מבני נתונים - תרגיל מספר 11

הוד ועקנין 211441027
תומר מליק 315399956

16 בינואר 2023

אנו מצהירים כי כתבנו והגשנו יחד את התרגיל תומר מליק - 315399956 הוד ועקנין - 211441027

1 .

1.1 יהא $G=(E,V)$ גרף (מכוון או לא מכוון), ו-M מטריצת השכנות שלו. הוכיחו כי לכל $k\in\mathbb{N}$ $M_{i,j}^{k}$הוא מספר המסילות (מותר לחזור על צלעות!) מאורך k מהקדקוד i לקודקוד j.

נוכיח באינוקציה רגילה על k שלכל $k\in\mathbb{N}$ $M_{i,j}^{k}$הוא מספר המסילות (מותר לחזור על צלעות!) מאורך k מהקדקוד i לקודקוד j.

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

עבור $k=0$ ידוע שלכל מטריצה M מתקיים ש$M^{0}=\mathrm{ID}_{|V|}$כלומר לכל $i\in\mathbb{Z}_{|V|}$ מתקיים ש

$$M_{i,i}^{0}=1$$

ואכן לכל קודקוד יש מסילה מאורך 0 לעצמו
בנוסף לכל $j\in\mathbb{Z}_{|V|},j\neq j$ מתקיים ש

$$M_{i,j}^{0}=0$$

ובאמת אין מסילות מאורך 0 בין שני קודקודים זרים

<u>הנחת האינדוקציה:</u>

עבור $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ מסויים מתקיים שכל $i,j\in\mathbb{Z}_{|V|}$ מתקיים ש $M_{i,j}^{k-1}$הוא מספר המסילות (מותר לחזור על צלעות!) מאורך $k-1$ מהקדקוד i לקודקוד j.

<u>צריך להוכיח:</u>

מתקיים שכל $i,j\in\mathbb{Z}_{|V|}$ מתקיים ש $M_{i,j}^{k}$הוא מספר המסילות (מותר לחזור על צלעות!) מאורך k מהקדקוד i לקודקוד j.

<u>הוכחה:</u>

ידוע ש

$$M^k = M^{k-1} \times M$$
$$\therefore$$
$$\forall i, j \in \mathbb{Z}_{|V|}$$
$$M_{i,j}^k = \sum_{t=0}^{|V|-1} M_{i,t}^{k-1} M_{t,j}$$

לפי הנחת האינדוקציה $M_{i,t}^{k-1}$ הוא כמות המסילות מi לt בגודל $k-1$, נספור כל כמות מסילות כזאת אם ורק אם יש צלע מt לj מכיוון שבכך נגיע למסילות מאורך k בין i לj
הכפל ב$M_{t,j}$ יבצע את העבודה כי הוא 1 אם קיימת צלע ו0אם לא קיימת צלע ולכן כמות המסילות מאורך k תמיד תהיה

$$\sum_{t=0}^{|V|-1} M_{i,t}^{k-1} M_{t,j}$$

כלומר

$$M_{i,j}^k$$

■

1.2 השתמשו בסעיף א' כדי להראות איך ניתן לחשב את מספר המשולשים בגרף מכוון. חיזרו על החישוב גם בגרף לא מכוון.

בגרף לא מכוון
נעלה את מטריצת השכנים בחזקת 3, ובכך נקבל את כל המסילות מאורך 3
נסכום את האלכסון הראשי מכיוון שרק הוא מעגלים, ובכך סכמנו את כל המסילות מאורך 3 בגרף מכל איבר לעצמו.
כעת נחלק ב6 מכיוון שכל מעגל מאורך 3 מכיל 3 קודקודים שלכל אחד מהם 2 מסילות ממנו לעצמו באורך 3 (לכל כיוון יש אחת)
וכנוסחה:

$$\frac{\sum_{i \in V} M_{i,i}^3}{6}$$

בגרף מכוון
נבצע בדיוק את אותה פעולה רק תחילה נאפס את האלכסון הראשי על מנת להתעלם מכל מסילה מקודקוד לעצמו ונקרא לו M'
בנוסף בחלק הזה לא נחלק ב6 אלא ב3 מכיוון שכל משולש מכוון (a, b, c) יוצר רק 3 מסילות (מכיוון שהוא חד כיווני) ו(c, b, a) (המסילה לכיוון ההפוך) היא מסילה שונה ולכן נחשיב כמשולש שונה

$$\frac{\sum_{i \in V} M'^3}{3}$$

1.3 דונו בדרך החישוב של מספר המרובעים/מחומשים: האם ניתן לקבל נוסחה דומה גם עבורם? האם התשובה מתאימה גם לגרף מכוון וגם לגרף לא מכוון?

לא ניתן לשכלל את הנוסחה כך שתישאר דומה לנוסחה המקורית מכיוון שקשה להתעלם מהמסילות שהם יוצרות כבר צורה יותר קטנה 3.1

2 יהא $G=(E,V)$ גרף (לא מכוון) קשיר ובו משקלי כל הצלעות הן 3, פרט לצלע אחת שמשקלה הוא 4. הציגו אלגוריתם המחשב עץ פורש ממשקל מינימלי בגרף זה. על האלגוריתם לסיים ב-$O\left(|V|+|E|\right)$ פעולות. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ואת נכונות זמן הריצה.

נתחיל ממחיקת הצלע בגודל 4 מהגרף לאחר חיפושה $(O\left(|E|\right))$
נפעיל את אלגוריתם הDFS, $(O\left(|V|+|E|\right))$
קיבלנו גרף חסר מעגלים, אם הוא קשיר סיימנו מכיוון שגרף זה הוא עץ בו כל הצלעות הן מגודל 3 (וכל עץ מכיל את אותה כמות צלעות ולכן הוא המינימלי)
אם קיבלנו יער הוא יכלול 2 רכיבי קשירות בדיוק, מכיוון שהגרף היה קשיר לפני הורדת הצלע, צלע זו בהכרח היחידה שחיברה את שני רכיבי הקשירות ולכן חייבים להחזיר אותה $(O\left(1\right))$. הוא מינימלי כי הצלע בעלת הגודל 4 הייתה חייבת להיות (בשביל שיהיה עץ פורש) ומספר הצלעות קבוע בכל העצים

$$O\left(|E|\right)+O\left(|V|+|E|\right)+O\left(1\right)=O\left(|V|+|E|\right)$$

הוכחת הנכונות מתבססת על אלגוריתם הDFS אותו הוכחנו בכיתה והעובדה שכל הצלעות בעלות אותו משקל ולכן ניתן להשתמש בDFS

3.2

3 .

3.1 פתרו את בעיית מציאת העץ הפורש ממשקל מקסימלי. הוכיחו נכונות, נתחו ביצועים

עבור הגרף $G=(V,E)$, גרף לא מכוון:
נבנה גרף חדש $G'=\{V,\emptyset\}$ ביעילות של מעבר על כל הקודקודים$O\left(|V|\right)$.
נבנה max-heap לקודקודים ומשקלים, המשקלים יהיו גודל הצלע בעלת המשקל הגדול ביותר המגיע לקודקודים שסימנו כשחורים (כלומר שעברנו עליהם והוספנו כבר לעץ),
לכל קודקוד נוסיף שדה של מיקומו במערך הheap ונגדיר שהוא בצבע לבן $O\left(|V|\right)$
נוסיף את כל הקודקודים לheap עם ערך המשקל $-\infty$
נשלוף את הקודקוד הראשון מהערמה, כלומר הקודקוד עם המשקל המקסימלי (שכרגע הוא $-\infty$)
עבור כל שכן שלו נעדכן את משקל כל השכנים הלבנים לפי הצלע המגיעה אליהם אם היא יותר גדולה מהמשקל שלהם כרגע (תוך עדכון הheap)
עבור כל השכנים השחורים של אותו קודקוד נמצא את הצלע הגדולה ביותר לאחד השכנים השחורים ואותה נוסיף לגרף G'
נעדכן לבסוף את הקודקוד להיות שחור

נמשיך למשוך ולהפעיל את הפעולה שוב ושוב ושוב עד שנגמור את כל הקודקודים או שנמשוך קודקוד עם משקל $-\infty$

אם הגענו לקודקוד עם משקל $-\infty$ זה אומר שאין עץ פורש ולכן אין גם פיתרון

במידה ולא הגענו לקודקוד עם משקל $-\infty$ זה אומר שG' הוא העץ הפורש עם המשקל המקסימלי.

עברנו במקסימום על כל הצלעות ולעל כל הקודקודים ועבור כל צלע במקסימום עשינו heapify כלומר סכום הפעולות הוא

$$O\left(|V|+|E|\log\left(|V|\right)\right)$$

בסך הכל

$$O\left(|V|\right)+O\left(|V|\right)+O\left(|V|+|E|\log\left(|V|\right)\right)=O\left(|V|+|E|\log\left(|V|\right)\right)$$

<u>הוכחת נכונות:</u>

נוכיח באינדוקציה על כמות הקודקודים השחורים: $v\in\mathbb{N}$ בגרף $G=(V,E)$ שכאשר היו v קודקודים שחורים, העץ המקסימלי בעל v קודקודים המכיל את הקודקוד הראשון שהוצאנו (נקרא לו u) מהערמה הוא G' (לאחר שנמחק ממנו את הקודקודים הבודדים (למעט u))

<u>בסיס האינדוקציה:</u>

$v=1$, לקחנו קודקוד אחד מהערמה והוא u ואכן קודקוד לבד הוא העץ בעל המשקל הגדול ביותר שניתן לבנות רק מקודקוד בודד.

<u>הנחת האינדוקציה:</u> עבור $v>1$, כאשר היו $v-1$ קודקודים שחורים, העץ המקסימלי בעל $v-1$ קודקודים המכיל את הקודקוד u הוא G'

<u>צריך להוכיח:</u> כאשר היו v קודקודים שחורים, העץ המקסימלי בעל v קודקודים המכיל את הקודקוד u הוא G'

<u>הוכחה:</u>

עבור v קודקודים, אנו יודעים מהנחת האינדוקציה שG' היה העץ המקסימלי שכולל את u כשאר היו $v-1$ קודקודים שחורים, כאשר הוספנו את הקודקוד האחרון הוספנו את הצלע שהגדילה אותו הכי הרבה ולכן G' יהיה העץ המקסימלי שמכיל את u בעל v קודקודים.

אם לקחנו את כל הקודקודים מהheap לקחנו $|V|$ קודקודים ולפי האינדוקציה הוכחנו שמדובר בעץ מקסימלי המכיל $|V|$ קודקודים, כלומר העץ הפורש המקסימלי

■

3.2 פתרו את בעיית מציאת עץ פורש ממשקל מינימלי כאשר פונקצית המשקל היא פונקציה ממשית כלשהי (לאו דווקא חיובית).

מכיוון שהאלגוריתם מהסעיף הקודם עובד גם על מספרים שליליים

עבור כל גרף $G=(V,E)$ ופונקצית המשקלים $f:E\to\mathbb{R}$ נגדיר פונקציית משקלים חדשה $g:E\to\mathbb{R}$ כך

$$g\left(x\right)=-f\left(x\right)$$

ונפעיל את האלגוריתם מהסעיף הקודם.

בניית הפונקציה: $O(1)$
שימוש בפונקציה מהסעיף הקודם $O(|V|+|E|\log(|V|))$ כלומר האלגוריתם לוקח

$$O(|V|+|E|\log(|V|))$$

<u>הוכחת נכונות:</u>
אם ניקח את כל העצים הפורשים ונסדר אותם לפי גודלם

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n$$

הכפלת משקלי הצלעות ב-1 תכפול את משקל העץ ב-1 ותהפוך את כיוון האי שיוון ללא שינוי בסדר

$$-x_1 \geq -x_2 \geq -x_3 \geq ... \geq -x_n$$

ועכשיו כאשר נחפש את העץ בעל המשקל המקסימלי נמצא את העץ המינימלי טרם ההכפלה

$\blacksquare$

4 יהא $G=(V,E)$ גרף (לא מכוון) קשיר ו-$w:E\to\mathbb{R}^+$ פונקציה חד חד ערכית

4.1 הוכיחו כי קיים בגרף (עם הפונקציה w) עץ הפורש מינימלי יחיד (נקרא לו T לטובת ההמשך).

נוכיח עבור $|V|=1$: קיים רק עץ פורש אחד לקודקוד יחיד

נוכיח באינדוקציה שעבור כל $v\in\mathbb{N}, v\geq 2$ מתקיים שיש עץ בגודל v מינימלי יחיד
<u>בסיס האינדוקציה:</u>
$v=2$, ידוע שמדובר בדיוק בצלע אחת ולכן כל צלע עם הקודקודים שלה הם העצים היחידים בגודל 2 ומשקלת הוא משקל הצלע, מכיוון שלכל צלע משקל אחר (w חד חד ערכית) יש רק אחת בעלת משקל מקסימלי (אין 2 שוות)
<u>הנחת האינדוקציה:</u> עבור $v>2$ מסויים מתקיים שיש עץ בגודל $v-1$ מינימלי יחיד
<u>צריך להוכיח:</u> קיים שיש עץ בגודל v מינימלי יחיד
<u>הוכחה:</u>
ידוע שכל עץ מקסמלי מגודל v הוא אחד העצים המקסימלים מגודל $v-1$ + הצלע הכי גדולה שאפשר לחבר לאותו עץ לקודקוד שלא נמצא בעץ
ידוע מהנחת האינדוקציה שיש רק עץ אחד מגודל $v-1$ ולכן חייבים להשתמש בו
לאחר מכן נוסיף את הצלע הכי גדולה שאפשר לחבר לאותו עץ לקודקוד שלא נמצא בעץ קיימת רק אחת מכיוון שאין 2 צלעות בעלות אותו משקל (w חד חד עכית)
ולכן יש רק עץ אחד מקסימלי בעל v קודקודים

הוכחנו באינדוקציה שעבור כל $|V|\geq v\geq 2$ מתקיים ש קיים רק עץ אחד מקסימלי
כלומר יש רק עץ אחד מקסימלי מגודל $|V|$, כלומר רק עץ פורש אחד מקסימלי (עבור $|V|\geq 2$ באינדוקציה ועבור $|V|=1$ בהתחלת הסעיף)

4.2 .

מכיוון שw' היא גם חד חד ערכית, ושומרת על יחס (עבור כל $a, b \in E$ כך ש$w(b) \geq w(a)$ מתקיים

$$w'(a) \geq w'(b)$$

)
אז קיים עץ פורש מקסימלי יחיד גם עם משתמשים בw'
נוכיח שמדובר באותו עץ יחיד:
אם נשתמש באלגוריתם מסעיף 3.1 על מנת למצוא עץ בw ובw' נקבל את אותו עץ מכיוון שהיחס בין הצלעות נשמר ורק עליו מתבסס האלגוריתם (ולא סכום של צלעות או כל פעולה אחרת) ולכן נקבל את העץ הפורש מקסימלי היחיד T עם הפונקציה w אשר יהיה שווה לT' העץ הפורש המקסימלי היחיד בw'

אינדקס הערות

3.1 חסר הסבר. -1

3.2 כאן כדאי היה להסביר את מה שאתה כותב בתיאור האלגוריתם לגבי נכונות מחיקת הצלע (במקום בתוך תיאור האלגוריתם).