II. tétel - Logika

Az informatika logikai alapjai. Az elsőrendű matematikai logikai nyelv. A nyelv interpretációja, formulák igazságértéke az interpretációban adott változókiértékelés mellett. Logikai törvény, logikai következmény. Logikai ekvivalencia, normálformák. Kalkulusok (Gentzen-kalkulus).

A szerkesztői megjegyzéseket szürke, dőlt betűkkel közlöm.

Általános forrás: *[Logika]*

Tartalomjegyzék

Irodalomjegyzék

[Logika]: Várterész Magda, Az informatika logikai alapjai előadások, 2006/07-I, http://www.inf.unideb.hu/~varteres/logikauj/Logikafo.pdf
[HuWiki:Ítéletkalk]: Ítéletkalkulus, http://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dt%C3%A9letlogika
[HuWiki:Elsőrendű]: Elsőrendű logika, http://hu.wikipedia.org/wiki/Els%C5%91rend %C5%B1_logika
[EnWiki:SequentCalc]: Sequent calculus, http://en.wikipedia.org/wiki/Sequent_calculus

1. Az informatika logikai alapjai

A logika feladata: a *premisszák* (állítások) és a *konklúzió* (következtetés) közötti összefüggés tanulmányozása. Egy kijelentő mondat **állítás**, ha egyértelmű információt hordoz és igazságértékkel bír. Egy állítás igaz, ha az információtartalma a valóságnak megfelelő, egyébként hamis, függetlenül tudásunktól.

Arisztotelész alapelvei:

- Az ellentmondástalanság elve: egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is.
- A kizárt harmadik elve: nincs olyan állítás, amely sem igaz, sem hamis.

A következtetési séma **helyessége**:

- Helyes a következtetési séma, ha igaz premisszák esetén a konklúzió csak igaz lehet.
- Helytelen a következtetési séma, ha igaz premisszák esetén is megtörténhet, hogy a konklúzió hamis.

Egy következtetés helyes, ha helyes következtetési séma alapján hajtjuk végre. Tehát a következtetés helyessége független a benne szereplő állítások természetes nyelvi jelentésétől, csupán az úgynevezett logikai szavak jelentésétől, és logikai szavak meghatározta szerkezettől függ.

Logikai szavak és jelentésük:

Jelentés	Szó	Jel
Negáció	nem	$\neg$
Konjunkció	és	$\wedge$
Diszjunkció	vagy	$\vee$
Implikáció	ha ... akkor	$\supset$
Univerzális kvantor	minden	$\forall$
Egzisztenciális kvantor	van	$\exists$

*Tipp: A kon- azt jelenti, hogy együtt, a disz- pedig azt, hogy külön. Konjunkciónál A-nak és B-nek *együtt* kell teljesülnie, hogy igazat kapjunk, tehát mindkettőnek. Diszjunkciónál *külön* is teljesítik a feltételt (így könnyebb megjegyezni, hogy melyik az és és melyik a vagy, ha nehezen menne).*

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Azért van szüksége a logikának saját nyelvre, mert így nem tartozik egyetlen természetes nyelvhez sem, valamint így egyértelmű nyelvtani rendszerrel rendelkezik.

Bár ezt nem írja a tárgy fóliája sehol, de az átláthatóság kedvéért: az ítéletlogika[HuWiki:Ítéletkalk] (vagy ítéletkalkulus) a logika egyik fajtája, amelynél csak igaz vagy hamis értékeket vehetnek fel a *változók. Ennek az egyik ága az elsőrendű logika[HuWiki:Elsőrendű] (a magasabb rendű logikáknál a kvantálásnál bonyolultabb műveleteket is lehet használni). A tárgy végén röviden vett Gentzen-kalkulus (a szekvent kalkulusok[EnWiki:SequentCalc] egyik formája) pedig a levezetésekhez szükséges.*

1.1. Az ítéletlogika szintaxisa

Az ítéletlogika nyelvének **ábécéje** az alábbi szimbólumokat tartalmazza:

- logikai összekötőjelek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$
- elválasztójelek: a nyitó- és záró-zárójel,
- ítéletváltozók: X , Y , Z , ... betűk, esetleg indexelve.

Ítéletlogikai formula:

1. Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula, ezeket a formulákat atomi vagy prímformuláknak is nevezzük.
2. Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ (negált A) is az.
3. Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor
   - $(A \wedge B)$ (A konjunkció B),
   - $(A \vee B)$ (A diszjunkció B) és
   - $(A \supset B)$ (A implikáció B)

   is ítéletlogikai formulák.
4. Minden ítéletlogikai formula az 1–3. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az ítéletlogikai formulák halmaza az ítéletlogika nyelve. Jelölése: $\mathcal{L}_0$.

Szerkezeti indukció elve:

Minden ítéletlogikai formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

- (alaplépés:) ha minden atomi formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, továbbá
- (indukciós lépések:)
  1. ha az A ítéletlogikai formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú és
  2. ha az A és a B ítéletlogikai formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.

Az egyértelmű elemzés tétele:

Minden ítéletlogikai formulára a következő állítások közül pontosan egy igaz:

1. A formula atomi formula.
2. A formula egy egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formula negáltja.
3. A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák konjunkciója.
4. A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák diszjunkciója.
5. A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák implikációja.

Közvetlen részformula:

Az ítéletlogika nyelvében

1. egyetlen atomi formulának sincs közvetlen részformulája,
2. a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula,
3. az $(A \circ B)$ formula (ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$ *a továbbiakban is*) közvetlen részformulái az A és a B formulák. A az $(A \circ B)$ formula bal oldali, B a jobb oldali közvetlen részformulája.

Részformula:

Legyen A ítéletlogikai formula. Az A formula részformuláinak halmaza a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme A, és
2. ha a C formula eleme, akkor C közvetlen részformulái is elemei.

A szerkezeti rekurzió elve:

Egy az ítéletlogikai nyelvén értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adtunk meg, ha

- (alaplépés:) értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin és megmondjuk, hogy $\mathcal{F}$
- (indukciós lépések:)
  1. $\neg A$ -n felvett értéke az A -n felvett értékéből, illetve
  2. $(A \circ B)$ -n felvett értéke az A -n és a B -n felvett értékekből hogyan származtatható.

Definiáljuk az $\ell : \mathcal{L}_0 \rightarrow N_0$ *(írott kis L)* függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $\ell(A)$ legyen 0,
2. $\ell(\neg A)$ legyen $\ell(A)+1$,
3. $\ell(A \circ B)$ pedig legyen $\ell(A)+\ell(B)+1$.

Ekkor egy $A \in \mathcal{L}_0$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket a formula **logikai összetettségének** nevezzük.

A logikai összetettség gyakorlatilag a logikai összekötőjelek számát határozza meg.

Egy formulában egy **logikai összekötőjel hatásköre** a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai összekötőjel is előfordul.

Egy **formula fő logikai összekötőjele** az az összekötőjel, melynek hatásköre maga a formula.

A formulák leírásakor szokásos rövidítések:

- formula-kombinációk helyett speciális jelölések, (példa: $(A \equiv B) \leftrightharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$)
- külső zárójelek elhagyása,
- logikai jelek prioritása csökkenő sorrendben:
  1. $\neg$,
  2. $\vee$, $\wedge$,
  3. $\supset$.

1.2. Az ítéletlogika szemantikája

Az $\{i, h\}$ halmazon értelmezett fontos **logikai műveletek**:

A	B	$\dot{\neg} A$	$A \dot{\wedge} B$	$A \dot{\vee} B$	$A \dot{\supset} B$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Jelöljük most az ítéletváltozók halmazát V_v -vel.

Az $\mathcal{L}_0$ nyelv **interpretációján** egy $\mathcal{I} : V_v \rightarrow \{i, h\}$ *(írott nagy I)* függvényt értünk.

Az ítéletlogikai formulák szemantikája:

Egy C ítéletlogikai formulához $\mathcal{I}$ -ben az alábbi – $|C|^{\mathcal{I}}$ -vel jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|A|^{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \mathcal{I}(A)$, ahol A atomi formula, azaz ítéletváltozó
2. $|\neg A|^{\mathcal{I}} \leftrightharpoons \dot{\neg} |A|^{\mathcal{I}}$,
3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I}} \leftrightharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I}}$,
4. $|A \vee B|^{\mathcal{I}} \leftrightharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I}}$,
5. $|A \supset B|^{\mathcal{I}} \leftrightharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I}}$.

Itt szerintem a pont nélküli műveletek jelölik a szintaktikai műveleteket, a pontozottak pedig a szemantikai párjukat. Ezt szerintem úgy kell felfogni, mint ha a szintaktikai formula egyetlen sztring lenne, a szemantikai műveletekkel összekötött formulák meg mintha egy egy vagy két sztring argumentummal ellátott igazságértéket visszaadó függvényt jelentenének.

Legyen S ítéletváltozók egy halmaza. Ha két különböző interpretáció ugyanazokat az igazságértékeket rendeli az S -beli ítéletváltozókhoz, akkor minden olyan formulának, amelyben csak S -beli ítéletváltozók fordulnak elő, mindkét interpretációban ugyanaz lesz az igazságértéke.

1.3. Ítéletlogikai törvények

Egy A ítéletlogikai formula **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja, hogy $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Az ilyen interpretációkat A **modelljeinek** nevezzük. Ha nincs A -nak modellje, az A formula **kielégíthetetlen**.

Az A formula **ítéletlogikai törvény** vagy másképp **tautológia**, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjára $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Jelölése: $\models_0 A$.

Azt mondjuk, hogy az A és B ítéletlogikai formulák **tautologikusan ekvivalensek**, és ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim_0 B$, ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban $|A|^{\mathcal{I}} = |B|^{\mathcal{I}}$.

Minden A , B , C ítéletlogikai formula esetén:

- reflexív: $A \sim_0 A$,
- szimmetrikus: ha $A \sim_0 B$, akkor $B \sim_. A$,
- tranzitív: ha $A \sim_0 B$ és $B \sim_0 C$, akkor $A \sim_. C$,

azaz az ítéletlogikai formulák közötti binér $\sim_0$ reláció **ekvivalenciareláció**.

1.4. Formulák normálformái

- Egy atomi formulát vagy negáltját **literálnak** fogjuk nevezni.
- **Elemi konjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi konjunkció és egy literál konjunkciója.

  Például: $((A \wedge \neg B) \wedge C) \wedge \neg D$ *, tehát:* $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$ *, azaz ”sok és”.*
- **Elemi diszjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi diszjunkció és egy literál diszjunkciója.

  Például: $((A \vee B) \vee \neg C) \vee D$ *, tehát:* $A \vee B \vee \neg C \vee D$ *, azaz ”sok vagy”.*
- **<u>Konjunktív normálforma</u>**
  1. egy elemi diszjunkció,
  2. vagy egy konjunktív normálforma és egy elemi diszjunkció konjunkciója.

  ”Sok vagy összeéselése”.
- **<u>Diszjunktív normálforma</u>**
  1. egy elemi konjunkció,
  2. vagy egy diszjunktív normálforma és egy elemi konjunkció diszjunkciója.

  ”Sok és összevagyolása”.

Minden ítéletlogikai formulához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.

- Jelek közötti összefüggések:
  - $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$
  - $A \supset B \sim \neg A \vee B$
- Kétszeres tagadás:
  - $\neg\neg A \sim A$
- De Morgan törvényei:
  - $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
  - $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
- Disztributivitás:
  - $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A normálforma konstrukciójának lépései:

1. a logikai jelek közötti összefüggések alapján az implikációkat eltávolítjuk,

2. De Morgan törvényeivel elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon,
3. a disztributivitást felhasználva elérjük, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást,
4. esetleg egyszerűsítünk.

1.5. Szemantikus következményfogalom

Legyen Γ *(nagy gamma)* ítéletlogikai formulák tetszőleges halmaza és B egy tetszőleges formula.

Azt mondjuk, hogy a B formula **tautologikus következménye** a Γ formulahalmaznak (vagy a Γ -beli formuláknak), ha minden olyan interpretációban, melyben a Γ -beli formulák mindegyike igaz, ezekben a B formula is igaz.

A Γ -beli formulák a **feltételformulák** (**premisszák**), a B formula a **következményformula** (**konklúzió**).

Jelölése: $\Gamma \models_0 B$.

Legyenek A_1 , A_2 , ..., A_n , B ($n \geq 1$) tetszőleges ítéletlogikai formulák. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor,

- ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.
- ha $\models_0 A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$.

Az első azt mondja, hogy nincs olyan eset, hogy az igaz feltételek mellett a következmény hamis (indirekt bizonyítás), a második pedig azt, hogy ha a feltételek igazak, akkor a következménynek is igaznak kell lennie (direkt bizonyítás).

Legyen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula. Az $(\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, B)$ párt **következtetésformának** nevezzük. Az $(\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, B)$ pár **helyes következtetésforma**, ha $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models_0 B$.

2. Az elsőrendű matematikai logikai nyelv

2.1. Az elsőrendű logikai nyelvek szintaxisa

Egy elsőrendű logikai nyelv **ábécéje** logikai és logikán kívüli szimbólumokat, továbbá elválasztójeleket tartalmaz.

A logikán kívüli szimbólumhalmaz megadható $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ alakban, ahol

1. Srt nemüres halmaz, elemei **fajtákat** szimbolizálnak,
2. Pr nemüres halmaz, elemei **predikátumszimbólumok**,
3. az Fn halmaz elemei **függvényszimbólumok**,
4. $Cnst$ pedig a **konstansszimbólumok** halmaza.

Az $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ ábécé szignatúrája egy $(\nu_{1,} \nu_{2,} \nu_3)$ *(kis nű)* hármas,

ahol

1. minden $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz ν_1 a **predikátumszimbólum alakját**, azaz a $(\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k)$ fajtasorozatot,
2. minden $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz ν_2 a **függvényszimbólum alakját**, azaz a $(\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k, \pi)$ fajtasorozatot és
3. minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz ν_3 a **konstansszimbólum fajtáját**, azaz (π) -t

rendel ($k > 0$ és $\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k, \pi \in Srt$).

Az Srt, az gondolom Sort, tehát fajta, a Cnst meg egyértelműen Const. Az Fn az Function, a Pr viszont nem tudom, hogy Procedure-nek elmegy-e, de gyakorlatilag felfoghatjuk őket így. A függvényszimbólumok pí típusú elemekből csinálnak pí típusúakat (például az Ar nyelvben az összeadás), a predikátumszimbólumok ("eljárások") pedig pí típusú elemekből csinálnak igaz/hamis értéket (például a Geom nyelvben a "pont az egyenesen van" predikátum). Így gyakorlatilag a függvényeken keresztül össze-vissza dolgozhatunk Srt-beli fajtákkal, de logikai formulában csak predikátumokon keresztül használhatjuk őket (annak nincs értelme, hogy "A és B vagy 12+3", de annak van, hogy "A és B vagy Páros(12+3)").

Logikai jelek:

- a logikai összekötőjelek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$
- a kvantorok: $\forall$, $\exists$
- a különböző fajtájú individuumváltozók.

Egy elsőrendű nyelv ábécéjében minden $\pi \in Srt$ fajtához szimbólumoknak megszámlálhatóan végtelen $v_1^{\pi}, v_2^{\pi}, \ldots$ rendszere tartozik, ezek a szimbólumok a π **fajtájú változók**.

Elválasztójelek a zárójelek: ( ) és a vessző: ,

Az elsőrendű nyelv termjei és formulái:

1. Minden $\pi \in Srt$ fajtájú változó és konstans π fajtájú term.
2. Ha az $f \in Fn$ függvényszimbólum $(\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú és $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ – rendre $\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k$ fajtájú – termek, akkor az $f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ szó egy π fajtájú term.
3. Minden term az 1–2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

4. Ha a $P \in Pr$ predikátumszimbólum $(\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k)$ alakú és $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ – rendre $\pi_{1,} \pi_{2,} \ldots, \pi_k$ fajtájú – termek, akkor a $P(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ szó egy elsőrendű formula. Az így nyert formulákat **atomi formuláknak** nevezzük.
5. Ha A elsőrendű formula, akkor $\neg A$ is az.
6. Ha A és B elsőrendű formulák, akkor az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és az $(A \supset B)$ is elsőrendű formulák.
7. Ha A elsőrendű formula és x tetszőleges változó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is elsőrendű formulák. Az így nyert formulákat **kvantált formuláknak** nevezzük.
8. Minden elsőrendű formula a 4–7. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Egy elsőrendű nyelv termjeinek halmazát $\mathcal{L}_t$ -vel, formuláinak halmazát $\mathcal{L}_f$ -fel jelölhetjük.

Magyarul term az, amíg Srt-beli típusokkal dolgozunk, ha igazságértékekkel, akkor pedig már formula.

A szerkezeti indukció elve:

- Termekre:

  Egy elsőrendű logikai nyelv minden termje $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

  - (alaplépés:) ha minden változója és konstansa $\mathcal{T}$ tulajdonságú, továbbá
  - (indukciós lépés:) ha a $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ termek $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor az f függvényszimbólum felhasználásával előállított $f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ term is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

- Formulákra:

  Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

  - (alaplépés:) ha minden atomi formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú, és
  - (indukciós lépések:)
    1. ha az A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú,
    2. ha az A és a B formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és az $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak és
    3. ha az A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú és x individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.

Az egyértelmű elemzés tétele:

- Egy elsőrendű logikai nyelv minden termjére a következő állítások közül pontosan egy igaz:
  1. A term a nyelv egy változója.
  2. A term a nyelv egy konstansa.
  3. A term a nyelv egyértelműen meghatározható $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ termjei és az $f \in Fn$ függvényszimbólum felhasználásával előállított $f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ alakú term.
- Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulájára a következő állítások közül pontosan egy igaz:
  1. A formula a nyelv egyértelműen meghatározható $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ termjei és $P \in Pr$ predikátumszimbóluma felhasználásával előállított $P(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ alakú atomi formula.

2. A formula egy a nyelv egyértelműen meghatározható formulájának negáltja.
3. A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak konjunkciója.
4. A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak diszjunkciója.
5. A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak implikációja.
6. A formula a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\forall x A$ alakú formula.
7. A formula a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\exists x A$ alakú formula.

Egy elsőrendű logikai nyelvben egyetlen konstansnak és változónak sincs **közvetlen résztermje**, az $f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ termek.

Egy atomi formulának nincs **közvetlen részformulája**, a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula, az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák, a $\forall x A$, illetve $\exists x A$ közvetlen részformulája az A formula.

Egy **term résztermjeinek halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek a term eleme és ha egy term eleme, akkor eleme a term összes közvetlen résztermje is.

Egy **formula részformuláinak halmaz**a a legszűkebb olyan halmaz, melynek a formula eleme és ha egy formula eleme, akkor eleme a formula összes közvetlen részformulája is.

A szerkezeti rekurzió elve:

- Termekre:

  Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv termjein értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

  - (alaplépés:) értékeit rögzítjük a nyelv változóin és konstansain, majd megmondjuk, hogy
  - (indukciós lépések:) $\mathcal{F}$ értéke az $f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k)$ termre az $\mathcal{F}$-nek a $t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k$ termeken felvett értékeiből hogyan származtatható.

- Formulákra:

  Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv formuláin értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

  - (alaplépés:) értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin és megmondjuk, hogy $\mathcal{F}$ értéke
  - (indukciós lépések:)
    1. a $\neg A$ formulára az A-n felvett értékéből,
    2. az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulára az A-n és a B-n felvett értékeiből, illetve
    3. a $\forall x A$, illetve az $\exists x A$ formulára az A-n felvett értékéből hogyan származtatható.

Definiáljuk a $\tilde{l} : \mathcal{L}_t \to N_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha t változó vagy konstansszimbólum, $\tilde{l}(t)$ legyen 0,
2. $\tilde{l}(f(t_{1,} t_{2,} \ldots, t_k))$ legyen $\tilde{l}(t_1) + \tilde{l}(t_2) + \ldots + \tilde{l}(t_k) + 1$.

Ekkor a $t \in \mathcal{L}_t$ termhez rendelt $\tilde{l}(t)$ függvényértéket a t term **funkcionális összetettségének** nevezzük.

Definiáljuk a $\ell : \mathcal{L}_f \rightarrow N_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $\ell(A)$ legyen 0,

2. $\ell(\neg A)$ legyen $\ell(A)+1$,

3. $\ell(A \wedge B)$, $\ell(A \vee B)$, illetve az $\ell(A \supset B)$ legyen $\ell(A)+\ell(B)+1$,

4. $\ell(\forall x A)$, illetve az $\ell(\exists x A)$ pedig legyen $\ell(A)+1$.

Ekkor az $A \in \mathcal{L}_f$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket az A formula **logikai összetettségének** nevezzük.

*A funkcionális összetettség a függvényszimbólumokat számolja meg egy termben, a logikai összetettség pedig a logikai műveleteket (tehát a predikátumokat és függvényeket **nem**) egy formulában.*

Az ítéletlogikában definiáltuk a **logikai összekötőjel hatáskörének** és a **fő logikai összekötőjelnek** a fogalmát. A fogalmak változtatás nélkül kiterjeszthetők a kvantorokra is.

Egészítsük ki a logikai összekötőjelek közötti erősorrendet azzal, hogy a kvantorokat is besoroljuk. A prioritás csökkenő sorrendben: $\{\forall, \exists, \neg\}, \{\wedge, \vee\}, \supset$. Azokat a zárójeleket, melyek ezt a sorrendet jelölnék ki, elhagyhatjuk.

Egy változó előfordulása lehet **szabad**, vagy **kötött**. A szabad előfordulással rendelkező változó a kifejezés **paramétere**. Az A előtt szereplő kvantor által kötött x változó átnevezése: $\forall y [A_y^x]$, $\exists y [A_y^x]$.

Formulák kongruenciája:

1. Egy atomi formula csak önmagával **kongruens**.
2. $\neg A \approx \neg A'$, ha $A \approx A'$.
3. $(A \circ B) \approx (A' \circ B')$, ha $A \approx A'$ és $B \approx B'$.
4. $\forall x A \approx \forall y A'$, illetve $\exists x A \approx \exists y A'$, ha $[A_z^x] \approx [A'^y_z]$ minden olyan z változóra, amely különbözik a kérdéses formulákban előforduló összes változótól.

2.2. Az elsőrendű logikai nyelvek szemantikája

$\mathcal{L}$ **<u>interpretációja</u>** egy I-vel jelölt $\langle I_{Srt}, I_{Pr}, I_{Fn}, I_{Cnst} \rangle$ függvénynégyes, ahol

1. az $I_{Srt} : \pi \rightarrow \mathcal{U}_\pi$ függvény megad minden egyes $\pi \in Srt$ fajtához egy $\mathcal{U}_\pi$ nemüres halmazt, a π fajtájú individuumok halmazát (a különböző fajtájú individuumok halmazainak uniója az interpretáció **individuumtartománya** vagy **univerzuma**),
2. az $I_{Pr} : P \rightarrow P^I$ függvény megad minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz egy $P^I : \mathcal{U}_{\pi_1} \times \mathcal{U}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \rightarrow \{i, h\}$ logikai függvényt (relációt),
3. az $I_{Fn} : f \rightarrow f^I$ függvény hozzárendel minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz egy $f^I : \mathcal{U}_{\pi_1} \times \mathcal{U}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \rightarrow \mathcal{U}_\pi$ matematikai függvényt (műveletet),
4. az $I_{Cnst} : c \rightarrow c^I$ függvény pedig minden π fajtájú $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz az $\mathcal{U}_\pi$

individuumtartománynak egy individuumát rendeli, azaz $c^I \in \mathcal{U}_\pi$.

Példa: Az Ar nyelv természetes interpretációja:

$I_{Srt}(szt) = \mathbb{N}_0$

$I_{Cnst}(nulla) = 0$

$I_{Fn}(f) = f^I$, ahol $f^I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, és $f^I(n) = n+1$, (ha $n \in \mathbb{N}_0$)

$I_{Fn}(g) = g^I$, ahol $g^I : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, és $g^I(n,m) = n+m$, (ha $n,m \in \mathbb{N}_0$)

$I_{Fn}(h) = h^I$, ahol $h^I : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, és $h^I(n,m) = n \cdot m$, (ha $n,m \in \mathbb{N}_0$)

$I_{Pr}(P) = P^I$, ahol $P^I : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \{i,h\}$, és (ha $n,m \in \mathbb{N}_0$)

$$P^I(n,m) = i, ha(n = m);\ \ h egyébként.$$

Legyen az $\mathcal{L}$ elsőrendű logikai nyelvnek I egy interpretációja, az interpretáció univerzuma legyen $\mathcal{U}$. Jelölje V a nyelv változóinak a halmazát. Egy olyan $\kappa : V \to \mathcal{U}$ (kappa) leképezést, ahol ha x π fajtájú változó, akkor $\kappa(x)$ $\mathcal{U}_\pi$ -beli individuum, az I interpretáció egy **változókiértékelésének** nevezzük.

Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ **változókiértékelés x-variánsa**, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x-től különböző y változó esetén.

Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek I egy interpretációja és κ egy I-beli változókiértékelés. Az $\mathcal{L}$ nyelv egy π fajtájú t termjének értéke I-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|t|^{I,\kappa}$-val jelölt – $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum:

1. ha $c \in Cnst$ π fajtájú konstansszimbólum, akkor $|c|^{I,\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli c^I individuum,
2. ha x π fajtájú változó, akkor $|x|^{I,\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $\kappa(x)$ individuum,
3. ha $t_{1,} t_{2,} \dots, t_k$ rendre $\pi_{1,} \pi_{2,} \dots, \pi_k$ fajtájú termek és ezek értékei a κ változókiértékelés mellett I-ben rendre az $\mathcal{U}_{\pi_1}$-beli $|t_1|^{I,\kappa}$, az $\mathcal{U}_{\pi_2}$-beli $|t_2|^{I,\kappa}$, ... és az $\mathcal{U}_{\pi_k}$-beli $|t_k|^{I,\kappa}$ individuumok, akkor egy $(\pi_{1,} \pi_{2,} \dots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólum esetén $|f(t_{1,} t_{2,} \dots, t_k)|^{I,\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $f^I(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \dots, |t_k|^{I,\kappa})$ individuum.

Példa:

Az Ar nyelv természetes interpretációjában

- bármely változókiértékelés mellett

  $|nulla| = 0$

  $|f(nulla)| = f^I(|nulla|) = 1$
- a $\kappa(x) = 1, \kappa(y) = 3$ változókiértékelés mellett

  $|(f(x)+y)|^\kappa = g^I(|f(x)|^\kappa, |y|^\kappa) = g^I(f^I(|x|^\kappa), 3) = g^I(f^I(1), 3) = g^I(2,3) = 5.$

Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek I egy interpretációja és κ egy I-beli változókiértékelés. Egy C formulához I-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|C|^{I,\kappa}$-val jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|P(t_1, t_2, \ldots, t_k)|^{I,\kappa} \leftrightharpoons i, ha\, P^I(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_k|^{I,\kappa}) = i; \ \ h\, egyébként$
2. $|\neg A|^{I,\kappa} \leftrightharpoons \dot{\neg}|A|^{I,\kappa}$
3. $|A \wedge B|^{I,\kappa} \leftrightharpoons |A|^{I,\kappa} \dot{\wedge} |B|^{I,\kappa}$
4. $|A \vee B|^{I,\kappa} \leftrightharpoons |A|^{I,\kappa} \dot{\vee} |B|^{I,\kappa}$
5. $|A \supset B|^{I,\kappa} \leftrightharpoons |A|^{I,\kappa} \dot{\supset} |B|^{I,\kappa}$
6. $|\forall x\, A|^{I,\kappa} \leftrightharpoons i, ha |A|^{I,\kappa^*} = i\ \kappa\ minden\ \kappa^*\ x\ variánsára; \ \ h\, egyébként$
7. $|\exists x\, A|^{I,\kappa} \leftrightharpoons i, ha |A|^{I,\kappa^*} = i\ \kappa\ valamely\ \kappa^*\ x\ variánsára; \ \ h\, egyébként$

2.3. Elsőrendű logikai törvények

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan I interpretációja és I-ben van olyan κ változókiértékelés, amelyre $|A|^{I,\kappa} = i$ egyébként A **kielégíthetetlen**. Ha az I interpretáció és a κ változókiértékelés olyanok, hogy $|A|^{I,\kappa} = i$, azt mondjuk, hogy I a κ változókiértékelés mellett **kielégíti** A-t.

Amennyiben az A formula zárt, igazságértékét egyedül az interpretáció határozza meg. Ha $|A|^I = i$, azt mondjuk, hogy az I interpretáció **kielégíti** A-t vagy másképp, az I interpretáció az A formula **modellje**.

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **<u>logikai törvény</u>**, ha a nyelv minden I interpretációjában és I minden κ változókiértékelése mellett $|A|^{I,\kappa} = i$. Jelölése: $\models A$.

Az ítéletlogikában használtuk a prímformula fogalmát. A prímformulákból a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ logikai összekötőjelek segítségével minden ítéletlogikai formulát fel tudtunk építeni. Egy elsőrendű logikai nyelvben is vannak ilyen formulák: a nyelv atomi formulái és a kvantált formulák. Ezek a formulák az **elsőrendű logikai nyelv prímformulái**.

Egy formula azon részformuláit, amelyek prímformulák és amelyekből a formula csupán a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ logikai összekötőjelek segítségével felépíthető, a formula **prímkomponenseinek** nevezzük.

Legyenek az A formula prímkomponensei $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ha a különböző prímkomponenseket ítéletváltozóknak tekintenénk, az így kapott ítéletlogikai formulához megadhatnánk az igazságtáblát. Az elsőrendű formulához így megkonstruált táblázatot *Quine-féle táblázatnak* hívjuk.

- Ebben a táblázatban a sorokban szereplő igazságértékekről azonban nem tudhatjuk, hogy van-e egyáltalán olyan interpretáció és az interpretációban olyan változókiértékelés, ami mellett a prímkomponensek igazságértékei rendre ezek lennének.
- Az viszont nyilvánvaló, hogy minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén a prímkomponensek igazságértékei a Quine-táblázat valamelyik sorában a prímkomponensekhez tartozó oszlopban rendre megtalálhatók.

Példa: A $\neg\exists x \neg\exists P(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponensei $\exists x \neg\exists P(x)$ és $\forall x P(x)$. A formula Quine-féle táblázata a következő:

$\exists x \neg\exists P(x)$	$\forall x P(x)$	$\neg\exists x \neg\exists P(x) \supset \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **tautologikusan igaz** (tautológia), ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték található. Jelölése: $\models_0 A$.

Ha az A elsőrendű formula tautologikusan igaz (tautológia), akkor elsőrendű logikai törvény, azaz ha $\models_0 A$, akkor $\models A$.

Legyenek A és B az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges formulái. Azt mondjuk, hogy az A és a B elsőrendű formulák **logikailag ekvivalensek**, és ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim B$, ha minden I interpretációban és κ változókiértékelés mellett $|A|^{I,\kappa} = |B|^{I,\kappa}$.

Legyenek A és B elsőrendű formulák.

- $A \sim B$ pontosan akkor, ha $\models (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.
- Ha $A \approx B$, akkor $A \sim B$.
- Ha A olyan formula, hogy $x \notin Par(A)$, akkor $\forall x A \sim A$ és $\exists x A \sim A$.
- $\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A$ és $\exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A$.
- Kvantorok kétoldali kiemelése:
  - $\forall x A \wedge \forall x B \quad \forall x (A \wedge B)$
  - $\exists x A \vee \exists x B \quad \exists x (A \vee B)$
- De Morgan kvantoros törvényei:
  - $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$
  - $\neg\forall x A \sim \exists x \neg A$
- Kvantorok egyoldali kiemelése:

  Ha $x \notin Par(A)$, akkor
  - $A \circ \forall x B \sim \forall x (A \circ B)$
  - $A \circ \exists x B \sim \exists x (A \circ B)$
  - $\forall x B \supset A \sim \exists x (B \supset A)$
  - $\exists x B \supset A \sim \forall x (B \supset A)$.

2.4. Prenex alak

Egy $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A (n \geq 0)$ alakú formulát, ahol az A kvantormentes formula, **prenex alakú formulának** nevezünk.

Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.

A konstrukció lépései:

1. változó-tiszta alakra hozzuk a formulát,
2. alkalmazzuk De Morgan kvantoros és az egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvényeket.

2.5. Szemantikus következményfogalom

Legyen Γ egy elsőrendű nyelv formuláinak halmaza és B formula.

B **logikai következménye** a Γ formulahalmaznak (vagy a Γ-beli formuláknak), ha a nyelv minden olyan interpretációja és változókiértékelése, amely kielégít minden Γ-beli formulát, az kielégíti a B formulát is.

Jelölése: $\Gamma \models B$.

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ ($n \geq 1$) az elsőrendű formulák. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$ pontosan akkor, ha

1. az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.
2. az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ formula logikai törvény.

Legyen Γ egy elsőrendű nyelv formuláinak véges halmaza és B tetszőleges formulája. Azt mondjuk, hogy B **tautologikus következménye** Γ-nak, ha a Γ formulahalmaz és B közös Quine-táblázatában azon sorokban, ahol minden Γ-beli formula alatti igazságérték található, B oszlopában is csupa i igazságérték van.

Jelölése: $\Gamma \models_0 B$.

Ha $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models_0 B$, akkor $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$.

3. Szekventkalkulus

Legyenek $A_{1,} A_{2,} \dots, A_n, B_{1,} B_{2,} \dots, B_m (n, m \geq 0)$ egy elsőrendű nyelv formulái. Ekkor a $\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m \vee \bot$ formulát **szekventnek** nevezzük.

Jelölése:

$A_{1,} A_{2,} \dots, A_n \rightarrow B_{1,} B_{2,} \dots, B_m$ vagy rövidebben: $\Gamma \rightarrow \Delta$ *(nagy gamma, nagy delta)*, ahol $\Gamma \leftrightharpoons \{A_{1,} A_{2,} \dots, A_n\}$ és $\Delta \leftrightharpoons \{B_{1,} B_{2,} \dots, B_m\}$.

A kalkulus **axiómasémái** és levezetési szabályai:

- $A \Gamma \rightarrow \Delta A$
- $\bot \Gamma \rightarrow \Delta$
- $\Gamma \rightarrow \Delta \top$
- $(\wedge \rightarrow) \dfrac{A B \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \wedge B) \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \wedge) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A ; \Gamma \rightarrow \Delta B}{\Gamma \rightarrow \Delta (A \wedge B)}$
- $(\vee \rightarrow) \dfrac{A \Gamma \rightarrow \Delta ; B \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \vee B) \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \vee) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A B}{\Gamma \rightarrow \Delta (A \vee B)}$
- $(\supset \rightarrow) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A ; B \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \supset B) \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \supset) \dfrac{A \Gamma \rightarrow \Delta B}{\Gamma \rightarrow \Delta (A \supset B)}$
- $(\neg \rightarrow) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A}{\neg A \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \neg) \dfrac{A \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta \neg A}$
- $(\forall \rightarrow) \dfrac{A(x \| t) \forall x A \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \forall) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A(x \| y)}{\Gamma \rightarrow \Delta \forall x A}$
- $(\exists \rightarrow) \dfrac{A(x \| y) \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x \forall A \Gamma \rightarrow \Delta}$
- $(\rightarrow \exists) \dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta A(x \| t) \exists x A}{\Gamma \rightarrow \Delta \exists x A}$

Egy szekventet a kalkulusban **levezethetőnek** nevezünk, ha

- vagy axióma,
- vagy van olyan levezetési szabály, melyben ez vonal alatti szekvent és a vonal feletti szekvent vagy szekventek pedig levezethetőek.

A kalkulus **helyes**, mert ha az

$A_{1,} A_{2,} \dots, A_n \rightarrow B_{1,} B_{2,} \dots, B_m$ szekvent levezethető a kalkulusban, akkor a $\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m \vee \bot$ formula logikai törvény.

A kalkulus **teljes**, mert ha az A formula logikai törvény, akkor a $\rightarrow A$ szekvent levezethető a kalkulusban.