Chapitre 8 : Primitives

I. Primitive d'une fonction continue

1) Définition

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x + 3$ $\qquad$ $x \longmapsto x^2 + 3x - 1$

On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
F est donc solution de l'équation différentielle $y' = f$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière *(capacité 2 p297)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.
2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

1) $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ donc $F(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = e^{2x}$, $v = x$; $u' = 2e^{2x}$, $v' = 1$

Soit $F'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2e^{2x} \times x - e^{2x}}{x^2}$

$= \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$

2) $G(x) = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
On cherche c tel que $G(1) = 0$

$G(1) = F(1) + C$
$= \frac{e^{2(1)}}{1} + C$
$= e^2 + C$

$e^2 + C = 0$
$C = -e^2$

Donc $G(x) = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

Ex : 54, 56, 58, 64, 65, 66 p306

4) Primitives des fonctions usuelles

Primitives

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

$(n = -1)$

dériver

5) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

6) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

⚠

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

e^{ax+b} $\qquad$ $\frac{e^{ax+b}}{a}$

$\frac{2}{2x+3} = \frac{u'}{u} \Rightarrow \ln(u) = \ln(2x+3)$

$\frac{-4}{5x+7} = -4 \times \frac{1}{5x+7} = \frac{-4}{5} \times \frac{5}{5x+7} = \frac{-4}{5} \times \frac{u'}{u} \Rightarrow -\frac{4}{5}\ln(5x+7)$

$-4e^{-4x+5} = u'e^u \Rightarrow e^u = e^{-4x+5}$

$3e^{5-2x} = \frac{3}{-2} \times -2e^{5-2x} \Rightarrow \frac{3}{2}e^{5-2x}$

Méthode : Recherche de primitives (*capacité 4 p 299*)

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2}$ $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$	b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ $F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{3x^{-2}}{-2} + 2\ln(x)$ $= x^3 + \frac{3}{2}x^{-2} + 2\ln(x)$
c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$ $f(x) = u'u^2$ $F(x) = \frac{1}{2+1}(x^2-5x+4)^{2+1}$ $= \frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$	d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ $F(x) = 2\sqrt{x^2+1}$
e) $f(x) = e^{-2x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{e^{-2x+1}}{-2}$	f) $f(x) = \frac{5}{2x+3}$ sur $I = \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2}{2x+3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{u'}{u}$ $F(x) = \frac{5}{2}\ln(2x+3)$

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme : p296

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$.

Donc, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Ex : 69, 71, 75, 78, 80, 81, 83, 84, 93, 100, 102, p307-308