Szintaxis

Egy elsőrendű logikai nyelv ábécéje logikai és logikán kívüli szimbólumokat, továbbá elválasztójeleket tartalmaz. A logikán kívüli szimbólumhalmaz megadható a $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst\rangle$ alakban, ahol Srt nemüres halmaz, elemi **fajtákat** szimbolizálnak, Pr nemüres halmaz, elemi **predikátumszimbólumok**, Fn halmaz elemei **függvényszimbólumok**, $Cnst$ pedig a **konstansszimbólumok** halmaza.

Az $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst\rangle$ ábécé **szignatúrája** egy ν_1, ν_2, ν_3 hármas, ahol

1. minden $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz ν_1 a predikátumszimbólum alakját, azaz a $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ fajtasorozatot,

2. minden $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz ν_2 a függvényszombúlum alakját, azaz a $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ fajtasorozatot,

3. minden $c \in Cnst$ konstanszimbólumhoz ν_3 a konstanszimbólum fajtáját, azaz a (π)-t

rendel ($k > 0$ és $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi \in Srt$).
Példa: logika fólia 55. oldal.

1. Definíció. ***Az elsőrendű nyelv termjei:***

1. *Minden $\pi \in Srt$ fajtájú változó és konstans π fajtájú term.*

2. *Ha az $f \in Fn$ függvényszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú term, akkor az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy π fajtájú term.*

3. *Minden term az első és második szabály véges sokszori alkalmazásával áll elő.*

2. Definíció. ***Az elsőrendű nyelv formulái:***

1. *Ha a $P \in Pr$ predikátumszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú term, akkor a $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy elsőrendű formula. Az így nyert formulákat atomi formuláknak nevezzük.*

2. *Ha A elsőrendű formula, akkor $\neg A$ is az.*

3. *Ha A és B elsőrendű formulák és $\circ \in \{\vee, \wedge, \supset\}$, akkor $(A \circ B)$ is elsőrendű formula.*

4. *Ha A elsőrendű formula, Q kvantor és x tetszőleges változó, akkor a QxA is elsőrendű formula. Az így nyert formulákat kvantált formuláknak nevezzük.*

5. *Minden elsőrendű formula az előbbi szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.*

Interpretáció

3. Definíció. *$\mathcal{L}[V_\nu]$ interpretációja egy $\mathcal{I}$-vel jelölt $\langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$ függvénynégyes*

- *az $\mathcal{I}_{Srt} : \pi \to \mathcal{U}_\pi$ függvény megad minden egyes $\pi \in Srt$ fajtához egy $\mathcal{U}_\pi$ nemüres halmazt, a π fajtűjú individuumok halmazát (a különböző fajtájú individuumok halmazainak uniója az interpretáció univerzuma),*
- *az $\mathcal{I}_{Pr} : P \to P^{\mathcal{I}}$ függvény megad minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz egy $P^{\mathcal{I}} : \mathcal{U}_{\pi_1} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \to \{i, h\}$ logikai függvényt,*
- *az $\mathcal{I}_{Fn} : f \to f^{\mathcal{I}}$ függvény hozzárendel minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz egy $f^{\mathcal{I}} : \mathcal{U}_{\pi_1} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \to \mathcal{U}_\pi$ matematikai függvényt (műveletet),*
- *az $\mathcal{I}_{Cnst} : c \to c^{\mathcal{I}}$ függvényt pedig minden π fajtájú $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz az $\mathcal{U}_\pi$ individuumtartományának egy individuumát rendeli, azaz $c^{\mathcal{I}} \in \mathcal{U}_\pi$.*

Példa: logika fólia 84. oldal.

4. Definíció. *Legyen az $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja, az interpretáció univerzuma legyen $\mathcal{U}$ és jelölje V a nyelv változóinak halmazát. Egy olyan $\kappa : V \to \mathcal{U}$ leképezést, ahol ha x π fajtűjú változó, akkor $\kappa(x) \in \mathcal{U}_\pi$, $\mathcal{I}$-beli **változókiértékelésnek** nevezünk.*

5. Definíció. *Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x-től különböző y változó esetén.*

6. Definíció. *Az $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelv egy π fajtájú t termjének értéke $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi $|t|^{\mathcal{I},\kappa}$-val jelölt $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum:*

1. *ha $c \in Cnst$ π fajtájú konstansszimbúlum, akkor $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\mathcal{U}_\pi$-beli $c^{\mathcal{I}}$ individuum,*
2. *ha x π fajátjú változó, akkor $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $\kappa(x)$ individuum,*
3. *ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú term és ezek értékei a κ változókiértékelés mellett $\mathcal{I}$-ben rendre az $\mathcal{U}_{\pi_1}$-beli $|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}$,...,$\mathcal{U}_{\pi_k}$-beli $|t_k|^{\mathcal{I},\kappa}$-beli individuumok, akkor egy $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólum esetén $|f(t_1, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa})$ individuum.*

Példa: logika fólia 88. oldal.

7. Definíció. *Egy $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelvben egy C formulához $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi $|C|^{\mathcal{I},\kappa}$-vel jelölt igazságértéket rendeljük:*

1. $|P(t_1, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \text{ha } P(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa}) = i \\ h & \text{egyébként} \end{cases}$
2. $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa}$ *legyen* $\neg |A|^{\mathcal{I},\kappa}$
3. $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa}$ *legyen* $|A|^{\mathcal{I},\kappa} \vee |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
4. $|A \wedge B|^{\mathcal{I},\kappa}$ *legyen* $|A|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |B|^{\mathcal{I},\kappa}$

5. $|A \supset B|^{\mathcal{I},\kappa}$ *legyen* $|A|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |B|^{\mathcal{I},\kappa}$

6. $$|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \textit{ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i\ \kappa \textit{ minden } \kappa^* \ x - \textit{variánsára} \\ h & \textit{egyébként} \end{cases}$$

7. $$|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \textit{ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i\ \kappa \textit{ valamely } \kappa^* \ x - \textit{variánsára} \\ h & \textit{egyébként} \end{cases}$$

Példa: logika fólia 92. oldal.

8. Definíció. *Az $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelv egy A formulája* ***kielégíthető****, ha van $\mathcal{L}[V_\nu]$-nek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja és $\mathcal{I}$-ben van olyan κ változókiértékelés, amelyre $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, egyébként kielégíthetetlen.*

9. Definíció. *Az $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelv egy A formulája logikailag igaz (másképp* ***logika törvény****), ha $\mathcal{L}[V_\nu]$ minden $\mathcal{I}$ interpretációjában és $\mathcal{I}$ minden κ változókiértékelése mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$.*

10. Definíció. *Az $\mathcal{L}[V_\nu]$ nyelv egy A formulája* ***tautologikusan igaz****, ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték szerepel.*

11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A és B elsőrendű formulák* ***logikailag ekvivalensek,*** *ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban és κ változókiértékelés mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = |B|^{\mathcal{I},\kappa}$.*

12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a B formula* ***logikai következménye*** *a Γ formulahalmaznak (vagy a Γ-beli formuláknak), ha minden olyan $\mathcal{L}[V_\nu]$-beli interpretáció és változókiértékelés, amely kielégít minden Γ-beli formulát, az kielégíti a B formulát is.*

Normálformák

Egy atomi formulát vagy negáltját literálnak nevezzük. Elemi konjunkció: egy literál vagy egy elemi konjukció és egy literál konjunkciója. Elemi diszjunkció: egy literál vagy egy elemi diszjunkció és egy literál diszjunkciója.

Konjunktív normálforma

- egy elemi diszjunkció
- egy konjunktív normálforma és egy elemi diszjunkció konjunkciója

Diszjunktív normálforma

- egy elemi konjunkció
- egy diszjunktív normálforma és egy elemi konjunkció diszjunkciója

Minden ítéletlogikai fomulához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.
Lépések: implikációk eltüntetése, De Morgan törvények alkalmazása, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon, disztributivitás alkalmazása, esetleges egyszerűsítés.
Példa: $(X \supset Y) \vee \neg(\neg Y \supset X \vee \neg Z) \longmapsto \neg X \vee Y$ **Példa: logika fólia 44. oldal.**

Prenex alak

Egy $Q_1x_1Q_2x_{2n}x_nA$ $(n \geq 0)$ alakú formulát, ahol A kvantormentes formula, **prenex alakú formulának** nevezünk. Egy elsőrendű logika nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.
A konstrukció lépései: 1) változó-tiszta alakra hozás, 2) De Morgan kvantoros és az egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvények használata.
Példa: $\forall xP(x) \supset \neg xQ(x) \longmapsto \exists x\forall y(P(x) \supset Q(y))$
Példa: logika fólia 120. oldal.

Gentzen-kalkulus

Legyenek $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ egy elsőrendű nyelv formulái. Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formulát **szekventnek** nevezzük. Jelölés: $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ vagy $\Gamma \to \Delta$, ahol $\Gamma \rightleftharpoons \{A_1, \ldots, A_n\}$ és $\Delta \rightleftharpoons \{B_1, \ldots, B_m\}$. A kalkulus axiómasémái: $A\Gamma \to \Delta A$, $\bot\Gamma \to \Delta$, $\Gamma \to \Delta\top$.
Egy szekventet a kalkulusban **levezethető**nek nevzünk, ha axiómaséma vagy van olyan levezetési szabály melyben ez a vonal alatti szekvent és a vonal feletti szekvent vagy szekventek pedig levezethetőek.

- **A kalkulus helyes**, mert ha az $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ szekvent levezethető a kalkulusban, akkor a $\top \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$ formula logikai törvény.
- **A kalkulus teljes** mert, ha az A formula logikai törvény akkor a $\to A$ szekvent levezethető a kalkulusban.