Nombres complexes : point de vue géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I. Le plan complexe

1. Affixe d'un point :

Soit x et y deux réels.

Définition :

A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$est associé le complexe $z=x+iy$ appelé **affixe du point** M.

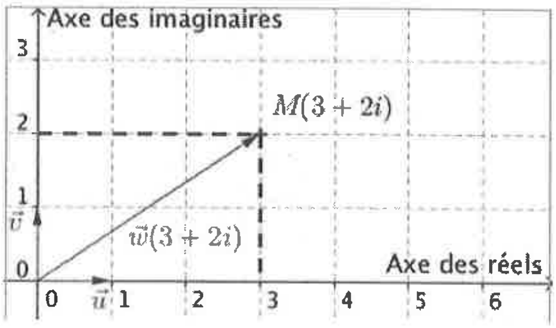
A tout nombre complexe $z=x+iy$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ appelé **image de z.**

Le plan muni d'un repère orthonormal direct dans lequel on représente des nombres complexes est appelé **plan complexe** .

Exemple :

Dans le plan réel : le point *M* a pour coordonnées (3 ; 2) et on note *M*(3;2).

Dans le plan complexe : le point *M* a pour affixe $3+2i$ et on note $M(3+2i)$.



Vocabulaire :

L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires purs** .

L'axe des abscisses est appelé **axe des réels** .

2. Affixe d'un vecteur

Soit x et y deux réels.

Définition :

A tout vecteur $\vec{w}$ du plan de coordonnées $(x ; y)$ est associé le nombre complexe $z=x+iy$appelé **affixe du vecteur** $\vec{w}$.

Notation :

Par habitude, on utilise la notation $z_{\vec{w}}$ pour désigner l'affixe du vecteur $\vec{w}$ et la notation z_A pour désigner l'affixe du point A.

Propriété :

Soit $\vec{w}$ *et* $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs d'affixes respectives z *et* z'. *Soit* λ un réel .

L'affixe du vecteur $\vec{w}+\overrightarrow{w'}$ est $z+z'$.

L'affixe du vecteur $\lambda\ \vec{w}$ est $\lambda\ z$.

Exemple :

$\vec{w}$ a pour affixe $1+i$ et $\overrightarrow{w'}$ a pour affixe $-1-2i$. Déterminer l'affixe de $2\vec{w}-\overrightarrow{w'}$.

$z = 2+2i-(-1-2i) = 3+4i$ donc $2\vec{w}-\vec{w'}(3+4i)$

....

Propriété :

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respectives z_A et z_B .

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

3. Affixe du milieu d'un segment

Propriété :

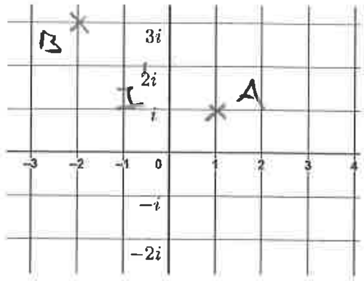
Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respectives z_A et z_B .

L'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple :

On considère A(1+ i) et B(-2+ 3i). Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$

et celle de I milieu du segment [AB].



$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2+3i) - (1+i) = -3+2i$

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i-2+3i}{2} = -\frac{1}{2} + 2i$ donc $I(\frac{1}{2}+2i)$

II. Module d'un nombre complexe :

Soit x et y deux réels.

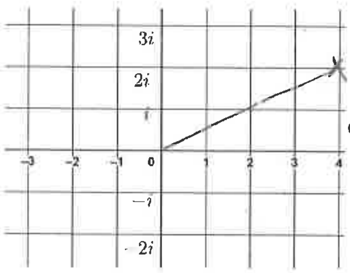
Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$. Le module de z est le nombre réel positif noté |z| et défini par $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

Interprétation géométrique :

Dans le plan complexe , si M a pour affixe z alors

la distance OM = |z| .



M (1+2i)

OM = |z|

Remarques :

1) Si z est un nombre réel, le module de z est égal à sa valeur absolue . Par exemple : |-3| = 3

2) Si z est un imaginaire pur, le module de z est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.

Par exemple : $|-2i| = 2$

3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Propriété :

Pour tout nombre complexe z , $|z|^2 = z \times \bar{z}$

Propriété :
Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respectives z_A *et* z_B , on a : $\boldsymbol{AB = |z_B - z_A|}$

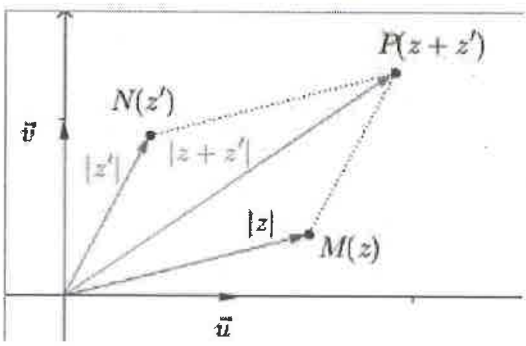
Propriétés :
Soit z et z' deux nombres complexes et n entier relatif non nul.

Produit : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Puissance : $|z^n| = |z|^n$ (si $n < 0$ il faut que z soit non nul)

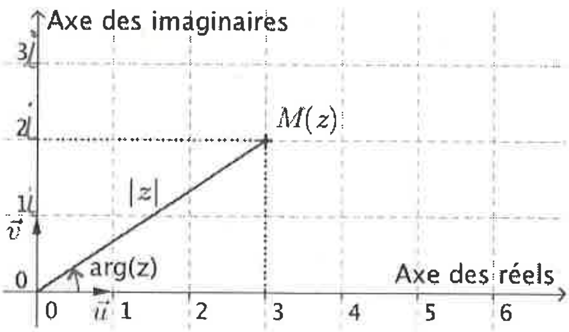
Inverse et quotient : pour z et z' non nuls $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

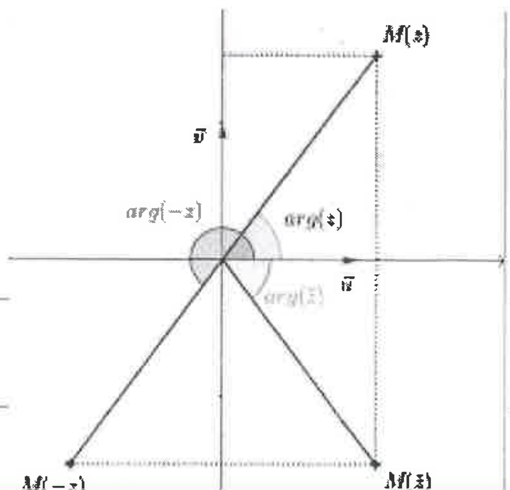
Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *Il s'agit d'une traduction de l'inégalité sur les distances*



III. Argument d'un nombre complexe non nul

Définition :
Dans le plan complexe , z est un nombre complexe non nul d'image M .
On appelle argument de z , toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
Si θ est un argument de z alors pour tout entier relatif k , le réel $\theta + 2k\pi$ est un argument de z
Si θ est un argument de z alors on note $arg(z) = \theta \, (2\pi)$





Remarque : un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments.

Exemples : $arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$; $arg(-3) \equiv \pi (2\pi)$
$\equiv -\pi (2\pi)$

Propriété : z est un nombre complexe non nul.

$arg(-z) \equiv arg(z) + \pi \, (2\pi)$

$arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)(2\pi)$

z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) \equiv 0(2\pi)$ *ou* $arg(z) \equiv \pi(2\pi)$

$\Leftrightarrow arg(z) \equiv 0(\pi)$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ *ou* $arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

IV. Forme trigonométrique :

1. Définition

Soit z un nombre complexe non nul. On pose : $arg(z) \equiv \theta(2\pi)$

Propriété :

On a alors : $Re(z) = |z|\cos(\theta)$ et $Im(z) = |z|\sin(\theta)$

Définition :

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture avec $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Exemple : $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ est une forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Propriété :

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

Remarque : Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$avec r > 0 alors |z| = r et $\alpha = -arg(z)$

Exercice 1 : Déterminer si la forme donnée est une forme trigonométrique. Si oui, donner module et argument

$2(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7})$

$|z| = 2$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{7}(2\pi)$

-2(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$

$-2 < 0$ donc ce n'est pas une forme trigo

Exercice 2: Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$

video: maths et tique https://youtu.be/zIbpXlgISc4

M1