Nº: **Nome:** **Turma:**

ALGA I – 2010/2011 Teste - 8 de Novembro de 2010
Teste A

O Teste que vai realizar é constituído por duas partes.

As respostas às perguntas/alíneas da 1ª Parte devem ser dadas unicamente nos respectivos espaços, não sendo necessário apresentar os cálculos intermédios.

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

1ª Parte

1. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) A entrada $(3,2)$ de $5A - 2B$ é ....

(b) A entrada $(3,2)$ de AB^T é ....

(c) $D^2 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

(d) $det(D) =$ ....

(e) $C^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

(f) As matrizes elementares $E_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ satisfazem

$$E_1 \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_2 \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(g) O complemento algébrico da entrada $(2,3)$ de C, isto é, $\widehat{C}_{23}$, é ....

Vire s. f. f.

2. Se possível, em cada alínea dê um exemplo de:

   (a) Uma matriz em f. de escada reduzida que possa ser obtida a partir da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ efectuando operações elementares nas linhas.

   (b) Uma decomposição LU da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

   (c) Uma decomposição LU de uma matriz de ordem 3 que não possa ser transformada numa matriz triangular superior usando apenas operações elementares descendentes.

3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $det \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 2 & 1 \\ 3 & 0 & c \end{bmatrix} = 3$. Complete:

   (a) $det \begin{bmatrix} a & b & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} =$ ....

   (b) $det \begin{bmatrix} 2a & -2 & 2 \\ 2b & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2c \end{bmatrix} =$ ....

   (c) $det \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & 0 & c \\ b & 2 & 1 \end{bmatrix} =$ ....

   (d) $det \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ b & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & c \\ a & -1 & 2 & c \end{bmatrix} =$ ....

Vire s. f. f.

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3,

$$S_\alpha = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_2 + \alpha^2 x_3 = \alpha - 2 \end{cases}$$

(a) Indique os valores de α para os quais:

i. o sistema é impossível. ....

ii. o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1. ....

iii. o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2..................

(b) Indique o conjunto das soluções do sistema S_1 ($\alpha = 1$). ....
....

5. Seja $A \in M_5(\mathbb{R})$. Usando a definição de determinante complete:

$det\,(A) =$ ....

6. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

(a) Se $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ são matrizes invertiveis, então a matriz $A\,B$ é invertível e a sua inversa é $A^{-1}\,B^{-1}$. ....

(b) Se $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ e AB e AC são invertiveis, então também $B\,C$ é invertível. ....

7. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

(a) Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e o sistema $AX = 0$ é possível, então, para qualquer matriz $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ também é possível. ....

(b) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ então, para qualquer matriz $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ é possível.

(c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e o sistema $AX = 0$ tem mais do que uma solução então $det\,A = 0$. ......

8. Considere os seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e coeficientes reais:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

(a) S_1 é sistema de Cramer. ....

(b) S_2 é sistema de Cramer. ....

Vire s. f. f.

2^{a} Parte

Na resolução da 2ª Parte deve apresentar todos os cálculos e todas as justificações necessárias.

9. Diga, **justificando**, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

   (a) Se $A \in M_5(\mathbb{R})$ e $A^2 = A$, então $A = I_5$.

   (b) Se $A \in M_5(\mathbb{R})$, $A^2 = A$ e A tem característica 5, então $A = I_5$.

   (c) Se $n \in \mathbb{N}$ e existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ com característica n tal que $A = -A^T$, então n é par.

10. Sejam V um espaço vectorial real, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in V$. Demonstre que se $\alpha\, w = 0_V$, então $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$ ou $w = 0_V$.

FIM