Chapitre 5 : VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I. Vecteurs de l'espace

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Propriétés (rappels) : Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si et seulement si, ABDC est un parallélogramme
(2) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
(3) Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
(4) Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.
(5) A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ($\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$)
(6) (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$, avec α, β et γ réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AB}$ est CL de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DC}$

Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

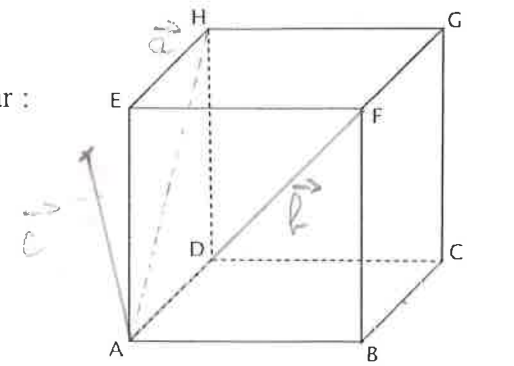
Vidéo https://youtu.be/Z83z54pkGqA

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

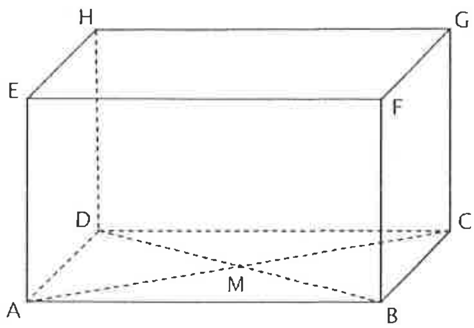
$\vec{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/l4FeV0-otP4

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

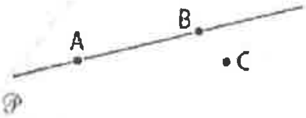


$\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$

II. Droites et plan de l'espace

1) Règles d'incidence

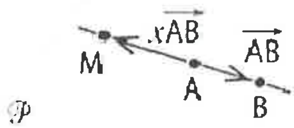
Propriétés :
(1) Par deux points distincts de l'espace, passe une unique droite
(2) Par trois points non alignés A, B et C, passe un unique plan noté (ABC)
(3) Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
(4) Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.



2) Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition : On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

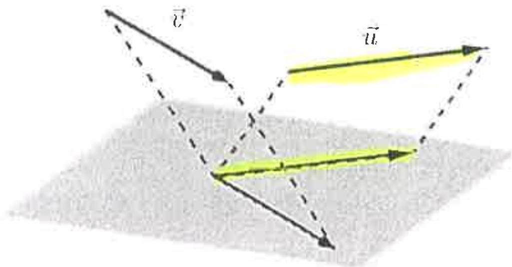
Propriété : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La **droite** d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



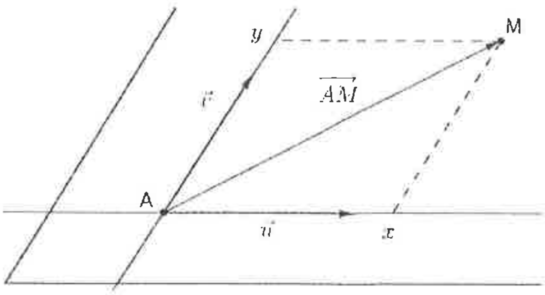
Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3) Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriétés : Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque : Dans ces conditions, le triplet $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.
On dit que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.

Remarque :
Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

4) Vecteurs coplanaires.

Des éléments de l'espace situés dans un même plan sont dits **coplanaires**.

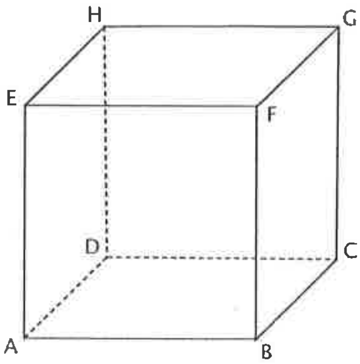
Définition : Des vecteurs sont dits **coplanaires**, si et seulement si, leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriétés :
(1) Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si, il existe trois réels a, b et c tous non nuls tels que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\vec{w} = 0$.
(2) Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **ne sont coplanaires pas** si et seulement si, l'égalité $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\vec{w} = 0$ implique $a = b = c = 0$.

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont coplanaires ou non.

On considère le cube précédent ABCEFGH.
1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils coplanaires ?
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils coplanaires ?



1) $AC = AB + BC$
$\vec{AC}$ est cl de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colineaire
$\vec{AB}$, AC et $\vec{BC}$ sont coplanair...

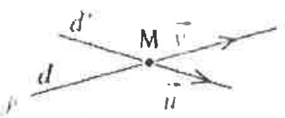
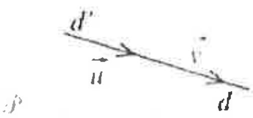
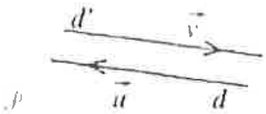
2) $\vec{CF} = \vec{CB} + \vec{BG} + \vec{GF}$
$\vec{CF} = -AD + BG - AD$
$\vec{CF} = -2AD + BG$

III. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

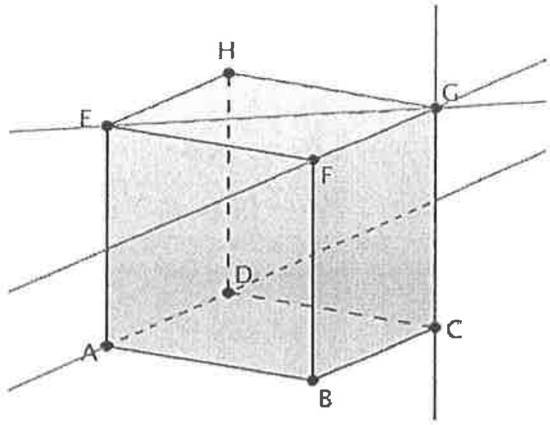
- Si d et d' coplanaires alors :

• sécantes en un point M	• confondues	• strictement parallèles
		
Dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.	Dans ces deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	

- Si d et d' non coplanaires alors :

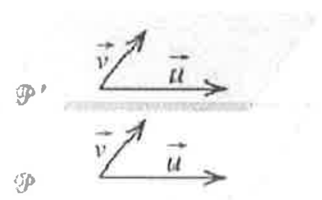
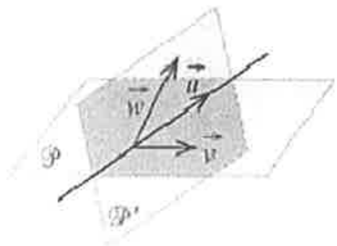
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



2) Positions relatives de deux plans

Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

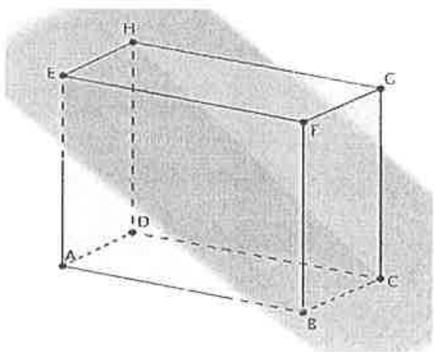
$\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{P}'$ **parallèles**	$\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{P}'$ **sécants**
Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils sont **confondus** ou qu'ils n'ont **aucun point commun.**	Deux plans sont **sécants** si et seulement ils ne sont pas parallèles. Ils se coupent alors selon une droite
	

Exemple :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).

- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

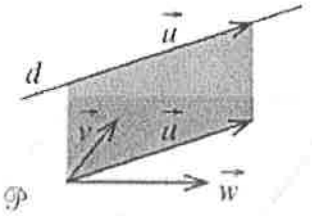
Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Méthode : Démontrer que deux plans sont parallèles
capacité 6 p55

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

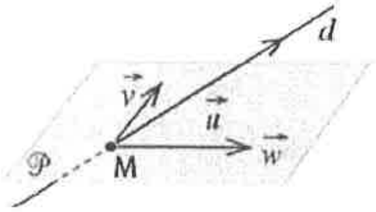
Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

(1) La droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Propriété : Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si d est incluse dans $\mathscr{P}$ ou si d et $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun.

(2) La droite d est sécante au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.



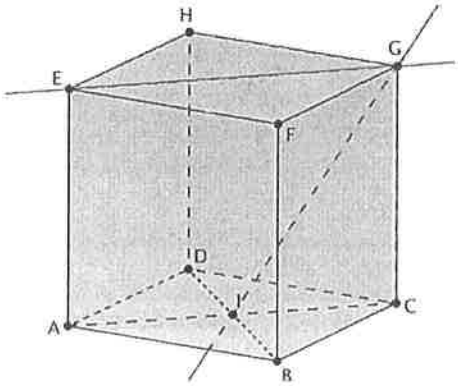
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.

- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).

- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



V. Bases et repères de l'espace

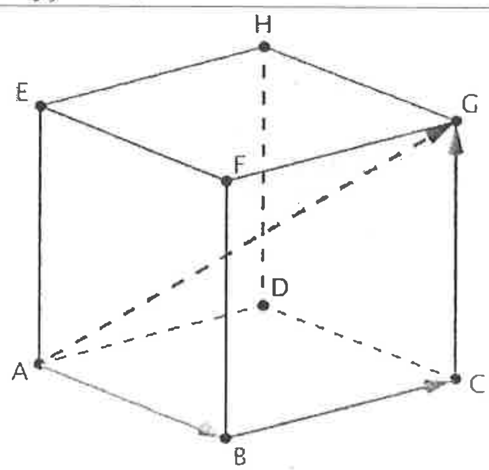
1) Base de l'espace

Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Propriété : Soit $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Méthode : Reconnaitre une base de l'espace

Vidéo https://youtu.be/5a9pE6XQna4

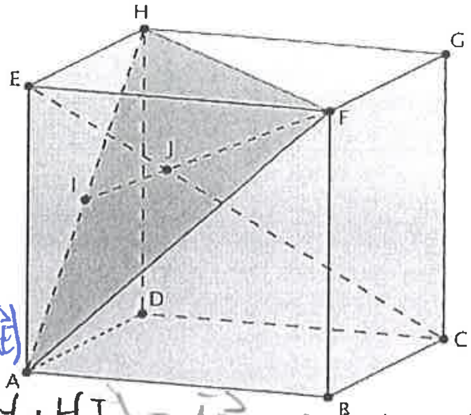


ABCDEFGH est un cube.
1) Reconnaître une base de l'espace.
2) Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$ base de l'espace
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ $\quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
$(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG})$ base de l'espace
$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$ $\quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

Vidéo https://youtu.be/i4jDkJNtzZg



$ABCDEFGH$ est un cube.

Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$

Démontrer que les points E, J et C sont alignés.

Mq $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaire

On exprime $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(FE + EH + HI) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-AB + AD + HI)$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-AB + AD + \frac{1}{2}HA) = AB + \frac{2}{3}(-AB + AD + \frac{1}{2}(HD + DA))$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-AB + AD + \frac{1}{2}(-AE - AD)) = \frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}AD - \frac{2}{6}AE - \frac{2}{6}AD$

$= \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}AD - \frac{1}{3}AE$

$\overrightarrow{EC} = EA + AB + BC = AB + AD - AE$

$\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

EJ et EC sont colinéaire donc E J et C sont aligné

2) Repère de l'espace

> Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
> On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.

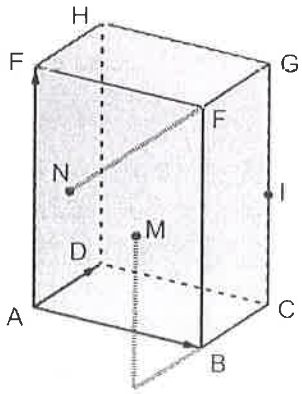
Remarques : - O est appelé l'origine du repère.

- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.

- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.1

Méthode : Lire des coordonnées dans l'espace

Vidéo https://youtu.be/PZeBXIhNBAk



Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.

I est le milieu de $[CG]$.

M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$

1) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.

2) Placer le point $K(1\,;3\,;-1)$.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}1\\1\\0,5\end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

× K

Propriété : Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

(1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

(2) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Méthode : Démontrer, avec les coordonnées, la coplanarité de quatre points (*capacité 12 p60*)

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points A(2 ;-1 ;4), B(6 ;-7 ;0), C(1 ;0 ;1) et D(13 ;-16 ; 5).

1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2) Démontrer que les point A, B, C et D sont coplanaires.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $x\overrightarrow{AB} = -4\, x\overrightarrow{AC}$
$y\overrightarrow{AB} = -6\, y\overrightarrow{AC}$ et $-4 \neq -6$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$ Mq $\overrightarrow{AD}$ est CL de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Mq $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

$\begin{cases} 11 = 4\alpha - 1\beta \\ -15 = -6\alpha + 1\beta \\ 1 = -4\alpha - 3\beta \end{cases}$ $\begin{cases} 11 = 4\alpha - 1\beta \\ -4 = -2\alpha \\ 12 = -4\beta \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = \alpha \\ -3 = \beta \\ -11 = 4\alpha - 1\beta \end{cases}$

$AD = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ AD ; AB, AC sont coplanaires

Méthode : Démontrer, avec les coordonnées, que des vecteurs forment une base (*capacité 13 p60*)

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}(1; -3; 5)$, $\vec{v}(4; 2; 1)$ *et* $\vec{w}(0; 2; 1)$.

1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan.
2) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

1) Mq u et v sont non colineaire

$x\vec{v} = 4\, x\vec{u}$ or $4 \neq -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaire
$y\vec{v} = -\frac{2}{3}\, x\vec{u}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan

2) Mq $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaire

Raisonement par l'absurde : supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaire

$\exists\, \alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta = 2 \\ 5\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta \\ -3\alpha + 2\beta = 2 \\ 5\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta \\ 14\beta = 2 \\ -19\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\beta \\ \beta = \frac{1}{7} \\ \beta = -\frac{1}{19} \end{cases}$ ↯

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaire, donc ils forment une base de l'espace

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base (*capacité 14 p61*)

VI. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Soit une droite d passant par un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On a : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$

Remarque :
Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite d.

Démonstration :
$M\in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-x_A=at\\y-y_A=bt\\z-z_A=ct\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Vidéo https://youtu.be/smCUbzJs9xo

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Soit les points $A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. Déterminer la representation parametrique de (AB)

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

$A(2;3;-1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$ representation parametrique :

$\begin{cases}x=2-1t\\y=3-6t\\z=-1+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2) Soit M ~~le~~ point d'intersection de (AB) avec le plan $(O;i;j)$

On sait que $z_M=0$ $\begin{cases}x=2-t\\y=3-6t\\0=-1+3t\end{cases}$ $\begin{cases}x=2-1/3\\y=3-2\\t=1/3\end{cases}$

$\begin{cases}x=5/3\\y=1\\t=1/3\end{cases}$

M a pour coordonee $\begin{pmatrix}5/3\\1\\0\end{pmatrix}$