אוילר:

טענה: גרף (לאו דווקא פשוט) קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ מכיל מעגל אוילר אם"ם לכל קודקוד יש דרגה זוגית.

טענה: גרף קשיר ולא מכוון מכיל מסלול אוילר שאינו מעגל אם"ם הוא מכיל בדיוק שני קודקודים מדרגה אי-זוגית.

BFS:

טענה: תת מסלול של מסלול קצר ביותר הוא מסלול קצר ביותר.

טענה (אי שוויון המשולש)- לכל קשת (u, v) מתקיים $\delta(u) \leq \delta(v) + 1$.

הוכחת BFS:

1. למה: בכל שלב בריצת BFS, לכל $v \in V$ מתקיים $d(v) \geq \delta(v)$.
2. למה: נניח בשלב מסוים בריצה התור הוא $Q = [v_1, ..., v_r]$. אזי מתקיים:
   - מונוטוניות: $d(v_i) \leq d(v_{i+1})$
   - $d(v_r) \leq d(v_1) + 1$

טענה: גרף $G(V, E)$ הינו דו-צדדי אם"ם הוא אינו מכיל מעגל באורך אי-זוגי.

טענה: קשת בין רמות עוקבות אם"ם היא על מסלול קצר ביותר.

DFS:

Gray Path Lemma: v צאצא של u ביער G_π אם"ם v התגלה אחרי u ולפני נסיגה מ- u.

טענה: בגרף קשיר ולא מכוון אם (u, v) אינה קשת עץ, אז מתקיים בין צמתיה יחס משפחתי של צאצא ואב קדמון ב- G_π.

משפט הסוגריים: יהי G מכוון או לא ושני צמתים u, v. נתבונן באינטרוולים שלהם I_u, I_v, מתקיים אחד מהשלושה:

1. האינטרוולים זרים וגם אין קשר צאצא-אב קדמון בין u, v ב- G_π.
2. $I_u \subsetneq I_v$ וגם u צאצא של v ב- G_π.
3. $I_v \subsetneq I_u$ וגם v צאצא של u ב- G_π.

משפט המסלול הלבן: יהי G גרף. v צאצא של u ביער G_π אם"ם בזמן $k(u)$ יש מסלול לבן מ- u ל- v בגרף G.

טענה: אם מריצים מ- $G(V, E)$ לא מכוון וקשיר DFS, BFS ומקבלים עצים $T_B = T_D$ אזי $G = T$.

טענה: שורש עץ לא מנתק אם"ם יש לו לכל היותר בן אחד.

טענה: צומת u לא מנתק אם לכל בן שלו יש צאצא עם אב חורג עם אבא חורג w שמקיים $k(w) < k(u)$.

SCC:

למה: יהי C רק"ח בגרף מכוון $G(V, E)$. לכל קשת ב- G שיוצאת מ- C ומובילה ל- C'' מתקיים שזמן הנסיגה $f(C'')$ מוקדם לזמן הנסיגה $f(C)$.

מסקנה: כל קשת ב- G^T שיוצאת מ- C מובילה לרק"ח C'' עבורו זמן הנסיגה $f(C'')$ מאוחר לזמן הנסיגה $f(C)$.

MST:

אבחנה: הוספה לעץ פורש קשת שאינה בעץ סוגרת מעגל יחיד, אחרי הסרה של קשת מהמעגל הנסגר, נקבל עץ פורש.

אבחנה: הסרת קשת מעץ פורש מחלקת אותו לשני עצים זרים.

אבחנה: בעץ פורש קשת מגדירה חתך שאין קשתות נוספות בעץ שחוצות אותו.

הכלל הכחול: אם קיים חתך של הגרף דרכו לא עוברת אף קשת כחולה, צבע בכחול קשת לא צבועה שמשקלה מינימלי בחתך.

הכלל האדום: אם קיים בגרף מעגל חסר קשתות אדומות, צבע באדום קשת לא צבועה שמשקלה מקסימלי במעגל.

טענה: בגרף לא מכוון וקשיר לכל שני עפ"מים T^1, T^2 מתקיים לכל $r \in \mathbb{R}$ כי ל- $T^1_{\leq r}, T^2_{\leq r}$ יש בדיוק אותם רכיבי קשירות.

:SSSP

למה: אם $u.d \leq \delta(s,u)$ ו- $(u,v) \in E$ אזי: $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + \delta(u,v) \leq \delta(s,u) + l(u,v)$.

למה U: אם מתחילים ממצב שבו לכל צומת $v.d \geq \delta(s,v)$ אז זה יתקיים לאחר כל סדרת Realxים.

מסקנות:

- אם אין מסלול בין s ל- v ובהתחלה $v.d = \infty$ אז אחרי כל סדרת Relaxים זה ישאר כך.
- אם בשלב מסוים $v.d = \delta(s,v)$ אז אף פעולת Relax לא תשנה זאת.

למה L: אם $s.d = 0$ ו- $P = (s = u_0, ..., u_k = t)$ מסלול, אז אחרי כל סדרת Relaxים שמכילה את התת-סדרה $(\text{Relax}(u_0, u_1), ..., \text{Relax}(u_{k-1}, u_k))$ יתקיים $t.d \leq l(P)$.

:Bellman-Ford

למה: אם אין מעגלים שליליים נגישים מ- s אזי האלגוריתם עוצר תוך $n-1$ איטרציות לכל היותר וצודק.

למה: אם יש מעגל שלילי אז בהכרח יהיה שינוי כלשהו באיטרציה ה- n.

למה 1: בכל זמן, אם C מעגל ב- G_π אזי C הוא מעגל שלילי.

למה 2: אם אין מעגל שלילי נגיש מ- s אזי בסיום הריצה G_π הוא עץ המסלולים הקלים ביותר.

למה 3: אם יש מעגל שלילי נגיש מ- s אז G_π מכיל מעגל (ובפרט שלילי).

:APSP

משפט: קיימת פונקציית פוטנציאל פיזיבילית אם"ם אין בגרף מעגל שלילי. פונקציה כזו, או מעגל שלילי יכולים להמצא על ידי הרצת אלגוריתם sssp.

זרימה:

יש שוויון בין: ערך הזרימה המקסימלית, גודל חתך מינימלי, מספר מקסימלי של מסלולים זרים בקשתות, מספר מקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים, מספר מינימלי של קשתות שיש להסיר כדי לנתק את הגרף.

אלגוריתמים מהתרגול:

BFS:

צביעת גרף שכל מעגל בו באורך זוגי: נחשב עץ BFS מקודקוד כלשהו. קודקודים ברמות זוגיות נצבע בירוק, קודקודים ברמות אי-זוגיות נצבע בצהוב.

חישוב גרף המק"בים מצומת s: מריצים BFS ושומרים את כל הקשתות בין רמות עוקבות.

חישוב גרף המק"בים $s \rightsquigarrow t$: מחשבים מרחקים מ- s ומ- t בגרף ההפוך. קשת (u,v) שייכת לגרף אם"ם מתקיים עבורה כי $\delta(s,u)+1+\delta(v,t)=\delta(s,t)$.

DFS:

מציאת קודקודים מנתקים: מריצים DFS משודרג. עוברים על כל צומת u ובודקים האם יש לו שכן v כך ש- v בן של u וגם $low(v) \geq k(u)$. אם כן אז u מנתק. בודקים את השורש בנפרד (אם יש לו יותר מבן).

מוסיפים לגרף מכוון שנתון פלט ה- DFS שלו קשת חדשה. בדיקה האם פלט ה- DFS מתאים לגרף החדש: אם"ם מתקיים $k(u)<f(u)<k(v)<f(v)$.

SCC:

חישוב קבוצת מוצא מינימלית: נחשב רק"חים ומכל מקור נבחר נציג אחד.

מציאת קבוצה ראשונית (לכל $u \in U$ ולכל $v \notin U$ יש מסלול $v \rightsquigarrow u$) בגודל k בגרף מכוון ואציקלי: -

בדיקה האם קיים הילוך שעובר על כל קשתות הקבוצה $S \subset V$: מחשבים את גרף העל, עושים סמ"ט. נחפש מסלול אשר עובר דרך כל הרק"חים המכילים לפחות איבר אחד מ- S.

SSSP:

מציאת מסלולים קצרים ביותר מ- s אם המשקלים אי-חיוביים: אם יש מעגל אז הוא מקשתות 0 לכן עוברים ברק"ח בחינם אז נבנה את גרף העל ונחשב בו SSSP בזמן לינארי.

חישוב כל ערכי $\delta^*(v)=\min_{u\in V}\delta(u,v)$: נוסיף קודקוד-על s וקשתות במשקל 0 לכל הצמתים. נריץ ממנו BF ונחזיר את $\delta^*(v)=\delta(s,v)$.

בדיקה האם קיים מעגל במשקל 0 (ידוע אין שלילי): נוסיף לגרף קודקוד-על ונריץ ממנו BF. נשמור רק קשתות (u,v) המקיימות: $\delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)$. זהו גרף המק"בים. נבדוק האם יש מעגל בגרף הזה. נכון כי מעגל במשקל אפס תמיד חלק ממק"ב, מעגל במשקל חיובי אף פעם לא חלק ממק"ב.

Dijkstra:

הילוך קל ביותר מבין ההילוכים המכילים מספר זוגי של קשתות אדומות (משקל אי שלילי, $s \rightsquigarrow t$): נעשה שתי שכבות עם קשתות משאירות צד ומעבירות צד.

זרימה:

מספר מקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ- s ל- t: ניתן לכל קשת קיבול 1 ונמצא זרימה מקסימלית.

מספר הקשתות המינימלי שיש להסיר כדי שלא יהיה מסלול מ- s ל- t: ניתן לכל קשת קיבול 1 ונמצא זרימה מקסימלי. הנכונות נובעת מכך שמספר הקשתות הוא גודל החתך המינימלי.

מציאת זיווג מקסימום בגרף דו-צדדי: נוסיף צמתי s,t ונכוון את הזרימה. לכל הקשתות קיבול 1. קבוצת הקשתות הרוויות בזרימת מקסימום היא הזיווג המקסימלי.