Chapitre 9 : Equations différentielles

I. Définitions

1) Définition

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :
a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
Dans ce cas, on cherche une primitive de la fonction f '. Une solution de cette équation est $y = \cdots$ $5x$

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = \cdots$ x^2 … … ..
Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
Par exemple, $y = \cdots$ $x^2 + 4$ … est une autre solution de l'équation différentielle.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Remarque : Toute fonction sur un intervalle I solution de l'équation différentielle $y' = f$ s'appelle une

…Primitive……………………………

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle (*capacité 1 p297*)

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 6x + \frac{1}{x}$.
Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est une solution de cette équation.

$g'(x) = 6x + \frac{1}{x}$ donc g est une solution de (E)

g est une primitive de $x \to 6x + \frac{1}{x}$

2) Soit l'équation différentielle (E_1): $y' - 2y = 4$.
Prouver que la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4 = 4$

$f(x)$ est une solution de cette equation

3) Soit l'équation différentielle (E_2) : $xy' + y = 6x + 1$.
Déterminer les réels a et b pour la fonction $h(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.

$h'(x) = a$

$ax + ax + b = 6x + 1$

$2ax + b = 6x + 1$

$\begin{cases} 2ax = 6x \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$

Soit $h(x) = 3x + 1$ une solution de (E_2)

Ex : 48, 50, 52 p306

II. Résolutions d'équations différentielles

1) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme : *page 300*

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$ (*capacité 5 p301*)

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

1) $3y' + 5y = 0$
$3y' = -5y$
$y' = -\frac{5}{3}y \rightarrow y' = ay \quad a = -\frac{5}{3}$
$f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x} \; ; C \in \mathbb{R}$ f est la solution de (E)

2) On cherche la solution tel que $f(1) = 2$

$\begin{cases} f(1) = Ce^{-\frac{5}{3}} \\ f(1) = 2 \end{cases}$ $C = 2e^{\frac{5}{3}}$

$f(x) = 2e^{\frac{5}{3}}e^{-\frac{5}{3}x}$ est la solution

Ex : capacité 5 p 301 ; 106, 107, 109, 113 p308-309

2) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : Soit a et b des réels, a non nul.
La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$).
Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démo :

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto f_0(x) + f_p(x)$$

Avec f_0 solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_p la solution particulière constante de l'équation.

En résumé, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.
1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

Ex : capacité 6 p 301 ; 115, 117, 118, 120, 123 p309-310

3) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :
$$x \longmapsto f_0(x) + f_p(x)$$
où f_p est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et f_0 est une solution quelconque de l'équation$y' = ay$.
En conclusion, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :
$$x \longmapsto Ce^{ax} + f_p(x)$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

1) mq $u(x)$ est sol de E
$u'(x) = -x - \frac{1}{2}$
$u'(x) - 2u(x) = -x - \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$
$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} = x^2$
$u(x)$ est sol de (E)

2) Soit g solutions de E
$g(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$; $C \in R$

Tableau bilan : Résolution des équations différentielles

Type d'équation différentielle	Solutions
$y' = ay$	$x \longmapsto Ce^{ax}$ $\quad C \in R$
$y' = ay + b$	$x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ $\quad C \in R$
$y' = ay + f$	$x \longmapsto Ce^{ax} + f_p(x)$ $\quad C \in R$ $\quad$ *avec $f_p(x)$ solution particulière*

Ex : capacité 7 p 301 ; 124, 126, 127 p309-310

$(E) : y' = ay$

=> Si $y(x) = Ce^{ax}$ alors y est sol de (E)

mq y est sol de (E)

$y'(x) = C \times a e^{ax}$

$= a \times C e^{ax}$

$= a\, y(x)$

Donc y est sol de E

<= Si f est sol de (E) alors $f(x) = Ce^{ax}$

f est sol de (E) alors $f'(x) = a f(x)$

mq $f(x) = Ce^{ax}$

Soit $g(x) = f(x) \times e^{-ax}$

$g'(x) = f'(x) e^{-ax} + f(x) \times -a e^{-ax}$

$= e^{-ax} (-a f(x) + f'(x))$

$= e^{-ax} (-a f(x) + a f(x))$

$= 0$

On constate que g' est nul donc g est une fonction constante

$g(x) = C \; ; \; C \in \mathbb{R}$

$f(x) e^{-ax} = C$ car $e^{-ax} \neq 0$

$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}}$

$f(x) = Ce^{ax}$