Exemples :

1 est une racine $Q(z) = 1z^2 + az + 1$

1) $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$

donc $\exists$ un polynome Q de degres 2 $P(z) = (z-1)\,Q(z)$

1 est racine et -1 racine de P

2) $P(z) = z^2 - 1$

il existe un polynome Q de degres 1 tel que $P(z) = (z-1)\,Q(z)$ | $\exists$ un polynome R degres 0 tel que $Q(z) = (z+1) \times R(z)$

$P(-1) = 0 = -2\,Q(-1)$ donc $Q(-1) = 0$ | -1 est racine de Q

3) $P(z) = z^3 - 1$

$z^3 - 1^3 = (z-1)(z^2 + 1z + 1^2)$

$a = 1$ et $n = 3$

Propriété :
Soit n un entier naturel.

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration :

Raisonnons par récurrence. Pour n entier naturel, on pose $\mathscr{P}(n)$: « Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines »

Initialisation : Pour $n = 0$

Soit P un polynôme de degré 0. Pour tout nombre complexe z, $P(z) = a_0$, où a_0 est un réel non nul.

P ne s'annule jamais, il n'admet aucune racine, donc au plus 0.

*Hérédité :*soit k un entier naturel tel que tout polynôme de degré k admette au plus k racines. Montrons que tout polynôme de degré $k + 1$ admet au plus $k + 1$ racines.

Soit P un polynôme de degré $k + 1$.

- Si P n'admet pas de racine, il en admet donc 0 donc bien au plus $k + 1$.
- Si P admet au moins une racine, notée a, alors d'après la propriété précédente, il existe un polynôme Q de degré $(k + 1) - 1$ tel que pour tout complexe z, $P(z) = (z - a)\, Q(z)$.

  Or Q est de degré k. Par hypothèse de récurrence, il admet au plus k racines. Ce qui fait que P en admet au plus $k + 1$.

Dans tous les cas, P admet au plus $k + 1$ racines. La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence : on a démontré que pour tout entier naturel n, un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Demonstration

$$(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} = z^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k z^{n-k} - \sum_{p=1}^{n-1} a^p z^{n-p} - a^n$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{On pose} \\ p = k+1\end{array}}$

$$= z^n - a^n$$