Les nombres complexes (partie 2)

I. Fonction polynôme à coefficients réels:

Définition :
Soient n un entier naturel et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels.
On appelle fonction polynôme à coefficients réels la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$$

Vocabulaire :
- On parlera plus simplement de **polynôme**.
- Les réels α_k sont les **coefficients** de P.

Cas particulier :
Si tous les coefficients de P sont nuls, P est appelé le **polynôme nul.**

Vocabulaire :
- Le plus grand entier n tel que α_n est non nul et appelé **le degré de P**.
  Si P est le polynôme nul on dira que son degré est $-\infty$.
- Une équation polynomiale de degré n peut s'écrire sous la forme $P(z)=0$.

Exemples :
- On considère le polynôme P définit pour tout complexe z par $P(z) = 2z^2 - 3z + 1$.
  Ses coefficients sont $\alpha_2 = 2$ $\alpha_1 = -3$ $\alpha_0 = 1$
- On considère le polynôme P définit pour tout complexe z par $P(z) = 4z^5 - 3z^2 - z + 2$.
  Ses coefficients sont $\alpha_5 = 4$ $\alpha_4 = 0$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_2 = -3$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha_0 = 2$

Remarque :
« Le polynôme est nul » ne veut pas dire « le polynôme s'annule ».
Polynôme nul P : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$
P s'annule : $\exists a \in \mathbb{C}$, $P(a) = 0$

Définition :
Soient a un nombre complexe et P un polynôme.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Exemples : $P(-1) = 0$ donc -1 est une racine
$P(z) = z^2 - 1$ $P(1) = 0$ donc 1 est une racine
$P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ $P(1) = 0$ donc 1 est une racine

II. Factorisation des polynômes :

Propriété :
Soient z et a deux nombres complexes $a \neq 0$

Pour tout entier naturel n non nul : $z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$

Remarque :
Autrement dit : $z^n - a^n = (z-a)(\underbrace{z^{n-1}}_{k=0} + \underbrace{a z^{n-2}}_{k=1} + \underbrace{a^2 z^{n-3}}_{k=2} + \dots + \underbrace{a^{n-2} z}_{k=n-2} + \underbrace{a^{n-1}}_{k=n-1})$

Démonstration :

Méthode 1

$(z-a)(z^{n-1} + a z^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1})$

$= z^n + a z^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \dots + a^{n-2} z^2 + a^{n-1} z$

$\quad - a z^{n-1} - a^2 z^{n-2} - a^3 z^{n-3} + \dots - a^{n-1} z - a^n$

$= z^n - a^n$

Méthode 2 (Rigueur post bac)

$$(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} = z\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} - a\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} z^{n-1-k}$$

$$= z^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k z^{n-k} - a^n - \sum_{k=0}^{n-2} a^k z^{n-1-k} \quad *$$

Propriété :
Soient a un nombre complexe et P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 1.

a est une racine de P si, et seulement si, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-a)\,Q(z)$.

Démonstration :

$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe un tel polynôme Q, alors $P(a) = (a-a)\,Q(a) = 0$.
Donc a est bien une racine de P.

$\Rightarrow$: On suppose que a est une racine de P, donc que $P(a) = 0$.

$P(z)$ s'écrit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ donc $P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$

On peut donc écrire :

$$P(z) = P(z) - 0 = P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n - (\alpha_0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n)$$