Chapitre 4 : Dérivation, continuité, convexité

I. Rappels (dérivation)

1) Fonction dérivable

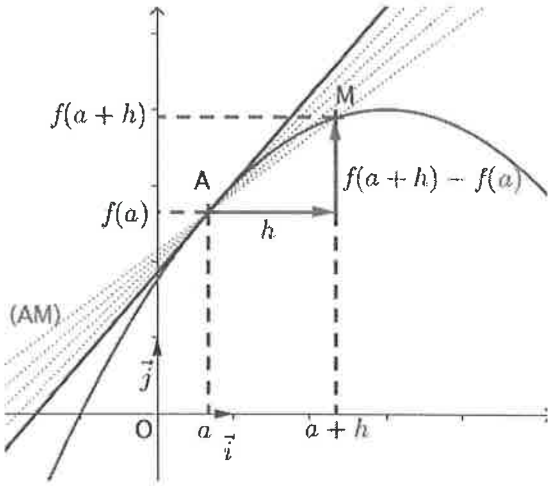
Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L.$$

L est appelé le **nombre dérivé** de f en a.

2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.



Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

- Admis -

II. Dérivées d'une fonction composée

1) Définition

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/08HgDgD6XL8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$

La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$f(x) = v \circ u\,(x) = v(u(x)) = \sqrt{x-3}$

Définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$.

On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par :

$$v \circ u\,(x) = v(u(x)).$$

Méthode : Composer deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/sZ2zqEz4hug

1) On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x.

2) Même question avec $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

$u(v(x)) = u\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$ | $v(u(x)) = v(x^2+x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$

2) Formule de dérivation d'une fonction composée

Propriété : Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J.
Soit une fonction v définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) \text{ ou encore } f' = v' \circ u \times u'$$

Admis

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Vidéo https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew

$v(x) = e^{x}$ $v'(x) = e^{x}$
$u(x) = x^2+1$ $u'(x) = 2x$

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

$f'(x) = v'(u(x)) . u'(x)$
$= e^{x^2+1} \times 2x$

3) Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées (cas particuliers)

Vidéo https://youtu.be/kE32Ek8BXvs
Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ b) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ c) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$

$g'(x) = 4(4x+3)(2x^2+3x-3)^3$
$= 16x+12(2x^2+3x-3)^3$

$h'(x) = -\dfrac{1}{x^2} 2e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{-2e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

4) Étude d'une fonction composée

Méthode : Étudier une fonction composée (1)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2X}{3X+1}}$

On note C sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.

3) Étudier les variations de f.

1) $f(x) \in]-\infty ; -\frac{1}{3}[\cup [0 ; +\infty[$

x	$-\infty$ $-\frac{1}{3}$ 0 $+\infty$
$2x$	$-$ 0 $+$
$3x+1$	$-$ 0 $+$
$\frac{2x}{3x+1}$	$+$ $\|\|$ $-$ 0 $+$

2) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^-$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$

$X = \frac{2x}{3x+1}$ $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} 3x+1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{3x+1} = 0$

$X = \frac{2x}{3x+1}$ $\lim\limits_{X \to 0} \sqrt{0} = 0$

$\frac{2x}{3x+1} = \frac{x(2)}{x(3+\frac{1}{x})} = \frac{2}{3+\frac{1}{x}}$ car $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = \frac{2}{3}$ $X = \frac{2x}{3x+1}$

$\lim\limits_{X \to \frac{2}{3}} \sqrt{X} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

De meme maniere $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Méthode : Étudier une fonction composée (2)

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Étudier les limites de f à l'infini.

b) Calculer la dérivée de la fonction f.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$ $X = -\frac{x}{2}$ $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^X = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

a) $xe^{-\frac{x}{2}} = -2\left(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$ $X = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{X \to -\infty} -2(Xe^X) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

u x u' 1

v $e^{-\frac{x}{2}}$ $v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$= e^{-\frac{x}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$= e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}$

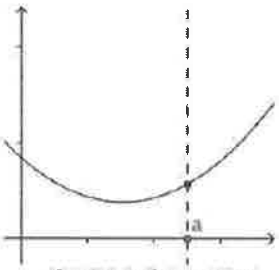
$= e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$

III- Continuité de fonctions

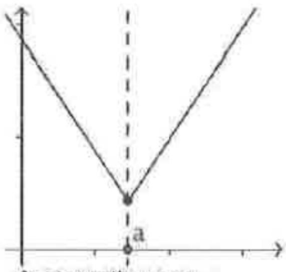
1. Notion de continuité

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

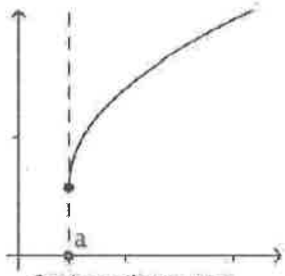
Exemples et contre-exemples :



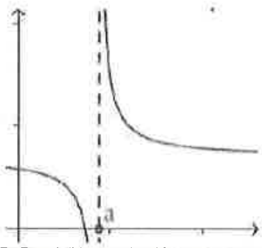
f est continue en a



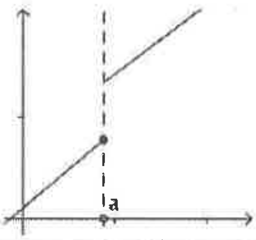
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

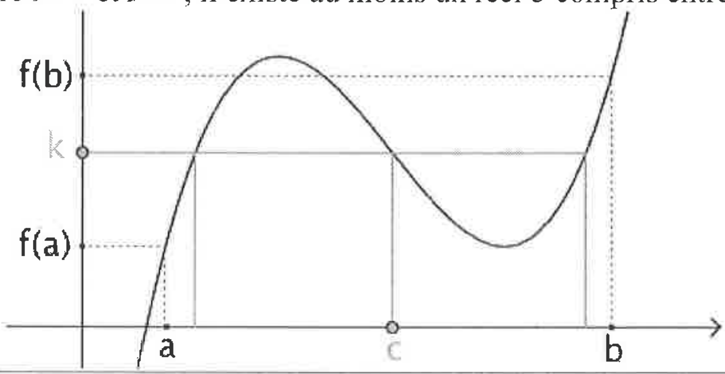
Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

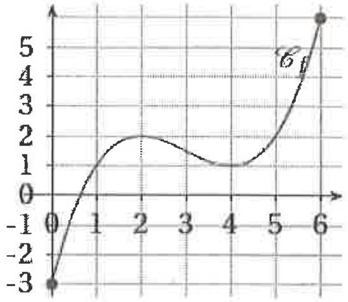


- Admis -

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.
f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.
f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.

x	0		2		4		6
f	-3	↗	2	↘	1	↗	6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3\ ;\ 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\ ;\ 6]$.

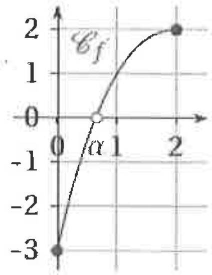
Corollaire du TVI

Théorème : Cas d'une fonction strictement monotone.
Soit f une fonction définie, continue **et strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** un réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

- Admis -

Exemple :

Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0		α		2
f	-3	↗	0	↗	2

- Sur $[0\ ;\ 2]$, f est continue, strictement monotone (croissante)
- $0 \in [f(0)\ ;\ f(2)] = [-3\ ;\ 2]$.
- Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule valeur $\alpha \in [0\ ;\ 2]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

Remarque : Si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne.

MÉTHODE 3 : Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ et dénombrer ces solutions. Pour cela :

- On dresse le tableau de variation de la fonction f ;
- On applique le T.V.I. à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Encadrement d'une solution
Parmi les méthodes pour déterminer un encadrement de la solution d'une équation du type $f(x) = k$, il en existe deux simples :

- méthode par **balayage** : On teste toutes les valeurs de x jusqu'à trouver
- méthode par **dichotomie**

MÉTHODE 4 : Trouver une solution par balayage.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2.5\ ;5]$

f est dérivable sur $[2.5;5]$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ donc pour tout x de $[2.5;5]$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

Sur $[2.5;5]$ f est donc continue et strictement monotone (croissante).
De plus $0 \in \left[f(2.5);f(5)\right] = [-1.125;52]$.

Donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule solution $\alpha \in [2.5;5]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

2. A l'aide de la calculatrice, il est possible de déterminer un encadrement de la solution α par balayage :

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

$\alpha \in]2;3[$

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

$\alpha \in]2.6;2.7[$

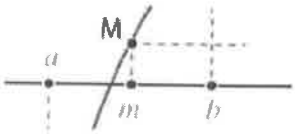
X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

$\alpha \in]2.73;2.74[$

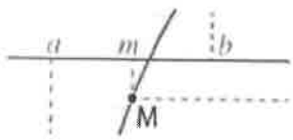
MÉTHODE 5 : Trouver une solution par dichotomie

Le principe est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution α en divisant par deux l'amplitude de l'intervalle à chaque étape.

Pour cela on calcule le milieu $\overset{\frac{a+b}{2}}{m}$ de l'intervalle $[a;b]$ puis on regarde dans quel intervalle se trouve α



Si la solution est dans $[a;m]$, on réitère le procédé dans $[a;m]$.



Si la solution est dans $[m;b]$, on réitère le procédé dans $[m;b]$.

```
from math import *
def f(x):
    y=x**3-3*x**2+2
    return y
def dichotomie(a,b,e,k):
    while(b-a)>=e:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)-k<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(a,b)
```

f doit être une fonction continue et strictement monotone que l'intervalle $[a;b]$.

e est l'amplitude de l'encadrement demandé.

Attention on ne teste pas le cas où m est la solution !

L'appel dichotomie(2.5,5,0.1,0) renverra (2.65625, 2.734375)

a	0	1
b	2	2
b-a	2	1
m	1	1,5
f(a)×f(m)	f(0)×f(1) +	-

3. Application à l'étude d'une suite : Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème :
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Vidéo https://youtu.be/L7bBL4z-r90
Vidéo https://youtu.be/LDRx7aS9JsA

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par $f(x) = 0{,}5x + 2$.

a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}5x + 2$ et $y = x$.

b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n). $L = 4$ (point d'intersection de f et de $y = x$)

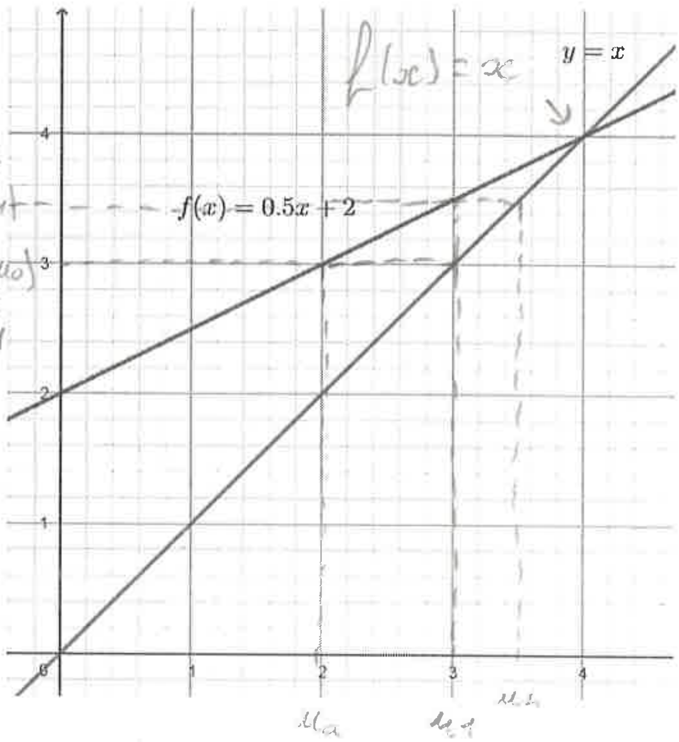
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

On résoud $f(L) = L$

$0{,}5L + 2 = L$ $\qquad$ $0{,}5L - L = -2$

$-0{,}5L = -2$

$L = 4$



2) Variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
- Si f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de sa fonction associée

Vidéo https://youtu.be/dPR3GyQycH0

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

IV- Convexité

1. Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.

On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 18x - 10$

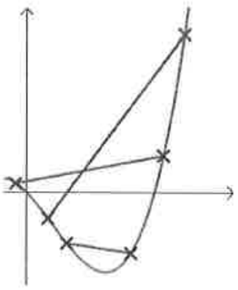
2. Fonction convexe et fonction concave

Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

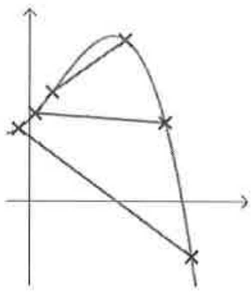
- La fonction f est **convexe** sur I si, pour tous points distincts A et B de la courbe, la courbe représentative est entièrement située « **en dessous** » du segment [AB].

- La fonction f est **concave** sur I si, pour tous points distincts A et B de la courbe, la courbe représentative est entièrement située « **au-dessus** » du segment [AB].

Fonction convexe

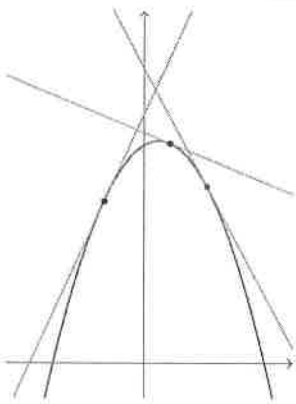


Fonction concave



Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Fonction convexe



Fonction concave

Propriété : Soit une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I.

Toutes ces propositions sont équivalentes :

- **f est convexe sur I**
- **f'' est positive sur I**
- **f' est croissante sur I**
- **$\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes**

De même les propositions suivante sont équivalentes :

- **f est concave sur I**
- **f'' est négative sur I**
- **f' est décroissante sur I**
- **$\mathscr{C}_f$ est au dessous de ses tangentes**

Démonstration au programme : livre p206

Démontrons que $f'' > 0$ implique que f est au-dessus de chacune de ses tangentes (f convexe)

On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :

$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.

Alors : $g'(x) = f''(x) - f'(a)$.

Or $f'' > 0$, donc f' est croissante sur I, ce qui signifie :

Si $x > a$, alors $f'(x) > f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) > 0$ donc $g'(x) > 0$ pour $x > a$

Si $x < a$, alors $f'(x) < f'(a)$ donc $f'(x) - f'(a) < 0$ donc $g'(x) < 0$ pour $x < a$

my $f(x) \geq T$

$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

$f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \geq 0$

$g(x) \geq 0$

De plus, $g'(a) = 0$.

On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$

Donc $g(x) \geq 0$ sur I.

Soit $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/8H2aYKN8NGE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Étudier la convexité de la fonction f

$f'(x) = x^2 - 18x$

$f''(x) = 2x - 18$

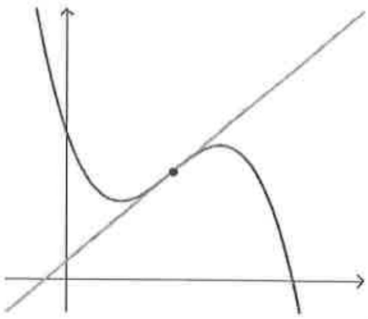
$2x - 18 = 0$

$x = 9$

x	$-\infty$	9	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	Concave	↑	Convexe

Point d'inflexion

3. Point d'inflexion



Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque importante :

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

On résoud $f''(x) = 0$

On regarde quand $f'(x)$ change de variation

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Vidéo https://youtu.be/_XlgCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C .
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) Conjecture : concave puis convexe point d'inflexion vers 7

2) $C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$

$C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

$0{,}3x - 2{,}1 = 0$

$x = 7$

x	0	7	10
$C''(x)$	$-$	0	$+$
$C(x)$	concave	point d'inflexion	convexe

A partir de 7000 clé produits le cout croit plus rapidement (convexe)

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/AaxQHlsxZkg

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Étudier la convexité de la fonction f .

b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1.

c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.