Congruence dans $\mathbb{Z}$

I Propriétés – rappels :

Soit m un entier naturel non nul, et soient a , b , c , a' b' des entiers.

1) **Transitivité** : Si $a \equiv b(m)$ et $b \equiv c(m)$ alors : $a \equiv c(m)$
2) **Compatibilité** Si $a \equiv b(m)$ et , $a' \equiv b'(m)$ alors

$a + a' \equiv b + b'(m)$
$a - a' \equiv b - b'(m)$
$a a' \equiv b b'(m)$
$a + c \equiv b + c(m)$
$a c \equiv b c(m)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \equiv b^n(m)$

Remarques : **Attention les réciproques sont fausses !**
les congruences sont compatibles avec l'addition, la soustraction, la multiplication , les puissances mais PAS avec la division.

II Exercices

Exercice1 : recherche d'un inverse (methode 6 p99)
Montrer que 4 est inversible modulo 9.

On cherche si il existe un entier n tel que $4 \times n \equiv 1(9)$

Astucieux On tente de deviner
ici $n = 7$
$4 \times 7 = 28 = 3 \times 9 + 1$
Donc 7 est un inverse de 4 modulo 9

Debutant

$x \equiv \dots (9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4x \equiv \dots (9)$	0	4	8	3	7	2	6	1	5

Donc 7 est un inverse de 4 modulo 9
avec cette methode $4x \equiv 1(9) \iff x \equiv 7(9)$

Exercice 2 : reste de division
Déterminer le reste de 2^{2022} par 3 (102p110)

On cherche une puissance de 2 tel que $2^n \equiv 1(3)$
$2^2 = 4$ $4 \equiv 1(3)$
$(2^2)^{1011} \equiv 1^{1011}(3)$
$2^{2022} \equiv 1(3)$ et $0 \leq 1 < 2$ donc le reste est egal a 1

reste 2^{2011} par 3 $2011 = 2 \times 1020 + 1$
$2^2 \equiv 1(3)$ $(2^2)^{1020} \equiv 1^{1020}(3)$ $2^{2040} \equiv 1(3)$ $2^{2041} \equiv 2(3)$

Exercice3 : reste de division avec puissance n

a) Déterminer les restes de la division de 7^n par 9 (103p110)
b) En déduire le reste de la division de 7^{2022} par 9

n	1	2	3	4	5	6
7^n	7	49	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$7^n \dots (9)$	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	7	4	1

On recherche modulo 3

Conjecture 1er cas $n \equiv 0(3)$ reste = 1 $7^n \equiv 1(9)$
$n \equiv 1(3)$ reste = 7 $7^n \equiv 7(9)$
$n \equiv 2(3)$ reste = 4 $7^n \equiv 4(9)$

1^{er} cas $n \equiv 0(3)$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$

$7^3 = 343$ et $343 \equiv 1(9)$

Donc $7^3 \equiv 1(9)$

$(7^3)^k \equiv 1^k (9)$

$7^{3k} \equiv 1(9)$

Donc $7^n \equiv 1(9)$

2^{eme} cas $n \equiv 1(3)$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+1$

$7^3 = 343$ et $343 \equiv 1(9)$

$7^{3k} \equiv 1(9)$

$7^{3k} \times 7 \equiv 7(9)$

$7^{3k+1} \equiv 7(9)$

Donc $7^n \equiv 7(9)$

3^{eme} cas $n \equiv 2(3)$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+2$

$7^{3k+1} \equiv 7(9)$

$7^{3k+1} \times 7 \equiv 7 \times 7 (9)$

$7^{3k+2} \equiv 4(9)$

Donc $7^n \equiv 4(9)$

b) $2022 \equiv 0(3)$ car $2022 = 3 \times 674$

$7^{3(674)} \equiv 1(9)$

$7^{2022} \equiv 1(9)$ Donc le reste $= 1$