

波动率：GARCH 与实现波动率

王冠嵩

2016 年 4 月 11 日

1 简介

资产价格的波动率 (Volatility) 的测量影响风险管理、资产配置和期权价格测算等实际问题。在现有模型和理论下，波动率隐藏在其他时间序列中，都不能直接观测。目前可以用 GARCH 模型拟合出价格过程中的波动率，也可以从期权价格倒推出隐含波动率 (Implied Volatility)。日间 (高频) 交易数据又带来了另一种波动率的统计方法：实现波动率 (Realized Volatility)。

相比于其他测量方法，实现波动率有以下特点：

1. 假设每日价格走势可以解释为一个以维纳过程 (Wiener Process) 为基础的随机过程，如伊藤 (Itô) 过程，则理论上实现波动率是对真实波动率的直接统计量。
2. 相对于每日回报率，实现波动率充分利用了高频数据，甚至逐笔交易数据，中包含的信息。
3. 计算实现波动率不需要资产的金融衍生品价格信息。
4. 如果有足够数据，实现波动率可以方便扩展到每小时、每分钟波动率，和不同资产之间的协波动率 (Co-Volatility)。

本文以上证指数为例，简单介绍实现波动率，并和 GARCH 模型进行对比。

2 模型

2.1 ARMA-GARCH

ARMA-GARCH 是一个常见的描述资产价格的模型。其中 ARMA 解释价格的条件期望，GARCH 解释价格的条件标准差。

$$\varepsilon_t = \sigma_t \times z_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \underbrace{\sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}_{\text{ARCH 成分}} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2}_{\text{GARCH 成分}}$$

其中， t 为时间 (天)。 ε_t 为资产 (每日) 回报率，或回报率剔除其他因子影响之后的剩余残差。 σ_t 为真实的波动率。 ω 是真实波动率的无条件期望。 $\alpha_i, i = 1 \cdots p$ 是 ARCH

成分的参数, $\beta_i, i = 1 \cdots q$ 是 GARCH 成分的参数。对于 GARCH(1,1) 模型, p 和 q 都为 1。

带入数据拟合后, 会得到各个参数的估计值, 估计的波动率 $\hat{\sigma}_t$, 以及标准化后的残差 \hat{z}_t 。如果 GARCH 很好的提取出了波动率的信息, 那么 \hat{z}_t 的应该近似于假设的分布, 例如标准正态分布或 T 分布等等。而且残差中也不会存在自相关现象。

2.2 实现波动率

资产价格经常被视为一个随机过程。假设价格的对数服从以下的伊藤 (Itô) 随机过程:

$$d\log(P_t) = dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

其中 t 为 (一天内) 连续的时间, 那么 $X_1 - X_0$ 即为一天的回报率。而它的波动可以用方差来衡量:

$$\text{Var}[X_1 - X_0] = \int_0^1 \sigma_t^2 dt$$

这个积分波动率 (Integrated Variation) 即为这一天资产价格的真实波动率。理论上可以证明, 当 (一天内) 样本足够大时, 实现波动率会无限逼近于真实波动率:

$$\sum_{i=1}^N (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \rightarrow \text{Var}[X_1 - X_0], 0 < t_1 < \cdots < t_N = 1, \text{当 } N \rightarrow \infty$$

相对于 GARCH 模型从每日回报率中间接推测波动率, 实现波动率利用日间交易数据直接地测算真实波动率。而且数据量越大 (频率越高), 其中包含的信息越多, 统计量越精准。

3 结果

3.1 数据

这里用上证指数为例。时间段选取为从 2015 年 8 月 26 日到 2016 年 4 月 8 日。在此期间一共有 149 个交易日 (包括不完整交易日)。其中包括了年初两次“熔断”。表 1 提供了这期间数据的大致统计概况; 图 1 展示了这期间指数的走势, 和回报率分布。日间交易数据基本以 5 至 6 秒为频率, 平均每日大概有 2800 个交易数据。

	数据量	频率 (秒)	当日回报率 (%)	开盘回报率 (%)	下午开盘回报率 (%)
最小值	152	2.625	-6.80	-4.39	-0.12
1/4 分位数	2702	5.182	-0.65	-0.52	-0.00
中位数	2790	5.238	0.27	-0.11	0.01
均值	2714	5.395	0.25	-0.22	0.02
3/4 分位数	2806	5.348	1.33	0.25	0.02
最大值	5590	11.507	5.14	3.38	0.58

表 1: 上证指数数据概况 (149 天)

当日回报率是当日收盘价相对于开盘价的收益率, 区别于通常意义的收益率是相对于前一天的收盘价。做此调整的原因在于统一数据标准: 实现波动率衡量的是开盘时间内的波

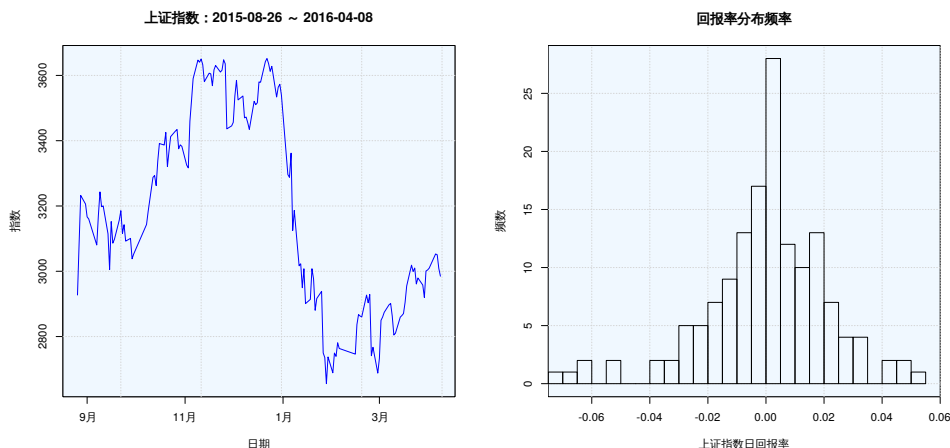


图 1: 上证指数历史价格及回报率分布

动，从收盘到开盘的变化没有计入其中，故在每日回报率中也剔除闭盘时间的变动。但在操作中，这个改动并没有对 GARCH 计算出的波动率产生显著影响。图 1 可见，当日回报率的分布大致以 0 为中心。

通常在利用高频数据计算实现波动率时，存在微观结构噪声（Micro-structure Noise）的影响。随着频率的增加，实现波动率中的噪声成分会大大超过价格信息成分。对此已有深入的研究和解决方法。在此并不需要处理这类问题。首先，指数的合成本身会综合掉各个成分之间的噪声。其次，相对于上证指数的信号噪声强度对比，所用数据的频率没有高到噪声会产生影响的程度。另外，噪声会让实现波动率大幅增加，而在此计算结果中并不存在。所以在此直接用日间交易数据计算实现波动率：

$$RV = \sum_{i=1}^N (\log(P_{t_i}) - \log(P_{t_{i-1}}))^2 \times DUR/4$$

t_0, t_1, \dots, t_N 为每天交易时点。其中 DUR 为实际交易时间，最后一项将波动率标准化到 4 小时。

GARCH 模型具体实现为 ARMA(1,1)-GARCH(1,1)，其中用 T 分布计算最大似然函数进行估计。实现波动率采取 ARMA(1,1) 模型拟合和预测。

3.2 对比

图 2 展示了 GARCH 模型估计波动率（黑色曲线）和实现波动率（红色曲线）的对比图。观察可发现：

- 很明显，两个曲线大体有一致的波峰和波谷。两种波动率的测量在上证指数异常变动的判断一致。但实现波动率从冲击恢复的速度更快。
- 相比较，实现波动率的震荡幅度更大，出现的峰值更剧烈；GARCH 波动率则相对平缓。GARCH 波动率的稳态水平要比实现波动率的稳态水平高很多。

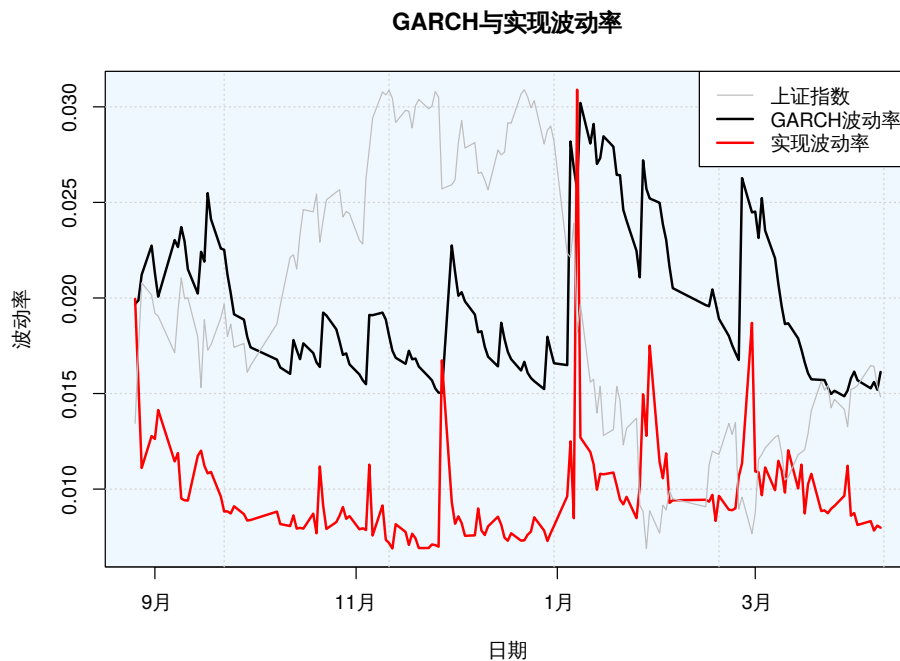


图 2: GARCH 波动率和实现波动率

- 实现波动率在一些冲击上会领先于 GARCH 波动率。比如，11 月末，实现波动率在 27 日出现峰值，比 GARCH 波动率早一天；1 月熔断，实现波动率分别在熔断日（4 日和 7 日）出现峰值，而 GARCH 波动率同样分别晚一天。

GARCH 模型以日回报率为判断标准，对于高额涨跌敏感，而实现波动率以当日内市场的波动过程进行测算。实现波动率直接测算真实波动率，而 GARCH 波动率是从日回报率中推测波动率。模型拟合时选择能使得数据贴近假设的最优参数，试图更多地将冲击纳入到模型中，于是一些冲击引起的极值会影响模型的可靠性。

在选取的时间段上证指数经历了很多次大波动，GARCH 模型为此调整试图解释更多冲击，导致稳态水平的增加，将几次大冲击分摊到稳态时期。体现为 GARCH 波动率的峰值矮，冲击持续时间相对长。而在冲击时间的判断上，GARCH 模型有时会产生偏差。

我选取了其他时间段的日回报率数据，GARCH 模型的结果会截然不同。其计算的波动率更加平稳，稳态水平和实现波动率类似（0.01）。鉴于缺乏对应的日间交易数据，不进行展示。

图 3 展示了模型对未来 50 日的波动率的预测。黑色曲线为 GARCH 模型，红色曲线为实现波动率。右侧平滑曲线部分为预测值。两者都在未来增长到稳态水平，实现波动率回到稳态的速度更快。

模型显示现阶段正处于低波动性阶段。不过这也可能是由于用这段时期调教的模型，稳态波动水平过高造成的。

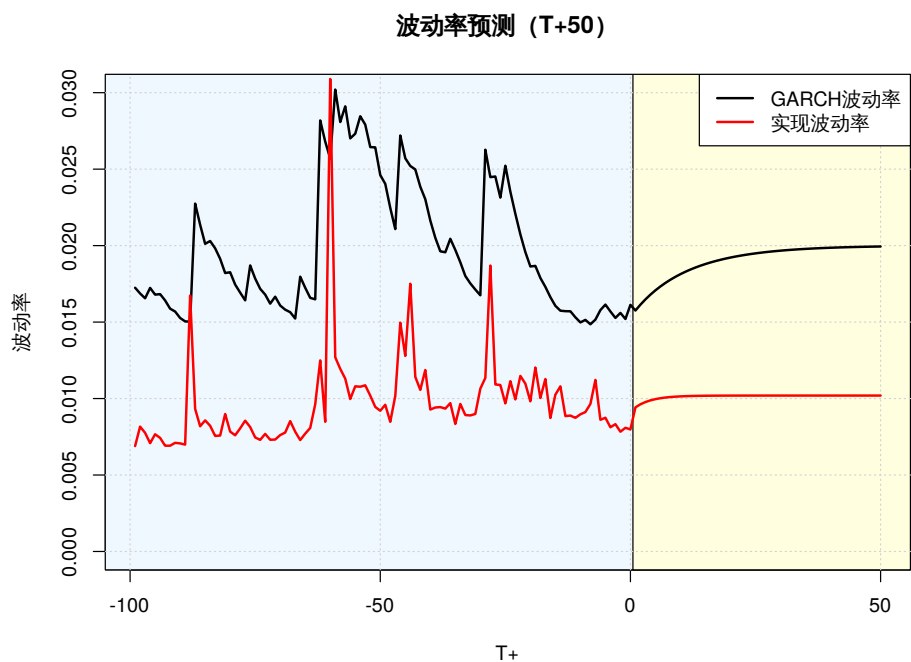


图 3: 波动率预测

4 后注

理论上，实现波动率直接而且直观地测量真实波动性，相对于 GARCH 建模估算，实现波动率应该更准确。然而验证这个观点却是十分困难的。

实现波动率的合理性建立在资产价格的随机过程假设，和高频数据的清洁度。在现实中这两者都未必合乎理论的要求。

为检测实践中实现波动率的优势，可以采用期权价格进行比较。我暂时没有相关数据，故不能进行相应工作。中国股指期货市场并不成熟，价格能否客观理性地反映所有公开信息，也是一个不确定的问题。

本文对于两个波动率过程的比较，只是从直观意义上进行对比。GARCH 模型需要较多的数据才能更好地捕捉波动率，由于日间交易数据的缺乏，只能采取 149 个数据。