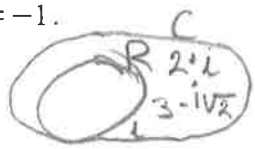
Les Nombres Complexes

I Notion de nombre complexe

1) le nombre i

Les mathématiciens ont inventé un nouveau nombre noté i vérifiant la propriété $i^2=-1$.



Ensemble $\mathbb{C}$

Lorsqu'on fait des opérations avec les nombres réels et le nombre i, on obtient un nouveau type de nombre: les nombres complexes. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $x+i\,y$ où x et y sont des réels. On utilise fréquemment la lettre z pour désigner un nombre complexe.

2) Vocabulaire:

L'écriture $z=x+iy$ avec $x, y\in\mathbb{R}$ est appelée **forme (ou écriture) algébrique** du nombre complexe z.

x est la **partie réelle** de z notée $\mathrm{Re}(z)$.

y est la **partie imaginaire** de z notée $\mathrm{Im}(z)$.

Propriétés (admises):

si $\mathrm{Im(z)}=0$, alors z est un réel : l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

si $\mathrm{Re(z)}=0$, alors z est appelé **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

les réciproques sont vraies :

Si z est un réel alors $\mathrm{Im}(z)=0$

Si $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$

$\Leftrightarrow$ si et seulement si (ssi)

Si z est un imaginaire pur alors $\mathrm{Re}(z)=0$

$z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$

exemples :

- $4i$ $\quad \mathrm{Re}(4i)=0$; $\mathrm{Im}(4i)=4$
  $4i$ est un imaginaire pur
- $2-4i$ $\quad \mathrm{Re}(2-4i)=2$; $\mathrm{Im}(2-4i)=-4$
- 4 $\quad \mathrm{Re}(4)=4$; $\mathrm{Im}(4)=0$
  4 est un réel

3) Egalité

Propriété admise : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

Conséquence: un nombre est nul si et seulement si sa partie réelle est égale à 0 et sa partie imaginaire est égale à 0.

exemples :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $z=2a+1+i\left(a+\frac{1}{2}\right)$

Determiner l'ensemble des reels tel que $z=0$

$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)= \quad \mathrm{Im}(z)=0$

$\Leftrightarrow a+\frac{1}{2}=0$ et $2a+1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1=0 \\ a+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

$z=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

II Règles de calculs

On étend les règles de calcul de $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\mathbb{C}$: associativité, distributivité, commutativité...

Par la suite, on notera $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$,

1) Opposé

L'opposé d'un nombre complexe $z = x + iy$ est noté $-z$ et on a $z = -x - iy$

exemple:

l'opposé de $2-3i$ est $-2+3i$

2) Somme-différence

La somme de deux nombres complexes est un nombre complexe dont la partie réelle est égale à la somme des parties réelles et la partie imaginaire est égale à la somme des parties imaginaires.

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

exemple: déterminer la forme algébrique de la somme de $2-3i$ et de $-4+5i$

$2-3i + -4+5i = 2-4 + i(-3+5)$
$= -2 + 2i$

Soustraire un nombre c'est additionner son opposé d'où $z - z' = (x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y')$

exemple: déterminer la forme algébrique de la différence de $-4+5i$ et de $8-3i$

$-4+5i - (8-3i) = -4 + 5i - 8 + 3$
$= -12 + 8i$

Remarques : $z + (-z) = 0$ $z + 0 = z$, on dit que 0 est l'élément neutre pour l'addition

3) Produit

Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe

$k \times z = k \times (x + iy) = (kx) + i(ky)$ (k est un réel)

$z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(x'y + xy')$ inutile d'apprendre ces formules

Exemple: déterminer la forme algébrique du produit de

$2i$ par $4-5i$

$2i(4-5i) = 8i - 10i^2$
$= 8i + 10$

$5-2i$ par $3+4i$

$(5-2i)(3+4i) = 15 + 20i - 6i - 8i^2$
$= 14i + 15 + 8$
$= 14i + 23$

Remarques :

$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ $\mathrm{Re}(kz) = k \times \mathrm{Re}(z)$, on dit que la partie réelle est linéaire

$1 \times z = z \times 1 = z$, on dit que 1 est l'élément neutre pour la multiplication

4) Conjugué

Définition:

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$). Le nombre complexe $x - iy$ est le nombre conjugué de z noté $\bar{z}$ (on lit « z barre »)

exemple: : le conjugué de $4-5i$ est $4+5i$
l'opposé de $4-5i$ est $-4+5i$

5) Module

Définition:

Soit z un nombre complexe. On appelle **module du nombre complexe** $z=x+iy$ (x et y réels) et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

exemple : Calculer $(\underset{}{\overset{z}{5-3i}})\times(\overset{\bar{z}}{5+3i})$

$5^2-(3i)^2$

$25-3i^2$

$25+9$

34

Calculer $|5-3i|^2$

$|5-3i|^2=\sqrt{5^2+(-3)^2}^2$

$=\sqrt{25+9}^2$

$=\sqrt{34}^2=34$

Propriété admise: $|z|^2= z\bar{z}=x^2+y^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

6) Inverse

définition-théorème

L'inverse d'un nombre complexe non nul z est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ (ou z^{-1}) tel que $\frac{1}{z}\times z=1$

Tout nombre complexe non nul admet un inverse.

exemple : montrer que $-i$ est l'inverse de i

$\frac{1}{i}=\frac{1\times i}{i\times i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$

Méthode: Comment déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe non nul.

- pas de i au dénominateur

1 On multiplie le D et le N par le conjugué du D

2 Conseil: pour le D utiliser la F $z\bar{z}=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

3 Finir le calcul

D dénominateur N numérateur

exemple:déterminer la forme algébrique de l'inverse de $5-3i$

$\frac{1}{5-3i}=\underset{(z)}{\frac{1}{5-3i}}\times\underset{(\bar{z})}{\frac{5+3i}{5+3i}}=\frac{5+3i}{5^2+3^2}=\boxed{\frac{5+3i}{34}}$ résultat valide

$\boxed{\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i}$ forme algébrique

7) Division

Diviser par un nombre complexe non nul, c'est multiplier par son inverse.

Méthode: Comment déterminer la forme algébrique d'un quotient d'un nombre complexe par un nombre complexe non nul.

exemple:déterminer la forme algébrique du quotient de $\frac{2-i}{3+4i}$

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{(2-i)(3-4i)}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}$$

$$= \frac{-11i+2}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

8) Règles de calcul avec les conjugués

propriétes : $\overline{\overline{z}} = z$ $\quad \overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ $\quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $\quad$ Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

$z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $\quad z-\overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$

exemple: déterminer la forme algébrique de $\overline{z}$

Mise en garde : le conjugué de 3+2iz est

Conséquences:

Un nombre est un réel si et seulement si ce nombre est égal à son conjugué.
Un nombre est un imaginaire pur si et seulement si ce nombre est égal à son l'opposé de son conjugué.

Méthode: Comment démontrer qu'un nombre est réel/ imaginaire pur