1 Tétel

Diszkrét és folytonos valószínűségi eloszlás fogalma. Nevezetes eloszlások: binomiális, Poisson, egyenletes, exponenciális, normális. Adatszerkezetekkel kapcsolatos alapfogalmak: absztrakció (logikai és fizikai szint), absztrakt adatszerkezetek (homogén-heterogén, statikus-dinamikus, struktúra, műveletek). Elemi adatszerkezetek: lista, verem, sor. Halmaz, multihalmaz, mátrix. Fák ábrázolása, keresések, bejárások, törlés, beszúrás.

A diszkrét valószínűség-eloszlás valószínűségi tömegfüggvénnyel jellemzett valószínűség-eloszlás. Így az *X* valószínűségi változó eloszlása diszkrét, és *X*-et diszkrét valószínűségi változónak nevezzük, ha

mivel *u* az összes lehetséges *X* értéken értelmezhető. Ebből következik, hogy az ilyen változó csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen számértékeket vehet fel.

A legismertebb diszkrét valószínűség-eloszlás, melyet statisztikai modellezésre is használnak, a , a , a , a és a .

Ezenfelül a általánosan alkalmazzák a számítógépes programozásban az egyenletesen kiválasztott véletlenszerű számoknál.

Kumulatív sűrűség

A fentieknek megfelelően egy diszkrét valószínűségi változót úgy határozhatunk meg, mint egy valószínűségi változót, melynek kumulatív eloszlásfüggvénye csak diszkontinuitásokkal, ugrásokkal nőhet, vagyis akkor nő, ha magasabb értékre „ugrik”, és konstans az ugrások között. Azok a pontok, ahol az ugrás történik, azok az értékek, melyeket a valószínűségi változó felvehet. Az ilyen pontok száma lehet véges vagy megszámolhatóan végtelen. Az ugrások helyének nem kell topológiailag diszkrétnek lennie; például a kumulatív eloszlásfüggvény ugorhat minden .

Delta-függvény

A diszkrét valószínűség-eloszlás gyakran a valószínűségi sűrűségfüggvény általánosított formájában jelenik meg, beleértve a függvényt, mely lényegében egységesíti a folytonos és diszkrét eloszlás kezelését. Ez akkor hasznos, amikor olyan valószínűség-eloszlásokkal foglalkozunk, melyek folytonos és diszkrét részeket is tartalmaznak.

Indikátorfüggvény ()

Legyen *X* egy diszkrét valószínűségi változó és u_0, u_1... azok értékek, melyeket felvehet nem zéró valószínűséggel. Jelöljük:

Ezek és képlettel (1):

Ebből következik, hogy *X* bármely értéket felvehet, kivéve az u_0, u_1, ... = 0 eseteket, és így írhatjuk:

{\displaystyle X=\sum _{i}u_{i}1_{\Omega _{i}}}
kivéve a zéró valószínűségű halmazra, ahol {\displaystyle 1_{A}}az *A* indikátorfüggvénye.

Binomiális elosztás

Az X valószínűségi változó n és p paraméterű **binomiális eloszlást követ** – vagy rövidebben **binomiális eloszlású** – pontosan akkor, ha

$$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad (k=0,1,2,\ldots,n),$$

ahol $0 \le p \le 1$. Azt, hogy az X valószínűségi változó n és p paraméterű binomiális eloszlást követ, a következő módon szoktuk jelölni: $X \sim B(n,p)$. Speciálisan, ha $X \sim B(1,p)$, akkor X-et Bernoulli-eloszlásúnak nevezzük.

Poisson def

Az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlást követ – vagy rövidebben: Poisson-eloszlású – pontosan akkor, ha

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

ahol $\lambda > 0$ konstans.

- Poisson-eloszlású független valószínűségi változók összege is Poisson-eloszlású. Pontosabban ha X_1 és X_2 független Poisson-eloszlású valószínűségi változók λ_1 és λ_2 paraméterekkel, akkor $X_1 + X_2$ is Poisson-eloszlású $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel. Ugyanekkor X_1 feltételes eloszlása $X_1 + X_2 = n$ -re vonatkozóan n és $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ paraméterű binomiális eloszlást követ.
- Az összegzésre vonatkozó összefüggés fordítottja is igaz. Pontosabban ha $X_1 + X_2$ is Poisson-eloszlású valamint tudjuk, hogy X_1 és X_2 független valószínűségi változók, akkor X_1 és X_2 is Poisson-eloszlású.
- Ha binomiális eloszlások olyan sorozatát vesszük, melyben az eloszlások n paramétere úgy tart a végtelenbe, hogy közben az np szorzat konstans marad (p így nyilván a 0-hoz tart), akkor határeloszlásként Poisson-eloszlást kapunk.

Egyenletes elosztás

A valószínűségszámításban egy X folytonos valószínűségi változót az [a,b] intervallumon **egyenletes eloszlásúnak** nevezünk, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a \le x \le b,\\ 0 & \text{ha } x < a \text{ vagy } x > b\end{cases}$$

A véletlengenerátorokat úgy tervezik, hogy egy adott intervallumon minél inkább megközelítsék az egyenletes eloszlást.

Beszélnek diszkrét egyenletes eloszlásról is. Ilyen például a szabályos dobókockával dobott számok eloszlása.

Exponencialis eloszlas

Az *X* λ paraméterű **exponenciális eloszlást követ** – vagy rövidebben **exponenciális eloszlású** – pontosan akkor, ha

ahol $\lambda > 0$.

Normális elosztás

Az *X* **normális eloszlás**t követ – vagy rövidebben: normális eloszlású – pontosan akkor, ha

ahol a két paraméter, *m* és ∈ , valamint > 0. A normális eloszlást szokták **Gauss-eloszlás**nak vagy néha **normál eloszlás**nak is nevezni.

Azt, hogy az *X* valószínűségi változó normális eloszlást követ, a következő módon szoktuk jelölni:

Speciálisan, ha $X \sim N(0, 1)$, akkor *X*-et (vagy sztenderd normális eloszlásúnak) nevezzük.

A fenti sűrűségfüggvény grafikonját alakja miatt szokás **haranggörbé**nek nevezni.

Adatszerkezetekkel kapcsolatos fogalmak: absztrakció (logikai és fizikai szint), absztrakt adatszerkezetek (homogén-heterogén, statikus-dinamikus, struktúra, műveletek). Elemi adatszerkezetek: lista, verem, sor. Halmaz, multihalmaz, mátrix. Fák ábrázolása, keresések, bejárások, törlés, beszúrás.

Absztrakció

- Modellalkotás, absztrakció
- Adatmodell, eljárásmodell
- Adat, információ

Az adatelemek lehetnek egyszerűek (atomiak) és összetettek. Minden adatelem rendelkezik valamilyen értékkel.

Logikai:Az absztrakció következő magasabb szintje leírja, hogy az adatbázis milyen adatokat tárol, és milyen összefüggések vannak az adatok között. A logikai szint tehát egy teljes adatbázist ír le kis számú, viszonylag egyszerű struktúra alapján.

Fizikai adatszerkezet (társzerkezet): Az absztrakció legalacsonyabb szintje leírja, hogyan tárolja a rendszer az adatokat. A fizikai szint részletesen leírja az összetett alacsony szintű adatszerkezeteket.

Absztrakt adatszerkezetek

Lehetséges csoportosítási szempontok:

- Változhat-e az adatszerkezet elemeinek száma?
  - **statikus** adatszerkezet elemszáma állandó,általa elfoglalt tárterület nagysága nem változik
  - **dinamikus** az elemszáma a műveletek során változhat ÉrtelmAdatszÜresÁll Ill elfogy fent.Tár
- Milyen az adatszerkezet elemeinek a típusa?
  - **homogén** alkotó elemi adatok azonos típusúak, akkor homogén adatszerkezet
  - **heterogén** ha az elemek nem azonos típusúak.
- Milyen kapcsolatban állnak egymással az adatelemek az adatszerkezetben?

Egy homogén adatszerkezet lehet

  - **struktúra nélküli** adatszerk. elemei között semmiféle kapcsolat nincs (halmaz)
  - **asszociatív** adatszerk elemei között nincs lényegi kapcsolat,egyedileg címezhetőek (tömb)
  - **szekvenciális** egyszeru lancolt lista, A→B erheto el B→ C es így tovabb
  - **hierarchikus** Fa gyoker megadasa=szerk megadasa, 1 elem pontosan 1 masikbol erheto el
  - **hálós** graf, egy elem tobb masik elembol is eleheto

A heterogén adatszerkezeteket nem csoportosítjuk ilyen szempont alapján.

- Műveletek
- Létrehozás
- Módosítás
  - bővítés
  - törlés (fizikai, logika)

  - csere
- Rendezés
- Keresés
- Elérés
- Bejárás
- Feldolgozás

Elemi adatszerkezetek

Lista

- Dinamikus, homogén, szekvenciális adatszerkezet

Alapműveletek:

  - Hozzáférés, elérés: közvetlen
  - Részlistaképzés, allistaképzés
  - Konkatenáció, egyesítés, összefűzés
- Bővítés: bárhol bővíthető. Bővítéskor részlistákat képzünk, majd azokat konkatenáljuk az új elemből/elemekből álló részlistával
- Törlés: megvalósítható a fizikai törlés, melynek során részlistákat képzünk (melyekben már nem szerepel(nek) a törlendő elem(ek)), majd konkatenáljuk ezeket a részlistákat
- Csere: bármelyik elem cserélhető. Részlistákat képzünk, majd azokat konkatenáljuk az új értékből álló részlistával
- Rendezés: értelmezhető, bármelyik rendezési algoritmus használható
- Keresés: értelmezhető, bármelyik keresési algoritmus használható
- Elérés: soros vagy közvetlen
- Bejárás: értelmezhető
- Feldolgozás: a lista alapműveletei segítségével

Verem

Speciális lista adatszerkezet. Csak a verem tetejére lehet betenni, illetve csak onnan lehet kivenni.

- Az utoljára betett elem a verem tetejére kerül.
- Az elsőnek betett elem a verem aljára kerül. (Ami akkor még a verem teteje is.)

Veremmel végezhető műveletek

- Létrehozás: üres verem inicializálása.
- Bővítés: új elem bevitele az utoljára betett elem fölé (PUSH).
- Csere: nincs.
- Törlés: fizikai, a verem tetején lévő elemet (POP).
- Rendezés, keresés és bejárás: nem értelmezett.
- Elérés: a fölső elemet közvetlenül, a többbit sehogyan sem (TOP).

- Feldolgozás: Last In First Out (LIFO) adatszerkezet, az utolsóként érkező elemet dolgozzuk fel először.

Az utolsóként érkezett elemhez történő hozzáférést illetve ezen elem törlésének a műveletét egy műveletként is definiálhatjuk

Sor

Speciális lista adatszerkezet, melynek alapműveletei a speciális listaműveletek közül a következők:

- az első elemhez történő hozzáférés: ACCESS HEAD
- bővítés az utolsó elem mögé: PUT (INJECT)
- az első elem törlése: GET (POP)

Az első elemhez történő hozzáférés és az első elem törlésének műveletét gyakran egy műveletként definiáljuk.

Sorral végezhető műveletek

- Létrehozás: üres sor.
- Bővítés: az utolsó elem mögé.
- Csere: nincs.
- Törlés: fizikai, az első elemet.
- Rendezés, keresés és bejárás: nem értelmezett.
- Elérés: az első elemet közvetlenül, a többit sehogyan sem.
- Feldolgozás: First In First Out (FIFO) adatszerkezet, az elsőként érkező elemet dolgozzuk fel először.

Folytonos reprezentáció, szétszórt reprezentáció, kétvégű sorok, prioritásos sor

Halmaz

A halmaz és a multihalmaz struktúra nélküli, homogén és dinamikus adatszerkezetek.

A halmaz minden eleme különböző. A multihalmazban előfordulhatnak azonos elemek is.

Mindkét adatszerkezetre igaz, hogy az adatszerkezetben lévő elemek között nincs kapcsolat (ezért struktúra nélküli adatszerkezetek).

A halmaz adatszerkezet a matematikai halmaz fogalom megjelenése az adatszerkezetek szintjén. Mindig véges – ennyiben nem felel meg teljesen a matematikai halmaz fogalmának.

A halmaz alapműveletei

- eleme: megmondja, hogy egy adatelem benne van-e a halmazban vagy sem
- unió: két halmaz unióját adja
- metszet: két halmaz metszetét adja
- különbség: két halmaz különbségét adja

Az adatszerkezetekkel végezhető hagyományos műveletek megvalósítása halmazok esetén:

- Létrehozás kétféleképpen:
  - explicit módon, a halmaz elemeinek felsorolásával (esetleg üresen)
  - egy predikátum segítségével
- Bővítés unióképzéssel
- Törlés csak fizikai, különbségképzéssel
- Csere nincs
- Rendezés, keresés, elérés, bejárás nem értelmezettek
- Feldolgozás a halmaz alapműveleteinek a segítségével

Multihalmaz

A multihalmaz abban különbözik a halmaztól, hogy megengedi az adatelemek ismétlődését, benne több azonos értékű elem is előfordulhat.

A multihalmaz alapműveletei

- eleme: megmondja, hogy egy adatelem benne van-e a halmazban vagy sem
- unió: két halmaz unióját adja
- metszet: két halmaz metszetét adja
- különbség: két halmaz különbségét adja

Multihalmazoknál az adatszerkezetekkel végezhető hagyományos műveletek megvalósítása hasonló a halmazokéhoz (lásd ott). A multihalmaz feldolgozása a multihalmaz alapműveleteinek a segítségével történik.

Mátrix

A háromszögmátrixok négyzetes (kvadratikus) mátrixok.

Kétfajta háromszögmátrixot szoktunk megkülönböztetni:

- a felsőháromszög-mátrixot és
- az alsóháromszög-mátrixot.
  Szimmetrikus:mindenhol van ertekes eleme es Ai,j = Aj,i (i,j koordinata)

Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek főátlója alatt csupa 0 elem található, felsőháromszög-mátrixnak nevezzük. (foatlo:ball fentrol jobbra le)

Ha a négyzetes mátrix főátlója fölött lévő elemek mindegyikének értéke 0, akkor alsóháromszög-mátrixról beszélünk.

A négyzetes mátrixokkal szemben, ahol az értékes elemek száma n^2, a háromszögmátrixoknál az értékes elemek száma csupán (n * (n + 1)) / 2

Az értékes elemeket emiatt – sor- vagy oszlopfolytonosan – egy (n * (n + 1)) / 2 elemű V vektorra szoktuk leképezni.

Fa

Homogén, dinamikus, hierarchikus adatszerkezet.

Fa adatszerkezetekkel kapcsolatos fogalmak:

- csúcs, csomópont
- gyökérelem
- levélelem
- közbenső elem: nem gyoker es nem level elem
- él ket szomszedos kozbenso elem kozti ut
- Út: ket nem szomszedos kozbenso elem kozti ut
- részfa
- szint egy adott magassag ami nem az egesz fa magassaga
- magasság

Bináris fa: Olyan fa, melyben minden adatelemnek legfeljebb két rákövetkezője van.

Szigorú értelemben vett bináris fa: Szigorú értelemben vett bináris fáról beszélünk, ha a bináris fában minden adatelemnek 0 vagy 2 rákövetkezője van.

Rendezett bináris fa: Rendezett bináris fa elemeire értelmezhetők a következő

fogalmak: bal/jobb oldali rákövetkező, bal/jobb oldali részfa

- Törlés: részfát vagy egy elemet, utóbbi esetben a fát a legtöbb esetben újra kell szervezni (hogy továbbra is fa maradjon).
- Keresés, elérés és feldolgozás: a bejárás algoritmusa alapján.
- Bejárás: szokás szerint olyan algoritmus, amelynek segítségével a bináris fa elemeit leképezzük egy sorra (preorder, inorder vagy postorder módon).
- Bővítés: egy elemmel vagy egy részfával, általában levélelemnél.

Preorder bejárás algoritmusa

- Ha a bejárandó fa üres, az algoritmus véget ér.
- Dolgozzuk fel a gyökérelemet (más szavakkal: helyezzük a gyökérelemet a sor végére).
- Járjuk be a gyökérelem bal oldali részfáját preorder módon.
- Járjuk be a gyökérelem jobb oldali részfáját preorder módon.

Inorder bejárás algoritmusa

- Ha a bejárandó fa üres, az algoritmus véget ér.
- Járjuk be a gyökérelem bal oldali részfáját inorder módon.
- Dolgozzuk fel a gyökérelemet (más szavakkal: helyezzük a gyökérelemet a sor végére).
- Járjuk be a gyökérelem jobb oldali részfáját inorder módon.

Postorder bejárás algoritmusa

- Ha a bejárandó fa üres, az algoritmus véget ér.

- Járjuk be a gyökérelem bal oldali részfáját postorder módon.
- Járjuk be a gyökérelem jobb oldali részfáját postorder módon.
- Dolgozzuk fel a gyökérelemet (más szavakkal: helyezzük a gyökérelemet a sor végére).