# CÁLCULO INFINITESIMAL II

## UNIDAD 2

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# CONTENIDOS

- **EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

  Puntos Críticos: concepto, cálculo, clasificación.

  Máximos y mínimos no vinculados: concepto, ejemplos, gráficos, determinación.

  Puntos de ensilladura: concepto, gráficos, determinación.

  Máximos y mínimos vinculados: concepto, gráficos.Teorema de Lagrange, determinación y ejemplos.

- **INTEGRALES EN VARIAS VARIABLES**

  Integrales dobles: concepto, interpretación geométrica, cálculo. Integrales triples. Determinación de superficies y volúmenes.

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

<u>Puntos Críticos</u>: concepto, cálculo, clasificación.

<u>Máximos y mínimos no vinculados</u>: concepto, ejemplos, gráficos, determinación.

<u>Puntos de ensilladura</u>: concepto, gráficos , determinación.

Máximos y mínimos vinculados: concepto, gráficos. Teorema de Lagrange, determinación y ejemplos.

Total: 6 hs

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

## Definición 1:

Una función de dos variables tiene un **máximo relativo** $(a, b)$ si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando $(x, y)$ está cerca de $(a, b)$.

El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo relativo**.

Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando $(x, y)$ está cerca de $(a, b)$, entonces el número $f(a, b)$ es un **valor mínimo relativo**.

## Teorema:

Si $f$ tiene un máximo relativo o mínimo relativo en $(a, b)$ y las derivadas parciales existen allí, entonces:

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(a, b) = 0$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

## Prueba de la segunda derivada:

Sean las segundas derivadas parciales de $f$ continuas en un disco de centro $(a, b)$, y sea $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ , es decir $(a, b)$ es un **punto crítico** de $f$ .
Entonces, sea:

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b).\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b).\, f_{yx}(a, b)$$

- $Si\ D > 0\ y\ f_{xx}(a, b) > 0,$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo
- $Si\ D > 0\ y\ f_{xx}(a, b) < 0,$ entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo
- $Si\ D < 0$ , entonces $f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo relativo

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

## Teorema del valor extremo para funciones de dos variables:

Si $f$ es continua en un conjunto $D$ cerrado y acotado en $R^2$, entonces $f$ alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ , en algunos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en $D$ .

## Pasos para calcular valores máximos y mínimos absolutos:

- Se calculan los valores de $f$ en los puntos críticos de $f$ en $D$
- Se determinan los valores extremos de $f$ en el límite de $D$
- El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el mas pequeño de estos valores es el mínimo absoluto

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.7:
  - EJERCICIOS 1
  - EJERCICIOS 5-8-10-12-16
  - EJERCICIOS 29-31-33-34-35

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

## Método de Multiplicadores de Lagrange:

Para determinar los valores máximos y mínimo de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Suponiendo que estos valores exista y que $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ *se encuentre en la superficie* $g(x, y, z) = k$.

*a)* Determinar todos los valores de $x, y, z$ y $\lambda$ tal que:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \,.\, \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

*b)* Evaluar $f$ en todos los puntos $(x, y, z)$ que resulten del paso *(a)*. El más grande de estos valores es el máximo de $f$ y el mas pequeño es el mínimo de $f$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 14.8:
  - EJERCICIOS 3
  - EJERCICIOS 7
  - EJERCICIOS 8
  - EJERCICIOS 10

# Integrales en varias variables

Integrales dobles: concepto, interpretación geométrica, cálculo. Integrales triples. Determinación de superficies y volúmenes.

Total: 25 hs

# INTEGRALES MÚLTIPLES

## Definición 1:

Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen $V$ del sólido que está arriba del rectángulo $R$ debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 15.1:
  - EJERCICIOS 1-a
  - EJERCICIOS 2-a
  - EJERCICIOS 4-a

# INTEGRALES ITERADAS

## Teorema de Fubbini

Si $f$ es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, entonces:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

En términos generales esto es cierto si se supone que $f$ está acotada en $R$, $f$ es discontinua sólo en un número finito de curvas uniformes y existen integrales iteradas

*Sea* $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$

$$\iint g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx.\int_c^d h(y)\,dy$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 15.2:
  - EJERCICIOS 3-4-8-9
  - EJERCICIOS 15-18-21
  - EJERCICIOS 26-31

# INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

SECCIÓN 15-3

## Definición 1:

Si $f$ es continua en una región $D$ **Tipo I** talque:

$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces:

$$\iint f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x,y)\,dydx$$

## Definición 2:

Si $f$ es continua en una región $D$ **Tipo II** talque:

$D = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},\ c \leq y \leq d\}$, entonces:

$$\iint f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES



## Propiedades de las integrales dobles:

$$\int\int_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \int\int_D f(x,y)dA + \int\int_D g(x,y)dA$$

$$\int\int_D cf(x,y)dA = c\int\int_D f(x,y)dA$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 15.3:
  - EJERCICIOS 1-2-3
  - EJERCICIOS 10-11-12-13-14-15
  - EJERCICIOS 20-25

# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## Definición 1:

Se pueden reemplazar las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las siguiente ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\theta$$

## Cambio a coordenadas polares en una integral doble:

Si $f$ es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $\leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces:

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,sen\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 15.4:
  - EJERCICIOS 5-6
  - EJERCICIOS 8-10-11-12
  - EJERCICIOS 19-22-26-27

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com

# INTEGRALES TRIPLES

## Teorema de Fubini para integrales triples:

Si $f$ es continua en el cuadrado rectangular $B = [a, b] X [c, d] X [r, s]$, entonces:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Puedo intercambiar los extremos al igual que en las integrales de dos variables

# PRÁCTICA

- SECCIÓN 15.6:
  - EJERCICIOS 3-5-7
  - EJERCICIOS 9-10-11

# FIN UNIDAD 2

**Temas del 2° Parcial:**

14.7 – Valores máximos y mínimos

14.8 - Multiplicadores de Lagrange

15.1 – Integrales dobles sobre rectángulos

15.2 – Integrales iteradas

15.3 – Integrales dobles sobre regiones generales

15.4 – Integrales dobles en coordenadas polares

15.6 – Integrales triples

Ing. Silvana Hernández
silvana.hernandez327@gmail.com