11

CHAPITRE 2 : COMBINATOIRE ET DENOMBREMENT

I. Premières définitions

Définition : Un ensemble E est une « collection d'objets distincts » x , qu'on appelle éléments.
On dit alors que x appartient à E (respectivement n'appartient pas à E) et on note $\boldsymbol{x \in E}$ (resp. $\boldsymbol{x \notin E}$)

Exemples :
- $E = \{a; b; c\}$ est un ensemble **fini** à 3 éléments. Cardinal(E) = 3
- Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ et \mathbb{R}$ ont une infinité d'éléments.

Définition : On appelle ***k*-uplet** ou ***k*-liste** d'un ensemble E une collection **ordonnée** de k éléments de E.
Un k-uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarque :
Un 2-uplet est appelé un **couple**.
Un 3-uplet est appelé un **triplet**.

Exemples :
- On considère le triplet (a,b,c). L'ordre intervient (a,b,c)≠(b,a,c).
- Les objets peuvent être identiques. Par exemple le couple (a,a) (ex : coordonnées d'un point)

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun.

$E = \{x = 2k ; k \in \mathbb{Z}\}$ $F = \{x = 2k+1 ; k \in \mathbb{Z}\}$ $E \cap F = \emptyset$

Définition : Soit 2 ensembles finis $E_1\ et\ E_2$
L'ensemble noté $E_1 \times E_2$, appelé **produit cartésien,** est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.

Exemple :
Soit 2 ensembles E et F tels que $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{f; g\}$. E et F sont **disjoints**.
Alors l'ensemble $E \times F = \{(a, f); (a, g); (b, f); (b, g); (c, f); (c, g)\}$

II. Dénombrement dans un ensemble fini

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini.

Définition : On appelle **partie d'un ensemble** E (ou **sous-ensemble** de E), un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E.
On note $\boldsymbol{F \subset E}$. (F est inclus dans E)

Exemple :
Soit 2 ensembles E et F tels que $E = \{a; b; c; d; e\}$ et $F = \{b; e\}$.
Tous les éléments de F appartiennent à E donc F est un sous-ensemble de E

E = lettres de l'alphabet
F = voyelles ⇒ $F \subset E$

Propriété : **Principe additif**
Soit 2 ensembles finis E et F **disjoints** tels que E contient n éléments et F contient p éléments.
Alors l'ensemble $\boldsymbol{E \cup F}$ contient $\boldsymbol{n + p}$ éléments.

Exemple :
Soit $E_1 = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ à 4 éléments et $E_2 = \{\alpha\,;\beta\,;\gamma\}$ à 3 éléments
Alors $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ donc E_1 et E_2 sont disjoints
donc l'ensemble $E_1 \cup E_2$ contient $4 + 3 = 7$ éléments.
En effet $E_1 \cup E_2 = \{a\,;b\,;c\,;d;\alpha;\beta;\gamma\}$

Remarque :
Le principe additif s'applique plus généralement pour la réunion de k ensembles finis disjoints, avec k entier supérieur ou égal à 2.

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

$16 + 14 - 5 + 8 = 33$

Propriété : Principe multiplicatif
Soit 2 ensembles finis E et F tels que E contient n éléments et F contient p éléments.
Alors l'ensemble $\boldsymbol{E \times F}$ contient $\boldsymbol{n \times p}$ éléments.

Remarque :
Le principe multiplicatif s'applique plus généralement pour le produit cartésien de k ensembles finis, avec k entier supérieur ou égal à 2.

Méthode : Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

Enoncé 1 :

Vidéo **https://youtu.be/wzo1XXXaaqY**
Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

E = entrée — P : plat — D : dessert
card(E) = 3 — card(P) = 4 — card(D) = 2
card(E × P × D) = 24
card(E × P) = 12

Enoncé 2 :
On lance deux dés à six faces. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

D_1 issues dé 1 — D_2 issues dé 2

card($D_1 \times D_2$) = 6 × 6 = 36

Ex : capacités 2 et 3 p15, 51, 52, 53, 55, 57 p28-29

III. Arrangements et permutations

1) Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

Propriété : Le nombre de k-uplets d'éléments d'un ensemble à n éléments est n^k

Exemple :
Soit un ensemble E tel que $E = \{a, b\}$. Tous les triplets (3-uplets) possibles des éléments de E sont :
$(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, a), (b, a, b), (b, b, b), (a, b, b)$
Donc il y 8 « 3-uplets » des 2 éléments de E. Donc 2^3 triplets.

Ex · code fin

2) Permutations

Définition : On appelle **permutations** d'un ensemble à n éléments tous les ordres possibles dans les n-uplets constitués des éléments de l'ensemble

Exemple :
Soit E=$\{Bleu; Blanc; Rouge\}$
Les permutations des triplets (3-uplets) possibles sont :

(bleu,blanc,rouge), (blanc,bleu,rouge), (bleu,rouge,blanc), (rouge,blanc,bleu), (rouge,bleu,blanc), (blanc,rouge,bleu)
=> Il y a donc 6 permutations possibles.

Propriété : Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments s'écrit $n!$, se lit « **factorielle n** » et est défini par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Exemple :
Dans l'exemple précédent, l'ensemble E a 3 éléments donc il y a :
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations dans cette ensemble.

3) Arrangements

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.
Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments **distincts** de E. pas de repetition

Propriété : Dans un arrangement **l'ordre des éléments compte** et les éléments ne se répètent pas.

Exemples :
On considère l'ensemble $E = \{a\,; b\,; o\,; p\,; r\}$.
- Les triplets (b, o, a) et (r, a, p) sont des arrangements à 3 éléments de E.

Et (p, a, r) est un arrangement à 3 éléments de E différent de (r, a, p). L'ordre des éléments est à prendre en compte.
- Le quintuplet (p, r, o, b, a) est un arrangement à 5 éléments de E.
- Le sextuplet (b, a, r, b, a, r) n'est pas un arrangement de E car des éléments se répètent.

Propriété :
Le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à :
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple : On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$ $= \frac{5!}{(5-3)!}$ $\quad \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2}$

Méthode : Dénombrer des ensembles simples

1. On lance 7 fois une pièce de 1€ pour jouer à Pile ou Face. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Deux joueurs jouent aux dominos, chacun recevant 7 dominos au hasard parmi les 28 dominos composant le jeu. Combien de distributions possibles y a-t-il ?
3. On dispose de 4 gâteaux différents. Chacun leur tour, les 4 invités en choisit un pour le manger. Combien de distributions possibles y a-t-il ?

1) $E = \{Pile, Face\}$ $\quad 2^7$ (répétition possible)

2) $\frac{28!}{14!}$ $\quad E = \{dominos\}$ $\quad |E| = 28$ (pas de répétition)

3) $4!$ $\quad E = \{G1, G2, G3, G4\}$ $\quad |E| = 4$

Ex : capacités 4, 5 p17 ; 25, 27, 31 p27 ; 59, 60, 61, 62 p29

IV. Combinaisons

1) Nombre de combinaisons

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est une partie (ou un sous-ensemble) de E.

k élément de E où l'ordre ne compte pas $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n »

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2 ; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.
Pour une combinaison, **l'ordre n'a pas d'importance**.
Ainsi $\{1 ; 2\}$ et $\{2 ; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$

Méthode : Dénombrer des combinaisons

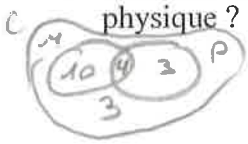
Enoncé 1 :
Au bridge, chaque joueur possède une main de 13 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.
1. Combien de mains peut-on distribuer ?
2. Combien de mains ne contiennent qu'un seul cœur ?

1) $\binom{52}{13}$ 13 élément, ordre ne compte pas sans répétition → combinaison $\quad \frac{52!}{13!(39)!}$

2) 12 élément, combinaison $|E| = 52 - 13 = 39$ $\quad \binom{39}{12}\binom{13}{1} = \frac{39!}{12!(27)!} \times 13$

Enoncé 2 :
Dans une classe du lycée, on interroge au hasard 20 élèves.
14 déclarent aimer les maths, 7 déclarent aimer la physique et enfin 4 déclarent aimer les 2 matières. (*On pourra utiliser un diagramme pour représenter la situation*).
On choisit au hasard 4 de ces élèves parmi les 20 élèves.
Parmi tous les choix possibles :

1. Combien comporte 4 élèves qui aiment les maths ?
2. Combien comportent exactement 2 élèves qui n'aiment que les maths et 2 autres qui n'aiment que la physique ?



nb de groupe de 4 = $\binom{20}{4}$

1) $\binom{14}{4}$

2) $\binom{10}{2}\times\binom{3}{2} = 45\times 3 = 135$

3) Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de k parmi n porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$. Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

nb de chemins menant à k succès parmi n répétitions

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}$

Propriété du triangle de Pascal : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq k \leq n$:
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$ $n! = n\times(n-1)!$

Démonstration au programme :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{\underbrace{(k+1)!}_{(k+1)\times k!}\underbrace{(n-k-1)!}_{(n-k-1)\times(n-k)!}} = \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)\times(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!\times(n-k)}$$

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!\times(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!\times(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!\times(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\times(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Méthode : Calculer des coefficients binomiaux

Vidéo https://youtu.be/-gvIrfFdaS8

Vidéo https://youtu.be/mfcBNlUuGaw

Calculer : a) $\binom{25}{24} = \binom{25}{1} = 25$

b) $\binom{4}{2} = \binom{3}{2}+\binom{3}{1} = \binom{3}{1}+\binom{3}{1} = 3+3 = 6$

Avec la calculatrice :
Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme "*combinaison*" ou "*nCr*". Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : 25*combinaison*24 ou 25*nCr*24 suivant le modèle de calculatrice.

3) Triangle de Pascal

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la propriété du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal peut être utilisé par exemple pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6		
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

4) Parties d'un ensemble

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Démonstration au programme :
- Le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à n éléments.
Soit : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$

- Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où à chaque élément de E, on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l'inclure dans le sous-ensemble.
Il y a donc deux possibilités par étape et il y a n étapes.
Il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n facteurs) possibilités de construire un sous-ensemble de E, soit 2^n.

Exemple :
Soit : $E = \{1, 2, 3\}$.
Alors toutes les parties de E sont :
$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.
Elles sont au nombre de 8 et en effet : $2^3 = 8$.

Ex : capacités 6, 7 p19 ; 35, 36 (oral), 38 p27 ; 69, 71, 72, 73, 75, 81, 84 p31-32

Exo synthèse : capacité 9 p21 ; 90, 92, 95, 99 p32-33, sujets D, E, G p45