Maths expert Problème d ‘évolutions

→ **Point de vue de spé**

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{3} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + 4w_n}{5}.$$

questions préliminaires :

	A	B	C
1			
2	n	u_n	vn
3	0	1	2
4	1	1,666666667	1,8
5	2	1,755555556	1,773333333
6	3	1,767407407	1,769777778
7	4	1,768987654	1,769303704
8	5	1,769198354	1,769240494
9	6	1,769226447	1,769232066
10	7	1,769230193	1,769230942
11	8	1,769230692	1,769230792

a) Calculer « à la main » u_1 et w_1.

b) A la calculatrice, calculer u_{10} et w_{10}.

c) Quelles conjectures peut-on faire ?

d) Quelle formule doit-on mettre dans la cellule B4 ? Dans la cellule C4 ?

1. Soit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = w_n - u_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n. En déduire que, pour tout n, $t_n > 0$.
   (c) Calculer la limite, si elle existe, de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n < w_n$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent puis sing elles convergent vers la même lim

6. On pose pour tout entier naturel n, $x_n = 3u_n + 10w_n$

a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Suit adjacente

- $(U_n) \nearrow$
- $(W_n) \searrow$
- $\lim (W_n - U_n) = 0$

$\Rightarrow$ (U_n) et (W_n) ont la même lim

➔ Point de vue de maths expert

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{3} \quad \text{et } w_{n+1} = \frac{u_n + 4w_n}{5}.$$

On introduit les matrices suivantes $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n $U_n=\begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\times U_n$
   b) En déduire u_1 et w_1.
   c) Exprimer pour tout entier naturel n , U_n en fonction de A et de U_0.
2) On introduit les matrices $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-10}{\sqrt{109}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{\sqrt{109}} \end{pmatrix}$
   a) Montrer que P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{13} & \frac{10\sqrt{2}}{13} \\ \frac{-\sqrt{109}}{13} & \frac{\sqrt{109}}{13} \end{pmatrix}$
   b) Déterminer $P^{-1}AP$
   c) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n non nul $A^n=P\times D^n P^{-1}$
   d) pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n
3) Déterminer pour tout entier naturel n non nul A^n
4) En déduire l'expression de u_n et w_n. et les limites de ces deux suites