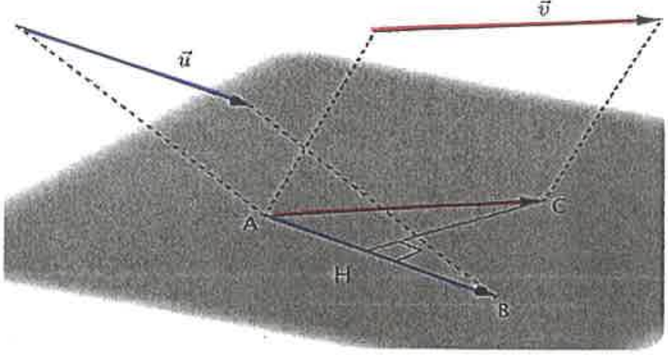
Chapitre 7 : Orthogonalité dans l'espace

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe un plan P contenant les points A, B et C.



Définition :
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.

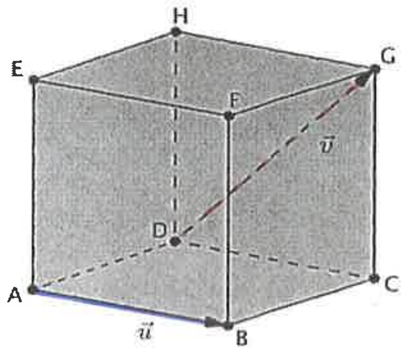
On a ainsi :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul,
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pm AB \times AH$

Exemple :

▶ **Vidéo** https://youtu.be/vp3ICG3rRQk

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = a^2$



2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$

  $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}), k \in \mathbb{R}$
- Colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & si\ \vec{u} \text{ et } \vec{v}\ sont\ dans\ le\ \boldsymbol{même\ sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & si\ \vec{u} \text{ et } \vec{v}\ sont\ de\ \boldsymbol{sens\ contraires} \end{cases}$
- Orthogonalité : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux (ou $\vec{u} = 0$ et $\vec{v} = 0$)

Identités remarquables :

1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

2) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Formules de polarisation *(démo p90)*:

1) $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

2) $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

3) $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Ex : capacités 1, 2 p89 ; 56, 57, 59, 73 p104-105

142111/A121

- $(d) \perp (P) \Leftrightarrow (d)$ est ortho à 2 droites sécantes de ce plan
- $(d) \perp (P) \Rightarrow (d)$ est ortho à toutes les droites de ce plan

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

1) Base et repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :
- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

Définition : Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

2) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Et en particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Conséquence : Soit $A(x_A, y_A, z_A,)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.
On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Démonstration : p90

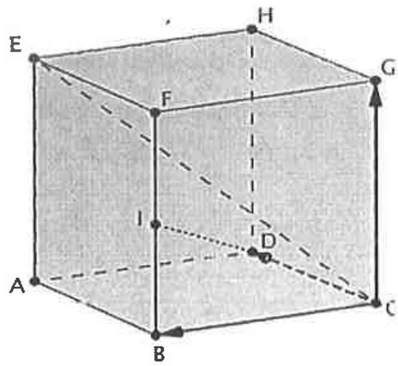
Point méthode : Démonter que des vecteurs sont orthogonaux

Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E

Soit ABCDEFGH un cube. I est le milieu de [BF]

On considère le repère de l'espace $(C ; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ dans cette base.
2) En déduire si les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux ou pas.



Ex : capacités 3, 4 p91 ; 64, 68, 70 p104-104

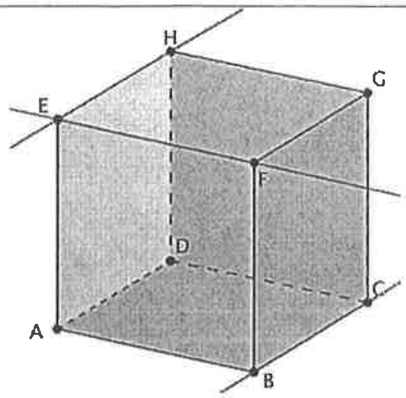
III. Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

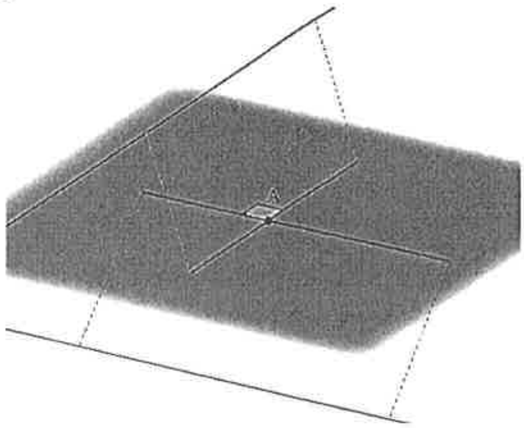
Définition :
- Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Deux droites de l'espace sont dites **perpendiculaires** si et seulement si elles sont **coplanaires** et **orthogonales**.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



Propriété :
Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, si et seulement s'il existe une droite d'_1 parallèle à d_1 et une droite d'_2 parallèle à d_2 telles que d'_1 et d'_2 sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.



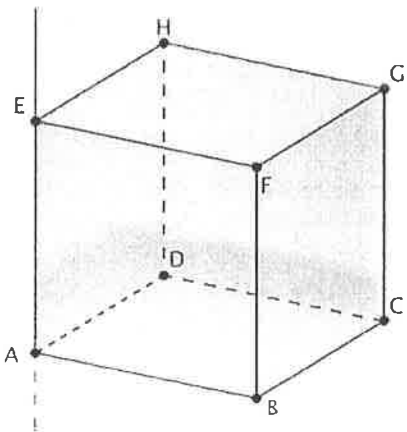
2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Toutes ces propriétés sont équivalentes.

- **Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$**
- **Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.**
- **Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si d est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$ ce qui équivaut aussi à ce que d soit orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$.**

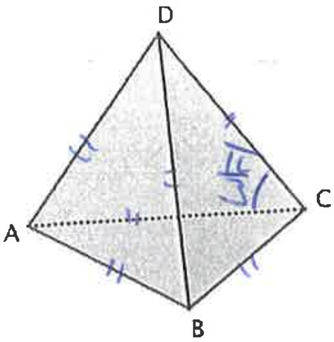
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- (AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
- (AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
  ⇨ Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

Vidéo https://youtu.be/8Obh6cIZeEw



Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

Mq $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$

$\vec{AD}\cdot\vec{BC}=(\vec{AB}+\vec{BD})\cdot\vec{BC}=\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{BD}\cdot\vec{BC}$

$=-\vec{BA}\cdot\vec{BC}+\vec{BD}\cdot\vec{BC}$

$=-\vec{BA}\cdot\vec{BC}+BD\times BC\times\cos\widehat{CBD}$

$=-BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}+BD\times BC\times\cos\widehat{CBD}$

$=-l\times l\times\frac{1}{2}+l\times l\times\frac{1}{2}$

$=0$

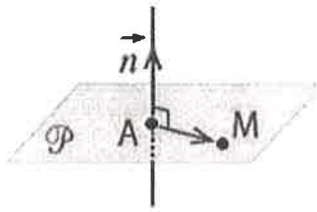
$\Rightarrow$ $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux donc (AD) et (BC) sont orthogonales

Ex : capacités 5, 6 p93 ; 76, 80, 81, 83 p105- 106

IV. Vecteur normal à un plan

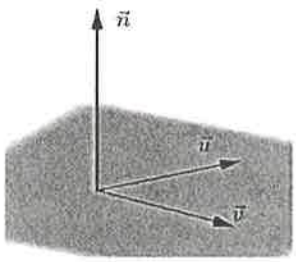
1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P s'il est vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.



Propriété : - Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal $\vec{n}$ de P, P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

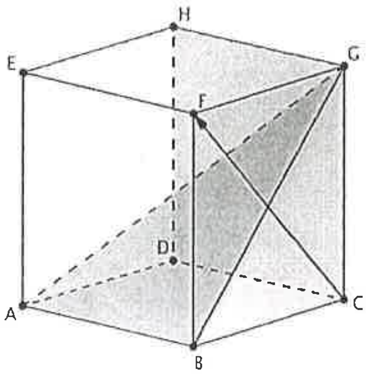
- Admis -



Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan (+ capacité 7 p95)

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4



$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

Mq $\vec{CF}\perp\vec{BG}$
$\vec{CF}\perp\vec{AB}$ avec AB et BG non colinéaires

$\vec{CF}\perp\vec{BG}$ car les diagonales d'un □ sont ⊥

$\vec{CF}\cdot\vec{AB}=\vec{CF}\cdot\vec{DC}=-\vec{CF}\cdot\vec{CD}=-(\vec{CB}\cdot\vec{CG})\cdot\vec{CD}$

$=-\vec{CB}\cdot\vec{CD}-\vec{CG}\cdot\vec{CD}=0$

$\vec{CF}\perp\vec{AB}$ CF est un vecteur normal au plan (ABG)

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

▶ **Vidéo** https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On cherche $\vec{n}(x;y;z)$ tel que $\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=0\end{cases}$ AB et AC non colinéaire

$\vec{AB}(-2;1;3)$ $\vec{AC}(1;-2;0)$

$\begin{cases}-2x+y+3z=0\\ x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ -2x+y+3z+2x-4y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ -3y+3z=0\end{cases}$

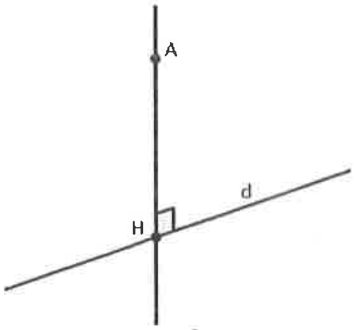
$\begin{cases}x=2y\\ z=y\end{cases}$ On choisi $y=1$

$\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ z=1\end{cases}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Ex : capacité 7 p95 ; 46, 47 p103 ; 85, 86 p106

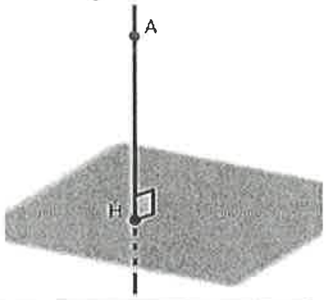
V. Projection orthogonale

1) Projection orthogonale d'un point sur une droite



Définition : Soit un point A et une droite d de l'espace.
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.

2) Projection orthogonale d'un point sur un plan



Définition : Soit un point A et un plan P de l'espace.
La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.

Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration au programme : voir p94

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan (*capacité 8 p95*)

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3;3)$, $B(-1;17;-17)$ et le vecteur $\vec{n}(2;3;-4)$.
On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1 Démontrer que le point $H(-9;5;-1)$ appartient à $\mathcal{P}$.

2 a. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
b. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.

3 Soit $C(5;11;-5)$.
a. Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
b. Calculer la distance du point H à la droite (BC).

1) $\vec{AH}(-11; 2; -4)$

$\vec{n} \cdot \vec{AH} = -11 \times 2 + 3 \times 2 + -4 \times -4 = -22 + 6 + 16 = 0$

$n \perp AH$ donc $H \in P$

2) a) $\vec{BH}(-8; -12, 16)$

B est le projeter orthogonal de H si

$\vec{BH}$ est colinéaire à $\vec{n}$

or $BH = -4\vec{n}$ donc B est le projeter ortho de H sur P

b) $BH = \|\vec{BH}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 16^2} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$

3) a) $\vec{BC}(6; -6; 12)$ $\quad \vec{BC} \cdot \vec{CH} = 6 \times -14 + -6 \times -6 + 12 \times 4$

$\vec{CH}(-14; -6; 4)$ $\quad = -84 + 36 + 48$

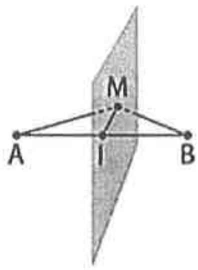
$= 0$

$BC \perp CH$

b) $CH = \|\vec{CH}\| = \sqrt{14^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{196 + 36 + 16} = \sqrt{248} = 2\sqrt{62}$

3) Plan médiateur d'un segment

Définition : Soit A et B deux points distincts de l'espace.
Le plan médiateur du segment [AB] est le plan passant par le milieu I de [AB] et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$



Ex : capacité 8 p95 ; 91, 95, 97 p107

VI. Application du produit scalaire

1) Équation cartésienne d'un plan

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

Démonstration au programme : voir p96

Exemple :
Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

Vidéo https://youtu.be/s4xqI6IPQBY

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

$3x - 3y + z = -d$

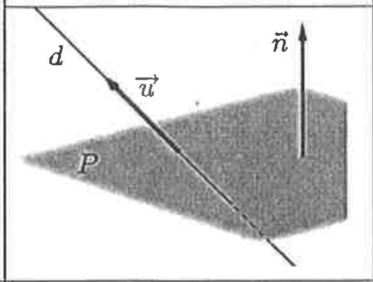
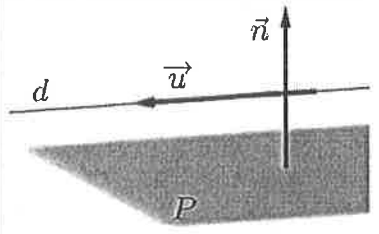
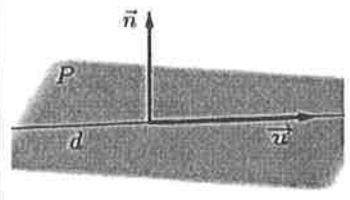
$3(-1) - 3(2) + 1 = -d$

$-8 = -d$

P a pour équation

$3x - 3y + z + 8 = 0$

2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$	d et P sécants	d et P parallèles	
		d et P strictement parallèles	d incluse dans P
			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$. Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1) $\vec{AB}(-2; 0; 3)$ $\quad$ $\vec{n}(2; -1; 3)$ est un vecteur normal à P

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = -2\times 2 + 0 \times -1 + 3 \times 3 = -4 + 9 = 5$

(AB) et le plan P sont sécants

2) $(AB) \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$2(-1-2t) - 2 + 3(3t) - 2 = 0$

$-2 - 4t - 2 + 9t - 2 = 0$

$5t = 6 \iff t = \frac{6}{5}$

$\begin{cases} x = -1 - 2\left(\frac{6}{5}\right) \\ y = 2 \\ z = 3\left(\frac{6}{5}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = \frac{18}{5} \end{cases}$ $\quad K\left(-\frac{17}{5}; 2; \frac{18}{5}\right)$

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo https://youtu.be/RoacrySIUAU

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Ex : capacités 9 et 10 p97 ; 98, 104, 105, 111, 114, 115, 118, 119, 123, 125, 128, 132, 137, 142 p108-111