3. Propriétés

a) *avec argument*

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour tout entier naturel $n$ ,on a :

$arg(zz')\equiv arg(z)+arg(z')(2\pi)$ $\quad arg(z^n)\equiv n \; arg(z)(2\pi)$ $\quad arg(\frac{z}{z'})\equiv arg(z)-arg(z')(2\pi)$

b) *Formule d'addition/ duplication*

Soit $a$ et $b$ deux réels quelconques. On a :

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\quad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ $\quad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=2\cos(a)\sin(a)$

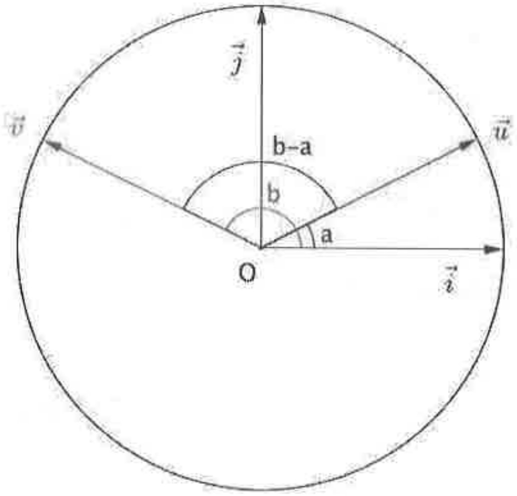
$\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$

Démonstrations aux programmes :

**- 1ère formule :**

On considère un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que :
$(\vec{i};\vec{u})=a$ et $(\vec{i};\vec{v})=b$.
On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
Ainsi : $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
On a également :
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
$=1\times 1\times\cos(b-a)=\cos(a-b)$

D'où : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.




**- 2e formule :**

$\cos(a-b)=\cos(a+(-b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$donc $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

**- 3e formule :**

$\sin(a+b)=\cos(\frac{\pi}{2}-(a+b))=\cos((\frac{\pi}{2}-a)-b)$donc $\sin(a+b)=\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(b)+\sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

**- 4e formule :**

$\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\sin(a)\cos(-b)+\sin(-b)\cos(a)$ donc $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

***- 5e formule :***

$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)$*donc* $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$

*de plus* $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$ *donc* $\sin^2(a)=1-\cos^2(a)$ *donc* $\cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))=2\cos^2(a)-1$

*c) Exemples*

Exemple : Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exemple : Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$

$\frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{8}$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

## V Forme exponentielle :

### 1. Définition

> Définition :
>
> Pour tout réel $\theta$, on définit l'exponentielle complexe de $\theta$ par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarque :

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.

Exemples :

$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$ $\qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\,1 = i$

> Propriété :
>
> $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\times 0 = -1$$

*Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).*

### 2. Propriétés de $e^{i\theta}$ :

Pour tout réel $\theta$, $|e^{i\theta}| = 1$ et $arg\, e^{i\theta} = \theta$

Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'(2\pi)$

Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, $e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

$e^{i\theta n} = e^{in\theta}$ (formule de Moivre) $\qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

autre formulation de la formule de Moivre : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = (\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

$i^3 = i^2 \times i = -i$

3. Formules d'Euler

Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$, $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\qquad$ $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\qquad$ $2i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

Exercice : Linéariser $\sin^3(x)$ *c'est-à-dire écrire comme somme de* $\cos(nx)$ et de $\sin(kx)$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$.

$\sin^3(x) = (\sin(x))^3 = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{e^{3ix}-3e^{2ix}\times e^{-ix}+3e^{ix}\times e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}$

$= \dfrac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i} = \dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3(e^{ix}-e^{-ix})}{-8i}$

$= \dfrac{2i\sin(3x)-3\times 2i\sin(x)}{-8i} = \dfrac{2i(\sin(3x)-3\sin(x))}{2i\times -4} = -\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin(x)$

4. Écriture trigonométrique

**Théorème- Définition :**

Tout nombre complexe $z$ peut s'écrire $z=re^{i\theta}$ avec r>0.

Cette forme est appelée **forme exponentielle.**

On a $r=|z|$ et $\theta\equiv arg(z)(2\pi)$

Démonstration :

$|z|e^{i}\theta=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta=x+iy$ avec $x$ = Re($z$) et y=Im($z$)

## VI Racines *n*-ièmes de l'unité :

1) Cercle unité :

Définition :

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On a donc $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$ .

Propriété : Stabilité de $\mathbb{U}$

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

On a $zz'\in\mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'}\in\mathbb{U}$

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et par quotient.

Démonstration :124 p 75

2) Racines ***n*-ièmes de l'unité :**

Définition :

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On appelle **racines *n*-ièmes de l'unité** les solutions complexes de l'équation $z^n=1$ .

Propriétés :

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement $n$ racines :

$w_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k$ entier compris entre 0 et $n-1$

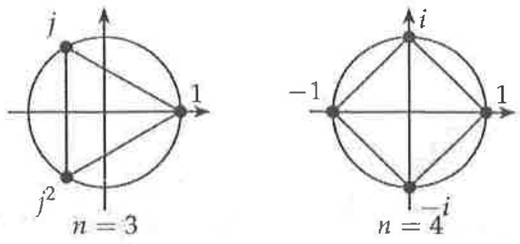
Si $n\geq 3$ alors les points dont les affixes sont les racines $n$-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à $n$ côtés.

Exemples :

$\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1, -1\}$

$\mathbb{U}_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ , on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$

$\mathbb{U}_4 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{4}}, e^{\frac{4i\pi}{4}}, e^{\frac{6i\pi}{4}}\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{\frac{3i\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}$




Démonstration au programme :

Existence :

Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0\,;2\pi[$.

Soit : $z^n = 1$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1$

$e^{in\theta} = 1$

$n\theta = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut ainsi restreindre les valeurs prisent par $k$ à l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n-1$.

Donc $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k$ entier compris entre 0 et $n-1$, est une racine de l'unité.

Unicité :

Supposons qu'il existe $k'$ entier compris entre 0 et $n-1$, tel que $w_k = w_{k'}$.

Alors : $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$

$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$, avec $l \in \mathbb{Z}$.

$2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$

$k = k' + ln$

$k - k' = ln$

Donc $n$ divise $k - k'$.

Or $k$-$k$' est un entier entre 0 et $n$-1 . De plus, $n$ ne divise que 0 ( pour les entiers compris entre 0 et $n$-1) donc $k$-$k$'=0 donc $k$=$k$' d'où unicité.

## VII Applications géométriques

1) Propriété

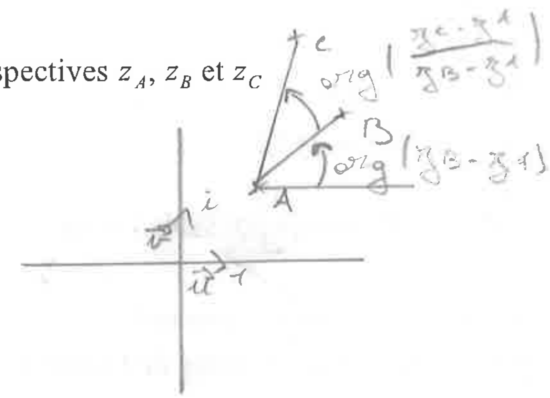
$A$, $B$ et $C$ sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$

On a : • $AB = |z_B - z_A|$

• $mes(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$

• $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

mesure angle




2) Exercice

Soit $M$ un point d'affixe $z$. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

a) L'ensemble des points $M$ tels que $|z - 2i| = 3$

b) L'ensemble des points $M$tels que $|z - 3 + i| = |z - 5|$

c) L'ensemble des points $M$tels que $\frac{|z - i|}{|z|} = 2$