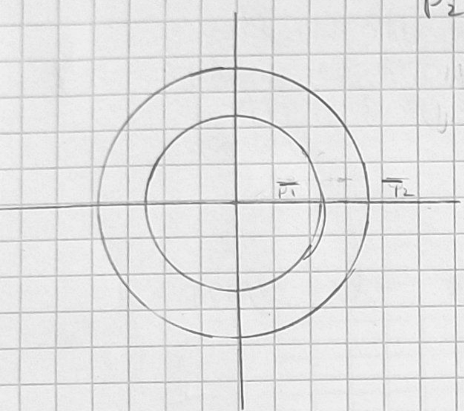
$$C = H = \left\{ h(r_1, r_2) = (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 \geq r_1 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq r_2 \end{matrix} \right\}$$

מרחב ההיפותזות שלנו הוא טבעות שנוצרות מ-2 מעגלים.

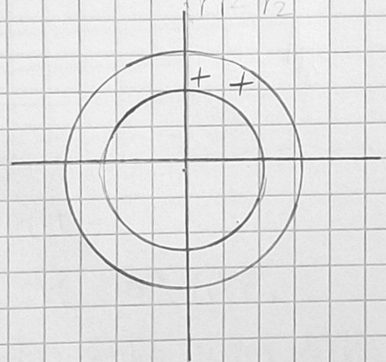
נוכיח ש- $VC = 2$ - נראה שקיימת צורת סידור מסוימת עבורה כל ההשמות קיימת היפותזה שמדייקת.

נסתכל על 4 ההשמות האפשריות של 2 נקודות שנמצאות על אותו קו שמקביל לציר X. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$



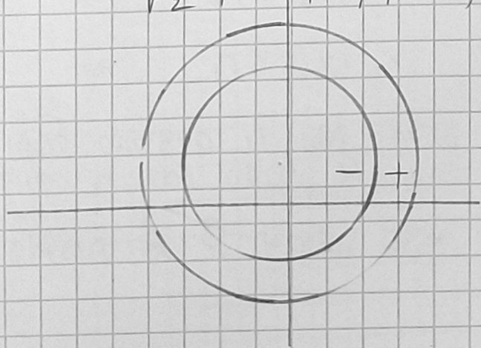
אם שתי הנקודות הן מינוס ניתן לראות שקיימת היפותזה שמקיימת אותן

$r_1 \leq r_2$

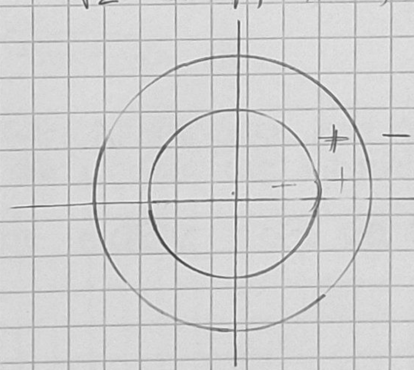


אם שתי הנקודות הן פלוס

אם P_1 + ו- P_2 -



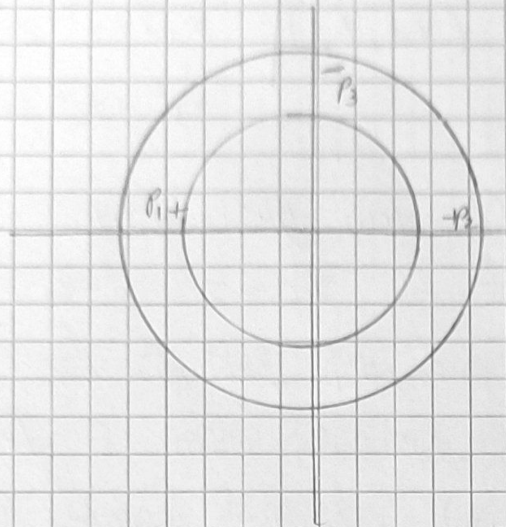
אם P_1 - ו- P_2 +

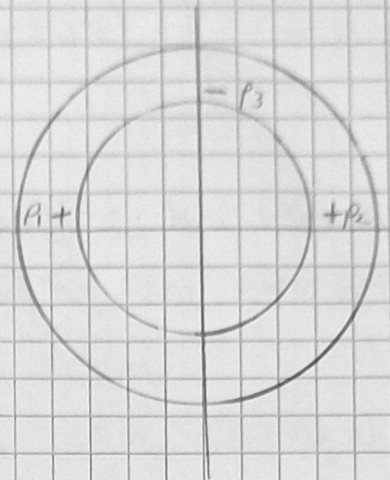


ראינו ש- $VC \geq 2$ כעת נסתכל על מצב של 3 דגימות

ישנם 2 סוגי סידורים אפשריים - אם המרחק של 3 הנקודות מהמרכז המעגל שווה או שהמרחק של לפחות אחת מהן שונה.

אם לפחות אחת מהדגימות במרחק שונה מהראשית   אם הדגימות באותו מרחק מהראשית





ניתן לראות שכבר לפסול את את p_1 ו- p_2 הטבעת המרכזית תפסול גם את p_3

במצב שהדגימות נמצאות במרחק שונה מהראשית - כל טבעת תפסול את שלושת הדגימות

ג)

הוכחנו ש- $VC < 3 \Leftarrow VC = 2$

1ב) האלגוריתם -

נאתחל את $r_1, r_2 = 0$.

עבור כל דגימה שהיא פלוס נחשב את $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$:

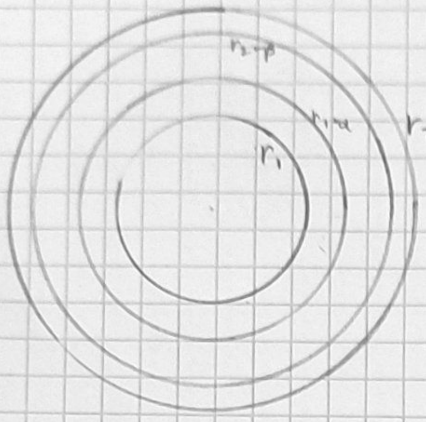
אם $x_1^2+x_2^2 > r_2$ נעדכן $r_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

אם $x_1^2+x_2^2 < r_1$ נעדכן $r_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

כך נקבל שהרדיוס r_1 הוא המרחק הקטן ביותר מהראשית לנקודה שהיא פלוס והרדיוס r_2 הוא המרחק של הנקודה (שהיא פלוס) הרחוקה ביותר מהראשית.

מכיוון שעברנו על כל דגימה פעם אחת לכן סיבוכיות הריצה היא $O(m)$

ב1



$$S_1(\varepsilon)=\{(x,y): r_1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le r_1+\alpha\}$$

$$S_2(\varepsilon)=\{(x,y): r_2-\beta \le \sqrt{x^2+y^2} \le r_2\}$$

$$\mathbb{P}(S_1(\varepsilon))=\mathbb{P}(S_2(\varepsilon))=\frac{\varepsilon}{2}$$

* α ו- β מקיימות את התנאי עבור ההסתברות לעיל במעגלים אלו

אם $Err(L(D),c)>\varepsilon$

אז $D \in \bigcup_{i=1}^{2} \{\Delta \in X^m : \Delta \cap S_i = \emptyset\}$

אם הטעות גדולה מאפסילון אז הדגימה שלי לא ״נפלה״ ב- S_1, S_2.

$$\mathbb{P}(\{D \in X^m : Err(L(D),c) > \varepsilon\}) \le 2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \le 2e^{-\frac{m\varepsilon}{2}}$$

$$2e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \le \delta$$

$$e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \le \frac{\delta}{2}$$

$$-\frac{m\varepsilon}{2} \le \ln\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\boxed{m \ge \frac{2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}$$

ב2

$1-\delta=0.95 \qquad \varepsilon=0.05$

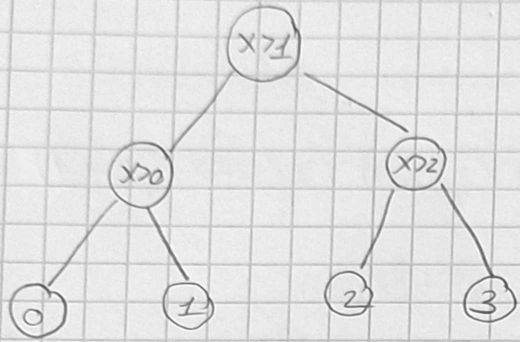
$$m \ge \frac{2}{0.05}\cdot \ln\left(\frac{2}{0.05}\right)=147.55$$

$$m \ge \frac{1}{0.05}\left(4\log_2\frac{2}{0.05}+8\cdot 2\log_2\frac{13}{0.05}\right)=2992.96$$

ניתן לראות שהחסם שמצאנו בסעיף הקודם יותר הדוק (בערך פחות 20 פעמים)
מכיוון שהשתמשנו בתכונות הגאומטריות של ההיפותזה.

(2א) עבור H_3 מספר הצמתים הוא $2^3-1=7$ מספר העלים $4 = 2^{3-1}$

נתבונן על הקבוצה $\{0,1,2,3\}$ ונוכיח כי $VC(H_3)\geq 4$



ניתן לראות שעבור כל דיכוטומיה של הקבוצה ניתן למצוא היפותזה $h\in H_3$ בנוסף, ההיפותזה תמיד תהיה קונסיסטנטית עם הקבוצה ולכן H_3 מנתצת קבוצה של 4 איברים.

נעבור לקבוצה של 5 איברים -

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

נתבונן על ההשמה - $c(x_1)=c(x_3)=c(x_5)=0$

$$c(x_2)=c(x_4)=1$$

היות שמספר העלים קטן ממספר הדגימות - קיימות 2 דגימות שמופיעות באותו עלה.

אם x_j, x_i הן דגימות עוקבות אז $c(x_i)\neq c(x_j)$ אבל הן כן יסווגו באותו עלה

אם x_j, x_i הן לא דגימות עוקבות אז קיים x_{i+1}

$x_j \leq x_{i+1} \leq x_i$. x_i ו- x_{i+1} יסווגו באותו עלה וגם עבורן $c(x_i)\neq c(x_{i+1})$

$\Downarrow$

$$VC(H_3)=4$$

(2ב) ב- H_m יש 2^{m-1} עלים. לכן (כפי שהוכחנו בסעיף הקודם) $VC(H_m)\leq 2^{m-1}$

ניתן להוכיח ש- $VC(H_m)\geq 2^{m-1}$

אם נדאג על שכל עלה מכיל בדיוק דגימה אחת - ניתן לקבל את הלייבל הנכון עבור כל דיכוטומיה. לכן $VC(H_m)\geq 2^{m-1}$

הראינו ש- $VC(H_m)\leq 2^{m-1}$ וגם $VC(H_m)\geq 2^{m-1}$

$\Downarrow$

$$VC(H_m)=2^{m-1}$$

c3

$$\kappa(x,y) = (x \cdot y + 1)^3 = (x^T y + 1)^3$$

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\kappa(x,y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)^3$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)(x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)(x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)\big[x_1^2 y_1^2 + x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1 y_1$$
$$+ x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1\big]$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)(x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + 2 x_1 y_1$$
$$+ 2 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2 + 1)$$

$$= x_1^3 y_1^3 + 2 x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 2 x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 x_2 y_1 y_2$$
$$+ x_1 x_2^2 y_1 y_2^2 + x_1 y_1 + x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 2 x_1 x_2^2 y_1 y_2^2$$
$$+ 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + 2 x_2^2 y_2^2 + x_2^3 y_2^3 + x_2 y_2$$
$$+ x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + 2 x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2 + 1$$

$$= x_1^3 y_1^3 + x_2^3 y_2^3 + 3 x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 3 x_1 x_2^2 y_1 y_2^2$$
$$+ 3 x_1^2 y_1^2 + 3 x_2^2 y_2^2 + 6 x_1 x_2 y_1 y_2$$
$$+ 3 x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + 1$$

$$= (x_1^3, x_2^3, \sqrt{3} x_1^2 x_2, \sqrt{3} x_1 x_2^2, \sqrt{3} x_1^2, \sqrt{3} x_2^2, \sqrt{6} x_1 x_2, \sqrt{3} x_1, \sqrt{3} x_2, 1) \cdot$$
$$(y_1^3, y_2^3, \sqrt{3} y_1^2 y_2, \sqrt{3} y_1 y_2^2, \sqrt{3} y_1^2, \sqrt{3} y_2^2, \sqrt{6} y_1 y_2, \sqrt{3} y_1, \sqrt{3} y_2, 1)$$

$$= \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$\boxed{\varphi(x) = \{ x_1^3, x_2^3, \sqrt{3} x_1^2 x_2, \sqrt{3} x_1 x_2^2, \sqrt{3} x_1^2, \sqrt{3} x_2^2, \sqrt{6} x_1 x_2, \sqrt{3} x_1, \sqrt{3} x_2, 1)}$$

Full rational varieties

ב״ה

$\left(\psi(x)\right.$ נקרא מכופל $\left.10\right)$

גב הכפלת ש $10 = \psi(x) \cdot \psi(y)$

2 הכפלות $= K(x,y)$

$\Downarrow$

המכונה 8 הכפלות

4

$$f(x,y) = 2x - y$$

$$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$$

$$\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$$

$$L(x,y,\lambda) = 2x - y - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x,y,\lambda) = 2 - \frac{\lambda}{2}x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{\lambda}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x,y,\lambda) = -1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2\lambda}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x,y,\lambda) = -\frac{x^2}{4} - y^2 + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 1 = 0$$

$$17 = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{17}{4} \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{17}{4}}}$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{17}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{I}$$

$$x = -\frac{8}{\sqrt{17}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \lambda = -\sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{II}$$

$$f\left(x = \frac{8}{\sqrt{17}}, y = -\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{16}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \Rightarrow \max = \sqrt{17}$$

$$f\left(x = -\frac{8}{\sqrt{17}}, y = \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{16}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{17}{\sqrt{17}} = -\sqrt{17} \Rightarrow \min = -\sqrt{17}$$