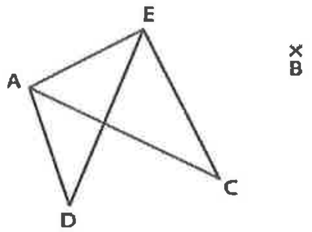
Maths expert **Les graphes**

I Généralités

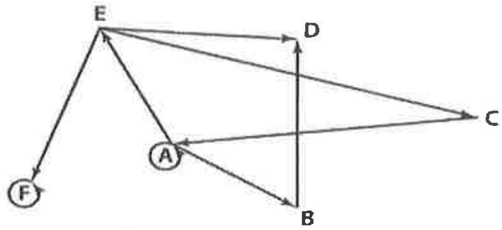
1) Vocabulaire

Un **graphe** est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des **arêtes** (des segments).
L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours.
Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête.
Un sommet **isolé** est un sommet adjacent à aucun autre sommet.
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

2) Exemples



Graphe Δ



Graphe Γ

Quel est l'ordre du graphe Δ ? 5

Compléter le tableau suivant

Sommet	A	B	C	D	E
degré	3	0	2	2	3

Le graphe est-il orienté ? Non

Y a t-il un sommet isolé ? Oui

Les sommets D et C sont-ils adjacents ? non

Les sommets A et E sont-ils adjacents ? oui

Le graphe est-il complet ? Non

Quel est l'ordre du graphe Γ ? 6

Compléter le tableau suivant

Sommet	A	B	C	D	E	F
degré	4	2	2	2	4	2

Le graphe est-il orienté ? Oui

Y a t-il un sommet isolé ? Non

Les sommets D et C sont-ils adjacents ? Non

Les sommets A et E sont-ils adjacents ? oui

Le graphe est-il complet ? non

II Graphe non orienté

1) Vocabulaire

Dans un graphe non orienté, une **chaîne** est une succession d'arêtes mises bout à bout.
La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent .
Une chaîne est **fermée** lorsque l'origine et l'extrémité sont confondues .
Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes ; c'est une chaîne où les arêtes ont été prises une seule fois et les extrémités coïncident .
Un graphe **connexe** est un graphe non orienté dont chaque couple de sommets peut être relié par une chaîne.
(il suffit de citer une chaîne contenu tous les sommets)

2) Exemple : graphe Δ

Citer un chemin de longueur 2. D - A - E (3 sommets, 2 chemins)
Citer un cycle de longueur 4. A - C - E - D - A

III Graphe orienté

1) Vocabulaire

Dans un graphe orienté, une arête est appelé un **arc**.
Un sommet peut être relié à lui-même par un arc. Cet arc est appelé **boucle**.
Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.
Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

2) Exemple : graphe Γ

Citer une boucle. A - A
Citer une chaîne non fermée de longueur 4. E-C-A-B-D
Citer un circuit de longueur 4. E-C-A-A-E
Citer un circuit de longueur 3. E-C-A-E

IV Matrice associée à un graphe non orienté

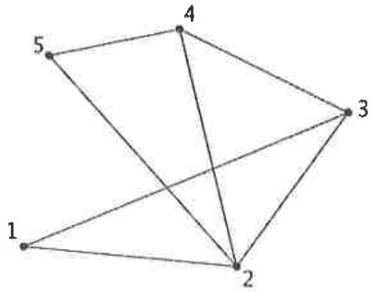
1) Définition

Soit un graphe *G* non orienté d'ordre *n* dont les sommets sont numérotés de 1 à *n*.
La **matrice d'adjacence** associée à *G* est la matrice carrée de taille *n* dont chaque terme $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet *i* pour arriver au sommet *j*.

2) Exemples

a) *exemple1* :

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Par exemple, le coefficient $a_{1,4}$ est égal à 0 car aucune arête ne relie les sommets 1 et 4.
Le coefficient $a_{4,2}$ est égal à 1 car une arête relie les sommets 4 et 2.
On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même.
On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale car $a_{i,j}=a_{j,i}$

b) *exemple2*

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$

3) Propriété

Soit n et k deux entiers naturels non nuls.
Soit A une matrice d'adjacence d'un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
Le nombre de chaîne de longueur k partant du sommet *i* pour arriver au sommet *j* est égal au coefficient $b_{i,j}$ de la matrice A^k

Exemple : On reprend l'exemple a) précédent.
On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
A l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice A^4

$$A^4=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}11&13&11&14&9\\13&26&19&19&13\\11&19&19&14&14\\14&19&14&19&11\\9&13&14&11&11\end{pmatrix}$$

Le nombre de chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient $b_{1,3}=b_{3,1}$ de la matrice A^4

Ainsi, il existe 11 chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.