Congruence dans $\mathbb{Z}$

I Définition

Soit m un entier naturel non nul
Deux entiers a et b sont **congrus modulo** m si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par m.

On dit aussi que a **est congru à** b **modulo** m, ou b **est congru à** a **modulo** m
On note : $a \equiv b(m)$, ou bien $a \equiv b[m]$ ou encore : $a \equiv b(mod\ m)$

Exemple : Déterminer des entiers congrus à 11 modulo 5.

11	6	16	21	-4	1

$5\times2+1$ $5\times1+1$ $5\times3+1$ $5\times4+1$ $5\times-1+1$ $5\times0+1$

On additionne (ou soustrait) des multiples de 5
Il y a une infinité d'entiers congrus à 11 modulo 5

Exercices :

- A t'on $24 \equiv 4(2)$? $24 = 2\times12+0$ et $0 \leq 0 < 2$
$4 = 2\times2+0$ et $0 \leq 0 < 2$ Oui
- A t'on $24 \equiv 4(6)$? $24 = 4\times6+0$ et $0 \leq 0 < 6$
$4 = 0\times6+4$ et $0 \leq 4 < 6$ Non $24 \not\equiv 4(6)$
- Déterminer un entier a tel que $24 \equiv a(6)$ a tel que $a = 6\times q+0$ avec $q \in \mathbb{Z}$
ex $-12, 6, 36$ $(36 = 6\times6+0$ et $24 = 6\times4+0)$ $24 \equiv 36(6)$
- Déterminer un entier a tel que $25 \equiv 4(a)$ pour $a = 3$ $25 = 3\times8+1$
et $4 = 3\times1+1$ 25 et 4 ont le même reste par 3 donc $25 \equiv 4(3)$
la division euclidienne

Propriété

Soit m un entier naturel non nul .
Deux entiers a et b sont **congrus modulo** m si et seulement si la différence de a par b est un multiple de m

Démonstration :

Remarques

a) Symétrie $a \equiv b(m) \Leftrightarrow b \equiv a(m)$

b) Réflexivité : $a \equiv a(m)$

c) $a \equiv 0(m) \Leftrightarrow$ a est un multiple de m (propriété)
$\Leftrightarrow$ m divise (m/a)

d) $a \equiv b(m) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a - b = km$
$a = b + km$ (a - b est un multiple de m)

e) Si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à r alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que
$a = bk + r$ et $0 \leq r < b$ alors $a \equiv r(b)$
(Si $a \equiv r(b)$ et $0 \leq r < b$ alors r est le reste de la div eucl de a par b)

f) On peut étendre la notion de congruence dans la cas $m=0$: $a \equiv b(0) \Leftrightarrow a = b$
$a \equiv b(0) \Leftrightarrow a - b$ est un multiple de 0
$\Leftrightarrow a - b = 0$

Propriétés

Soit m un entier naturel non nul, et soient a , b , c , a' b' des entiers.

1) *Transitivité* : **Si** $a \equiv b(m)$ et $b \equiv c(m)$ **alors** : $a \equiv c(m)$
2) *Compatibilité* **Si** $a \equiv b(m)$ et , $a' \equiv b'(m)$ **alors**

$a + a' \equiv b + b'(m)$
$a - a' \equiv b - b'(m)$
$a a' \equiv b b'(m)$
$a + c \equiv b + c(m)$
$a c \equiv b c(m)$

3) *Conséquence* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \equiv b^n(m)$

remarque : **Attention les réciproques sont fausses !** Contre-exemples :

- $13 + 12 \equiv 10 + 9(6)$ est de la forme $a + a' \equiv b + b'(m)$ mais on n'a aucune congruence modulo 6 entre le termes.
- $2 \times 11 \equiv 2 \times 9(4)$. Mais 11 n'est pas congru à 9 modulo 4.
- $16 \equiv 81(5)$ soit : . $2^4 \equiv 3^4(5)$ Mais 2 n'est pas congru à 3 modulo 5.

Conclusion, les congruences sont compatibles avec l'addition, la soustraction, la multiplication , les puissances mais PAS avec la division.

II Exercices

Exercice1 :

Démontrez que : $214 \equiv 25(9)$

Methode 1 $25 = 9 \times 2 + 7$

$214 = 9 \times 23 + 7 \qquad 0 \leq 7 < 9$

214 et 25 ont le meme reste par la DE par 9

Methode 2

$214 - 25 = 189 = 21 \times 9$ Donc $214 \equiv 25(9)$

Exercice2 :(methode5 p 99)

Montrer que pour tout entier n , 3 divise $n(n+4)(n-4)$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

3 divise $n(n+4)(n-4)$ ssi $n(n+4)(n-4) \equiv 0\ [3]$

$n \equiv \dots [3]$	0	1	2
$n+4 \equiv \dots [3]$	$4 \equiv 1 [3]$	$5 \equiv 2 [3]$	$6 \equiv 0 [3]$
$n-4 \equiv \dots [3]$	$-4 \equiv 2 [3]$	$-3 \equiv 0 [3]$	$-2 \equiv 1 [3]$
$n(n+4)(n-4) \equiv \dots [3]$	0	0	0

$\forall n \in \mathbb{Z}$, 3 divise $n(n+4)(n-4)$

Exercice 3 (53p 105)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $2+x \equiv 4(6)$ $\qquad 4x \equiv 5(9)$

- $2 + x \equiv 4(6) \iff x \equiv 2(6)$

$S = \{6k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

- $4x \equiv 5(9)$

Methode 1 : tableau

$x \equiv \dots [9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4x \equiv \dots [9]$	0	4	8	$12 \equiv 3[9]$	$16 \equiv 7[9]$	2	6	1	5

$4x \equiv 5(9) \iff x \equiv 8(9)$

$S = \{9k+8, k \in \mathbb{Z}\}$

Methode 2

$4x \equiv 5(9) \iff 4 \times 7 x \equiv 5 \times 7 (9)$, $28x \equiv 35(9)$ $\qquad x \equiv 8(9)$