Rappels de 1ere – SUITES

I GÉNÉRALITÉS

1 DÉFINITIONS

♥ **DÉFINITION 1 :** Une suite (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$(u_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

▶ REMARQUE 1 :

- n est l'indice du terme u_n
- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- si la suite est définie à partir d'un rang p, on note $(u_n)_{n\geqslant p}$

♠ **PROPRIÉTÉ 1 :** une suite peut être définie :

- de **manière explicite** : le terme général u_n est exprimé en fonction de n. On note f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par
$$u_n = f(n)$$
On peut calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice n.
Exemple : Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n - 1$.
- de **manière récurrente** : On exprime un terme en fonction du terme qui le précède et on donne la valeur du premier terme. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ alors on note f la fonction définie sur I par :
$$u_{n+1} = f(u_n)$$
Pour calculer le terme de rang n, il est nécessaire de calculer tous les termes précédents.
Exemple : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = 3 - 2u_n \end{cases}$

✍ **EXERCICE 1 :** A partir des deux suites précédentes, déterminer pour chacune d'elle la valeur des 8 premiers termes.

2 PROGRAMMER UNE SUITE AVEC PYTHON OU LA CALCULATRICE.

✍ **EXERCICE 2 :** Soit (u_n) la suite définie pour tous entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

1. Construire le tableau de valeur des 6 premiers termes de (u_n). On notera les valeurs exactes.
2. Quelle semble être le sens de variation de la suite? sa limite?
3. Écrire une fonction `calcule_valeur(n)` prenant un entier naturel n comme paramètre et renvoyant le terme de rang n.

✍ **EXERCICE 3 :** Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 0.75v_n + 2$ et $v_0 = 4$.

1. Construire le tableau de valeur des 6 premiers termes de (v_n). On notera les valeurs exactes.
2. Quelle semble être le sens de variation de la suite? sa limite?
3. Écrire une fonction `calcule_valeur(n)` prenant un entier naturel n comme paramètre et renvoyant le terme de rang n.

♥ DÉFINITION 2 : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que la suite (u_n) est :

- **croissante** à partir d'un certain rang k si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant k$
- **décroissante** à partir d'un certain rang k si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant k$
- **constante ou stationnaire** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier naturel n
- **monotone** lorsque la suite est croissante ou décroissante.

▶ REMARQUE 2 :

- Comme pour les fonctions, lorsqu'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement décroissante, strictement croissante, strictement monotone.
- Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes : $u_n = (-1)^n$
- Il ne suffit pas d'observer les premiers termes de la suite pour déterminer la variation de la suite.

MÉTHODE 1 : Étude de la monotonie d'une suite

1. Comparer u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.
2. Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ↗ < 1 ↘
3. Si la suite est définie de manière explicite par une forme $u_n = f(n)$ alors il suffit d'étudier le sens de variation de la fonction f (étudier le signe de f')
4. Si la suite est définie de manière récurrente par une forme $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser un raisonnement par récurrence (cf chapitre S2).

✍ EXERCICE 4 :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$. Déterminer sa variation.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$. On supposera que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer sa variation.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. Déterminer sa variation.

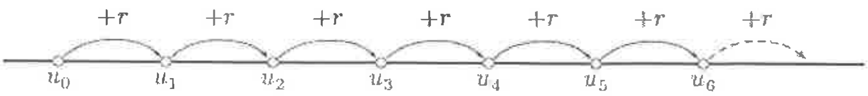
II SUITES ARITHMÉTIQUES

1 DÉFINITIONS

♥ DÉFINITION 3 : Une suite **arithmétique** (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{avec } r \text{ raison de la suite}$$



Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r indépendant de n.

✔ EXEMPLE 1 :

- La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.
- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$ est une suite arithmétique de raison 3.
  En effet,
$$u_{n+1} = 3 \times (n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = u_n + 3$$

2 DÉMONTRER QU'UNE SUITE EST ARITHMÉTIQUE

PROPRIÉTÉ 3 : Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est la raison.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r \Leftrightarrow (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r$$

EXERCICE 6 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n - 1$. Montrer que cette suite est arithmétique.

3 EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL EN FONCTION DE n

PROPRIÉTÉ 4 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si le premier terme est u_0 alors $u_n = u_0 + nr$
- si le premier terme est u_p alors $u_n = u_p + (n-p)r$

4 VARIATIONS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

PROPRIÉTÉ 5 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- La suite (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

5 SOMMES DE TERMES

PROPRIÉTÉ 6 : Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier termes u_0 et de raison r, alors :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

De manière générale, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

EXERCICE 7 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) : r > 0 donc Un est stri
3. Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$ en fonction de n
4. Calculer $S_{15} = u_0 + u_1 + \cdots u_{15}$
5. Calculer $T = u_{30} + u_{31} + \cdots u_{70}$

EXERCICE 8 : Exprimer en fonction de n la somme des n premiers entiers naturel non nuls.

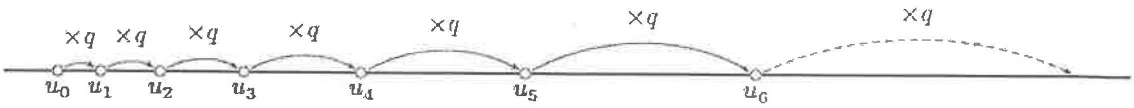
III SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITIONS

♥ DÉFINITION 4 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{avec } q \text{ raison de la suite}$$



Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q indépendant de n.

✔ EXEMPLE 2 : La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

2 ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution)

3 DÉMONTRER QU'UNE SUITE EST GÉOMÉTRIQUE

♠ PROPRIÉTÉ 8 : Une suite (u_n) est géométrique s'il suffit de multiplier par une constante pour passer d'un terme au suivant. Cette constante est la raison.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n \Leftrightarrow (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q$$

✍ **EXERCICE 9 :** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times 3^n$. Montrer que cette suite est géométrique.

4 EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL EN FONCTION DE n

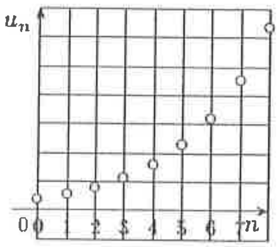
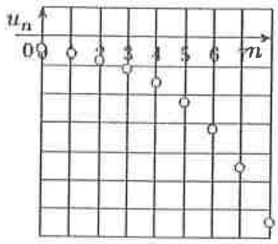
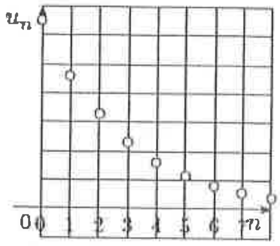
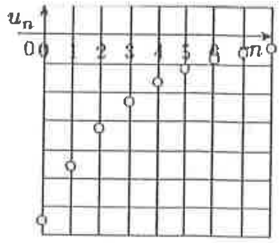
♠ PROPRIÉTÉ 9 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q :

- si le premier terme est u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$
- si le premier terme est u_p alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

4/

5 VARIATIONS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

PROPRIÉTÉ 10 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

6 SOMMES DE TERMES

PROPRIÉTÉ 11 : Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier termes u_0 et de raison q, alors :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

De manière générale, la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S_n = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{Nbre termes}}}{1-q}$$

EXERCICE 10 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) : ....
3. Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$ en fonction de n
4. Calculer $S_5 = u_0 + u_1 + \cdots u_5$
5. Calculer $T = u_5 + u_6 + \cdots u_{10}$

EXERCICE 11 : On note u_n le nombre d'habitants d'une ville et $u_0 = 2000$ celui de l'année 2020. On suppose que le nombre d'habitant augmente de 3% par an.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2. En déduire la nature de la suite (u_n). Exprimer alors u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite.
4. Écrire une fonction Python `calcule_terme(n)` qui calcule la valeur du terme u_n grâce à sa formule récurrente.
5. A l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'année, le nombre d'habitants dépassera 2700.

IV SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

♥ **DÉFINITION 5 :** Il est parfois impossible de définir une suite de manière uniquement arithmétique ou uniquement géométrique. Il est parfois possible de les définir de manière arithmético-géométrique.

♥ **DÉFINITION 6 :** Une suite **arithmético-géométrique** est une suite définie par un premier terme u_p et pour tout entier $n \geqslant p$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels}$$

MÉTHODE 2 : Il est possible de se ramener à l'étude d'une suite géométrique en introduisant une nouvelle suite géométrique (v_n)

2 EXERCICE TYPE - D'APRÈS TES - MÉTRO SEPTEMBRE 2016

Le 31 décembre 2015 une forêt comportait 1500 arbres. Les exploitants de cette forêt prévoient que chaque année, 5% des arbres seront coupés et 50 arbres seront plantés.
On modélise le nombre d'arbres de cette forêt par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'arbres au 31 décembre de l'année $(2015 + n)$.
Ainsi $u_0 = 1500$.

PARTIE A

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 50$.
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 1000$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 1000 + 500 \times 0,95^n$.
   c) En déduire le nombre d'arbres prévisibles dans cette forêt le 31 décembre 2030.

PARTIE B

On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années le nombre d'arbres sera inférieur à 1200 :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1500$
Tant que $U > 1200$ ......
  $U \leftarrow 1000 + 500 \times 0,95^N$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

1. Recopier et compléter l'algorithme.
2. Traduire cet algorithme en langage Python
3. Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Que représente cette valeur ?
4. Répondre au problème posé.