Pour tout le chapitre, soit m, n et p trois entiers naturels non nuls.

I Notion de matrices

lin col

- Définition : Une **matrice de dimension** $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes.

Une telle matrice s'écrit sous la forme : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Les réels a_{ij} sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2 x 3.

- Définition : Une matrice de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice carrée d'ordre n.**

Exemple : $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

- Définitions : Une matrice de dimension $n \times 1$ est appelée une **matrice colonne**.

Une matrice de dimension $1 \times n$ est appelée une **matrice ligne**.

Exemples : - $(1\,3\,1)$ est une matrice ligne de dimension 1 x 3.
- Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2 x 1.

Propriété : Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même dimension et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

II Opérations sur les matrices

1) Somme de matrices

- Définition : Soit A et B deux matrices de même dimension.

La **somme** de A et B est la matrice, notée $A+B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B.

Vidéo https://youtu.be/MMBfOom_mac

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ alors $A+B=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

Remarque : Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices **de même dimension**.

- Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même ordre.

a) Commutativité : $A+B=B+A$

b) Associativité : $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$

2) Produit d'une matrice par un réel

- Définition : Soit A une matrice et k un réel.

La **produit de A par le réel** k est la matrice, notée $m\times n$, de même dimension que A et dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Vidéo https://youtu.be/B3NAaW1Ap_I

Exemple : $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ et $k=2{,}1$ alors $kA=\begin{pmatrix}4{,}2 & 6{,}3\\ 8{,}4 & -2{,}1\end{pmatrix}$

- Propriétés : Soit A et B deux matrices ~~carrées~~ de même dimension et deux réels k et k'

a) $(k+k')A=kA+k'A$ b) $k(A+B)=kA+kB$ c) $(kk')A=k(k'A)=k'(kA)=kk'A$

3) Produit d'une matrice ~~carrée~~ par une matrice colonne

- Définition : Soit A une matrice de dimension $m\times n$ et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n}\\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Le **produit de la matrice A de dimension $m\times n$ par la matrice colonne** B est la, notée AB est une matrice de dimension $m\times 1$ (matrice colonne à m lignes) et égale à :

$$C=\begin{pmatrix}a_{1,1}\times b_1+a_{1,2}\times b_2+\dots+a_{1,n}\times b_n\\ a_{2,1}\times b_1+a_{2,2}\times b_2+\dots+a_{2,n}\times b_n\\ \dots\\ a_{m,1}\times b_1+a_{m,2}\times b_2+\dots+a_{m,n}\times b_n\end{pmatrix}$$

doivent être égal

Exemple : $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, la dimension de A est $3\times \underline{\underline{2}}$ et $B=\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$ la dimension de B est $\underline{\underline{2}}\times 1$

AB= $\begin{pmatrix}5\times -2 + 1\times -1\\ 5\times 4 + -1\times -1\\ 5\times 1 + 0\times -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 + -1\\ 20 + 1\\ 5 + 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 21\\ 5\end{pmatrix}$

La dimention de AB est 3×1

Remarque dim $A : m\times \underline{n}$
$B \quad \underline{n}\times p$
$AB \quad m\times p$
$B\times A$ n'existe pas

Vidéo https://youtu.be/nW8XRIhlq0Q

4) Produit de deux matrices

Définition : Soit A une matrice de dimension $m\times n$ et B une matrice de dimension $n\times p$

Le **produit de** A **par** B est la matrice, notée AB de dimension $m\times p$ dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

Vidéo https://youtu.be/ZOtgQxB5NXI

Exemple 1 :

$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. La dimension de A est 3x2 et $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ La dimension de B est 2x4

La dimension de la matrice AB est 3x4

$$AB=\begin{pmatrix}4+1 & -2+0 & -8-1 & 2+2\\ -8-1 & 4+0 & 16+1 & -4-2\\ -2+0 & 1+0 & 4+0 & -1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -9 & 4\\ -9 & 4 & 17 & -6\\ -2 & 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Exemple2 : matrices carrées

$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ alors : ,2×3

3 · 3

4 1

$$AB=\begin{pmatrix}-6+12 & 6+3\\ 3+8 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 11 & -1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{matrix}-6-3 & 9-6\\ -8+1 & 12+2\end{matrix}=\begin{matrix}-9 & 3\\ -7 & 14\end{matrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices n'est pas commutative : en général, $AB\neq BA$

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même dimension et un réel k.

a) Associativité $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C$

b) Distributivité : $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ et $(A+B)\times C=A\times C+B\times C$

c) $(kA)B=A(kB)=k(A\times B)$

5) Puissance d'une matrice carrée

Définition : Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

Le **carré de** A est la matrice, noté A^2, égale à $A\times A$.

Le **cube de** A est la matrice, noté A^3, égale à $A\times A\times A$

Plus généralement, **la puissance *n*-ième** de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de A facteurs n.

Exemple1 : Cas général

On a : $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

$A^2=$

Vidéo https://youtu.be/r81z2eLd07w

Exemple2 : Cas particulier d'une matrice diagonale

Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

$A^2=$

En effet, on constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de A sont égaux aux carrées des coefficients de A
On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

Ainsi par exemple, $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^5=\begin{pmatrix} \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Propriétés : Soit A une matrice diagonale de dimension p ;
La matrice A^n est une matrice diagonale de dimension p. Pour calculer les coefficients de la diagonale il suffit d'élever les coefficients de A à la puissance n .

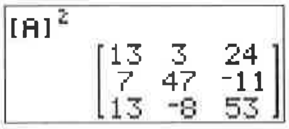
Méthode : Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels

Vidéo TI https://youtu.be/8c4WDe1PSZk
Vidéo Casio https://youtu.be/zq5OHgdTw34
Vidéo HP https://youtu.be/9a_rRHabIF8

On veut calculer le carré de la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

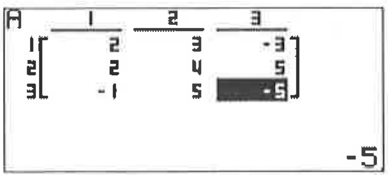
Avec une TI :
Entrer dans le mode "Matrice" (MATRIX) puis "EDIT".
Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.

Quittez (QUIT) puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice" et sélectionner la matrice A et compléter la formule pour élever A au carré.



Avec une CASIO:
Entrer dans le menu "RUN.MAT" puis choisir "MAT" (Touche F1).
Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.

Saisir ensuite les coefficients de la matrice.



Quitter le mode d'édition (QUIT) et taper sur la touche "Mat" puis saisir le calcul.

Mat A^2

On obtient le résultat :

$$
\begin{array}{c|ccc}
\text{Ans} & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 13 & 3 & 24 \\ 7 & 47 & -11 \\ 13 & -8 & 53 \end{bmatrix}}
\end{array}
$$

III Matrice inverse

1) Matrice unité

Définition : On appelle **matrice unité** d'ordre n la matrice carrée formée de n lignes et $n$colonnes, tellle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Remarque : Pour toute matrice carrée A de dimension n on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition : Une matrice carrée A d'ordre n est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$
La matrice *B*, notée A^{-1} est appelée la **matrice inverse** de A

Propriété : Soit A une matrice carrée de d'ordre n. S'il existe une matrice B telle que $A \times B = I_n$ (ou $B \times A = I_n$) alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Vidéo https://youtu.be/FAvptVYvfb0

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

A x *B* =

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque :
Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Vidéo https://youtu.be/pHIepnbQaCQ

Définition :

Soit a, b, c et d des réels et $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de dimension 2. Le déterminant de A est le réel , noté det(A) défini par det(A)=$ad-bc$.

Propriété :

La matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $det\ (A)\neq 0$.

Vidéo https://youtu.be/4QMzwWY6T7g

Méthode : Calculer l'inverse d'une matrice carrée de dimension 2

Calculer l'inverse de la matrice $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$det\ (C)=0\times 2-1\times 2=-2\neq 0$. Donc C est inversible.

Notons où a, b, c et d sont des réels et $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a : $C\times B=I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $C\times B=I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C\times B=I_n \Leftrightarrow \begin{cases} 2c=1 \\ 2d=0 \\ a+2c=0 \\ b+2d=1 \end{cases}$$

$$C\times B=I_n \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ d=0 \\ a+2\times\frac{1}{2}=0 \\ b+2\times 0=1 \end{cases}$$

$$C\times B=I_n \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ d=0 \\ a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $C^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Il est possible de faire une saisie en ligne sans passer par le menu "Matrice".

```
[[0,2][1,2]]⁻¹
```

On obtient l'affichage suivant et le résultat :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$$

Formule : Soit Soit a, b, c et d des réels tel que $ad-bc\neq 0$ et $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A une matrice de déterminant non nul. La matrice inverse de A , notée $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3) Application à la résolution de système

a) exemple

On pose $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}16\\ 17\end{pmatrix}$.

Déterminer AX $= \begin{pmatrix}3x-y\\ 2x+y\end{pmatrix}$

Le système $S\begin{cases}3x-y=16\\ 2x+y=17\end{cases}$ peut se traduire en calcul matriciel par .... $AX=B$

Si A^{-1} existe

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

$X=A^{-1}B$

b) Généralisation

<u>Propriété :</u> Soit A une matrice carrée de d'ordre n et X et B deux matrices colonnes à n lignes.
Si A est inversible alors le système d'écriture matricielle $AX=B$ admet une unique solution $X=A^{-1}B$

<u>Démonstration :</u>

$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

$AX=B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$ par associativité

$AX=B \Leftrightarrow I_n X=A^{-1}B$

$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$

<u>Conséquence</u> : pour résoudre un système linéaire ,
1) on peut traduire ce système en calcul matriciel
2) résoudre ce système en utilisant la matrice inverse SI ELLE EXISTE
3) Conclure quant à la solution éventuelle du système.

<u>Exemple</u> :

$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. On a montré (dans III 2) que A est inversible et que $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2\\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$

Or $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$. Reste à calculer $A^{-1}B$

$A^{-1}B=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2\\ -0,4 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,2+3,4\\ -6,4+10,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6,6\\ 3,8\end{pmatrix}$

Donc la solution du système est $(6,6\,;\,3,8)$

$(x\,;\,y)$

A la main

$(S)=\begin{cases}3x-y=16\\ 2x+y=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=17\\ 5x=33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=17\\ x=6,6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=17-2\times 6,6\\ x=6,6\end{cases}$

$(S)=\begin{cases}y=3,8\\ x=6,6\end{cases}$

IV Matrice et transformations du plan

On se place dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.
Soient a,b,c et d quatre réels.

Définition :

Une **translation de vecteur** $\vec{t}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui, à tout point $M(x;y)$du plan, associe son point image $M'(x';y')$tel que $M'(x';y')$ se définit matriciellement comme la somme des matrices colonnes
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Propriété (admise) :

Pour les transformations géométriques planes suivantes, on définit la matrice de transformation$T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$qui à tout point $M(x;y)$ du plan, associe son point image $M'(x';y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

-pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses , on a $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

-pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées , on a $T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

-pour une rotation de centre O d'angle Θ , on a $T=\begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$

-pour une homothétie de centre O et de rapport $k\in\mathbb{R}$, on a $T=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Exemple : La matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$est la matrice

T =