Chapitre 3 : Limites de fonctions

I. Limites d'une fonction et asymptotes

1. Limites en l'infini pour une fonction f au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition :

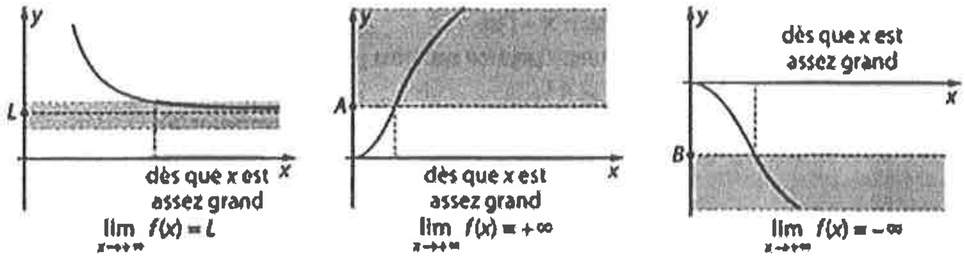
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x et assez grand.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.

On peut énoncer des définitions similaires pour les limites en $-\infty$, en remplaçant « dès que x est assez grand » par « dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue »

Interprétation graphique :



Définition :

La droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

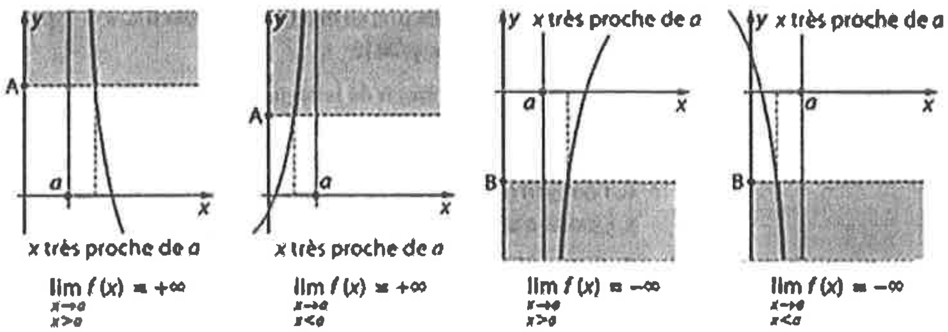
2. Limite infinie en un réel a

Définition :

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de a.

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de a.

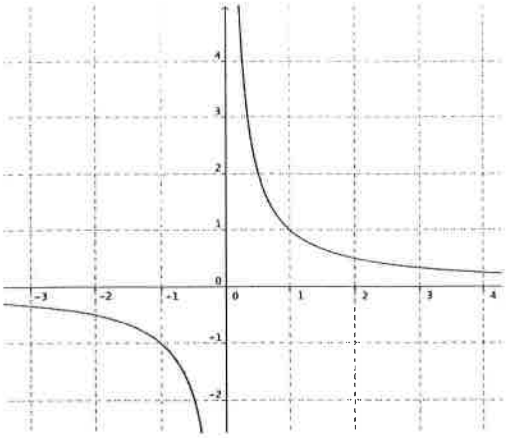
Interprétation graphique :



Définition :

La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +/-\infty$.

Remarque :
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.



Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

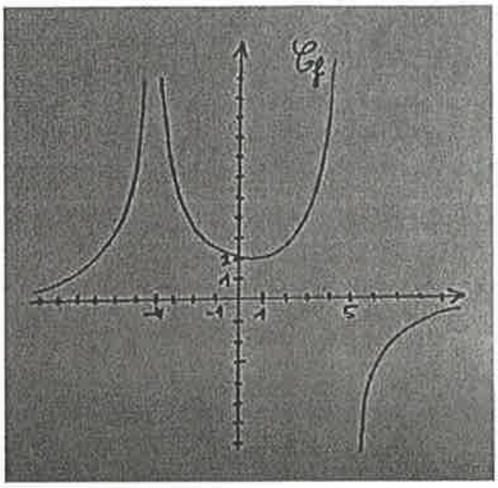
- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

asymptote verticale $x = 0$
horizontal $y = 0$

Méthode : Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

Vidéo **https://youtu.be/9nEJCL3s2eU**



La fonction f est définie que $]-\infty;-4[\cup]-4;5[\cup]5;+\infty[$.
Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ asymptote horizontal $y = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$

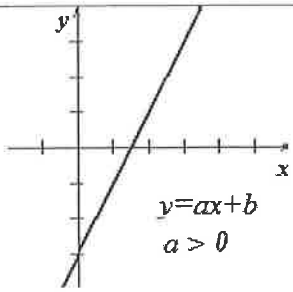
$\lim_{x\to-4} f(x) = +\infty$ asymptote verticale $x = -4$

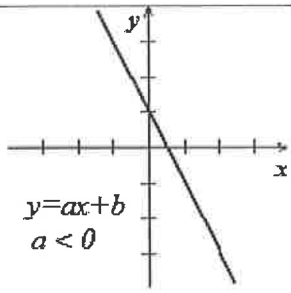
$\lim_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$

asymptote verticale $x = 5$

II. Limites de fonctions de référence

Fonction affine
$f(x) = ax + b$
sur R



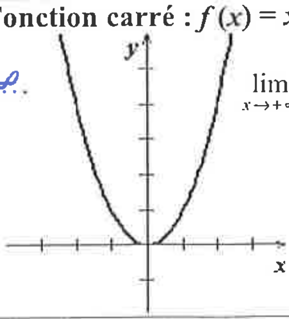


En $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = +\infty$ ....

En $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = +\infty$ ....

Fonction carré : $f(x) = x^2$

$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

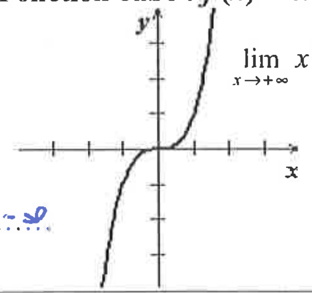


$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

sur R

Fonction cube : $f(x) = x^3$

sur R



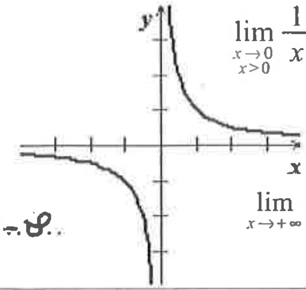
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

sur $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$



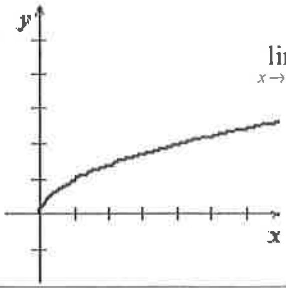
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

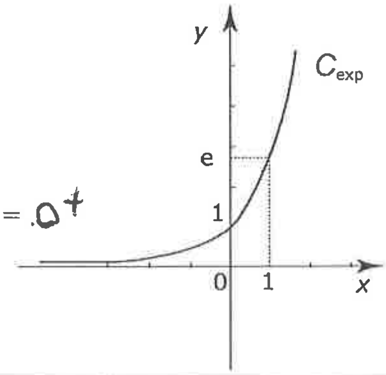
Fonction racine carré : $f(x) = \sqrt{x}$

sur $\mathbb{R}^+$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$



$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

...

preuves p : 168 et 170

III. Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (3+x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x\to 3^+} \frac{1-2x}{x-3}$?

$\lim_{x \to 3^+} (1-2x) = -5$

$\lim_{x \to 3^+} (x-3) = 0^+$
$x > 3$

$\lim_{x \to 3^-} (x-3) = 0^-$
$x < 3$

$\lim_{x \to 3^+} \frac{1-2x}{x-3} = -\infty$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :
"$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Calculer : $\infty - \infty$

1) $\lim_{x\to+\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

$x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$

Par produit $\lim f(x) = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

$= \frac{x^2\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(6 - \frac{5}{x^2}\right)}$

$= \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$

$\lim 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$

$\lim 6 - \frac{5}{x^2} = 6$

$\lim f(x) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

$\frac{x^2\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)}{4 - \frac{1}{x}}$

$\lim x\left(3 + \frac{2}{x^2}\right) = -\infty$

$\lim 4 - \frac{1}{x} = 4$

$\lim f(x) = -\infty$

Méthode : Déterminer une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

$\lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$
$x > 1$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$
$x < 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{1-x} = 0^+$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1-x} = 0^-$

asymptote (verticale) $x = 1$

$y = 0$ (horizontal)

4) Limite d'une fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : **la composition.**

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x}$.
Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $1-x$, puis la racine carrée de ce réel. Ainsi, la fonction f est l'enchainement de deux fonctions :
f : $u(x)=1-x$ définie sur $]-\infty\,;\,1]$ suivie de v : $v(X)=\sqrt{X}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$x \xmapsto{u} 1-x \qquad X \xmapsto{v} \sqrt{X}$$

On a : $f(x)=\sqrt{1-x}=v(1-x)=v(u(x))$.

Définition : Soit v une fonction définie sur un intervalle J et soit u une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $u(x)\in$ J.
La fonction composée u suivie de v est la fonction f définie sur I par

$$f(x)=v(u(x)).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend left, "v\circ u"] & u(x) \arrow[r, mapsto, "v"] & v(u(x)) \end{tikzcd}$$

Pour calculer la limite en $-\infty$ de la fonction de l'exemple précédent, on procède de la façon suivante.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$
$X=(1-x)$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[d] & 1-x & \\ & X \arrow[r, mapsto, "v"] \arrow[d] & \sqrt{X} \arrow[d] \\ -\infty & +\infty & +\infty \end{tikzcd}$$

Exemple: On a : $f(x)=e^{-x^2+3}$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=?$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+3=-\infty$ $\quad X=-x^2+3 \quad$ $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+3}=0$

ex $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+2}}$ $\quad \dfrac{x-1}{2x+2}=\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}$ $\quad \left(1-\frac{1}{x}\right)\to \lim\limits_{x\to+\infty}=1$ $\quad \left(2+\frac{2}{x}\right)\to\lim\limits_{x\to+\infty}=2$

Par Q $\lim=\dfrac{1}{2}$ $\quad X=\dfrac{x-1}{2x+2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Démonstration au programme : Limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle

Aide: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ $\quad X=-x \quad$ $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$

Par quotient $\lim\dfrac{1}{e^{-x}}=0$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Calculer : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée

III. Théorèmes de comparaison

1. Théorèmes de comparaison : Limite infinie

Théorème 1 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]A\,;+\infty[$, où A est un réel.

Si pour tout x de $]A\,;+\infty[$, $g(x) < f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Démonstration :

De $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, on déduit que tout intervalle de la forme $]\alpha\,;+\infty[$ où α est un réel, contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand, autrement dit, il existe un réel M tel que pour tout $x > M$, $g(x) > \alpha$.

Or, pour $x > A$, $g(x) < f(x)$.

Donc, pour tout $x > \max(M, A)$, $f(x) > \alpha$. Finalement, tout intervalle $]\alpha\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème 2 : Soit f et h deux fonctions définies sur un intervalle $]A\,;+\infty[$, où A est un réel.

Si pour tout x de $]A\,;+\infty[$, $f(x) < h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

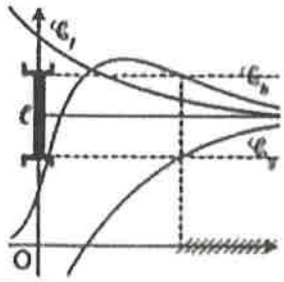
2. Théorème des gendarmes: Limite réelle

Théorème :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]A\,;+\infty[$ où A est un réel.

Si pour tout x de $]A\,;+\infty[$, $g(x) < f(x) < h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$



Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y

Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer :

1) $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$x-1 \leq x + \sin x \leq 1 + x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

Car $x > 0$

$-x \leq x\cos x \leq x$

$x^2 + 1 > 0$

$\dfrac{-x}{x^2+1} \leq \dfrac{x\cos x}{x^2+1} \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

$\dfrac{-x}{x^2+1} = \dfrac{x(-1)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ $\quad \lim x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim \dfrac{-1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$

$\to$

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x^2})}$ $\lim \frac{1}{x(1+\frac{1}{x^2})} = 0$

D'après le théorème d'encadrement $\lim \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$

V. Croissances comparées

Propriétés (croissances comparées) :

(On dit que e^x l'emporte)

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

Démonstration au programme du a :

- On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$

On calcul la dérivée de la dérivée f' : $(f'(x))' = e^x - 1$.

Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$

Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 > 0$ $\quad$ ($car\ x > 0,\ donc\ e^x > e^0\ , donc\ e^x > 1.$

On dresse alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	1 $\nearrow$	
Signe de $f'(x)$	+	
$f(x)$	1 $\nearrow$	

On en déduit que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.

Et donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.

Soit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Vidéo **https://youtu.be/GoLYLTZFaz0**

Calculer la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

On sait que $\frac{e^x}{x} = +\infty$

Donc par inverse $\frac{x}{e^x} = 0$

On sait que $\frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Donc par inverse $\frac{x^2}{e^x} = 0$

$\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$ car $e^x > 0$

$\lim 1+\frac{x}{e^x} = 1$

$\lim 1-\frac{x^2}{e^x} = 1$

Par quotient $\lim \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = 1$