Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Maria Amélia Fonseca Lopes Lucas

2010/2011

Capítulo 1

Matrizes e sistemas de equações lineares

1.1 Conjuntos

Ao longo deste curso,

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$);
- $\mathbb{N}_0$ representa o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$);
- $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos.

Sejam A e B conjuntos. Recorde-se que:

- $A \subseteq B$ se todo o elemento de A é também elemento de B;
- $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;
- $A \nsubseteq B$ se existe, pelo menos, um elemento de A que não é elemento de B;
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$;
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;
- Se $A \subseteq B$ dizemos que A **é subconjunto de** B .

Chamamos **complemento de** B **em** A ao conjunto constituído pelos elementos de A que não pertencem a B . Denotamos o complemento de B em A por $A \setminus B$. Assim,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Chamamos **produto cartesiano de** A **e** B ao conjunto de todos os pares ordenados [1] (a,b), com $a \in A$ e $b \in B$. Este conjunto é denotado por $A \times B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Mais geralmente, se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

é o **produto cartesiano de** $A_1, \ldots, A_n$.

Dados $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, temos

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \quad \text{se e só se} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Se $A_1 = \cdots = A_n = A$, denotamos $A_1 \times \cdots \times A_n$ por A^n. Por convenção, $A^1 = A$.

Se $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, dizemos que $(a_1, \ldots, a_n)$ é um n-uplo de elementos de A.

Exemplo 1.1.1 Tem-se:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Em geral,

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

1.2 Matrizes

Ao longo deste curso $\mathbb{K}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$, munidos das respectivas operações de adição e multiplicação usuais. Aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos **escalares**.

Definição 1.2.1 Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. A um quadro

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

constituído por $m \times n$ elementos de $\mathbb{K}$ dispostos em m filas horizontais (ou **linhas**) e n filas verticais (ou **colunas**) chamamos **matriz do tipo** $m \times n$ **sobre** $\mathbb{K}$ (ou **matriz de elementos em** $\mathbb{K}$**).**

[1] Quer dizer, pares em que há um *primeiro* elemento e um *segundo* elemento de tal modo que (a,b) se deve considerar distinto de (b,a), sempre que $a \neq b$.

Representamos abreviadamente a matriz anterior por

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

ou apenas

$$A = [a_{ij}]\,.$$

Chamamos **entrada** ou **elemento** (i,j) da matriz A ao elemento a_{ij}, isto é, ao elemento que se encontra na i-ésima linha e na j-ésima coluna da matrix A. Representamos também esse elemento por $(A)_{ij}$ ou A_{ij}.

Exemplo 1.2.2 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

é uma matriz real do tipo 3×2, tendo-se $A_{11} = 5$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 0$, $A_{31} = 7$ e $A_{32} = 9$.

Definição 1.2.3 Considere-se a matriz do tipo $m\times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Para $i = 1,\ldots,m$, chamamos **i-ésima linha** de A à matriz do tipo $1\times n$

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

Para $j = 1,\ldots,n$, chamamos **j-ésima coluna** de A à matriz do tipo $m\times 1$

$$A_{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.2.4 Nas condições do Exemplo 1.2.2

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix},\; A_{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ e } A_{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.2.5 Considere-se a matriz do tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que:

- A é uma **matriz linha** se $m = 1$ (isto é, se A só tem uma linha);
- A é uma **matriz coluna** se $n = 1$ (isto é, se A só tem uma coluna);
- A é uma **matriz quadrada de ordem n**, ou **matriz de ordem n**, se $m = n$, isto é, se

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

  Neste caso dizemos que $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ são as **entradas da diagonal principal** de A ou **entradas principais** de A;
- A é uma **matriz diagonal** se A é uma matriz quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$, isto é, se A tem a forma

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$
- A é uma **matriz escalar** se A é uma matriz diagonal e $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$; se A é uma matriz escalar,

  $$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

  para algum $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 1.2.6 Chamamos **matriz identidade de ordem** n à matriz escalar de ordem n,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(as entradas da diagonal principal são iguais a 1 e todas as outras entradas são nulas). Quando não é necessário dar ênfase à ordem da matriz escrevemos I em vez de I_n.

Chamamos **matriz nula do tipo** $m \times n$ à matriz do tipo $m \times n$ em que todas as entradas são nulas. Denotamos esta matriz por $0_{m \times n}$ ou simplesmente por 0.

Exemplos 1.2.7 Por definição,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $[\,9\,]$ são matrizes escalares. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ não é escalar, mas é diagonal.

Notação 1.2.8 Denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. O conjunto das matrizes (quadradas) de ordem n sobre $\mathbb{K}$ é denotado por $M_n(\mathbb{K})$.

Exemplos 1.2.9 O conjunto das matrizes reais do tipo 3×2 é denotado por $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. O conjunto das matrizes reais de ordem 3 é denotado por $M_3(\mathbb{R})$.

Tem-se, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \;,\; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \,,\, \begin{bmatrix} 0 & i & 3 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 3i & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \,,$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \,,\, \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Definição 1.2.10 (**Igualdade de matrizes**) Se $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in M_{p\times t}(\mathbb{K})$ tem-se

$$A = B$$

se e só se

$$m = p \,, n = t \;\text{ e }\; a_{ij} = b_{ij}, \;\text{para qualquer } i = 1, \ldots, m \text{ e para qualquer } j = 1, \ldots, n.$$

Exemplos 1.2.11 $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Tem-se ainda que $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ se e só se $x = 8\,, y = 0$ e $z = 4$.

Definição 1.2.12 Sejam $A = [a_{ij}]\,, B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **soma de A com B**, e denotamos $A + B$, à matriz do tipo $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ cuja entrada (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$. Isto é,

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$

Tem-se:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.2.13 Sejam A e B matrizes com elementos em $\mathbb{K}$. A soma de A com B só está definida se A e B são matrizes do mesmo tipo, isto é, se o número de linhas de A é igual ao número de linhas de B e o número de colunas de A é igual ao número de colunas de B.

Exemplos 1.2.14 Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}, A + C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}, C + A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C + B = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ a soma $D + E$ não está definida, porque D e E não são matrizes do mesmo tipo.

Notação 1.2.15 Se $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ denotamos por $-A$ a matriz, do tipo $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$, cuja entrada (i, j) é $-a_{ij}$.

Se A e B são matrizes do mesmo tipo, denotamos por $A - B$ a matriz $A + (-B)$.

Proposição 1.2.16 *Sejam A, B, C matrizes do tipo $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$. São válidas as afirmações seguintes:*

1. $A + B = B + A$ *(a adição em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é comutativa);*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(a adição em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é associativa);*
3. $A + 0_{m\times n} = A\,;\ 0_{m\times n} + A = A$ *($0_{m\times n}$ é elemento neutro para a adição em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$);*
4. $A + (-A) = 0_{m\times n} = (-A) + A\,.$

Demonstração:

1. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes do tipo $m \times n$, então $A + B$ e $B + A$ são ambas matrizes do tipo $m \times n$, logo matrizes do mesmo tipo. Se $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (A+B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= b_{ij} + a_{ij} && \text{pela comutatividade da adição em } \mathbb{K} \\ &= (B+A)_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes.} \end{aligned}$$

Assim, atendendo à Definição 1.2.10, podemos concluir que $A + B = B + A$.

2. Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ matrizes do tipo $m \times n$. Por definição de soma de matrizes, $A + B$ e $B + C$ são ambas matrizes do tipo $m \times n$, logo também $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$ são matrizes do tipo $m \times n$. Se $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} ((A+B)+C)_{ij} &= (A+B)_{ij} + c_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) && \text{pela associatividade da adição em } \mathbb{K} \\ &= a_{ij} + (B+C)_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= (A+(B+C))_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes.} \end{aligned}$$

Assim, atendendo à Definição 1.2.10, podemos concluir que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Por definição de soma, $A + 0_{m\times n}$ é uma matriz do tipo $m \times n$. Se $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (A + 0_{m\times n})_{ij} &= A_{ij} + (0_{m\times n})_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= a_{ij} + 0 && \text{pela definição de } 0_{m\times n} \\ &= a_{ij}\ . \end{aligned}$$

Atendendo à Definição 1.2.10, concluímos que $A + 0_{m\times n} = A$. Como a adição de matrizes é comutativa, $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$.

4. Por definição de soma, $A + (-A)$ é uma matriz do tipo $m \times n$. Se $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (A + (-A))_{ij} &= A_{ij} + (-A)_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes} \\ &= a_{ij} - a_{ij} && \text{pela definição de } -A \\ &= 0 \\ &= (0_{m\times n})_{ij} && \text{pela definição de } 0_{m\times n}. \end{aligned}$$

Assim, atendendo à Definição 1.2.10, podemos concluir que $A + (-A) = 0_{m\times n}$. Como a adição de matrizes é comutativa, $(-A) + A = A + (-A) = 0_{m\times n}$.

$\square$

Definição 1.2.17 Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Chamamos **produto do escalar** α **pela matriz** A à matriz do tipo $m \times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ cuja entrada (i, j) é $\alpha\, a_{ij}$. Esta matriz é denotada por $\alpha\, A$. Assim

$$(\alpha\, A)_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,.$$

Tem-se:

$$\alpha\, A = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \cdots & \alpha\, a_{1n} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \cdots & \alpha\, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \cdots & \alpha\, a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos 1.2.18 Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se, por exemplo,

$$2\, A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$(1/2)\, A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.2.19 *Sejam A, B matrizes do tipo $m\times n$ com elementos em $\mathbb{K}$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. São válidas as afirmações seguintes:*

1. $(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta\, A)$.
2. $(\alpha + \beta)\, A = \alpha\, A + \beta\, A$.
3. $\alpha\, (A + B) = \alpha\, A + \alpha\, B$.
4. $1\ A = A$.

Demonstração:
A demonstração deixa-se aos alunos como exercício.

□

Vamos em seguida definir produto de matrizes começando pelo caso mais simples em que A é uma matriz linha e B é uma matriz coluna. Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ chamamos **produto de A por B** à matriz, denotada $A \cdot B$ ou $A\, B$,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \cdots + a_n \times b_n \end{bmatrix}.$$

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}.$$

No caso mais geral, a entrada (i, j) da matriz $A \cdot B$ obtém-se "efectuando o produto"da linha i de A pela coluna j de B.

Definição 1.2.20 Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Chamamos **produto de** A **por** B , e denotamos $A \cdot B$ ou $A\,B$, à matriz do tipo $m \times p$, com elementos em $\mathbb{K}$, cuja entrada (i, j) é

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \times b_{rj} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{in} \times b_{nj}.$$

Isto é, $A\,B$ é a matriz do tipo $m \times p$ satisfazendo

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \times b_{rj} .$$

Observação 1.2.21 Sejam A e B matrizes. O produto de A por B só está definido se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B; caso isso aconteça, a matriz $A\,B$ é do tipo $m \times p$, sendo m o número de linhas de A e p o número de colunas de B .

Exemplos 1.2.22 Sejam $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 1/2 & 6 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Como C é uma matriz do tipo 3×2 e D é uma matriz do tipo 2×4, o produto $C\,D$ está definido, sendo uma matriz do tipo 3×4. Tem-se

$$\begin{aligned} C\,D &= \begin{bmatrix} (-2)\times 1 + 4 \times 1/2 & (-2)\times(-1) + 4 \times 6 & (-2)\times 5 + 4 \times 3/2 & (-2)\times 7 + 4 \times (-1/2) \\ 0 \times 1 + 2 \times 1/2 & 0 \times (-1) + 2 \times 6 & 0 \times 5 + 2 \times 3/2 & 0 \times 7 + 2 \times (-1/2) \\ 3 \times 1 + (-4) \times 1/2 & 3 \times (-1) + (-4) \times 6 & 3 \times 5 + (-4) \times 3/2 & 3 \times 7 + (-4) \times (-1/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 26 & -4 & -16 \\ 1 & 12 & 3 & -1 \\ 1 & -27 & 9 & 23 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, atendendo a que D é uma matriz do tipo 2×4 e C é uma matriz do tipo 3×2 o produto $D\,C$ não está definido, pois o número de colunas de D (=4) é diferente do número de linhas de C (=3).

Proposição 1.2.23 *Sejam A e B matrizes do tipo $m \times n$, D e F matrizes do tipo $n \times p$ e G matriz do tipo $p \times q$, com elementos em $\mathbb{K}$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$. São válidas as afirmações seguintes:*

1. $(A\,D)G = A\,(D\,G)$ *(o produto de matrizes é associativo).*

2. $A\,(D + F) = A\,D \,+\, A\,F$.

3. $(A + B)\,D = A\,D \,+\, B\,D$.

4. $\alpha\,(A\,D) = (\alpha\,A)\,D = A\,(\alpha\,D)$.

5. $I_m\,A = A = A\,I_n$.

6. $0_{r\times m} \cdot A = 0_{r\times n}$ *e* $A \cdot 0_{n\times t} = 0_{m\times t}$.

Demonstração:
Vamos demonstrar 1) e 2). As demonstrações restantes ficam como exercício.

1) Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $D = [d_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $G = [g_{ij}] \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$. Por definição de produto de matrizes,

- AD está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times p$
- DG está definida, sendo uma matriz do tipo $n \times q$
- $A(DG)$ está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times q$
- $(AD)G$ está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times q$

logo $A(DG)$ e $(AD)G$ são matrizes do mesmo tipo, $m \times q$. Para demonstrar que $A(DG) = (AD)G$ basta verificar que, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e qualquer $j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$(A(DG))_{ij} = ((AD)G))_{ij}\,.$$

Sejam então $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
(A(DG))_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot (DG)_{kj} && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot (\sum_{r=1}^{p} D_{kr} \cdot G_{rj}) && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} A_{ik} \cdot (D_{kr} \cdot G_{rj}) && \text{pelas prop. da soma e do prod. em } K\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} (A_{ik} \cdot D_{kr}) \cdot G_{rj} && \text{pela associatividade do prod. em } K\\
&= \textstyle\sum_{r=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot D_{kr}) \cdot G_{rj} && \text{pelas prop. da soma e do prod. em } K\\
&= \textstyle\sum_{r=1}^{p} (\,A \cdot D)_{ir} \cdot G_{rj} && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= ((\,A \cdot D) \cdot G)_{ij} && \text{pela definição de produto de matrizes.}
\end{aligned}$$

2) Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $D = [d_{ij}]\,, F = [f_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Por definição de soma e de produto de matrizes,

- AD está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times p$
- AF está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times p$
- $AD + AF$ está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times p$
- $D + F$ está definida, sendo uma matriz do tipo $n \times p$

- $A(D+F)$ está definida, sendo uma matriz do tipo $m \times p$

logo $A(D+F)$ e $AD+AF$ são matrizes do mesmo tipo $(m \times p)$. Para demonstrar que $A(D+F) = AD+AF$ basta verificar que, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$ e qualquer $j \in \{1,\ldots,p\}$,

$$(A(D+F))_{ij} = (AD+AF)_{ij}\,.$$

Sejam então $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,p\}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
(A(D+F))_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot(D+F)_{kj} && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot(D_{kj}+F_{kj}) && \text{pela definição de soma de matrizes}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (A_{ik}\cdot D_{kj}+A_{ik}\cdot F_{kj}) && \text{pela distributividade em } K\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot D_{kj}+\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot F_{kj} && \text{pela comutat. e assoc. da soma em } K\\
&= (AD)_{ij}+(AF)_{ij} && \text{pela definição de produto de matrizes}\\
&= (AD+AF)_{ij} && \text{pela definição de soma de matrizes}
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.2.24 Como o produto de matrizes é associativo não temos que nos preocupar com parênteses quando lidamos com o produto de dois ou mais factores.

Exemplos 1.2.25 Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$C\,D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D\,C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

logo $C\,D \neq D\,C$ e, portanto, **o produto de matrizes não é comutativo**.

Observação 1.2.26 *Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ e B é uma matriz do tipo $n \times m$ estão definidos os produtos $A\,B$ e $B\,A$, mas, em geral, $A\,B \neq B\,A$.*

Definição 1.2.27 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chamamos **potência de expoente** p de A ($p \in \mathbb{N}_0$) à matriz $A^p \in M_n(\mathbb{K})$, definida, por recorrência, do seguinte modo

- $A^0 = I_n$;
- $A^p = A^{p-1}\cdot A, \quad$ se $p \in \mathbb{N}$.

Exemplos 1.2.28 Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Tem-se

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 30 & -41 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.2.29 Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ chamamos **matriz transposta de** A à matriz do tipo $n \times m$ cuja entrada (i,j) é igual à entrada (j,i) de A. Denotamos a matriz transposta de A por A^T.

Exemplo 1.2.30 Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação 1.2.31 Os elementos da linha i da matriz A^T são precisamente os elementos da coluna i da matriz A; os elementos da coluna j da matriz A^T são os elementos da linha j da matriz A.

Proposição 1.2.32 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times q}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(AC)^T = C^T A^T$;
5. *Se A é uma matriz quadrada, então, para qualquer número natural p,*

$$(A^p)^T = (A^T)^p.$$

Demonstração:

Deixa-se aos alunos como exercício.

$\square$

Definição 1.2.33 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dizemos que a matriz A é* **simétrica** *se $A = A^T$. Dizemos que a matriz A é* **anti-simétrica** *se $A = -A^T$.*

Exemplo 1.2.34 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz A é simétrica e a matriz B é anti-simétrica.

Observação 1.2.35 Seja $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Tem-se:

- A é simétrica se e só se $a_{ij} = a_{ji}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
- A é anti-simétrica se e só se $a_{ij} = -a_{ji}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
- Se A é anti-simétrica, as suas entradas principais são nulas (pois da observação anterior resulta que $a_{ii} = -a_{ii}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$).

1.3 Matrizes em forma de escada

Definição 1.3.1 Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times p$. Dizemos que A **está em forma de escada** se satisfaz as condições seguintes:

1. Se a linha r de A é nula, então a linha $r+1$ de A, se existir, também é nula.

   (Se A tem linhas nulas essas linhas são as últimas linhas da matriz.)

2. Se a linha s de A é não nula e a sua primeira entrada não nula está na coluna t, então a linha seguinte, caso exista, começa com, pelo menos, t entradas nulas, ou seja, $a_{(s+1)\,j} = 0$, para qualquer $j \in \{1, \ldots, t\}$.

   (Contando da esquerda para a direita, a primeira entrada não nula na linha $(s+1)$ está numa coluna à direita da primeira entrada não nula da linha s .)

Dizemos que A **está em forma de escada reduzida** se A está em forma de escada e satisfaz ainda a condição seguinte:

3. Se a linha s de A é não nula e a_{st} é a sua primeira entrada não nula, então $a_{st} = 1$ e as restantes entradas da coluna t são nulas.

Exemplos 1.3.2 As matrizes

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 1/2 & 6 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

não estão em forma de escada.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

estão em forma de escada, mas não estão em forma de escada reduzida.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

estão em forma de escada reduzida.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

não estão em forma de escada.

Observação 1.3.3 *1) Toda a matriz nula está em forma de escada reduzida.*

2) Toda a matriz linha está em forma de escada.

3) Uma matriz linha não nula está em forma de escada reduzida se e só se a sua primeira entrada não nula é igual a 1.

Exemplos 1.3.4 As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ estão em forma de escada reduzida, mas as matrizes $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ não estão em forma de escada reduzida.

Seja A uma matriz em forma de escada. Os **pivots** da matriz A são as primeiras entradas não nulas em cada linha (não nula). A matriz nula não tem pivots.

Exemplos 1.3.5 Os pivots da matriz $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são -2 e 2; os pivots da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são 1 e 4; os pivots da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são 1 e -1. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ tem um único pivot que é 3.

Observação 1.3.6 Se A é uma matriz em forma de escada reduzida todos os seus pivots são iguais a 1.

Definição 1.3.7 Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **transformação elementar (ou operação elementar) sobre as linhas da matriz** A a cada um dos processos seguintes:

I) Troca de duas linhas de A.

II) Multiplicação de uma linha de A por um elemento não nulo de $\mathbb{K}$.

III) Substituição de uma linha de A pela sua soma com um múltiplo de outra (isto é, substituição de uma linha pela soma dessa linha com outra linha multiplicada por um elemento de $\mathbb{K}$).

Se efectuando uma operação elementar nas linhas da matriz A obtemos B, escrevemos $A \longrightarrow B$.

Exemplos 1.3.8 I) Se trocarmos a segunda e a terceira linhas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Usualmente representamos este processo da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II) Se multiplicarmos a segunda linha da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por 2 obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Representamos este processo da seguinte forma: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

III) Se substituirmos a segunda linha da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela sua soma com a primeira linha multiplicada por -1 obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escrevemos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação 1.3.9 1. Se B pode ser obtida efectuando uma transformação elementar sobre as linhas de A, então também é possível obter A efectuando uma transformação elementar sobre as linhas de B:

- Se B se obtém por troca de duas linhas de A, então A obtém-se de B efectuando exactamente a mesma transformação elementar;
- Se B se obtém de A multiplicando a linha r de A pelo elemento α não nulo, então A obtém-se de B multiplicando a linha r de B pelo elemento não nulo α^{-1};
- Se B se obtém de A substituindo a linha r de A pela sua soma com a linha s de A multiplicada pelo número α, então A obtém-se de B substituindo a linha r de B pela sua soma com a linha s de B multiplicada pelo número $(-\alpha)$.

2. Se a matriz B pode ser obtida a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas e a matriz C pode ser obtida a partir de B, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então também C pode ser obtida de A efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas.

Proposição 1.3.10 *Se A é uma matriz, é possível, partindo de A e efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, obter uma matriz em forma de escada.*

$\square$

Exemplos 1.3.11 Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e as operações elementares seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, partindo de A e efectuando um número finito de t.e.l., obtivemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observe-se que esta matriz não é a única matriz em forma de escada que pode ser obtida de A efectuando um número finito de t.e.l.. Tem-se, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.3.12 *Seja A uma matriz. Se B e C são matrizes em forma de escada que podem ser obtidas a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então o número de linhas não nulas de B é igual ao número de linhas não nulas de C.*

Definição 1.3.13 Chamamos **característica da matriz** A ao número de linhas não nulas das matrizes em forma de escada que podem ser obtidas a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas. Denotamos a característica de A por $r(A)$ (do inglês "rank").

Exemplos 1.3.14 Atendendo ao Exemplo 1.3.11, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem característica 3.

Considere-se agora a matriz $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Efectuando operações elementares temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $r(F) = 1$.

Observação 1.3.15

1. *Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ então $r(A) \leq m$ e $r(A) \leq n$.*
2. *Se $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e B pode ser obtida de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então $r(A) = r(B)$.*

Proposição 1.3.16 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. É possível, partindo de A e efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, obter uma matriz em forma de escada reduzida.*

□

Exemplos 1.3.17 Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo pode-se obter uma matriz em forma de escada reduzida partindo de A e efectuando 5 transformações elementares.

Definição 1.3.18 Chamamos **matriz elementar** de ordem m sobre $\mathbb{K}$ (de tipo I, II ou III) a uma matriz que se obtém de I_m efectuando uma operação elementar sobre as linhas (de tipo I, II ou III, respectivamente).

Exemplos 1.3.19 A matriz $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se trocando na matriz I_3 as duas últimas linhas, logo é uma matriz elementar de tipo I (de ordem 3 sobre $\mathbb{R}$).

A matriz $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtém-se multiplicando a segunda linha de I_3 por -5, logo é uma matriz elementar de tipo II (de ordem 3 sobre $\mathbb{R}$).

A matriz $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtém-se de I_3 somando à primeira linha a segunda multiplicada por 7, logo é uma matriz elementar de tipo III (de ordem 3 sobre $\mathbb{R}$).

Observação 1.3.20 Existem três tipos de matrizes elementares de ordem m:

I) Para $i \neq j$, denotamos por P_{ij} a matriz que se obtém trocando, na matriz I_m, a linha i com a linha j. Temos

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = P_{ij}.$$

II) Se α é um elemento não nulo de $\mathbb{K}$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$, denotamos por $D_i(\alpha)$ a matriz que se obtém multiplicando na matriz I_m a linha i por α,

$$D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

III) Para $i \neq j$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, denotamos por $E_{ij}(\alpha)$ a matriz que se obtém adicionando à linha i de I_m a linha j previamente multiplicada por α. Temos

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E_{ij}(\alpha);$$

a matriz $E_{ij}(\alpha)$ difere da matriz identidade apenas pela entrada (i,j) que é α (se $\alpha = 0$, então $E_{ij}(\alpha) = I_m$).

Exemplo 1.3.21 Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}.$$

Sejam E_1, E_2, E_3 as matrizes consideradas no Exemplo 1.3.19. Tem-se que:

- $E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$

  (E_1 obtém-se de I_3 trocando as duas últimas linhas e $E_1 \cdot A$ obtém-se de A trocando as duas últimas linhas);

- $E_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -5\,a_{21} & -5\,a_{22} & -5\,a_{23} & -5a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

  (E_2 obtém-se de I_3 multiplicando a segunda linha por -5 e $E_2\,A$ obtém-se de A efectuando a mesma transformação elementar);

- $E_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+7a_{21} & a_{12}+7a_{22} & a_{13}+7a_{23} & a_{14}+7a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

  (E_3 obtém-se de I_3 somando à primeira linha a segunda multiplicada por 7 e $E_3\,A$ obtém-se de A efectuando a mesma transformação elementar).

Proposição 1.3.22 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja E uma matriz elementar de ordem m sobre $\mathbb{K}$. A matriz $B = E \cdot A$ coincide com a matriz que se obtém de A efectuando sobre as linhas de A a mesma operação elementar sobre as linhas que transformou I_m em E.*

Demonstração:

Suponhamos que $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e E é uma matriz elementar de ordem m sobre $\mathbb{K}$. Então E é uma matriz elementar de tipo I, II ou III.

1º caso : Admitamos que E é uma matriz elementar de tipo I. Neste caso existem $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, tais que $E = P_{ij}$, isto é, E é a matriz que se obtém de I_m trocando a linha i com a linha j. Nestas condições,

$$E \cdot A = P_{ij} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz que se obtém de A trocando a linha i com a linha j.

2º caso, 3º caso : Se E é uma matriz elementar de tipo II ou III a demonstração é análoga.

□

Corolário 1.3.23 *Sejam A e B matrizes do tipo $m \times n$. Se a matriz B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então existe $s \in \mathbb{N}$ e existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_s$ de ordem m tais que $B = E_s \cdots E_1 \cdot A$.*

Demonstração:

Exercício.

□

Definição 1.3.24 Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **transformação elementar (ou operação elementar) sobre as colunas da matriz** A a cada um dos processos seguintes:

I) Troca de duas colunas de A.

II) Multiplicação de uma coluna de A por um elemento não nulo de $\mathbb{K}$.

III) Substituição de uma coluna de A pela sua soma com um múltiplo de outra.

Proposição 1.3.25 *Seja $E \in M_m(\mathbb{K})$. A matriz E é uma matriz elementar se e só se E pode ser obtida efectuando uma transformação elementar sobre as colunas de I_m.*

Demonstração:
Basta observar que:

I) Para $i \neq j$, a matriz P_{ij} que se obtém trocando na matriz I_m a linha i com a linha j, coincide com a matriz que se obtém trocando, na matriz I_m, a coluna i com a coluna j.

II) Se α é um elemento não nulo de $\mathbb{K}$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$, a matriz $D_i(\alpha)$ que se obtém de I_m multiplicando a linha i por α é igual à matriz que se obtém de I_m multiplicando a coluna i por α.

III) Para $i \neq j$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, a matriz $E_{ij}(\alpha)$ que se obtém de I_m adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α é igual à matriz que se obtém de I_m adicionando à coluna j a coluna i previamente multiplicada por α.

(As matrizes P_{ij}, $D_i(\alpha)$ e $E_{ij}(\alpha)$ foram definidas na Observação 1.3.20.)

$\square$

Proposição 1.3.26 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja E uma matriz elementar de ordem n sobre $\mathbb{K}$. A matriz $B = A \cdot E$ coincide com a matriz que se obtém de A efectuando nas colunas de A a mesma operação elementar sobre as colunas que transformou I_n em E.*

Demonstração:
Exercício.

$\square$

1.4 Matrizes invertíveis

Neste parágrafo consideraremos apenas matrizes quadradas (isto é, matrizes cujo número de linhas é igual ao número de colunas).

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{K}$, estão definidos os produtos AB e BA mas, em geral, $AB \neq BA$ (veja-se o Exemplo 1.2.25). Sabe-se ainda, pela Proposição 1.2.23, que

$$A\,I_n = A \quad \text{e} \quad I_n\,A = A\,,$$

portanto I_n *é o elemento neutro para a multiplicação no conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre* $\mathbb{K}$. Coloca-se então a questão:

Será que para qualquer matriz não nula A de ordem n existe inverso, isto é, existe uma matriz B de ordem n tal que
$$A\,B = I_n \ \text{ e } \ B\,A = I_n \ ?$$

A resposta é negativa: considere-se, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; para qualquer matriz de ordem 2, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem-se
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}.$$
Logo $A\,B$ é sempre uma matriz em que a primeira e a segunda linhas são iguais portanto $A\,B \neq I_n$, para qualquer matriz B. Concluímos assim que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inverso. As matrizes que têm inverso são chamadas matrizes invertíveis:

Definição 1.4.1 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dizemos que a matriz A é **invertível** se existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que
$$A\,B = I_n \quad \text{e} \quad B\,A = I_n \,.$$

Proposição 1.4.2 *Seja A uma matriz de ordem n. Se a matriz A é invertível, existe uma única matriz B de ordem n tal que*
$$A\,B = I_n \quad \textit{e} \quad B\,A = I_n \,.$$

Demonstração:

Suponhamos que A é uma matriz de ordem n invertível. Então, por definição de matriz invertível, existe uma matriz B de ordem n satisfazendo
$$A\,B = I_n \ \text{ e } \ B\,A = I_n \,.$$

Para demonstrar que B é única vamos supor que B' também é uma matriz de ordem n tal que
$$A\,B' = I_n \ \text{ e } \ B'\,A = I_n \,.$$

Então
$$B' = B' \cdot I_n = B' \cdot (A \cdot B) = (B' \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B\,.$$

□

Definição 1.4.3 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertível. À única matriz $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que
$$A\,B = I_n \quad \text{e} \quad B\,A = I_n$$
chamamos **inversa** de A e denotamo-la por A^{-1}.

Exemplo 1.4.4 A matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tendo-se $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação 1.4.5 A matriz I_n é invertível e $I_n^{-1} = I_n$, pois $I_n \cdot I_n = I_n$.

Exercício 1.4.6 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz <u>invertível</u>. Mostre que:

1. Se $B \in M_n(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$, então $B = A^{-1}$;
2. Se $B \in M_n(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$, então $B = A^{-1}$.

Exercício 1.4.7 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que se uma linha (ou coluna) da matriz A é nula, então A não é invertível.

Proposição 1.4.8 *Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. São válidas as afirmações seguintes:*

1. *Se A é invertível, então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Se A e B são invertíveis, então também $A\,B$ é invertível e $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.*
3. *Se A é invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração:
Exercício.

□

Exercício 1.4.9 Seja $t \in \mathbb{N}$. Mostre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_t \in M_n(\mathbb{K})$ são matrizes invertíveis, então $A_1 \cdot A_2 \cdots A_t$ é invertível e $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_t)^{-1} = A_t^{-1} \cdots A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Proposição 1.4.10 *Se E é uma matriz elementar de ordem n sobre $\mathbb{K}$, então E é invertível e a sua inversa é uma matriz elementar do mesmo tipo.*

Demonstração:

Suponhamos que E é uma matriz elementar de ordem n sobre $\mathbb{K}$. Então E é uma matriz elementar de tipo I), II) ou III).

1º caso: Admitamos que E é uma matriz elementar de tipo I. Neste caso existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que $E = P_{ij}$, isto é, E é a matriz que se obtém de I_n trocando a linha i com a linha j. Nestas condições, atendendo à Proposição 1.3.22, podemos concluir que $P_{ij}P_{ij}$ é a matriz que se obtém de P_{ij} trocando a linha i com a linha j, logo

$$P_{ij}P_{ij} = I_n\,.$$

Portanto P_{ij} é invertível e

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}.$$

2º caso: Admitamos agora que E é uma matriz elementar de tipo II. Neste caso existem $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tais que $E = D_i(\alpha)$, isto é, E é a matriz que se obtém de I_n multiplicando a linha i por α. Nestas condições, atendendo à Proposição 1.3.22, podemos concluir que $D_i(\alpha)\, D_i(\alpha^{-1})$ é a matriz que se obtém de $D_i(\alpha^{-1})$ multiplicando a linha i por α, logo $D_i(\alpha)\, D_i(\alpha^{-1}) = I_n$. Analogamente, $D_i(\alpha^{-1})\, D_i(\alpha) = I_n$. Portanto $D_i(\alpha)$ é invertível e

$$(D_i(\alpha))^{-1} = D_i(\alpha^{-1})\,.$$

3º caso: De forma análoga se demonstra que as matrizes elementares de tipo III são invertíveis, tendo-se, para $i \neq j$,

$$(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha).$$

□

Exemplos 1.4.11 1. A matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar de tipo III. Verificámos, no Exemplo 1.4.4 que $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ as matrizes elementares consideradas no Exemplo 1.3.19. Tem-se:

$$E_1^{-1} = E_1\,, \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Corolário 1.4.12 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se a matriz B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então existe $Q \in M_m(\mathbb{K})$ tal que Q é invertível e $B = Q \cdot A$.*

Demonstração:

Suponhamos que B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas. Então, pelo Corolário 1.3.23, existe $s \in \mathbb{N}$ e existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_s$ de ordem m sobre $\mathbb{K}$ tais que $B = E_s \cdots E_1 \cdot A$.

Definindo $Q = E_s \cdots E_1$, temos $B = Q \cdot A$. Como as matrizes elementares são invertíveis, Q é produto de matrizes invertíveis e, consequentemente, Q é invertível.

□

Observação 1.4.13 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

1. *Se $Q \in M_m(\mathbb{K})$ é invertível e $B = Q \cdot A$, então $A = Q^{-1} \cdot B$;*

2. *Se $Q \in M_n(\mathbb{K})$ é invertível e $B = A \cdot Q$, então $A = B \cdot Q^{-1}$.*

Proposição 1.4.14 *Sejam $A, B \in M_m(\mathbb{K})$. Se B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então*

$$B \text{ é invertível se e só se } A \text{ é invertível} .$$

Demonstração:

Sejam $A, B \in M_m(\mathbb{K})$ tais que B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas. Pelo corolário anterior sabemos que existe $Q \in M_m(\mathbb{K})$ tal que Q é invertível e $B = Q \cdot A$.

Suponhamos que A é invertível. Então B é produto de matrizes invertíveis, logo B é invertível

Suponhamos agora que B é invertível. Como $B = Q \cdot A$ e Q é invertível, temos $A = Q^{-1} \cdot B$, logo A é produto de matrizes invertíveis, portanto A é invertível.

□

Teorema 1.4.15 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A matriz A é invertível;*

2. *A matriz A tem característica n;*

3. *É possível obter I_n a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas;*

4. *A matriz A é produto de matrizes elementares.*

Demonstração:

Basta demonstrar que

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 1\,.$$

$1 \Longrightarrow 2$:

Suponhamos que A é invertível. Seja B uma matriz em forma de escada obtida a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas. Por definição, a característica de A é igual ao número de linhas não nulas de B.

Pela Proposição 1.4.14 sabemos que B é invertível, logo, pelo Exercício 1.4.7, B não tem nenhuma linha nula. Portanto a característica de A é n.

$2 \Longrightarrow 3$:

Suponhamos que a característica de A é n. Seja B uma matriz em forma de escada reduzida obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas (a Proposição 1.3.16 garante a existência de B nestas condições). Como $r(A) = n$, a matriz B tem n linhas não nulas. Então B é uma matriz de ordem n, em forma de escada reduzida e com n linhas não nulas, logo $B = I_n$.

$3 \Longrightarrow 4$:

Suponhamos que é possível, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, obter I_n a partir de A. Então, pelo Corolário 1.3.23, existe $s \in \mathbb{N}$ e existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_s$ de ordem n sobre $\mathbb{K}$ tais que

$$I_n = (E_s \cdots E_1) \cdot A\,.$$

Da igualdade anterior resulta ainda, atendendo a que as matrizes elementares são invertíveis,

$$A = (E_s \cdots E_1)^{-1} I_n,$$

pelo que $A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$. Pela Proposição 1.4.10 a inversa de uma matriz elementar é uma matriz elementar, logo $A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$ é produto de matrizes elementares.

$4 \Longrightarrow 1$:

Admitamos que A é produto de matrizes elementares. Como as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é invertível, podemos concluir que A é invertível.

$\square$

Exemplos 1.4.16 Considere-se a matriz $F = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Se trocarmos a segunda e a terceira linhas da matriz F obtemos a matriz $G = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ que está em forma de escada e tem 3 linhas não nulas. Logo $r(F) = 3$, portanto, como F é uma matriz de ordem 3, podemos concluir que F é invertível.

Corolário 1.4.17 *Se A é invertível, então a mesma sucessão de operações elementares sobre as linhas que transforma A em I_n transforma I_n em A^{-1}.*

Demonstração:

Seja A uma matriz de ordem n invertível. Pela proposição anterior, é possível, efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, obter I_n a partir de A. Considere-se uma sequência de transformações elementares em linhas $T_1, \ldots, T_s$ que permitem, partindo de A, obter I_n. Esquematicamente,

$$A \underset{T_1}{\rightarrow} \cdots \underset{T_s}{\rightarrow} I_n \, .$$

Sejam $E_1, \ldots, E_s$ as matrizes elementares que se obtêm efectuando na matriz I_n as transformações $T_1, \ldots, T_s$, respectivamente. Então

$$I_n = (E_s \cdots E_1) \cdot A \, .$$

Logo

$$A^{-1} = E_s \cdots E_1.$$

Por outro lado, se partindo de I_n efectuarmos as transformações elementares $T_1, \ldots, T_s$ obtemos a matriz $(E_s \cdots E_1) \cdot I_n = E_s \cdots E_1$, isto é, obtemos A^{-1}.

Processo para determinar se uma dada matriz quadrada é invertível:

Considere-se uma matriz A de ordem n. Partindo de A e efectuando transformações elementares sobre as linhas encontramos uma matriz em forma de escada B. Se a matriz B tem n linhas não nulas, a matriz A é invertível; se alguma das linhas de B é nula a matriz A não é invertível.

Processo para determinar a inversa de uma dada matriz invertível:

Considere-se uma matriz invertível A de ordem n. Como A é invertível é possível obter I_n partindo de A, efectuando transformações elementares sobre as linhas, e sabemos, pelo Corolário 1.4.17 , que a mesma sequência de transformações elementares sobre as linhas transforma I_n em A^{-1}. Assim, para determinar A^{-1} reunimos A e I_n numa mesma matriz

$$[\, A \,|\, I_n \,] \, .$$

Partindo dessa matriz efectuamos transformações elementares sobre as linhas até obter uma matriz com a forma

$$[\, I_n \,|\, D \,];$$

atendendo ao Corolário 1.4.17 , $D = A^{-1}$.

Exemplos 1.4.18 1) Considere-se a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

logo $r(M) = 2$ e portanto M é invertível.

Vamos agora determinar a inversa de M :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

logo

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

2) Seja $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $r(N) = 2$. Como N é uma matriz de ordem 3, concluímos que N não é invertível.

1.5 Sistemas de equações lineares

Seja $n \in \mathbb{N}$. A uma equação da forma

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ são elementos de $\mathbb{K}$ e $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis em $\mathbb{K}$, damos o nome de **equação linear sobre $\mathbb{K}$ nas incógnitas** $x_1, \ldots, x_n$. Uma **solução da equação** é uma sequência de n elementos de $\mathbb{K}$ (não necessariamente distintos entre si), representada por $(c_1, \ldots, c_n)$, tal que

$$\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n = \beta\,.$$

Um **sistema de m equações lineares em n incógnitas sobre $\mathbb{K}$** é um conjunto de m equações lineares sobre $\mathbb{K}$, todas nas mesmas n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema de equações lineares representa-se do seguinte modo

$$S = \begin{cases} \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1n}\, x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n}\, x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_{m1}\, x_1 + \alpha_{m2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{mn}\, x_n = \beta_m \end{cases}$$

Neste caso, aos números α_{ij} chamamos **coeficientes do sistema** S**.** Dizemos também que α_{ij} é o **coeficiente na i-ésima equação da incógnita** x_j. Os números $\beta_i, i = 1, \ldots, m$, são chamados **termos independentes do sistema**. Uma **solução do sistema** é uma sequência $(c_1, \ldots, c_n)$, de elementos de $\mathbb{K}$, que é solução de todas as equações do sistema.

Dizemos que o sistema S é **possível** se o conjunto das suas soluções é não vazio, isto é, se existe pelo menos uma solução de S. Caso contrário dizemos que S é **impossível**.

Seja S um sistema possível. Dizemos que S é **determinado** se tem uma única solução e que é **indeterminado** se admite mais do que uma solução.

Chamamos:

- **matriz simples** do sistema S à matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

(matriz do tipo $m \times n$ cuja entrada (i,j) é o coeficiente na i-ésima equação da inc. x_j);

- **matriz dos termos independentes** do sistema S à matriz

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

(matriz do tipo $m \times 1$ cuja entrada $(i, 1)$ é o termo independente da i-ésima equação);

- **matriz ampliada** do sistema S à matriz do tipo $m \times (n+1)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right];$$

representamos a matriz ampliada de S por $[A|B]$, sendo A a matriz simples de S e B a matriz dos termos independentes de S.

Observação 1.5.1 Seja $A = [\alpha_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ e sejam $c_1, \ldots, c_n$ elementos de $\mathbb{K}$. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\, c_1 + \alpha_{12}\, c_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, c_n \\ \alpha_{21}\, c_1 + \alpha_{22}\, c_2 + \cdots + \alpha_{2n}\, c_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\, c_1 + \alpha_{m2}\, c_2 + \cdots + \alpha_{mn}\, c_n \end{bmatrix}.$$

Assim, sendo A a matriz simples e B a matriz dos termos independentes do sistema S, podemos representá-lo por

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B$$

ou, abreviadamente, por

$$AX = B, \text{ onde } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

a esta representação chamamos **forma** ou **representação matricial do sistema** S.

Nas condições anteriores,

$$(c_1, \ldots, c_n) \text{ é solução de } S \text{ se e só se } A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = B\,.$$

Exemplo 1.5.2 Considere-se o sistema, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$

$$S = \begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \phantom{2\,x_1 -{}} x_1 + 2\,x_2 = 6 \end{cases}$$

A matriz simples de S é $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz dos termos independentes de S é $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, logo o sistema S pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{cases} 2 \times 0 - 3 + 4 = 1 \\ 0 + 2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

concluímos que $(0, 3, 4)$ é solução de S e, portanto, o sistema S é possível. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/5 \\ 11/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

também $(8/5, 11/5, 0)$ é solução de S, logo S é indeterminado.

Dado um sistema de equações lineares colocam-se normalmente as seguintes questões:

1. *Como resolver o sistema*? (i.e., como determinar o conjunto das suas soluções?)
2. *Como discutir o sistema*? (i.e., como concluir, sem resolver o sistema, se é possível ou impossível e, no caso de ser possível, se é determinado ou indeterminado?)

Definição 1.5.3 Sejam S e T sistemas de equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que S e T são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto de soluções.

Lema 1.5.4 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Se $P \in M_m(\mathbb{K})$ é invertível, então os sistemas*

$$A\,X = B$$

e

$$(P\,A)\,X = P\,B$$

são equivalentes.

Demonstração:

Exercício.

$\square$

Proposição 1.5.5 *Sejam $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B, B' \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Se $[A'|B']$ pode ser obtida a partir de $[A|B]$ efectuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então os sistemas $A\,X = B$ e $A'\,X = B'$ são equivalentes.*

Demonstração:
Exercício.

□

Observação 1.5.6 Sejam $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B, B' \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

1. Se $[A'|B']$ pode ser obtida de $[A|B]$ através de um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então $r([A'|B']) = r([A|B])$.

2. Se $[A'|B']$ pode ser obtida de $[A|B]$ através de um número finito de transformações elementares sobre as linhas, então A' pode ser obtida de A através da mesma sequência de transformações elementares, pelo que $r(A') = r(A)$.

3. Se $[A'|B']$ está em forma de escada, então também A' está em forma de escada.

4. $r(A) \leq r([A|B])$.

5. Se $[A|B]$ tem uma linha da forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right]$, sendo $b \neq 0$, então o sistema $A\,X = B$ é impossível, pois uma das suas equações é
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \underbrace{b}_{\neq 0}.$$

1.6 Método de eliminação de Gauss-Jordan

Considere-se um sistema de equações lineares $A\,X = B$, sendo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Para discutir/resolver o sistema $A\,X = B$, consideramos a sua matriz ampliada $[A|B]$ e efectuamos transformações elementares sobre as linhas de modo a obter uma matriz $[A'|B']$ em forma de escada. Pela Proposição 1.5.5 todos os sistemas cuja matriz ampliada foi obtida durante este processo são equivalentes a $A\,X = B$. Temos então dois casos:

- **1º caso**: $\mathbf{r(A) < r([A|B])}$.

  Então $r(A') = r(A) < r([A|B]) = r([A'|B'])$. Como $[A'|B']$ está em forma de escada também A' está em forma de escada. Se considerarmos $s = r(A')$, a linha $s+1$ de A' é nula, mas como $s = r(A') < r([A'|B'])$, a linha $s+1$ de $[A'|B']$ é não nula logo é da forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right]$, com $b \neq 0$. Pela Observação 1.5.6 concluímos que o sistema $A'\,X = B'$ é impossível e portanto também o sistema $A\,X = B$ é **impossível**.

- **2º caso**: $\mathbf{r(A) = r([A|B])}$.

  Seja $s = r(A')(= r(A) = r([A|B]) = r([A'|B']))$. Então A' e $[A'|B']$ são matrizes em forma de escada com exactamente s linhas não nulas, logo $[A'|B']$ tem o seguinte aspecto:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & a'_{1r_1} & * & \cdots & * & a'_{1r_2} & * & \cdots & * & a'_{1r_3} & * & \cdots & * & a'_{1r_s} & * & \cdots & * & b'_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{2r_2} & * & \cdots & * & a'_{2r_3} & * & \cdots & * & a'_{2r_s} & * & \cdots & * & b'_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{3r_3} & * & \cdots & * & a'_{3r_s} & * & \cdots & * & b'_3 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{sr_s} & * & \cdots & * & b'_s \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

  onde $a'_{1r_1}, a'_{2r_2}, \ldots, a'_{sr_s}$ são os pivots da matriz $[A'|B']$. As entradas não especificadas são denotadas por $*$.

  Às incógnitas $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_s}$ (incógnitas correspondentes às colunas dos pivots) chamamos **incógnitas básicas**; às outras incógnitas, caso existam, chamamos **incógnitas livres**.

  Partindo de $[A'|B']$, efectuamos transformações elementares sobre as linhas de modo a obter uma matriz $[C|D]$ em forma de escada reduzida. A matriz $[C|D]$ tem o seguinte aspecto:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c}
 & & & \overbrace{}^{col.\,r_1} & & & & \overbrace{}^{col.\,r_2} & & & & \overbrace{}^{col.\,r_3} & & & & \overbrace{}^{col.\,r_s} & & & & \overbrace{}^{col.\,n+1} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_3 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & d_s \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

  Pela Proposição 1.5.5, os sistemas $A\,X = B$ e $C\,X = D$ são equivalentes.

  Como A tem n colunas e $s = r(A)$, tem-se, necessariamente, $s \leq n$.

  Temos dois sub-casos a considerar:

  – *Caso 2.1 :* $\mathbf{s = n}$ (isto é, $\mathbf{r(A)}$ **é igual ao número de incógnitas**).

    Como $s = n$ e a matriz C tem n colunas, temos $r_1 = 1, r_2 = 2, \cdots, r_n = n$ e

$$[C|D] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Logo $[C|D]$ é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ x_3 = d_3 \\ \quad\vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

que é possível e determinado, sendo a sua única solução $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$. Portanto, também $AX = B$ é **possível e determinado** e a sua única solução é $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$.

– *Caso 2.2 :* $\mathbf{s} < \mathbf{n}$ (isto é, $\mathbf{r(A)}$ **é menor que o número de incógnitas**).

Neste caso existe, pelo menos, uma incógnita além de $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_s}$, isto é, existe pelo menos uma incógnita livre. Temos que $[C|D]$ é a matriz ampliada de um sistema da forma

$$S' = \begin{cases} x_{r_1} + f_1 = d_1 \\ x_{r_2} + f_2 = d_2 \\ x_{r_3} + f_3 = d_3 \\ \qquad\vdots \\ x_{r_s} + f_s = d_s \end{cases}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_s$ são expressões lineares nas incógnitas livres, isto é, nas incógnitas x_j, com $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{r_1, \ldots, r_s\}$. Podemos ainda escrever

$$S' = \begin{cases} x_{r_1} = d_1 - f_1 \\ x_{r_2} = d_2 - f_2 \\ x_{r_3} = d_3 - f_3 \\ \qquad\vdots \\ x_{r_s} = d_s - f_s \end{cases}.$$

O sistema anterior tem, pelo menos, duas soluções distintas:

$$(c_1, \ldots, c_n), \quad \text{com } c_i = \begin{cases} 0\,, & \text{se } i \notin \{r_1, \ldots, r_s\} \\ d_j\,, & \text{se } i = r_j\,, 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

e

$$(b_1,\ldots,b_n), \quad \text{com } b_i = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i \notin \{r_1,\ldots,r_s\} \\ d_j - f_j(1,\ldots,1)\,, & \text{se } i = r_j\,, 1 \leq j \leq s \end{cases}$$

onde $f_j(1,\ldots,1)$ representa o elemento de $\mathbb{K}$ que se obtém substituindo por 1 as incógnitas livres que aparecem na expressão f_j .

O sistema é, neste caso, **possível e indeterminado.**

Resumo da discussão:

Considere-se um sistema $A\,X = B$.

- *Se* $r(A) < r([A|B])$, *o sistema é* <u>*impossível*</u>*.*
- *Se* $r(A) = r([A|B])$, *o sistema é possível e temos dois casos:*
  - *se* $r(A) =$*número de incógnitas, o sistema é* <u>*possível e determinado*</u>*;*
  - *se* $r(A) <$*número de incógnitas, o sistema é* <u>*possível e indeterminado*</u>*.*

Observação 1.6.1 Para <u>discutir</u> um sistema basta "transformar" a matriz ampliada do sistema numa matriz em <u>forma de escada</u>.

Para <u>resolver</u> um sistema é necessário "transformar" a matriz ampliada do sistema numa matriz em <u>forma de escada reduzida</u>.

Definição 1.6.2 Se $AX = B$ é um sistema possível com m equações em n incógnitas, damos o nome de **grau de indeterminação do sistema** ao número $n - r(A)$.

Observação 1.6.3 O grau de indeterminação de um sistema possível coincide com o número de incógnitas livres, no sistema.

Exercícios 1.6.4 Discuta e resolva, no caso de serem possíveis, os sistemas de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_5$ sobre $\mathbb{R}$:

$$1)\ S = \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -2 \end{cases} \qquad 2)\ T = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Resolução:

1) Para discutir o sistema S vamos transformar a sua matriz ampliada,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

numa matriz $[A'|B']$ em forma de escada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|B'].$$

A matriz $[A'|B']$ está em forma de escada, $r(A) = r(A') = 2$ e $r([A|B]) = r([A'|B']) = 2$, portanto $r(A) = r([A|B])$, donde o sistema S é possível.

Como $r(A) = 2 < 5 =$ número de incógnitas, concluímos que o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 3 $(= 5 - 2)$.

Para resolver o sistema vamos transformar a matriz $[A'|B']$ numa matriz em forma de escada reduzida:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [C|D].$$

A matriz $[C|D]$ está em forma de escada reduzida.

Neste caso, as incógnitas básicas são x_2 e x_3, sendo x_1, x_4 e x_5 as incógnitas livres.

O sistema S é equivalente ao sistema $C\,X = D$, portanto é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_2 = 1 + x_4 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases}$$

Assim, para $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \text{ é solução de } S \text{ se e só se } \begin{cases} \alpha_2 = 1 + \alpha_4 \\ \alpha_3 = 1 + \alpha_4 - \alpha_5 \end{cases}.$$

O conjunto das soluções de S é

$$\{(\alpha_1, 1 + \alpha_4, 1 + \alpha_4 - \alpha_5, \alpha_4, \alpha_5) : \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}\}.$$

2) A matriz ampliada do sistema T é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right];$$

o sistema T é impossível, pois é equivalente a um sistema em que uma das equações é

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \;=\; -2\,.$$

1.7 Sistemas homogéneos

Definição 1.7.1 Seja S um sistema de equações lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que S é **homogéneo** se os termos independentes de S são todos nulos, i.e., um sistema homogéneo é um sistema que pode ser representado matricialmente por $A\,X = 0$.

Observação 1.7.2 Todo o sistema homogéneo é possível, pois admite, pelo menos, a solução nula, i.e., a solução $(0, 0, \ldots, 0)$.

Proposição 1.7.3 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Então*

A é invertível se e só se o sistema $A\,X = 0$ é determinado.

Demonstração:
O sistema $A\,X = 0$ é possível (pois é homogéneo) e, como tem n incógnitas, sabemos que é determinado se e só se $r(A) = n$. Por outro lado, $r(A) = n$ se e só se A é invertível.

□

Observação 1.7.4 A resolução de um sistema de equações lineares (possível)

$$A\,X = B$$

pode reduzir-se à do sistema homogéneo

$$A\,X = 0,$$

que se diz **sistema homogéneo associado a** $A\,X = B$, desde que se conheça uma das suas soluções (a que chamamos **solução particular**). Com efeito, não é difícil demonstrar que :

Se $z = (z_1, \ldots, z_n)$ é uma solução de $A\,X = B$ e H é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\,X = 0$, então $\{z + h = (z_1 + h_1, \ldots, z_n + h_n) \,:\, h = (h_1, \ldots, h_n) \in H\}$ é o conjunto das soluções do sistema $A\,X = B$.

Exemplo 1.7.5 Considere-se o sistema, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$,

$$S = \left\{ \begin{array}{r} 2\,x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 1 \\ x_1 + 2\,x_2 = 6 \end{array} \right. .$$

Observámos (Exemplo 1.5.2) que $(0, 3, 4)$ é solução de S, i.e, $(0, 3, 4)$ é uma solução particular de S.

O sistema homogéneo associado a S é

$$T = \left\{ \begin{array}{r} 2\,x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 0 \\ x_1 + 2\,x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

Aplicando o Método de eliminação de Gauss-Jordan, concluímos que T é indeterminado, sendo o conjunto das suas soluções

$$\{(-\frac{2}{5}\,\alpha\,,\ \frac{1}{5}\,\alpha\,,\ \alpha)\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,

$$\{(0\,,3\,,4\,) + (-\frac{2}{5}\,\alpha\,,\ \frac{1}{5}\alpha\,,\ \alpha) = (-\frac{2}{5}\,\alpha\,,\ 3 + \frac{1}{5}\,\alpha\,,\ 4 + \alpha)\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

1.8 Decomposição LU

Para resolvermos um sistema de equações lineares aplicando o Método de eliminação de Gauss-Jordan consideramos a sua matriz ampliada e efectuamos transformações elementares sobre as linhas de forma a obter uma matriz em forma de escada reduzida. Vamos estudar nesta secção um outro método para resolução de sistemas, baseado na factorização da matriz simples do sistema como produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior. Este método é adequado para computadores, estando na base de muitos programas de computação.

Definição 1.8.1 Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que:

- A é uma **matriz triangular superior** se $a_{st} = 0$ sempre que $s > t$, isto é, se A é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- A é uma **matriz triangular inferior** se $a_{st} = 0$ sempre que $s < t$, isto é, se A é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.8.2 *Se A é uma matriz quadrada em forma de escada, então A é triangular superior. O recíproco não é válido.*

Exemplos 1.8.3 As matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são triangulares superiores mas <u>não estão</u> em forma de escada.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas em forma de escada (logo são triangulares superiores).

Definição 1.8.4 Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A uma factorização $A = LU$, sendo L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior, chamamos **decomposição** LU ou **decomposição triangular** de A.

Exemplos 1.8.5 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$. Tem-se $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A$, pelo que existe decomposição LU de A.

Exercício 1.8.6 Mostre que não existe decomposição LU da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 1.8.7 Chamamos **operações elementares descendentes** às operações elementares de tipo III que substituem uma dada linha pela sua soma com um múltiplo de uma linha <u>anterior</u>.

Observação 1.8.8 As matrizes elementares que se obtêm da identidade efectuando operações elementares descendentes são matrizes triangulares inferiores.

Proposição 1.8.9 *Se A é uma matriz quadrada que pode ser transformada numa matriz triangular superior, usando apenas operações elementares descendentes, existe uma decomposição LU de A.*

Demonstração:

Suponhamos que A é uma matriz quadrada de ordem n que pode ser transformada na matriz triangular superior U usando apenas operações elementares descendentes. Considere-se uma sequência de operações elementares descendentes $T_1, \ldots, T_s$, nessas condições. Esquematicamente, temos

$$A \underset{T_1}{\longrightarrow} \cdots \underset{T_s}{\longrightarrow} U\,.$$

Sejam $E_1, \ldots, E_s$ as matrizes elementares que se obtêm efectuando na matriz I_n as transformações $T_1, \ldots, T_s$, respectivamente. Então

$$U = (E_s \cdots E_1) \cdot A\,.$$

Como as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é invertível, sabemos que a matriz $(E_s \cdots E_1)$ é invertível. Tem-se

$$A = (E_s \cdots E_1)^{-1} \cdot U\,.$$

Para terminar a demonstração basta concluir que

$$(E_s \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

é triangular inferior. Atendendo a que o produto de matrizes triangulares inferiores é triangular inferior (exercício), é suficiente demonstrar que as matrizes $E_1^{-1}, \cdots, E_s^{-1}$ são triangulares inferiores.

Seja $p \in \{1, \ldots, s\}$. Por hipótese, T_p é uma operação elementar descendente, logo existem i, j, sendo $i < j$, tais que E_p é obtida de I_n adicionando à linha j a linha i multiplicada por α, para algum $\alpha \in \mathbb{K}$. Pela demonstração da Proposição 1.4.10, E_p^{-1} é a matriz que se obtém de I_n adicionando à linha j a linha i multiplicada por $-\alpha$, logo é triangular inferior (recorde-se que $i < j$).

$\square$

Exemplos 1.8.10 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$. É possível transformar A numa matriz U triangular superior, usando apenas operações elementares descendentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U.$$

Utilizando matrizes elementares, este processo pode ser descrito do seguinte modo:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A\,.$$

Portanto

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} U\,.$$

Assim, definindo

$$\begin{aligned} L &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

temos

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que os elementos sob a diagonal de L são os simétricos dos "multiplicadores"usados na transformação de A em U.

Observação 1.8.11 Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n que pode ser transformada numa matriz triangular superior, usando apenas operações elementares descendentes, podemos, **nalguns casos**, usar o seguinte método para determinar uma decomposição LU de A:

Suponhamos que a primeira coluna da matriz A é não nula. Como A pode ser transformada numa matriz em forma de escada, usando apenas operações elementares descendentes, sabemos que $a_{11} \neq 0$. Assim, adicionamos à segunda linha da matriz a primeira multiplicada por $-a_{21}a_{11}^{-1}$, adicionamos à terceira linha da matriz obtida a primeira multiplicada por $-a_{31}a_{11}^{-1}$, ..., chegando a uma matriz A' cuja primeira coluna tem todas as entradas nulas, com excepção da entrada $(1,1)$.

Suponhamos que a entrada $(2,2)$ da matriz A' é não nula. Como a entrada $(2,2)$ da matriz A' é não nula, adicionamos múltiplos convenientes da sua segunda linha às linhas posteriores, de forma a obter uma matriz na qual todas as entradas na segunda coluna, abaixo da entrada $(2,2)$, são nulas. Continuamos este processo até obter uma matriz triangular superior U.

Considera-se a matriz L que se obtém da matriz I_n substituindo cada entrada abaixo da diagonal principal pelo simétrico do "multiplicador"usado para "anular"a entrada correspondente, no anterior processo de transformação de A em U.

Observação 1.8.12 A decomposição LU de uma matriz não é única. Tem-se, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No entanto, existe unicidade, se A for invertível e exigirmos que as entradas principais de L sejam iguais a 1 (proposição seguinte).

Proposição 1.8.13 *Se A é uma matriz invertível, L e L_1 são matrizes triangulares inferiores, U e U_1 são matrizes triangulares superiores, $A = L\,U = L_1\,U_1$ e as entradas principais de L e L_1 são iguais a 1, então*

$$L = L_1 \ \text{ e } \ U = U_1 .$$

Demonstração:
Aula Avançada.

$\square$

Vamos agora apresentar um método para resolver um sistema de equações lineares $AX = B$ (possível), conhecendo uma decomposição LU de A, em que L é invertível.

Seja A uma matriz de ordem n. Suponhamos que $A = LU$, sendo L uma matriz triangular inferior invertível e U uma matriz triangular superior. O sistema de equações lineares $AX = B$ pode ser resolvido da forma seguinte.

Como $A = LU$, o sistema $AX = B$ é o sistema

$$LUX = B.$$

Seja $Y = UX$. Tem-se

$$LY = LUX = B.$$

Determinamos Y resolvendo o sistema

$$LY = B.$$

Uma vez determinado Y, resolve-se o sistema $UX = Y$.

Embora este método substitua a resolução do sistema $AX = B$ pela resolução de dois sistemas, $LY = B$ e $UX = Y$, apresenta a vantagem destes últimos sistemas serem fáceis de resolver por as suas matrizes simples serem triangulares (a estes sistemas chamamos **sistemas triangulares**).

Exemplos 1.8.14 Considere-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Vamos resolver o sistema $AX = B$, tendo em conta que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Começamos por resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix},$$

isto é, o sistema

$$\begin{cases} y_1 & & & = 1 \\ y_1 & + y_2 & & = -2 \\ 2y_1 & +3y_2 & +y_3 & = -12 \end{cases}.$$

Como a matriz simples deste sistema é triangular, o sistema resolve-se facilmente por substituição, concluindo que $(1, -3, -5)$ é a sua única solução.

Resta-nos agora resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

isto é, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 + x_3 = -3 \\ \quad\quad 5x_3 = -5 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema por substituição ascendente, concluímos que $(4, -1, -1)$ é a sua única solução e, portanto, é também a única solução do sistema inicial $AX = B$.

Observação 1.8.15 Em geral, se é necessário efectuar trocas de linhas para transformar a matriz A numa matriz em forma de escada, pode não existir decomposição LU de A. No entanto, nesse caso, é possível encontrar uma matriz P, que se obtém da identidade por troca de linhas, tal que existe uma decomposição LU de PA. Tem-se então,

$$PA = LU .$$

(As matrizes que se obtêm da identidade por troca de linhas são chamadas **matrizes de permutação**.)

Capítulo 2

Determinantes

2.1 A função determinante

Recorde-se que, ao longo deste curso, $\mathbb{K}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$, munidos das respectivas operações de adição e multiplicação usuais.

Um número real ou complexo tem inverso se e só se é não nulo, portanto uma matriz de ordem 1, $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ é invertível se e só se $a_{11} \neq 0$. Assim, uma matriz de ordem 1 é invertível se e só se não é nula; para matrizes de ordem ≥ 2 tal já não se verifica pois, por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é nula, mas não é invertível.

Será possível associar a cada matriz quadrada A um número real, que dependa apenas das entradas da matriz, e que nos permita decidir da invertibilidade de A? A resposta a esta questão é afirmativa.

Vamos analisar o caso das matrizes 2×2. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 1.4.15, sabemos que A é invertível se e só se $r(A) = 2$. Por outro lado, não é difícil concluir que

$$r(A) = 2 \text{ se e só se } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,.$$

Existe assim um elemento de $\mathbb{K}$, construído a partir das entradas da matriz, que nos informa se a matriz é, ou não, invertível. Ao número $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ chamamos determinante de A.

Para apresentar a definição de determinante de uma matriz de ordem arbitrária necessitamos do conceito de permutação.

Definição 2.1.1 Uma **permutação** do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ é uma aplicação bijectiva deste conjunto nele próprio. Designa-se por S_n o conjunto de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$.

Dado $\sigma \in S_n$, é usual representá-lo da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n),$$

onde $\sigma_1 = \sigma(1),\ \sigma_2 = \sigma(2), \sigma_3 = \sigma(3), \cdots, \sigma_n = \sigma(n)$.

A permutação identidade é representada por id,

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad id = (1\,, 2\,, 3\ , \cdots, n\,).$$

Exemplos 2.1.2 a) As permutações de $\{1, 2\}$ são $(1, 2)$ e $(2, 1)$, tendo-se

$$S_2\ =\ \{(1, 2),\ (2, 1)\}\,.$$

b) As permutações de $\{1, 2, 3\}$ são

$$(1, 2, 3)\,, (1, 3, 2)\,, (2, 1, 3)\,, (2, 3, 1)\,, (3, 1, 2)\,, (3, 2, 1),$$

tendo-se

$$S_3\ =\ \{(1, 2, 3)\,, (1, 3, 2)\,, (2, 1, 3)\,, (2, 3, 1)\,, (3, 1, 2)\,, (3, 2, 1)\}\,.$$

Observação 2.1.3

1. Uma sequência $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n)$ é uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$ se e só se é um arranjo dos inteiros $1, \ldots, n$, nalguma ordem, sem omissões nem repetições.

2. O número de permutações de $\{1, \ldots, n\}$ é $n!$, isto é, o cardinal de S_n é $n!$.

Seja $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n)$ uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$. Dizemos que dois elementos σ_i e σ_j fazem uma **inversão** se $i < j$ e $\sigma_i > \sigma_j$; o **número total de inversões** na permutação $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n)$ é

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}\,,$$

sendo s_i o número de inversões que cada elemento σ_i faz com os elementos seguintes.

Exemplos 2.1.4 O número total de inversões na permutação $(2, 4, 1, 3) \in S_4$ é $1+2+0 = 3$.

O número total de inversões na permutação $(6, 1, 3, 4, 5, 2) \in S_6$ é $5+0+1+1+1 = 8$.

O número total de inversões na permutação $id = (1, 2, 3, 4) \in S_4$ é $0+0+0 = 0$, isto é, não há inversões nesta permutação.

Definição 2.1.5 Seja $\sigma \in S_n$. Se o número total de inversões na permutação σ é um número par, dizemos que σ é uma permutação **par**; se o número total de inversões na permutação σ é um número impar, dizemos que σ é uma permutação **impar**. Dizemos que σ tem **sinal** 1 ou -1 (abreviadamente $sgn\,(\sigma) = 1$ ou $sgn\,(\sigma) = -1$), consoante σ é par ou impar, respectivamente.

Exemplos 2.1.6 Na tabela seguinte é apresentada uma classificação das permutações de $\{1, 2, 3\}$.

Permutação	Número de inversões	Classificação	Sinal
(1,2,3)	0	par	1
(1,3,2)	1	impar	-1
(2,1,3)	1	impar	-1
(2,3,1)	2	par	1
(3,1,2)	2	par	1
(3,2,1)	3	impar	-1

Seja $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. A um produto da forma

$$a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ é uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$, chamamos **produto elementar** da matriz A.

Em qualquer produto elementar $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$ aparece um, e um só, elemento de cada linha da matriz A e um, e um só, elemento de cada coluna da matriz A (pois σ é uma aplicação bijectiva de $\{1, \ldots, n\}$ em si próprio).

Multiplicando o produto elementar $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$ pelo sinal de σ obtemos o **produto elementar assinalado**

$$sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} .$$

Pela Observação 2.1.3 sabemos que, se A é uma matriz de ordem n, existem $n!$ produtos elementares assinalados de A. À soma de todos os produtos elementares assinalados da matriz A chamamos determinante de A :

Definição 2.1.7 Seja $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante de** A, e denota-se por $det\,(A)$ ou $|A|$, ao elemento de $\mathbb{K}$

$$det\,(A) \;=\; \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} .$$

À aplicação

$$\begin{array}{rcl} det : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & det(A) \end{array}$$

chamamos **determinante de ordem** n.

Observação 2.1.8 **a)** Considere-se uma matriz de ordem 1 , $A = [a_{11}]$. Por definição,

$$det\,(A) \;=\; \sum_{\sigma=(\sigma_1)\in S_1} sgn(\sigma)\; a_{1\sigma_1} .$$

Mas $S_1 = \{(1)\}$ e o número de inversões em (1) é 0, logo $sgn\,(\,(1)\,) = 1$, portanto

$$det\,([a_{11}]) \;=\; a_{11}\,.$$

b) Considere-se uma matriz de ordem 2 , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Por definição,

$$det\,(A) \;=\; \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in S_2} sgn(\sigma)\; a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\,.$$

Observámos anteriormente que $S_2 = \{(1,2),\,(2,1)\}$; o número de inversões em $(1,2)$ é 0 e o número de inversões em $(2,1)$ é 1, logo $sgn(\,(1,2)) = 1$ e $sgn(\,(2,1)) = -1$, portanto

$$det\,(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}) \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

c) Considere-se uma matriz de ordem 3 , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; na tabela seguinte são apresentados os seus produtos elementares assinalados.

Permutação	Sinal	Produto elementar assinalado
(1,2,3)	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1,3,2)	-1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,1,3)	-1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
(2,3,1)	1	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3,1,2)	1	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3,2,1)	-1	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Portanto, pela definição de determinante,

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,.$$

Para evitar ter de memorizar a expressão anterior podemos usar a seguinte mnemónica:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{\text{matriz}} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Exemplos 2.1.9 Tem-se

$$det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \;=\; 2\cdot(-2) - 3\cdot 4 \;=\; -16$$

e

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= 1\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 5\cdot 2 - 0\cdot(-1)\cdot 1 \\ &= -35 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} \right).$$

(A mnemónica para o cálculo dos determinantes de matrizes de ordem 3 <u>não</u> pode ser "generalizada"para matrizes de ordem superior.)

Atendendo a que S_n tem $n!$ elementos, é óbvio que, para $n \geq 4$, não é fácil calcular o determinante de uma matriz de ordem n usando directamente a definição, por exemplo, calcular o determinante de uma matriz de ordem 4 envolveria determinar $4!(= 24)$ produtos elementares assinalados; ao longo deste capítulo apresentaremos propriedades do determinante que simplificarão o seu cálculo. Uma excepção para a dificuldade referida é o caso das matrizes triangulares.

Proposição 2.1.10 *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é triangular (superior ou inferior), então o determinante de A é igual ao produto dos elementos principais de A. Isto é,*

$$det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

e

$$det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}\,.$$

Demonstração:

Aula Teórica.

□

Exemplo 2.1.11 Tem-se

$$det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4\cdot 3\cdot 2 = 24 \quad \text{e} \quad det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot 2 = -12\,.$$

Observação 2.1.12 Atendendo à proposição anterior, temos que $det\,(I_n) = 1$.

Proposição 2.1.13 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se A tem uma linha (ou uma coluna) nula, então*

$$det\,(A) = 0\,.$$

Demonstração:

Por definição,

$$det\,(A) \;=\; \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}\,.$$

Suponhamos que A tem uma linha (coluna) nula. Como em cada produto elementar assinalado aparece um elemento de cada linha (coluna) da matriz A podemos concluir que todo o produto elementar assinalado da matriz A é nulo. Consequentemente, $det\,(A) = 0$.

□

Seja A uma matriz de ordem n. É fácil concluir que todo o produto elementar da matriz A é um produto elementar da matriz A^T e reciprocamente, todo o produto elementar da matriz A^T é um produto elementar da matriz A. Assim A e A^T têm os mesmos produtos elementares. Pode ainda demonstrar-se que A e A^T têm os mesmos produtos elementares assinalados, logo $det\,(A) \;=\; det\,(A^T)$.

Proposição 2.1.14 *Para qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$,*

$$det\,(A) \;=\; det\,(A^T)\,.$$

□

Proposição 2.1.15 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, então*

$$det\,(A) = 0\,.$$

Demonstração:

Ideia da demonstração: Suponhamos que A tem duas linhas iguais, a linha k e a linha l; então $a_{kj} = a_{lj}\,,\, j = 1, \ldots, n$. É possível mostrar que, a qualquer parcela de

$$det\,(A) \;=\; \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

podemos associar uma outra parcela, bem determinada pela primeira, que somada com ela dá zero e, portanto, $det\,A = 0$.

Se a matriz A tem duas colunas iguais, então a matriz A^T tem duas linhas iguais, logo $det\,A^T = 0$; como, pela Proposição 2.1.14 , $det\,A = det\,A^T$, concluímos que $det\,A = 0$.

$\square$

Exemplos 2.1.16 Tem-se

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 + (-2) = -3$$

e

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -10.$$

logo, em geral,

$$det(A+B) \neq det(A) + det(B).$$

Por outro lado, para quaisquer $a, b, y, z \in \mathbb{K}$,

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a+y & b+z \end{bmatrix} = b+z-2a-2y = det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y & z \end{bmatrix}$$

Proposição 2.1.17 *Seja $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Se a linha i de A é soma das linhas*

$$\begin{bmatrix} a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \end{bmatrix},$$

então o determinante de A é igual à soma dos determinantes das matrizes que se obtêm de A substituindo a linha i respectivamente por

$$\begin{bmatrix} a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
det\,(A) &= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\ a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n}\\
&= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\ a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots (a'_{i\sigma_i}+a''_{i\sigma_i})\cdots a_{n\sigma_n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,(a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a'_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n} +\ a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a''_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n})\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a'_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n} + \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a''_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n}\\
&= det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\,.\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.1.18 *Seja $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{K})$. Se a coluna j de A é soma das colunas*

$$
\begin{bmatrix} a'_{1j}\\ a'_{2j}\\ \cdots\\ a'_{nj}\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a''_{1j}\\ a''_{2j}\\ \cdots\\ a''_{nj}\end{bmatrix},
$$

então o determinante de A é igual à soma dos determinantes das matrizes que se obtêm de A substituindo a coluna j respectivamente por

$$
\begin{bmatrix} a'_{1j}\\ a'_{2j}\\ \cdots\\ a'_{nj}\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} a''_{1j}\\ a''_{2j}\\ \cdots\\ a''_{nj}\end{bmatrix}.
$$

Isto é,

$$
det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j}+a''_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a'_{2j}+a''_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj}+a''_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} =
$$

$$
= det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}
$$

Demonstração: É consequência do resultado anterior e da Proposição 2.1.14 .

□

Vamos relacionar $det\,(B)$ com $det\,(A)$, quando B se pode obter efectuando uma transformação elementar na matriz A:

Proposição 2.1.19 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Tem-se:*

1. *Se a matriz B se obtém de A multiplicando uma linha de A (ou uma coluna de A) por um elemento $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então*
$$det\, B = \alpha\, det\, A\,.$$
2. *Se a matriz B se obtém de A substituindo uma linha de A (coluna de A) pela sua soma com outra linha de A (respectivamente, coluna de A) multiplicada por um elemento de $\mathbb{K}$, então*
$$det\, B = det\, A\,.$$
3. *Se a matriz B se obtém de A trocando duas linhas (ou duas colunas), então*
$$det\, B = -\, det\, A\,.$$

Demonstração:

Vamos demonstrar os resultados relativos a transformações elementares nas linhas. Esses resultados permitem, aplicando a Proposição 2.1.14, deduzir resultados análogos para as colunas.

1) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e suponhamos que B se obtém multiplicando a linha i de A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} det\,(B) &= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\; B_{1\sigma_1}B_{2\sigma_2}\cdots B_{i\sigma_i}\cdots B_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\; a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots(\alpha a_{i\sigma_i})\cdots a_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} \alpha \cdot (\, sgn(\sigma)\; a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n}) \\ &= \alpha\, (\sum_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in S_n} sgn(\sigma)\; a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n}) \\ &= \alpha\;\, det\,(A). \end{aligned}$$

2) Suponhamos que a matriz B se obtém de A substituindo a linha j de A pela sua soma com a linha i de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$. Então A e B têm a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{i1} + a_{j1} & \beta a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \beta a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Proposição 2.1.17, a alínea anterior e a Proposição 2.1.15, temos

$$\begin{aligned} det\,(B) &= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{i1} + a_{j1} & \beta a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \beta a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{i1} & \beta a_{i2} & \cdots & \beta a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \beta \cdot det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + det\,(A) \,=\, \beta \cdot 0 + det\,(A) = det\,(A)\,. \end{aligned}$$

3) Suponhamos que a matriz B se obtém de A trocando as linhas i e j (com $i \neq j$). Então

A e B têm a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as alíneas anteriores tem-se:

$$\begin{aligned}
det\,(B) &= det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = -\,det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{j1} & -a_{j2} & \cdots & -a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= -\,det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}-a_{j1} & a_{i2}-a_{j2} & \cdots & a_{in}-a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= -\,det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}-a_{j1} & a_{i2}-a_{j2} & \cdots & a_{in}-a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= -\,det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = -\,det\,(A)\,.
\end{aligned}$$

□

O corolário seguinte deduz-se facilmente, tendo em conta a definição de determinante ou aplicando a proposição anterior.

Corolário 2.1.20 *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $c \in \mathbb{K}$, então*

$$det\,(c\,A) \;=\; c^n\;det\,A\,.$$

Demonstração:

Exercício.

□

Exemplo 2.1.21 Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ e c é um elemento de $\mathbb{K}$ não nulo, então

$$det\,(c\,A) \;=\; c^2\,det\,A.$$

Conjugando as Proposições 2.1.10 e 2.1.19 obtemos um **método para calcular determinantes**: usando transformações elementares transformamos a matriz dada numa matriz triangular superior, tomando a devida nota das modificações que as transformações efectuadas acarretam ao valor do determinante.

Exemplo 2.1.22 Temos:

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = -\,det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1\times(-4)\times 5\times 1 = 20\,.$$

Exemplo 2.1.23 Aplicando a Proposição 2.1.19 e a Proposição 2.1.13, concluímos que

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \;=\; det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \;=\; 0\,.$$

Corolário 2.1.24 *Se A é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então*

$$det\,(A) \;=\; 0\,.$$

Demonstração:

Exercício.

□

2.2 Propriedades da função determinante

Quando consideramos a complexidade das definições de produto de matrizes e de determinante, parece pouco provável que exista alguma relação simples entre estes conceitos. Surpreendentemente, demonstraremos que, se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então

$$det\,(A\,B) = det\,(A)\,det\,(B)\,.$$

Começamos com o caso especial em que A é uma matriz elementar.

Lema 2.2.1 *Se E é uma matriz elementar de ordem n sobre $\mathbb{K}$ e $B \in M_n(\mathbb{K})$, então*

$$det\,(E\,B) = det\,(E)\,det\,(B)\,.$$

Demonstração:

Suponhamos que E é uma matriz elementar de ordem n sobre $\mathbb{K}$. Então E é uma matriz elementar de tipo I), II) ou III).

a) Admitamos que E é uma matriz elementar de tipo I). Neste caso existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tais que E é a matriz que se obtém de I_n trocando a linha i com a linha j. Nestas condições, atendendo à Proposição 2.1.19 e a que $det(I_n) = 1$, podemos concluir que

$$det(E) = -\,det(I_n) = -1\,.$$

Sabemos também que $E\,B$ é a matriz que se obtém de B trocando a linha i com a linha j. Atendendo novamente à Proposição 2.1.19,

$$det(E\,B) = -\,det(B)\,.$$

Portanto

$$det(E\,B) = -\,det(B) = (-1)\,det(B) = det(E)\,det(B)\,.$$

b) Admitamos agora que E é uma matriz elementar de tipo II). Então existem $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tais que E é a matriz que se obtém de I_n multiplicando a linha i por α. Nestas condições, atendendo à Proposição 2.1.19,

$$det(E) = \alpha\; det(I_n) = \alpha\,.$$

Como $E\,B$ é a matriz que se obtém de B multiplicando a linha i por α, temos (atendendo novamente à Proposição 2.1.19),

$$det(E\,B) = \alpha\; det(B)\,.$$

Portanto

$$det(E\,B) = \alpha\; det(B) = det(E)\,det(B)\,.$$

c) Admitamos agora que E é uma matriz elementar de tipo III). Então existem $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, e $\beta \in \mathbb{K}$, tais que E é a matriz que se obtém de I_n substituindo a linha j pela sua soma com a linha i multiplicada por β. Atendendo à Proposição 2.1.19,

$$det(E) = det(I_n) = 1\,.$$

Como $E\,B$ é a matriz que se obtém de B substituindo a linha j pela sua soma com a linha i multiplicada por β, temos (atendendo novamente à Proposição 2.1.19),

$$det(\,E\,B) \;=\; det(\,B)\,.$$

Portanto

$$det(\,E\,B) \;=\; det(\,B) \;=\; det(\,E)\,det(\,B)\,.$$

□

Observação 2.2.2 a) Na demonstração anterior provámos que:

- Se E é uma matriz elementar de tipo I), $det(\,E) \;=\; -1$;
- Se E é uma matriz elementar de tipo II), existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $det(\,E) \;=\; \alpha$;
- Se E é uma matriz elementar de tipo III), $det(\,E) \;=\; 1$.

Consequentemente, se E é uma matriz elementar, $det(\,E) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

b) Se E_1 e E_2 são matrizes elementares de ordem n sobre $\mathbb{K}$ e $B \in M_n(\mathbb{K})$, tem-se, pelo lema anterior,

$$det(\,E_1\,E_2\,B) \;=\; det(\,E_1(\,E_2\,B)) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2\,B) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2)\,det(\,B)\;.$$

Mais geralmente, o lema anterior permite demonstrar que, se $E_1, E_2, \ldots, E_s$ são matrizes elementares de ordem n sobre $\mathbb{K}$ e $B \in M_n(\mathbb{K})$,

$$det(\,E_1\,E_2\,\cdots E_sB) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s)\,det(\,B)\;.$$

c) Se $E_1, E_2, \ldots, E_s$ são matrizes elementares de ordem n sobre $\mathbb{K}$

$$det(\,E_1\,E_2\,\cdots E_s) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s)$$

(pela alínea anterior,

$$\begin{aligned} det(\,E_1\,E_2\,\cdots E_s) &= det(\,E_1\,E_2\,\cdots E_sI_n) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s)\,det(\,I_n) \\ &= det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s)\,). \end{aligned}$$

d) Sejam $B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Se C pode ser obtida a partir de B efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, então existe $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que

$$det(\,C) \;=\; \gamma\,det(\,B)\,.$$

(Justificação: Se C pode ser obtida a partir de B efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, existe $s \in \mathbb{N}$ e existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que $C \;=\; E_1\,E_2\,\cdots E_sB$. Logo

$$det(\,C) \;=\; det(\,E_1\,E_2\,\cdots E_sB) \;=\; det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s)\,det(\,B)$$

e, pela alínea a), sabemos que $det(\,E_1)\,det(\,E_2)\cdots det(\,E_s) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)

Proposição 2.2.3 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. A matriz A é invertível se e só se $det\, A \neq 0$.*

Demonstração:

Suponhamos que A é invertível. Pelo Teorema 1.4.15 sabemos que A é produto de matrizes elementares, logo existe $s \in \mathbb{N}$ e existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que $A = E_1\, E_2 \cdots E_s$. Pela observação anterior,

$$det(A) = det(E_1\, E_2 \cdots E_s) = det(E_1)\, det(E_2) \cdots det(E_s) \neq 0 .$$

Reciprocamente, suponhamos que $det\, A \neq 0$. Seja C uma matriz em forma de escada que se obtém de A efectuando transformações elementares nas linhas (a existência de C está garantida pela Proposição 1.3.10).

Sabemos, pela observação anterior, que existe $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $det(C) = \gamma\, det(A)$, logo $det\,(C) \neq 0$.

A matriz C é uma matriz quadrada (de ordem n) em forma de escada, logo é triangular superior. Como $det\,(C) \neq 0$, podemos concluir que todas as entradas principais de C são não nulas (pois $det\,(C) = C_{11} C_{22} \cdots C_{nn}$). Então C tem n linhas não nulas, logo $r(A) = n$ e portanto, pela Proposição 1.4.15 , A é invertível.

$\square$

Exemplo 2.2.4 A matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ não é invertível, pois $det\, A = 12 - 12 = 0$.

Lema 2.2.5 *Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ e A não é invertível, então AB também não é invertível.*

Demonstração:

Distinguimos dois casos:

1º caso: A matriz B é invertível. Suponhamos, com vista a um absurdo, que AB é invertível. Então AB e B^{-1} são matrizes invertíveis, logo $A = (AB)\, B^{-1}$ é produto de matrizes invertíveis e portanto, pela Proposição 1.4.8, é invertível, absurdo.

2º caso: A matriz B não é invertível. Pela Proposição 1.7.3, o sistema $B\,X = 0$ é indeterminado, pelo que existe $C \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, tal que $BC = 0$. Então $(AB)\,C = A\,(BC) = A\,0 = 0$, logo o sistema $(AB)\,X = 0$ é indeterminado. Novamente pela Proposição 1.7.3 temos que $A\,B$ não é invertível.

$\square$

Proposição 2.2.6 *Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, então*

$$det\,(A\,B) = det\,(A) \cdot det\,(B) .$$

Demonstração:

Analisamos separadamente dois casos:

1º caso: A matriz A é invertível. Então A é produto de matrizes elementares, logo, pelas alíneas b) e c) da Observação 2.2.2, temos $det\,(A\,B) \,=\, det\,A \cdot det\,B$.

2º caso: A matriz A não é invertível. Então, pelo lema anterior, AB também não é invertível. Pela Proposição 2.2.3, $det\,(A) \,=\, 0$ e $det\,(A\,B) = 0$ logo

$$det\,(A) \cdot det\,(B) = \; 0 \cdot det\,B = \; 0 \; = \; det\,(A\,B).$$

□

Corolário 2.2.7 *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é invertível, então*

$$det\,(A^{-1}) \; = \; (det\,A)^{-1}\,.$$

Demonstração:

Por definição de matriz invertível e de inversa,

$$A^{-1} \cdot A \; = \; I_n;$$

pela proposição anterior,

$$det\,(A^{-1}) \cdot det\,A \; = \; det\,(A^{-1}\,A) \; = \; det\,(I_n) \; = \; 1\,.$$

Portanto

$$det\,(A^{-1}) \cdot det\,A \; = \; 1\,,$$

donde,

$$det\,(A^{-1}) \; = \; (det\,A)^{-1}\,.$$

□

Exemplo 2.2.8 A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível pois $det\,A \; = \; -3$. Pela proposição anterior, $det\,(A^{-1}) \; = \; -1/3$.

Exercício 2.2.9 *Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ e $A\,B = I_n$, então A e B são invertíveis e $B = A^{-1}$.*

No Teorema 1.4.15 apresentámos três condições equivalentes à invertibilidade de uma matriz A. As Proposições 1.7.3 e 2.2.3 permitem completar esse teorema:

Teorema 2.2.10 *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A matriz A é invertível;*
2. *A matriz A tem característica n;*
3. *É possível, efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, obter I_n a partir de A;*
4. *A matriz A é produto de matrizes elementares;*
5. *O sistema $AX = 0$ é determinado;*
6. *$det\,(A) \neq 0$.*

□

2.3 Teorema de Laplace

Vamos estudar uma fórmula (Teorema de Laplace) que nos permite reduzir o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n ao cálculo de n determinantes de matrizes de ordem $n-1$. Este teorema pode ser particularmente útil se uma das linhas ou das colunas da matriz tiver muitos zeros.

Notação 2.3.1 Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, representamos por $A(i\,|\,j)$ a matriz, de ordem $n-1$ sobre $\mathbb{K}$, que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j.

Exemplo 2.3.2 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Então, por exemplo,

$$A(1\,|\,1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},\ A(1\,|\,2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},\ A(1\,|\,3) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } A(2\,|\,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.3.3 Sejam $n \geq 2$ e $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Chamamos **complemento algébrico do elemento** (i, j) de A, e representamos por $\widehat{A}_{ij}$, ao elemento de $\mathbb{K}$

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\, det\, A(i\,|\,j)\,.$$

Observação 2.3.4 Considere-se uma matriz de ordem 3, $A = [a_{ij}]$. Por definição,

$$det\,(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,.$$

Agrupemos as parcelas que contêm a_{11}, as que contêm a_{12} e as que contêm a_{13}:

$$det\,(A) = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})\,,$$

ou seja,

$$det\,(A) = a_{11} \cdot det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

isto é,

$$det\,A = a_{11} \cdot \widehat{A}_{11} + a_{12} \cdot \widehat{A}_{12} + a_{13} \cdot \widehat{A}_{13}\,.$$

Esta fórmula pode ser generalizada para matrizes de ordem n (Teorema de Laplace).

Teorema 2.3.5 **(Teorema de Laplace)** *Seja* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, *com* $n \geq 2$. *Para qualquer* $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$det\,A = a_{i1} \cdot \widehat{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widehat{A}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \widehat{A}_{in} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot \widehat{A}_{ir}\,.$$

Analogamente, para qualquer $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$det\,A = a_{1j} \cdot \widehat{A}_{1j} + a_{2j} \cdot \widehat{A}_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot \widehat{A}_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} \cdot \widehat{A}_{tj}\,.$$

□

À primeira expressão damos o nome de **desenvolvimento do determinante segundo a linha** i. À segunda expressão damos o nome de **desenvolvimento do determinante segundo a coluna** j.

Exemplo 2.3.6 Calculemos o determinante seguinte usando o Teorema de Laplace. Vamos escolher a terceira coluna por conter um maior número de entradas nulas.

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \sum_{t=1}^{4} a_{t3}\,\widehat{A}_{t3} = 0 \cdot \widehat{A}_{13} + 0 \cdot \widehat{A}_{23} + 4 \cdot \widehat{A}_{33} + 0 \cdot \widehat{A}_{43} \\ &= 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4\,. \end{aligned}$$

Definição 2.3.7 Sejam $n \geq 2$ e $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. A matriz de ordem n cuja entrada (i, j) é $\widehat{A}_{ij}$ é chamada **matriz dos complementos algébricos de** A e é denotada por $\widehat{A}$.

A matriz $(\widehat{A})^T$ é chamada **adjunta de** A e é denotada por $adj\,(A)$.

Exercício 2.3.8 Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Mostre que $\widehat{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e $adj\,(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Exercício 2.3.9 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que $\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $adj\,(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Proposição 2.3.10 *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$,*

$$A \cdot adj\,(A) \;=\; (det\,A)\, I_n\,.$$

Demonstração:

Para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$, a entrada (i, i) da matriz $A \cdot adj\,(A)$ é

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,(adj\,(A))_{ri} \;=\; \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,(\widehat{A})_{ir}$$

o que, pelo Teorema de Laplace, é igual a $det\,(A)$.

Se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j$, a entrada (i, j) da matriz $A \cdot adj\,(A)$ é

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,(adj\,(A))_{rj} \;=\; \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,(\widehat{A})_{jr}$$

o que, pelo Teorema de Laplace, é igual ao determinante da matriz que se obtém de A substituindo a linha j pela linha i; como tal matriz tem duas linhas iguais, o seu determinante é igual a 0.

□

O corolário seguinte apresenta uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível.

Corolário 2.3.11 *Seja $n \geq 2$. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então*

$$A^{-1} \;=\; (det\,A)^{-1}\, adj\,A\,.$$

Demonstração:

Pela proposição anterior, $A \cdot adj\,(A) = (det\,A)\,I_n$. Se A é invertível, $det\,A \neq 0$, e temos

$$A \cdot ((det\,A)^{-1} adj\,(A)) = (det\,A)^{-1}(A \cdot (adj\,(A)) = (det\,A)^{-1}((det\,A)\,I_n) = I_n\,,$$

logo, pelo Exercício 2.2.9,

$$A^{-1} = (det\,A)^{-1} adj\,(A)\,.$$

□

Exercício 2.3.12 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pelo Exercício 2.3.9,

$$adj\;A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, como $det\,A = 2$, tem-se que

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot adj\;A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Sistemas de Cramer

Definição 2.4.1 Seja S um sistema de equações lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que S é **sistema de Cramer** se o número de equações de S é igual ao número de incógnitas de S e o determinante da matriz simples de S é diferente de zero.

Lema 2.4.2 *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então, para qualquer $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, o sistema $A\,X = B$ é possível e determinado e a sua única solução é $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}\,B$$

Demonstração:

Se A é invertível,

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B \iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}B\,.$$

$\square$

Observação 2.4.3 Se o sistema $A\,X = B$ é de Cramer, a matriz A é uma matriz quadrada com determinante não nulo, logo é invertível. Assim, atendendo ao lema anterior,

todo o sistema de Cramer $A\,X = B$ é possível e determinado e a sua única solução é $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}\,B$$

Proposição 2.4.4 *(***Regra de Cramer***) Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tais que $A\,X = B$ é sistema de Cramer. Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a sua solução, então, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\alpha_i = (det\,A)^{-1}\;det\,(A_i)\,,$$

sendo A_i a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i por B.

Demonstração:

Pela observação anterior sabemos que a única solução do sistema $AX = B$ é $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}\,B\,.$$

Aplicando a fórmula para A^{-1} obtida no Corolário 2.3.11, temos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (\,(det\,A)^{-1}\,adj\,(A))\;\cdot B\,.$$

Portanto

$$\alpha_i \;=\; (det\,A)^{-1}\,(adj\,(A)\;\cdot B)_{i1}\,.$$

Para concluir a demonstração basta provar que

$$(adj\,(A)\;\cdot B)_{i1} \;=\; det\,(A_i)\,.$$

Mas

$$(adj\,(A)\;\cdot B)_{i1} \;=\; \sum_{t=1}^{n}\,(adj\,(A))_{it}\;\cdot B_{t1} \;=\; \sum_{t=1}^{n}\;\widehat{A}_{ti}\;\cdot B_{t1} \;=\; \sum_{t=1}^{n}\;B_{t1}\;\cdot \widehat{A}_{ti}\,,$$

o que, pelo Teorema de Laplace, é precisamente o determinante da matriz A_i.

$\square$

Observação 2.4.5 Uma das vantagens da aplicação da Regra de Cramer, em relação a outros processos para a resolução de um sistema de equações, consiste na possibilidade de se calcular o valor de cada incógnita, independentemente da determinação das restantes.

Exemplo 2.4.6 Considere-se o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 sobre $\mathbb{R}$,

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Temos que:

$$\text{número de equações de } S \;=\; 3 \;=\; \text{número de incógnitas de } S\,,$$

logo, para concluirmos se S é sistema de Cramer, basta verificar se o determinante da matriz simples de S é diferente de zero.

A matriz simples de S é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad det\, A = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \;=\; 4,$$

logo S é sistema de Cramer.

Seja $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a solução de S. Pela proposição anterior,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\, det\, A_1 \;=\; \frac{1}{4}\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\,(-2) \;=\; -\frac{1}{2}\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}\, det\, A_2 \;=\; \frac{1}{4}\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

e

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}\, det\, A_3 \;=\; \frac{1}{4}\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1\,.$$

Portanto a solução de S é $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$.

Capítulo 3

Espaços vectoriais

3.1 Introdução

Definição 3.1.1 Seja V um conjunto não vazio. Chamamos **adição** em V a uma aplicação que a cada par de elementos v e w de V associa um elemento de V, que representamos por $v+w$ e designamos por **soma** de v e w.

Definição 3.1.2 Seja V um conjunto não vazio e suponhamos que está definida uma adição em V, $+$. Dizemos que:

- $+$ é **associativa** se
$$v+(w+z)=(v+w)+z,$$
para quaisquer $v, w, z \in V$;
- $+$ é **comutativa** se
$$v+w=w+v,$$
para quaisquer $v, w \in V$;
- o elemento $a \in V$ é **elemento neutro para a adição** se
$$a+v=v+a=v\,,$$
para qualquer $v \in V$.

Observação 3.1.3 Não pode existir mais do que um elemento neutro para uma adição definida em V : supondo que a e a' são elementos neutros para a adição em V, então, por definição de elemento neutro,
$$a=a+a'=a'\,.$$

Ao elemento neutro (caso exista) para a adição definida em V chamamos **zero de** V ou **elemento nulo de** V e representamo-lo por 0_V, ou simplesmente por 0.

Definição 3.1.4 Seja V um conjunto não vazio e suponhamos que $+$ é uma adição em V com elemento neutro 0_V . Se u e u' são elementos de V, dizemos que u' **é simétrico de** u se

$$u + u' = u' + u = 0_V \, .$$

Observação 3.1.5 Se a adição é associativa, o simétrico de um elemento, quando existe, é único. Com efeito, se u' e u'' são simétricos de u então,

$$u' = u' + 0 = u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0 + u'' = u'' \, .$$

Caso exista, o simétrico de u é denotado por $-u$. Se $u\,, v \in V$ e v tem simétrico, denotamos o elemento $u + (-v)$ por $u - v$.

Definição 3.1.6 Chamamos **grupo comutativo** a um par $(V, +)$ onde V é um conjunto não vazio e $+$ é uma adição em V satisfazendo:

1. $+$ é comutativa;
2. $+$ é associativa;
3. Existe elemento neutro para a adição $+$;
4. Todo o elemento de V tem simétrico.

Exemplo 3.1.7 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos comutativos, onde $+$ denota as operações de adição usuais.

Recorde-se que, ao longo deste curso, $\mathbb{K}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$, munidos das respectivas operações de adição e multiplicação usuais.

Definição 3.1.8 Seja V um conjunto não vazio. A uma aplicação que a cada par de elementos α e v , sendo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, associa um elemento de V que representamos por $\alpha\, v$ ou $\alpha \cdot v$, chamamos **multiplicação escalar**.

Considere-se o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(v_1, v_2) \, : \, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \, .$$

Dados $v = (v_1, v_2)\, , w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \, .$$

Em geral, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, a soma $v + w$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n).$$

Esta adição é chamada **adição usual** em $\mathbb{R}^n$.

Se $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$\alpha\, v = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Analogamente, se $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\, v$ é o elemento de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\alpha\, v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n).$$

Esta multiplicação escalar é designada **multiplicação escalar usual** em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.1.9 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Com respeito às operações de adição e multiplicação escalar usuais em $\mathbb{R}^n$, tem-se:*

I) $(\mathbb{R}^n, +)$ *é grupo comutativo, isto é,*

- *A1) a adição é comutativa;*
- *A2) a adição é associativa;*
- *A3) existe elemento neutro para a adição;*
- *A4) todo o elemento de $\mathbb{R}^n$ tem simétrico;*

II) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$:

- *E1)* $(\alpha\, \beta)\, v = \alpha\, (\beta\, v)$;
- *E2)* $(\alpha + \beta)\, v = \alpha\, v + \beta\, v$;
- *E3)* $\alpha\, (v + w) = \alpha\, v + \alpha\, w$;
- *E4)* $1_{\mathbb{R}}\, v = v$.

Demonstração:

Exercício.

$\square$

Observação 3.1.10 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Considere-se o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se:*

- *em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ está definida uma adição que a cada par de elementos A e B de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o elemento $A + B$ de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$;*
- *está definida uma multiplicação escalar que a cada par de elementos α e A, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, associa o elemento $\alpha \cdot A$ de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Demonstrámos no Capítulo 1 que são satisfeitas as condições seguintes:

I) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ *é grupo comutativo, isto é,*

A1) a adição é comutativa;

A2) a adição é associativa;

A3) existe elemento neutro para a adição;

A4) todo o elemento de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *tem simétrico;*

II) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*:*

E1) $(\alpha\,\beta)\,A = \alpha\,(\beta\,A)$;

E2) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$;

E3) $\alpha\,(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$;

E4) $1_{\mathbb{R}}\,A = A$.

Da proposição e da observação anteriores podemos concluir que os conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ apresentam uma coincidência estrutural no que se refere a um par importante de operações (adição e multiplicação escalar). Nas secções seguintes vamos estudar simultaneamente $\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e todos os conjuntos que apresentam a “estrutura”referida.

3.2 Espaços vectoriais

Definição 3.2.1 Seja V um conjunto não vazio. Suponhamos que:

- em V está definida uma adição, $+$, que a cada par de elementos v e w de V associa o elemento $v+w$ de V;
- está definida uma multiplicação escalar que a cada par de elementos α e v, sendo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, associa o elemento $\alpha\, v$ de V.

Dizemos que V é **espaço vectorial** (ou **espaço linear) sobre $\mathbb{K}$** se são satisfeitas as condições seguintes:

I) $(V,+)$ é grupo comutativo, isto é,

A1) a adição é comutativa;

A2) a adição é associativa;

A3) existe elemento neutro para a adição;

A4) todo o elemento de V tem simétrico;

II) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$,

E1) $(\alpha\, \beta)\, v \;=\; \alpha\, (\beta\, v)$;

E2) $(\alpha \,+\, \beta)\, v \;=\; \alpha\, v + \,\beta\, v$;

E3) $\alpha\, (\,v + \,w) \;=\; \alpha\, v + \,\alpha\, w$;

E4) $1_{\mathbb{K}}\; v \;=\; v$.

Se V é espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, aos elementos de V chamamos **vectores** e aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos **escalares**.

Um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ é chamado **espaço vectorial real**. Um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ é chamado **espaço vectorial complexo**.

Exemplos 3.2.2 1. O conjunto $\mathbb{R}^3$ é espaço vectorial real, considerando a operação de adição

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

e a multiplicação escalar

$$\alpha\, (a_1, a_2, a_3) = (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \alpha\, a_3)\,,$$

onde α designa um número real.

Em geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}\,, n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ é espaço vectorial real, considerando as operações de adição e multiplicação escalar usuais (consequência da Proposição 3.1.9).

2. O conjunto $\mathbb{R}$, juntamente com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é espaço vectorial real.

3. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^n$ é espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, considerando as operações de adição e multiplicação escalar definidas por
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,,$$
e, para $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$\alpha\,(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)\,.$$
Em particular, $\mathbb{C}$ é espaço vectorial sobre si próprio.

4. O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, juntamente com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas no Capítulo 1, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. (Consequência da Proposição 1.2.16 e da Proposição 1.2.19).

5. Seja
$$\mathbb{R}_2[x] \;=\; \{ax^2 + bx + c \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}\,,$$
o conjunto dos polinómios na indeterminada x, com coeficientes reais e grau menor ou igual a 2.

   Para quaisquer $a, b, c, a', b', c', \alpha \in \mathbb{R}$, define-se
$$(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') \;=\; (a + a')\,x^2 + (b + b')\,x + (c + c')$$
e
$$\alpha(ax^2 + bx + c) \;=\; (\alpha\, a)\,x^2 + (\alpha\, b)\,x + (\alpha c)\,.$$
Pode demonstrar-se que $\mathbb{R}_2[x]$ juntamente com estas operações é espaço vectorial real. (Exercício.)

   Em geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de todos os polinómios na indeterminada x, com coeficientes reais e grau menor ou igual a n, juntamente com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio, é espaço vectorial real.

6. O conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos os polinómios na indeterminada x com coeficientes reais, juntamente com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio, é espaço vectorial real.

7. Analogamente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{C}_n[x]$ de todos os polinómios na indeterminada x, com coeficientes em $\mathbb{C}$ e grau menor ou igual a n, juntamente com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um elemento de $\mathbb{C}$ por um polinómio, é espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

8. O conjunto $\mathbb{C}[x]$ de todos os polinómios na indeterminada x, com coeficientes em $\mathbb{C}$, juntamente com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um elemento de $\mathbb{C}$ por um polinómio, é espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

9. O conjunto $\mathbb{C}$, juntamente com as operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de um número real por um número complexo, é espaço vectorial real.

Observação 3.2.3 Na definição de espaço vectorial estão envolvidas duas operações de adição, a adição em $\mathbb{K}$ e a adição em V, ambas com elemento neutro (elemento zero). Temos portanto dois *"zeros"em jogo, pelo que, sempre que é necessário distingui-los, usamos* $0_{\mathbb{K}}$ *para representar o elemento neutro para a operação* $+$ *definida em* $\mathbb{K}$ *e* 0_V *para representar o elemento neutro para a operação* $+$ *definida em* V*.*

Proposição 3.2.4 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e quaisquer $u, v \in V$, temos:*

1. $\alpha\, 0_V = 0_V$;
2. $0_{\mathbb{K}}\, v = 0_V$;
3. $(-\alpha)\, v = -\alpha\, v = \alpha\,(-v)$;
4. $\alpha\,(v-u) = \alpha\, v - \alpha\, u$;
5. $(\alpha-\beta)\, v = \alpha\, v - \beta\, v$;
6. $\alpha\, v = 0_V$ *se e só se* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $v = 0_V$.

Demonstração:

1. Como 0_V é o elemento neutro para a adição em V,

$$0_V + 0_V = 0_V,$$

logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha\,(0_V + 0_V) = \alpha\, 0_V,$$

donde, atendendo a E3),

$$\alpha\, 0_V + \alpha\, 0_V = \alpha\, 0_V.$$

Adicionando a ambos os membros da igualdade anterior o simétrico de $\alpha\, 0_V$, $-\alpha\, 0_V$, obtemos

$$-\alpha\, 0_V + (\alpha\, 0_V + \alpha\, 0_V) = \underbrace{-\alpha\, 0_V + \alpha\, 0_V}_{0_V}.$$

Atendendo a que a adição em V é associativa,

$$\underbrace{(-\alpha\, 0_V + \alpha\, 0_V)}_{0_V} + \alpha\, 0_V = 0_V,$$

logo
$$0_V + \alpha\, 0_V = 0_V$$
e, portanto,
$$\alpha\, 0_V = 0_V \,.$$

2. Deixa-se aos alunos como exercício.

3. Atendendo a E2) e à alínea 2),
$$(-\alpha)\, v + \alpha\, v = (-\alpha + \alpha)\, v = 0_{\mathbb{K}}\, v = 0_V \,,$$
logo, como $+$ é comutativa,
$$\alpha\, v + (-\alpha)\, v = (-\alpha)\, v + \alpha\, v = 0_V \,,$$
portanto
$$(-\alpha)\, v = -\alpha\, v \;.$$
Analogamente, atendendo a E3) e à alínea 1),
$$\alpha\,(-v) + \alpha\, v = \alpha\,(-v + v) = \alpha\, 0_V = 0_V \,,$$
logo, como $+$ é comutativa,
$$\alpha\, v + \alpha\,(-v) = \alpha\,(-v) + \alpha\, v = 0_V \,,$$
donde
$$\alpha\,(-v) = -\alpha\, v \;.$$

4. Recorde-se que, por notação,
$$v - u = v + (-u)\,.$$
Assim atendendo a E3) e à alínea 3),
$$\alpha\,(v-u) = \alpha\,(v + (-u)) = \alpha\, v + \alpha(-u) = \alpha\, v + (-\alpha\, u) = \alpha\, v - \alpha\, u\,.$$

5. Deixa-se aos alunos como exercício.

6. Admitamos que $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ e
$$\alpha\, v = 0_V \,.$$
Suponhamos que $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Podemos considerar o inverso de α em $\mathbb{K}$, α^{-1}, e temos
$$\alpha^{-1}\,(\alpha\, v) = \alpha^{-1}\, 0_V = 0_V \,,$$
donde, atendendo a E1) e a E4),
$$0_V = \alpha^{-1}\,(\alpha\, v) = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, v = 1_{\mathbb{K}}\, v = v \,,$$
logo $v = 0_V$.

Por outro lado, das alíneas 1) e 2) resulta que, se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $v = 0_V$, então $\alpha\, v = 0_V$.

$\square$

3.3 Subespaços vectoriais

Definição 3.3.1 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que F é **subespaço vectorial** de V, e escrevemos $F \leq V$, se as condições seguintes são satisfeitas:

S1) $F \subseteq V$;

S2) $0_V \in F$;

S3) Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$;

S4) Se $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in F$, então $\alpha\, v \in F$.

A condição S3) costuma descrever-se dizendo que "F é fechado para a adição". A condição S4) costuma descrever-se dizendo que "F é fechado para a multiplicação escalar".

Proposição 3.3.2 *Se V é espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e F é subespaço vectorial de V, então também F é espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração:

Se F é subespaço vectorial de V então, para quaisquer $u, v \in F$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que $u + v \in F$ e $\alpha\, u \in F$. Assim, em F está definida uma adição e está definida uma multiplicação escalar que a cada par de elementos α e v, sendo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in F$, associa o elemento $\alpha\, v$ de F.

Resta demonstrar que são satisfeitas as condições A1), A2), A3), A4), E1), E2), E3) e E4) da definição de espaço vectorial.

Como todos os elementos de F são elementos de V, as condições A1), A2), E1), E2), E3) e E4) são automaticamente satisfeitas pelos elementos de F.

A condição A3) é consequência de S2).

Para demonstrar A4) basta observar que, para todo o $v \in F$, $-v = (-1)\, v$, logo, por S4), $-v \in F$.

□

Proposição 3.3.3 *Se V é espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, então $\{0_V\}$ e V são subespaços vectoriais de V.*

Demonstração:

Tem-se:

S1) $\{0_V\} \subseteq V$;

S2) $0_V \in \{0_V\}$;

S3) Se $u, v \in \{0_V\}$ então $u = 0_V$ e $v = 0_V$, logo $u + v = 0_V + 0_V = 0_V \in \{0_V\}$;

S4) Se $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \{0_V\}$ então $v = 0_V$, logo $\alpha\, v = \alpha\, 0_V = 0_V \in \{0_V\}$;

logo $\{0_V\}$ é subespaço vectorial de V. Por outro lado,

S1) $V \subseteq V$;

S2) $0_V \in V$;

S3) Se $u, v \in V$ então, por definição de adição, $u + v \in V$;

S4) Se $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ então, por definição de multiplicação escalar, $\alpha\, v \in V$;

logo V é subespaço vectorial de V.

□

Exemplos 3.3.4 *1.* Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e o seu subconjunto

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0 \,\wedge\, x_3 = 0\}\,.$$

Vamos demonstrar que W é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$:

S1) Por definição de W, todos os elementos de W são elementos de $\mathbb{R}^3$, logo $W \subseteq \mathbb{R}^3$.

S2) Por definição de W, $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in W$.

S3) Se $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W$ então, por definição de W,

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad x_1 = 0 \,\wedge\, x_3 = 0 \,\wedge\, y_1 = 0 \,\wedge\, y_3 = 0.$$

Como $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3;$$

como $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$ e $y_3 = 0$,

$$x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0 \,\wedge\, x_3 + y_3 = 0 + 0 = 0\,,$$

logo

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, 0) \in W\,.$$

S4) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, x_3) \in W$ então, por definição de W,

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \wedge \quad x_1 = 0 \,\wedge\, x_3 = 0.$$

Como $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\alpha\,(x_1, x_2, x_3) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

e, como $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$,

$$\alpha\, x_1 = \alpha\, 0 = 0 \,\wedge\, \alpha\, x_3 = \alpha\, 0 = 0\,,$$

logo

$$\alpha\,(x_1, x_2, x_3) = (0, \alpha\, x_2, 0) \in W\,.$$

2. Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e o seu subconjunto

$$Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0 \,\vee\, x_3 = 0\}\,.$$

O subconjunto Z não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$: basta observar que a condição S3) da definição de subespaço vectorial não é satisfeita pois temos, por exemplo, $(0, 3, 2) \in Z$ e $(1, 1, 0) \in Z$, mas

$$(0, 3, 2) + (1, 1, 0) = (1, 4, 2) \notin Z\,.$$

Proposição 3.3.5 *Seja S um sistema homogéneo de m equações lineares em n incógnitas sobre $\mathbb{K}$. O conjunto das soluções de S é um subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração:

Seja A a matriz simples de S e seja F o conjunto das soluções de S. Então

$$F = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n : \;\; A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \}\,.$$

Temos:

S1) Por definição, as soluções do sistema S são elementos de $\mathbb{K}^n$, logo $F \subseteq \mathbb{K}^n$;

S2) Como S é homogéneo, $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ é solução de S, logo $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \ldots, 0) \in F$;

S3) Se $(b_1, \ldots, b_n)$ e $(c_1, \ldots, c_n)$ são elementos de F, então

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

logo

$$A \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{bmatrix} = A \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

portanto

$$(b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n) = (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \in F\,.$$

S4) Deixa-se aos alunos como exercício.

$\square$

Observação 3.3.6 Aplicando a proposição anterior podemos concluir, por exemplo, que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

- $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 = 0 \,\wedge\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,
- $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0 \,\wedge\, x_3 = 0\}$,
- $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0\}$,
- $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = 0\}$.

Proposição 3.3.7 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se F e G são subespaços vectoriais de V, então $F \cap G$ é subespaço vectorial de V.*

Demonstração:

Recorde-se que

$$F \cap G = \{x \,:\, x \in F \wedge x \in G\}.$$

S1) Sabe-se que $F \cap G \subseteq F$, mas como F é subespaço de V, $F \subseteq V$, logo $F \cap G \subseteq V$;

S2) Como F e G são subespaços de V, temos que $0_V \in F$ e $0_V \in G$ logo $0_V \in F \cap G$;

S3) Se $u, v \in F \cap G$ então $u, v \in F$ e $u, v \in G$, logo, como F e G são subespaços de V, $u + v \in F$ e $u + v \in G$, portanto $u + v \in F \cap G$;

S4) Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in F \cap G$ então $v \in F$ e $v \in G$, logo, como F e G são subespaços de V, $\alpha\, v \in F$ e $\alpha\, v \in G$, portanto $\alpha\, v \in F \cap G$.

$\square$

Observação 3.3.8 A união de dois subespaços vectoriais de V não é, em geral, subespaço vectorial de V. Por exemplo,

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0\}$$

e

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_3 = 0\}$$

são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ (Observação 3.3.6), mas

$$\begin{aligned} F \cup G &= \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, (x_1, x_2, x_3) \in F \,\vee\, (x_1, x_2, x_3) \in G\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 0 \,\vee\, x_3 = 0\} \end{aligned}$$

não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ (Exemplo 3.3.4 -2).

3.4 Combinações lineares

Definição 3.4.1 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. A uma sequência finita $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vectores de V damos o nome de **sistema de vectores de** V.

Exemplos 3.4.2

1. $((1,5,0)\,,\,(2,2,2))$ é um sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$.
2. $((1,0)\,,\,(4,2)\,,\,(5,6))$ é um sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$.
3. $((1,5,0))$ é um sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ (trata-se de um sistema com um único vector).
4. $(x+1\,,\,x^2+2x+3)$ é um sistema de vectores de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ é um sistema de vectores de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Definição 3.4.3 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $w, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V. Dizemos que w é **combinação linear** do sistema de vectores $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$w \;=\; \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\,.$$

Exemplo 3.4.4

1. O vector $(0,1,3) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear do sistema de vectores $((-1,0,1), (2,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ pois
$$(0,1,3) \;=\; 2\,(-1,0,1) \;+\; 1\,(2,1,1)\,.$$
2. O vector $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear do sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ $((-1,0,1), (2,1,1))$ pois
$$(0,0,0) \;=\; 0\,(-1,0,1) \;+\; 0\,(2,1,1))\,.$$

Observação 3.4.5 *Para qualquer sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vectores de V, o vector nulo de V, 0_V, é combinação linear de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pois*

$$0_V = 0_{\mathbb{K}}\, v_1 + 0_{\mathbb{K}}\, v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}\, v_n\,.$$

Proposição 3.4.6 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V.*

Se F é o conjunto de todas as combinações lineares de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, isto é, se

$$F \;=\; \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \;:\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\},$$

então F é subespaço vectorial de V.

Demonstração:

S1) Se $x \in F$ existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n .$$

Como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vectores de V e V é espaço vectorial sobre K ,

$$\alpha_1 v_1,\ \alpha_2 v_2, \ldots,\ \alpha_n v_n \in V,$$

portanto, usando novamente o facto de V ser espaço vectorial, podemos concluir que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in V.$$

Demonstrámos que todo o elemento de F pertence a V , logo $F \subseteq V$.

S2) Sabe-se que

$$0_V = 0_{\mathbb{K}} v_1 + 0_{\mathbb{K}} v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} v_n ,$$

logo $0_V \in F$.

S3) Suponhamos que $x, y \in F$. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

e

$$y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n .$$

Atendendo às propriedades dos espaços vectoriais,

$$\begin{aligned} x + y &= (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n , \end{aligned}$$

logo $x + y$ é combinação linear de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e, portanto, $x + y \in F$.

S4) Exercício.

$\square$

Definição 3.4.7 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de V . Ao subespaço

$$F = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \ :\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

chamamos **subespaço gerado por** $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Dizemos também que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ **gera** F ou que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ **é um sistema gerador de** F . Escrevemos

$$F = < v_1, v_2, \ldots, v_n > .$$

Observação 3.4.8 Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se $v \in V$,

$$< v >= \{\alpha\, v \,:\, \alpha \in \mathbb{K}\}\,.$$

Exemplo 3.4.9 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e os seus vectores $(2,0,0)$ e $(0,1,-1)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} < (2,0,0) > &= \{\alpha\,(2,0,0) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\,(2\alpha,0,0) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} < (2,0,0),(0,1,-1) > &= \{\alpha_1\,(2,0,0) + \alpha_2\,(0,1,-1) \,:\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\,(2\alpha_1,0,0) + \,(0,\alpha_2,-\alpha_2) \,:\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\,(2\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_2) \,:\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Convenção : Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Por convenção,

$$< \emptyset >= \{0_V\}\,.$$

Proposição 3.4.10 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1,\ldots,v_n \in V$. Então:*

1. *$v_1,\ldots,v_n \in < v_1,\ldots,v_n >$.*

2. *Se E é um subespaço de V e $v_1,\ldots,v_n \in E$, então $< v_1,\ldots,v_n > \subseteq E$.*

Demonstração:

1. Como
$$v_1 = 1\,v_1 + 0\,v_2 + \cdots + 0\,v_n\,,$$
tem-se que
$$v_1 \in < v_1,\ldots,v_n >\,.$$
Em geral, para todo o $i \in \{1,\ldots,n\}$,
$$v_i = 0\,v_1 + \cdots + 1\,v_i + \cdots + 0\,v_n\,,$$
logo
$$v_i \in < v_1,\ldots,v_n >\,.$$

2. Seja z um elemento arbitrário de $< v_1, \ldots, v_n >$. Por definição de $< v_1, \ldots, v_n >$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que
$$z = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \,.$$
Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_n \in E$ podemos concluir, atendendo a que $E \leq V$, que
$$\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n \in E$$
e portanto, atendendo novamente a que $E \leq V$,
$$z = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in E \,.$$

□

As propriedades de $< v_1, \ldots, v_n >$ demonstradas na Proposição 3.4.10 podem ser resumidas dizendo que $< v_1, \ldots, v_n >$ *é o menor subespaço de* V *que contém* $v_1, \ldots, v_n$.

Proposição 3.4.11 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$ e seja E um subespaço vectorial de V. Tem-se:*
$$E = < v_1, \ldots, v_n >$$
se e só se as condições seguintes são satisfeitas:

1. $v_1, \ldots, v_n \in E$;

2. Para qualquer $z \in E$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que
$$z = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \,.$$

Demonstração:

Exercício.

□

Proposição 3.4.12 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p \in V$. Tem-se:*

1. $< u_1, \ldots, u_n > = < v_1, \ldots, v_p >$ se e só se u_i é combinação linear de $(v_1, \ldots, v_p)$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, e v_j é combinação linear de $(u_1, \ldots, u_n)$, para todo o $j \in \{1, \ldots, p\}$;

2. Se u_1 é combinação linear de $(u_2, \ldots, u_n)$, então
$$< u_1, u_2, \ldots, u_n > = < u_2, \ldots, u_n >;$$
Em geral, se $i \in \{1, \ldots, n\}$ e u_i é combinação linear de $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ então,
$$< u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n > = < u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n >;$$

3. *Se* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *é uma permutação de* $\{1, \ldots, n\}$ *, então*

$$< u_1, \ldots, u_n > = < u_{\sigma_1}, \ldots, u_{\sigma_n} > \ .$$

Demonstração:

Exercício.

□

Definição 3.4.13 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que V é **finitamente gerado** ou **de dimensão finita** se existe $k \in \mathbb{N}$ e existem vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$ tais que

$$V \ = < v_1, \ldots, v_k > \ .$$

Exemplo 3.4.14

1. Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e os seus vectores $(1,0)$ e $(0,1)$. Temos:

$$\begin{aligned} < (1,0), (0,1) > \ &= \ \{\alpha_1 \, (1,0) + \alpha_2 \, (0,1) \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \ \{ \, (\alpha_1, \alpha_2) \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \ \mathbb{R}^2 \, , \end{aligned}$$

logo $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Tem-se:

$$\mathbb{R}^3 = < (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) > ,$$

logo $\mathbb{R}^3$ é finitamente gerado.

Em geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n = < (1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1) >$$

(exercício), portanto $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado.

3. O espaço vectorial real $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado pois, por exemplo,

$$M_{2\times3}(\mathbb{R}) = < \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} > \ .$$

4. O espaço vectorial real $\mathbb{R}_n[x]$ é finitamente gerado pois tem-se, por exemplo,

$$\mathbb{R}_n[x] \ = < 1, x, x^2, \ldots, x^n > \ .$$

5. O espaço vectorial real $\mathbb{R}[x]$ não é finitamente gerado (Aula Avançada).

3.5 Independência linear

Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Seja $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um sistema de vectores de V. Tem-se:

$$0_{\mathbb{K}}\, v_1 + 0_{\mathbb{K}}\, v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}\, v_n = 0_V.$$

Definição 3.5.1 Dizemos que o sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é **linearmente dependente** se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n = 0_V.$$

Dizemos que o sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é **linearmente independente** se não é linearmente dependente, isto é, se

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_n\, v_n = 0_V \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Observação 3.5.2 O sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é linearmente independente se a única forma de escrever o vector nulo de V como combinação linear do sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é com os coeficientes todos nulos.

Exemplos 3.5.3 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

1) Considere-se o sistema $((1,0,0),(0,1,1),(3,0,0))$. Temos, por exemplo,

$$\underbrace{3}_{\neq 0}(1,0,0) + 0\,(0,1,1) + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}(3,0,0) = (0,0,0)\,,$$

logo o sistema $((1,0,0),(0,1,1),(3,0,0))$ é linearmente dependente.

2) Analisemos se o sistema $((1,0,0),(0,4,4),(2,1,1))$ é linearmente dependente ou linearmente independente. Dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,4,4) + \alpha_3(2,1,1) = (0,0,0) &\iff (\alpha_1 + 2\alpha_3, 4\alpha_2 + \alpha_3, 4\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)\\
&\iff \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \ \wedge \ 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0\\ 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3\\ \alpha_2 = (-1/4)\,\alpha_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, tomando por exemplo $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = -1/4$, obtemos uma solução (não nula) do sistema de equações anterior. Logo

$$\underbrace{(-2)}_{\neq 0}(1,0,0) + \underbrace{(-1/4)}_{\neq 0}(0,4,4) + \underbrace{1}_{\neq 0}(2,1,1) = (0,0,0)\,,$$

o que permite concluir que o sistema de vectores $((1,0,0),(0,4,4),(2,1,1))$ é linearmente dependente.

3) Analisemos se o sistema $(\,(2,4,4)\,)$ é linearmente dependente ou linearmente independente. Dado $\alpha_1 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1(2,4,4)=(0,0,0) &\iff (2\alpha_1,4\alpha_1,4\alpha_1)=(0,0,0)\\ &\iff 2\alpha_1=0 \ \wedge \ 4\alpha_1=0 \ \wedge \ 4\alpha_1=0\\ &\iff \alpha_1=0\,.\end{aligned}$$

Logo o sistema $(\,(2,4,4)\,)$ é linearmente independente.

4) O sistema $(\,(0,0,0)\,)$ é linearmente dependente pois temos, por exemplo,

$$\underbrace{7}_{\neq 0}(0,0,0)=(0,0,0)\,.$$

Proposição 3.5.4 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

1. *O sistema (0_V) é linearmente dependente.*

2. *Se $w \in V$ e $w \neq 0_V$, o sistema (w) é linearmente independente.*

Demonstração:

1. Sabemos que
$$1_{\mathbb{K}}0_V=0_V\,,$$
logo, como $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, o sistema (0_V) é linearmente dependente.

2. Suponhamos que $w \in V$ e $w \neq 0_V$. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\alpha\, w = 0_V$, então, pela Proposição 3.2.4 (alínea 6), $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$. Logo o sistema (w) é linearmente independente.

□

Exemplos 3.5.5 Considere-se o sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$, $((1,0,0),(0,4,4),(2,1,1))$. Observámos, no Exemplo 3.5.3, que este sistema é linearmente dependente e que

$$(-2)\,(1,0,0)+(-1/4)\,(0,4,4)+\,1\,(2,1,1)=(0,0,0)\,.$$

A expressão anterior permite concluir que, por exemplo,

$$(1,0,0)\;=\;(-1/8)\,(0,4,4)+\,(1/2)\,(2,1,1)\,,$$

pelo que $(1,0,0)$ é combinação linear do sistema $((0,4,4),(2,1,1))$.

Proposição 3.5.6 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se $n \geq 2$ e $v_1, \ldots, v_n$ são vectores de V, então:*

O sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente <u>se e só se</u> algum dos seus vectores é combinação linear do sistema constituído pelos restantes (isto é, existe $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que v_t é combinação linear do sistema $(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n)$).

Demonstração:

Suponhamos que o sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente. Então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Considere-se $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_t \neq 0$. Temos

$$\alpha_t v_t = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{t-1} v_{t-1} - \alpha_{t+1} v_{t+1} - \cdots - \alpha_n v_n .$$

Como $\alpha_t \neq 0$, existe α_t^{-1} e

$$\alpha_t^{-1} (\alpha_t v_t) = \alpha_t^{-1} (-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{t-1} v_{t-1} - \alpha_{t+1} v_{t+1} - \cdots - \alpha_n v_n) ,$$

donde

$$v_t = (-\alpha_t^{-1} \alpha_1) v_1 + \cdots + (-\alpha_t^{-1} \alpha_{t-1}) v_{t-1} + (-\alpha_t^{-1} \alpha_{t+1}) v_{t+1} + \cdots + (-\alpha_t^{-1} \alpha_n) v_n ,$$

logo v_t é combinação linear do sistema $(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n)$.

Reciprocamente, seja $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que v_t é combinação linear do sistema $(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n)$. Então existem escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1} \in \mathbb{K}$, tais que

$$v_t = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{t-1} v_{t-1} + \beta_t v_{t+1} + \cdots + \beta_{n-1} v_n .$$

Assim

$$(-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_{t-1}) v_{t-1} + \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v_t + (-\beta_t) v_{t+1} + \cdots + (-\beta_{n-1}) v_n = 0_V ,$$

pelo que o sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente.

$\square$

Proposição 3.5.7 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $w, v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_p$ vectores de V. Tem-se:*

1. *Se o sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente, <u>então</u> também o sistema $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_p)$ é linearmente dependente.*

2. *Qualquer sistema que contenha o vector nulo é linearmente dependente.*

3. *Se* $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_p)$ *é linearmente independente,* *<u>então</u>* *também os sistemas* $(v_1, \ldots, v_n)$ *e* $(u_1, \ldots, u_p)$ *são linearmente independentes.*

4. *Se* $(v_1, \ldots, v_n)$ *é linearmente independente e* $(v_1, \ldots, v_n, w)$ *é linearmente dependente,* *<u>então</u>* w *é combinação linear de* $(v_1, \ldots, v_n)$*.*

5. *Para qualquer permutação* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *de* $\{1, \ldots, n\}$ *,*

   $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *é linearmente independente se e só se* $(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \ldots, v_{\sigma_n})$ *é linearmente independente.*

Demonstração:

Aula Teórica.

$\square$

Convenção: O sistema $\emptyset$ é linearmente independente.

3.6 Base e dimensão

Definição 3.6.1 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ de vectores de V é uma **base de** V se são satisfeitas as seguintes condições:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente independente;

2. $< v_1, \ldots, v_n >= V$.

Observação 3.6.2 Atendendo à Proposição 3.4.11 podemos afirmar que:

Um sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ *de vectores de* V *é uma base de* V *se e só se são satisfeitas as seguintes condições:*

1'. $(v_1, \ldots, v_n)$ *é um sistema linearmente independente;*

2'. Para qualquer $z \in V$ *, existem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$z = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \, .$$

Exemplo 3.6.3 Vamos verificar que o sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$:

1'. Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ e

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

então

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)\,,$$

logo $\alpha_1 = 0\,, \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Portanto, $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é um sistema linearmente independente;

2'. Seja (a_1, a_2, a_3) um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^3$. Então $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1);$$

atendendo à Observação 3.6.2, podemos concluir que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é base de $\mathbb{R}^3$. Esta base é designada **base canónica de $\mathbb{R}^3$**.

Proposição 3.6.4 *1. O sistema de vectores de $\mathbb{K}^n$*

$$((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1))$$

é uma base de $\mathbb{K}^n$. A esta base chamamos **base canónica de $\mathbb{K}^n$**.

2. O sistema de vectores de $\mathbb{K}_n[x]$

$$(1, x, x^2, \ldots, x^n)$$

é uma base de $\mathbb{K}_n[x]$.

3. O sistema de vectores de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstração:

Exercício.

$\square$

Observação 3.6.5 Tem-se que

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ é base de } V \text{ se e só se } (v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \ldots, v_{\sigma_n}) \text{ é base de } V,$$

para qualquer permutação $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de $\{1, \ldots, n\}$.

Observação 3.6.6 Convencionámos anteriormente que:

1. $\emptyset$ é um sistema linearmente independente,
2. $< \emptyset >= \{0\}$,

logo $\emptyset$ *é uma base de* $\{0\}$.

Proposição 3.6.7 *Seja* V *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Se* $(v_1, \ldots, v_n)$ *é uma base de* V, *então, para qualquer vector* $w \in V$, *existem escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, *tais que*

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Mais, os escalares que figuram na igualdade anterior estão univocamente determinados.

Demonstração:

Suponhamos que $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V. Seja w um elemento arbitrário de V. Pela Observação 3.6.2, sabemos que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tais que

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Para demonstrar que os escalares que figuram na igualdade anterior estão univocamente determinados, vamos supor que também $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ e

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Temos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \ = \ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

logo

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n \ = 0_V,$$

portanto, como $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente independente (porque é uma base), concluímos que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0_{\mathbb{K}} \ \wedge \ \alpha_2 - \beta_2 = 0_{\mathbb{K}} \ \wedge \ \cdots \wedge \ \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{K}},$$

donde

$$\alpha_1 = \beta_1 \ \wedge \ \alpha_2 = \beta_2 \ \wedge \ \cdots \wedge \ \alpha_n = \beta_n.$$

$\square$

Definição 3.6.8 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, seja $w \in V$ e seja $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Aos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tais que

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

chamamos **componentes** ou **coordenadas** do vector w em relação à base $(v_1, \ldots, v_n)$. À matriz do tipo $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

chamamos **matriz das componentes** ou **matriz das coordenadas** do vector w em relação à base $(v_1, \ldots, v_n)$.

Exemplo 3.6.9 Considere-se as bases do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$,

$$\alpha = ((1,0),(0,1)) \quad , \quad \beta = ((1,2),(2,1))$$

e considere-se o elemento de $\mathbb{R}^2$, $(8,7)$.

Tem-se

$$(8,7) \;=\; 8\;(1,0) + 7\,(0,1),$$

logo a matriz das componentes de $(8,7)$ em relação à base α é $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Como

$$(8,7) \;=\; 2\,(1,2) \;+\; 3\,(2,1)\,,$$

a matriz das componentes de $(8,7)$ em relação à base β é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Proposição 3.6.10 *Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. Se $V =< v_1, \ldots, v_n >$, então o sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ contém uma base de V.*

Demonstração:

Suponhamos que $V =< v_1, \ldots, v_n >$.

Se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente independente, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V.

Se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente dependente, então, como $V \neq \{0\}$, temos $n \geq 2$ logo, pela Proposição 3.5.6, existe $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que v_t é combinação linear do sistema $(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n)$. Pela Proposição 3.4.12 (alínea 3),

$$V =< v_1, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n > \;.$$

Agora repetimos o processo para o sistema com $n-1$ vectores $(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_n)$. Este processo não pode continuar indefinidamente, pois $V \neq \{0\}$, logo, em determinada altura, o sistema de vectores que obtemos é linearmente independente e, portanto, uma base de V.

$\square$

Proposição 3.6.11 *Todo o espaço vectorial finitamente gerado admite uma base.*

Demonstração:

Consequência da proposição anterior.

□

Proposição 3.6.12 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $w, v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. Suponhamos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n .$$

Se $\alpha_i \neq 0$, para certo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$< v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n > \ .$$

Demonstração:

Exercício (Sugestão: Proposição 3.4.12 (alínea 1)).

□

Exemplo 3.6.13 Considere-se os vectores $(3, 0, 4), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(3, 0, 4) = \underbrace{3}_{\neq 0}(1, 0, 0) + 0\,(0, 1, 0) + \underbrace{4}_{\neq 0}(0, 0, 1) ,$$

logo, atendendo à proposição anterior,

$$< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) > = < (3, 0, 4), (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$$

e

$$< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) > = < (1, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 4) > \ .$$

No entanto,

$$< (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) > \neq < (1, 0, 0), (3, 0, 4), (0, 0, 1) > \ .$$

Teorema 3.6.14 *(***Teorema de Steinitz***) Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, \ldots, v_p$, $u_1, \ldots, u_n$ vectores de V. Se*

$$(v_1, \ldots, v_p) \text{ é um sistema linearmente independente}$$

e

$$v_1, \ldots, v_p \ \in < u_1, \ldots, u_n >$$

então

1. *$p \leq n$;*

2. *É possível substituir p dos vectores $u_1, \ldots, u_n$ pelos vectores $v_1, \ldots, v_p$ de modo a obter um sistema gerador de $< u_1, \ldots, u_n >$.*

$\square$

Exercício 3.6.15 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e o seu sistema de vectores $((1,1,0,1),(2,2,1,1))$. Vamos determinar um sistema gerador de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $(1,1,0,1)$ e $(2,2,1,1)$.

Considere-se a base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))\,.$$

Sabe-se que

$$\mathbb{R}^4 =< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) > \ .$$

Como

$$(1,1,0,1) = \underbrace{1}_{\neq 0}(1,0,0,0) + 1\,(0,1,0,0) + 0\,(0,0,1,0) + 1\,(0,0,0,1))\,,$$

podemos, aplicando a Proposição 3.6.12, concluir que

$$\mathbb{R}^4 =< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >=< (1,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) > \ .$$

Agora,

$$(2,2,1,1) = 2\,(1,1,0,1) + 0\,(0,1,0,0) + \underbrace{1}_{\neq 0}(0,0,1,0) + (-1)\,(0,0,0,1)\,,$$

logo, aplicando novamente a Proposição 3.6.12,

$$< (1,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >=< (1,1,0,1),(0,1,0,0),(2,2,1,1),(0,0,0,1) > \ .$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^4 =< (1,1,0,1),(0,1,0,0),(2,2,1,1),(0,0,0,1) > \ .$$

Logo $((1,1,0,1),(0,1,0,0),(2,2,1,1),(0,0,0,1))$ é um sistema gerador de $\mathbb{R}^4$ que inclui os vectores $(1,1,0,1)$ e $(2,2,1,1)$.

Proposição 3.6.16 *Se V é um espaço vectorial finitamente gerado, então quaisquer duas bases de V têm o mesmo número de vectores.*

Demonstração:

Se $V = \{0\}$, então $\emptyset$ é a única base de V.

Admitamos que $V \neq \{0\}$. Suponhamos que $(v_1, \ldots, v_p)$ e $(u_1, \ldots, u_n)$ são bases de V .

Por definição de base, sabemos que $V = < v_1, \ldots, v_p > = < u_1, \ldots, u_n >$ e que $(v_1, \ldots, v_p)$ e $(u_1, \ldots, u_n)$ são sistemas linearmente independentes.

Como $(v_1, \ldots, v_p)$ é um sistema linearmente independente e

$$v_1, \ldots, v_p \ \in \ V = < u_1, \ldots, u_n > ,$$

temos, pelo Teorema de Steinitz,

$$p \leq n .$$

Analogamente, $(u_1, \ldots, u_n)$ é um sistema linearmente independente e

$$u_1, \ldots, u_n \ \in \ V = < v_1, \ldots, v_p > ,$$

logo, pelo Teorema de Steinitz,

$$n \leq p .$$

Consequentemente,

$$p \, = \, n .$$

□

Definição 3.6.17 Seja V um espaço vectorial finitamente gerado. Chamamos **dimensão de** V ao número de vectores de uma (qualquer) das suas bases. Denotamos a dimensão de V por $\mathbf{dim(V)}$.

Observação 3.6.18 Atendendo à Proposição 3.6.4,

$$dim(\mathbb{R}^2) = 2 , \ dim(\mathbb{R}^3) = 3 , \ldots , \ dim\,(\mathbb{R}^n) = n .$$

Em geral, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$dim\,(\mathbb{K}^n) = n .$$

Tem-se ainda, pela Proposição 3.6.4, que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$dim\,(\,\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$$

e, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$dim\,(\,M_{m\times n}(\mathbb{K})) = m \times n .$$

Pela Observação 3.6.6,

$$dim\,(\{0\}) \, = \, 0 .$$

Proposição 3.6.19 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de* **dimensão n**. *Sejam $v_1, \ldots, v_r$ vectores de V. Tem-se:*

1. *Se $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente, <u>então</u> $r \leq n$;*

2. *Se $r > n$, <u>então</u> $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente dependente.*

3. *Se $V =< v_1, \ldots, v_r >$, <u>então</u> $r \geq n$.*

4. *Se $r < n$, <u>então</u> $< v_1, \ldots, v_r > \neq V$.*

Demonstração:

Por hipótese, $dim\,(V) = n$. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V.

1. Se $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente, então, como $v_1, \ldots, v_r \in V =< e_1, \ldots, e_n >$, temos, pelo Teorema de Steinitz, $r \leq n$;

2. Consequência da alínea anterior;

3. Suponhamos que $V =< v_1, \ldots, v_r >$. Então

$$e_1, \ldots, e_n \in < v_1, \ldots, v_r >,$$

logo, como $(e_1, \ldots, e_n)$ é um sistema linearmente independente, sabemos, pelo Teorema de Steinitz, que $n \leq r$;

4. Consequência da alínea anterior.

□

Exemplo 3.6.20 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Sabemos que $dim\,(\mathbb{R}^3) = 3$. Assim, pela proposição anterior:

- Se $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^3$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente, <u>então</u> $r \leq 3$;
- O sistema $((1,2,2), (1,0,3), (0,2,5), (0,0,1))$ é linearmente dependente;
- Se $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^3$ e $< v_1, \ldots, v_r > = \mathbb{R}^3$, <u>então</u> $r \geq 3$;
- $< (1,0,1), (1,2,5) > \neq \mathbb{R}^3$;

Proposição 3.6.21 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de* **dimensão n**. *Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. As afirmações seguintes são <u>equivalentes</u>:*

1. *$(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V;*
2. *$(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente independente;*
3. *$< v_1, \ldots, v_n > = V$.*

Demonstração:

Para demonstrar o resultado basta provar que $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 2$:

Imediato por definição de base.

$2 \Longrightarrow 3$:

Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V. Por definição de base, $V =< e_1, \ldots, e_n >$.

Suponhamos que $(v_1, \ldots, v_n)$ é um sistema linearmente independente; como $v_1, \ldots, v_n \in V =< e_1, \ldots, e_n >$, concluímos, pelo Teorema de Steinitz, que é possível substituir n dos vectores $e_1, \ldots, e_n$ por $v_1, \ldots, v_n$ de modo a obter um sistema gerador de $< e_1, \ldots, e_n >$. Logo $< v_1, \ldots, v_n >=< e_1, \ldots, e_n >= V$.

$3 \Longrightarrow 1$:

Suponhamos que $V =< v_1, \ldots, v_n >$. Pela Proposição 3.6.10, o sistema $(v_1, \ldots, v_n)$ contém uma base de V. Como $dim\,(V) = n$, todas as bases de V têm n vectores, logo $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V.

$\square$

Exercício 3.6.22 Mostre que $((1,0,2),(1,0,3),(0,2,5))$ é uma base do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

Resolução: Vamos demonstrar que o sistema $((1,0,2),(1,0,3),(0,2,5))$ é linearmente independente. Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ e

$$\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(1,0,3) + \alpha_3(0,2,5) = (0,0,0)\,,$$

então

$$(\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0,0,0)\,,$$

logo

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \;\;\wedge\;\; 2\alpha_3 = 0 \;\;\wedge\;\; 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0,$$

o que implica

$$\alpha_1 = 0 \;\;\wedge\;\; \alpha_2 = 0 \;\;\wedge\;\; \alpha_3 = 0\,.$$

Portanto, o sistema $((1,0,2),(1,0,3),(0,2,5))$ é linearmente independente. Como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e $((1,0,2),(1,0,3),(0,2,5))$ é um sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ constituído por 3 vectores podemos, aplicando a proposição anterior, deduzir que $((1,0,2),(1,0,3),(0,2,5))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.6.23 *(* **Teorema do Completamento***) Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão* $\mathbf{n}$ *. Se $(v_1, \ldots, v_r)$ é um sistema de vectores de V linearmente independente e $r < n$, então existem $n - r$ vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tais que*

$$(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$$

é uma base de V.

Demonstração:

Por hipótese, $dim\,(V) = n$; seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V. Admitamos que $(v_1, \ldots, v_r)$ é um sistema de vectores de V linearmente independente. Como

$$v_1, \ldots, v_r \in V \ =< e_1, \ldots, e_n >,$$

sabemos, pelo Teorema de Steinitz, que é possível substituir r dos vectores $e_1, \ldots, e_n$ por $v_1, \ldots, v_r$ de modo a obter um sistema gerador de $V \ =< e_1, \ldots, e_n >$. Isto é, existem $i_1, \ldots, i_{n-r} \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$V =< v_1, \ldots, v_r, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-r}} > .$$

Como $dim\,(V) = n$, $V \ =< v_1, \ldots, v_r, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-r}} >$ e o sistema $(v_1, \ldots, v_r, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-r}})$ é constituído por n vectores de V, podemos, atendendo à Proposição 3.6.21, concluir que $(v_1, \ldots, v_r, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-r}})$ é base de V.

□

Proposição 3.6.24 *Todo o subespaço vectorial de um espaço vectorial finitamente gerado é finitamente gerado.*

Demonstração:
Aula Avançada.

□

Observação 3.6.25 Seja V um espaço vectorial finitamente gerado. Se F é um subespaço vectorial de V , sabemos, pela Proposição 3.3.2, que F é um espaço vectorial e, pela proposição anterior, que F é finitamente gerado, logo, atendendo à Proposição 3.6.11, F admite uma base e podemos considerar a dimensão de F .

Proposição 3.6.26 *Seja V um espaço vectorial finitamente gerado e seja F um subespaço vectorial de V. Então*

1. *$dim\,F \leq dim\,V$;*

2. *Se $dim\,F = dim\,V$, então $F = V$.*

Demonstração:

Aula Teórica.

□

Definição 3.6.27 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\alpha = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ bases de V. À matriz de ordem n cuja coluna j é a matriz das componentes de v_j em relação à base $(e_1, \ldots, e_n)$ chamamos **matriz de mudança da base** α para a base β e denotamos $M(\alpha, \beta)$.

Proposição 3.6.28 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, sejam $\alpha = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ bases de V e seja $P = M(\alpha, \beta)$ a matriz de mudança da base α para a base β. Seja $w \in V$. Se B é a matriz das componentes de w em relação à base α e*

$$P\,B \,=\, C,$$

então C é a matriz das componentes de w em relação à base β.

Demonstração:

Seja $P = [p_{ij}] = M(\alpha, \beta)$ e admitamos que $PB = C$, sendo $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ a matriz das componentes de w em relação à base α e $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. Como $PB = C$,

$$c_i \,=\, \sum_{t=1}^{n} p_{it}\, b_t, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Por definição de P, tem-se

$$v_j \,=\, p_{1j}\, e_1 + \cdots + p_{nj}\, e_n \,=\, \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Assim, atendendo a que B é a matriz das componentes de w em relação à base $(v_1, \ldots, v_n)$,

$$w \,=\sum_{t=1}^{n} b_t\, v_t \,=\sum_{t=1}^{n} b_t\,(\sum_{i=1}^{n} p_{it}\, e_i) \,=\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_t\, p_{it}\, e_i \,=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} p_{it} b_t\, e_i \,=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{t=1}^{n} p_{it} b_t)\, e_i \,=\sum_{i=1}^{n} c_i\; e_i\,,$$

logo C é a matriz das componentes de w em relação à base $(e_1, \ldots, e_n)$.

□

Proposição 3.6.29 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam α e β bases de V. Então:*

1. *$M(\alpha, \beta)$ é invertível;*
2. *$M(\alpha, \beta)^{-1} = M(\beta, \alpha)$.*

Demonstração:
Exercício.

□

Exemplo 3.6.30 Considere-se as bases do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, $\alpha = ((1,0),(0,1))$ e $\beta = ((1,2),(1,1))$. Como

$$(1,0) \;=\; (-1)\,(1,2) \;+\; (2)\,(1,1)$$

e

$$(0,1) \;=\; 1\,(1,2) \;+\; (-1)\,(1,1)\,,$$

a matriz de mudança da base α para a base β é

$$P \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, atendendo a que

$$(1,2) \;=\; 1\;(1,0) + \;2\,(0,1)$$

e

$$(1,1) \;=\; 1\;(1,0) + \;1\,(0,1),$$

a matriz de mudança da base β para a base α é

$$Q \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode verificar-se facilmente que $P = Q^{-1}$.

Considere-se o elemento de $\mathbb{R}^2$, $w = (8,7)$. A matriz das componentes de $(8,7)$ em relação à base α é $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ e a matriz das componentes de $(8,7)$ em relação à base β é $\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$. De facto,

$$P \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

3.7 Espaço das linhas, espaço das colunas e espaço nulo de uma matriz

Nesta secção estudamos três subespaços vectoriais associados a cada matriz.

Definição 3.7.1 Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\,.$$

Chamamos **espaço das linhas de** A, e representamos por $L(A)$, ao subespaço de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas linhas de A (consideradas como vectores de $\mathbb{K}^n$), i. e.,

$$L(A) = < (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) > \ .$$

Chamamos **espaço das colunas de** A, e representamos por $C(A)$, ao subespaço de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas colunas de A (consideradas como vectores de $\mathbb{K}^m$), i. e.,

$$C(A) = < (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) > \ .$$

Exemplo 3.7.2 Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R}) .$$

Temos

$$L(A) = < (2,1,0,-1,3), (0,1,0,-1,2), (4,1,1,-2,0) >$$

e

$$C(A) = < (2,0,4), (1,1,1), (0,0,1), (-1,-1,-2), (3,2,0) > \ .$$

Proposição 3.7.3 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Temos:*

1. *Se B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, então*
$$L(A) = L(B) .$$

2. *Se B pode ser obtida a partir de A, efectuando um número finito de transformações elementares nas colunas, então*
$$C(A) = C(B) .$$

Demonstração:

Consequência das Proposições 3.4.12 e 3.6.12.

□

Lema 3.7.4 *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \ \text{e} \ Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) .$$

Tem-se:

$$A\,Z \;=\; A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = z_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + z_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

isto é, sendo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *as colunas de* A,

$$A\,Z \;=\; z_1\,C_1 \;+\; z_2\,C_2 \;+\cdots+\; z_n\,C_n\,.$$

Demonstração:
Exercício.

□

Observação 3.7.5 *Se* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *são as colunas de* A, *então:*

1. *Para todo o* $Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, *o produto* $A\,Z$ *é combinação linear de* $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

2. *O sistema de equações lineares*

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B$$

   pode ser representado por

$$x_1\,C_1 \;+\cdots+\; x_n\,C_n \;=\; B.$$

Proposição 3.7.6 *Se* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, *então*

o sistema $A\,X = B$ *é possível* <u>*se e só se*</u> $B \in C\,(A)$.

Demonstração:
Exercício.

□

Proposição 3.7.7 *Se* $R \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é uma matriz* <u>*em forma de escada*</u>*, então:*

1. *O sistema formado pelas linhas de* R *não nulas constitui uma base do espaço das linhas de* R, $L(R)$.

2. *O sistema formado pelas colunas de* R *que contêm os pivots constitui uma base do espaço das colunas de* R, $C(R)$.

Demonstração:

Exercício.

□

Proposição 3.7.8 *Sejam $A, R \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se R pode ser obtida de A efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, então:*

1. *Um sistema formado por colunas de A é linearmente independente se e só se o sistema formado pelas colunas de R correspondentes é linearmente independente.*

2. *Um sistema formado por colunas de A é base de $C(A)$ se e só se o sistema formado pelas colunas de R correspondentes é base de $C(R)$.*

Demonstração:

Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$ as colunas de A e sejam $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ as colunas de R.

Como R pode ser obtida de A efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, sabemos, pela Proposição 1.5.5, que os sistemas $AX = 0$ e $RX = 0$ são equivalentes, isto é, têm as mesmas soluções.

Logo, pela Observação 3.7.5, para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = 0$$

se e só se

$$\alpha_1 C'_1 + \alpha_2 C'_2 + \cdots + \alpha_n C'_n = 0.$$

Portanto as "dependências" que existem entre as colunas de A são exactamente as mesmas que as que existem entre as colunas de R. Este facto permite concluir 1) e 2).

□

Proposição 3.7.9 *Sejam $A, R \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se R é uma matriz em forma de escada que pode ser obtida a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares nas linhas, então:*

1. *O sistema formado pelas linhas de R não nulas constitui uma base do espaço das linhas de A, $L(A)$.*

2. *O sistema formado pelas colunas de A correspondentes às colunas de R que contêm os pivots, constitui uma base do espaço das colunas de A, $C(A)$.*

Demonstração:

1. Consequência da Proposição 3.7.3 e da Proposição 3.7.7 .
2. Consequência da Proposição 3.7.8 e da Proposição 3.7.7 .

□

Exemplo 3.7.10 Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Efectuando transformações elementares nas linhas de A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,,$$

sendo R uma matriz em forma de escada com duas linhas não nulas, logo $r(A) = 2$.

Pela Proposição 3.7.9,

$$((2, 2, 1, 0, 3), (0, 1, 1, 1, 0))$$

é uma base do espaço das linhas de A e

$$((2, 0, -2, 4), (2, 1, -1, 5))$$

é uma base do espaço das colunas de A.

Note-se que

$$L\,(A) = L\,(R)\,,$$

(consequência da Proposição 3.7.3) no entanto,

$$C(A) \neq C(R)\,,$$

pois $C(R) = < (2, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0) >$, logo qualquer elemento de $C(R)$ tem as duas últimas coordenadas nulas.

Corolário 3.7.11 *Se* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, *tem-se*

$$dim\,(\,L\,(A)) \;=\; r\,(A) \;=\; dim\,(\,C\,(A))\,.$$

Demonstração:
Exercício.

□

Corolário 3.7.12 *Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se*

$$r\,(A) \;=\; r\,(A^T)\,.$$

Demonstração:

Como as linhas de A são as colunas de A^T, tem-se que $L\,(A) \;=\; C(A^T)$, logo,

$$dim\,(\,L\,(A)) \;=\; dim\,(\,C(A^T))\,,$$

portanto, pela proposição anterior,

$$r\,(A) \;=\; dim\,(\,L\,(A)) \;=\; dim\,(\,C(A^T)) \;=\; r(A^T)\,.$$

□

Corolário 3.7.13 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se B pode ser obtida de A efectuando um número finito de transformações elementares (nas linhas ou nas colunas), então*

$$r\,(A) = r\,(B).$$

Demonstração:

Consequência da Proposição 3.7.3 e do Corolário 3.7.11.

□

Os resultados anteriores podem ser aplicados na determinação da dimensão e de uma base de um subespaço de $\mathbb{K}^n$, a partir de um sistema de geradores:

Exemplo 3.7.14 Consideremos o espaço vectorial real $\mathbb{R}^5$ e o seu subespaço

$$F \;=<(2,2,1,0,3),(0,1,1,1,0),(-2,-1,0,1,-3),(4,5,3,1,6)>.$$

Vamos determinar a dimensão e uma base de F.

Considere-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que $L\,(A) = F$, logo $dim(F) = dim\,(L\,(A)) = r(A)$.

Efectuando transformações elementares nas linhas de A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,,$$

sendo R uma matriz em forma de escada com duas linhas não nulas, logo $r(A) = 2$ e, portanto, $dim(F) = 2$.

Pela Proposição 3.7.9,

$$((2,2,1,0,3),(0,1,1,1,0))$$

é uma base de $L(A)$, logo é uma base de F.

Definição 3.7.15 Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **espaço nulo** de A ao conjunto das soluções do sistema $A\,X = 0$. Denotamos o espaço nulo de A por $N(A)$. (Recorde-se que, pela Proposição 3.3.5, o conjunto das soluções do sistema $A\,X = 0$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$.)

Exemplo 3.7.16 Vamos determinar uma base para o espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})\,.$$

Efectuando transformações elementares nas linhas de A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o espaço nulo de A é o conjunto das soluções do sistema, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\,x_3 + x_4 - \frac{3}{2}\,x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
N(A) &= \{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, \alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 - \frac{3}{2}\alpha_5 \ \text{ e } \alpha_2 = -\alpha_3 - \alpha_4 \} \\
&= \{ \, (\frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 - \frac{3}{2}\alpha_5 \,,\, -\alpha_3 - \alpha_4 \,,\, \alpha_3, \,\alpha_4 \,,\, \alpha_5) \,:\, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ \, (\frac{1}{2}\alpha_3 \,,\, -\alpha_3 \,,\, \alpha_3, 0 \,,\, 0) + (\alpha_4 \,,\, -\alpha_4 \,,\, 0, \alpha_4 \,,\, 0) + (-\frac{3}{2}\alpha_5 \,,\, 0 \,,\, 0,\, 0 \,,\, \alpha_5) \,:\, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ \alpha_3 \,(\frac{1}{2} \,,\, -1 \,,\, 1, 0 \,,\, 0) + \alpha_4 \,(1 \,,\, -1 \,,\, 0, 1 \,,\, 0) + \alpha_5 \,(-\frac{3}{2} \,,\, 0 \,,\, 0,\, 0 \,,\, 1) \,:\, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \} \\
&= < (\frac{1}{2} \,,\, -1 \,,\, 1, 0 \,,\, 0) \,,\, (1 \,,\, -1 \,,\, 0, 1 \,,\, 0) \,,\, (-\frac{3}{2} \,,\, 0 \,,\, 0,\, 0 \,,\, 1) >
\end{aligned}$$

.

Como $((\frac{1}{2}\,,\, -1\,,\, 1, 0\,,\, 0)\,,\ (1\,,\, -1\,,\, 0, 1\,,\, 0)\,,\, (-\frac{3}{2}\,,\, 0\,,\, 0,\, 0\,,\, 1))$ é um sistema linearmente independente (exercício), concluímos que é uma base de $N(A)$.

Observe-se que os vectores da base anterior podem ser obtidos dando o valor 1 a uma das incógnitas livres, 0 às restantes e resolvendo o sistema resultante. A dimensão de $N(A)$ é o número de incógnitas livres, ou seja, (nº de colunas de A) $- r(A)$.

Proposição 3.7.17 *Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, a dimensão do espaço nulo de A é $n - r(A)$.*

Demonstração:
Exercício.

□

Corolário 3.7.18 *Seja S um sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas sobre $\mathbb{K}$ e seja A a matriz simples de S. O conjunto das soluções de S é um subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ com dimensão*

$$n - r(A)\,,$$

isto é, a dimensão do espaço das soluções de um sistema homogéneo é o grau de indeterminação desse sistema.

Demonstração:

Seja S um sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas sobre $\mathbb{K}$ e seja A a matriz simples de S. Pela Proposição 3.3.5, o conjunto das soluções de S é um subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ e, pela proposição anterior, a sua dimensão é $n - r(A)$.

□

Observação 3.7.19 Seja S um sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas sobre $\mathbb{K}$ e seja A a matriz simples de S. Se S é determinado, $n = r(A)$, logo, pelo corolário anterior, a dimensão do espaço das soluções desse sistema é 0. De facto, como S é determinado, o conjunto das soluções de S é $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ que tem dimensão 0.

Corolário 3.7.20 *Sejam* $v_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, v_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^n$ *e seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

O sistema $(v_1, \ldots, v_m)$ *é linearmente independente se e só se* $r(A) = m$.

Demonstração:
Consequência do Corolário 3.7.11 e da Proposição 3.6.21 .

3.8 Soma e soma directa de subespaços vectoriais

Observação 3.8.1 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e suponhamos que F e G são subespaços vectoriais de V. Se $x \in F$ e $y \in G$, então $x, y \in V$, logo $x + y$ está definido e é um elemento de V.

Definição 3.8.2 Sejam F e G subespaços vectoriais de um espaço vectorial V. Chamamos **soma** de F e G ao subconjunto de V

$$\{x + y \,:\, x \in F \wedge y \in G\}.$$

Representamos este subconjunto de V por $F + G$.

Proposição 3.8.3 *Seja V um espaço vectorial. Se F e G são subespaços vectoriais de V, então também $F + G$ é subespaço vectorial de V.*

Demonstração:

Por definição,

$$F + G = \{x + y \,:\, x \in F \wedge y \in G\}.$$

S1) Resulta imediatamente da definição: se $x \in F$ e $y \in G$, então $x, y \in V$, logo $x + y \in V$; portanto $F + G \subseteq V$.

S2) Como F e G são subespaços vectoriais de V, temos que $0_V \in F$ e $0_V \in G$ logo $0_V + 0_V = 0_V \in F + G$.

S3) Suponhamos que $u, v \in F + G$; por definição de $F + G$ existem $x_1, x_2 \in F$ e $y_1, y_2 \in G$ tais que

$$u = x_1 + y_1 \quad \wedge \quad v = x_2 + y_2 \,.$$

Atendendo às condições A1) e A2) da definição de espaço vectorial,

$$u + v = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,.$$

Como $x_1, x_2 \in F$ e $F \leq V$ sabemos que $x_1 + x_2 \in F$; analogamente, como $y_1, y_2 \in G$ e $G \leq V$, $y_1 + y_2 \in G$. Assim,

$$u + v = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in F} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in G} \ \in F + G\,.$$

S4) Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in F + G$. Então existem $x \in F$ e $y \in G$ tais que

$$v = x + y\,,$$

logo, atendendo à condição E3) da definição de espaço vectorial,

$$\alpha v = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y\,.$$

Como $x \in F$ e $F \leq V$ sabemos que $\alpha x \in F$; analogamente, como $y \in G$ e $G \leq V$, $\alpha y \in G$. Assim,

$$\alpha v = \underbrace{\alpha x}_{\in F} + \underbrace{\alpha y}_{\in G} \ \in F + G\,.$$

□

Proposição 3.8.4 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de V . Tem-se:*

1. $F + G = G + F$;
2. $F \subseteq F + G$ *e* $G \subseteq F + G$;
3. $F + \{0_V\} = F$ *e* $\{0_V\} + G = G$.

Demonstração:

1. Como a adição em V é comutativa (A1),

$$F + G = \{x + y \,:\, x \in F \wedge y \in G\} = \{y + x \,:\, y \in G \wedge x \in F\} = G + F\,.$$

2. Para qualquer $x \in F$, como $0_V \in G$,

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_V}_{\in G} \in F + G,$$

logo $F \subseteq F + G$. Analogamente, para qualquer $y \in G$, como $0_V \in F$,

$$y = \underbrace{0_V}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G} \in F + G,$$

logo $G \subseteq F + G$.

3. $F + \{0_V\} = \{x + y \,:\, x \in F \wedge y \in \{0_V\}\} = \{x + 0_V \,:\, x \in F\} = \{x \,:\, x \in F\} = F$

e

$\{0_V\} + G = \{x + y \,:\, x \in \{0_V\} \wedge y \in G\} = \{0_V + y \,:\, y \in G\} = \{y \,:\, y \in G\} = G$.

□

Proposição 3.8.5 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p \in V$,*

$$< u_1, \ldots, u_n > + < v_1, \ldots, v_p > = < u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p > .$$

Demonstração:
(Aula Teórica.)

□

Teorema 3.8.6 *(**Teorema das dimensões**) Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e sejam F e G subespaços vectoriais de V. Tem-se:*

$$dim\,(F + G) + dim\,(F \cap G) = dim\,(F) + dim\,(G).$$

Demonstração:
(Aula Avançada.)

□

Definição 3.8.7 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de V. Dizemos que V é **soma directa** de F e G se as condições seguintes são satisfeitas:

D1) $V = F + G$;

D2) $F \cap G = \{0_V\}$.

Se V é soma directa de F e G, escrevemos $V = F \oplus G$ e dizemos que:

- F é um **suplementar de** G em V,
- G é um **suplementar de** F em V,
- F e G são **suplementares** em V.

Observação 3.8.8 Um subespaço vectorial pode ter mais do que um suplementar:

Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e os seus subespaços vectoriais

$$G_1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_1 = 0\},$$
$$G_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_1 = a_2\},$$
$$G_3 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_2 = 0\}.$$

Vamos verificar que $\mathbb{R}^2 = G_1 \oplus G_2$:

D1) Como $G_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ e $G_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $G_1 + G_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, para qualquer elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \underbrace{(0, y - x)}_{\in G_1} + \underbrace{(x, x)}_{\in G_2} \in G_1 + G_2 ,$$

logo $\mathbb{R}^2 \subseteq G_1 + G_2$.

Concluímos que

$$G_1 + G_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ \mathbb{R}^2 \subseteq G_1 + G_2$$

pelo que $\mathbb{R}^2 = G_1 + G_2$.

D2) Vamos provar que $G_1 \cap G_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \in G_1 \wedge (x, y) \in G_2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 0 \wedge x = y\} \\ &= \{(0, 0)\} \\ &= \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \end{aligned}$$

Analogamente, pode demonstrar-se que $\mathbb{R}^2 = G_1 \oplus G_3$ (exercício). Assim G_2 e G_3 são suplementares de G_1 em $\mathbb{R}^2$ (sendo $G_2 \neq G_3$), pelo que *um subespaço vectorial pode ter mais do que um suplementar.*

Proposição 3.8.9 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de V. Os subespaços F e G são suplementares em V se e só se as condições seguintes são satisfeitas:*

D'1) $V = F + G$ *;*

D'2) Se $v = f_1 + g_1$ *e* $v = f_2 + g_2$ *, com* $f_1, f_2 \in F$ *e* $g_1, g_2 \in G$*, então*

$$f_1 = f_2 \quad e \quad g_1 = g_2 \, .$$

Demonstração:
(Aula Teórica.)

□

Observação 3.8.10 As condições D'1) e D'2) podem ser enunciadas da seguinte forma: "*Todo o elemento de* V *se escreve de modo único como soma de um elemento de* F *com um elemento de* G"*.*

Observação 3.8.11 Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Sabe-se que

$$V + \{0_V\} = V \quad \text{e} \quad V \cap \{0_V\} = \{0_V\} \, ,$$

logo V e $\{0_V\}$ são suplementares em V. Aplicando a proposição seguinte podemos determinar um suplementar de um subespaço F em V, quando $F \neq V$ e $F \neq \{0_V\}$.

Proposição 3.8.12 *Seja* V *um espaço vectorial de dimensão* $n \geq 2$ *e seja* F *um subespaço vectorial de* V*. Se*

$$(u_1, \ldots, u_r) \text{ é uma base de } F$$

e

$$(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) \text{ é uma base de } V \, ,$$

então

$$G =< u_{r+1}, \ldots, u_n >$$

é um suplementar de F *em* V *.*

□

Exercício 3.8.13 Determine um suplementar em $\mathbb{R}^4$ de $F =< (1,1,0,1), (2,2,1,1) >$.

Resolução :

Pode demonstrar-se que $((1,1,0,1),(2,2,1,1))$ é um sistema linearmente independente, logo é base do subespaço $F =< (1,1,0,1),(2,2,1,1) >$.

Pelo Exercício 3.6.15,

$$\mathbb{R}^4 =< (1,1,0,1), (2,2,1,1), (0,1,0,0), (0,0,0,1) > ,$$

logo, como $dim(\mathbb{R}^4) = 4$ e $((1,1,0,1),(2,2,1,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$ é um sistema constituído por 4 vectores, podemos concluir que

$$((1,1,0,1),(2,2,1,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Atendendo à Proposição 3.8.12,

$$G = < (0,1,0,0),(0,0,0,1) >$$

é um suplementar de F em $\mathbb{R}^4$.

Observação 3.8.14 *Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de V. Se F e G são suplementares em V, então*

$$dim\,(F) = dim\,(V) - dim\,(G).$$

Capítulo 4

Espaços Euclidianos

4.1 Espaços vectoriais com produto interno

Recorde-se que, ao longo deste curso, $\mathbb{K}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$.

Definição 4.1.1 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **produto interno** ou **produto escalar** definido em V a uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u, v) & \longmapsto & (u|v) \end{array}$$

que satisfaz as condições seguintes:

1. $((u+w)|v) \;=\; (u|v) + (w|v), \quad \forall u, v, w \in V;$
2. $((\lambda u)|v) \;=\; \lambda\,(u|v), \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K};$
3. $(u|v) \;=\; \overline{(v|u)}, \quad \forall u, v \in V;$
4. $(v|v) \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall v \in V$
   (isto é, $(v|v) \in \mathbb{R}$ e $(v|v) \geq 0, \;\; \forall v \in V$);
5. Se $v \in V$ e $(v|v) = 0$, então $v = 0$.

Observações 4.1.2 1. Pela 3ª condição da definição de produto interno ,

$$(v|v) \;=\; \overline{(v|v)},$$

o que implica que $(v|v)$ é um número real, para todo o $v \in V$. Assim, se a 3ª condição é satisfeita, para demonstrar que a 4ª condição também é satisfeita basta provar que $(v|v)$ não é negativo.

2. Se V é um espaço vectorial real, a 3ª condição da definição de produto interno é equivalente a
$$(u|v) \;=\; (v|u), \qquad \forall u, v \in V.$$

Definição 4.1.3 Se está definido um produto interno no espaço vectorial V dizemos que V é um **espaço vectorial munido de produto interno**. Chamamos **espaço Euclidiano** a um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Um espaço vectorial complexo de dimensão finita munido de um produto interno é chamado **espaço unitário**.

Proposição 4.1.4 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Temos:

1. $(u|(v+v')) \;=\; (u|v) + (u|v'), \qquad \forall u, v, v' \in V;$
2. $(u|(\lambda v)) \;=\; \overline{\lambda}\,(u|v), \qquad \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K};$
3. $(0_V|u) \;=\; (u|0_V) = 0_{\mathbb{K}}, \qquad \forall u \in V.$

Demonstração:

(Aula Teórica.)

$\square$

Exemplos 4.1.5 a) Consideremos o espaço vectorial real $\mathbb{R}^n$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) & \longmapsto & a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \end{array}$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$ (exercício) a que damos o nome de **produto interno canónico** ou **produto interno usual** em $\mathbb{R}^n$. Com respeito a este produto interno,

$$((\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n})|(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})) = \mathbf{a_1 b_1} + \cdots + \mathbf{a_n b_n}.$$

Por exemplo, considerando em $\mathbb{R}^2$ os vectores $u = (2, -1)$ e $v = (3, 4)$, temos

$$(u|v) = ((2, -1)|(3, 4)) = 2 \times 3 + (-1) \times 4 = 2.$$

b) Consideremos o espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^n$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) & \longmapsto & a_1 \overline{b_1} + \cdots + a_n \overline{b_n} \end{array}$$

é um produto interno em $\mathbb{C}^n$ (exercício) a que damos o nome de **produto interno canónico** ou **produto interno usual** em $\mathbb{C}^n$. Com respeito a este produto interno,

$$((\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})|(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})) = \mathbf{a_1}\overline{\mathbf{b_1}} + \cdots + \mathbf{a_n}\overline{\mathbf{b_n}}.$$

Por exemplo, considerando em $\mathbb{C}^2$ os vectores $w = (1+i, 3i)$ e $z = (2-i, 1+i)$, temos

$$(w|z) = ((1+i, 3i)|(2-i, 1+i)) = (1+i)\overline{(2-i)} + (3i)\overline{(1+i)} =$$

$$= (1+i)(2+i) + (3i)(1-i) = 1 + 3i + 3 + 3i = 4 + 6i.$$

c) Consideremos o espaço vectorial real $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. A aplicação

$$\begin{array}{ccc} M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \times M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}) & \longmapsto & a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \end{array}$$

é um produto interno em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (exercício) a que damos o nome de **produto interno canónico** ou **produto interno usual** em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Com respeito a este produto interno,

$$(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} | \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Definição 4.1.6 Seja V um espaço vectorial munido de produto interno e sejam $u, v \in V$.

1. Ao número real não negativo $\sqrt{(u|u)}$ chamamos **norma** ou **comprimento** de u e denotamos por $||u||$.
2. Ao número real não negativo $||u-v||$ chamamos **distância** entre u e v.
3. Dizemos que u e v são **ortogonais** se $(u|v) = 0$.

Exemplos 4.1.7 a) Consideremos em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canónico. Se $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$||(a_1, \ldots, a_n)|| = \sqrt{((a_1, \ldots, a_n)|(a_1, \ldots, a_n))} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Por exemplo, para $u = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$,

$$||u|| = ||(2, -1)|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

b) Consideremos em $\mathbb{C}^n$ o produto interno canónico. Para $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ temos

$$||(a_1, \ldots, a_n)|| = \sqrt{a_1\overline{a_1} + \cdots + a_n\overline{a_n}} = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

Por exemplo, para $w = (1+i, 3i)$, $z = (2-i, 1+i) \in \mathbb{C}^2$, temos

$$||w|| = ||(1+i, 3i)|| = \sqrt{|1+i|^2 + |3i|^2} = \sqrt{2+9} = \sqrt{11},$$

$$||z|| = ||(2-i, 1+i)|| = \sqrt{|2-i|^2 + |1+i|^2} = \sqrt{5+2} = \sqrt{7},$$

e

$$||-2w|| = ||(-2-2i, -6i)|| = \sqrt{|-2-2i|^2 + |-6i|^2} = \sqrt{8+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} = 2||w||.$$

Proposição 4.1.8 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e qualquer $v \in V$, temos:

1. $||\lambda\, v|| \;=\; |\lambda|\, ||v||$.

2. $||v|| \;=\; 0$ se e só se $v = 0_V$.

Demonstração:

(Aula Teórica.)

$\square$

Proposição 4.1.9 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**) *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Para quaisquer $u, v \in V$, temos:*

1. $|(u|v)| \;\leq\; ||u|| \cdot ||v||$.

2. $|(u|v)| \;=\; ||u|| \cdot ||v||$ *se e só se o sistema (u, v) é linearmente dependente.*

Demonstração:

(Aula Avançada.)

Exemplo 4.1.10 Consideremos $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno canónico.
Para $w = (1+i, 3i)$, $z = (2-i, 1+i) \in \mathbb{C}^2$, temos

$$|(w|z)| = |4+6i| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \leq ||w|| \cdot ||z|| = \sqrt{11} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{77}.$$

Proposição 4.1.11 (**Desigualdade triangular**) *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Para quaisquer $u, v \in V$, temos:*

$$||u+v|| \;\leq\; ||u|| + ||v||.$$

Demonstração:

(Aula Teórica.)

$\square$

Proposição 4.1.12 (**Teorema de Pitágoras**) *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Sejam $u, v \in V$. Se u e v são ortogonais, então*

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

e

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Demonstração:

Exercício.

4.2 Produto interno em espaços vectoriais reais

Seja V um espaço vectorial real munido de produto interno. Sejam u e v vectores não nulos de V. Atendendo à Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|(u|v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$. Mas, neste caso, $(u|v)$ é real, $||u|| \neq 0$ e $||v|| \neq 0$, pelo que

$$|(u|v)| \leq ||u|| \cdot ||v|| \Leftrightarrow \frac{|(u|v)|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$$

Logo

$$\frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||} \in [-1, 1].$$

Este facto permite-nos definir ângulo de vectores não nulos de um espaço vectorial real munido de produto interno.

Definição 4.2.1 Seja V um espaço vectorial real munido de produto interno. Sejam u e v vectores não nulos de V. Chamamos **ângulo dos vectores** u e v ao número real pertencente a $[0, \pi]$

$$\arccos\left(\frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||}\right),$$

isto é, o ângulo dos vectores u e v é o número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Denotamos o ângulo dos vectores u e v por $\angle(u, v)$.

Exemplo 4.2.2 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno canónico. Sejam $u = (1, -1, 1, -1)$, $v = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Tem-se $||u|| = 2, ||v|| = 1$ e $(u|v) = 1$, pelo que o ângulo dos vectores u e v é o número real pertencente a $[0, \pi]$

$$\arccos\left(\frac{(u|v)}{||u|| \cdot ||v||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Observação 4.2.3 Seja V um espaço vectorial real munido de produto interno. Se u e v são vectores não nulos de V e θ é o ângulo dos vectores u e v, então:

1. $(u|v) = ||u|| \cdot ||v|| \cos\theta$.
2. $\angle(u, v) = \angle(v, u)$.
3. $\sin\angle(u, v) \geq 0$.
4. $\sin\angle(u, v) = 0$ se e só se o sistema (u, v) é linearmente dependente.
5. Os vectores u e v são ortogonais se e só se $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$.

4.3 Espaços Euclidianos e Unitários

Definição 4.3.1 Seja V um espaço vectorial munido de produto interno. Sejam $u, v_1, \dots, v_p \in V$.

1. Dizemos que u é **unitário**, ou **normado**, se $||u|| = 1$.
2. Dizemos que o sistema $(v_1, \dots, v_p)$ é um **sistema ortogonal** se $(v_i|v_j) = 0$, sempre que $i, j \in \{1, \dots, p\}$ e $i \neq j$.
3. Dizemos que o sistema $(v_1, \dots, v_p)$ é um **sistema ortonormado** se é um sistema ortogonal formado por vectores unitários.
4. Se $(v_1, \dots, v_p)$ é uma base de V e $(v_1, \dots, v_p)$ é um sistema ortogonal, dizemos que $(v_1, \dots, v_p)$ é uma **base ortogonal** de V.
5. Se $(v_1, \dots, v_p)$ é uma base de V e $(v_1, \dots, v_p)$ é um sistema ortonormado, dizemos que $(v_1, \dots, v_p)$ é uma **base ortonormada** de V.

Observação 4.3.2 a) Um sistema com um único vector é ortogonal.

b) Se $(v_1, \dots, v_p)$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos, então $(\frac{1}{||v_1||}v_1, \dots, \frac{1}{||v_p||}v_p)$ é um sistema ortonormado.

Exemplos 4.3.3 a) Consideremos o espaço vectorial real $\mathbb{R}^n$. Com respeito ao produto interno canónico a base canónica é ortonormada.

b) Consideremos o espaço vectorial real $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno canónico. A base canónica é ortonormada.

Proposição 4.3.4 *Seja V um espaço vectorial munido de produto interno. Sejam $v_1, \dots, v_p \in V$. Se $(v_1, \dots, v_p)$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos, então $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente.*

Demonstração:

(Aula Teórica.)

□

Vamos apresentar um processo através do qual, partindo de uma base qualquer de um subespaço vectorial, se pode obter uma base ortogonal do mesmo subespaço.

Proposição 4.3.5 (**Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**) *Seja V um espaço vectorial real ou complexo munido de produto interno. Seja $(v_1, \ldots, v_p)$ um sistema linearmente independente de vectores de V e seja $F =< v_1, \ldots, v_p >$. Consideremos os vectores $e_1, \ldots, e_p$ definidos, por recorrência, do modo seguinte:*

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 \\
e_2 &= v_2 - \frac{(v_2|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 \\
e_3 &= v_3 - \frac{(v_3|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 - \frac{(v_3|e_2)}{(e_2|e_2)}\, e_2 \\
&\;\;\vdots \\
e_i &= v_i - \frac{(v_i|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 - \cdots - \frac{(v_i|e_{i-1})}{(e_{i-1}|e_{i-1})}\, e_{i-1} \\
&\;\;\vdots \\
e_p &= v_p - \frac{(v_p|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 - \cdots - \frac{(v_p|e_{p-1})}{(e_{p-1}|e_{p-1})}\, e_{p-1}.
\end{aligned}$$

O sistema $(e_1, \ldots, e_p)$ é uma base ortogonal de F.

Demonstração:

(Aula Teórica.)

□

Observação 4.3.6 Nas condições da proposição anterior, se o sistema $(v_1, \ldots, v_p)$ é ortogonal, tem-se $e_1 = v_1, \ldots, e_p = v_p$.

Exemplo 4.3.7 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Vamos determinar uma base ortogonal do subespaço $F =< (2,1,1),(1,0,1) >$. Sejam $v_1 = (2,1,1)$ e $v_2 = (1,0,1)$. O sistema (v_1, v_2) é linearmente independente (exercício) mas não é ortogonal, pois

$$(v_1|v_2) = ((2,1,1)|(1,0,1)) = 2+0+1 = 3.$$

Sejam

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 = (2,1,1) \\ e_2 &= v_2 - \frac{(v_2|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 = (1,0,1) - \frac{3}{6}(2,1,1) = (1,0,1) - (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

O Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt permite concluir que $((2,1,1),(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ é base ortogonal de F.

Corolário 4.3.8 *Se $V \neq \{0_V\}$ é um espaço Euclidiano ou unitário, existe uma base ortonormada de V.*

Demonstração:

Consequência da proposição anterior e da Observação 4.3.2.

□

Observação 4.3.9 *Seja $V \neq \{0\}$ um espaço euclidiano ou unitário e seja $(e_1,\ldots,e_n)$ uma base ortonormada de V. Sejam $u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, $v = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n \in V$, com $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{K}$. Tem-se*

1. *Para todo o $i = 1,\ldots,n$, $a_i = (u|e_i)$, isto é,*
$$u = (u|e_1)e_1 + \cdots + (u|e_n)e_n.$$
2. $(u|v) = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$.
3. $||u|| = \sqrt{a_1\overline{a_1} + \cdots + a_n\overline{a_n}} = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$.

Proposição 4.3.10 *Seja V um espaço euclidiano ou unitário de dimensão $n \geq 2$. Se $p < n$ e $(v_1,\ldots,v_p)$ é um sistema ortogonal de vectores não nulos de V, existem $e_{p+1},\ldots,e_n \in V$ tais que*

$$(v_1,\ldots,v_p,e_{p+1},\ldots,e_n)$$

é base ortogonal de V.

Demonstração:

Admitamos que $p < n$ e $(v_1, \ldots, v_p)$ é um sistema ortogonal de vectores de V não nulos. Pela Proposição 4.3.4, $(v_1, \ldots, v_p)$ é linearmente independente, logo, pelo Teorema do Completamento, existem $v_{p+1}, \ldots, v_n \in V$ tais que $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ é base de V. Seja $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ a base ortogonal de V que se obtém ortogonalizando a base anterior pelo Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Atendendo à Observação 4.3.6,
$e_1 = v_1, \ldots, e_p = v_p$.

□

4.4 Complemento ortogonal

Definição 4.4.1 Seja V um espaço vectorial real ou complexo munido de produto interno. Seja F um subespaço de V. Chamamos **complemento ortogonal** de F (em V) ao conjunto dos vectores de V ortogonais a todos os vectores de F. Denotamos o complemento ortogonal de F por $F^\perp$, isto é,

$$F^\perp = \{v \in V \,:\, (v|w) = 0, \text{ para todo o } w \in F\}.$$

Observação 4.4.2 Seja V um espaço vectorial real ou complexo munido de produto interno. Tem-se:

1. $\{0_V\}^\perp = V$.
2. $V^\perp = \{0_V\}$.

Proposição 4.4.3 *Seja V um espaço vectorial real ou complexo munido de produto interno. Seja F um subespaço de V e sejam $w_1, \ldots, w_p \in F$.*

Se $F = < w_1, \ldots, w_p >$, então

$$F^\perp = \{v \in V \,:\, (v|w_i) = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, p\}.$$

Demonstração:

(Aula Teórica.)

□

Exemplo 4.4.4 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Seja $W =< (1,0,2),(0,1,3) >$. Atendendo à proposição anterior,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : ((a_1,a_2,a_3)|(1,0,2) = 0 \wedge ((a_1,a_2,a_3)|(0,1,3)) = 0\} \\ &= \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + 2a_3 = 0 \wedge a_2 + 3a_3 = 0\} \\ &= \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 = -2a_3 \wedge a_2 = -3a_3\} \\ &= \{(-2a_3, -3a_3, a_3) : a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (-2,-3,1) > . \end{aligned}$$

Proposição 4.4.5 *Seja V um espaço euclidiano ou unitário. Seja F um subespaço de V. Tem-se:*

1. *$F^\perp$ é subespaço de V.*
2. *$F \cap F^\perp = \{0_V\}$.*
3. *$dim\, F^\perp = dim\, V - dim\, F$.*
4. *$V = F \oplus F^\perp$.*
5. *$(F^\perp)^\perp = F$.*

Demonstração:
(Aula Teórica:1,2,5. Aula Avançada:3,4.)

□

Observação 4.4.6 Seja V um espaço euclidiano ou unitário e seja F um subespaço de V. Como $V = F \oplus F^\perp$, todo o elemento de V se escreve de modo único como soma de um vector de F com um vector de $F^\perp$ (Proposição 3.8.9).

Definição 4.4.7 Seja V um espaço euclidiano ou unitário e seja F um subespaço de V. Seja $v \in V$. Se $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in F$ e $w_2 \in F^\perp$ dizemos que w_1 é a **projecção ortogonal** de v sobre F e escrevemos $w_1 = p_F(v)$.

Observação 4.4.8 Nas condições da definição anterior, $v = w_2 + w_1$, com $w_2 \in F^\perp$ e $w_1 \in F = (F^\perp)^\perp$, pelo que w_2 é a projecção ortogonal de v sobre $F^\perp$, isto é, $w_2 = p_{F^\perp}(v)$. Assim,

$$v = p_F(v) + p_{F^\perp}(v)$$

e

$$p_{F^\perp}(v) = v - p_F(v).$$

O resultado seguinte permite calcular a projecção ortogonal de um vector sobre um subespaço F sem determinar $F^{\perp}$.

Proposição 4.4.9 *Seja V um espaço euclidiano ou unitário, seja F um subespaço de V e seja $(e_1, \ldots, e_p)$ uma base ortogonal de F. Para qualquer vector $v \in V$, tem-se*

$$p_F(v) = \frac{(v|e_1)}{(e_1|e_1)}\, e_1 + \cdots + \frac{(v|e_p)}{(e_p|e_p)}\, e_p.$$

Demonstração:
(Aula Avançada.)

$\square$

Exemplo 4.4.10 Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Seja $F =< (2,1,1), (1,0,1) >$ e seja $u = (-1,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Demonstrámos no Exemplo 4.3.7 que

$$((2,1,1), (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

é base ortogonal de F. Sejam $e_1 = (2,1,1)$, $e_2 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Atendendo à proposição anterior,

$$p_F(u) = \frac{(u|e_1)}{(e_1|e_1)}\,(2,1,1) + \frac{(u|e_2)}{(e_2|e_2)}\,(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

Tem-se

$$p_{F^{\perp}}(u) = (-1,0,1) - (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Como

$$p_{F^{\perp}}(u) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \in F^{\perp}$$

e

$$dim\, F^{\perp} = dim\, \mathbb{R}^3 - dim\, F = 3 - 2 = 1,$$

podemos ainda concluir que $((-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}))$ é base de $F^{\perp}$.

Observação 4.4.11 Seja V um espaço vectorial real ou complexo munido de produto interno e seja $(v_1, \ldots, v_t)$ um sistema linearmente independente de vectores de V. Nas condições do Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt,

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1, \\
e_2 &= v_2 - p_{<e_1>}(v_2), \\
e_3 &= v_3 - p_{<e_1,e_2>}(v_3), \\
&\vdots \\
e_t &= v_t - p_{<e_1,e_2,\ldots,e_{t-1}>}(v_t).
\end{aligned}$$

4.5 Produto externo e produto misto

Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e seja (e_1, e_2, e_3) uma base de V. Sejam $u, v, w \in V$. Se

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \\ v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \\ w &= w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3, \end{aligned}$$

com $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$, denotamos por $M((u, v, w), (e_1, e_2, e_3))$ a matriz

$$M((u, v, w), (e_1, e_2, e_3)) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que, se (u, v, w) é base de V, a matriz $M((u, v, w), (e_1, e_2, e_3))$ é a matriz de mudança da base (u, v, w) para a base (e_1, e_2, e_3).

Proposição 4.5.1 *Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada de V. Sejam $u, v \in V$. Se o sistema de vectores (u, v) é linearmente independente, existe um e um só $z \in V$ satisfazendo simultaneamente as três condições seguintes:*

1. $(z|u) = 0$ *e* $(z|v) = 0$;
2. $||z|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin(\angle(u, v))$;
3. $det M((u, v, w), (e_1, e_2, e_3)) > 0$.

Demonstração:

(Aula Avançada.)

□

Proposição 4.5.2 *Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada de V. Sejam u e v vectores não nulos de V tais que*

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \\ v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \end{aligned}$$

com $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$. Seja

$$w = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

O vector w satisfaz as condições seguintes:

1. $(w|u) = 0$ *e* $(w|v) = 0$;

2. $||w|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin(\angle(u, v))$;

3. $detM((u, v, w), (e_1, e_2, e_3)) \geq 0$ *e sempre que o sistema* (u, v) *é linearmente independente,* $detM((u, v, w), (e_1, e_2, e_3)) > 0$.

Demonstração:

(Aula Teórica.)

□

Observação 4.5.3 Nas condições da proposição anterior, como mnemónica para a determinação de w usa-se o seguinte "determinante simbólico" (recorde-se que (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada de V)

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

e aplica-se o Teorema de Laplace à primeira linha.

Definição 4.5.4 Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3. Fixemos em V uma base ortonormada (e_1, e_2, e_3). Sejam $u, v \in V$ e sejam $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} u &= u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3, \\ v &= v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3. \end{aligned}$$

Chamamos **produto externo** ou **produto vectorial** de u e v ao vector, que denotamos por $u \wedge v$,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Observação 4.5.5 Sejam $u, v \in V$. Note-se que a definição de $u \wedge v$ depende da base (e_1, e_2, e_3) fixada. Atendendo às proposições anteriores:

1. Se o sistema (u, v) é linearmente dependente, então $u \wedge v = 0_V$.

2. Se o sistema (u, v) é linearmente independente, $u \wedge v$ é o único vector de V satisfazendo simultaneamente as três condições seguintes:

   (a) $(u \wedge v|u) = 0$ e $(u \wedge v|v) = 0$;

   (b) $||u \wedge v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin(\angle(u, v))$;

   (c) $det\, M((u, v, u \wedge v), (e_1, e_2, e_3)) > 0$.

3. Se o sistema (u, v) é linearmente independente, $det\, M((u, v, u \wedge v), (e_1, e_2, e_3)) \neq 0$, pelo que $(u, v, u \wedge v)$ é base de V (recorde-se que $dim\, V = 3$).

Definição 4.5.6 Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e fixemos em V uma base (e_1, e_2, e_3). Se (v_1, v_2, v_3) é base de V, dizemos que (v_1, v_2, v_3) é **base directa** se $detM\,((v_1, v_2, v_3), (e_1, e_2, e_3)) > 0$; caso contrário, dizemos que (v_1, v_2, v_3) é **base inversa**.

Observação 4.5.7

1. Ao fixar uma base em V estamos a fixar uma "orientação", determinando quais as bases directas e quais as bases inversas.

2. Se o sistema (u, v) é linearmente independente, então $(u, v, u \wedge v)$ é uma base directa.

Proposição 4.5.8 Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e fixemos em V uma base ortonormada. Sejam $u, v, w \in V$. Tem-se:

1. $u \wedge u = 0_V$.

2. $u \wedge 0_V = 0_V$.

3. O sistema (u, v) é linearmente dependente se e só se $u \wedge v = 0_V$.

4. $v \wedge u = -(u \wedge v)$.

5. $(u|u \wedge v) = 0$ e $(v|u \wedge v) = 0$.

6. $(u + w) \wedge v = (u \wedge v) + (w \wedge v)$ e $u \wedge (v + w) = (u \wedge v) + (u \wedge w)$.

7. $(\alpha u) \wedge v = u \wedge (\alpha v) = \alpha(u \wedge v)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração:(Aula Teórica.)

□

Sempre que não for dito nada em contrário, consideramos $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico e fixamos em $\mathbb{R}^3$ a base canónica, considerando neste caso que os conceitos de base directa e de base inversa são relativos à base canónica.

Proposição 4.5.9 Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Se o sistema (u, v) é linearmente independente, então $||u \wedge v||$ é a área do paralelogramo definido por u e v.

Demonstração:(Aula Teórica.)

□

Definição 4.5.10 Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e fixemos em V uma base ortonormada. Se $u, v, w \in V$, ao número real $(u \wedge v|w)$ chamamos **produto misto** dos vectores u, v e w.

Proposição 4.5.11 *Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e fixemos em V uma base ortonormada (e_1, e_2, e_3). Sejam $u, v, w \in V$. Se*

$$\begin{aligned} u &= u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3, \\ v &= v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, \\ w &= w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3, \end{aligned}$$

com $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$, então

$$(u \wedge v|w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração:(Aula Teórica.)

$\square$

Proposição 4.5.12 *Seja V um espaço Euclidiano de dimensão 3 e fixemos em V uma base ortonormada. Sejam $u, v, w \in V$. Tem-se:*

1. $(u \wedge v|w) = (v \wedge w|u) = (w \wedge u|v)$;
2. $(u \wedge v|w) = (u|v \wedge w)$;
3. $(u \wedge v|w) = 0$ *se e só se* (u, v, w) *é linearmente dependente.*

Demonstração:(Aula Teórica.)

$\square$

Proposição 4.5.13 Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Se o sistema (u, v, w) é linearmente independente, então $|(u \wedge v|w)|$ é o volume do paralelepípedo definido por u, v e w.

Demonstração:(Aula Teórica.)

$\square$

Conteúdo