb{R}^4$.

122. Seja $V$ um espaço vectorial real munido de produto interno e sejam $v, u \in V$. Mostre que,

   (a) se $v|x = 0$, para todo o $x \in V$, então $v = 0$.

   (b) se $v|x = u|x$, para todo o $x \in V$, então $v = u$.

123. Seja $V$ um espaço vectorial real munido de produto interno e sejam $v, u \in V$. Mostre que,

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 \; = \; 2\,||u||^2 + 2\,||v||^2 \quad \text{(Lei do paralelogramo).}$$

124. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico os vectores $u = (1,2,-1)$ , $v = (0,1,1)$ , $z = (4,-5,5)$ e o subespaço $W =< u, v >$ .

   (a) Determine $u \wedge v$.

   (b) Calcule a área do paralelogramo definido por $u$ e $v$.

   (c) Exprima o vector $z$ como soma de um vector de $W$ com um vector de $W^\perp$.

125. (ALGA I - 14 Jan 05) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, o subespaço $W =< (0,1,0,1),\ (-1,0,1,0),\ (0,1,1,1) >$ e o vector $v = (1,1,3,3)$.

   (a) Determine uma base ortogonal de $W$.

   (b) Exprima o vector $v$ como soma de um vector de $W$ com um vector de $W^\perp$.

   (c) Determine a dimensão e uma base ortogonal de $W^\perp$.

126. (ALGA I - 29 Jan 05) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, o subespaço $W =< (1,0,1,1),\ (0,1,-1,0) >$.

   (a) Determine uma base de $W^\perp$.

   (b) Seja $z = (0,2,-1,1)$. Determine $p_W(z)$.

   (c) Determine o ângulo entre os vectores $u = (-1,1,1,1)$ e $v = (1,1,1,1)$.

127. (ALGA I - 17 Jan 06) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, os subespaços $F =< (1,0,1,0),\ (1,1,1,1),\ (1,3,1,3) >$ e $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

   (a) Determine uma base ortogonal de $F$.

   (b) Seja $z = (2,0,-1,1)$. Determine a projecção ortogonal de $z$ sobre $F^\perp$ .

   (c) Determine uma base de $W^\perp$.

(d) Determine $W^\perp \cap F^\perp$.

128. (ALGA I - 6 Fev 06) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico.

(a) Indique, justificando, uma base de um subespaço $G$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $G^\perp = <(1,2,3)>$ .

(b) Seja $G$ nas condições da alínea anterior e seja $z = (2,0,-1)$. Determine $p_G(z)$ .

(c) Sejam $v_1 = (0,0,3), v_2 = (2,1,1), v_3 = (1,k,1) \in \mathbb{R}^3$. Determine $k$ de modo que o produto misto de $v_1, v_2, v_3$ seja 6.

(d) Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$ , $u = (4,1,0)$ e $v = (\alpha^2, -1, \beta)$. Diga , justificando, para que valores dos parâmetros reais $\alpha$ e $\beta$ o sistema $(u, v, u \wedge v)$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ .

129. Seja $V$ um espaço Euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de $V$. Chama-se **matriz da métrica em relação à base** $(e_1, \ldots, e_n)$ à matriz $G \in M_n(\mathbb{R})$ cuja entrada $(i,j)$ é

$$e_i \,|\, e_j \,.$$

Mostre que, se $G$ é a matriz da métrica em relação à base $(e_1, \ldots, e_n)$ , então:

(a) A matriz $G$ é simétrica.

(b) A base $(e_1, \ldots, e_n)$ é ortonormada se e só se $G = I_n$.

(c) Para quaisquer $u, v \in V$ , se $u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ , $v = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ , então

$$u|v = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

(d) A matriz $G$ é invertível.

130. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno

$$(x_1, x_2)|(y_1, y_2) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

(a) Determine a matriz da métrica em relação à base canónica.

(b) Determine a matriz da métrica em relação à base $((1,1), (-1,1))$.