CÁLCULO INFINITESIMAL II

UNIDAD 1

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

CONTENIDOS

- **REPASO GENERAL INTEGRADOR**

  Sistemas Lineales. Funciones: Polinómicas, Racionales, Exponenciales, Logarítmicas, Trigonométricas. Límites, Continuidad, Derivadas, Extremos y Puntos de Inflexión, Integrales y Aplicaciones en una variable.

- **FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

  Definición. Gráficos. Dominio. Imagen. Curvas de nivel. Uso de la planilla de cálculo y de software de cálculo simbólico para representar funciones de dos variables.

- **LIMITES: DOBLE, SUCESIVOS Y RADIALES**

  Límite doble de funciones de varias variables: concepto, ejemplos. Límites sucesivos o iterados: concepto, ejemplos, cálculo. Límites radiales: concepto, ejemplos, cálculo. Límites por curvas: concepto, ejemplos, cálculo.

- **DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES**

  Derivada parcial: concepto, ejemplos, cálculo. Significado geométrico. Derivadas parciales sucesivas. Derivadas Direccionales .Derivadas totales. Diferenciales: concepto, ejemplos, cálculo. Plano tangente a una superficie. Recta normal.

REPASO GENERAL INTEGRADOR

Sistemas Lineales. Funciones: Polinómicas, Racionales, Exponenciales, Logarítmicas, Trigonométricas. Límites, Continuidad, Derivadas, Extremos y Puntos de Inflexión, Integrales y Aplicaciones en una variable.

Total: 5 hs

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

¿CÓMO ESTAMOS CON CÁLCULO I?

- Ejemplos de funciones:
  - Lineal
  - Polinómica
  - Racionales
  - Exponenciales
  - Trigonométrica
- Características - Corrimientos

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

¿CÓMO ESTAMOS CON CÁLCULO I?

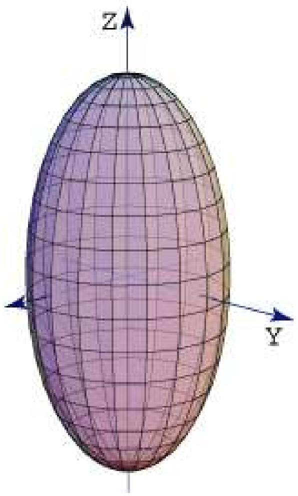
- Ejercicios de repaso → Link
  - Tipos de discontinuidad
  - Cuándo no es derivable f(x)?
  - Teoremas
  - Límites indeterminados
  - Derivadas – Extremos
  - Integrales – Métodos
    - Sustitución
    - Partes
    - Fracciones parciales

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición. Gráficos. Dominio. Imagen. Curvas de nivel. Uso de la planilla de cálculo y de software de cálculo simbólico para representar funciones de dos variables.

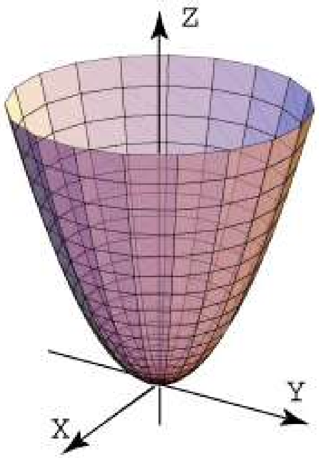
Total: 10 hs

SUPERFICIES CUADRÁTICAS



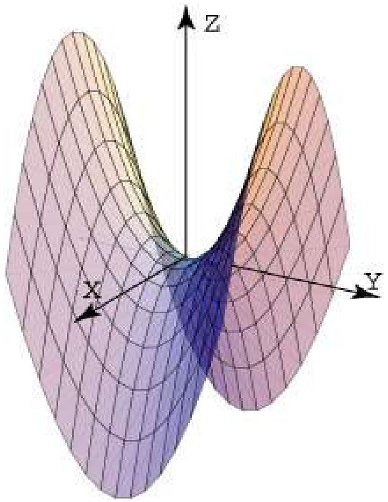
ELIPSOIDE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



PARABOLOIDE ELIPTICO

$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

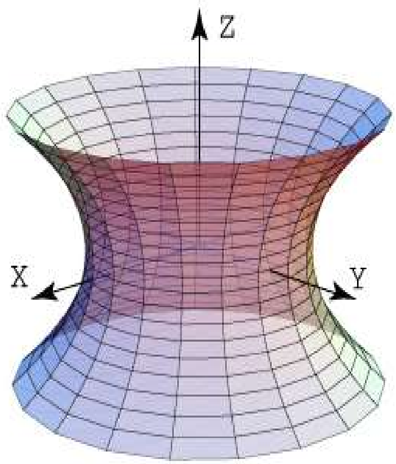


PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

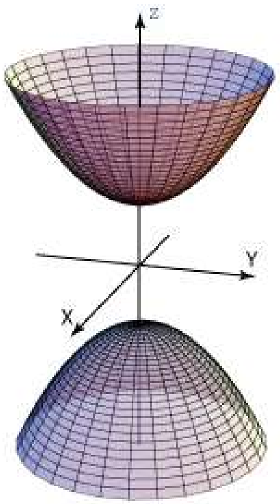
Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

SUPERFICIES CUADRÁTICAS



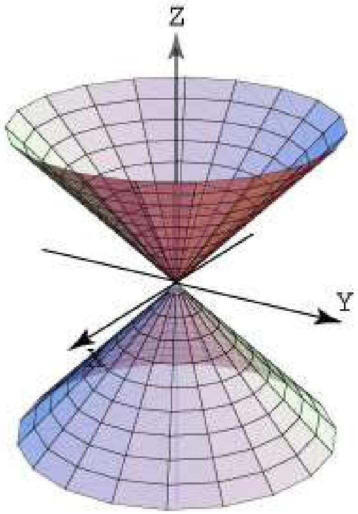
HIPERBOLOIDE
DE UNA HOJA

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



HIPERBOLOIDE
DE DOS HOJAS

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

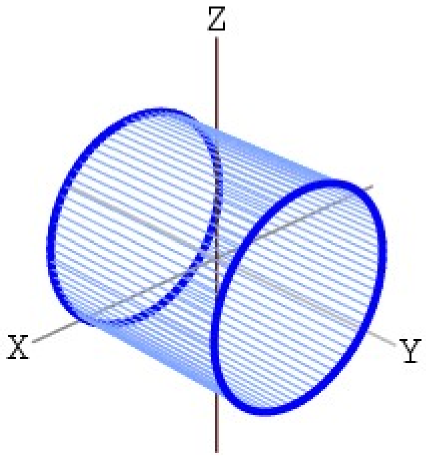


CONO

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

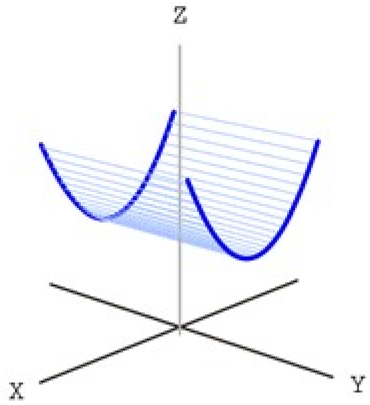
Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

SUPERFICIES CUADRÁTICAS



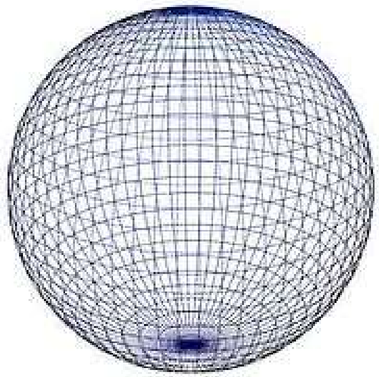
CILINDRO
ELIPTICO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



CILINDRO
PARABÓLICO

$$z = ax^2$$



ESFERA

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 12.6:
  - EJERCICIOS 11-20
  - EJERCICIOS 21-28
  - EJERCICIOS 29-32
  - EJERCICIOS 33-36

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición 1:

Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D un número real único que se denota con $f(x, y)$.
El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir: $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$

Definición 2:

Si f es una función de dos variables con dominio D , entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in R^2$ tales que $z = f(x, y)$, y (x, y) está en D

Definición 3:

Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son: $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f)

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.1:
  - EJERCICIOS 6-10 Dominios
  - EJERCICIOS 12 /14/ 15/ 17 /20 Graficar dominios
  - EJERCICIOS 21 / 24 / 25 / 28 Graficar la función
  - EJERCICIOS 40/ 41/ 42/ Graficar curvas de nivel

- DOMINIO
  - Ejercicios resueltos → Link

LÍMITES: DOBLE, SUCESIVOS Y RADIALES

Límite doble de funciones de varias variables: concepto, ejemplos. Límites sucesivos o iterados: concepto, ejemplos, cálculo. Límites radiales: concepto, ejemplos, cálculo. Límites por curvas: concepto, ejemplos, cálculo.

Total: 3 hs

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Definición 1:

Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene, entre otros puntos arbitrariamente cercanos a (a, b) .

Entonces el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) es L y se escribe:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

Si $(x, y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ en ese caso $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

Definición 2:

Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x,y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces no existe

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Definición 3:

Se dice que una función f dos variables es **continua** en (a, b) si:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

f es continua en D si f es continua en todos los puntos (a, b) de D

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.2:
  - EJERCICIOS 5
  - EJERCICIO 7
  - EJERCICIOS 13
  - EJERCICIOS 15
  - EJERCICIOS 21

DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES

Derivada parcial: concepto, ejemplos, cálculo. Significado geométrico. Derivadas parciales sucesivas. Derivadas Direccionales .Derivadas totales. Diferenciales: concepto, ejemplos, cálculo. Plano tangente a una superficie. Recta normal.

Total: 4 hs

DERIVADAS PARCIALES

Definición 1:

Se denomina **derivada parcial** de f con respecto a x en (a, b) y se denota:

$$f_x(a,b) = g'(a) \qquad donde \qquad g(x) = f(x, b)$$

De acuerdo con la definición de derivada:

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

De igual manera:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

DERIVADAS PARCIALES

Definición 2:

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Notaciones para derivadas parciales

$$f_x(x, y) = f_x = \delta f / \delta x = \delta f(x, y) / \delta x = \delta z / \delta x = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \delta f / \delta y = \delta f(x, y) / \delta y = \delta z / \delta y = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

DERIVADAS PARCIALES

Interpretación geométrica de derivadas parciales

Recordemos que la gráfica de $z = f(x, y)$ representa una superficie S. Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está sobre la superficie S.

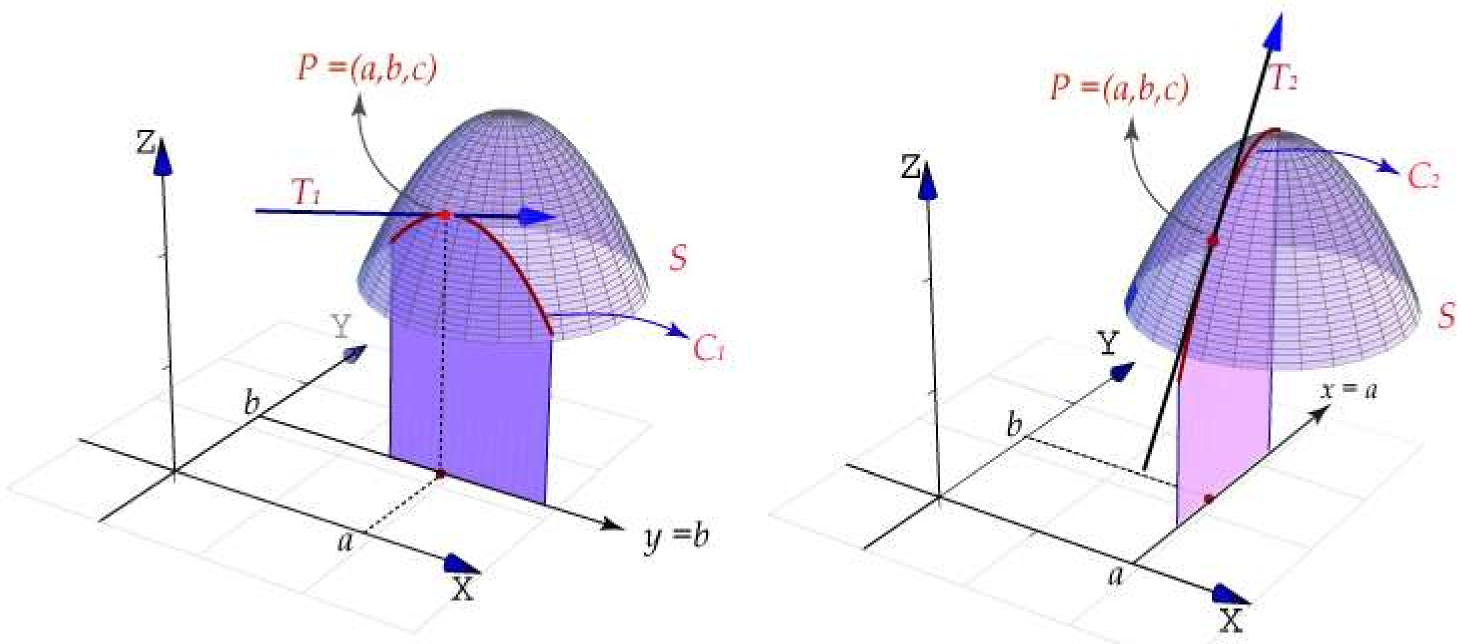
El plano vertical $y = b$ interseca a la superficie S en la curva C_1. De manera semejante, el plano vertical $x = a$ interseca a la superficie S en la curva C_2. Ambas curvas pasan por el punto P.

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x,b)$ de manera que la pendiente de su recta tangente T_1 en el punto P es $g'(a) = f_x(a, b)$.

La curva C_2 es la gráfica de la función $g(y) = f(a,y)$ así que la pendiente de su tangente T_2 en el punto P es $g'(b) = f_y(a, b)$.

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

DERIVADAS PARCIALES



Teorema de Clairaut

Suponga que f se define en un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto f_{xy} como f_{yx} son contínuas en D entonces:

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}\,(a,b)$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.3:
  - EJERCICIOS 16-17-18-19--21-24-26-27-30-31-34
  - EJERCICIOS 39-40-41
  - EJERCICIOS 51-52-54
  - EJERCICIOS 58-60
  - EJERCICIOS 61-64-65

PLANOS TANGENTES Y APROX. LINEALES

Definición 1:

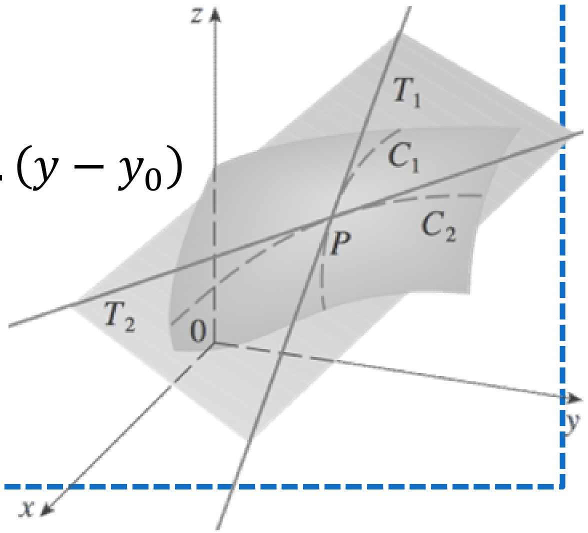
Suponga que una superficie S , tiene ecuación $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S.

Sean C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al cortar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Por lo tanto el punto P se encuentra tanto en C_1 como en C_2.

Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f_y(x_0, y_0).(y - y_0)$$



La ecuación general de la **recta normal** que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\frac{(x - x_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b} = \frac{(z - z_0)}{c}$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.4:
  - EJERCICIO 1
  - EJERCICIO 2
  - EJERCICIO 3
  - EJERCICIO 4
  - EJERCICIO 6

REGLA DE LA CADENA

Caso 1:

Suponga que $z = f(x, y)$, es una función de x y de y diferenciable, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables, entonces z es una función de t diferenciable y:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dt}$$

Caso 2:

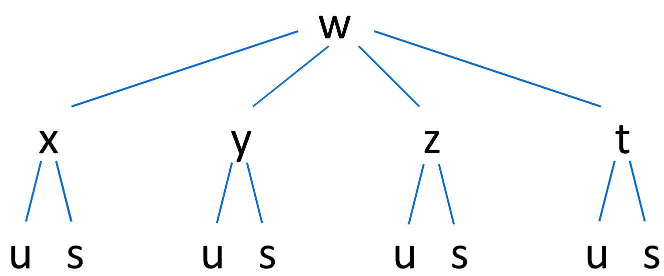
Suponga que $z = f(x, y)$, es una función de x y de y diferenciable, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s,t)$ son funciones diferenciables de s y de t, entonces:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{ds} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dt}$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

REGLA DE LA CADENA

Versión general:



Derivación implícita:

$$\frac{\delta F}{\delta x}\frac{dx}{dx}+\frac{\delta F}{\delta y}\frac{dy}{dx}=0$$

Si $dx/dx = 1$, de este modo si $\delta F/\delta y \neq 0$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}=-\frac{Fx}{Fy}$$

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.5:
  - EJERCICIOS 1-2-5
  - EJERCICIOS 9-10-11
  - EJERCICIOS 13
  - EJERCICIOS 22-23-25-26
  - EJERCICIOS 27-28-30
  - EJERCICIOS 31-32-34

DERIVADAS DIRECCIONALES Y SU VECTOR GRADIENTE

SECCIÓN 14-6

Recordemos:

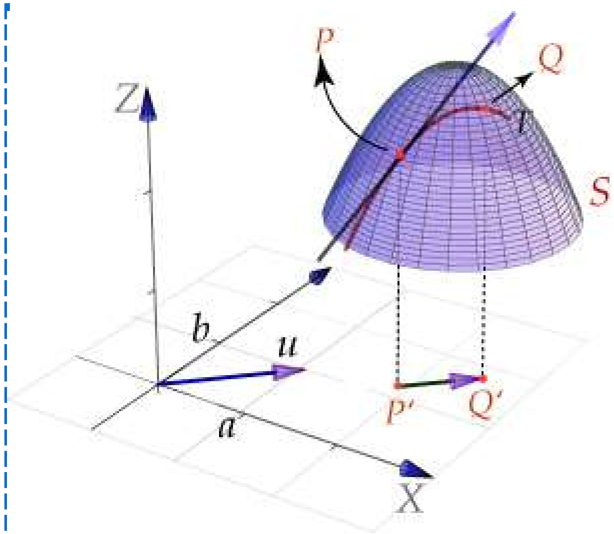
Si $z = f(x, y)$, entonces sus derivadas parciales son:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Y representan razones de cambio de z en las direcciones x e y, es decir en las direcciones de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

Si queremos hallar una razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario cualquiera $u = (a, b)$, tendremos que hallar la **derivada direccional**.



Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

DERIVADAS DIRECCIONALES Y SU VECTOR GRADIENTE

Definición 1:

La derivada direccional de f es una función en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $u = (a, b)$ es:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si este límite existe

Teorema 1:

Si f es una función diferenciable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u = (a, b)$ y

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

DERIVADAS DIRECCIONALES Y SU VECTOR GRADIENTE

Definición 2:

Si f es una función de dos variables de x e y, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definido por:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), fy(x, y) \rangle$$

Entonces:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \boldsymbol{u}$$

Siendo $\boldsymbol{u}$ un vector unitario

Teorema 2:

Suponga que f es una función diferenciable de dos variables. El valor **máximo** de la derivada direccional $D_u f(x, y)$ es $|\nabla f(x, y)|$ y se presenta cuando $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x, y)$.

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.6:
  - EJERCICIOS 4-5
  - EJERCICIOS 7-8-9-10
  - EJERCICIOS 11-12-13-16
  - EJERCICIOS 21-22-23

FIN UNIDAD 1

Temas del 1° Parcial:

12.6 - Cilindros y superficies cuadráticas

14.1 - Funciones de varias variables

14.2 - Límites y continuidad

14.3 - Derivadas parciales

14.4 - Planos tangentes y aproximaciones lineales

14.5 - Regla de cadena

14.6 - Derivadas direccionales y vector gradiente

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com