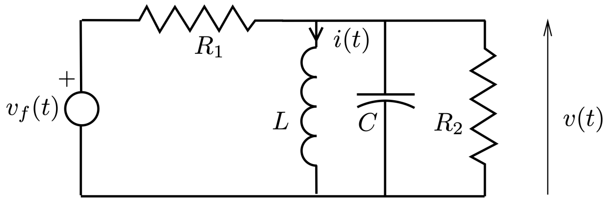
Podstawy automatyki i robotyki

Laboratorium 2

Michał Łaskawski

Przykład 1

Rozważmy prosty układ elektryczny pokazany na rysunku poniżej. Załóżmy, że chcemy modelować napięcie v(t).



Rysunek 1: Układ elektryczny

Stosując podstawowe prawa umożliwiające syntezę modeli matematycznych układów elektrycznych, otrzymujemy następujące równania:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$
$$\frac{v_f(t) - v(t)}{R_1} = i(t) + C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Powyższe równania mogą być uporządkowane w następujący sposób:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{C}i(t) - \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)v(t) + \frac{1}{R_1C}v_f(t)$$

Równania te umożliwiają symulację układu i obserwację zmian w czasie t prądu $t(t)$ oraz napięcia $v(t)$.

Wykorzystując do tego celu system `Matlab / Simulink` należy:

1. Zdefiniować funkcję implementującą powyższe równania.

   Funkcja ta może wyglądać w następujący sposób:

```
function dxdt = model_a(t, x, L, C, R1, R2, vf)
    % x(1) = i(t) - prąd
    % x(2) = v(t) - napięcie

    % Układ równań różniczkowych
    dxdt = zeros(2,1);
    dxdt(1) = (1/L) * x(2); % di/dt
    dxdt(2) = -(1/C) * x(1) - (1/(R1*C) + 1/(R2*C)) * x(2) + (1/(R1*C)) * vf(t); % dv/dt
 end
```

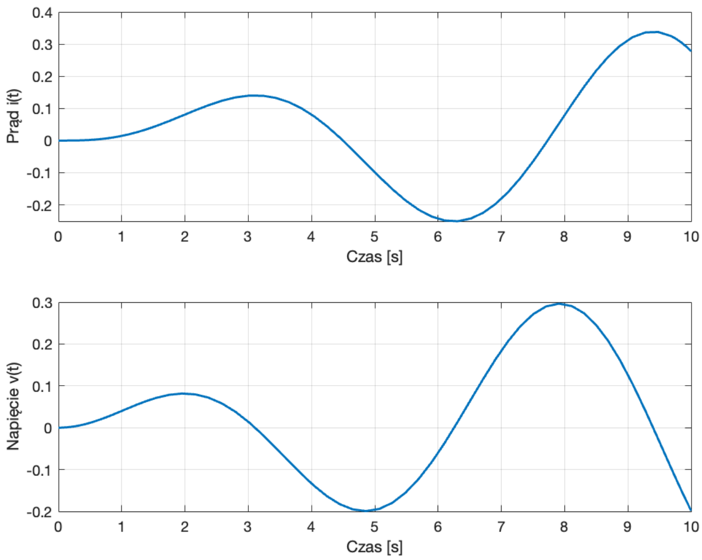
   Uwaga. Powyższa funkcja powinna być zapisana w pliku `model_a.m`

2. Zdefiniować skrypt realizujący symulacje.

   Skrypt ten może wyglądać w następujący sposób:

```
clc; clear;

L = 1;      % wartość indukcyjności
C = 1;      % wartość pojemności
R1 = 10;    % rezystancja R1
R2 = 20;    % rezystancja R2

% Definicja funkcji sterującej vf(t)
vf = @(t) sin(t); % przykładowe wejście sinusoidalne
```

```
x0 = [0; 0]; % początkowy prąd i napięcie

tspan = [0 10]; % przedział czasu
[t, x] = ode45(@(t, x) model_a(t, x, L, C, R1, R2, vf), tspan, x0);
% @(t, x) - tworzy anonimową funkcję z dwoma argumentami wejściowymi:
% t (czas) oraz x (wektor stanu zawierający i(t) oraz v(t))

% model_a(t, x, L, C, R1, R2, vf) - wywołanie funkcji model_a
% w której argumenty t oraz x są pobierane przez ode45 ale parametry
% L, C, R1, R2 i vf są już zdefiniowane i przekazywane

% @(t, x) model_a(t, x, L, C, R1, R2, vf) - funkcja anonimowa, która
% przyjmuje t oraz x ale wywołuje funkcję model_a przekazując te same
% argumenty t oraz x jak również dodatkowe stałe parametry L, C, R1, R2 i
% vf


% Wykres prądu i napięcia w funkcji czasu
figure;
subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,1)); % prąd i(t)
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Prąd i(t)');
grid('on');

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,2)); % napięcie v(t)
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Napięcie v(t)');
grid('on');
```



Rysunek 2: Wynik symulacji

Przykład 2

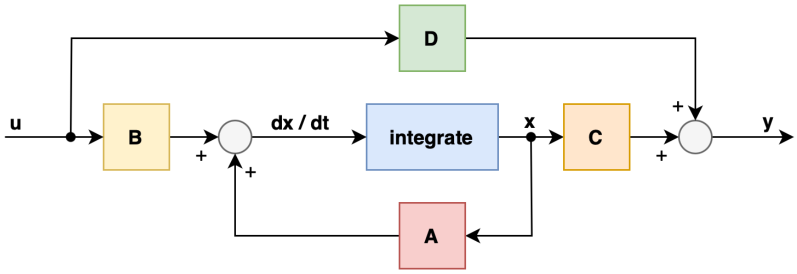
Symulację pracy układu z przykładu 1, można również zrealizować wykorzystując model zdefiniowany w przestrzeni stanów. Przestrzeń ta definiowana jest przy pomocy następujących równań:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Gdzie:

- Zmienne: (wektor) stanu to $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, wejściowe to $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, wyjściowe to: $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.
- Macierze: stanu to $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{qn}$, wejść to $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{qm}$, wyjść to: $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{pn}$, przenoszenia to: $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{pm}$.

Macierze $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{B}$ opisują dynamikę układu, natomiast macierze $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$ definiują sygnały wyjściowe układu.



Rysunek 3: Schemat blokowy równań stanu dla układu ciągłego

Dla rozpatrywanego przypadku, macierze te będą miały postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektory stanu $\mathbf{x}$ i wejść $\mathbf{u}$, zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = v_f(t)$$

Przykładowy skrypt implementujący symulację rozważanego układu może być następujący:

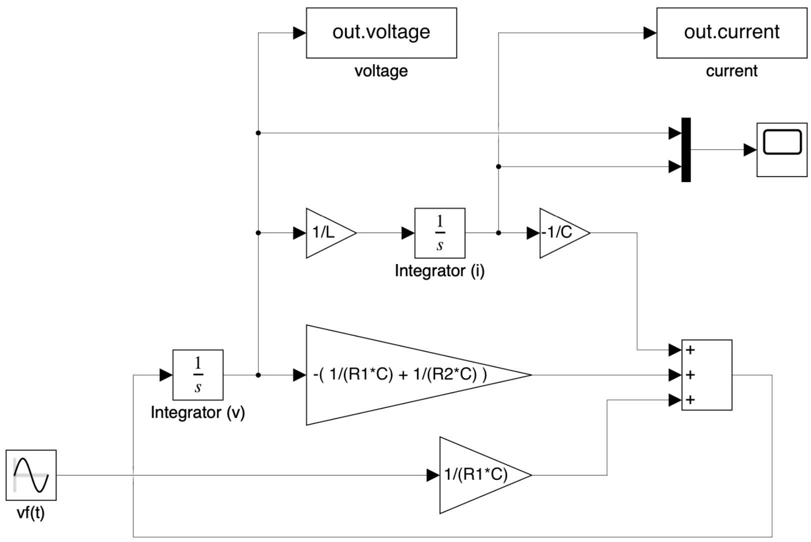
```
clc; clear;

% Parametry
L = 1;      % indukcyjność
C = 1;      % pojemność
R1 = 10;    % rezystancja R1
R2 = 20;    % rezystancja R2

% Macierze przestrzeni stanów (opis dynamiki układu)
A = [0, 1/L;
     -1/C, -(1/(R1*C) + 1/(R2*C))];
B = [0;
     1/(R1*C)];

% Wyjście: prąd i(t) i napięcie v(t)
C = [1, 0;  % wyjście prąd i(t)
     0, 1]; % wyjście napięcie v(t)
D = [0; 0];

% model w przestrzeni stanów
sys = ss(A, B, C, D);

% definicja funkcji sterującej
% Wejście vf(t)
t = linspace(0, 10, 1000); % przedział czasu
vf = sin(t);               % sygnał wejściowy

% Warunki początkowe
x0 = [0; 0]; % początkowy prąd i napięcie

% Symulacja odpowiedzi na wejście vf(t)
[y, t, x] = lsim(sys, vf, t, x0);
```

```
% Wykresy wyników
figure;
subplot(2,1,1);
plot(t, y(:,1)); % prąd i(t)
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Prąd i(t)');
grid('on');

subplot(2,1,2);
plot(t, y(:,2)); % napięcie v(t)
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Napięcie v(t)');
grid('on');
```

Przykład 3

Korzystając z równań różniczkowych modelujących rozważany układ, można dokonać jego symulacji wykorzystując system `Simulink`.

Przykładowy diagram, implementujący model, przedstawiony jest na rysunku poniżej:



Rysunek 4: Diagram modelu w programie Simulink

Diagram ten (zapisany do pliku `model_b.slx`) uruchomić można wykonując poniższy skrypt:

```
clc; clear;

% Parametry
L = 1;      % indukcyjność
C = 1;      % pojemność
R1 = 10;    % rezystancja R1
R2 = 20;    % rezystancja R2

% Czas symulacji
simTime = 10;  % Czas trwania symulacji w sekundach

% Uruchomienie symulacji
out = sim('model_b', 'StopTime', num2str(simTime));

% Odczyt wyników symulacji
current_data = out.current.data;      % Prąd i(t)
current_time = out.current.time;      % Czas dla prądu

voltage_data = out.voltage.data;      % Napięcie v(t)
voltage_time = out.voltage.time;      % Czas dla napięcia
```

```
% Rysowanie wykresów
figure;
subplot(2,1,1);
plot(current_time, current_data);
title('Prąd i(t)');
xlabel('Czas (s)');
ylabel('Prąd (A)');
grid('on')

subplot(2,1,2);
plot(voltage_time, voltage_data);
title('Napięcie v(t)');
xlabel('Czas (s)');
ylabel('Napięcie (V)');
grid('on')
```

Przykład 4

Rozwiązanie problemu z przykładu 1 przy pomocy modelu transmitancyjnego, określającego stosunek wejścia do wyjścia modelu (przy zerowych warunkach początkowych).

Model opisany był następującym układem równań różniczkowych:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$
$$\frac{v_f(t) - v(t)}{R_1} = i(t) + C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Stosując operator Lapalce'a $\frac{d}{dt} \to s$, sygnały prądu i napięcia w dziedzinie czasu, można przedstawić w dziedzinie zespolonej w następujący sposób:

$$v(t) \to V(s)$$
$$i(t) \to I(s)$$

Przyjmując powyższe oznaczenia, pierwsze równanie układu można przedstawić w postaci:

$$V(s) = L \cdot s \cdot I(s)$$

co prowadzi do:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls}$$

Drugie równanie przyjmuje postać:

$$\frac{V_f(s) - V(s)}{R_1} = I(s) + C \cdot s \cdot V(s) + \frac{V(s)}{R_2}$$

Podstawiając do powyższego równania zależność $I(s) = \frac{V(s)}{Ls}$, uzyskuje się:

$$\frac{V_f(s) - V(s)}{R_1} = \frac{V(s)}{Ls} + CsV(s) + \frac{V(s)}{R_2}$$

Jak wcześniej wspomniano, transmitancja określa stosunek wejścia do wyjścia modelu, zatem dla rozpatrywanego przykładu będzie to: $\frac{V(s)}{V_f(s)}$. Aby uzyskać interesującą zależność, należy powyższe równanie przemnożyć obustronnie przez R_1:

$$V_f(s) - V(s) = \frac{R_1 V(s)}{Ls} + R_1 CsV(s) + \frac{R_1 V(s)}{R_2}$$

Porządkując wyrazy i wyciągając $V(s)$ jako wspólny czynnik po prawej stronie, uzyskuje się:

$$V_f(s) = V(s)\left(1 + \frac{R_1}{Ls} + R_1 C s + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Ostatecznie transmitancja określająca stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego rozpatrywanego układu, określa zależność:

$$H(s) = \frac{V(s)}{V_f(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{Ls} + R_1 C s + \frac{R_1}{R_2}}$$

Transmitancję prądową określającą stosunek sygnału prądowego do napięcia zasilającego: $\frac{I(s)}{V_f(s)}$, można uzyskać wykorzystując przekształcone do postaci operatorowej pierwsze równanie modelu $I(s) = \frac{V(s)}{Ls}$, wtedy transmitancja ta przyjmuje postać:

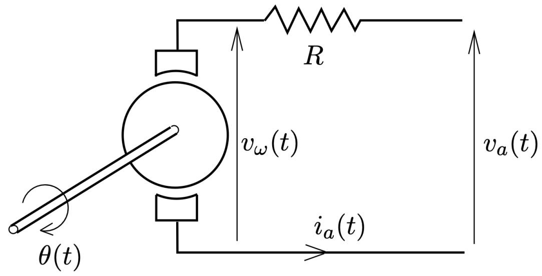
$$H_i(s) = \frac{I(s)}{V_f(s)} = \frac{H(s)}{Ls}$$

Skrypt implementujący rozwiązanie rozważanego problemu z wykorzystaniem transmitancji operatorowej może mieć następującą postać"

```
clc; clear;

% Parametry
L = 1;      % indukcyjność
C = 1;      % pojemność
R1 = 10;    % rezystancja R1
R2 = 20;    % rezystancja R2

s = tf('s');  % Operator Laplace'a

% Transmitancja H(s): transitancja napięciowa układu
H = 1 / (1 + (R1/(L * s)) + R1 * C * s + (R1 / R2));

% Transmitancja prądowa układu
H_i = H / (L * s);

% Wejście vf(t)
t = linspace(0, 10, 1000); % przedział czasu
vf = sin(t);               % sygnał wejściowy

% Symulacja odpowiedzi napięcia na wymuszenie sinusoidalne
[v_out, t_out] = lsim(H, vf, t);

% Symulacja odpowiedzi prądu na wymuszenie sinusoidalne
[i_out, t_out] = lsim(H_i, vf, t);

% Wykres prądu
figure;
subplot(2, 1, 1);
plot(t_out, i_out, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Prąd i(t)');
grid('on');

% Wykres napięcia
subplot(2, 1, 2);
plot(t_out, v_out, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Napięcie v(t)');
grid('on');
```

Zadanie 1

Rozważmy obcowzbudny silnik prądu stałego. Niech $v_a(t)$ oznacza napięcie twornika, natomiast $\theta(t)$ kąt wyjściowy. Uproszczony schemat tego układu pokazano na rysunku poniżej:



Rysunek 5: Uproszczony model silnika prądu stałego

Niech:

- J oznacza moment bezwładności wału silnika,
- $\tau_e(t)$ oznacza moment elektromagnetyczny,
- $i_a(t)$ oznacza prąd twornika,
- k_1, k_2 będą stałymi, odpowiednio momentu elektromagnetycznego oraz tłumienia momentu,
- R oznacza rezystancję twornika.

Zastosowanie znanych zasad fizyki implikuje, iż poszczególne zmienne są powiązane zależnościami:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_e(t) = k_1 i_a(t)$$

$$v_\omega(t) = k_2\frac{d\theta}{dt}$$

$$i_a(t) = \frac{v_a(t) - k_2\frac{d\theta}{dt}}{R}$$

Łącząc powyższe równania, otrzymuje się model w postaci równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = k_1\left[\frac{v_a(t) - k_2\frac{d\theta}{dt}}{R}\right]$$

Wprowadzając dodatkowe zmienne (stanu):

$$x_1(t) = \theta(t)$$

$$x_2(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

Uzyskany model można łatwo przekształcić do postaci, który zdefiniowany jest w przestrzeni stanów:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_1 k_2}{JR} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{JR} \end{bmatrix} v_a(t)$$

Dokonaj symulacji pracy silnika o mocy $500W$, charakteryzującego się parametrami: $R = 0.5\Omega$, $J = 0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $k_1 = 0.3\text{Nm/A}$, $k_2 = 0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Czas symulacji powinien wynosić: $t = 10\text{s}$. W celu realizacji symulacji należy użyć technik przedstawionych w przykładach.