Chapitre 2 : Loi binomiale

I. Répétition d'expériences indépendantes

Exemples :

1) On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

2) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

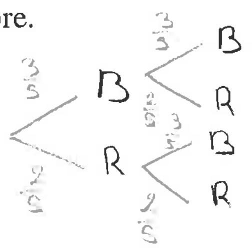
Définition : Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- elles ont les mêmes issues,
- les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre.

Propriété : On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B).
Si on répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :
- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à P(A) x P(B),
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à P(B) x P(A),
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Méthode : Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre

Vidéo https://youtu.be/e7jH8a1cDtg

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer la probabilité :
   a) d'obtenir deux boules blanches
   b) une boule blanche et une boule rouge
   c) au moins une boule blanche.



a) $P(B,B)$ $P(B)\times P(B) = P(B)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

b) $P(B,R) = P(B\cap R) + P(R \cap B)$
$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

c) P("au - 1 blanche") $= 1 - P(RR)$
$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

⚠ "au moins" = 1-P("aucun")

Remarque :
- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétitions est supérieur à 2, le principe reste le même.

Propriété : Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues $A_1, A_2, \dots, A_n$ ont pour probabilité $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est égale aux produits de leurs probabilités $P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$.

Exemple :
On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est :

$$P(A\,;B\,;A\,;C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$$

II. Épreuve de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :
1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face".
2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition : Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.
p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemples : Dans les exemples présentés plus haut :

$$1)\ p = \frac{1}{2} \qquad\qquad 2)\ p = \frac{1}{6}$$

Convention :
Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \qquad\qquad V(X) = p(1-p)$$

espérance variance

Démonstrations :

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + 0 \times P(X=0) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

$$V(X) = (1 - E(X))^2 \times P(X=1) + (0 - E(X))^2 \times P(X=0)$$
$$= (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p)$$
$$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3$$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$

Rappel $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 \dots x_n \times p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$ | $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \times p_k$

$T(X) = \sqrt{V(X)}$ (écart type (σ))

III. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli

> Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Remarque : Pour la répétition de n épreuves de Bernoulli, l'univers est $\{0, 1\}^n$.

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

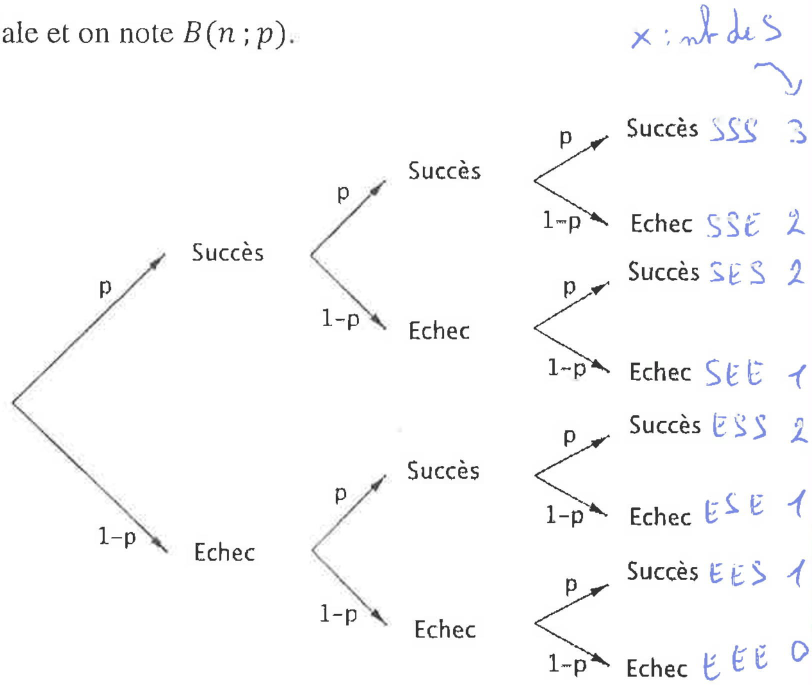
2) Loi binomiale

> Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
> Une **loi binomiale** est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\}$ qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n ; p)$.

Exemple :
On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.
On a alors :

- $P(X = 3) = p^3$
- $P(X = 2) = 3 \times p^2 \times (1-p)$
- $P(X = 1) = 3 \times p \times (1-p)^2$
- $P(X = 0) = (1-p)^3$



3) Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Exemple :
Dans l'arbre précédent, combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ? On dit aussi : Combien y existe-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)
Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

> Définition : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
> Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$
> On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n**, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
> Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Propriété : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, la loi de probabilité de X est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

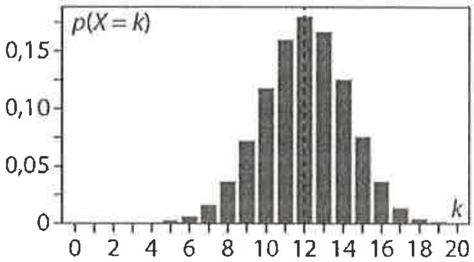
$\forall k \in [\![0;n]\!]$
intervalle d'entiers

Démonstration au programme :
Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n-k$ échecs (de probabilité $1-p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.
Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$.
Donc : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Utilisation de la calculatrice :		**Texas**	**Casio**
		Menu DISTRIB, puis choisir binomFdp ou binomFrep	Touche OPTN, puis STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd ou Bcd
Syntaxe :	P(X = k)	binomFdp(n,p,k)	binomialPD(k,n,p)
	P(X < k)	binomFRep(n,p,k)	binomialCD(k,n,p)

Forme du diagramme en barres associés :

Exemple
Le diagramme en barres associé à la loi $\mathscr{B}(20\,;0{,}6)$, sur lequel k varie de 0 à 20 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k, la hauteur de la barre correspondant à $p(X=k)$.
Par exemple, pour $k=10$, la hauteur de la barre est $p(X=10) \approx 0{,}12$.
Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 12 : l'espérance correspondant à cette loi.
Ce diagramme est quasiment symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 12$ tracée en pointillés.



Remarque Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n, plus p est éloigné de 0,5 plus l'écart-type est petit et, en conséquence, plus la cloche est « étroite et haute » (attention aux échelles sur les axes quand on compare).

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/1gMq2TJwSh0

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirage gagnant.
1) Prouver que X suit une loi binomiale.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

1) L'épreuve de Bernoulli consiste à tirer une boule. 2 issues possibles soit elle est gagnante ($p = \frac{5}{12}$) soit elle est perdante.
• On la répète 4 fois de façon identique et indépendante
• Donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{5}{12}$

2) $P(X=k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{5}{12}\right)^k \times \left(\frac{7}{12}\right)^{4-k}$ $\forall k \in [\![0;4]\!]$

$P(X=3) \approx 0{,}17$

P("au - 2 boules gagnantes") $= P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}55$

$P(\text{"au + 3 boules gagnante"}) = P(X \leq 3) \simeq 0,97$

Propriété : Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.

On a : $E(X) = n \times p$ $V(X) = n \times p \times (1 - p)$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Méthode : Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil.

Exemple 1 :

On lance n fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « pile » obtenus.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 0.999.

$X \sim B(n ; 0{,}5)$

$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}5^0 \times 0{,}5^n$

$= 1 \times 1 \times 0{,}5^n$

$= 0{,}5^n$

$P(X \geq 1) > 0{,}999$

$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0{,}999$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}5^n > 0{,}999$

$n = 9$ $1 - 0{,}5^n \simeq 0{,}998$

$n = 10$ $1 - 0{,}5^n > 0{,}999$

Exemple 2 :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n = 30 et p = 0.23

Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) \geq 0.8$

$P(X \leq 8) \simeq 0{,}76 < 0{,}8$

$P(X \leq 9) \simeq 0{,}87 > 0{,}8$

Exemple 3 :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n = 30 et p = 0.55

Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \geq a) \geq 0.8$

$P(X \geq a) \geq 0{,}8$

$1 - P(X \leq a-1) \geq 0{,}8$

$a - 1 = 14$ $a = 15$

Méthode : Déterminer un intervalle I pour lequel $P(X \in I)$ est inférieure ou supérieur à une valeur donnée.

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge à la sortie des urnes 50 personnes. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de votants pour le candidat A.

1) Déterminer les entiers a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \geq 0.95$

2) Donner une interprétation de ce résultat.

$X \sim B(50 ; 0{,}55)$

1) $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$

Calculatrice

On cherche a tq $P(X \leq a) > 0{,}025$

b tq $P(X \leq b) \geq 0{,}975$

$a = 21$

$b = 34$

$P(21 \leq X \leq 34) \geq 0{,}95$

→ "Le candidat A a au ≥95% de chance d'avoir entre 21 et 34 votant pour lui"