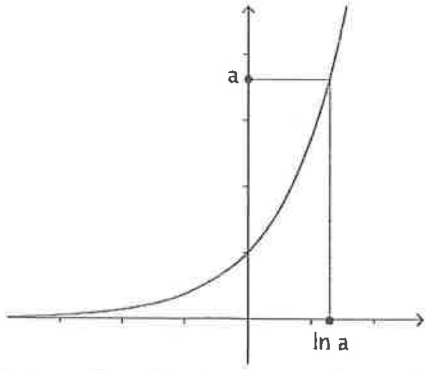
Chapitre 6 : Fonction logarithme népérien

I. Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $e^x = b$. On la note $\ln b$.
La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction :

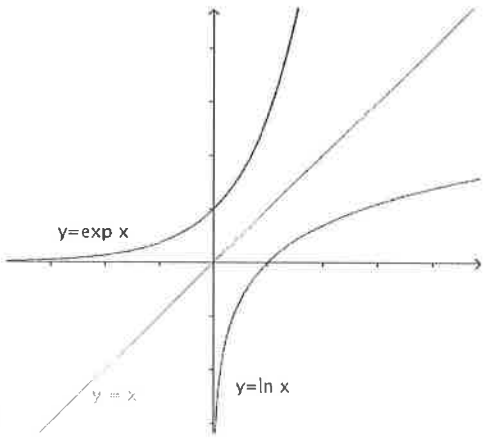
$$\begin{aligned} \ln : \ ]0\,;\,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln x \end{aligned}$$

Remarques :

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par : $\log a = \dfrac{\ln a}{\ln 10}$



Conséquences :
a) Pour $y > 0$: $e^x = y \iff x = \ln y$
b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \dfrac{1}{e} = -1$
c) $\ln e^x = x$
d) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ b) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ c) $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$ d) $\ln x^n = n \ln x$, avec $n \in Z$

$$\ln 1 = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right)$$
$$0 = \ln x + \ln \frac{1}{x}$$
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\ln(x) = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x})$$
$$\ln(x) = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x}$$
$$\ln(x) = 2 \ln \sqrt{x}$$
$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right)$$
$$= \ln x + \ln \frac{1}{y}$$
$$= \ln x - \ln y$$

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

$= \ln((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))$

$= \ln(9-5)$

$= \ln 4$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$

$= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$

$= \ln 8 + \ln \frac{5}{9}$

$= \ln(8 \times \frac{5}{9})$

$= \ln \frac{40}{9}$

$C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$

$= 2 - \ln 2 + \ln e$

$= 2 + 1 - \ln 2$

$= 3 - \ln 2$

3) Équations et inéquations

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2$, $I =]0\,;+\infty[$ $e^{\ln x} = e^2$ $x = e^2$	b) $e^{x+1} = 5$, $I = \mathbb{R}$ $\ln(e^{x+1}) = \ln(5)$ $x+1 = \ln(5)$ $x = \ln(5) - 1$	c) $3\ln x - 4 = 8$, $I =]0\,;+\infty[$ $3\ln x = 12$ $\ln x^3 = 12$ $e^{\ln x^3} = e^{12}$ $x^3 = e^{12}$ $x = e^4$
d) $\ln(6x-1) \geq 2$, $I = \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$ $e^{\ln(6x-1)} \geq e^2$ $6x - 1 \geq e^2$ $6x \geq e^2 + 1$ $x \geq \frac{e^2+1}{6}$ $S = [\frac{e^2+1}{6}\,;+\infty[$	e) $e^x + 5 > 4e^x$, $I = \mathbb{R}$ $-3e^x > -5$ $3e^x < 5$ $\ln(3e^x) < \ln(5)$ $\ln(3) + \ln(e^x) < \ln(5)$ $\ln(3) + x < \ln(5)$ $x < \ln(5) - \ln(3)$ $x < \ln(\frac{5}{3})$ *	
f) $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$, $I = \mathbb{R}$ $x > 3$ $x < 9$ $\ln((x-3)\times(9-x)) = 0$ $\ln(-x^2+12x-27) = 0$ $e^{\ln(-x^2+12x-27)} = e^0$ $-x^2+12x-27 = 1$ $-x^2+12x-28 = 0$ $\Delta = 12^2 - 4(-1)(-28) = 32$ $x_1 = \frac{-12+\sqrt{32}}{-2} = 6-2\sqrt{2}$ $x_2 = \frac{-12-\sqrt{32}}{-2} = 6+2\sqrt{2}$ $S = \{6-2\sqrt{2}\,;6+2\sqrt{2}\}$	g) $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$, $I = \mathbb{R}$ $3 - x > 0$ $x < 3$ $x + 1 > 0$ $x > -1$ $x \in]-1\,;3[$ $\ln(\frac{3-x}{x+1}) \leq 0$	

e) * $S =]-\infty\,;\ln\frac{5}{3}[$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation (pour les suites)

1) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $x^5 = 3$

x

2) On considère la suite $u_n = 2 \times 0.5^n$.

Déterminer à partir de quel rang les termes de la suite seront inférieurs à 0.001.

$2 \times 0{,}5^n < 0{,}001 \Leftrightarrow 0{,}5^n < \frac{0{,}001}{2}$

$\ln(0{,}5^n) < \ln(0{,}0005) \Leftrightarrow n\ln(0{,}5) < \ln(0{,}0005)$

$n > \frac{\ln(0{,}0005)}{\ln(0{,}5)}$ $n > 10{,}95$ Pour $n \geq 11$, $u_n < 0{,}001$

g) $\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right) \leq 0 \iff e^{\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)} \leq e^0$

$\iff \frac{3-x}{x+1} \leq 1 \iff 3-x \leq x+1$

$\iff 3-1 \leq 2x \iff x \geq 1$

$S = [1; 3[$

$x^5 = 3$

$\ln(x^5) = \ln(3) \iff 5\ln(x) = \ln(3)$

$\ln(x) = \frac{\ln(3)}{5} \iff e^{\ln(x)} = e^{\left(\frac{\ln(3)}{5}\right)} = x$

$e^{\frac{\ln(3)}{5}} = e^{\frac{1}{5}\ln(3)} = e^{\ln\left(3^{\frac{1}{5}}\right)} = 3^{\frac{1}{5}}$

III. Étude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration au programme : p236

Vidéo **https://youtu.be/wmysrEq4XIg**

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout x de I. La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
On a $\mathbf{\ln(u)' = \frac{u'}{u}}$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3) Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$. $\ln(x)'' = \frac{-1}{x^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

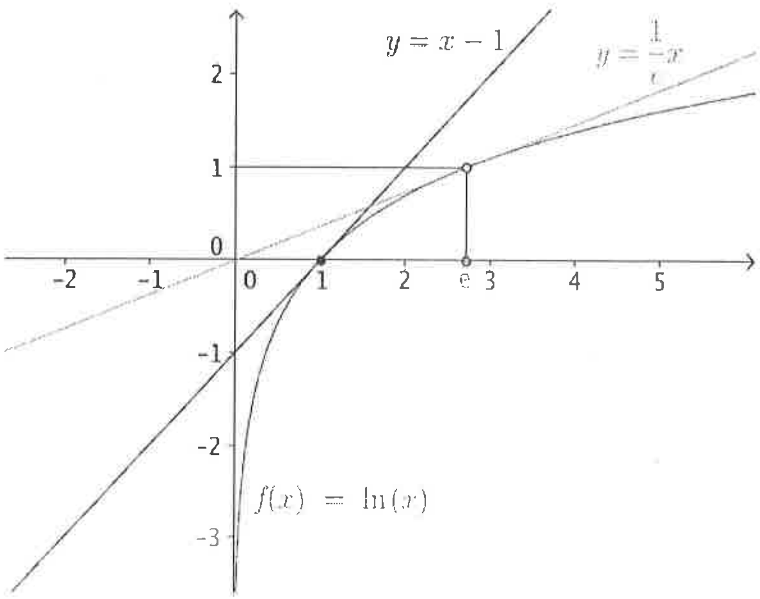
4) Limites aux bornes

Propriétés : $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	||	$+$	
$\ln x$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

5) Courbe représentative



Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$

Equation de la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1 :

Demonstration

Mq $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

Soit $f(x) = e^{\ln(x)}$ $\qquad$ $u = \ln(x)$ $\qquad$ $u' = (\ln(x))'$

$= e^{u}$

$f'(x) = (\ln(x))' e^{\ln(x)}$

$= (\ln(x))' x$

Or $f(x) = x$

$f'(x) = 1$

On a $(\ln(x))' \times x = 1$

donc $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

IV- Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Propriétés (croissances comparées) :
a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
b) $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ et pour tout entier n, $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

Démonstration du b. dans les cas où $n = 1$ (au programme) : p240

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/lA3W_j4p-c8
Vidéo https://youtu.be/OYcsChr8src

FI $\infty - \infty$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$

$x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

FI $\frac{\infty}{\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{x\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

ou $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

III. Études de fonctions contenant des logarithmes

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln x$
2) Étudier la convexité de la fonction f.

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation y = x

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

limite

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$

Par Q $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$