Introduction aux NURBS

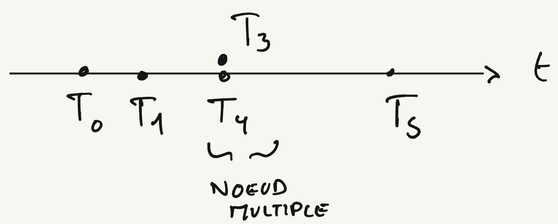
The Art of 3D Computer Modeling

www.pixar.com

1 B-SPLINES

$T_0 \leq T_1 \leq T_2$

NOEUDS



ETRE VIVANT

$$B_i^p(t)$$

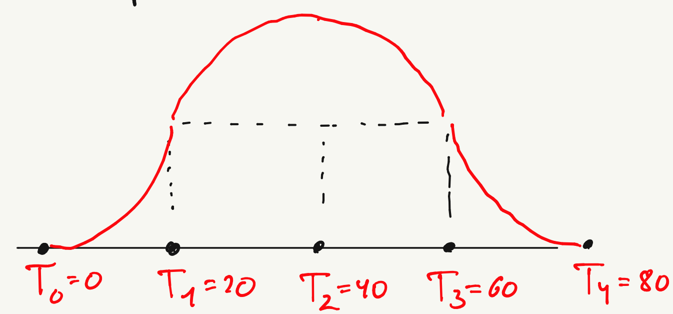
DUREE DE VIE

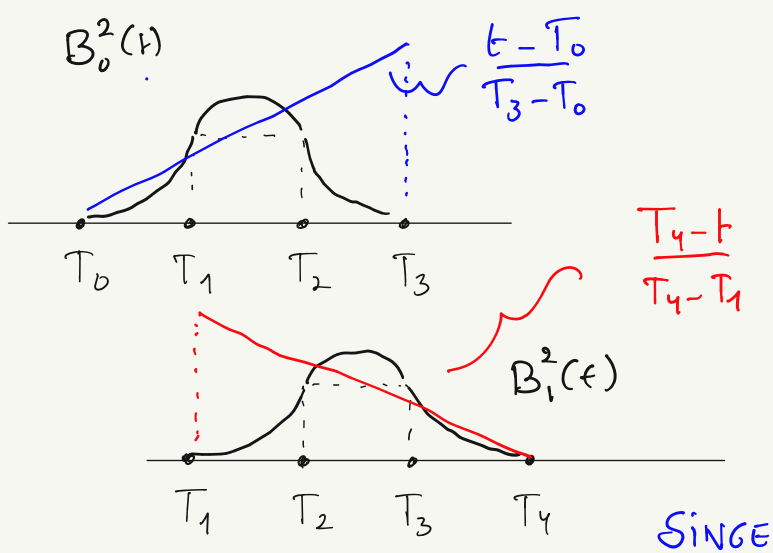
DATE DE NAISSANCE

HOMME · FEMME

POLY MORCEAUX
DE DEGRE 3 = p
DE CONTINUITE 2
= p − m

$B_0^3(t)$





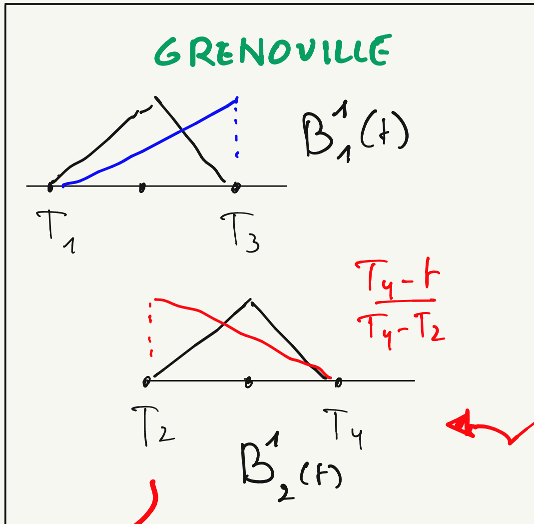
Définition 1.4. *Soit les $n+1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$. Les B-splines de degré p sont les $n-p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[\,T_i, T_{i+1+p}\,[$ où elle est définie par la relation de récurrence :*

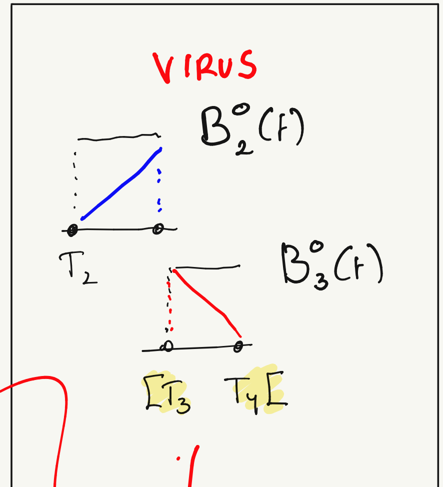
$$B_i^p(t) = \frac{(t-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p}-t)}{(T_{i+1+p}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

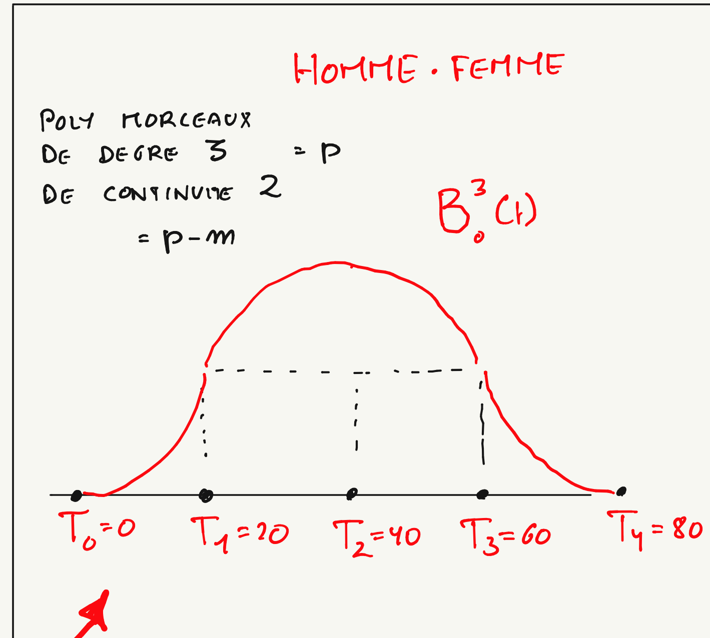
avec $i = 0, \ldots, n-p-1$ et en partant de :

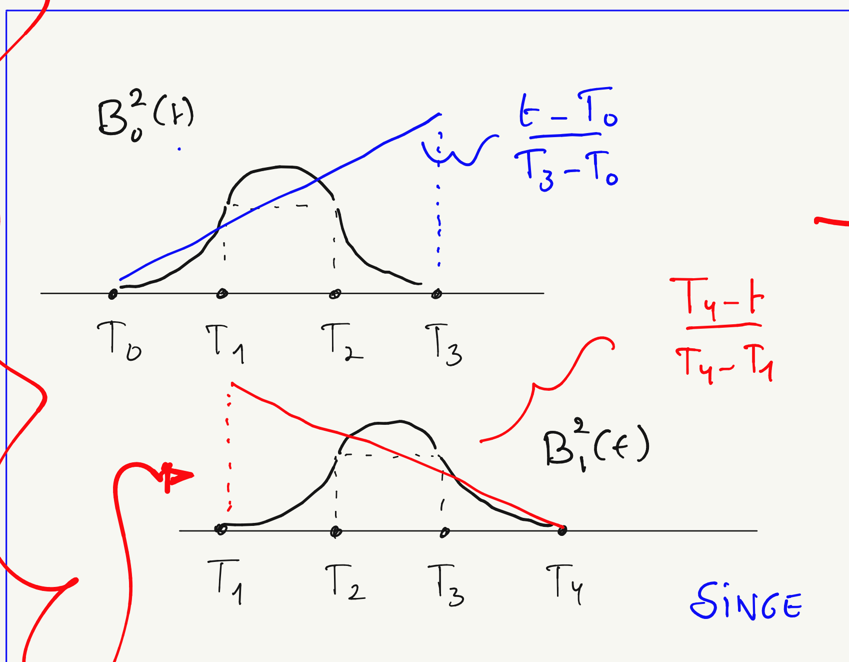
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & si \;\; t \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.









INTERVALLE D'EXISTENCE $[T_0 \quad T_4[$

Définition 1.4. *Soit les $n+1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$. Les B-splines de degré p sont les $n-p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[\,T_i, T_{i+1+p}\,[$ où elle est définie par la relation de récurrence :*

$$B_i^p(t) = \frac{(t-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p}-t)}{(T_{i+1+p}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

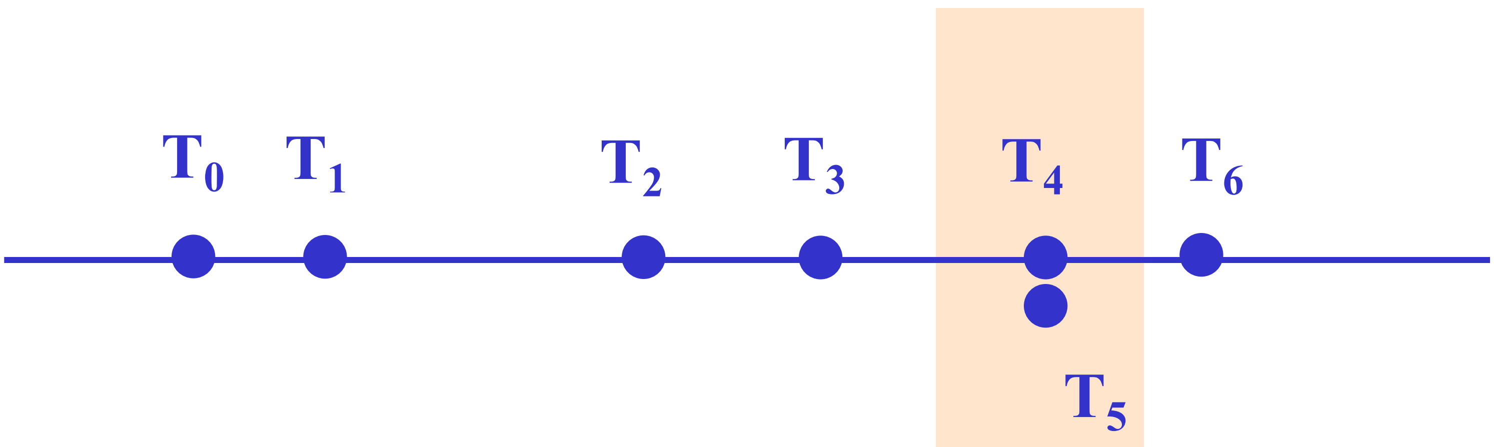
avec $i = 0, \ldots, n-p-1$ et en partant de :

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & si \;\; t \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

Des nœuds…

$$T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n,$$



Un nœud est de multiplicité m s'il est répété m fois

Fonctions B-splines

Définition 1.4.

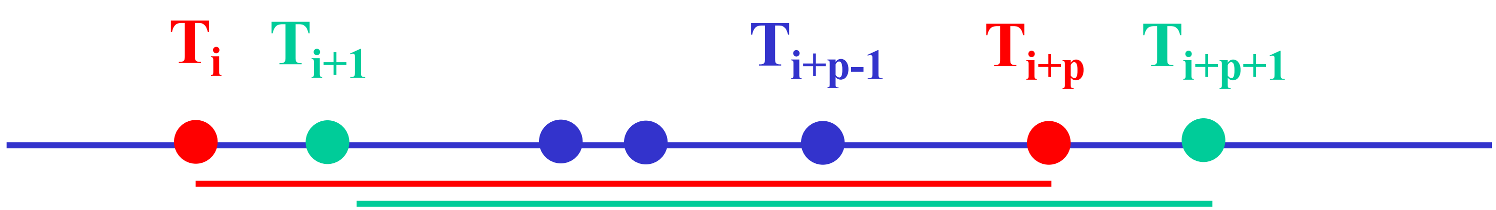
Soit les $n+1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$.
Les B-splines de degré p sont les $n-p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[\ T_i, T_{i+1+p}\ [$ où elle est définie par la relation de récurrence :

$$B_i^p(t) = \boxed{\frac{(t-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(t)} + \boxed{\frac{(T_{i+1+p}-t)}{(T_{i+1+p}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)}$$

avec $i = 0, \ldots, n-p-1$ et en partant de :

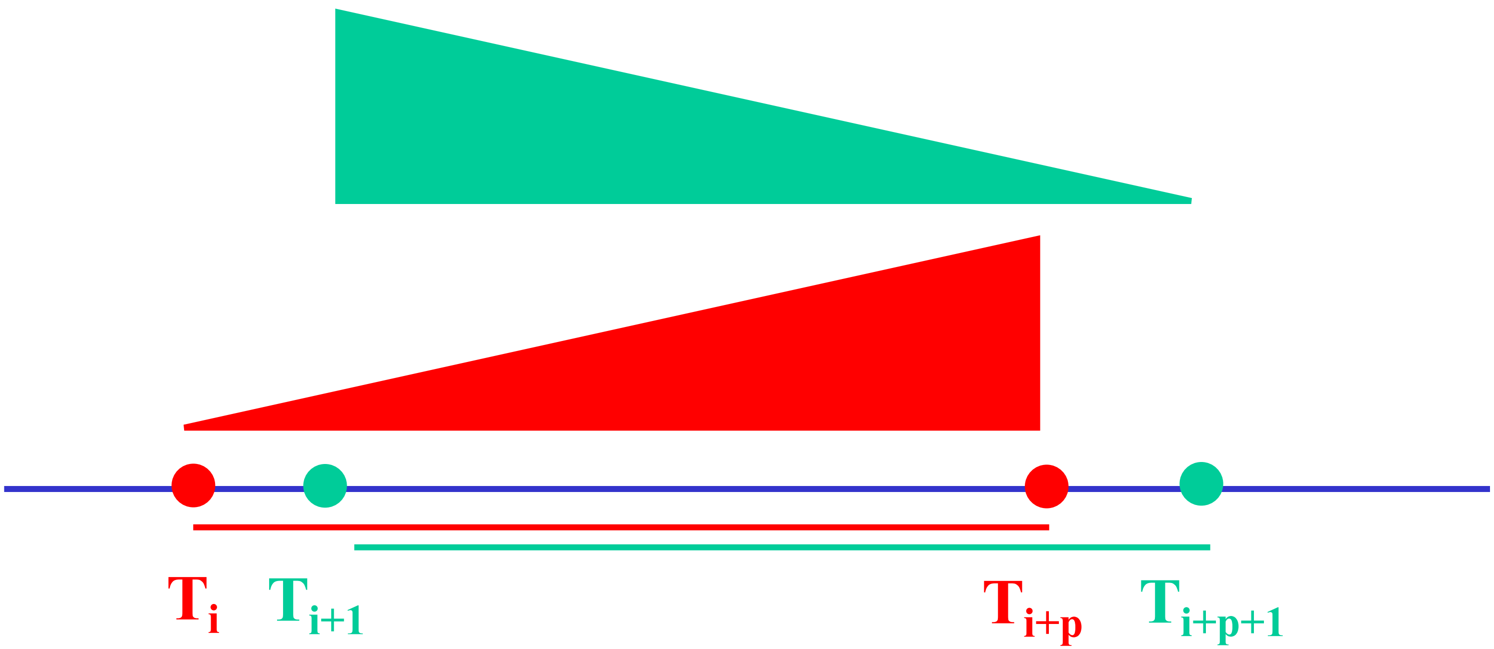
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & si \ \ t \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

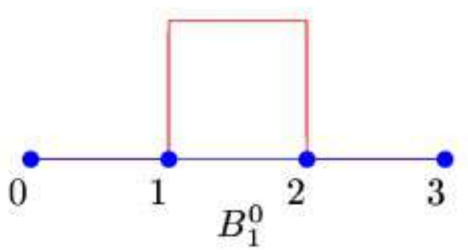


Les B-splines ou fonctions de mélange

$$B_i^p(t) = \boxed{\frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)}} B_i^{p-1}(t) + \boxed{\frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})}} B_{i+1}^{p-1}(t)$$



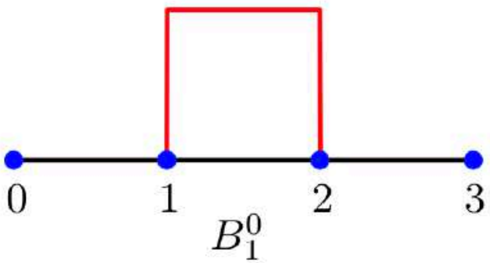
Commençons la récurrence…

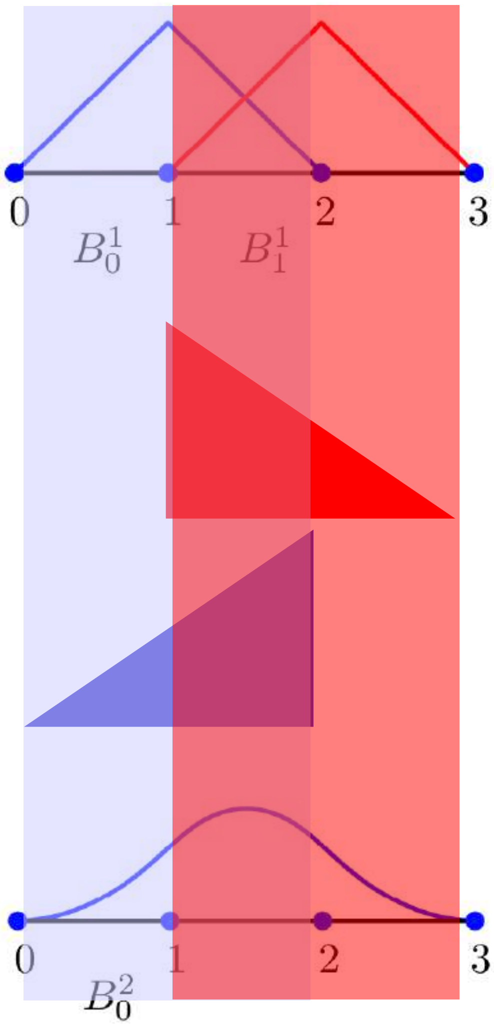


$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & si \;\; t \in [T_i T_{i+1}[\\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

$$B_i^p(t) = \boxed{\frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)}} B_i^{p-1}(t) + \boxed{\frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})}} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

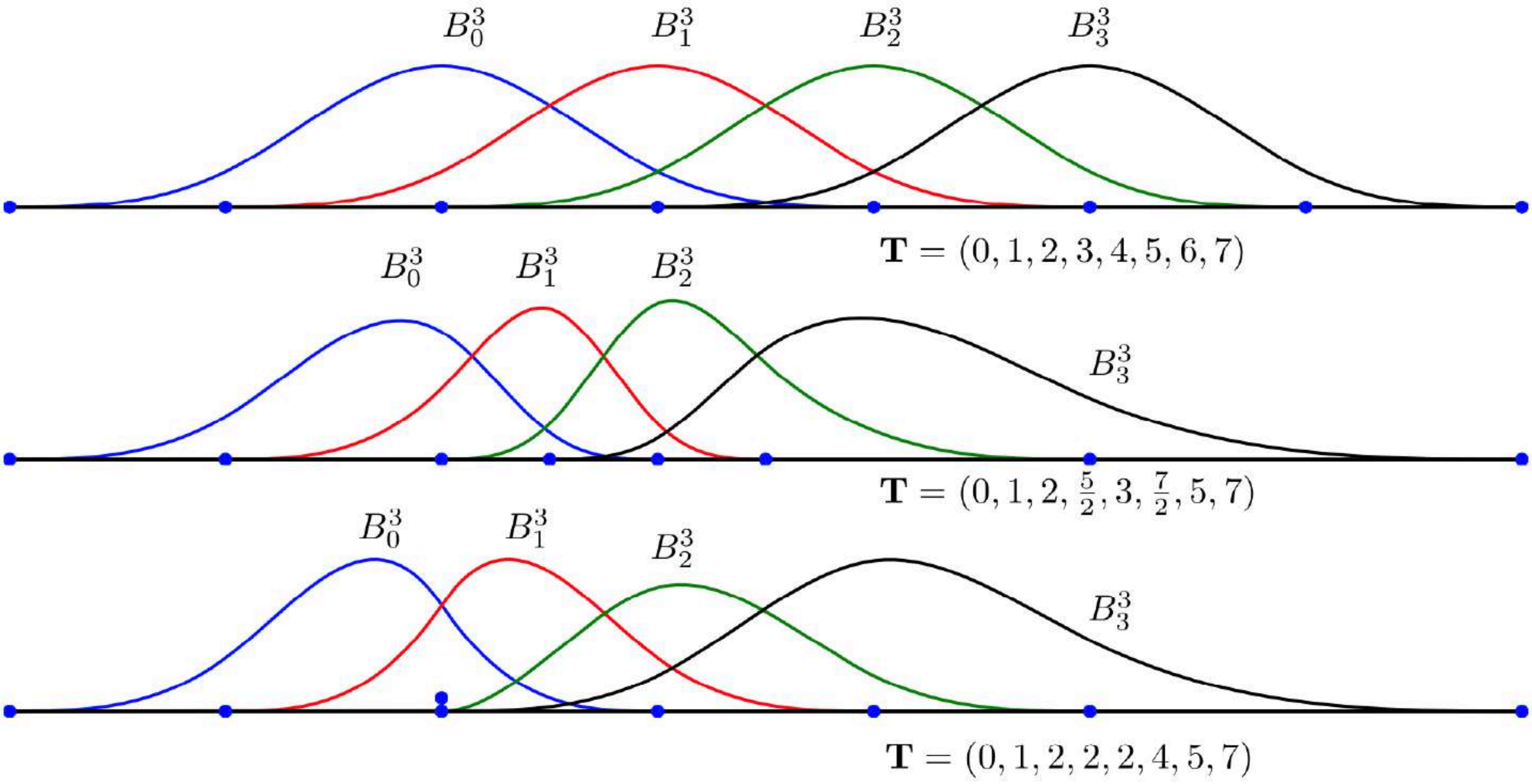




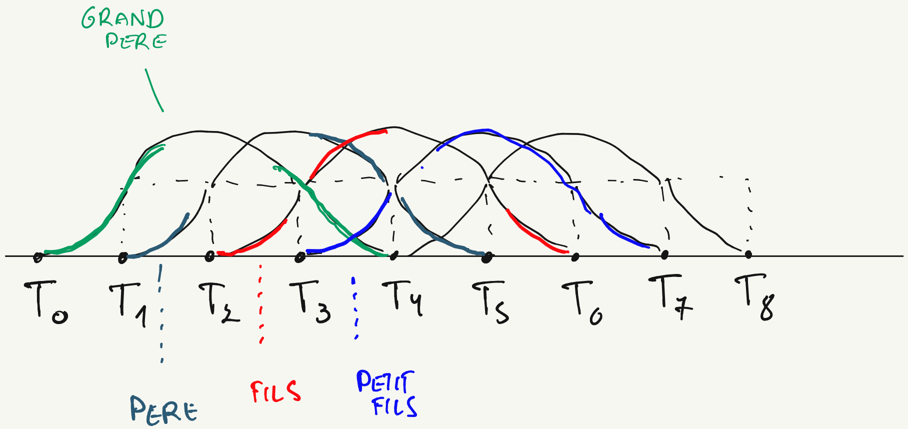
Exemple facile…

On peut observer que la fonction B-spline est toujours comprise entre 0 et 1

Modifions les noeuds…



$\boxed{2}$ TOUTES LES GENERATIONS



T_3 T_4

4 GENERATIONS SUR 1 INTERVALLE

PROPRIETE 1

$$\sum B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 = 1$$

PARTITION DE L'UNITE sur $[T_3 \; T_4]$

PROPRIETE 2

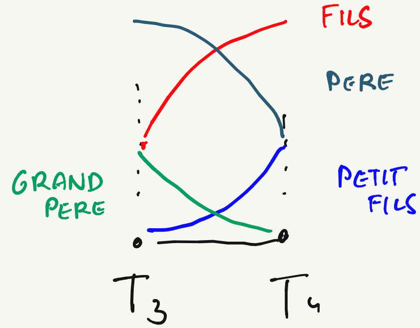
$C^2 = C^{3-m}$ MULTIPLICITE DES NOEUDS

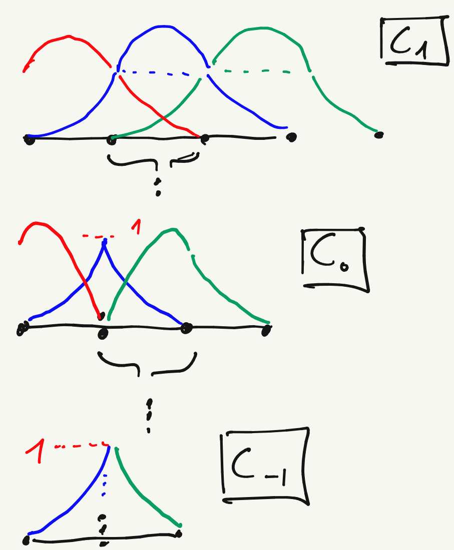
PROPRIETE Ø

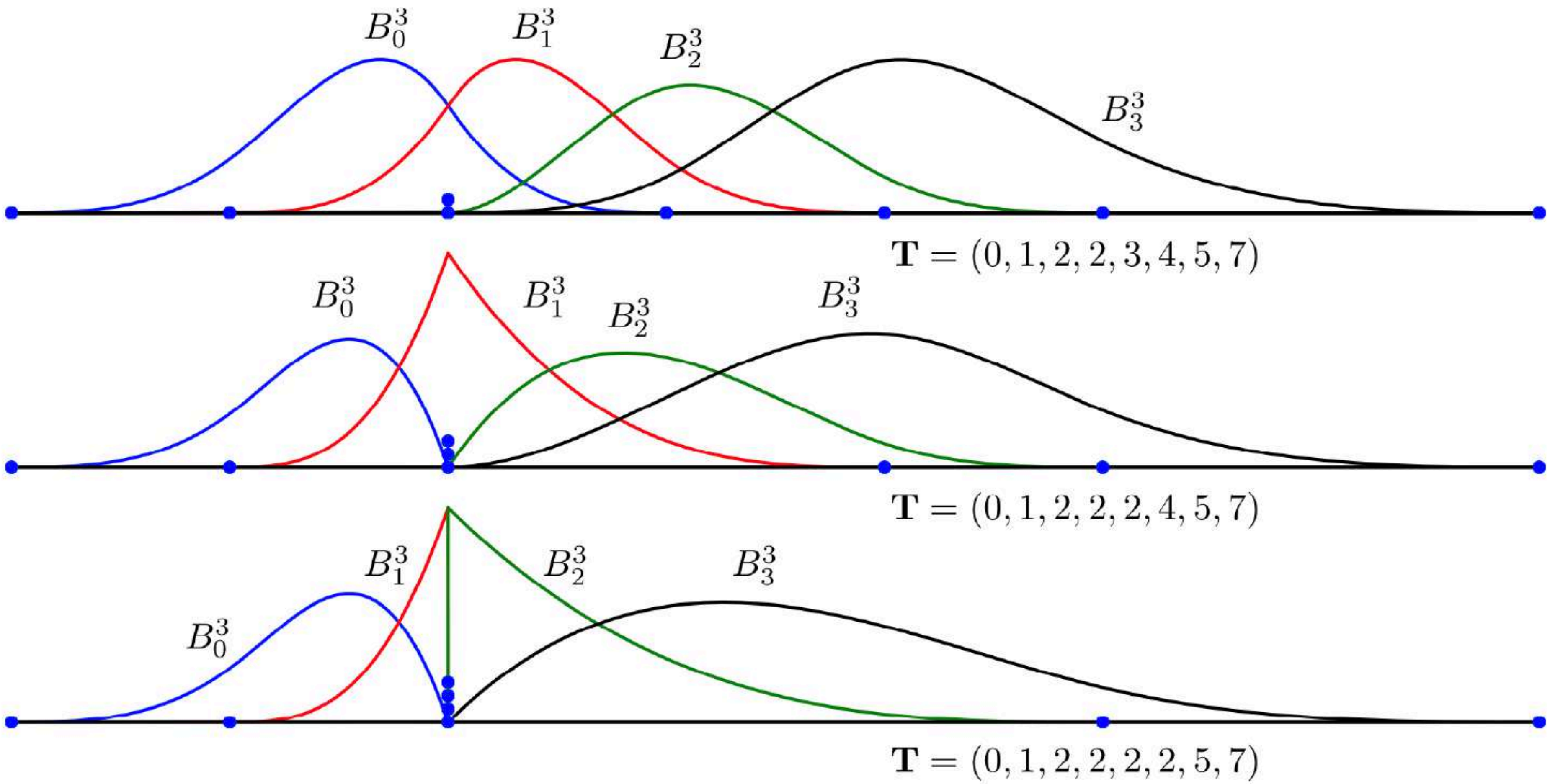
T_p .... T_{n-p}

3 8-3 = 5

INTERVALLES AVEC TOUTES LES GENERATIONS

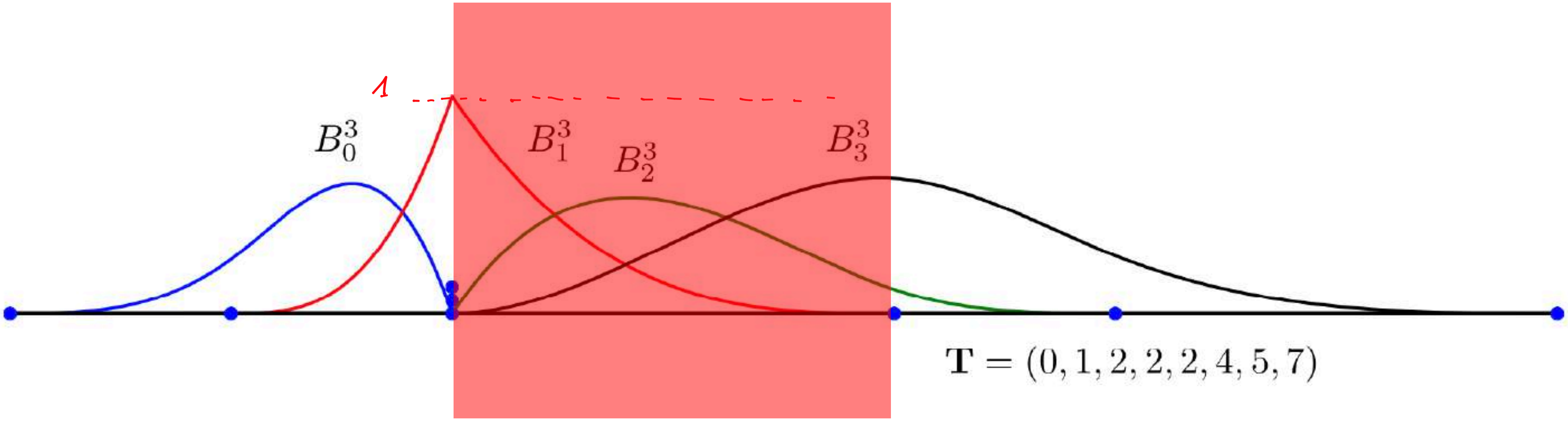






Nœuds doubles, triples…

Observons

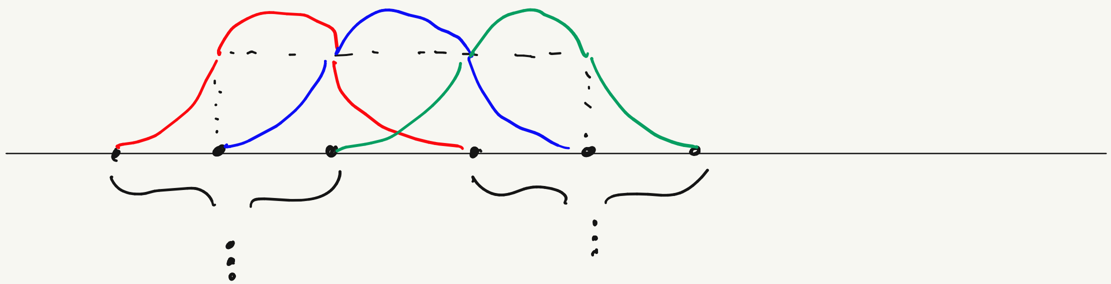


- Dans l'intervalle $[\ T_i, T_{i+1}\ [$, seules les splines $B^p_{i-p}(t), \ldots, B^p_i(t)$ sont non nulles.
- Une spline $B^p_i(t)$ ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à p.

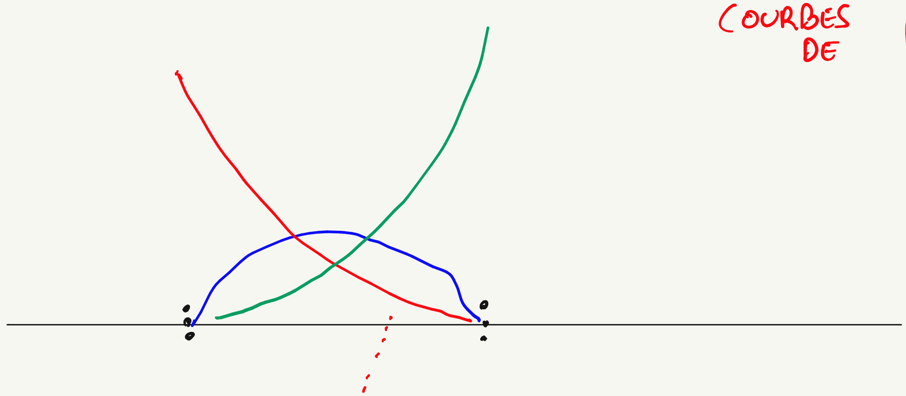
BEZIER

BASIS :-)

B-SPLINES

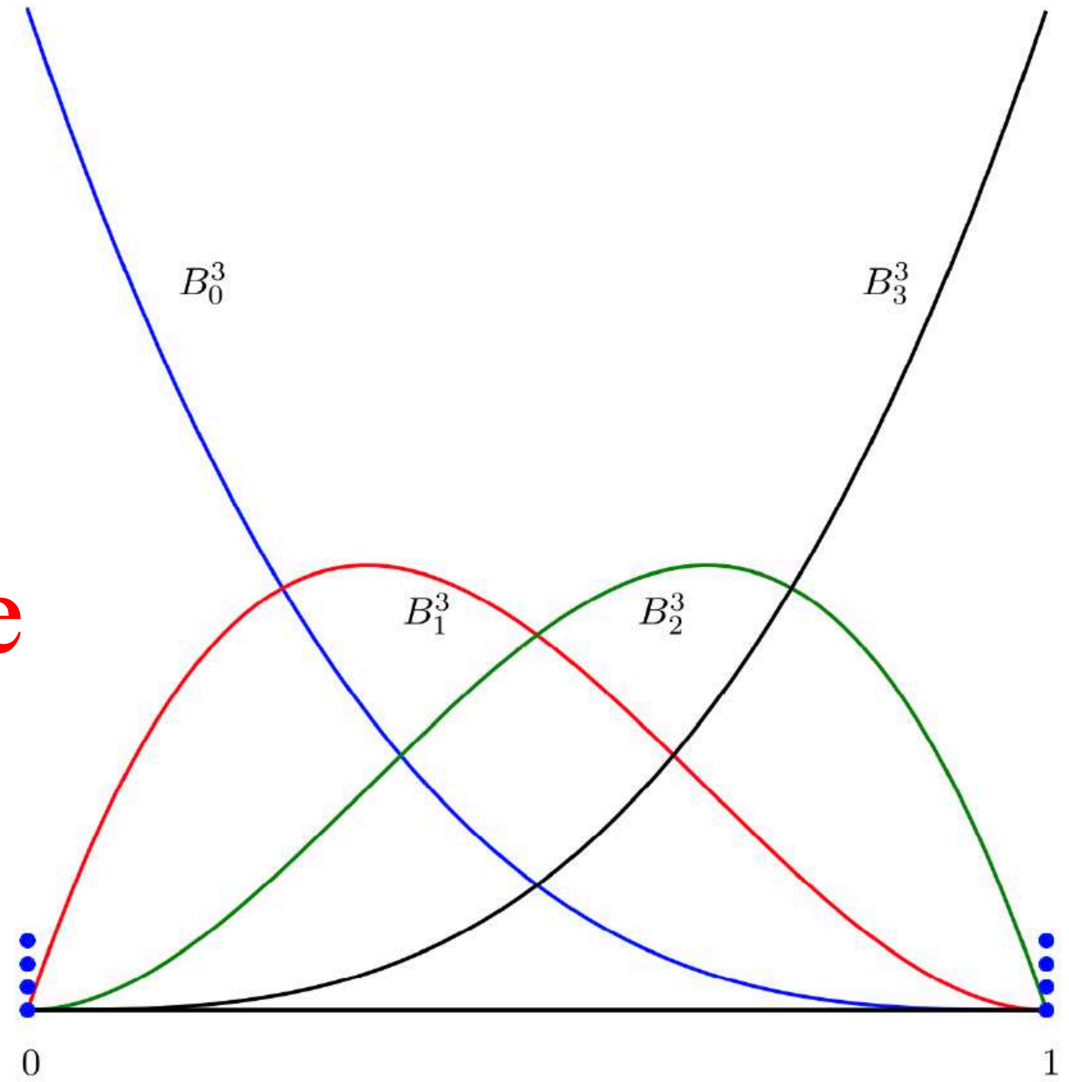


COURBES DE BEZIER



POLYNOMES DE BERNSTEIN

Quand les NURBS deviennent des splines de Bézier qui sont des polynômes de Bernstein



Pierre Bézier

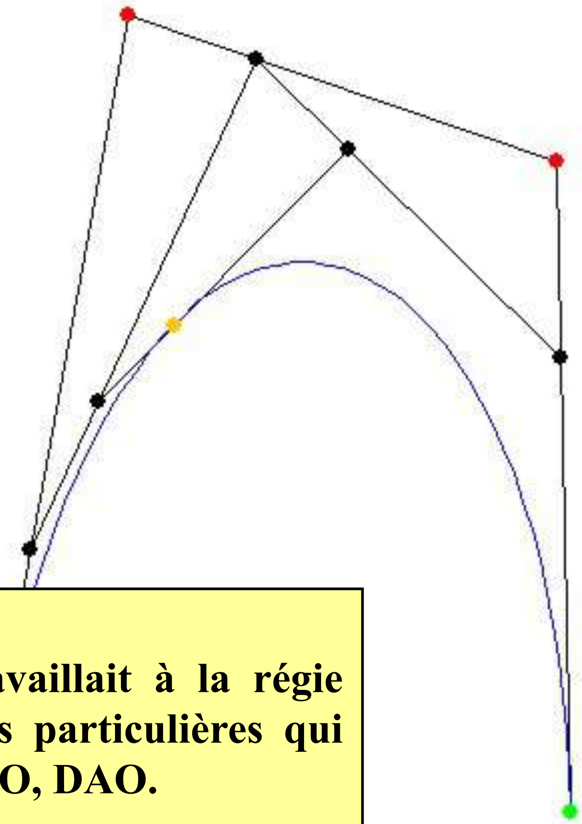
Né le 1er septembre 1910 à Paris
Décédé le 25 janvier 1999

In 1933, Bezier entered Renault and worked for this company for 42 years. In 1948, as Director of Production Engineering he was responsible for the design of the transfer lines producing most of the 4 CV mechanical parts. In 1957, he became Director of Machine Tool Division and was responsible for the automatic assembly of mechanical components, and for the design and production of an NC drilling and milling machine.

Bezier started his research in CADCAM in 1960 when he devoted a substantial amount of his time working on his UNISURF system.
His system was launched in 1968.

A la mémoire de
mon grand-père, ingénieur mécanicien,
mon père, ingénieur mécanicien,
ma sœur, ingénieur chimiste, docteur ès sciences,
P.B.

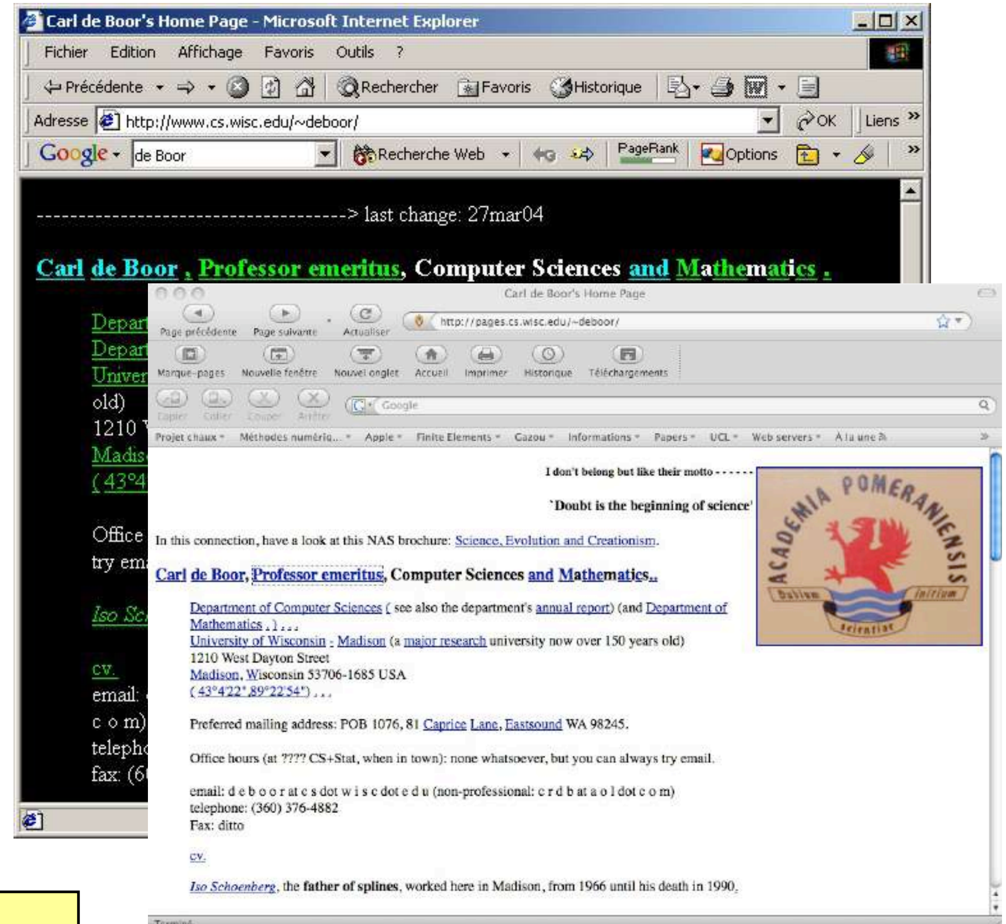
Paul Faget de Casteljau



Pierre Bezier, ingénieur des Arts et Métiers, travaillait à la régie Renault, quand il "inventa" en 1970 des courbes particulières qui portent maintenant son nom. Ce fut le début de CAO, DAO.

Au départ, il devait trouver un moyen simple pour reproduire sur ordinateur des courbes tracées à main-levée par des dessinateurs. Il retravailla certaines études de Paul Faget de Casteljau, ingénieur travaillant chez Citroën, c'est pourquoi on utilise "l'algorithme de Casteljau" pour les tracer. Aujourd'hui ses courbes sont utilisées dans le monde entier sans vraiment savoir d'où vient cette appellation.

Carl de Boor



Généralisation de l'algorithme de Casteljau pour des NURBS :
Algorithme de Carl de Boor

http://www.cs.wisc.edu/~deboor/

A l'exclusion des p premiers et p derniers intervalles, la somme des B-splines vaut l'unité.

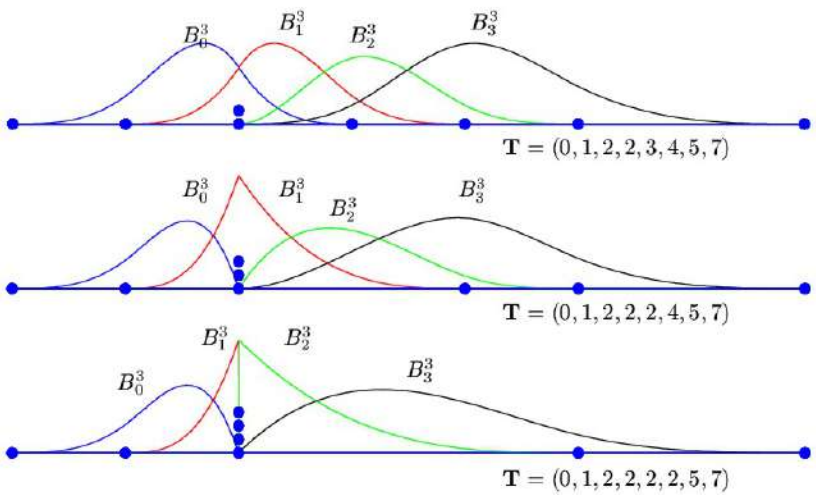
$$\sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) = 1 \qquad\qquad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

Les B-splines forment une partition unité

- Une spline $B_i^p(t)$ est toujours comprise entre 0 et 1.
- Une spline $B_i^p(t)$ est non nulle que dans l'intervalle $[\ T_i, T_{i+1+p}\ [$.
- Dans l'intervalle $[\ T_i, T_{i+1}\ [$, seules les splines $B_{i-p}^p(t), \ldots, B_i^p(t)$ sont non nulles.
- Une spline $B_i^p(t)$ ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à p.

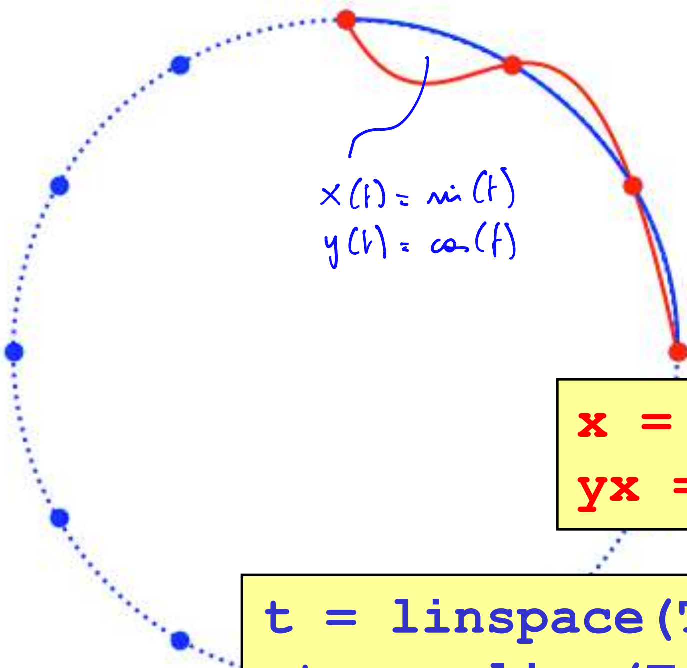
Continuité des B-splines

Théorème 1.4. *Si le vecteur des noeuds est constitué uniquement de points de multiplicité un, les splines de base B_i^p sont $(p-1)$-fois dérivables. On dit que l'ordre de continuité est $p-1$. Par contre, à un point de multiplicité m, l'ordre de continuité n'y sera localement que de $p-m$.*



Courbes splines paramétrées

```
T = pi * arange(0,4) / 6
X = sin(T)
Y = cos(T)
```

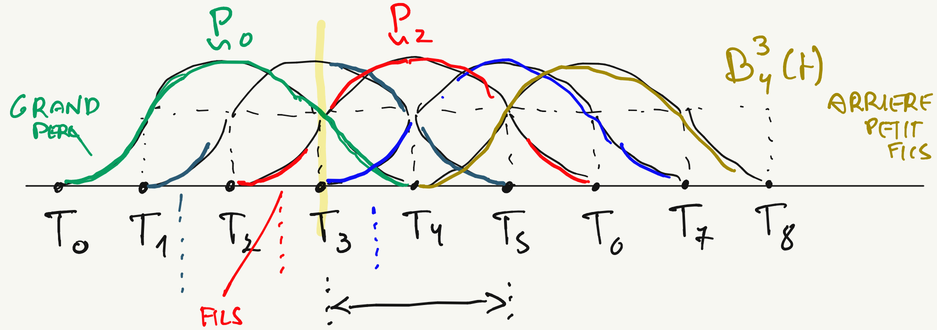



```
x = linspace(X[0],X[-1],100)
yx = spline(X,Y)(x)
```

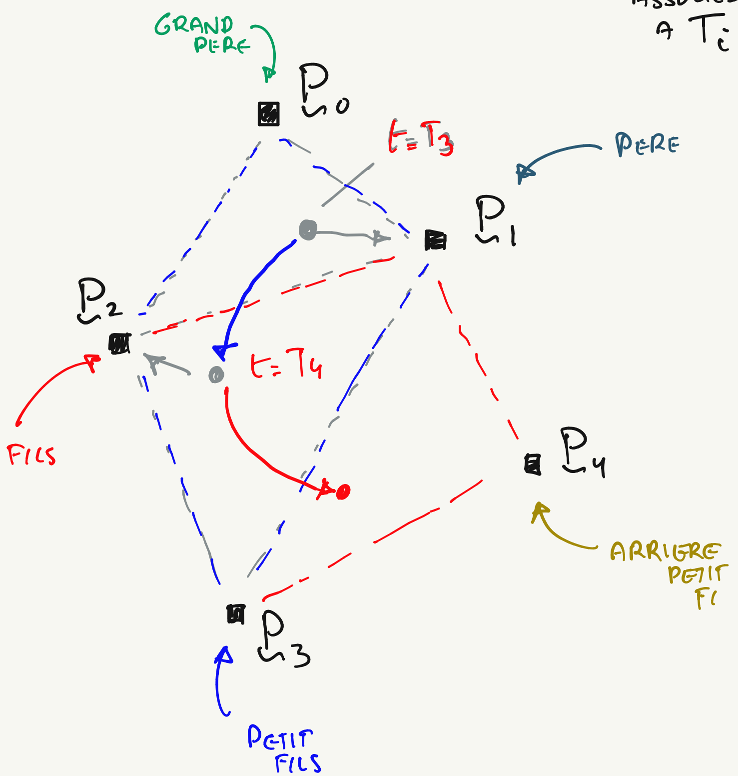
```
t = linspace(T[0],T[-1],100)
xt = spline(T,X)(t)
yt = spline(T,Y)(t)
```

$\boxed{3}$

COURBES PARAMETREES COMPOSEES DE SPLINES...



$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum \phi_i(t) \underbrace{\underset{\sim}{P}_i}_{\text{POLES ASSOCIES A } T_i}$$



$8-3-1=4$

$$\underset{\sim}{x}(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} \underset{\sim}{P}_i \, B_i^p(t)$$

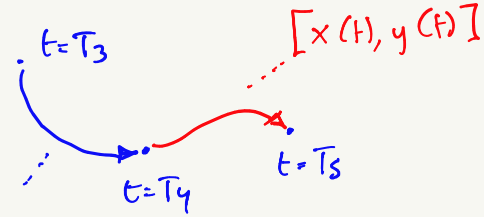
($n = 8$, $p = 3$)

5 POINTS DE CONTROLE

2 INTERVALLES

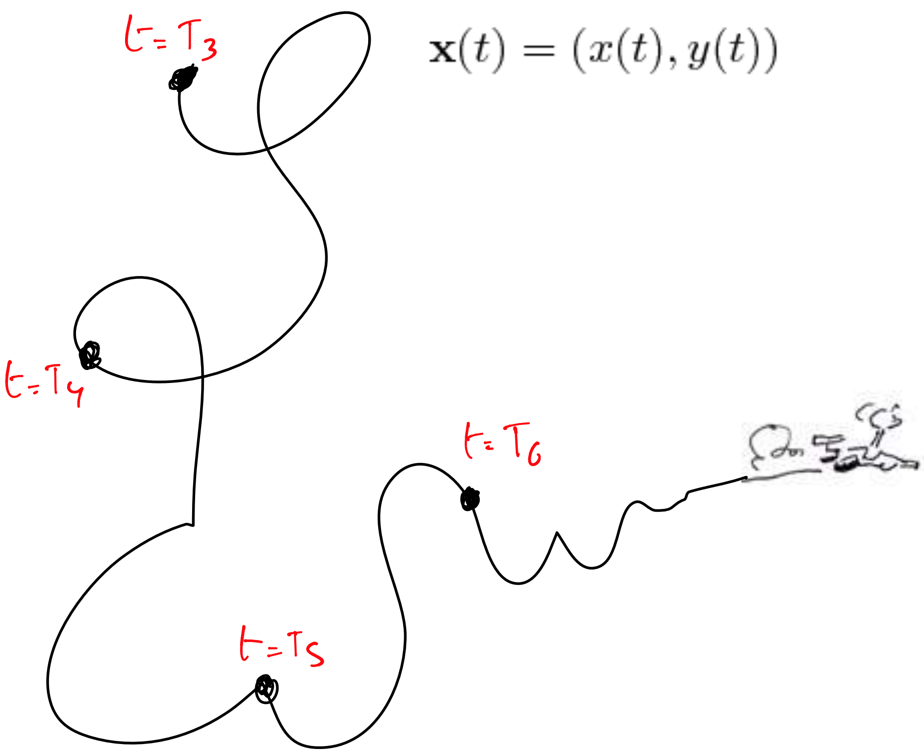
$$t \in [T_p, T_{\underbrace{n-p}_{8-3=5}}]$$

($p = 3$)



Courbes paramétriques composées de « splines »

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$$



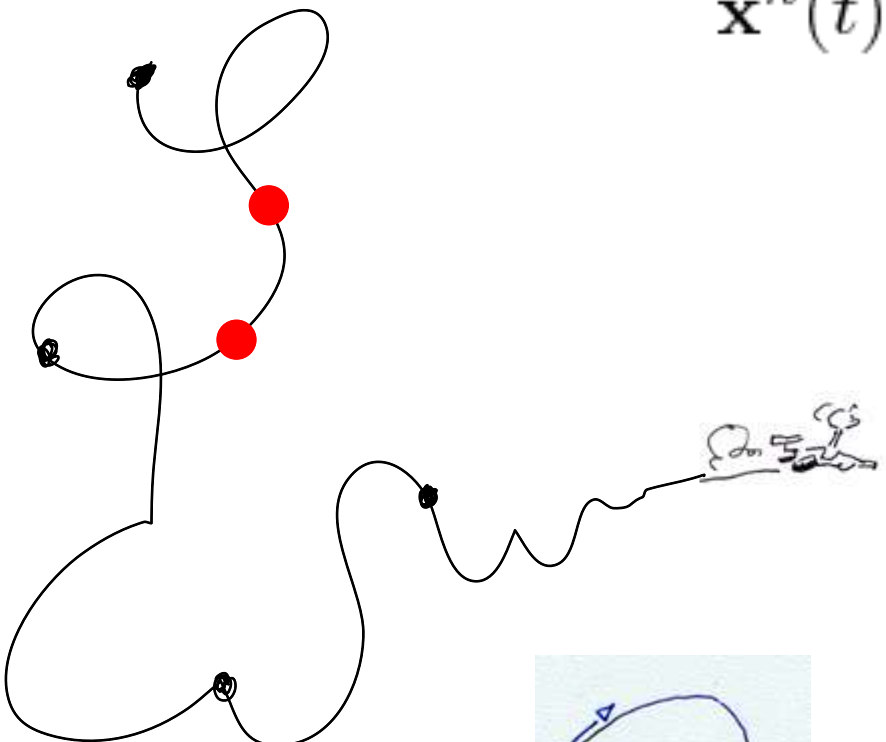
$$(X_i, Y_i) = (x(T_i), y(T_i))$$

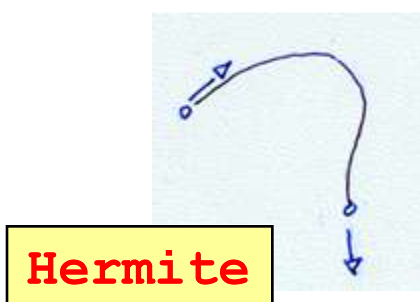
Une spline est une forme à pôles

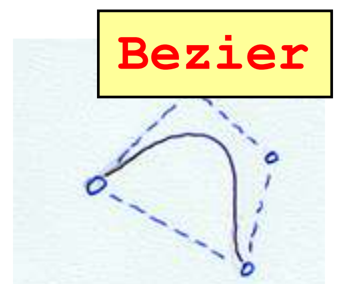
Fonctions de base

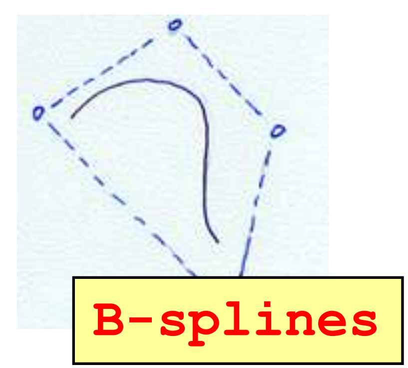
$$\mathbf{x}^h(t) = \sum_i \boxed{\phi_i(t)}\ \boxed{\mathbf{P}_i}$$

<u>Pôles :</u>
Points de passage
Directions tangentes
Vitesses
Points de contrôle









Courbes composées de B-splines… ce sont des approximations !

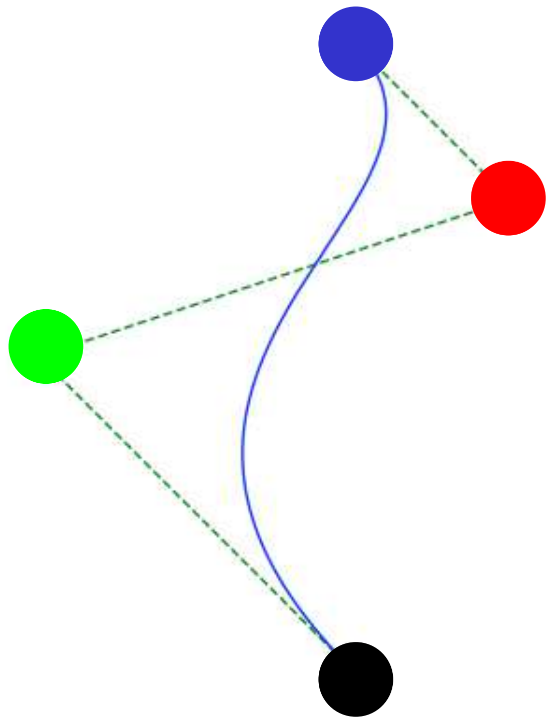
$$\left\{ \begin{aligned} x^h(t) &= \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\, X_i \\ y^h(t) &= \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\, Y_i \end{aligned} \right. \qquad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

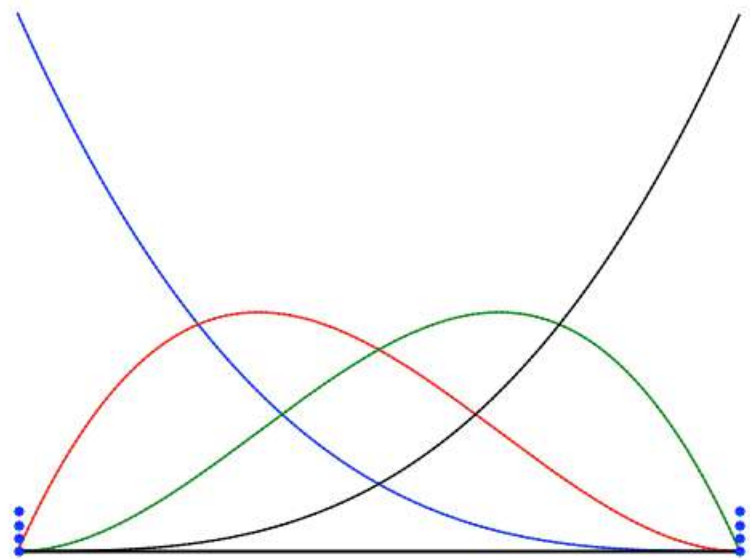
Coordonnées des points de contrôle

La courbe s'approche des points de contrôle, mais ne passe, en général, pas par ceux-ci !
Il s'agit d'une approximation, pas d'une interpolation.

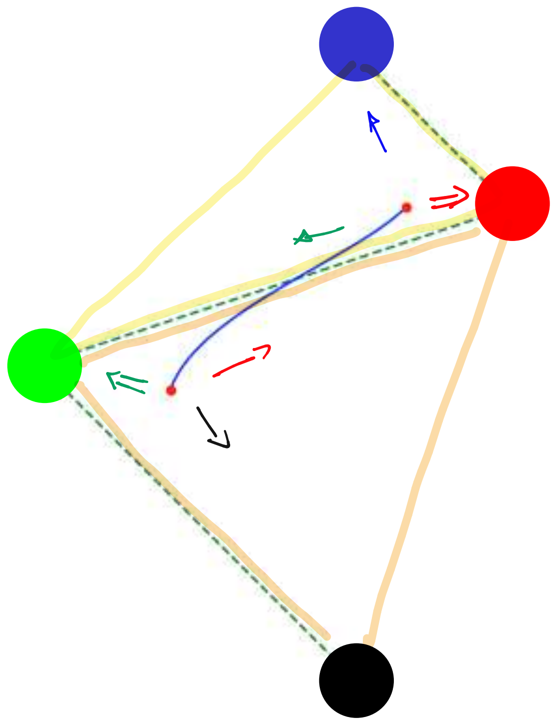
Par contre, il n'y a aucun système d'équations à résoudre !

Courbe de Bezier



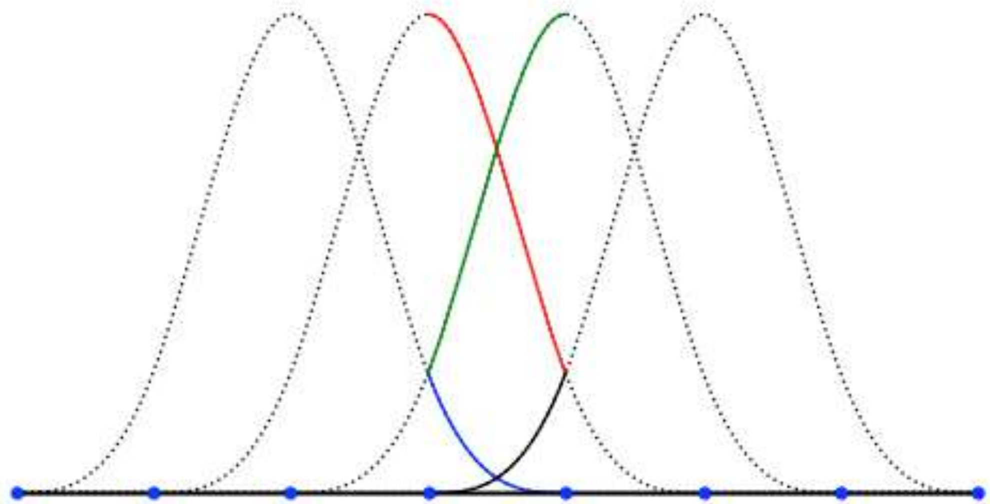


Courbe B-spline



$$\left\{ \begin{aligned} x^h(t) &= \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\; X_i \\ y^h(t) &= \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\; Y_i \end{aligned} \right.$$

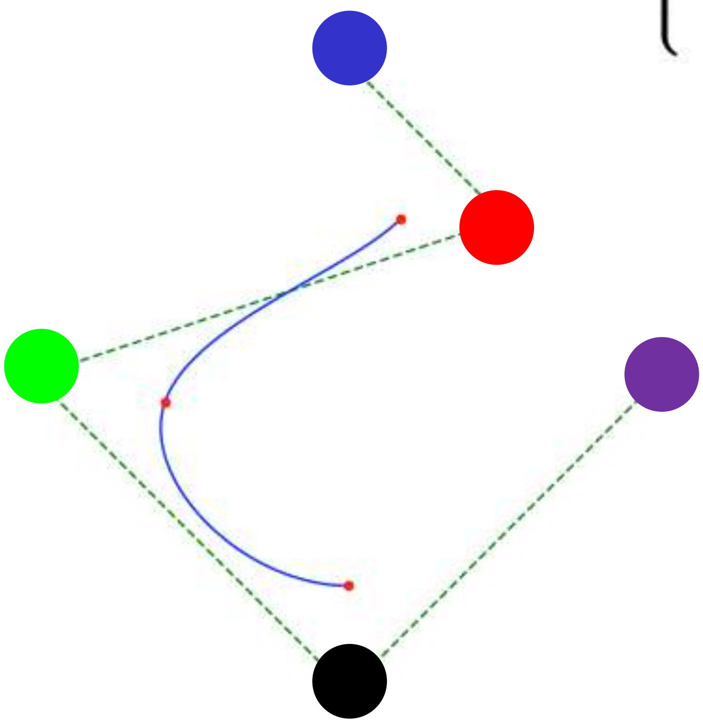
$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

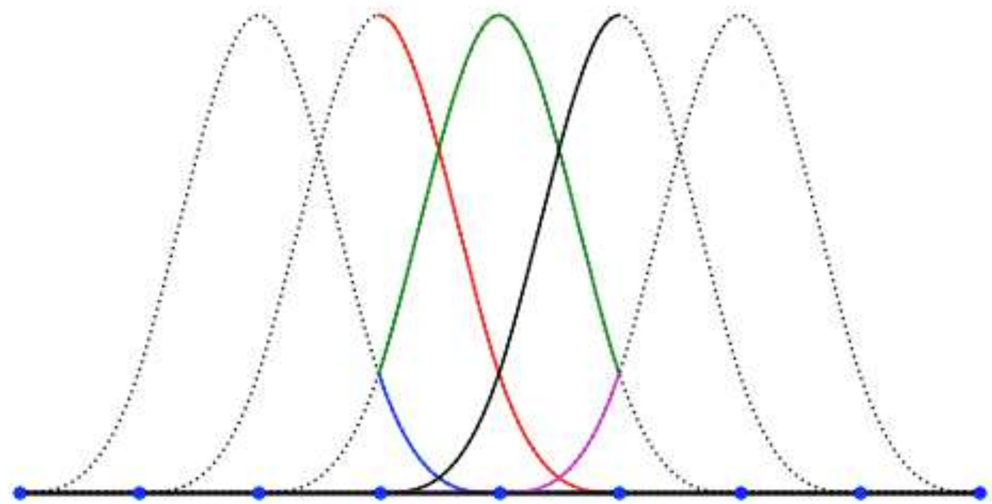


Courbe B-spline

$$\begin{cases} x^h(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\ X_i \\ y^h(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\ Y_i \end{cases}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

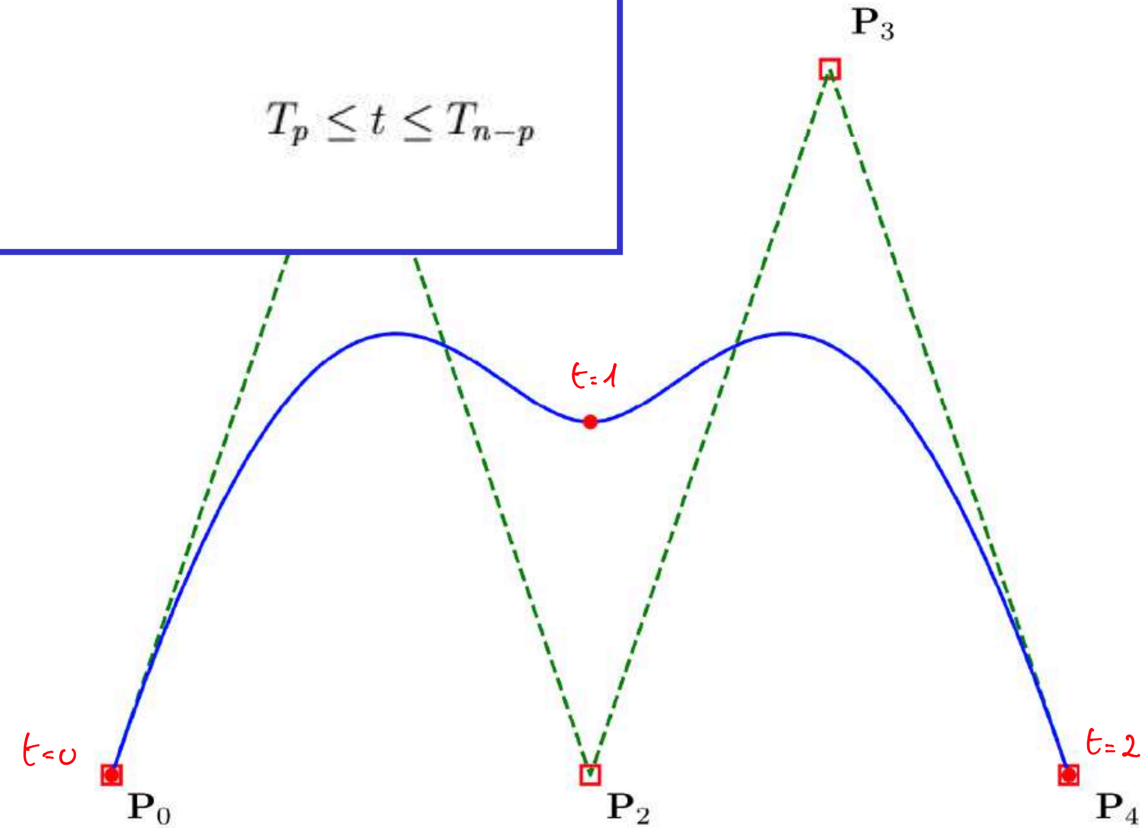


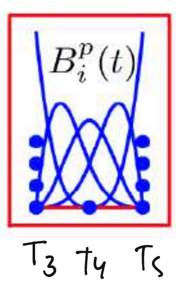


En posant $\mathbf{u}^h(t) = (x^h(t), y^h(t))$ et $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i)$,

$$\mathbf{u}^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t)\ \mathbf{P}_i \qquad\qquad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

B-splines



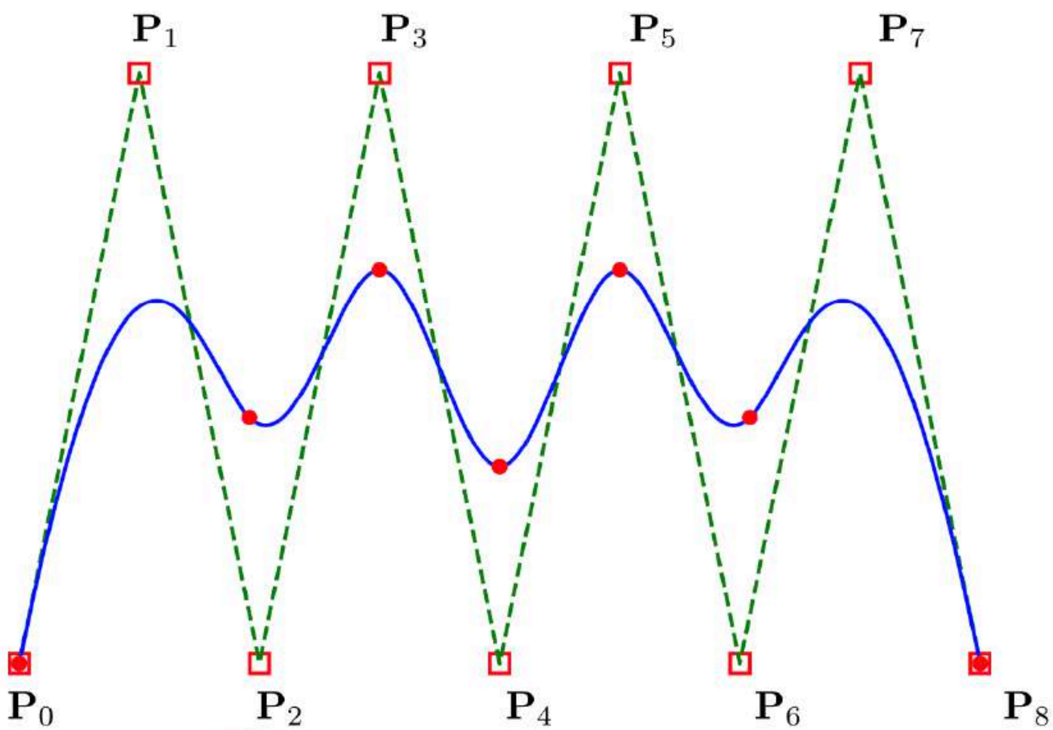


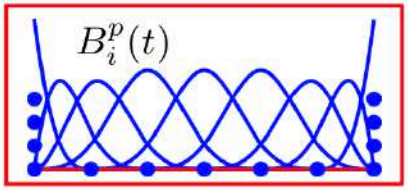
$\quad\;\; T_0\ T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5$

$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2)$

$\mathbf{P} = \{(0,0); (1,3); (2,0); (3,3); (4,0)\}$

En général, on met des nœuds multiples aux extrémités…

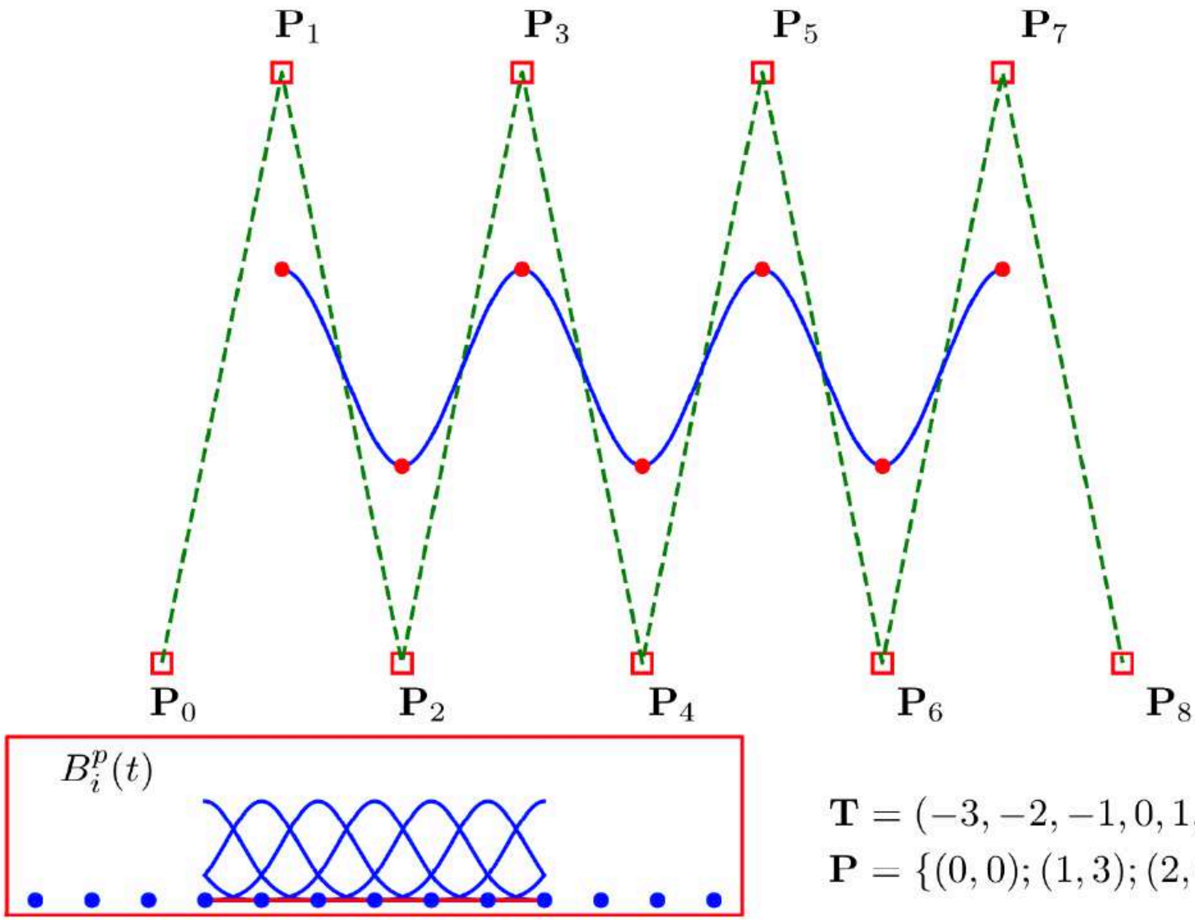




$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$

$\mathbf{P} = \{(0, 0); (1, 3); (2, 0); (3, 3); (4, 0); (5, 3); (6, 0); (7, 3); (8, 0)\}$

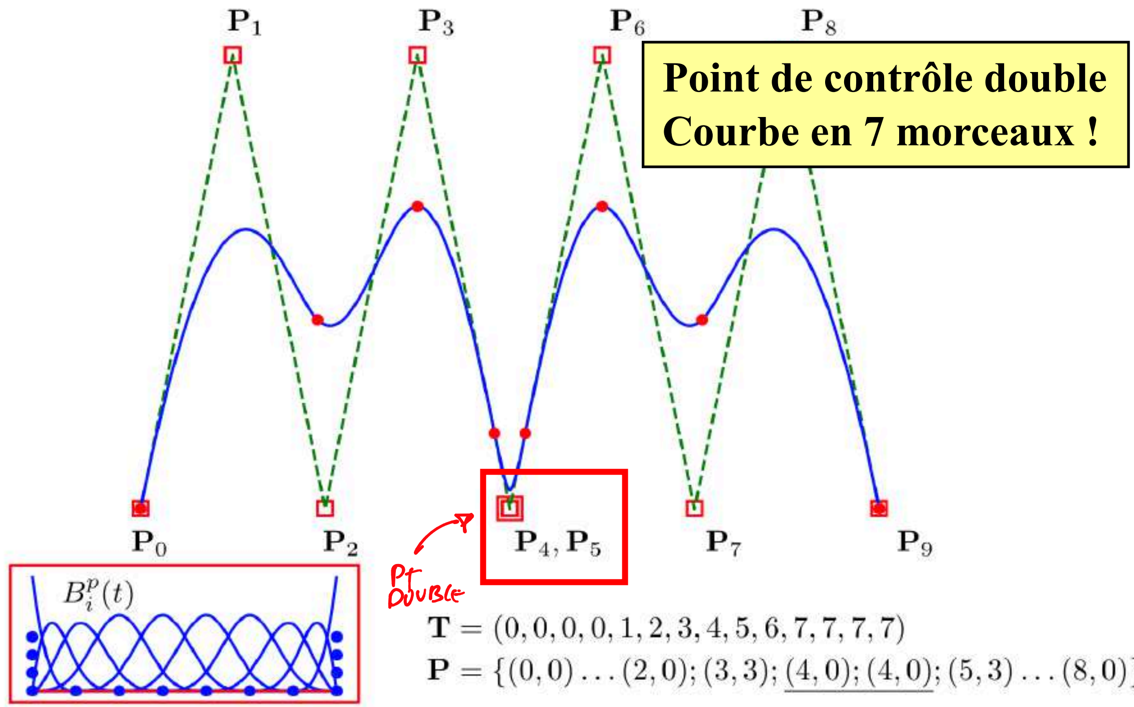
… mais ce n'est pas obligatoire !



$\mathbf{T} = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$

$\mathbf{P} = \{(0,0); (1,3); (2,0); \ldots; (7,3); (8,0)\}$

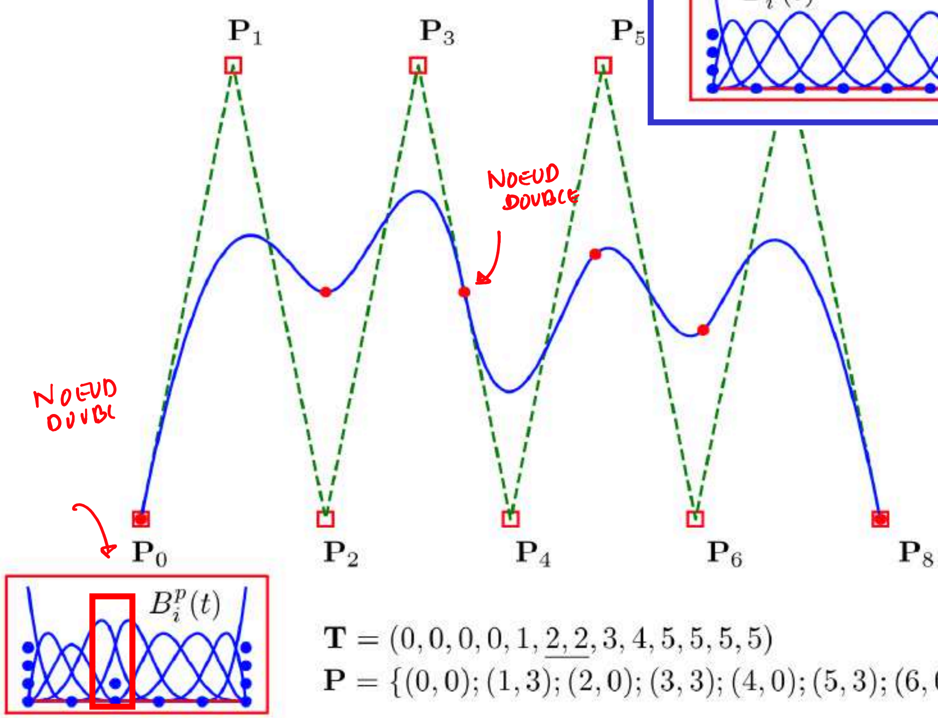
Nœuds ou points doubles !



Point de contrôle double
Courbe en 7 morceaux !

$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7)$

$\mathbf{P} = \{(0,0) \ldots (2,0); (3,3); \underline{(4,0); (4,0)}; (5,3) \ldots (8,0)\}$



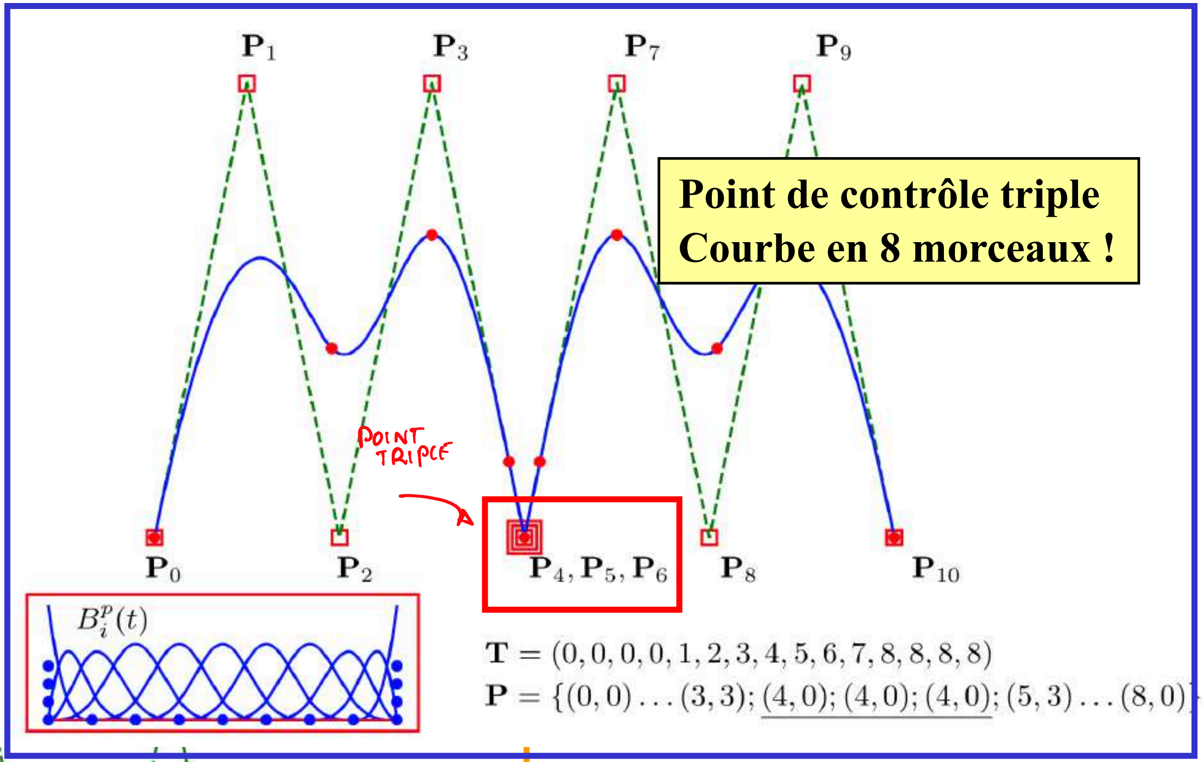
$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, \underline{2, 2}, 3, 4, 5, 5, 5, 5)$

$\mathbf{P} = \{(0,0); (1,3); (2,0); (3,3); (4,0); (5,3); (6,0); (7,3); (8,0)\}$

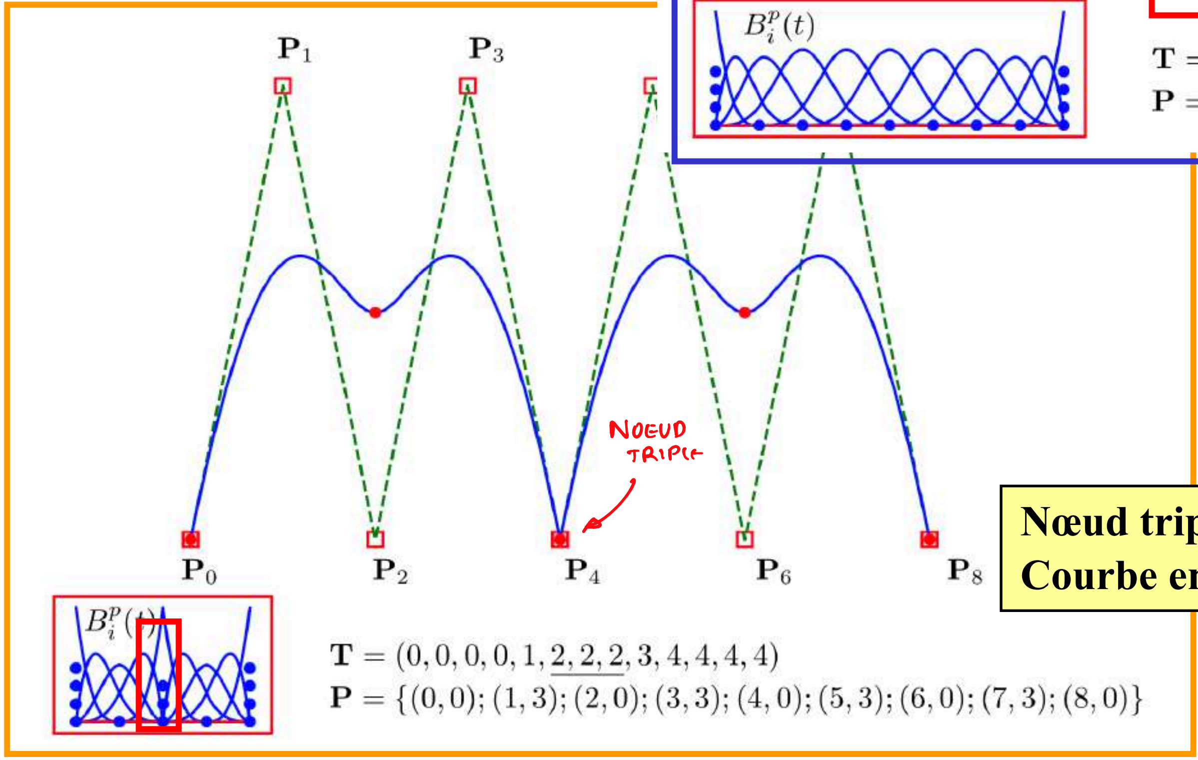
Nœud double
Courbe en 5 morceaux !

Nœuds ou points multiples ?
Effets semblables mais pas identiques !

Nœuds ou points triples !



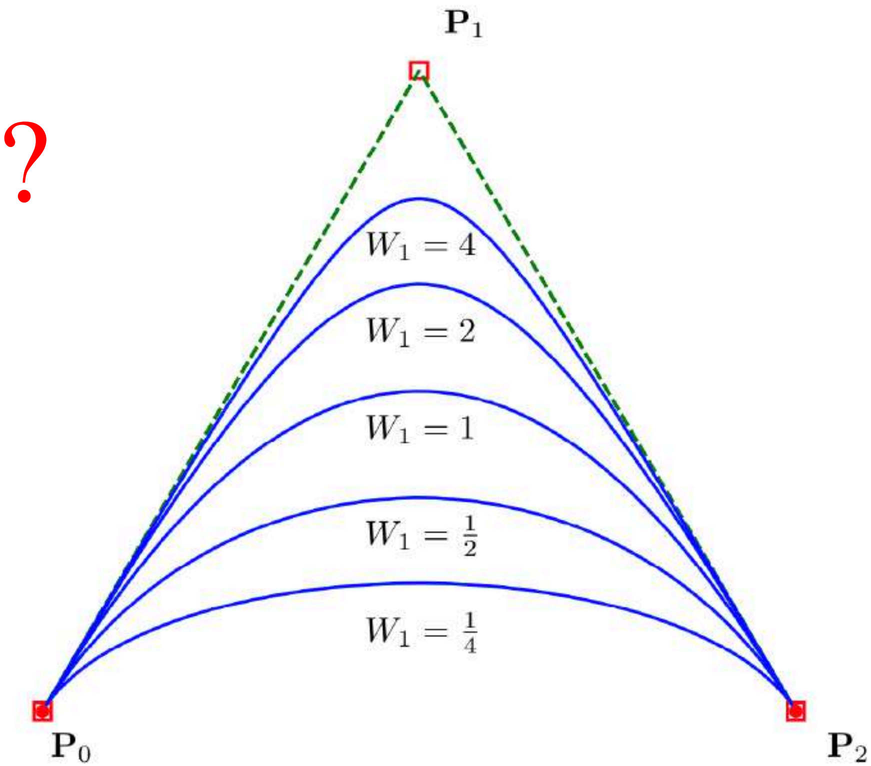
Travailler avec les nœuds est moins intuitif, mais plus efficace…

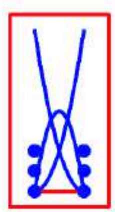


Et les NURBS ?

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t)\ \mathbf{P}_i}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$





$B_i^p(t)$

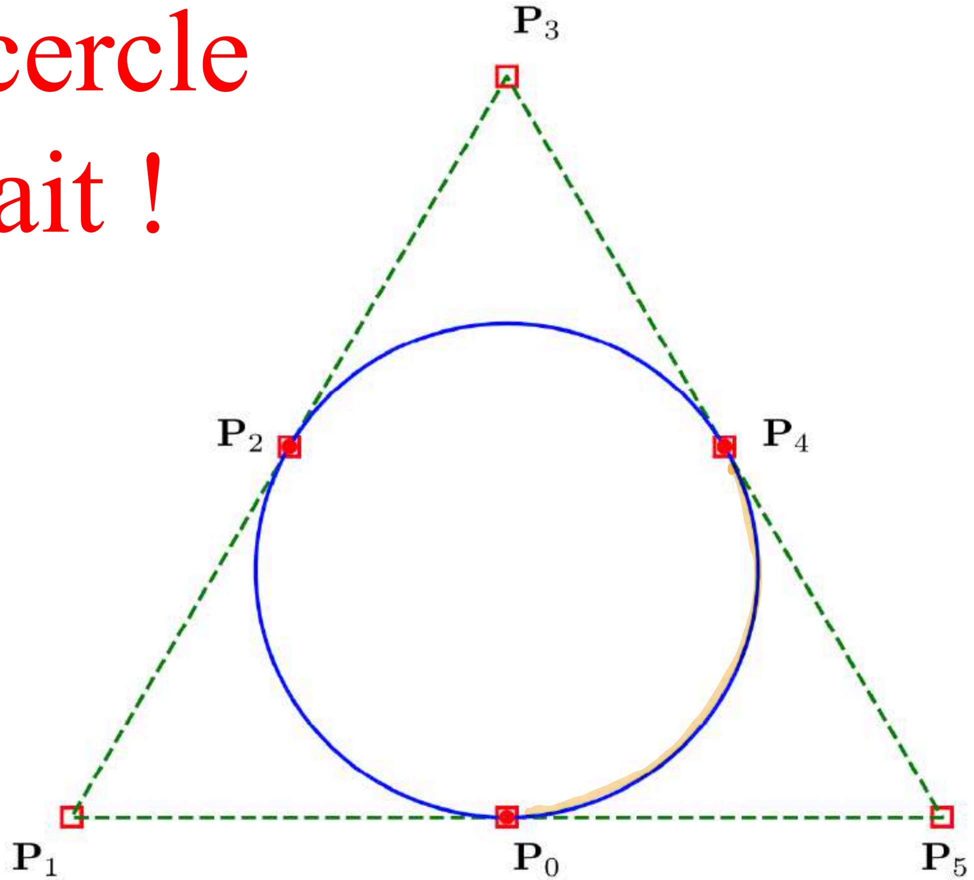
$$\mathbf{T} = (0,0,0,1,1,1)$$
$$\mathbf{W} = (1, W_1, 1)$$
$$\mathbf{P} = \{(0,0); (1,\sqrt{3}); (2,0)\}$$

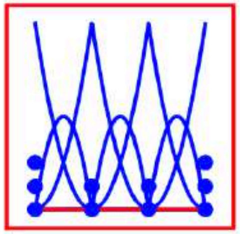
NURBS

Non-Uniform Rational B-Splines

Permet de représenter exactement toutes les coniques (ellipse, parabole, hyperbole)

Un cercle parfait !





$B_i^p(t)$

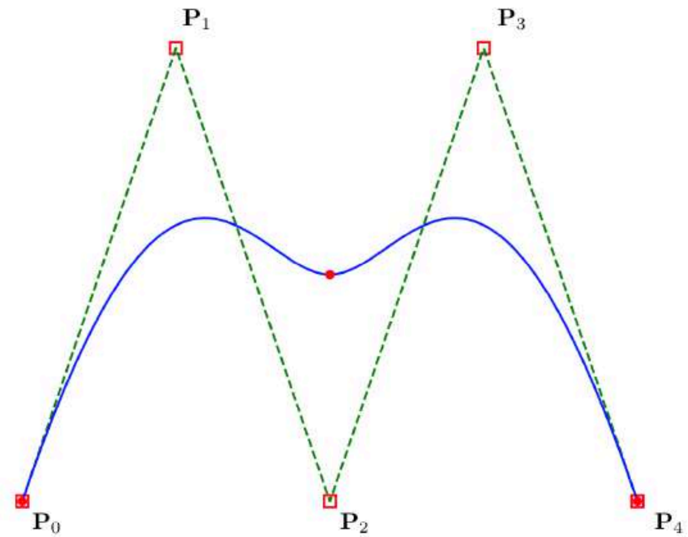
$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$

$\mathbf{W} = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1)$

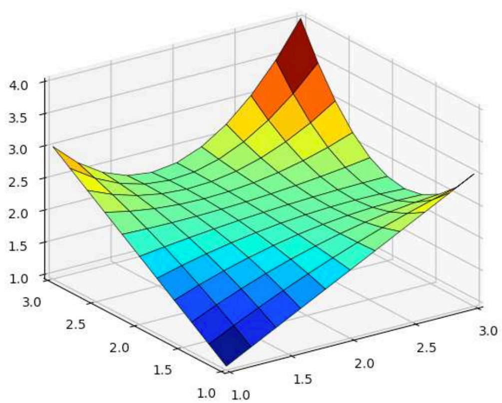
$\mathbf{P} = \{(1, 0); (0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (1, \sqrt{3}); (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (2, 0); (1, 0)\}$

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t)\ \mathbf{P}_i}{\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$



Généralisation à des surfaces

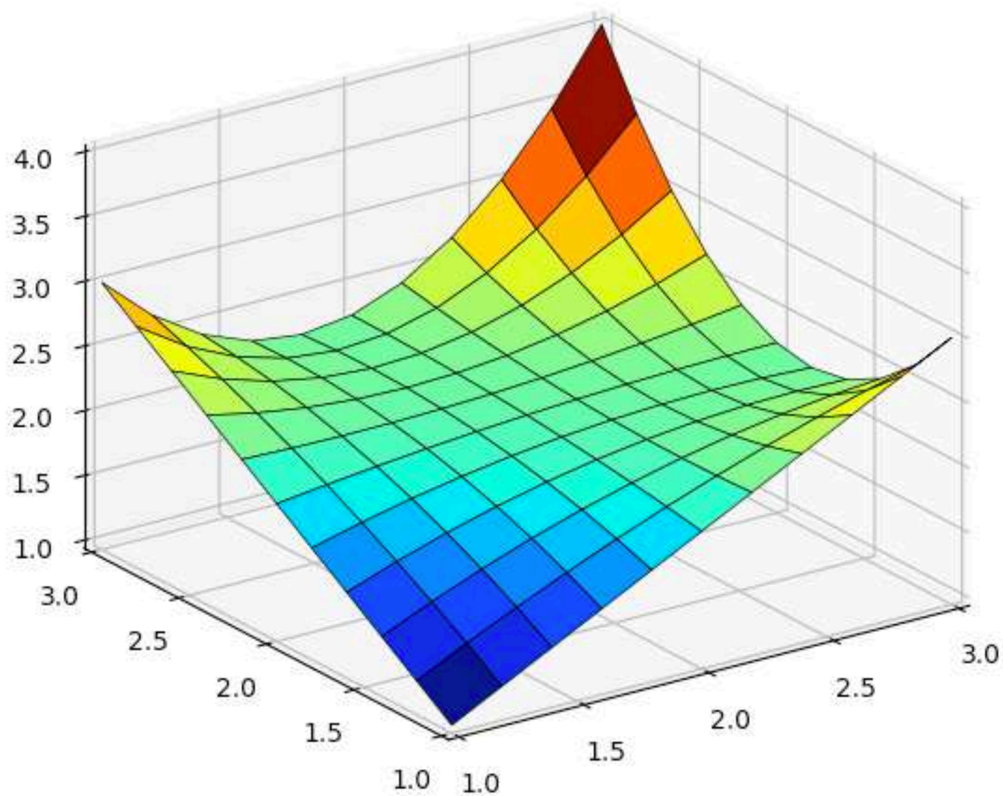


$$\mathbf{u}^h(t,s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1}\sum_{j=0}^{m-q-1} W_{ij} B_i^p(t) B_j^q(s)\ \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{k=0}^{n-p-1}\sum_{l=0}^{m-q-1} W_{kl} B_k^p(t) B_l^q(s)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$
$$S_q \leq s \leq S_{m-q}$$

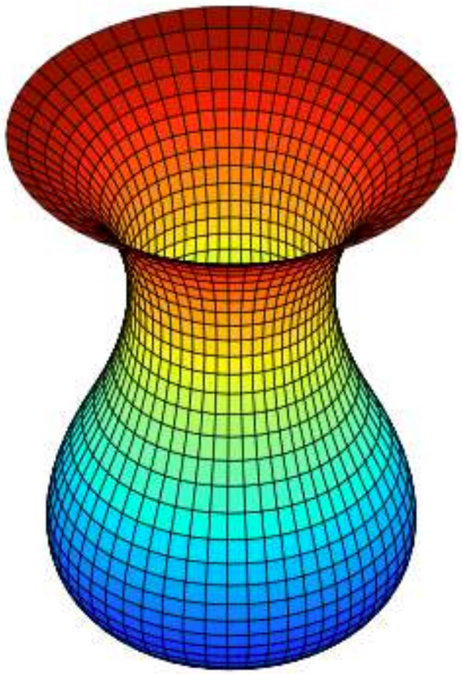
$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1,1,1) & (2,1,2) & (3,1,3) \\ (1,2,2) & (2,2,3) & (3,2,1) \\ (1,3,3) & (2,3,1) & (3,3,4) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

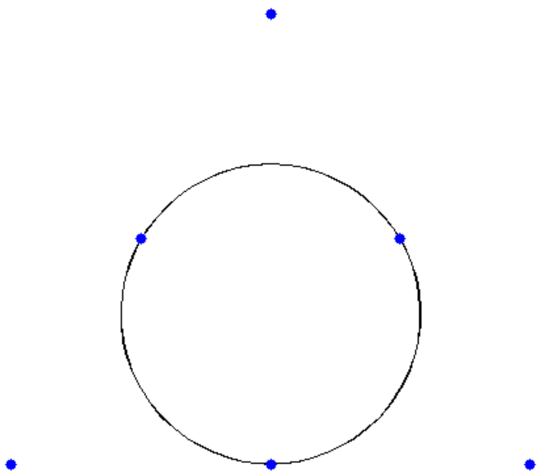


Exemple

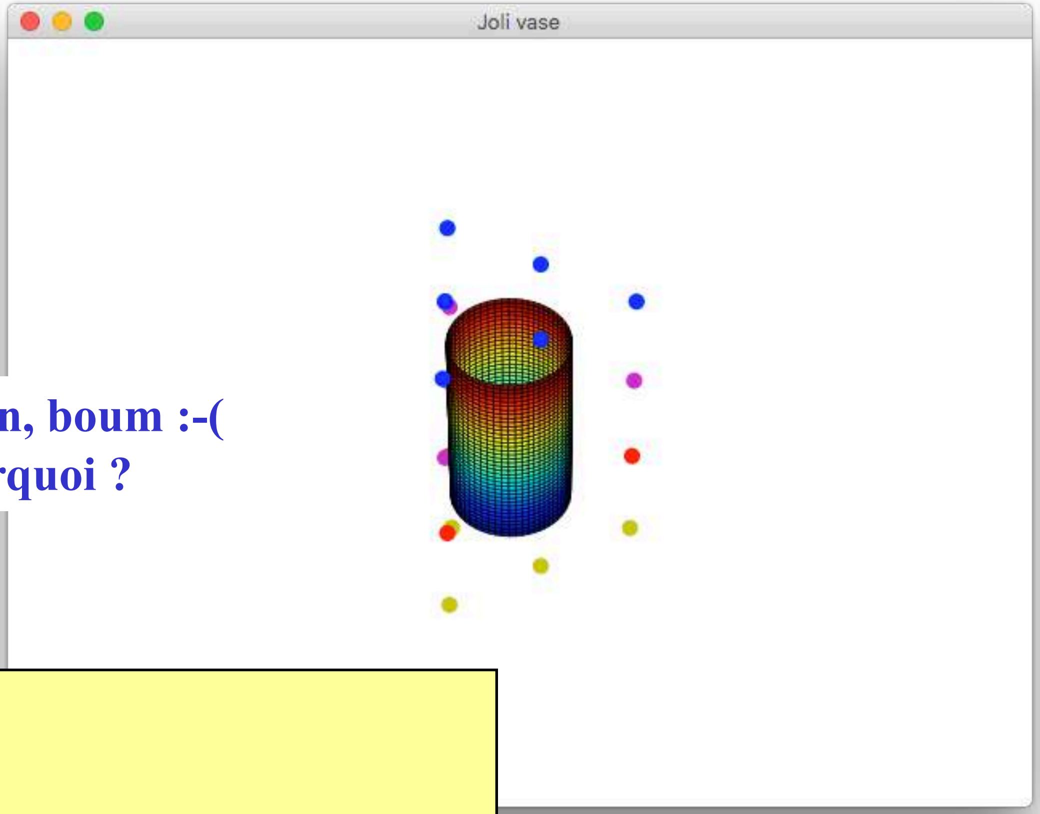
Un exemple



Potiche
avec
seulement
24 points
de contrôle



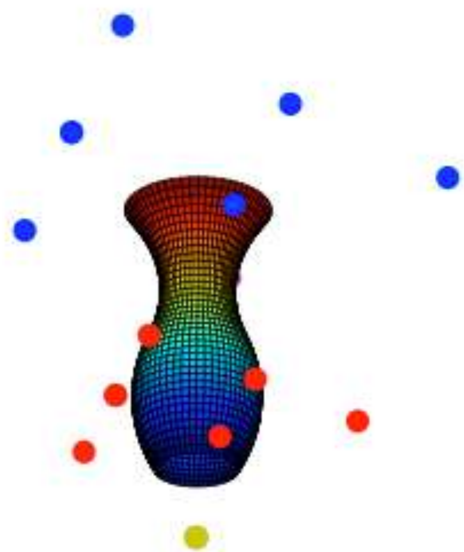
Commençons par un cylindre…

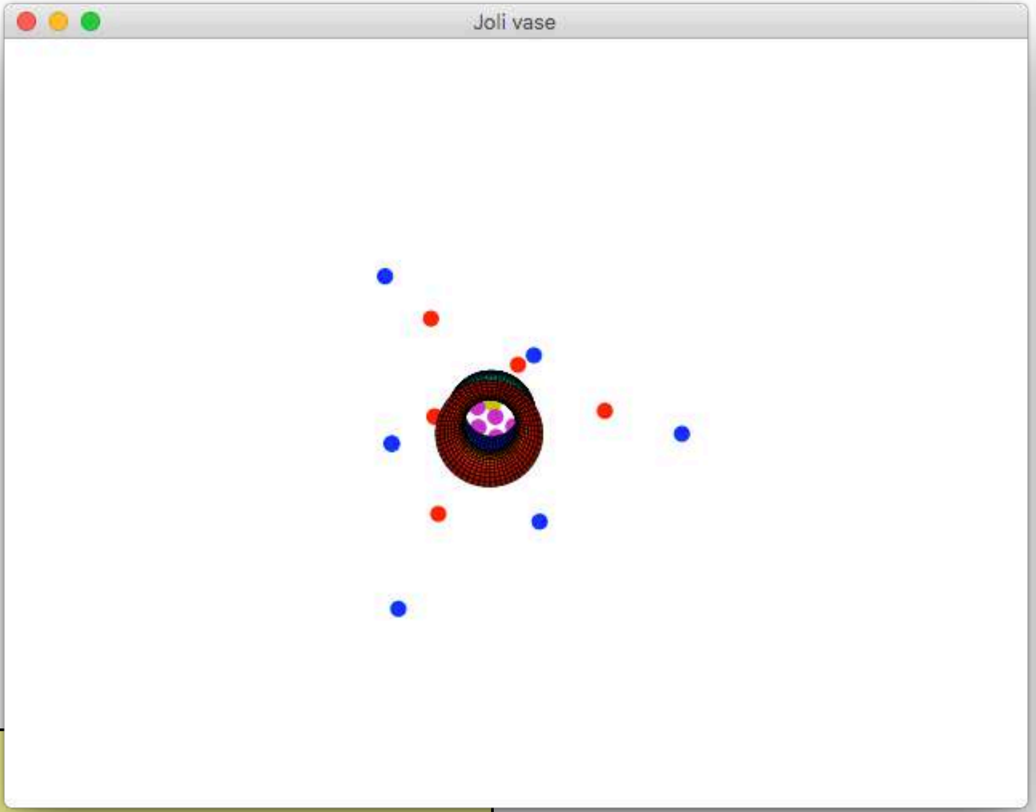


Sinon, boum :-(
Pourquoi ?

```
T = [-2,-1,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [5,5,5,5]
H = [0,5,10,15]
```

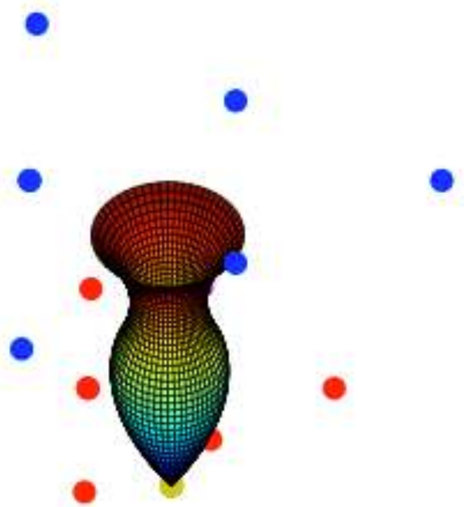
Modifions les rayons…

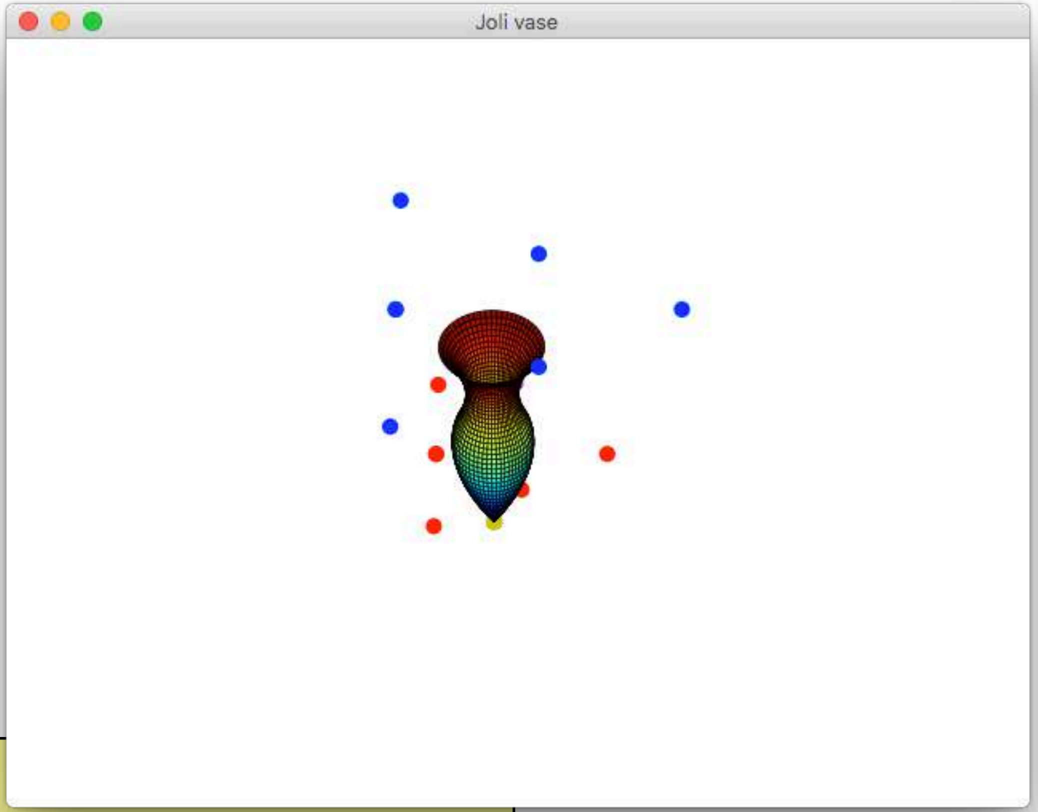





```
T = [-2,-1,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,5,10,15]
```

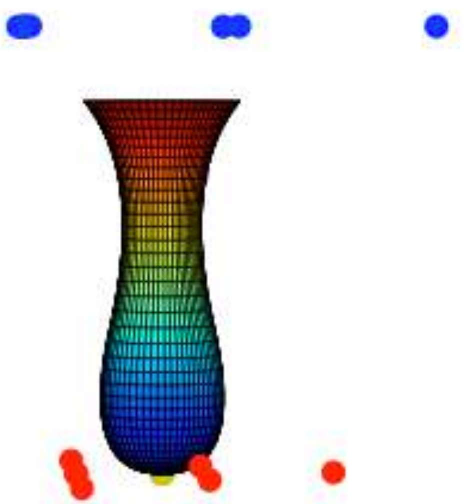
Refermons le fond du vase…

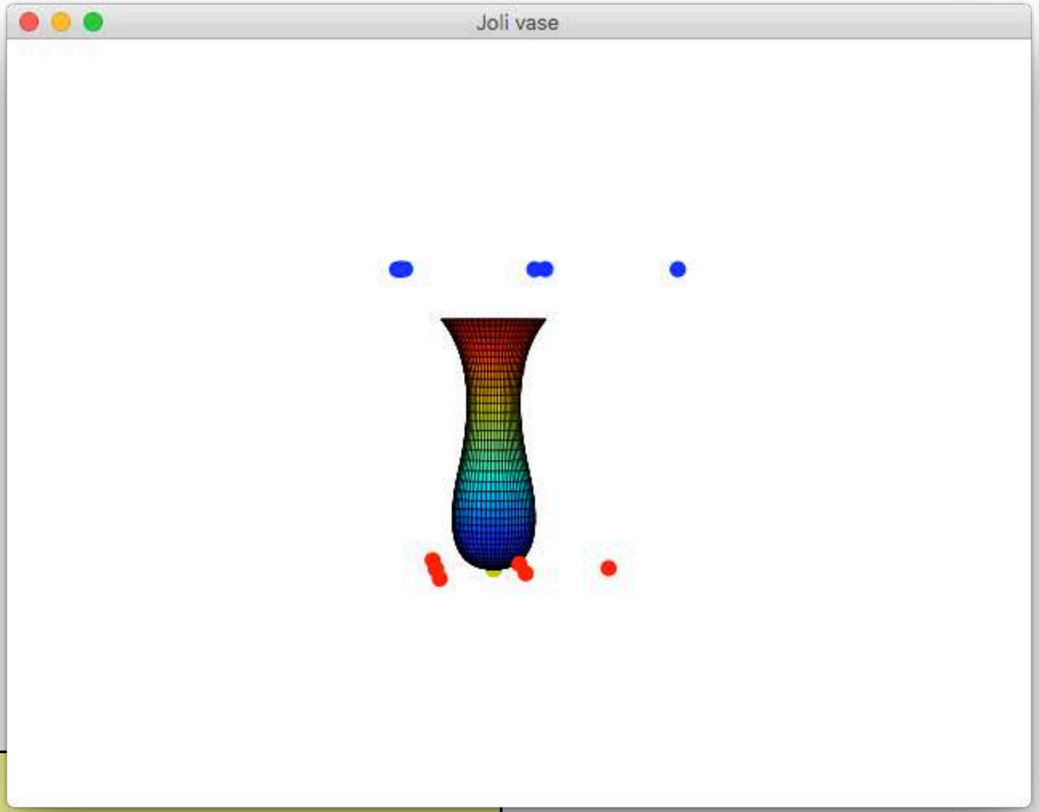





```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,5,10,15]
```

Rendons le fond plat…

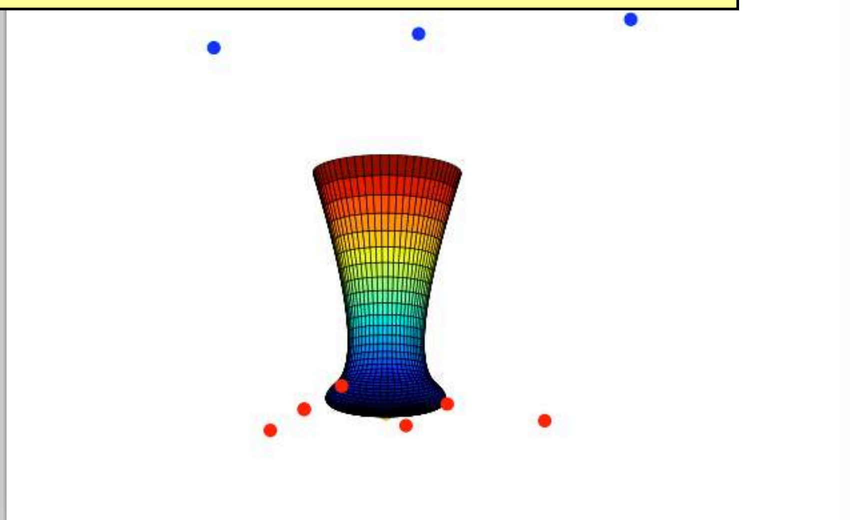


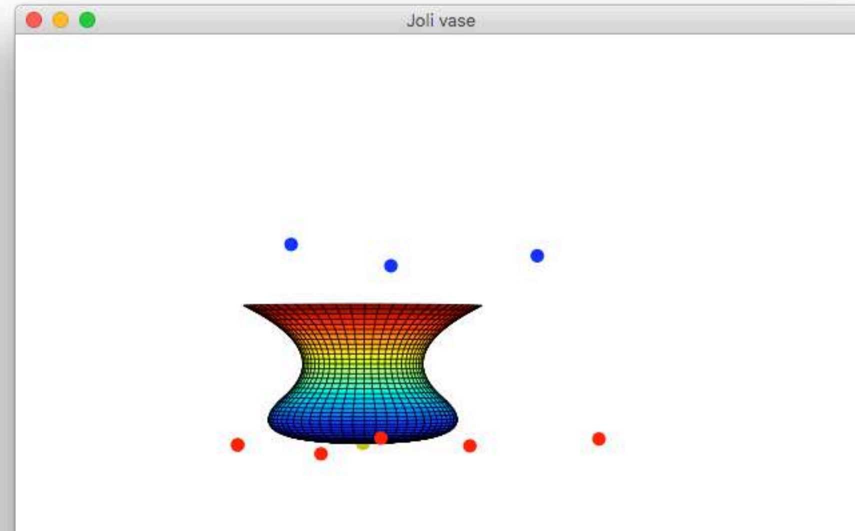



```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,0,10,15]
```

Et d’autres potjes ?

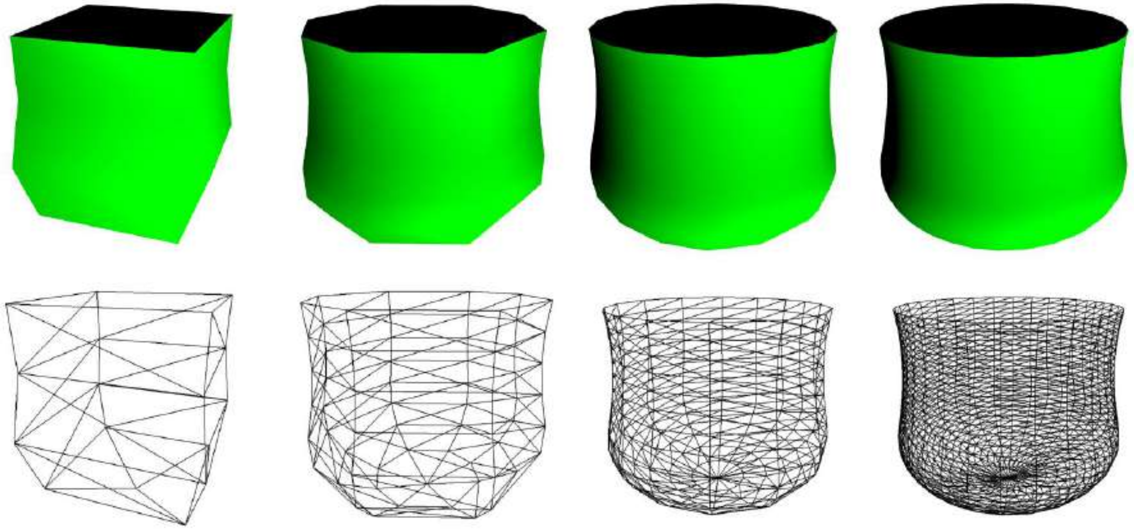
```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,0,2,15]
```






```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,0,2,4]
```

Représentation adéquate de potiches par des facettes planes…

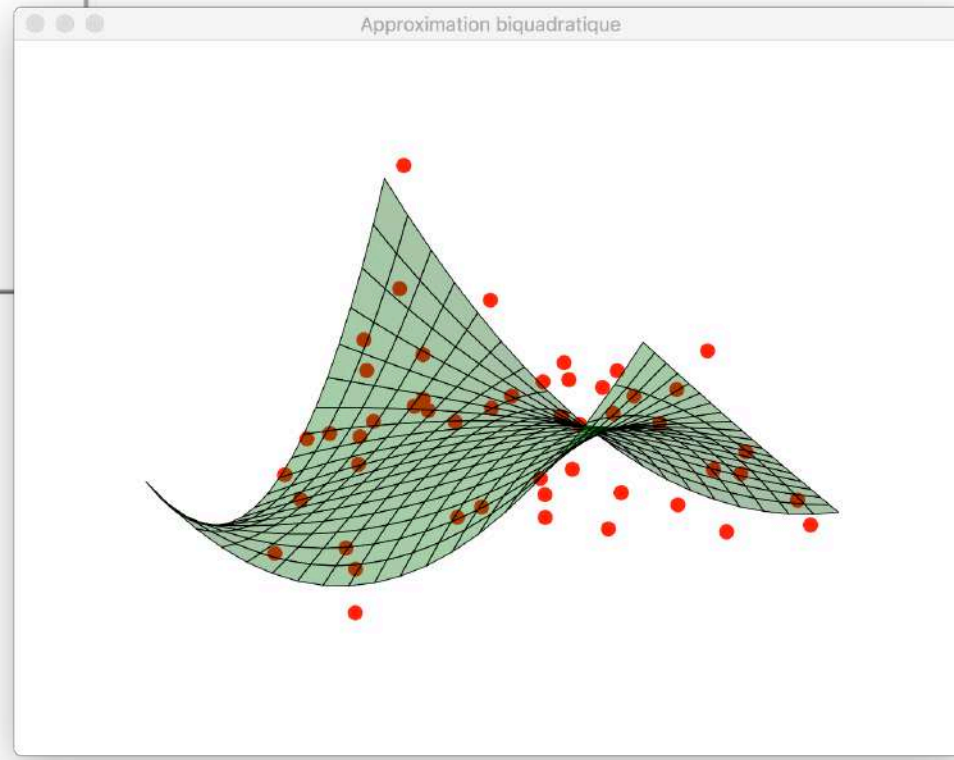


2 triangles par patch **128 triangles par patch**

Python 3 for dummies !

Trouver $(a_0, \ldots, a_8) \in \mathbb{R}^9$ tels que

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m} \left(U_i - \sum_{j=0}^{8} \phi_j(X_i, Y_i)\ a_j \right)^2}_{J(a_0, \ldots, a_8)} \quad \text{soit minimal.}$$



Date limite pour le problème : 28/Feb/2020 23:59:59
et nous sommes aujourd'hui : 26/Feb/2020 09:53:30...