Division euclidienne

I Division euclidienne

Théorème et définitions

Soient a un entier relatif, et b un entier **naturel non nul**.
Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers tels que $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

(1 potence)

Cette relation est appelée **division euclidienne de a par b**.
a est appelé le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** dans la division euclidienne de a par b.

Remarques :
Dans tous les cas, le reste est un entier **naturel**

E : partie entière
$E(2,2)=2$
$E(2,8)=2$
$E(-3)=-3$
$E(-3,2)=-4$

Comment déterminer à la calculatrice le quotient et le reste de la division euclidienne de 145836 par 21 ?

En pratique : $145\,836 : 21 \simeq 6944,57$

Donc quotient $= E\left(\frac{145\,836}{21}\right)$

et reste $= 145\,836 - 6944 \times 21 = 12$

$$\begin{array}{r|l} 145\,836 & 21 \\ \hline 12 & 6944 \end{array}$$

Exemples

a) Donnez le quotient et le reste de la division euclidienne de 147 par 10, puis de 147 par 14.

$$\begin{array}{r|l} 147 & 10 \\ \hline 7 & 14 \end{array}$$ $147 = 10 \times 14 + 7$ et $0 \leq 7 < 10$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 14 \\ \hline 7 & 10 \end{array}$$ $147 = 14 \times 10 + 7$ et $0 \leq 7 < 14$

b) Sachant que $147 = 15 \times 9 + 12$, donnez le quotient et le reste de la division euclidienne de 147 par 9.

⚠ reste < diviseur

$147 = 15 \times 9 + 12$
$= 15 \times 9 + 9 + 3$
$= 16 \times 9 + 3$ et $0 \leq 3 < 9$

c) Donnez le quotient et le reste de la division euclidienne de -37 par 11.

$$\begin{array}{r|l} -37 & 11 \\ \hline 7 & -4 \end{array}$$ $-37 = -4 \times 11 + 7$ et $0 \leq 7 < 11$

Démonstration :
1ère méthode
préambule : partie entière

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x \leq p+1$.
Cet entier p est appelé **partie entière de** x. On le note $E(x)$.
Exemples : E(1,5)=1 E(-2,1)=-3

Existence: Soient a un entier relatif, et b un entier **naturel non nul**. Montrons qu'il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers tels que $a=bq+r$, avec $0 \le r < b$.

Posons $q=E(\frac{a}{b})$ ($b \neq 0$). et $r=a-bq$. montrons que q et r conviennent

a-t-on l'égalité : $a=bq+r$?

Evident au vu de la définition de r

a-t-on l'inégalité : $0 \le r < b$

Par définition de la partie entière, $E(\frac{a}{b}) \le \frac{a}{b} < E(\frac{a}{b})+1$. comme $b \neq 0$, on a donc

$q \le \frac{a}{b} < q+1$, comme b est positif (b un entier **naturel non nul)** $bq \le a < bq+b$

Par conséquent, $0 \le a-bq < b$. pour finir, on obtient $0 \le r < b$

2ème méthode

<u>Existence :</u> 1^{er} *cas :* $0 \leqslant a < b$: Le couple $(q;r)=(0;a)$ convient.

2^{eme} *cas :* $b \leqslant a$: Soit E l'ensemble des multiples de b strictement supérieurs à a.

Alors E est non vide car l'entier $2b \times a$ appartient à E.

En effet $b \geqslant 1$ donc $2b \times a \geqslant 2a > a$.

E possède donc un plus petit élément, c'est-à-dire un multiple de b strictement supérieur à a tel que le multiple précédent soit inférieur ou égal à a.

Il existe donc un entier q tel que $qb \leqslant a < (q+1)b$.

Comme, $b \leqslant a$ on a : $b \leqslant a < (q+1)b$. Et comme $b > 0$, on a : $0 < (q+1)b$ et donc $0 < q$.

q est donc un entier naturel. On peut poser $r = a - bq$.

Or a, b et q sont des entiers, donc r est entier.

Comme $qb \leqslant a$, on a $r \geqslant 0$ donc r est donc un entier naturel. Et comme $a < (q+1)b$ on en déduit que $r < b$.

<u>Unicité :</u>

On suppose qu'il existe deux couples $(q;r)$ et $(q';r')$.

Donc $a = bq + r = bq' + r'$.

Et donc : $b(q-q') = r' - r$.

Comme $q - q'$ est entier, $r' - r$ est un multiple de b.

On sait que $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$ donc $-b < -r \leqslant 0$ et $0 \leqslant r' < b$, donc $-b < r' - r \leqslant b$.

Le seul multiple de b compris entre $-b$ et b est 0, donc $r' - r = 0$ et donc $r' = r$. D'où $q = q'$.

<u>II</u>

<u>**Disjonction de cas**</u>

Propriétés

Soit un entier naturel tel que $b \ge 2$. Tout entier relatif n s'écrit de manière unique sous une des formes : bq , ou $bq+1$, ou $bq+2$, ..., ou $bq+(b-1)$, avec $q \in \mathbb{N}$

Remarque

$\begin{array}{r|l} n & b \\ \hline 0 & q \end{array}$ ou $\begin{array}{r|l} n & b \\ \hline 1 & q \end{array}$ ou ... $\begin{array}{r|l} n & b \\ \hline b-1 & q \end{array}$

Exemples

- avec $b=2$:
  Tout entier n s'écrit sous la forme. avec $q \in \mathbb{Z}$
  $2q$ ou $2q+1$
- avec $b=3$: Tout entier n s'écrit sous la forme :
  $3q$ ou $3q+1$ ou $3q+2$ avec $q \in \mathbb{Z}$

III Exercices

Exercice1

Sachant que $1159 = 47 \times 24 + 31$, déterminez le quotient q et le reste r de la division euclidienne de

a) 1 159 par 47 ;
b) 1 159 par 24 ;
c) – 1 159 par 24.

a) $1159 = 47 \times 24 + 31$ et $0 \leq 31 < 47$

b) $1159 = 47 \times 24 + 31$
$= 47 \times 24 + 24 + 7$
$= 24 \times (47+1) + 7 = 24 \times 48 + 7$ et $0 \leq 7 < 24$

c) $-1159 = -47 \times 24 - 31 = -47 \times 24 - 48 + 17$
$= (-47-2) \times 24 + 17$ et $0 \leq 17 < 24$
$-49 \times 24 + 17$

Exercice2 (methode4p97)

Soit b un entier naturel non nul.
Sachant que le reste de la division de 2015 par b est 500, déterminer les valeurs de b.

$b \in \mathbb{N}^*$ $q \in \mathbb{N}^*$

$2015 = b \times q + 500$

$1515 = bq$

Donc b est un diviseur positif de 1515

$D(1515) > 500 = \{1, 3, 5, 15 \ldots 101, 303, 505, 1515\}$

$S = \begin{cases} bq = 1515 \\ b > 500 \end{cases} \Leftrightarrow S = b = 505$ ou $b = 1515$

Exercice3 : disjonction des cas (methode3 p97)

Montrer que pour tout entier n , 3 divise $n(n+4)(n-4)$

(3 → 3 facteurs : le choix à faire)

Tout entier n s'écrit sous la forme :

$3q$ ou $3q+1$ ou $3q+2$

• 1er cas $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q$

$n(n+4)(n-4) = 3q(3q+4)(3q-4)$

$q \in \mathbb{Z}$ donc $q(3q+4)(3q-4) \in \mathbb{Z}$

• 2e cas $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q+1$

$$\begin{aligned} n(n+4)(n-4) &= (3q+1)(3q+1+4)(3q+1-4) \\ &= (3q+1)(3q+5)(3q-3) \\ &= 3(q-1)(3q+1)(3q+5) \end{aligned}$$

$q \in \mathbb{Z}$ donc $(q-1)(3q+1)(3q+5) \in \mathbb{Z}$

• 3e cas $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q+2$

$$\begin{aligned} n(n+4)(n-4) &= (3q+2)(3q+6)(3q-2) \\ &= 3(q+2)(3q+2)(3q-2) \end{aligned}$$

$q \in \mathbb{Z}$ donc $(q+2)(3q+2)(3q-2) \in \mathbb{Z}$