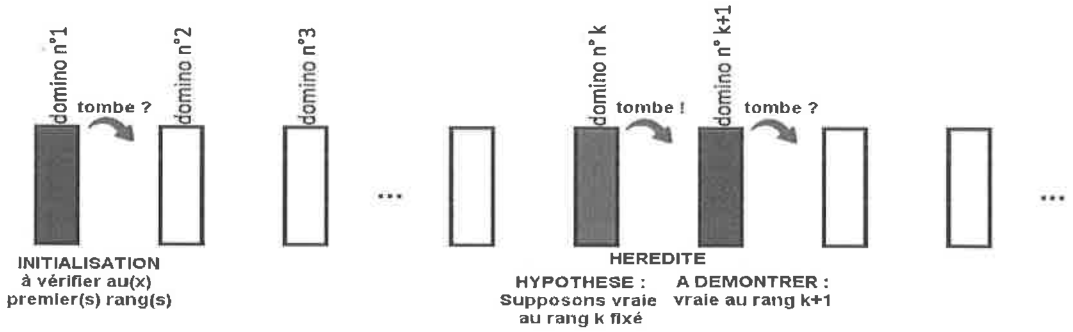
Chapitre 1 : LES SUITES

I. Raisonnement par récurrence

1) Le principe

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.
Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Le raisonnement par récurrence « est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini » (Henri Poincaré), c'est-à-dire qu'avec seulement deux vérifications, il permet de prouver qu'une infinité de propositions P_n sont vraies.

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède en deux étapes, puis on conclut :

- Première étape : on vérifie que P_0 est vraie.
- Deuxième étape : on suppose que pour un entier naturel k quelconque, la proposition P_k est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
- Conclusion : lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
Si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant (k+1) tombe également => L'hérédité est vérifiée.
On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration "classique" est difficile.

2) Exemple avec les suites

Méthode : Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

▶ Vidéo https://youtu.be/OIUi3MG8efY

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$
(Pour tout entier naturel n) on note $P(n)$: « $u_n = (n+1)^2$ ».

- **Initialisation :** montron que $P(0)$ est vrai $U_0 = (0+1)^2$ → *Le premier domino tombe.*

On sait que $U_0 = 1$ (enoncé)
et que $(0+1)^2 = 1$

Donc $U_0 = (0+1)^2$ P(0) est vrai

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence : → *On suppose que le k-ième domino tombe.*

  Supposons qu'il existe un entier k tel que $P(k)$ soit vraie : . $U_k = (k+1)^2$ (hypothèse de recurrence)

  - Montrons que : → *Le k+1-ième domino tombe-t-il ?*

  $P(k+1)$ est vraie, soit : $U_{k+1} = (k+1+1)^2 = (k+2)^2 = k^2+4k+4$

$U_{k+1} = U_k + 2k + 3$ (enoncé)

$U_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3$
$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$
$= k^2 + 4k + 4$

Donc $P(k+1)$ est vraie

→ *Le k+1-ième domino tombe.*

- **Conclusion :** → *Tous les dominos tombent.*

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = (n+1)^2$.

3) Inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration au programme : P_n : « $(1+a)^n \geq 1+na$ »

montrons que $P(0)$ est vrai
$(1+a)^0 = 1$
$1 + 0a = 1$

P(0) est vrai

Supposons qu'il existe un entier k tel que $P(k)$ soie vrai : $(1+a)^k \geq 1+ka$
montrons que $P(k+1)$ est vrai soit $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

$(1+a)^{k+1} = \underbrace{(1+a)^k}_{\geq (1+ka)}(1+a)$

$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$
$\geq 1+a+ka+ka^2$
$\geq 1+a(k+1) + \underbrace{ka^2}_{\geq 0}$

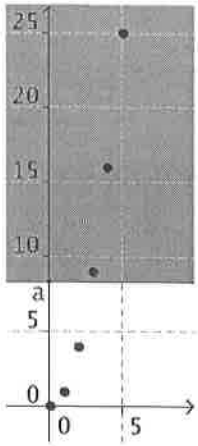
$(1+a)^{k+1} \geq 1+a(k+1)$

Conclusion $P(n)$ est vrai pour $n=0$ et est hereditaire. Donc d'après le principe de recurrence $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel

II. Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite infinie

Exemple :
La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Définitions :
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

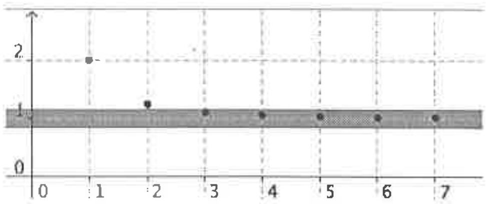
Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie $n = 3$.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur ℕ* par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration de : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle quelconque ouvert $]-a;a[$, a réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout n, tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in]-a;a[$

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a;a[$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + n = ?$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + n = +\infty$

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n =$	$L L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)(n^2 + 3) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 3 = +\infty \end{array}\right\}$$

Par produit la $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{-n^2-3} = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty$

Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque :
Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture : $\infty-\infty$, "$0\times\infty$", ∞/∞ et $0/0$.

Méthode : Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1$ $\boxed{\text{F.i } \infty-\infty}$

$u_n = n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$

Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$ $\boxed{\infty-\infty}$

$n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}}\right) = n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 1$

Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ $\boxed{\infty/\infty}$

$\dfrac{n^2\left(5+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}$ car $n \neq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{4}{n^2} = 5$

$\lim 4+\frac{3}{n} = 4$

Par quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{4}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$ $\boxed{\infty/\infty}$

$u_n = \dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}$

$u_n = \dfrac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n} = 1$

Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ $\boxed{\infty-\infty}$

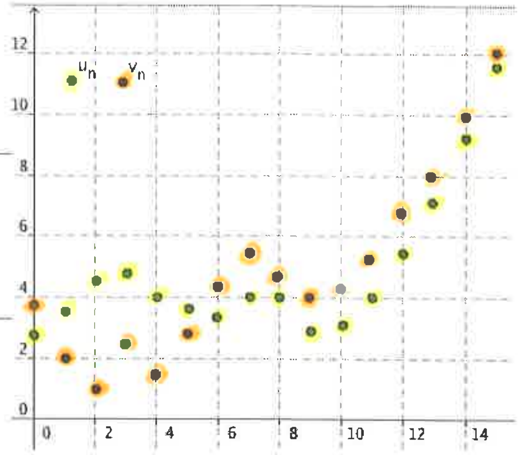
$\dfrac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \dfrac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$= \dfrac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

IV. Théorèmes sur les limites de suites

1) Théorèmes de comparaison



Théorème 1 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.

Démonstration au programme :
Soit un nombre réel a.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a < u_n$.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leq v_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1\,;n_2)$, on a : $a < u_n \leq v_n$.
On en déduit que l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1\,;n_2)$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

Vidéo https://youtu.be/iQhh46LupN4

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

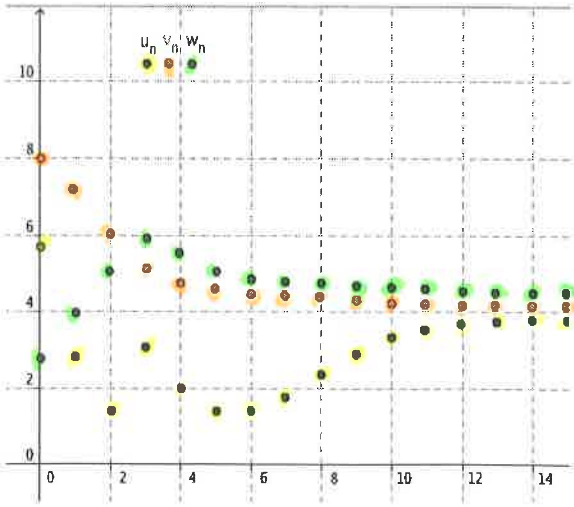
$\boxed{n^2-1 \leq n^2+(-1)^n} \leq n^2+1$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1 = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+(-1)^n = +\infty$

2) Théorème d'encadrement



Théorème des gendarmes :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang,
$u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.

Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant L.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
- $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1 ; n_2 ; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n).
Et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Vidéo https://youtu.be/OdzYjz_vQbw

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin n}{n}$

car $n > 0$

$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$

$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{\sin n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc d'après le theoreme d'encadrement
$\lim 1 + \frac{\sin n}{n} = 1$

3) Suites majorées, minorées, bornées

Définitions : - La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
- Les suites de terme général $\cos n$ ($\sin n$) ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

Vidéo https://youtu.be/F1u_BVwiW8E

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3. $u_n \leqslant 3$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$: "$U_n \leqslant 3$"

Initialisation
Montrons que $P(0)$ est est vrai, on sait que $U_0 = 2$ $\quad 2 \leqslant 3$
$P(0)$ est vrai

Heredité
Supposons qu'il existe $\exists k \in \mathbb{N}$ un entier naturel k tel que $P(k)$ est vrai soit $u_k \leqslant 3$
Montrons que $P(k+1)$ est vrai soit $u_{k+1} \leqslant 3$

$u_k \leqslant 3$

$\frac{1}{3} u_k \leqslant \frac{1}{3} \times 3$ (car $\frac{1}{3} > 0$)

$\frac{1}{3} u_k + 2 \leqslant \frac{1}{3} \times 3 + 2$

$u_{k+1} \leqslant 3$ $\quad P(k+1)$ est vrai

La propriete $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est hereditaire. Donc d'après le principe de recurrence $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang p, tel que $u_p > L$. »

- L'intervalle ouvert $]L-1\,;\,u_p[$ contient L .

Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L-1\,;\,u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).

- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.

Donc si $n > p$, alors $u_n \notin\,]L-1\,;\,u_p[$ (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.

Et donc la suite (u_n) est majorée par L .

Théorème de convergence monotone :

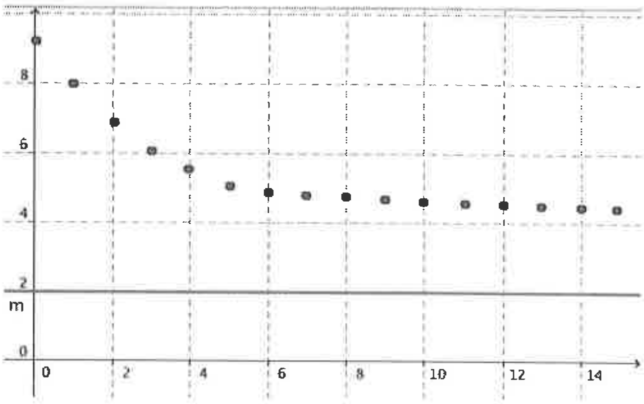
⚠ - Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

⚠ le majorant / minorant n'est pas forcément la limite

- Admis -

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

1- Démontrer ~~par récurrence~~ que la suite (u_n) est croissante.

2- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}U_n + 2 - U_n$
$= -\frac{2}{3}U_n + 2$

$U_n \leq 3$

$-\frac{2}{3}U_n + 2 \geq -\frac{2}{3}\times 3 + 2$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$

2) D'après le théorème de convergence monotone, la suite est croissante et majorée donc elle est convergente

Corollaire :

1) Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

2) Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration (du 1) au programme :

Soit un réel a.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.
Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

V. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison ..-3.. et de premier terme ..5.....

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a, pour tout n : $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times (-3)^n$

Limites :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	*Pas de limite*	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$:

Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$ *(inégalité de Bernoulli)*

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.
Or $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Exemple :
La suite de terme général -5×4^n a pour limite ..$-\infty$..... car ..$\lim 4^n = +\infty$.. car $4 > 1$
En produit $\lim -5 \times 4^n = -\infty$

Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$