**ALGA I** - 2004/2005 **Exame - 14 de Janeiro de 2005** ①

**Duração : 2 h e 30m**

# Exame

1. (5 val) Para cada $\alpha$ pertencente a $\mathbf{R}$, considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \alpha - 2 & -1 \\ -5 & -1 & -4 & \alpha + 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine, em função do parâmetro real $\alpha$, a dimensão e bases do espaço das linhas e do espaço nulo de $A_\alpha$ .

   (b) Determine uma decomposição $LU$ de $A_2$.

   (c) Seja $B = A_5$. Calcule o determinante de $B$ e de $3\,B^{-1}$.

2. (1.5 val) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte

$$< (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) > = < (1,2,0,-1), (-1,0,-1,-1), (2,2,1,0) > .$$

3. (5 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 + x_3 \, , \ x_3 = x_4 \}$$

e

$$G = < (1,1,-3,-1), \ (-3,-1,1,-1), \ (5,1,1,3) > .$$

Determine

   (a) Uma base de $F$.

   (b) Uma base de $G$.

   (c) Uma base de $F \cap G$.

4. (4.5 val) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, o subespaço $W = < (0,1,0,1), \ (-1,0,1,0), \ (0,1,1,1) >$ e o vector $v = (1,1,3,3)$.

   (a) Determine uma base ortogonal de $W$.

   (b) Exprima o vector $v$ como soma de um vector de $W$ com um vector de $W^\perp$.

   (c) Determine a dimensão e uma base ortogonal de $W^\perp$.

**V. s. f. f.**

5. (2 val) Considere o espaço vectorial real $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ munido de um produto interno. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$X|Y = (AX)\,|\,(BY)\,,$$

para quaisquer $X, Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que as matrizes $A$ e $B$ são invertíveis.

(b) Mostre que, para quaisquer $X, Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$,

$$(A^{-1}X)\,|Y = X\,|\,(BY)\,.$$

6. (2 val) Enuncie e demonstre o Teorema do completamento.

# Resolução do Exame de ALGA I - 14 de Janeiro de 2005

1 -

$$A_\alpha = \begin{matrix} \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \alpha-2 & -1 \\ -5 & -1 & -4 & \alpha+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix} = A'_\alpha$$

a) I) Se $\alpha \neq 3$, $R(A_\alpha) = 4$ logo, pelas Prop. 3.7.9 e 3.7.17,

→ $\dim L(A_\alpha) = 4$, sendo $((1,0,1,-1),(0,1,-1,0),(0,0,\alpha-3,0),(0,0,0,\alpha-3))$ uma base de $L(A_\alpha)$

(**observação:**
$\dim \mathcal{C}(A_\alpha) = 4$ e $((1,2,1,-5),(0,1,0,-1),(1,1,\alpha-2,-4),(-1,-2,-1,\alpha+2))$ é uma base de $\mathcal{C}(A_\alpha)$

Observe-se que, como $\dim L(A_\alpha) = \dim(\mathcal{C}(A_\alpha)) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ e $L(A_\alpha)$ e $\mathcal{C}(A_\alpha)$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$ podemos concluir que $L(A_\alpha) = \mathbb{R}^4 = \mathcal{C}(A_\alpha)$, portanto qualquer base de $\mathbb{R}^4$ é base de $L(A_\alpha)$ e de $\mathcal{C}(A_\alpha)$, neste caso.

→ $\dim N(A_\alpha) = 4 - R(A_\alpha) = 4 - 4 = 0$, logo $\emptyset$ é base de $N(A_\alpha)$.

II) se $\alpha = 3$, temos $A'_\alpha = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Neste caso $R(A'_\alpha) = 2$, logo, pelas Prop. 3.7.9 e 3.7.17,

→ $\dim L(A_3) = 2$, sendo $((1,0,1,-1),(0,1,-1,0))$ uma base de $L(A_3)$

(obser: $\dim \mathcal{C}(A_3) = 2$, sendo $((1,2,1,-5),(0,1,0,-1))$ uma base de $\mathcal{C}(A_3)$)

→ $\dim N(A_3) = 4 - 2 = 2$.

$$N(A_3) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_3 + x_4 \ \text{e} \ x_2 = x_3\}$$
$$= \{(-x_3+x_4, x_3, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$N(A_3) = \{x_3(-1,1,1,0) + x_4(1,0,0,1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-1,1,1,0), (1,0,0,1) \rangle.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-1,1,1,0) + \beta(1,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (-\alpha+\beta, \alpha, \alpha, \beta) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow -\alpha+\beta = 0 \wedge \alpha = 0 \wedge \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$$

$\therefore$ $((-1,1,1,0),(1,0,0,1))$ è l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} N(A_3) = \langle (-1,1,1,0), (1,0,0,1) \rangle \\ ((-1,1,1,0),(1,0,0,1)) \text{ l. indp.} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} ((-1,1,1,0),(1,0,0,1)) \text{ è} \\ \text{base di } N(A_3) \end{array}}$$

b)

$$A_2 \underset{5}{\overset{-1\;\;-2}{=}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow {}_{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (consequência da Observação 1.8.10)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ é uma decomposição LU de A

c) $B = A_5$

$$\det B = \det(A_5) \overset{\text{Cálculos anteriores e Prop. 2.1.18}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{Prop 2.1.10}}{=} 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$$

$$\det(3B^{-1}) \underset{\text{Cor. 2.1.19}}{=} 3^4 \cdot \det(B^{-1}) \underset{\text{Cor 2.2.7}}{=} 3^4 \cdot \frac{1}{\det(B)} = 3^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4}$$

2 - Sejam $F = \langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle$

e $G = \langle (1,2,0,-1), (-1,0,-1,-1), (2,2,1,0) \rangle$.

Vamos determinar uma base de $G$ a fim de calcular a sua dimensão (observe-se que, se $\dim G = 3$ então, como $\dim F \leq 2$, é claro que $F \neq G$).

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se que $L(A) = G$, logo toda a base de $L(A)$ é base de $G$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{2} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ f. esc.}$$

Nestas condições sabemos (Prop 3.7.9) que $((1,2,0,-1), (0,2,-1,-2))$ é base de $G$. Assim, $G = \langle (1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \rangle$.

Portanto,

$$F = G \iff \langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle = \langle (1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \rangle$$

Tem-se $(3,2,2,1) = 3(1,2,0,-1) + (-2)(0,2,-1,-2)$,

logo $(3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \in \langle (1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \rangle$,

portanto,

$$\boxed{\langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle \subseteq \langle (1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \rangle} \quad (*)$$

Por outro lado, $(1,2,0,-1) = \frac{1}{3}(3,2,2,1) + \frac{2}{3}(0,2,-1,-2)$,

logo

$(1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \in \langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle$

portanto

$$\boxed{\langle (1,2,0,-1), (0,2,-1,-2) \rangle \subseteq \langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle} \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ resulta que $F = G$ logo <u>a afirmação é VERDADEIRA</u>.

<u>Obser</u>: A mesma conclusão pode ser obtida demonstrando que:

$(3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \in \langle (1,2,0,-1), (-1,0,-1,-1), (2,2,1,0) \rangle$

e

$(1,2,0,-1), (-1,0,-1,-1), (2,2,1,0) \in \langle (3,2,2,1), (0,2,-1,-2) \rangle$.

3 - a) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 \ , \ x_3 = x_4\}$

$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 \ , \ x_4 = x_3\}$

$= \{(x_2 + x_3, x_2, x_3, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,1) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,1,0,0), (1,0,1,1) \rangle$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$\alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (\alpha+\beta, \alpha, \beta, \beta) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \wedge \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

$\therefore ((1,1,0,0),(1,0,1,1))$ é l. indp.

$\left.\begin{array}{l} F = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,1) \rangle \\ ((1,1,0,0),(1,0,1,1)) \text{ l. indp.} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{((1,1,0,0),(1,0,1,1)) \text{ é base de } F}$

b) $G = \langle (1,1,-3,-1), (-3,-1,1,-1), (5,1,1,3) \rangle$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$.

Sabemos que $G = L(A)$.

$$A \underset{-5}{\overset{3}{=}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} ① & 1 & -3 & -1 \\ 0 & ① & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ f. escada}$$

Pela Prop. 3.7.9, $\boxed{((1,1,-3,-1),(0,1,-4,-2)) \text{ é base de } G = L(A).}$

e) Pela alínea anterior, $((1,1,-3,-1),(0,1,-4,-2))$ é base de $G$, logo

$$G = \langle (1,1,-3,-1), (0,1,-4,-2) \rangle$$

$$= \{\alpha_1(1,1,-3,-1) + \alpha_2(0,1,-4,-2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -3\alpha_1-4\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Assim,

$$F \cap G = \{x \in G : x \in F\} =$$

$$= \{(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -3\alpha_1-4\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ e } (\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -3\alpha_1-4\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2) \in F\}$$

$$\left( \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -3\alpha_1-4\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2) \in F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de } F}}{\Leftrightarrow} \alpha_1 = (\alpha_1+\alpha_2)+(-3\alpha_1-4\alpha_2) \wedge -3\alpha_1-4\alpha_2 = -\alpha_1-2\alpha_2 \\ \Leftrightarrow 3\alpha_1 = -3\alpha_2 \wedge -2\alpha_1 = 2\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \end{array} \right)$$

$$F \cap G = \{(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -3\alpha_1-4\alpha_2, -\alpha_1-2\alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \wedge \alpha_1 = -\alpha_2\}$$

$$= \{(-\alpha_2, 0, -\alpha_2, -\alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-1,0,-1,-1) \rangle$$

Como $(-1,0,-1,-1) \neq (0,0,0,0)$, o sistema $((-1,0,-1,-1))$ é l. independente, logo

$$\boxed{((-1,0,-1,-1)) \text{ é base de } F \cap G}$$

4- $W = \langle (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

a) Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 (0,1,0,1) + \alpha_2(-1,0,1,0) + \alpha_3 (0,1,1,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \wedge \alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_3 = 0$$

$\therefore$ $((0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,1,1))$ é l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} W = \langle (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,1,1) \rangle \\ ((0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,1,1)) \text{ l. indp.} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} ((0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,1,1,1)) \\ \text{é base de } W \end{array}}$$

Sejam

$$e_1 = (0,1,0,1)$$

$$e_2 = (-1,0,1,0) - \underbrace{\frac{(-1,0,1,0) \mid (0,1,0,1)}{(0,1,0,1) \mid (0,1,0,1)}}_{0} (0,1,0,1) = (-1,0,1,0)$$

$$e_3 = (0,1,1,1) - \underbrace{\frac{(0,1,1,1) \mid (0,1,0,1)}{(0,1,0,1) \mid (0,1,0,1)}}_{1} (0,1,0,1) - \underbrace{\frac{(0,1,1,1) \mid (-1,0,1,0)}{(-1,0,1,0) \mid (-1,0,1,0)}}_{\frac{1}{2}} (-1,0,1,0) =$$

$$= (0,1,1,1) - (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0) = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0)$$

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, sabemos que

$$\boxed{((0,1,0,1), (-1,0,1,0), (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0)) \text{ é base ortogonal de } W}$$

b) Sabemos que

$$v = p_W(v) + p_{W^\perp}(v) \quad , \quad p_W(v) \in W \text{ e } p_{W^\perp}(v) \in W^\perp.$$

Como $(\underbrace{(0,1,0,1)}_{e_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{e_2}, \underset{e_3}{(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)})$ é base ortogonal de W,

tem-se, pela Prop. 4.35,

$$p_W(v) = \frac{v|e_1}{e_1|e_1} e_1 + \frac{v|e_2}{e_2|e_2} e_2 + \frac{v|e_3}{e_3|e_3} e_3 =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{4}{2}(0,1,0,1) + \frac{2}{2}(-1,0,1,0) + \frac{2}{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0) =$$

$v = (1,1,3,3)$

$$= (0,2,0,2) + (-1,0,1,0) + (2,0,2,0) =$$

$$= (1,2,3,2)$$

$$p_{W^\perp}(v) = v - p_W(v) = (1,1,3,3) - (1,2,3,2) = (0,-1,0,1)$$

Portanto $\boxed{v = \underbrace{(1,2,3,2)}_{\in W} + \underbrace{(0,-1,0,1)}_{\in W^\perp}}$

c) Pela alínea a) sabemos que $\dim W = 3$, logo

$$\dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W = 4 - 3 = 1.$$

Pela alínea b), sabemos que $(0,-1,0,1) \in W^\perp$.

Como $(0,-1,0,1) \neq (0,0,0,0)$, o sistema $((0,-1,0,1))$ é l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} ((0,-1,0,1)) \text{ l. indp.} \\ (0,-1,0,1) \in W^\perp \\ \dim W^\perp = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{((0,-1,0,1)) \text{ é base de } W^\perp}$$

$\therefore$ $((0,-1,0,1))$ é base ortogonal de $W^\perp$ (pois é constituída por um único vector)

5 - Considere-se $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ munido de um produto interno.

Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $X \mid Y = (AX) \mid (BY)$, para quaisquer $X, Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

a) Suponhamos, com vista a um absurdo, que A não é invertível. Então o sistema homogéneo $AX = 0$ é indeterminado, logo existe $Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $Z \neq 0$ e $AZ = 0$.

Nestas condições $Z \mid Z \neq 0$ (por def. de produto interno).

Assim,

$$0 \neq Z \mid Z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótese}}}{=} (AZ) \mid (BZ) \underset{\substack{\uparrow \\ AZ=0}}{=} 0 \mid (BZ) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. do} \\ \text{p. interno}}}{=} 0 ,$$

<u>absurdo</u>

Logo A é invertível.

Analogamente se demonstra que B é invertível.

b) Sejam X e Y elementos arbitrários de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$(A^{-1}X) \mid Y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hip}}}{=} (A(A^{-1}X)) \mid (BY) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assoc. do} \\ \text{prod. de matrizes}}}{=} ((AA^{-1})X) \mid (BY) = (I_n X) \mid (BY) = X \mid (BY).$$

6 - Proposição 3.6.23 (pág. 85) dos Apontamentos da Teórica.

**ALGA I** – 2004/2005 **Exame - 29 de Janeiro de 2005** ⑦

**Duração : 2 h e 30m**

# Exame A

1. (4.5 val) Para $k$ e $t$ pertencentes a $\mathbf{R}$, considere as matrizes

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_t = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta, em função de $k$ e $t$, o sistema de equações lineares $A_k X = B_t$.

   (b) Calcule, em função de $k$, o determinante de $A_k$.

   (c) Indique, justificando, os valores de $k$ para os quais a matriz $A_k$ é invertível e calcule a inversa de $A_{-2}$ $(k = -2)$.

2. (1.5 val) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte

$$T = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \; : \; det(A) = 0\} \text{ é um subespaço vectorial de } M_{2\times2}(\mathbb{R}).$$

3. (6 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços

$$F = < (1,0,1,-1), (0,0,-2,0), (1,0,0,-1) >$$

e

$$G = < (0,1,0,0), (1,1,0,0), (0,1,1,0) > .$$

Determine

   (a) Uma base de $F$.

   (b) Uma base de $F + G$.

   (c) Mostre que $F \cap G =< (0,0,1,0) >$.

   (d) Diga, justificando, se $F \cup G$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

4. (4 val) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, o subespaço $W = < (1,0,1,1), (0,1,-1,0) >$.

   (a) Determine uma base de $W^{\perp}$.

   (b) Seja $z = (0,2,-1,1)$. Determine $p_W(z)$.

   (c) Determine o ângulo entre os vectores $u = (-1,1,1,1)$ e $v = (1,1,1,1)$.

**V. s. f. f.**

5. (2 val) Seja $V$ um espaço vectorial real de dimensão $n+t$, com $n, t \in \mathbb{N}$. Sejam $v_1, \ldots, v_n, z_1, \ldots, z_p$ vectores de $V$ e considere-se $F =< v_1, \ldots, v_n >$ e $G =< z_1, \ldots, z_p >$ . Suponhamos que os sistemas $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(z_1, \ldots, z_p)$ são linearmente independentes.

   Mostre que $V = F \oplus G$ se e só se $(v_1, \ldots, v_n, z_1, \ldots, z_p)$ é linearmente independente.

6. (2 val)

   (a) Enuncie o Teorema de Steinitz.

   (b) Seja $V$ um espaço vectorial real munido de produto interno. Sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$ . Mostre que, se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente.

# Resolução do Exame A - (29 de Janeiro de 2005)

⑧

1 - a)

$$[A_K \mid B_t] = \begin{array}{c}\updownarrow\\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 & t \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & K & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \downarrow \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & t \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & K & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -3 \\ \downarrow \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & t \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & K-2 & 3-t \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & t \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K+1 & 3-t \end{array}\right]$$

<u>1º caso</u> : se $K+1 \neq 0$, isto é, se $K \neq -1$, $R(A_K) = 4 = R([A_K \mid B_t])$ logo o sistema é possível. Como $R(A_K) = 4 =$ nº de col. de $A_K$, o sistema é determinado.

<u>2º caso</u> : Se $K = -1$ temos :

i) se $3 - t \neq 0$, isto é, se $t \neq 3$, $R(A_{-1}) = 3 < 4 = R([A_{-1} \mid B_t])$, logo, neste caso, o sistema é impossível.

ii) se $3 - t = 0$, isto é, se $t = 3$, $R(A_3) = 3 = R([A_{-1} \mid B_3])$, logo, neste caso, o sistema é possível. Como $R(A_{-1}) = 3 < 4 =$ nº de colunas de $A_{-1}$, o sistema é indeterminado, com grau de ind. 1.

Conclusão :

Se $K \neq -1$, o sistema é poss. e determinado (para qualquer $t$)

Se $K = -1$ e $t \neq 3$, o sistema é impossível.

Se $K = -1$ e $t = 3$, o sist é poss e indet. com grau de indeterminação 1.

b)

$$\det A_K = \det\begin{bmatrix}0&1&3&2\\1&-1&0&2\\0&0&-1&-1\\0&1&0&K\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&1&3&2\\0&0&-1&-1\\0&1&0&K\end{bmatrix}{-1} =$$

$$= -\det\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&1&3&2\\0&0&-1&-1\\0&0&-3&K-2\end{bmatrix}{-3} = -\det\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&1&3&2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&K+1\end{bmatrix}$$

$$= -\ 1\times 1\times(-1)\times(K+1) = K+1$$

c) Sabemos que $A_K$ é invertível sse $\det(A_K) \neq 0$. Pela alínea anterior, $\det(A_K) = K+1$, logo

$A_K$ é invert. $\Longleftrightarrow K+1\neq 0 \Longleftrightarrow K\neq -1$ .

Vamos determinar a inversa de $A_{-2} = \begin{bmatrix}0&1&3&2\\1&-1&0&2\\0&0&-1&-1\\0&1&0&-2\end{bmatrix}$ :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&3&2&1&0&0&0\\1&-1&0&2&0&1&0&0\\0&0&-1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&-2&0&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow {-1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&2&0&1&0&0\\0&1&3&2&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&-2&0&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow {-3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&2&0&1&0&0\\0&1&3&2&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&0&0&1&0\\0&0&-3&-4&-1&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c}\\ \\(-1)\\(-1)\end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&2&0&1&0&0\\0&1&3&2&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&-1&-1&0&-3&1\end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{array}{c}-2\\-2\\-1\\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&2&0&1&0&0\\0&1&3&2&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&-1&0\\0&0&0&1&1&0&3&-1\end{array}\right] \rightarrow {-3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&-2&1&-6&2\\0&1&3&0&-1&0&-6&+2\\0&0&1&0&-1&0&-4&1\\0&0&0&1&1&0&3&-1\end{array}\right] \rightarrow$$

$$1\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&-2&1&-6&2\\0&1&0&0&2&0&6&-1\\0&0&1&0&-1&0&-4&1\\0&0&0&1&1&0&3&-1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&2&0&6&-1\\0&0&1&0&-1&0&-4&1\\0&0&0&1&1&0&3&-1\end{array}\right]$$

Logo a inversa de $A_{-2}$ é $\begin{bmatrix}0&1&0&1\\2&0&6&-1\\-1&0&-4&1\\1&0&3&-1\end{bmatrix}$

2 - $T = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$

Sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Tem-se que $\det B = 0$ e $\det C = 0$, logo $B, C \in T$.
No entanto, $\det(B + C) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, donde $B + C \notin T$.

Assim, podemos concluir que $T$ não é subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ (pois a condição $S_3$ da def. de subespaço não é satisfeita).

3- a) $F = \langle (1,0,1,-1), (0,0,-2,0), (1,0,0,-1) \rangle$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$. Sabemos que $F = L(A)$.

$$-1\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow -\tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right.\right. \text{ f. escada}$$

Atendendo à Prop. 3.7.9,
$((1,0,1,-1), (0,0,-2,0))$ é uma base de $L(A) = F$.

b) Atendendo à alínea a), $F = \langle (1,0,1,-1), (0,0,-2,0) \rangle$,
assim, pela Prop 3.8.5,

$$F + G = \langle (1,0,1,-1), (0,0,-2,0) \rangle + \langle (0,1,0,0), (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle =$$
$$= \langle (1,0,1,-1), (0,0,-2,0), (0,1,0,0), (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle.$$

Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{5\times4}(\mathbb{R})$.

Sabemos que $L(B) = F + G$.

$$-1\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&0&-2&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&0&-2&0\\0&1&0&0\\0&1&-1&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\longrightarrow -1\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&1&-1&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$-1$$

$$\rightarrow -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{f. escada}$$

$$1/2$$

Atendendo à Prop. 3.7.9,

$$\boxed{((1,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,-2,0),(0,0,0,1)) \text{ é base de } F+G=L(B).}$$

e) Sabemos que $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F\cap G)$.

Na alínea anterior encontrámos uma base de $F+G$. Essa base é constituída por 4 elementos, logo $\boxed{\dim(F+G)=4}$

Analogamente, pela resol. de a), $\boxed{\dim F = 2}$

Vamos determinar $\dim G = \dim <(0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0)>$.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$\alpha_1(0,1,0,0)+\alpha_2(1,1,0,0)+\alpha_3(0,1,1,0)=(0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3, 0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_2=0 \wedge \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \wedge \alpha_3=0$

$\Rightarrow \alpha_1=0 \wedge \alpha_2=0 \wedge \alpha_3=0$.

Portanto $((0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0))$ é l. indp.. Como $G=<(0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0)>$, concluimos que

$((0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0))$ é base de $G$, logo

$$\boxed{\dim G = 3}.$$

Portanto

$\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 2+3-4 = 1$.

Tem-se

$(0,0,1,0) = 0(1,0,1,-1) + (-\frac{1}{2})(0,0,-2,0) \Rightarrow (0,0,1,0) \in F$

$(0,0,1,0) = (-1)(0,1,0,0) + 0(1,1,0,0) + 1(0,1,1,0) \Rightarrow (0,0,1,0) \in G$

$\therefore (0,0,1,0) \in F \cap G.$

Como $(0,0,1,0) \neq (0,0,0,0)$, o sistema $((0,0,1,0))$ é l. indp., logo $\dim \langle (0,0,1,0) \rangle = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} (0,0,1,0) \in F\cap G \Rightarrow \langle (0,0,1,0) \rangle \leqslant F \cap G \\ \dim \langle (0,0,1,0) \rangle = 1 \\ \dim (F \cap G) = 1 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 3.6.26}}}{\Rightarrow} \langle (0,0,1,0) \rangle = F \cap G$$

**d)** Sabemos (Exercício 79) que $F \cup G$ é subespaço se e só se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $F \cup G \leqslant \mathbb{R}^4$. Então $F \leqslant G$ ou $G \leqslant F$, logo $F+G \leqslant G$ ou $F+G \leqslant F$, donde $\dim(F+G) \leqslant \dim G$ ou $\dim(F+G) \leqslant \dim F$, absurdo pois, pelas alíneas anteriores, $\dim(F+G) = 4$, $\dim G = 3$ e $\dim F = 2$.

4- $W = \langle (1,0,1,1),(0,1,-1,0) \rangle$

a) Sabemos que:

$$W^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : (x_1,x_2,x_3,x_4) | (1,0,1,1) = 0 \text{ e } (x_1,x_2,x_3,x_4) | (0,1,-1,0) = 0\}$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_2 - x_3 = 0\}$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_3 - x_4 \text{ e } x_2 = x_3\}$$

$$= \{(-x_3 - x_4, x_3, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(-x_3, x_3, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_3(-1,1,1,0) + x_4(-1,0,0,1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-1,1,1,0),(-1,0,0,1) \rangle$$

Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(-1,1,1,0) + \alpha_2(-1,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (-\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2) = (0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0$$

$\therefore$ $((-1,1,1,0),(-1,0,0,1))$ é l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} W^{\perp} = \langle (-1,1,1,0),(-1,0,0,1) \rangle \\ ((-1,1,1,0),(-1,0,0,1)) \text{ l. indp} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{((-1,1,1,0),(-1,0,0,1)) \text{ é base de } W^{\perp}}$$

b) Vamos determinar uma base ortogonal de W.

Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,0,1,1) + \alpha_2(0,1,-1,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0$$

$\therefore$ $((1,0,1,1),(0,1,-1,0))$ é l. indp., portanto $((1,0,1,1),(0,1,-1,0))$ é base de W.

Sejam $e_1 = (1,0,1,1)$

$$e_2 = (0,1,-1,0) - \frac{(0,1,-1,0)|(1,0,1,1)}{(1,0,1,1)|(1,0,1,1)}(1,0,1,1) = (0,1,-1,0) + \frac{1}{3}(1,0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Pelo Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt sabemos que $\left((1,0,1,1),\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$ é base ortogonal de W.

Assim

$$p_W((0,2,-1,1)) = \frac{(0,2,-1,1)|(1,0,1,1)}{(1,0,1,1)|(1,0,1,1)} \cdot (1,0,1,1) + \frac{(0,2,-1,1)|\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)|\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 0 \cdot (1,0,1,1) + \frac{3}{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{5},\frac{9}{5},-\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$$

5- $\dim V = n+t$

$v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p \in V$

$F = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , $G = \langle z_1, \dots, z_p \rangle$

$(v_1, \dots, v_n)$, $(z_1, \dots, z_p)$ l. indp.

? $V = F \oplus G \iff (v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p)$ l. indp. ?

$\boxed{\Rightarrow}$ Sup. que $V = F \oplus G$. Então $F+G = V$, logo

$\langle v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle + \langle z_1, \dots, z_p \rangle = F+G = V$.

Temos então que $V = \langle v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p \rangle$ portanto, como $\dim V = n+p$, concluímos que $(v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p)$ é l. indp. (Prop. 3.6.21)

$\boxed{\Leftarrow}$ Sup. que $(v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p)$ é l. indp.

Como $v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p \in V$ e $\dim V = n+p$ concluímos que $(v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p)$ é base de $V$. Logo,

$V = \langle v_1, \dots, v_n, z_1, \dots, z_p \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle + \langle z_1, \dots, z_p \rangle = F+G$,

portanto

$$\boxed{V = F+G} \qquad (*)$$

Sabemos que $F = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e $(v_1, \dots, v_n)$ é l. indp, logo $(v_1, \dots, v_n)$ é base de $F$ e $\dim F = n$. Analogamente, $(z_1, \dots, z_p)$ é base de $G$ e $\dim G = p$.

Pelo Teorema das dimensões,

$$\dim(F \cap G) = \underbrace{\dim F}_{n} + \underbrace{\dim G}_{p} - \underbrace{\dim(F+G)}_{n+p} = 0$$

logo

$$\boxed{F \cap G = \{0\}} \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ resulta que $V = F \oplus G$.

**ALGA I** – 2005/2006
**Duração : 2 h**

12

21 de Novembro de 2005

# TESTE

## 1ª Parte

1. (5 val) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $BC$, $CB$, $det\,(BC)$ e $det\,(CB)$.

   (b) Determine $adj\,(A)$.

   (c) Determine $A^{-1}$.

   (d) Determine uma decomposição $LU$ de $A$ e resolva o sistema $AX = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, mediante a resolução de sistemas triangulares.

2. (4 val) Para cada $k$ e cada $t$ pertencentes a $\mathbf{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$ e coeficientes reais,

$$S_{k,t} = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 - k\,x_2 + 3x_3 = -3 \\ -2x_1 - 2x_2 + k\,x_3 = t - 3 \end{cases}$$

   (a) Discuta, em função de $k$ e $t$, o sistema $S_{k,t}$.

   (b) Resolva o sistema $S_{2,1}$ $(k = 2$ e $t = 1)$.

## 2ª Parte

3. (1.5 val) Mostre que, para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$det \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix} = (det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})^2.$$

**Vire s. f. f.**

4. (4 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras.

   (a) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = x_2 \ \wedge\ x_3 < 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $F_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \,:\, a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (c) $F_3 = \{(2b, b+c, c) \,:\, b, c \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

5. (2 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determine quais os valores do parâmetro real $t$ para que o vector $(-1, 2, 3)$ seja combinação linear do sistema de vectores $((1, -1, t), (3, -1, 3t))$.

6. (2 val) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que, se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = I_n$, então $(\widehat{A})^p = I_n$.

7. (1.5 val) ( Demonstração) Seja $V$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$ e seja $E$ um subespaço vectorial de $V$. Demonstre que

$$E = < v_1, \ldots, v_n >$$

se e só se as condições seguintes são satisfeitas,

   (a) $v_1, \ldots, v_n \in E$;

   (b) Para qualquer $z \in E$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$z = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \,.$$

**FIM**

ALGA I

Resolução do Teste (21 de Novembro de 2005)

1- a) $$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(BC) = \det \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} = -20+0+96-60-0-16=0$$

$$\det(CB) = \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 4-30=-26$$

b) Por definição, $\operatorname{adj}(A) = (\hat{A})^T$.

Como $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, temos

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det A(1|1) = \det \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 12+9=21$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = -\det \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 16$$

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det A(1|3) = +\det \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -12$$

$$\hat{A}_{21} = (-1)^{2+1} \det A(2|1) = -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = +10$$

$$\hat{A}_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 8 \;;\quad \hat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

$$\hat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = -3 \;;\quad \hat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = -2$$

$$\hat{A}_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = 2 \, ,$$

logo

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 21 & 16 & -12 \\ 10 & 8 & -6 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \operatorname{adj}(A) = (\hat{A})^T = \begin{bmatrix} 21 & 10 & -3 \\ 16 & 8 & -2 \\ -12 & -6 & 2 \end{bmatrix} .$$

c)

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \curvearrowleft 2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \curvearrowleft -3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 .$$

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 21 & 10 & -3 \\ 16 & 8 & -2 \\ -12 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/2 & 5 & -3/2 \\ 8 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} .$$

d)

$$A = {}^{2}\curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{-3}\curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{U}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad \boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Começamos por resolver o sistema $LY = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ -2y_1 + y_2 = 0 \\ 3y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 9 \end{cases}$$

Resta resolver o sistema $UX = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = -2 \\ x_3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = -1 - 11 - 18 \\ x_2 = -11 \\ x_3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -15 \\ x_2 = -11 \\ x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\therefore \; X = \begin{bmatrix} -15 \\ -11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2- a) matriz ampliada do sistema $S_{K,t}$

$$\begin{array}{c}3\\ \\ 2\end{array}\left[\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -K & 3\\ -2 & -2 & K\end{matrix}}_{A_K}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1\\ -3\\ t-3\end{matrix}}_{B_t}\right] \rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -K+3 & 0\\ 0 & 0 & K-2\end{matrix}}_{A'_K}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1\\ 0\\ t-1\end{matrix}}_{B'_t}\right]$$

Caso 1 : Se $-K+3 \neq 0$ e $K-2 \neq 0$, isto é, se $K \neq 3$ e $K \neq 2$,

$R(A_K) = R([A_K | B_t]) = 3 =$ nº de incógnitas,

logo o sistema é possível e determinado.

Caso 2 : ⓘ se $K = 3$,

$$[A'_3 | B'_t] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & t-1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & t-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$R(A_3) = R([A_3 | B_t]) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$,

logo o sistema é possível e indet. com grau de indet. 1.

(ii) se $K = 2$,

$$[A'_2 | B'_t] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t-1\end{array}\right]$$

logo :

Se $t-1 \neq 0$, i.e, se $t \neq 1$, o sistema é impossível.

Se $t-1 = 0$, i.e, se $t = 1$,

$R(A_2) = R([A_2 | B_1]) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$,

logo o sistema é possível e indet. c/ grau de indet. 1.

Conclusão :

Se $K \neq 3$ e $K \neq 2$, o sistema é possível e determinado (para qualquer valor de $t$)

Se $K = 3$ o sistema é possível e indet. c/ gr. de ind. 1 (para qualquer valor de $t$)

Se $K = 2$ e $t \neq 1$, o sistema é impossível.

Se $K = 2$ e $t = 1$, o sistema é possível e indet. com gr. ind. 1.

b) $[A'_2 \mid B'_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \curvearrowleft -1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

O sistema $S_{2,1}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$,

logo o conjunto das suas soluções é o conjunto:

$\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 = 1 + \alpha_3 \wedge \alpha_2 = 0\} =$

$= \{(1+\alpha_3, 0, \alpha_3) : \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

3 -

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & c \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T. Laplace} \\ \text{(2º linha)}}}{=} d \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + c\,(-1)^{2+4} \det \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{T. Laplace} \\ \text{(3º linha)}}}{=} d \cdot a \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + c \cdot b\,(-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= da \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - cb \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (da - cb) \times \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \left(\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)^2$$

4 - a) Tem-se que $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0) \notin F_1$, logo $S_2$ não é satisfeita e portanto $F_1$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Tem-se, por exemplo, que $(1,i,2) \in F_2$ e $(1,i,2) \notin \mathbb{R}^3$, logo $F_2 \notin \mathbb{R}^3$, portanto $F_2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

c)
$$F_3 = \{(2b, b+c, c) : b,c \in \mathbb{R}\}$$
Vamos dem. que $F_3$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$S_1$) Sup. que $w \in F_3$. Então existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $w = (\underbrace{2b}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{b+c}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}})$, donde $w \in \mathbb{R}^3$. Logo $F_3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

$S_2$) Como $0 \in \mathbb{R}$, $(2 \cdot 0, 0+0, 0) = (0,0,0) \in F_3$, logo
$$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_3.$$

$S_3$) Suponhamos que $x,y \in F_3$. Então existem $b,c,b',c' \in \mathbb{R}$ tais que
$$x = (2b, b+c, c) \quad e \quad y = (2b', b'+c', c').$$
Assim, atendendo às propriedades de + e × em $\mathbb{R}$,
$$x+y = (2b, b+c, c) + (2b', b'+c', c') =$$
$$= (2b+2b', (b+c)+(b'+c'), c+c') =$$
$$= (2(b+b'), (b+b')+(c+c'), c+c').$$
Como $b,c,b',c' \in \mathbb{R}$ sabemos que $b+b', c+c' \in \mathbb{R}$, donde
$$x+y = (2(b+b'), (b+b')+(c+c'), c+c') \in F_3$$

$S_4$) Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in F_3$. Como $x \in F_3$ existem $b,c \in \mathbb{R}$ tais que $x = (2b, b+c, c)$.

Assim, atendendo às propriedades de + e × em $\mathbb{R}$,
$$\alpha x = \alpha(2b, b+c, c) = (\alpha(2b), \alpha(b+c), \alpha c) = (2(\alpha b), \alpha b + \alpha c, \alpha c).$$
Como $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$, sabemos que $\alpha b, \alpha c \in \mathbb{R}$, logo
$$\alpha x = (2(\alpha b), \alpha b + \alpha c, \alpha c) \in F_3.$$

5- $\mathbb{R}^3$

$(-1,2,3)$ é comb. linear de $((1,-1,t), (3,-1,3t)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (-1,2,3) = \alpha_1 (1,-1,t) + \alpha_2 (3,-1,3t)$

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (-1,2,3) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, t\alpha_1 + 3t\alpha_2)$

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 + 3\alpha_2 = -1 \wedge -\alpha_1 - \alpha_2 = 2 \wedge t\alpha_1 + 3t\alpha_2 = 3$

$\Leftrightarrow$ O sistema de eq. lineares sobre $\mathbb{R}$, nas inc. $x_1, x_2$,

$$S = \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ tx_1 + 3tx_2 = 3 \end{cases}$$

é possível.

Considere-se a matriz ampliada do sistema $S$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ t & 3t & 3 \end{array}\right]$$

Tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ t & 3t & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow -t \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3+t \end{array}\right],$$

logo

$S$ é possível $\Leftrightarrow 3+t=0 \Leftrightarrow t=-3$.

Portanto,

$(-1,2,3)$ é comb. linear de $((1,-1,t), (3,-1,3t))$ se e só se $t=-3$.

6- Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Suponhamos que $p \in \mathbb{N}$ e $A^p = I_n$.

Então
$$(\det(A))^p = \det(A^p) = \det(I_n) = 1. \qquad (*)$$

Em particular, da igualdade anterior resulta que $\det(A) \neq 0$, logo $A$ é invertível. Assim, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$,

donde
$$\operatorname{adj}(A) = (\det(A)) \cdot A^{-1}.$$

Portanto
$$
\begin{aligned}
(\operatorname{adj}(A))^p &= ((\det(A)) \cdot A^{-1})^p = \\
&= (\det(A))^p \cdot (A^{-1})^p && (\text{porque } \det(A) \in \mathbb{R}) \\
&= (A^{-1})^p && (\text{por } (*),\ (\det(A))^p = 1) \\
&= (A^p)^{-1} \\
&= (I_n)^{-1} && (\text{por hipótese, } A^p = I_n) \\
&= I_n .
\end{aligned}
$$

Logo
$$(\hat{A})^p = ((\operatorname{adj}(A))^T)^p = (\operatorname{adj}(A)^p)^T = I_n^T = I_n.$$

7- Demonstrado na Aula Teórica.

**ALGA I** – 2005/2006 **Exame - 17 de Janeiro de 2006**

**Duração : 3 horas**

17

# Exame

## 1ª Parte

1. (3.5 val) Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = CA.$$

   (a) Resolva o sistema de equações lineares $AX = 0$.

   (b) Verifique que $(1, 0, 1, -1)$ é solução do sistema de equações lineares $AX = B$.

   (c) Discuta, em função dos parâmetros reais $a$ e $b$, o sistema $DX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \end{bmatrix}$.

2. (4.5 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu subespaço

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3\}.$$

   Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja

$$G_\alpha = < (1, -1, \alpha + 1, \alpha), (-1, \alpha, -2, -\alpha) > .$$

   (a) Determine uma base de $F$.

   (b) Determine, em função de $\alpha$, a dimensão de $G_\alpha$, indicando uma sua base.

   (c) Indique, caso existam, os valores de $\alpha$ para os quais $\mathbb{R}^4 = F + G_\alpha$. Justifique.

   (d) Indique, caso existam, os valores de $\alpha$ para os quais $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_\alpha$. Justifique.

## 2ª Parte

3. (2.5 val) Seja $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Admita que $det(A) = 3$.

   (a) Diga, justificando, se o sistema $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ é sistema de Cramer.

   (b) Calcule

   (i) $det \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ (ii) $det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$.

**Vire s. f. f.**

4. (5 val) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico, os subespaços

$$F = < (1,0,1,0),\ (1,1,1,1),\ (1,3,1,3) >$$

e

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Determine uma base ortogonal de $F$.

(b) Seja $z = (2, 0, -1, 1)$. Determine a projecção ortogonal de $z$ sobre $F^\perp$ .

(c) Determine uma base de $W^\perp$.

(d) Determine $W^\perp \cap F^\perp$.

5. (a) (1 val) Seja $V$ um espaço vectorial real munido de produto interno. Mostre que, para qualquer $v \in V$,

$$\{x \in V \ : \ ||x|| = ||v||\} = \{x \in V \ : \ (x+v)|(x-v) = 0\}.$$

(b) (2 val) Sejam $V$ um espaço vectorial real, $F$ um subespaço de $V$ e $(f_1, \ldots, f_p)$ uma base de $F$.

Sejam $x, y \in V$ e considere os subespaços

$$G = < x, f_1, \ldots, f_p > \qquad \text{e} \qquad H = < y, f_1, \ldots, f_p > .$$

Mostre que, se $y \in G \setminus F$, então $G = H$.

6. (1.5 val) Seja $V$ um espaço vectorial real. Mostre que se $F$ e $G$ são subespaços vectoriais de $V$, então $F + G$ é subespaço vectorial de $V$.

# ALGA I - Resolução do Exame (17 Janeiro de 2006)

1 - a)

$$\begin{matrix} \\ -2 \\ 1 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} \\ 1/2 \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} ① & 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema $AX=0$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} x_1 = -x_2 - 3/2\, x_4 \\ x_3 = -1/2\, x_4 \end{cases}$

Logo

$$\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 - \tfrac{3}{2} x_4 \wedge x_3 = -\tfrac{1}{2} x_4 \} =$$

$$= \{ (-x_2 - \tfrac{3}{2} x_4, x_2, -\tfrac{1}{2} x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

é o conjunto das soluções do sistema $AX = 0$.

b)

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

portanto $(1,0,1,-1)$ é solução do sistema $AX = B$.

c) $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & a & -a & a \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -a & -a & -a & -2a \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & a & -a & a & a \\ 2 & 2 & 0 & 3 & b \\ -a & -a & -a & -2a & -a \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & -a & a & a \\ 2 & 2 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & -2a & -a & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} \\ -\frac{a}{2} \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 3 & b \\ a & a & -a & a & a \\ 0 & 0 & -2a & -a & 0 \end{array}\right]$$

(com $\overbrace{\phantom{a}}^{B'}$ sobre a última coluna $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \end{bmatrix}$)

$$\rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & -a & -\frac{a}{2} & a - \frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -2a & -a & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & -a & -\frac{a}{2} & a - \frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+ab \end{array}\right] \rightarrow a(b-2)$$

Caso 1: Se $a=0$, $R(D) = R([D|B']) = 1 <$ nº de incógnitas $= 4$, logo o sistema é possível e indet. c/ grau de ind. 3.

Caso 2: i) Se $a \neq 0$ e $b = 2$, $R(D) = R([D|B']) = 2 <$ nº de inc $= 4$, logo o sistema é possível e indet. c/ grau de indet. 2.

ii) Se $a \neq 0$ e $b \neq 2$, $R(D) = 2 < R([D|B']) = 3$, portanto o sistema é impossível.

2- a) $F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2=x_3\}=$

$=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=-x_2+x_3\}=$

$=\{(-x_2+x_3,x_2,x_3,x_4) : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^4\}$

$=\{(-x_2,x_2,0,0)+(x_3,0,x_3,0)+(0,0,0,x_4) : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^4\}$

$=\{x_2(-1,1,0,0)+x_3(1,0,1,0)+x_4(0,0,0,1) : x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^4\}$

$=\langle(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$

Para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$,

$\alpha_1(-1,1,0,0)+\alpha_2(1,0,1,0)+\alpha_3(0,0,0,1)=(0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0,0) \Rightarrow -\alpha_1+\alpha_2=0 \wedge \alpha_1=0 \wedge \alpha_2=0 \wedge \alpha_3=0$

$\Rightarrow \alpha_1=0 \wedge \alpha_2=0 \wedge \alpha_3=0$

Logo $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1))$ é l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} F=\langle(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle \\ ((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)) \text{ l. indp.}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)) \\ \text{é base de } F\end{array}}$$

b) Seja $A_\alpha=\begin{bmatrix}1 & -1 & \alpha+1 & \alpha\\ -1 & \alpha & -2 & -\alpha\end{bmatrix}$. Sabemos que $G_\alpha=L(A_\alpha)$,

e $\dim(G_\alpha)=R(A_\alpha)$.

$$A_\alpha\overset{1}{=}\begin{bmatrix}1 & -1 & \alpha+1 & \alpha\\ -1 & \alpha & -2 & -\alpha\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & \alpha+1 & \alpha\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{f. escada}$$

Portanto,

- Se $\alpha\neq 1$, $\dim(G_\alpha)=R(A_\alpha)=2$ e $((1,-1,\alpha+1,\alpha),(0,\alpha-1,\alpha+1,0))$ é uma base de $L(A_\alpha)=G_\alpha$.
- Se $\alpha=1$, $\dim(G_\alpha)=R(A_\alpha)=1$ e $((1,-1,2,1))$ é base de $L(A_\alpha)=G_\alpha$.

c) Atendendo à alínea a), $F = \langle (-1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$ e $G_\alpha = \langle (1,-1,\alpha+1,\alpha), (-1,\alpha,-2,-\alpha) \rangle$, logo

$$F + G_\alpha = \langle (-1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1), (1,-1,\alpha+1,\alpha), (-1,\alpha,-2,-\alpha) \rangle .$$

Seja

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha+1 & \alpha \\ -1 & \alpha & -2 & -\alpha \end{bmatrix} .$$

Tem-se que $F + G_\alpha = L(B_\alpha)$, portanto $\dim(F+G_\alpha) = R(B_\alpha)$. Como $F$ e $G_\alpha$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$ também $F+G_\alpha$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$, logo

$$F + G_\alpha = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \dim(F+G_\alpha) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(F+G_\alpha) = 4$$
$$\Leftrightarrow R(B_\alpha) = 4 .$$

$$B_\alpha = \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ -1 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha+1 & \alpha \\ -1 & \alpha & -2 & -\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\alpha+1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & -2 & -\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & -\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \updownarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\alpha \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(B_\alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha+1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha \neq -1$$

Portanto,

$$F + G_\alpha = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \alpha \neq -1 .$$

d) $\mathbb{R}^4 = F \oplus G_\alpha \Leftrightarrow \mathbb{R}^4 = F + G_\alpha \wedge F \cap G_\alpha = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$$\overset{F+G_\alpha \leq \mathbb{R}^4}{\Leftrightarrow} \dim(F+G_\alpha) = \dim \mathbb{R}^4 \wedge \dim(F \cap G_\alpha) = 0$$

$$\underset{\text{Teorema das dimensões}}{\Leftrightarrow} \dim(F+G_\alpha) = 4 \wedge \dim F + \dim G_\alpha - \dim(F+G_\alpha) = 0$$

$$\underset{a),c)}{\Leftrightarrow} \alpha \neq -1 \wedge \dim G_\alpha = \underbrace{\dim(F+G_\alpha)}_{4} - \underbrace{\dim F}_{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq -1 \wedge \dim G_\alpha = 1 \underset{b)}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha = 1}$$

3 - a) O sistema $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{bmatrix}$ é um sistema de eq. lineares

satisfazendo:

nº de equações = 3 = nº de incógnitas

e $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \det(A^T) = \det(A) = 3 \neq 0,$

logo é um sistema de Cramer.

b) i)

$$\det \overset{\curvearrowleft}{\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & e_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & e_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & e_3 \end{bmatrix}} = \det \overset{\overset{1/2}{\curvearrowright}}{\begin{bmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & e_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & e_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & e_3 \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 2a_1 & -b_1 & e_1 \\ 2a_2 & -b_2 & e_2 \\ 2a_3 & -b_3 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & e_1 \\ a_2 & -b_2 & e_2 \\ a_3 & -b_3 & e_3 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{bmatrix} = -2 \cdot \det(A) = -6$$

ii)

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 & e_2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & b_3 & e_3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teo Laplace} \\ \text{(3º linha)}}}{=} 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \cdot \det(A) + \det(A) = -4 \cdot \det(A) = -12$$

4-a) $F = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1), (1,3,1,3) \rangle$ ⑳

Como
$$(1,3,1,3) = (-2)\,(1,0,1,0) + 3\,(1,1,1,1),$$
temos
$$F = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle .$$

Para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
$$\alpha_1 (1,0,1,0) + \alpha_2 (1,1,1,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2) = (0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1+\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0,$$
logo $((1,0,1,0), (1,1,1,1))$ é l. indp.

$$\left.\begin{array}{l} F = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle \\ ((1,0,1,0), (1,1,1,1)) \text{ l. indp.} \end{array}\right\} \Rightarrow ((1,0,1,0), (1,1,1,1)) \text{ é base de } F$$

Sejam
$$e_1 = (1,0,1,0)$$
e
$$e_2 = (1,1,1,1) - \frac{(1,1,1,1)\,|\,(1,0,1,0)}{(1,0,1,0)\,|\,(1,0,1,0)}\,(1,0,1,0) = (1,1,1,1) - \frac{2}{2}(1,0,1,0) = (0,1,0,1).$$

Pelo Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, sabemos que que $\boxed{((1,0,1,0), (0,1,0,1)) \text{ é base ortogonal de } F}$

b) Tem-se $z = p_F(z) + p_{F^\perp}(z)$. Vamos começar por determinar $p_F(z)$.

Como $((1,0,1,0), (0,1,0,1))$ é base ortogonal de $F$ e $z = (2,0,-1,1)$,
$$p_F(z) = \frac{(2,0,-1,1)\,|\,(1,0,1,0)}{(1,0,1,0)\,|\,(1,0,1,0)}\,(1,0,1,0) + \frac{(2,0,-1,1)\,|\,(0,1,0,1)}{(0,1,0,1)\,|\,(0,1,0,1)}\,(0,1,0,1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1,0,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Logo $p_{F^\perp}(z) = (2,0,-1,1) - p_F(z) = (2,0,-1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**ALGA I** – 2005/2006 **Exame - 6 de Fevereiro de 2006**

**Duração : 3 horas**

22

# Exame

## 1ª Parte

1. (3 val) Para cada $k$ pertencente a $\mathbf{R}$, considere as matrizes reais

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k^2+1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -k^2-1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que o sistema de equações lineares $A_k X = B$ é de Cramer, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

   (b) Sendo $(a, b, c, d)$ a solução de $A_k X = B$, determine o valor de $c$, usando a Regra de Cramer.

   (c) Considere $k = 0$. Diga, justificando, se $A_0(1|3)$ é invertível e, em caso afirmativo, calcule a sua inversa.

2. (4.5 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno canónico. Seja

$$W = <(1, -1, 2, 3), (1, 0, 1, 0), (3, -2, 5, 7)> .$$

   (a) Determine uma base de $W$.

   (b) Mostre que $v = (0, 1, -1, -2) \in W$. Determine uma base de $W$ que contenha $v$.

   (c) Indique, justificando, uma base de $W \cap F$, sendo

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

3. (2 val) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte.
   Para qualquer matriz $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{G}_A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \text{o sistema } AX = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ é possível}\}$$

   é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

## 2ª Parte

4. (2 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, para que valores dos parâmetros reais $k$ e $t$ o vector $(-t, 1, k)$ é combinação linear do sistema

$$((t, 1, 2t), (0, 1, 2t), (2t, -1, t+2)).$$

**Vire s. f. f.**

2 - $W = \langle (1,-1,2,3), (1,0,1,0), (3,-2,5,7) \rangle$

a) Para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$,

$a_1(1,-1,2,3) + a_2(1,0,1,0) + a_3(3,-2,5,7) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 + a_2 + 3a_3, -a_1 + 2a_3, 2a_1 + a_2 + 5a_3, 3a_1 + 7a_3) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \wedge -a_1 + 2a_3 = 0 \wedge 2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \wedge 3a_1 + 7a_3 = 0$

$\Rightarrow a_2 = -a_1 - 3a_3 \wedge a_1 = 2a_3 \wedge 2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \wedge 6a_3 + 7a_3 = 0$

$\Rightarrow a_3 = 0 \wedge a_1 = 0 \wedge a_2 = 0$;

logo $((1,-1,2,3),(1,0,1,0),(3,-2,5,7))$ é l. indp., pelo que é base de W.

b) Tem-se:

$(0,1,-1,-2) = -3(1,-1,2,3) + 0(1,0,1,0) + 1(3,-2,5,7)$,

logo $(0,1,-1,-2) \in W$.

Pela resolução da alínea anterior, $((1,-1,2,3),(1,0,1,0),(3,-2,5,7))$ é base de W e, consequentemente, $\dim W = 3$.

Como

$(0,1,-1,-2) = \underbrace{-3}_{\neq 0}(1,-1,2,3) + 0(1,0,1,0) + 1(3,-2,5,7)$,

temos

$W = \langle (0,1,-1,-2), (1,0,1,0), (3,-2,5,7) \rangle$.

Como $\dim W = 3$, concluímos que $((0,1,-1,-2),(1,0,1,0),(3,-2,5,7))$ é base de W; esta base contém $v = (0,1,-1,-2)$.

c) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0 \wedge x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

Tem-se:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1(1,-1,2,3) + a_2(1,0,1,0) + a_3(3,-2,5,7)$

$\Leftrightarrow \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1 + a_2 + 3a_3, -a_1 - 2a_3, 2a_1 + a_2 + 5a_3, 3a_1 + 7a_3)$

pelo que

$$W \cap F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in W : (x_1,x_2,x_3,x_4) \in F\}$$

$$= \{v=(a_1+a_2+3a_3, -a_1-2a_3, 2a_1+a_2+5a_3, 3a_1+7a_3) : a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R} \wedge v \in F\},$$

mas

$$v = (a_1+a_2+3a_3, -a_1-2a_3, 2a_1+a_2+5a_3, 3a_1+7a_3) \in F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+3a_3=0 \wedge -a_1-2a_3-2a_1-a_2-5a_3+3a_1+7a_3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+3a_3=0 \wedge -a_2=0 \Leftrightarrow a_1=-3a_3 \wedge a_2=0 \quad ,$$

logo

$$W \cap F = \{(a_1+a_2+3a_3, -a_1-2a_3, 2a_1+a_2+5a_3, 3a_1+7a_3) : a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}, a_1=-3a_3, a_2=0\}$$

$$= \{(0,a_3,-a_3,-2a_3) : a_3 \in \mathbb{R}\} = \{a_3(0,1,-1,-2) : a_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \langle (0,1,-1,-2) \rangle .$$

Como $(0,1,-1,-2) \neq (0,0,0,0)$, sabemos que $((0,1,-1,-2))$ é l. indp. logo $((0,1,-1,-2))$ é base de $W \cap F$.

3 - A afirmação é verdadeira pois, para qualquer matriz $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{G}_A = \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : \text{o sistema } AX=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \text{ é possível}\right\}$$

é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$. Justificação: Seja $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$.

S1) $\mathcal{G}_A \subseteq \mathbb{R}^3$, por def. de $\mathcal{G}_A$.

S2) $(0,0,0) \in \mathcal{G}_A$ pois o sistema $AX=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ é homogéneo, logo é possível.

S3) Admitamos que $(a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) \in \mathcal{G}_A$. Por def. de $\mathcal{G}_A$, os sistemas $AX=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ e $AX=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ são possíveis, logo existem $(z_1,z_2,z_3,z_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4$ tais que $A\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

Temos
$$A\left(\begin{bmatrix}z_1+y_1\\z_2+y_2\\z_3+y_3\\z_4+y_4\end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}$$

3 - (cont.)

logo $(z_1+y_1, z_2+y_2, z_3+y_3)$ é solução do sistema $AX = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$, pelo que este sistema é possível e,

portanto, $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \in \mathcal{G}_A$.

S4) Admitamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{G}_A$.
Como $(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{G}_A$, o sistema $AX = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ é possível,

pelo que existe $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Temos $\alpha \left( A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, logo $A \begin{bmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \\ \alpha z_3 \\ \alpha z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}$,

pelo que o sistema $AX = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}$ é possível, logo

$\alpha (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \in \mathcal{G}_A$.

4 - $(-t,1,K)$ é comb. linear do sistema $((t,1,2t),(0,1,2t),(2t,-1,t+2))$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} : (-t,1,K) = \alpha_1(t,1,2t)+\alpha_2(0,1,2t)+\alpha_3(2t,-1,t+2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} : (-t,1,K) = (\alpha_1 t+\alpha_3\cdot 2t,\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1\cdot 2t+\alpha_2\cdot 2t+\alpha_3(t+2))$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} : -t = t\alpha_1+2t\alpha_3 \wedge 1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \wedge K = 2t\alpha_1+2t\alpha_2+(t+2)\alpha_3$$

$$\Updownarrow$$

O sistema nas incógnitas $x_1, x_2, x_3$, sobre $\mathbb{R}$,

$$S = \begin{cases} tx_1+2tx_3 = -t \\ x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 2tx_1+2tx_2+(t+2)x_3 = K \end{cases}$$

é possível.

A matriz ampliada do sistema $S$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{A} & B \\ t & 0 & 2t & -t \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2t & 2t & t+2 & K \end{array}\right]$.

Temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} t & 0 & 2t & -t \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2t & 2t & t+2 & K \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ t & 0 & 2t & -t \\ 2t & 2t & t+2 & K \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -t \\ -2t \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -t & 3t & -2t \\ \underbrace{0 \quad 0}_{A'} & & \underbrace{3t+2}_{} & \underbrace{-2t+K}_{B'} \end{array}\right]$$

**Caso 1**: Se $t \neq 0$ e $3t+2 \neq 0$, i.e, se $t \neq 0$ e $t \neq -\frac{2}{3}$,
$R(A) = 3 = R([A|B])$, logo o sistema é possível.

**Caso 2**: i) se $t=0$, $[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & K \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

logo $R(A) = 2 = R([A|B])$, portanto o sistema é possível.

ii) se $t = -\frac{2}{3}$, $[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}+K \end{array}\right]$

logo, neste caso, o sistema é possível se e só se $K = -\frac{4}{3}$.

Conclusão: $(-t,1,K)$ é comb. linear de $((t,1,2t),(0,1,2t),(2t,-1,t+2))$ se e só se $t \neq -\frac{2}{3}$ ou $(t = -\frac{2}{3}$ e $K = -\frac{4}{3})$.

c) Tem-se

$$(v_1 \wedge v_2) | v_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \end{vmatrix} = 6K - 3 .$$

Portanto

$$(v_1 \wedge v_2) | v_3 = 6 \iff 6K - 3 = 6 \iff 6K = 9 \iff K = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Logo o produto misto de $v_1, v_2, v_3$ é 6 se e só se $K = \frac{3}{2}$.

6- a) $\boxed{\subseteq}$ Seja $z \in (F+G)^\perp$. Seja $f$ um el. arbitrário de $F$. Como $F \subseteq F+G$, temos que $f \in F+G$, logo $z|f = 0$. Portanto $z \in F^\perp$.

Analogamente, como $G \subseteq F+G$ e $z|w = 0$, para qualquer $w \in F+G$, temos, em particular

$$z|g = 0, \text{ para qualquer } g \in G,$$

logo $z \in G^\perp$. Assim $z \in F^\perp \cap G^\perp$. $\boxed{\therefore (F+G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp}$

$\boxed{\supseteq}$ Seja $z \in F^\perp \cap G^\perp$. Seja $w$ um el. arb. de $F+G$. Como $w \in F+G$, existem $f \in F$ e $g \in G$ tais que $w = f+g$. Nestas condições,

$$z|w = z|(f+g) = (z|f) + (z|g) \underset{\substack{\uparrow \\ z \in F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow z \in F^\perp \wedge z \in G^\perp}}{=} 0 + 0 = 0 .$$

Logo $z \in (F+G)^\perp$. $\boxed{\therefore F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp}$

Portanto $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Atendendo à alínea anterior, $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$, isto é, $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. Assim

$$F^\perp + G^\perp = ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp .$$

7- Ver Teórica.