Podstawy automatyki i robotyki

Laboratorium 3

Michał Łaskawski

Informacje wstępne

Charakterystyka skokowa układu dynamicznego to odpowiedź układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego przy zerowych warunkach początkowych modelu.

Charakterystyka ta, określa jak zachowuje się układ przy ciągłym dostarczaniu mu stałych porcji energii.

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t)\right\} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s)$$

Charakterystyka impulsowa układu dynamicznego to odpowiedź układu na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych modelu.

Charakterystyka ta, określa jak zachowuje się układ przy jednorazowym dostarczeniu mu jednostkowej porcji energii.

$$y(t) = g(t)$$
$$Y(s) = 1 \cdot G(s)$$

Charakterystyka amplitudowa ciągłego układu liniowego, opisanego transmitancja operatorową $G(j\omega)$ to funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej ω, której wartości są określone wzorem: $A(\omega) = |G(j\omega)|$, gdzie:

- $|G(j\omega)| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ - moduł transmitancji widmowej.
- $\mathrm{Lm}(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ - logarytmiczny moduł transmitancji widmowej.
  - *wzmocnienie logarytmiczne* to moduł transmitancji widmowej wyrażony w decybelach dB.

Charakterystyka ta, określa wzmocnienie amplitudy sinusoidy o częstotliwości ω podanej na wejście układu.

Charakterystyka fazowa ciągłego układu liniowego, opisanego transmitancja operatorową $G(j\omega)$ to funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej ω, której wartości są określone wzorem: $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$, gdzie:

- $\arg G(j\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan\frac{Q}{P}$
  - P - to część rzeczywista transmitancji widmowej,
  - Q - to część urojona transmitancji widmowej.

Charakterystyka ta, określa przesunięcie w fazie sinusoidy o częstotliwości ω podanej na wejście układu, powodowane przez obiekt

Charakterystyka amplitudowo - fazowa (charakterystyka *Nyquista*) ciągłego układu liniowego, opisanego transmitancja operatorową $G(j\omega)$ to funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej ω, której wartości są określone wzorem: $\mathrm{N}(\omega) = G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$.

- Oś pozioma wykresu reprezentuje część rzeczywistą P transmitancji widmowej.
- Oś pionowa wykresu reprezentuje część urojoną Q transmitancji widmowej.

Skala logarytmiczna wzmocnienia umożliwia wyznaczanie charakterystyki wypadkowej układów połączonych kaskadowo (szeregowo) przez dodawanie charakterystyk układów składowych:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = |G_1|\,|G_2|\mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

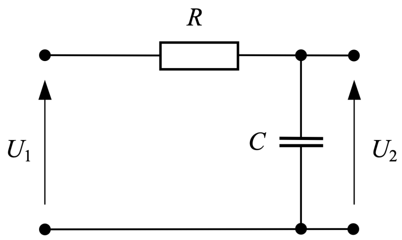
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

$$\mathrm{Lm} = 20\log|G| = 20\log(|G_1||G_2|) = 20\log|G_1| + 20\log|G_2| = \mathrm{Lm}_1(\omega) + \mathrm{Lm}_2(\omega)$$

Skala logarytmiczna częstotliwości powoduje, że charakterystyki dążą do asymptot.

Zadanie 1

Transmitancja operatorowa układu RC:



Rysunek 1: Układ RC

w którym sygnałem wejściowym jest napięciem $u_1(t)$, natomiast sygnałem wyjściowym jest napięcie $u_2(t)$, jest następująca (model inercyjny 1 rzędu):

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{k}{1 + sT}$$

gdzie: $T = R \cdot C$ interpretowany jest jako stała czasowa układu a $k = 1$ jako wzmocnienie statyczne.

Zadanie. Wyznaczyć charakterystyki skokowe i częstotliwościowe dla analizowanego układu. Przyjąć: $R = 100\Omega$, $C = 100\mu F$.

Odpowiedź. W języku `Matlab`, charakterystyki te można uzyskać wykorzystując następujące funkcje:

- `impulse` - odpowiedź układu na wymuszenie impulsowe.
- `step` - odpowiedź układu na wymuszenie skokowe.
- `bode` - charakterystyki amplitudowa wzmocnienia i fazowa.
- `nyquist` - charakterystyka amplitudowo-fazowa.

Definicja modelu i wyznaczenie odpowiedzi czasowych:

```
R = 1000;
C = 100 * 1e-6;
T = R*C;
k = 1;

s = tf('s');
G = k / (1 + s*T);

[y_step, t_step] = step(G);
[y_impulse, t_impulse] = impulse(G);

figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(t_step, y_step, 'LineWidth', 1.5);
title('Odpowiedź skokowa');
xlabel('Czas [s]');
grid('on');

subplot(2,1,2);
plot(t_impulse, y_impulse, 'LineWidth', 1.5);
title('Odpowiedź impulsowa');
xlabel('Czas [s]');
grid('on');
```

Wyznaczenie odpowiedzi częstotliwościowych:

```
[mag, phase, w] = bode(G);
mag = squeeze(mag); % Wzmocnienie (bez wymiarów macierzy)
phase = squeeze(phase); % Faza (bez wymiarów macierzy)
w = squeeze(w); % Częstotliwości (bez wymiarów macierzy)

figure(2)
subplot(2,1,1);
semilogx(w, 20*log10(mag), 'LineWidth', 1.5); % Amplituda w dB
title('Charakterystyka amplitudowa (wzmocnienia)');
xlabel('Częstotliwość [rad/s]');
ylabel('Wzmocnienie [dB]');
grid('on');

subplot(2,1,2);
semilogx(w, phase, 'LineWidth', 1.5); % Faza w stopniach
title('Charakterystyka fazowa');
xlabel('Częstotliwość [rad/s]');
ylabel('Faza [stopnie]');
grid('on');
```

Wyznaczenie charakterystyki Nyquista z wykorzystaniem danych zwracanych przez funkcję `bode`.

Transmitancję widmową można zapisać w postaci: $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)}$. Wtedy postać rzeczywista P i urojona Q zdefiniowane są w następujący sposób:

- $P = \text{Re}\ G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot \cos \angle G(j\omega)$,
- $Q = \text{Im}\ G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot \sin \angle G(j\omega)$

Co prowadzi do następującej procedury:

```
% Obliczenie odpowiedzi Nyquista w dziedzinie zespolonej
realPart = mag .* cosd(phase); % Część rzeczywista
imagPart = mag .* sind(phase); % Część urojona

figure(3);
plot(realPart, imagPart, 'b', 'LineWidth', 1.5); % Charakterystyka Nyquista
xlabel('Część rzeczywista');
ylabel('Część urojona');
title('Charakterystyka Nyquista');
grid('on');
axis equal; % Zachowanie proporcji
```

Zadanie 2

Wyznaczyć charakterystyki skokowe i częstotliwościowe dla następujących modeli:

- model proporcjonalny: $G(s) = k$, dla $k = 1$.
- model całkujący: $G(s) = \frac{k}{s}$, dla $k = 1$.
- model całkujący z inercją: $G(s) = \frac{k}{s(1+s\cdot T)}$, dla $k = 1$ oraz $T = 1$.
- model różniczkujący idealny: $G(s) = k \cdot s$, dla $k = 1$ (pominąć charakterystyki czasowe).
- model różniczkujący z inercją (rzeczywisty): $G(s) = \frac{k\cdot s}{s\cdot T+1}$.
- model oscylacyjny drugiego rzędu: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$, gdzie:
  - ξ - względny współczynnik tłumienia $0 \leq \xi \leq 1$,
  - ω_n - częstotliwość drgań nietłumionych,
  - dla częstotliwości rezonansowej $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$, wzmocnienie ma wartość maksymalną (pik rezonansowy) równą $A_r(\omega_r) = \frac{1}{2\xi^2}$,
  - jeżeli $\xi \geq 1$, to model oscylacyjny przechodzi w model inercyjny drugiego rzędu.