ALGA I – 2009/2010 Exame - 3 de Fevereiro de 2010

Resolva grupos diferentes em cadernos diferentes.
Escreva o seu nome completo e o seu número em todos os cadernos.
Justifique todas as respostas.

EXAME A

Grupo I

1. (2 val) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

   Calcule $det(A)$ começando por usar o Teorema de Laplace e calcule $det(B)$ reduzindo-o ao cálculo do determinante de uma matriz triangular superior.

2. (3 val) Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ que tem a seguinte matriz ampliada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & k & -3 & t \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

   sendo k e t parâmetros reais.

   (a) Indique, justificando, todos os valores de k e t que tornam o sistema:

   i) Impossível. ii) Possível e indeterminado. iii) Possível e determinado.

   (b) Indique, justificando, todos os valores de k e t para os quais $(-9, 0, 2)$ é solução do sistema.

Grupo II

3. (1.5 val) Sejam $C, D, Z \in M_4(\mathbb{R})$ tais que $det(C) = 5$, $det(Z) = \frac{1}{2}$ e $CD + 2ZDC = 0$. Diga, justificando, se existe $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $DP = I_4$.

4. (2 val) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Determine:

   i) Uma base do espaço das linhas de A. ii) Uma base do espaço das colunas de A.

   iii) Uma base do espaço nulo de A.

Vire s. f. f.

5. (6 val) Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ e os seus subespaços

$$F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_2 - 2a_3 + a_4 = 0 \wedge 2a_2 - 2a_3 - 4a_4 = 0\}$$

e

$$G = <(1,1,-1,2), (1,0,0,3), (-1,-1,1,-1), (2,2,-2,3)> .$$

(a) Determine uma base e a dimensão de F.

(b) Indique uma base e a dimensão de G e caracterize os vectores de G por meio de condições nas suas coordenadas.

(c) Diga, justificando, se $F \cup G$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(d) Determine um suplementar de G em $\mathbb{R}^4$.

6. (2.5 val) Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno canónico, os vectores $u = (1,-2,2)$ e $v = (2,2,1)$.

(a) Mostre que os vectores u e v são ortogonais e determine, caso exista, um vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que (u, v, w) seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $W =< u, v >$. Determine uma base ortogonal de $W^{\perp}$.

7. (3 val) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Considere os subespaços vectoriais de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$\mathscr{C} = \{AX : X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\}$$

e

$$\mathscr{N} = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}.$$

Suponha que $dim\,\mathscr{C} \geq 1$ e $dim\,\mathscr{N} \geq 1$. Seja $(Z_1, \ldots, Z_s)$ uma base de $\mathscr{N}$.

(a) Admita que $A^2 = A$. Mostre que:

i. Para todo o $Y \in \mathscr{C}$, se tem $AY = Y$.

ii. Se $(C_1, \ldots, C_r)$ é base de $\mathscr{C}$, então o sistema $(C_1, \ldots, C_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é linearmente independente.

(b) Mostre que se $(C_1, \ldots, C_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ é base de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, então o sistema $(AC_1, \ldots, AC_r)$ é base de $\mathscr{C}$.

FIM