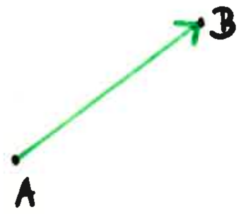
ESPAÇOS VECTORIAIS

Introdução aos vectores (geométrica)

No plano, ou no espaço, os vectores podem ser representados geométricamente como segmentos orientados.

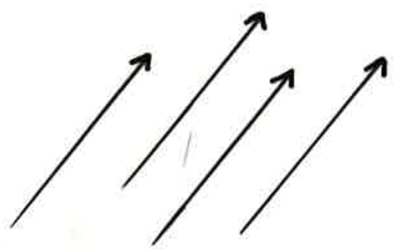
PLANO:



vector de origem A e extremidade B

$\overrightarrow{AB}$

vectores equivalentes: vectores com a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento

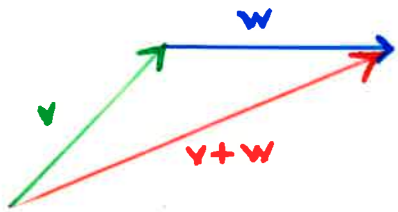


vector livre
↓
(tem direcção, sentido e comprimento bem determinados, mas pode ser aplicado em qualquer ponto do espaço)

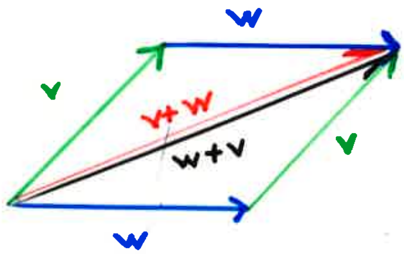
oma de vectores :

Se v e w são vectores, então a soma $v+w$ é o
tor determinado da seguinte forma :

Coloca-se o vector w de tal forma que a sua origem
ncida com a extremidade de v. O vector $v+w$ é
resentado pelo segmento orientado cuja origem é a origem
v e cuja extremidade é a extremidade de w.



adição de vectores é comutativa : $v+w = w+v$



soma $v+w = w+v$ coincide com a diagonal do paralelogramo
terminado por v e w quando estes vectores estão posicionados
forma a terem a mesma origem (regra do paralelogramo)

o vector de comprimento zero é chamado vector zero ou
tor nulo e é denotado por 0

Definimos
$$0+v = v+0 = v \quad , \text{ para qualquer vector } v$$

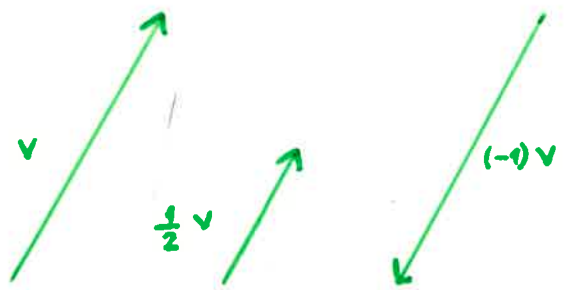
Multiplicação escalar :

Se v é um vector não nulo e α é um $\underbrace{\text{nº real}}_{}$ não nulo (escalar)

então o produto αv é o vector satisfazendo :

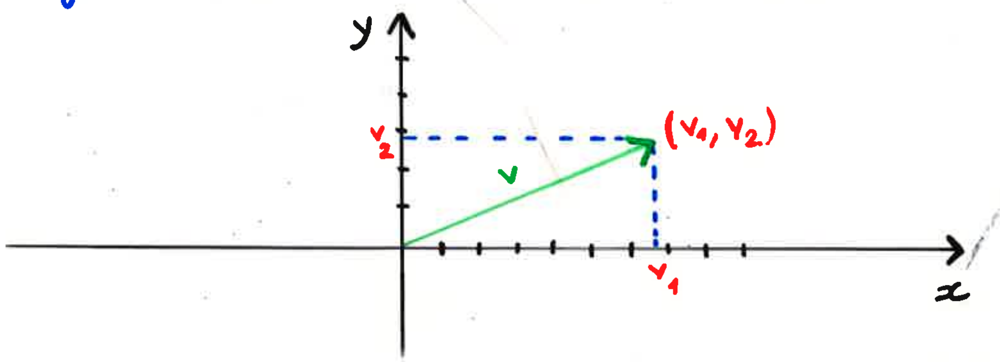
- o comprimento de αv é $|\alpha| \times$ comprimento de v
- a direcção de αv coincide com a direcção de v
- se $\alpha > 0$, o sentido de αv é o sentido de v
  se $\alpha < 0$, o sentido de αv é o oposto do sentido de v

Se $v = 0$ ou $\alpha = 0$, definimos $\alpha v = 0$.



Problemas envolvendo vectores podem ser simplificados introduzindo um sistema de eixos perpendiculares (referencial ortogonal).

Seja v um vector. Posicione-se v de tal forma que a sua origem coincida com a origem do referencial.



As coordenadas (v_1, v_2) da extremidade de v são chamadas coordenadas de v ou componentes de v.

As coordenadas identificam completamente o vector livre; escrevemos:

$$v = (v_1, v_2)$$

Pode demonstrar-se que:

Se $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, então

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Se $v = (v_1, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Exemplo: Se $v = (1, -2)$, $w = (7, 6)$ então

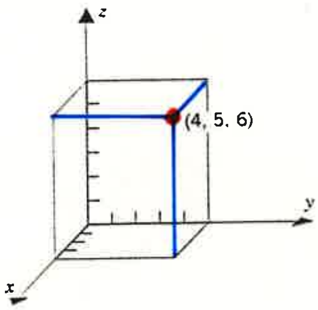
$$v + w = (1, -2) + (7, 6) = (8, 4)$$

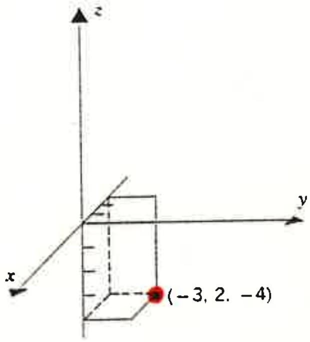
e

$$4 \cdot v = 4(1, -2) = (4, -8)$$

ESPAÇO:

Tal como os vectores no plano podem ser representados por um par de nº reais, os vectores no espaço podem ser representados por um triplo de nºs reais, introduzindo um sistema de eixos perpendiculares:





Seja v um vector no espaço. Se a origem de v coincide com a origem do referencial, então as coordenadas da extremidade de v são chamadas componentes de v ou coordenadas de v e escrevemos

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

Pode demonstrar-se que:

Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são vectores no espaço, então

$$\boxed{v + w = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)}$$

e, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\alpha \cdot v = \alpha (v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)}$$