Chapitre 10 : CALCUL INTÉGRAL

Activité 1 p328

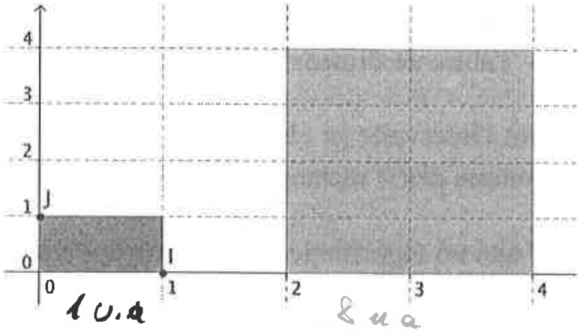
$x^n \Rightarrow \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$e^{ax+b} \Rightarrow \dfrac{e^{ax+b}}{a}$

I. Intégrale d'une fonction positive et aire

1) Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

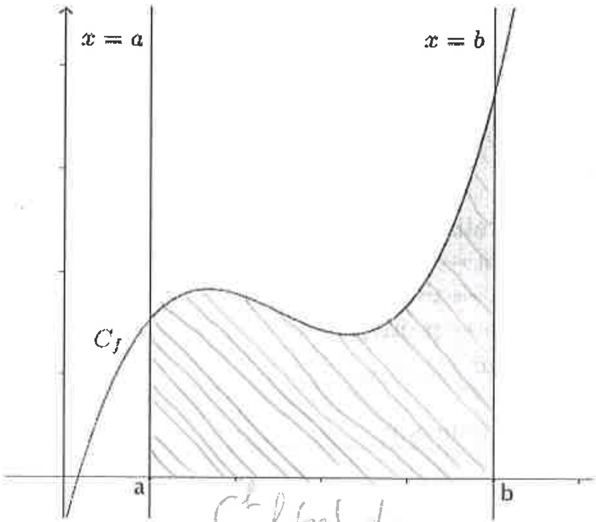


2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$
Et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».



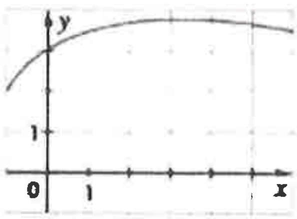
$\int_a^b f(x)\,dx$

Remarques :
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.
"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Méthode : Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale. Capacité 1 p331

Soit f la fonction définie sur $I = [-1\,;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans le repère orthonormé ci-contre.



1 Donner le signe de f sur I puis interpréter graphiquement $\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$.

2 Estimer, à une unité près, la valeur de $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

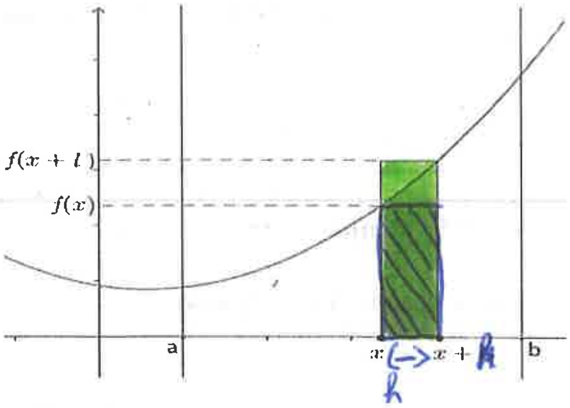
3 Déterminer un encadrement de $\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$ par deux nombres entiers.

1) f est positive sur $[-1\,;6]$
$\int_{-1}^{6} f(x)\,dx \to$ aire délimitée par l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites $x=-1$, x

2) $\simeq 2{,}5$ u.a

3) $27 > \int_{-1}^{6} f(x)\,dx > 20$

3) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive



Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $h=\frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+h]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension h et $f(x)$ qui a pour aire $h \times f(x)$;
- l'autre de dimension h et $f(x+h)$ qui a pour aire $h \times f(x+h)$.

Sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel

Définir fonction rectangle(a, b, n)
 	
h ← (b-a)/n
x ← a
m ← 0
p ← 0
 	
Pour i allant de 0 à n-1
    m ← m+hxf(x)
    x ← x+h
    p ← p+hxf(x)
FinPour
 	
Afficher m et p

Exemple :
Avec Python, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x)=x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

$\int_1^2 x^2\,dx$	$\frac{7}{3}$
$\int_1^2 x^2\,dx$	2.33333

Ex : 19, 21, 22, 23 p340 ; 46, 47 p342

Activité 2 p328

II. Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
Donc $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$

Démonstration au programme dans le cas où f est strictement croissante : livre p 332

Conséquence immédiate : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.

a) Donner une interprétation graphique de F (2) et F (3). Conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
b) Déterminer la dérivée de la fonction F.
c) Etudier le sens de variation de F sur [0 ;10]. Valider la conjecture.

a) $F(2)$ represente l'aire sous la courbe $f(t) = \frac{t}{2}$ et les courbes d'équation $x = 0$ et $x = 2$ et l'axe des abscisse
$F(3)$ ———— entre $x = 0$ et $x = 3$
Conjecture $F(3) > F(2)$

b) $F'(x) = \frac{x}{2} = f(x)$

c)

t	0	10
$f(t)$	0	+
$F(t)$	↗	

$F(t)$ est croissante donc $F(3) > F(2)$

2) Calcul d'intégrales

Propriété / Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.
Notation : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration au programme : livre p 332

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$$

$f(x) = \frac{3}{x^2}$
$F(x) = \frac{-3}{x}$
$F(4) = -\frac{3}{4}$
$F(1) = -3$
$A = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = -\frac{3}{4} - (-3) = \frac{9}{4}$

$f(x) = 3x^2 + 4x - 5$
$F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$
$F(5) = 125 + 50 - 25$
$F(5) = 150$
$F(2) = 6$
$B = F(5) - F(2) = 144$

$f(x) = e^{-2x}$
$F(x) = \frac{1}{-2} e^{-2x}$
$F(1) = \frac{e^{-2}}{-2}$
$F(-1) = \frac{e^{2}}{-2}$
$C = F(1) - F(-1)$
$= \frac{-e^{-2} + e^{2}}{2}$

3) Propriété de l'intégrale

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a , b, c des réels de I.

$a)$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$c)$ **Relation de Chasles** : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

d) **Linéarité** : Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

e) **Positivité** : Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

f) **Comparaison** : Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Remarque :
Les réciproques des propriétés e) et f) sont fausses !!

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

b) En déduire A et B.

a) $A+B = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx + \sin^2(x)dx = \int_0^{2\pi} 1 = [x]_0^{2\pi}$

$A+B = F(2\pi) - F(0) = F(2\pi) = 2\pi$

$A-B = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx - \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}$

$A-B = \frac{1}{2}\sin(4\pi) - \frac{1}{2}\sin(0) = 0 - 0 = 0$

b) $\begin{cases} A+B = 2\pi \\ A-B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \iff A = B = \pi$

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0\,;1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

a) $0 \leq x \leq 1$ car $x \geq 0$

$\iff 0 \leq x^2 \leq x$ car $e > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\iff e^0 \leq e^{x^2} \leq e^x$

$\iff 1 \leq e^{x^2} \leq e^x$

b) $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$

$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$ | $\iff 0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e^1 - e^0$

$\iff 0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq [e^x]_0^1$ | $\iff 0 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e^1 - 1$

Ex : capacités 3, 4 p91 ; 48, 49, p342 ; 52 à 60, 64, 65, 70, 73, 76, 78 p343

5) Intégration par partie.

> Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables et continues sur $[a\,;b]$. Alors, on a :
> $$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Démonstration au programme : livre p 334

$\sin(x)' = \cos(x)$
$\cos(x)' = -\sin(x)$

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\cancel{\frac{\pi}{2}}} \cancel{x\sin x}\,dx$; $\int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x\,dx$ $\quad$ $\cancel{B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx}$; $\quad$ $C = \int_1^{e^2} \ln x\,dx$

$A = \left[e^x(x-1)\right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} e^x$

$A = e^{\ln(2)}(\ln(2)-1) - e^0(0-1) - \left[e^x\right]_0^{\ln(2)}$

$A = 2\ln(2) - 2 + 1 - 2 + 1$

$A = 2\ln(2) - 2$

$u' : e^x \quad v\ x-1$
$u\ e^x \quad v'\ 1$

$C = \left[x\ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{1}{x}$

$C = e^2\ln(e^2) - \ln(1) - \left[x\right]_1^{e^2}$

$C = 2e^2 - e^2 + 1$

$C = e^2 + 1$

$u'\ 1 \quad v\ \ln(x)$
$u\ x \quad v'\ \frac{1}{x}$

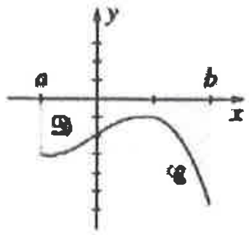
Ex : capacités 6 p335 ; 81, 82, 85, 88, 89 p344

III. Application du calcul intégral

1. Calcul d'aires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. On note $\mathscr{S}$ la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cas où f est positive sur I : d'après le cours 1, l'aire de la surface $\mathscr{S}$, en u.a. est égale à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

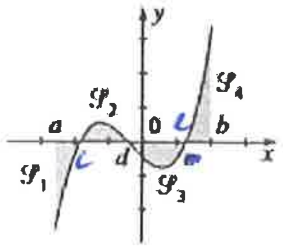


Cas où f est négative sur I : la fonction $-f$ est alors positive et l'aire de la surface $\mathscr{S}$, en u.a., est égale à $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. En effet, deux surfaces symétriques par rapport à une droite ont la même aire.

Cas où f change de signe sur I : la surface $\mathscr{S}$ peut alors être décomposée en une réunion de surfaces sur des intervalles disjoints. Sur chacun de ces intervalles, la courbe $\mathscr{C}$ est située soit au-dessus soit en dessous de l'axe des abscisses. Sur la figure ci-contre, on a par exemple :

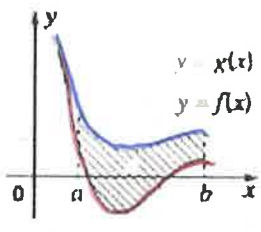
Aire $(\mathscr{S})$ = Aire$(\mathscr{S}_1)$ + Aire$(\mathscr{S}_2)$ + Aire$(\mathscr{S}_3)$ + Aire$(\mathscr{S}_4)$.

$$= -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x - \int_d^e f(x)\mathrm{d}x + \int_e^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathscr{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.



Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4$

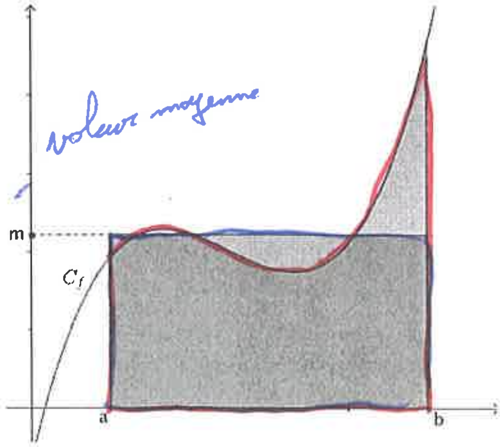
$= \left[\frac{-2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = -\frac{2}{3}(2)^3 + (2)^2 + 4(2) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1)\right)$

$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9$

2. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu), entre a et b.

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$m = \frac{1}{16}\int_0^{16} f(x)\,dx = \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx = \frac{1}{16}\left[\frac{16x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{16}$

$= \frac{16(16)^3}{3} - \frac{16^4}{4} \simeq 341$

3. Intégrales et suites.

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

$u\ \frac{1}{2}x^2 \quad u'\ x$
$v\ \ln(x)^{n+1} \quad v'\ (n+1)\frac{1}{x}\ln(x)^n$

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n, par :

$$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$$

1) Calculer I_0.

2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$

1) $I_0 = \int_1^e x(\ln(x))^0\,dx = \int_1^e x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

2) $I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(n+1)\frac{1}{x}\ln(x)^n\,dx$

$= \frac{e^2}{2} \times 1^{n+1} - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{(n+1)}{x}\ln(x)^n\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} \times x \times (n+1)\ln(x)^n\,dx$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1(n+1)}{2}\int_1^e x\ln(x)^n\,dx$

101, 102, 106, 100, 111, 112, 117, 118 + 345