

Incertidumbre en las Mediciones

Algunos parámetros estadísticos de interés

Si se tiene un conjunto de **n** variantes:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

(p. ej. valores de una medición repetida)

se lo suele caracterizar mediante dos parámetros estadísticos que facilitan el análisis final de los resultados, a saber:

Valor medio:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

(Media aritmética o promedio)

Desviación típica, normal o estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

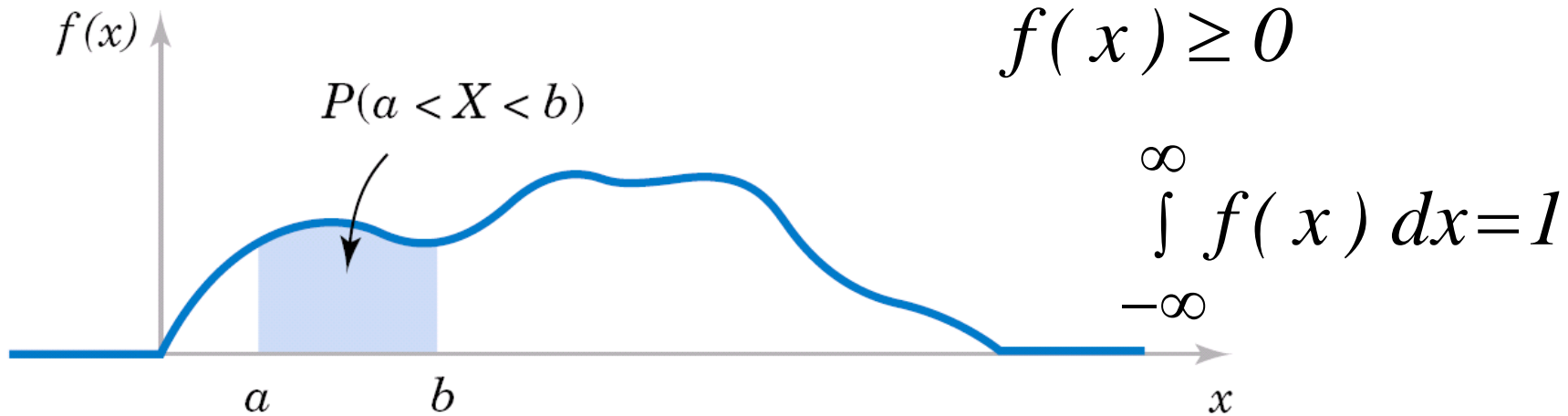
Raíz cuadrada de
la Varianza

(Da idea de la
dispersión de las
variantes)

o cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}}$$

Funciones de **densidad de probabilidad** para una **variable aleatoria continua**, $f(x)$:

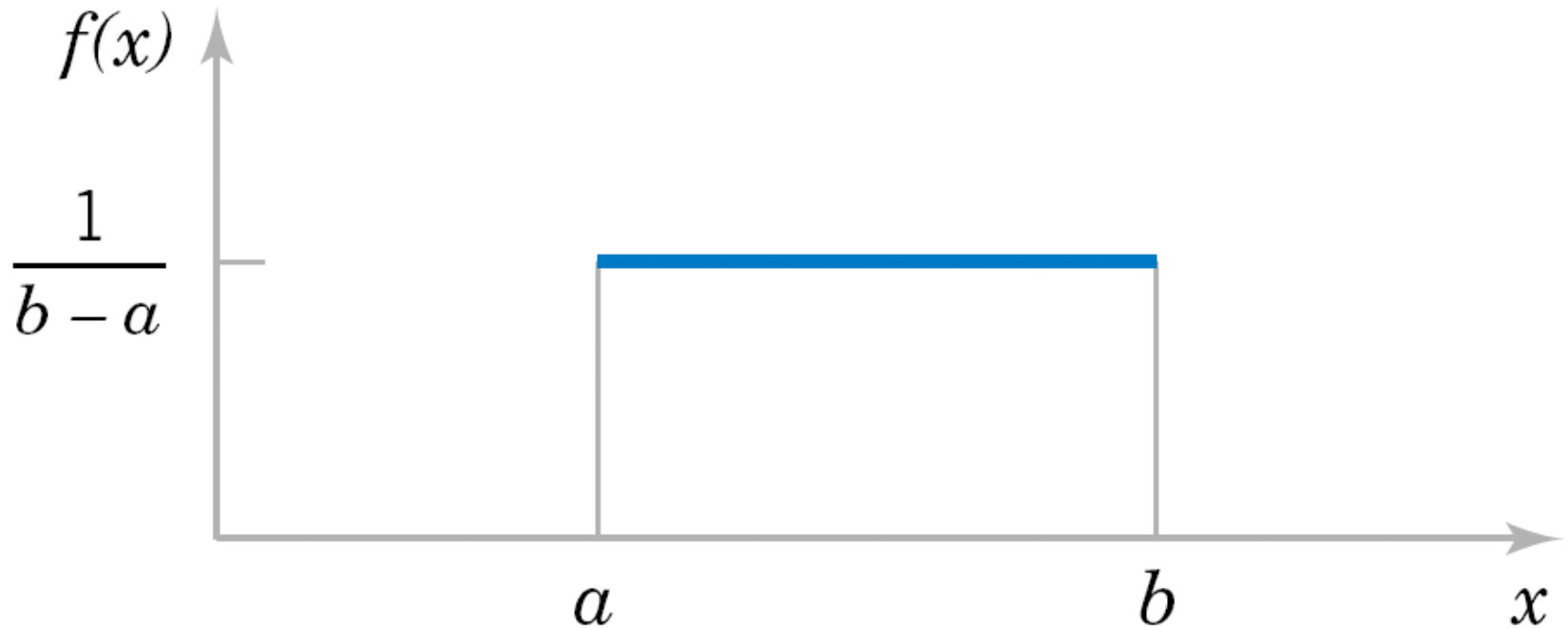


$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx =$$

Área bajo la curva de densidad de probabilidad entre **a** y **b**

Distribución de probabilidad Rectangular o Uniforme:

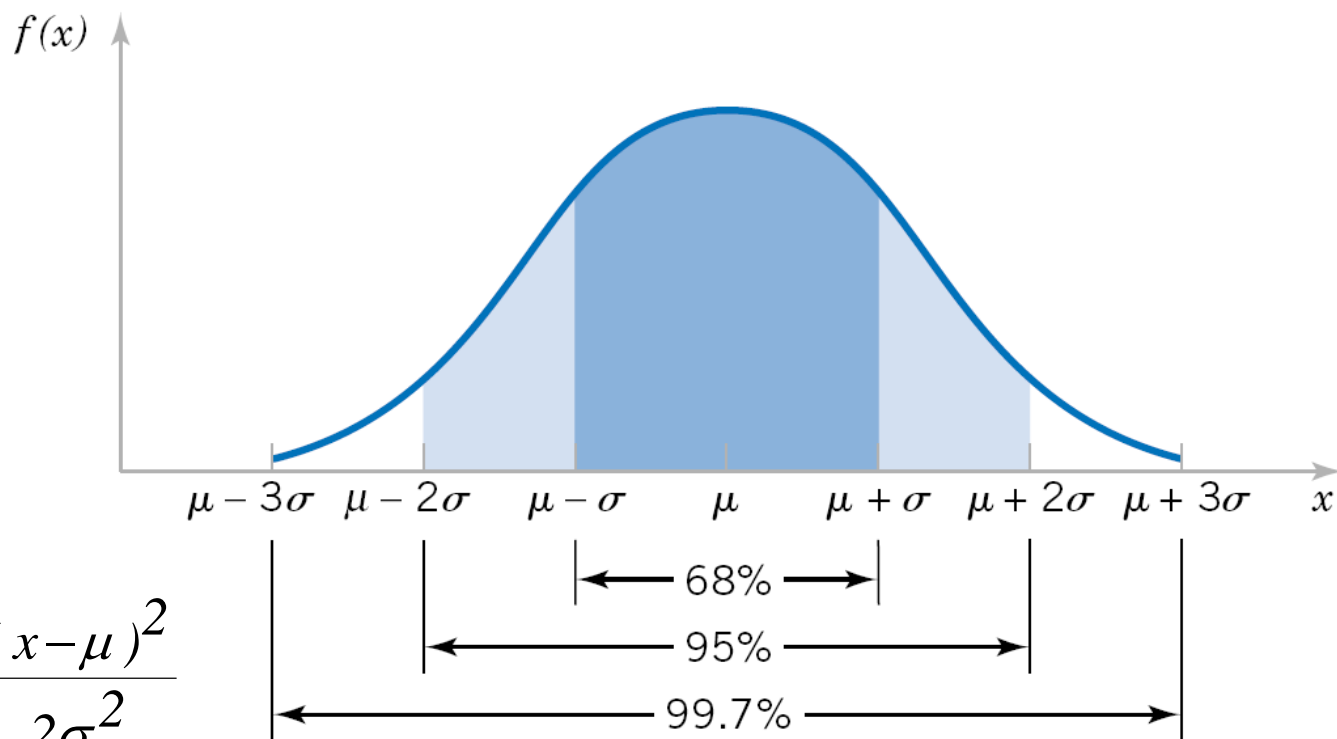


$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Distribución de probabilidad Normal o de Gauss:

μ : media

σ : desviación normal

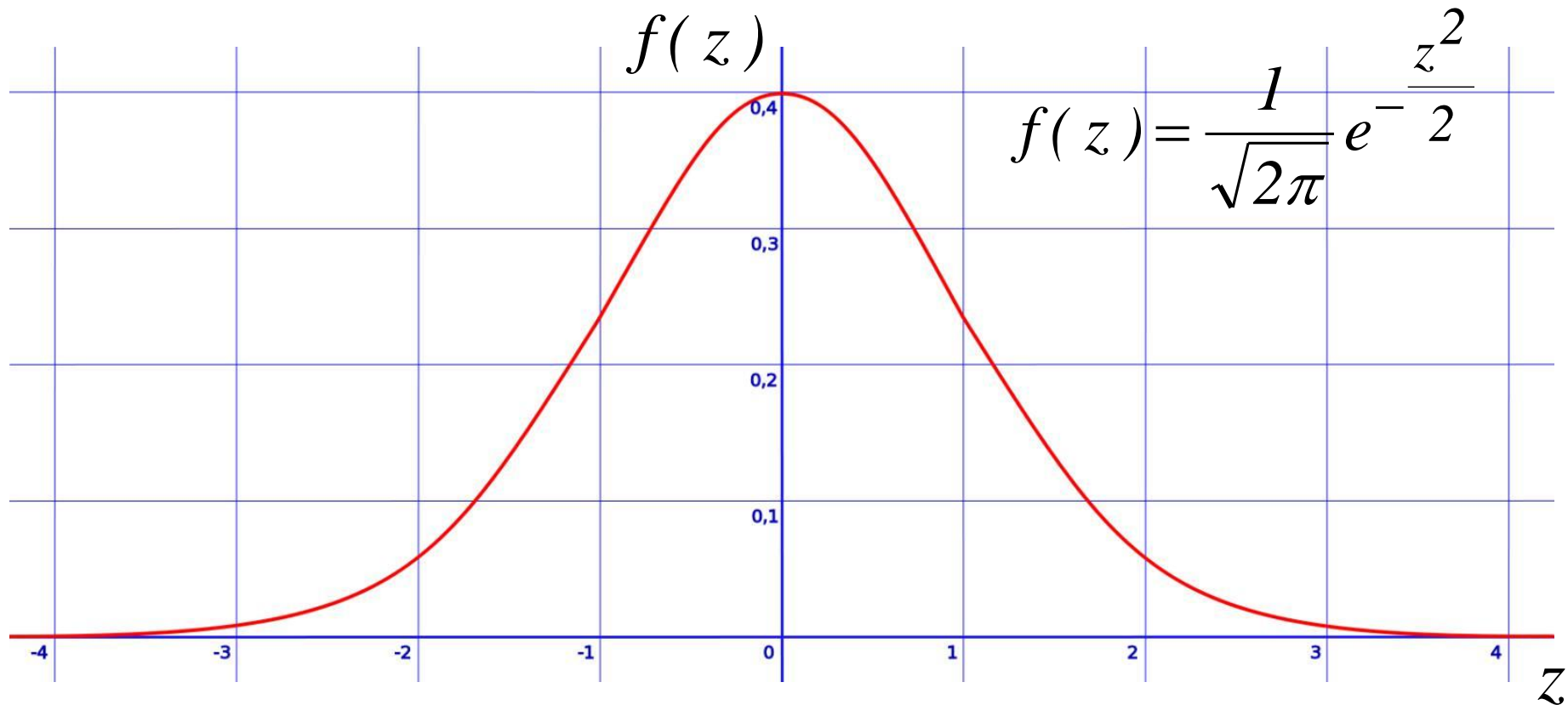


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

si: $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ (forma normalizada) $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

Distribución de probabilidad de Gauss "normalizada"

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$



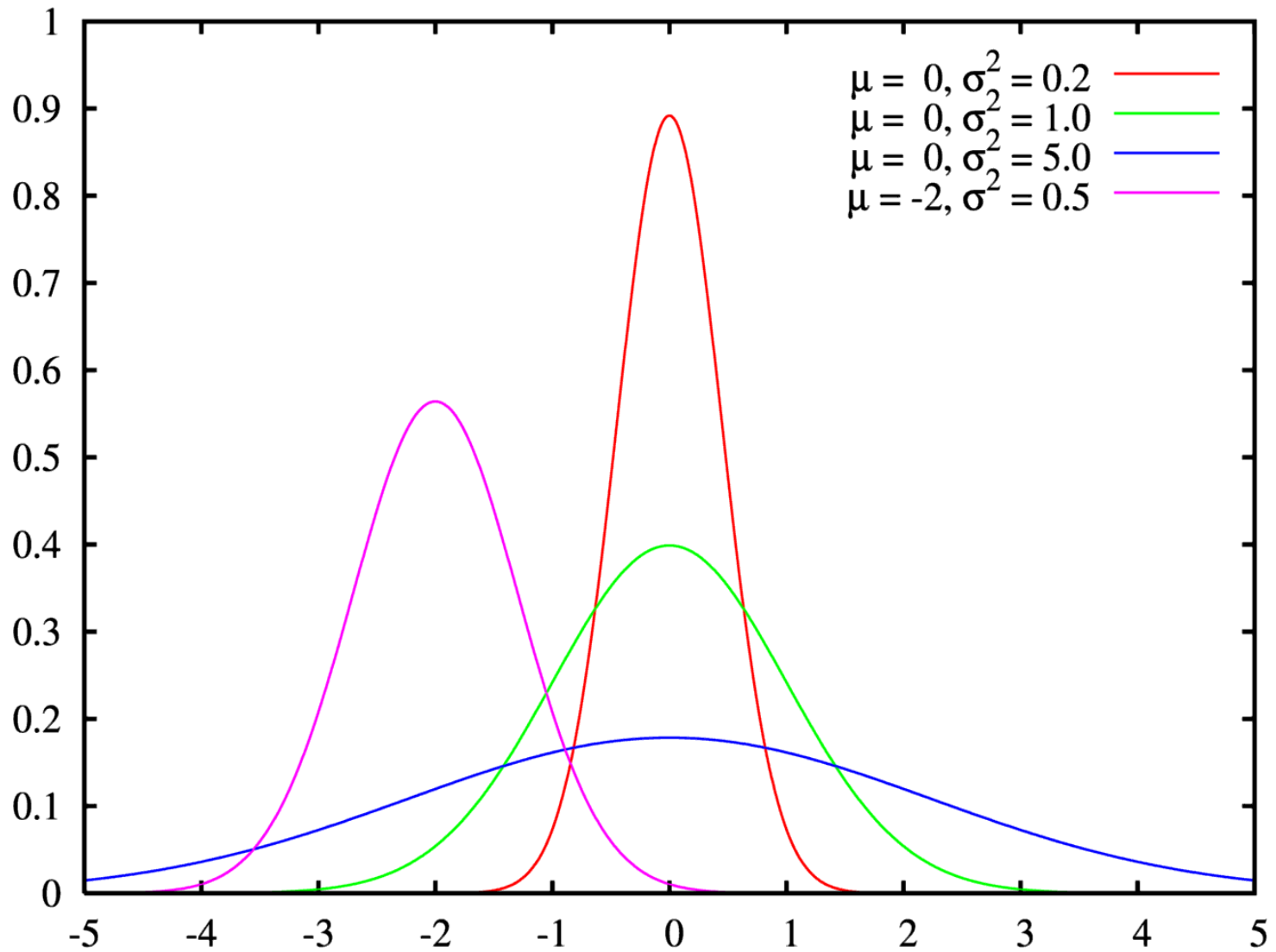
$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$

Área bajo la curva normal o de Gauss, entre $-\infty$ y z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

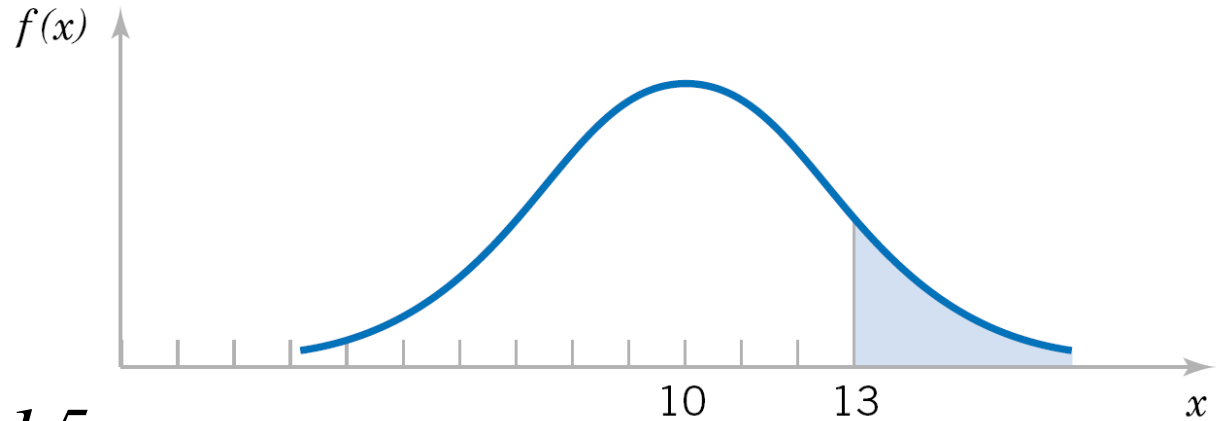
Ejemplos de distribuciones de Gauss:



Ejemplo: supongamos que las mediciones efectuadas de la corriente en un conductor tienen una distribución normal o “gaussiana” con valor medio (μ) 10 A y desviación (σ) 2 A. ¿Cuál es la probabilidad de que una medición arroje un valor superior a 13 A?

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma} =$$

$$= \frac{(13 - 10)}{2} = 1,5$$



De la tabla del área bajo la curva normal o de Gauss, entre $-\infty$ y Z :

$$P(-\infty \leq x \leq 13) = 0,9332 \quad (93,32\%)$$

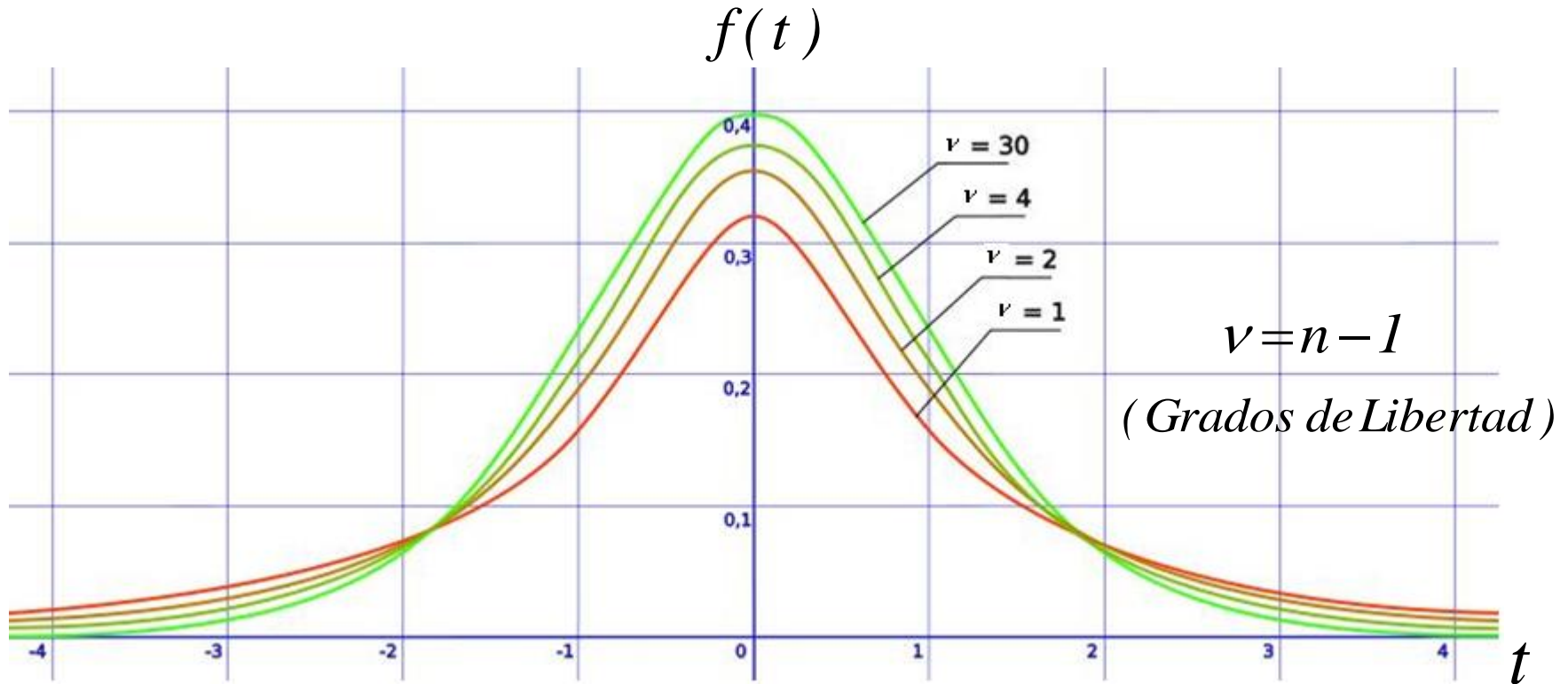
$$\Rightarrow P(13 \leq x \leq \infty) = (100 - 93,32)\% = 6,68\%$$

Área bajo la curva normal o de Gauss, entre $-\infty$ y z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

Teoría de las Pequeñas Muestras

Distribución “*t*” de Student (Gosset):



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

desviación
normal de
la media

$$s_{\bar{x}} = t * \sigma_{\bar{x}} = t * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de Confianza

Tabla G.2 - Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t , para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que incluye la fracción p de la distribución.

Grados de libertad, ν	Fracción p, en porcentaje					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96

(JCGM 100, "Evaluation of measurement data. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", BIPM)

Ejemplo: Suponiendo que se han efectuado 5 mediciones de corriente en un dado circuito, determinar el “Intervalo de Confianza” dentro del cual existe una probabilidad del 68,27% de que se encuentre la media de I .

i	I_i [A]
1	10,01
2	10,03
3	10,02
4	10,01
5	10,00

$$\bar{I} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 I_i = 10,014 \text{ A}$$

$$s(I) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}$$
$$= \sigma_{n-1} = 0,011 \text{ A}$$

La desviación de la media es:

$$\sigma_{\bar{I}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,011 A}{\sqrt{5}} = 0,0049A$$

Para hallar la desviación típica, debemos tener en cuenta que sólo poseemos 5 observaciones (*4 grados de libertad*). Así, mediante la distribución de Student, para 1σ (equivalente a una probabilidad del 68,27 %), obtenemos:

$$t = 1,14$$

$$\Rightarrow s_{\bar{I}} = t * \sigma_{\bar{I}} = 0,0056 A \approx 0,006 A$$

Que define el “**Intervalo de Confianza**” dentro del cual existe una probabilidad del 68,27 % de que se encuentre la media.

$$\Rightarrow \bar{I}_{población} = (10,014 \pm 0,006) A$$

Tabla G.2 - Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t , para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que incluye la fracción p de la distribución.

Grados de libertad ν	Fracción p en porcentaje					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96

(Guide to the expression of **Uncertainty in Measurement** – BIPM)

Error e Incertidumbre de Medición

Error:

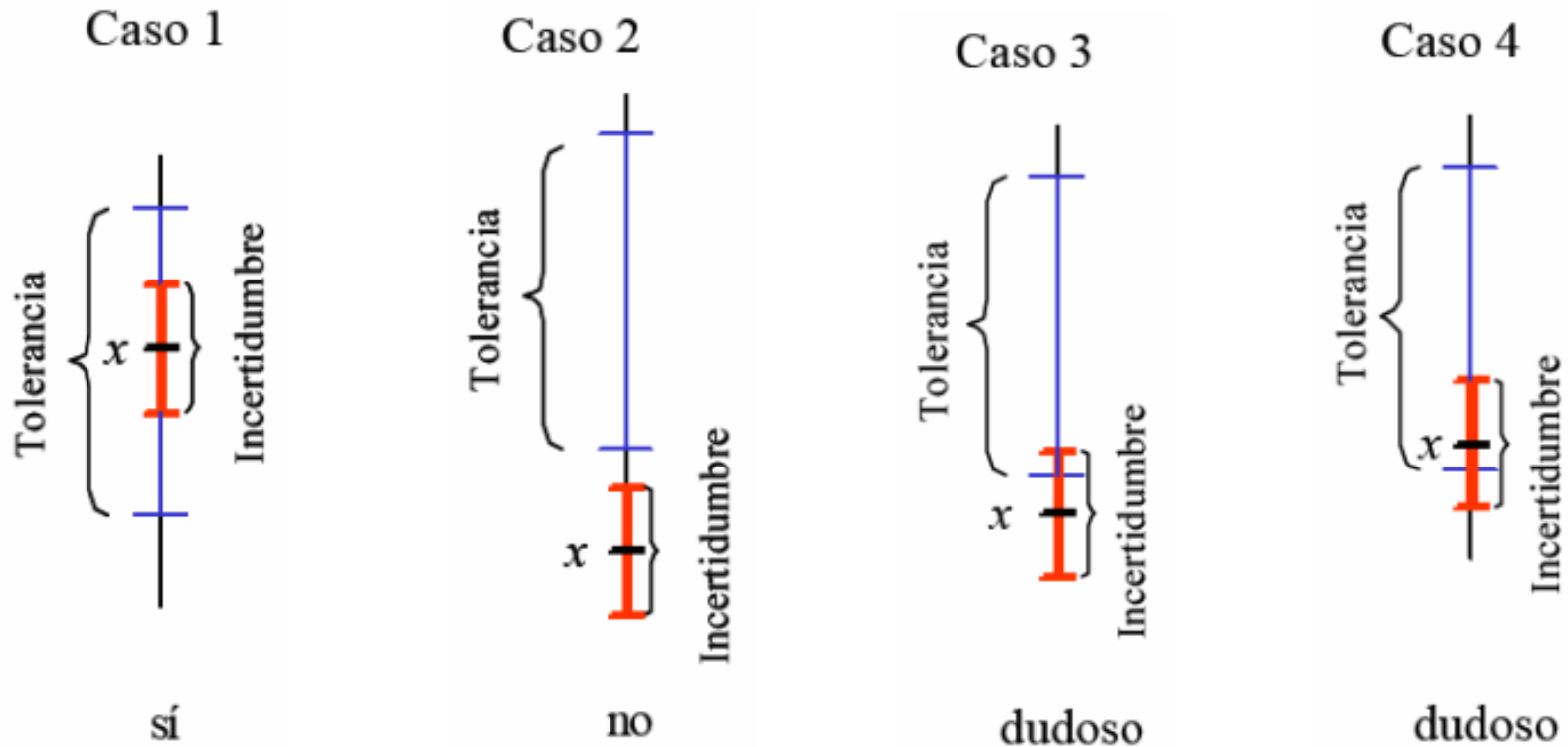
Diferencia entre un resultado individual, valor medido, y el valor verdadero de la magnitud en cuestión. ***Es un único valor.***

Incertidumbre:

Parámetro que caracteriza la dispersión de los valores que pueden atribuirse razonablemente a la magnitud determinada. ***Toma la forma de una gama de valores.***

La incertidumbre del resultado de una medición refleja la falta de un conocimiento completo del valor de tal magnitud.

Incertidumbre y Tolerancia



¿Cumple un dado producto con las especificaciones del fabricante?

Incertidumbre en las Mediciones

La expresión del resultado de una medición está completa sólo cuando contiene tanto el **Valor Medido** como la **Incertidumbre** de medida asociada al mismo.

Procedimiento aceptado mundialmente para la expresión de la incertidumbre de medición:

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), "Evaluation of measurement data. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", JCGM 100, First edition. September 2008 (GUM 1995 with minor corrections)

IRAM, Norma 35050, "Estadística. Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de la medición.",
Primera edición, 2001-06-15

(Todas las magnitudes que no se conocen exactamente son tratadas como variables aleatorias, incluso las magnitudes de influencia que pueden afectar al valor medido)

Fuentes de incertidumbre de una medición:

- ✓ Definición incompleta o imperfecta de la magnitud medida.
- ✓ Muestreo no representativo.
- ✓ Efectos no adecuadamente conocidos de las condiciones ambientales o mediciones imperfectas de las mismas.
- ✓ Desviaciones personales en la lectura de instrumentos analógicos.
- ✓ Límites en la resolución del instrumento.

Fuentes de incertidumbre de una medición:

- ✓ Valores inexactos de los patrones y materiales de referencia utilizados.
- ✓ Valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y utilizados en el algoritmo para la obtención de datos.
- ✓ Aproximaciones e hipótesis incorporadas en el método y el procedimiento de medición.
- ✓ Variaciones en observaciones repetidas realizadas en condiciones aparentemente idénticas.

(Fuentes no necesariamente independientes)

Si la función f representa el procedimiento de medición y el método de evaluación de una magnitud de salida Y , que depende de una serie de magnitudes de entrada X_i ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad \Rightarrow \quad \text{Ejemplo: } I = \frac{U}{R}$$

El conjunto de magnitudes de entrada X_i , puede agruparse en dos categorías, a saber:

- de valor estimado e incertidumbre determinados directamente en la medición;
- el valor estimado y la incertidumbre asociada se incorporan a la medición desde fuentes externas (patrones de medida calibrados, materiales de referencia o datos de manuales).

$$\Rightarrow I = \frac{U}{R_{\text{Patrón}}}$$

Si se dispone de *estimaciones* de entrada x_i , se puede obtener una *estimación* de salida, y :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Se definen:

$u (x_i)$: incertidumbre típica de las *estimaciones de entrada* x_i (desviación típica de X_i)

$u (y)$: incertidumbre típica de medida asociada a la *estimación de salida* o al resultado de la medición (desviación típica de Y). Se determina a partir de los valores estimados x_i de las magnitudes de entrada X_i y sus incertidumbres típicas asociadas $u(x_i)$.

Evaluación de la incertidumbre de medida de las estimaciones de entrada x_i

Tipo A: La incertidumbre se determina mediante el análisis estadístico de una serie de observaciones. La incertidumbre típica es la desviación típica experimental de la medida.

Tipo B: La incertidumbre típica se evalúa mediante un procedimiento distinto al análisis estadístico de una serie de observaciones. La estimación de la incertidumbre típica se basa en otros conocimientos científicos.

Evaluación **Tipo A** de la incertidumbre típica

Se utiliza cuando se han realizado n observaciones independientes de una de las magnitudes de entrada X_i .

Llamando Q a la magnitud de entrada X_i , de la que se han efectuado n observaciones estadísticamente independientes ($n > 1$), se tiene:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j$$

media aritmética o promedio de todos los valores observados q_j ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2}$$

desviación típica experimental

$$s(\bar{q}) = \sqrt{\frac{s^2(q)}{n}}$$

desviación típica
experimental de la media

$$s(\bar{q}) = u(\bar{q})$$

***Incertidumbre Típica
(Tipo A)***

Los grados de libertad, ν :

Número de términos de una suma, menos el número de restricciones sobre los términos de dicha suma.

(n-1) para el caso más común y simple de incertidumbre, en el cual la media y la desviación se calculan a partir de ***n*** observaciones independientes.

Debe indicarse siempre que se evalúen componentes de incertidumbre de Tipo A.

Evaluación *Tipo B* de la incertidumbre típica

La incertidumbre típica $u(x_i)$ se evalúa aplicando un juicio científico basado en toda la información disponible sobre la posible variabilidad de X_i .

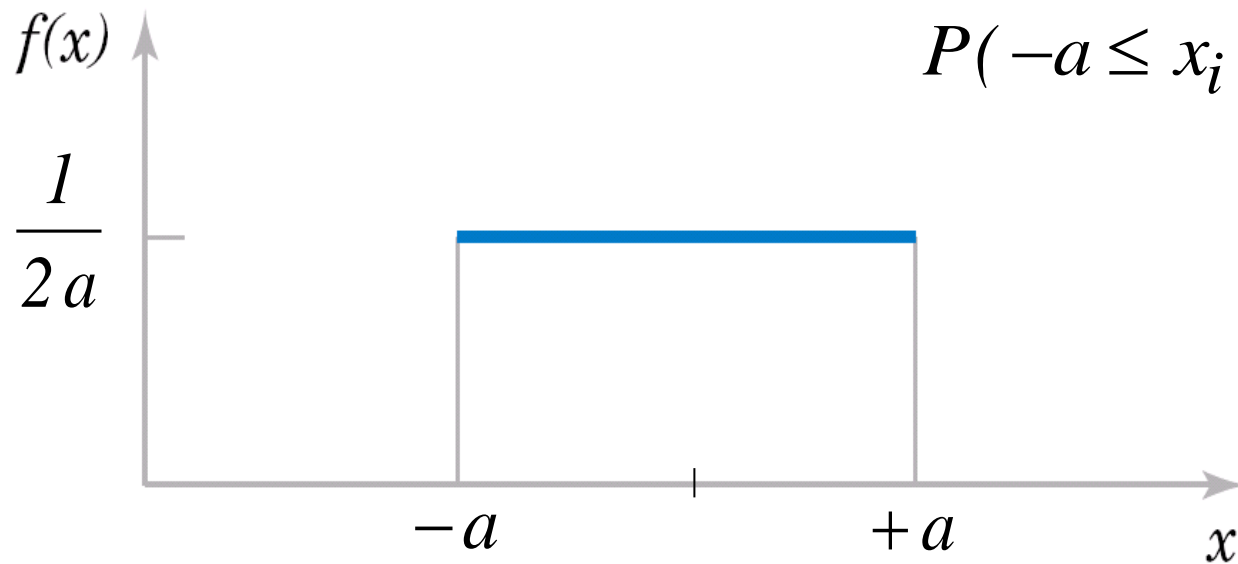
- ✓ Especificaciones de los fabricantes o incertidumbres asignadas a los datos de referencia obtenidos de manuales.
- ✓ Datos obtenidos de mediciones anteriores o de calibraciones u otros certificados.
- ✓ Experiencia o conocimientos del comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos.

Diferentes casos de Evaluación *Tipo B*

- a) Se conoce un solo valor de X_i (p.e. el valor de una única medición, un valor de referencia, etc.).
- b) Se puede suponer una distribución de probabilidad para la magnitud X_i , basándose en la teoría o en la experiencia.
- c) Sólo pueden estimarse unos límites superior e inferior, a_+ y a_- para la magnitud X_i . (p.e. especificaciones del fabricante de un instrumento de medición, intervalo de temperaturas, error de redondeo o de truncamiento, etc):

$$x_i = \frac{1}{2} (a_+ + a_-) \quad \text{(distribución rectangular)} \quad \Rightarrow \quad u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(Grados de libertad, $\nu = \infty$)



$$\sigma = \sqrt{\int_{-a}^{+a} (x - \bar{x})^2 \frac{1}{2a} dx} = \frac{a}{\sqrt{3}} = u(x_i)$$

Así, para cada estimación de entrada x_i podemos expresar en general su incertidumbre típica como:

$$u(x_i) = \sqrt{u^2(x_i)_{\text{Tipo A}} + u^2(x_i)_{\text{Tipo B}}}$$

Cálculo de la incertidumbre típica de la estimación de salida, $u(y)$

(para magnitudes de entrada no correlacionadas)

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)} \quad \text{Con} \quad u_i(y) = c_i u(x_i)$$

y $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bigg|_{X_i=x_i \dots X_N=x_N}$ (coeficientes de sensibilidad)

$$\Rightarrow u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u(x_i) \right]^2}$$

Incertidumbre Expandida de Medida

La incertidumbre expandida de medida U , se calcula multiplicando la incertidumbre típica $u(y)$ de la estimación de salida y por un factor de cobertura k .

$$U = k \cdot u(y)$$

Si la magnitud medida y y la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida poseen **distribución normal**, el factor de cobertura más utilizado es $k = 2$. La incertidumbre expandida asociada U corresponde a una probabilidad de cobertura de, aproximadamente, un **95%**.

Hipótesis de **distribución normal** basadas en las condiciones del **Teorema del Límite Central**

Cuando no pueda justificarse la hipótesis de una distribución normal, o la evaluación de la incertidumbre de Tipo A esté basada en pocas observaciones, debe utilizarse información sobre la distribución de probabilidad real, o una solución aproximada:

La distribución t (Student) con un número efectivo de Grados de Libertad (ν_{eff})

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

Fórmula de Welch-Satterhwaite

con:
$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$$

Para determinar la incertidumbre expandida U , se podrá obtener el factor k para una dada probabilidad de cobertura, empleando el número de grados efectivos de libertad, ν_{eff} , y la distribución t de Student.

Esquema de presentación de las magnitudes, estimaciones, incertidumbres típicas, coeficientes de sensibilidad y contribuciones a la incertidumbre, utilizados en el análisis de la incertidumbre de una medida

<i>magnitud</i> X_i	<i>estimación</i> x_i	<i>Incertidumbre típica</i> $u(x_i)$	<i>Coeficiente de sensibilidad</i> c_i	<i>Contribución a la incertidumbre típica</i> $u_i(y)$	<i>Grados de libertad</i> ν_i
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$	ν_1
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$	ν_2
$:$	$:$	$:$	$:$	$:$	$:$
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N(y)$	ν_N
Y	y	- - - - -	- - - - -	$u(y)$	ν_{eff}

Expresión de la incertidumbre de medida

El resultado una medición, que consiste en el estimado y de la magnitud de salida y la incertidumbre expandida asociada U , se expresa como:

$$(y \pm U)$$

*“La incertidumbre expandida de medida se ha obtenido multiplicando la incertidumbre típica de medición por el factor de cobertura $k = 2$ que, para una distribución normal, corresponde a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el **95 %**.”*

Procedimiento, paso a paso, para el cálculo de la incertidumbre de medida

- Expresar, en términos matemáticos, la dependencia de la magnitud de salida Y respecto de las magnitudes de entrada X_i .

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- Identificar y aplicar todas las correcciones significativas.
- Relacionar todas las fuentes de incertidumbre.

$$u_i(y) = c_i \, u(x_i) \quad ; \quad c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bigg|_{X_i = x_i \dots X_N = x_N}$$

- Para magnitudes medidas reiteradamente, calcular la incertidumbre típica $u(\bar{q})$ (Evaluación **Tipo A**)

❑ Evaluar la incertidumbre **Tipo B**, de las magnitudes de entrada correspondientes (valores únicos, se puede suponer una distribución de probabilidad, etc.) en función de los lineamientos dados antes.

❑ Calcular X_i , y la contribución $u_i(y)$ a la incertidumbre de salida $u(y)$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u(x_i) \right]^2}$$

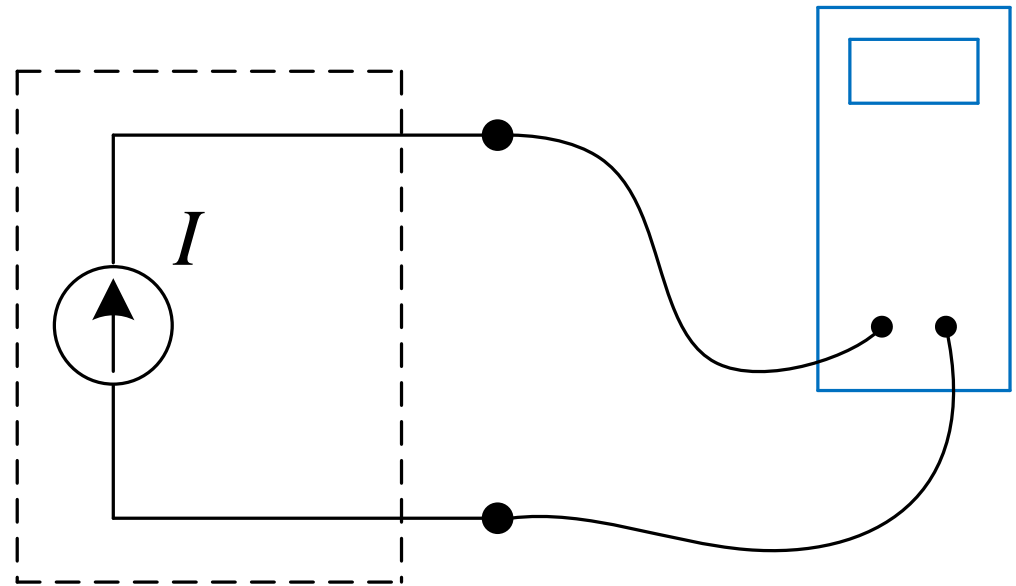
❑ Determinar la incertidumbre expandida U , multiplicando la incertidumbre típica $u(y)$ de la estimación de salida, por el factor de cobertura k elegido $U = k u(y)$

y expresar el resultado como: $(y \pm U)$

Ejemplo de aplicación del cálculo de la Incertidumbre Expandida

Se efectúa la medición de la corriente en un circuito cuyo equivalente se muestra en la figura, utilizando la función amperímetro de continua de un multímetro del tipo de los que se emplearán en los Trabajos Prácticos.

Se pretende determinar el valor de I con su incertidumbre expandida, para un factor de cobertura del 95 %.



Resultado de las mediciones

i	I_i [A]
1	10,22
2	10,11
3	10,35
4	10,17
5	10,26

(Se comprobó que mediciones sucesivas arrojaban distintas indicaciones, por lo que se decidió tomar 5 lecturas)

Evaluación de la incertidumbre **Tipo A**

$$\bar{I} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 I_i = 10,222 \text{ A}$$

$$s(I) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} =$$
$$= \sigma_{n-1} = 0,0909 \text{ A}$$

La desviación de la media es:

$$s(\bar{I}) = \sigma_{\bar{I}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$
$$= \frac{0,0909 \text{ A}}{\sqrt{5}} = 0,0407 \text{ A} = u_1$$

(Incertidumbre Tipo A)

Evaluación de la incertidumbre **Tipo B**

- a) Incertidumbre del multímetro en su función amperímetro de continua: se obtiene a partir de las especificaciones del aparato (manual del fabricante).
- b) Resolución del instrumento: en nuestro caso está directamente relacionada con su número de dígitos.
- c) Influencia de otras magnitudes tales como temperatura, campos externos, humedad, posición, etc.: surge de las especificaciones del fabricante, el control de las condiciones de contraste, o la experiencia previa.

(Para el desarrollo que sigue sólo consideraremos las dos primeras)

a) Incertidumbre del multímetro:

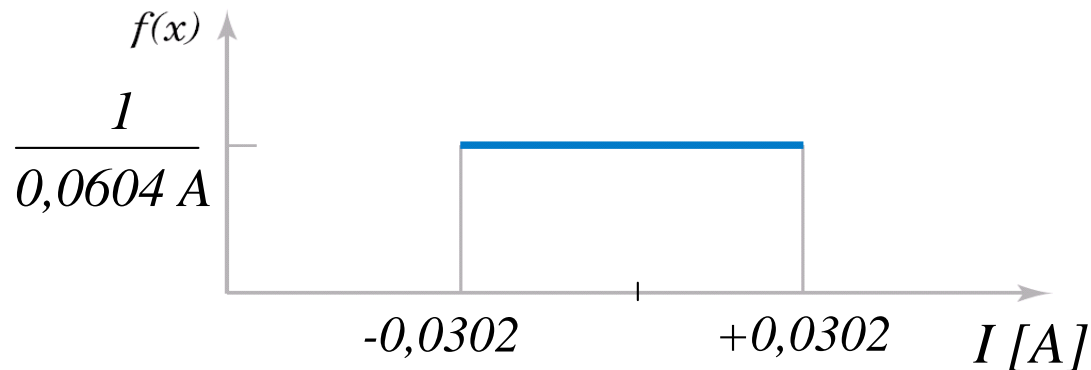
$$U_{\text{multímetro}} = \pm (0,1\% I_{\text{medido}} + 20 \text{ mA})$$

Dato obtenido del manual del aparato, para las condiciones en las que ha sido usado. Se detalla además, que esta incertidumbre posee una **distribución rectangular**.

Para nuestro caso será:

$$U_{\text{multímetro}} = \pm \left(\frac{0,1}{100} * 10,222 + 0,02 \right) A = \pm 0,0302 A$$

Dado que se trata de una distribución rectangular:



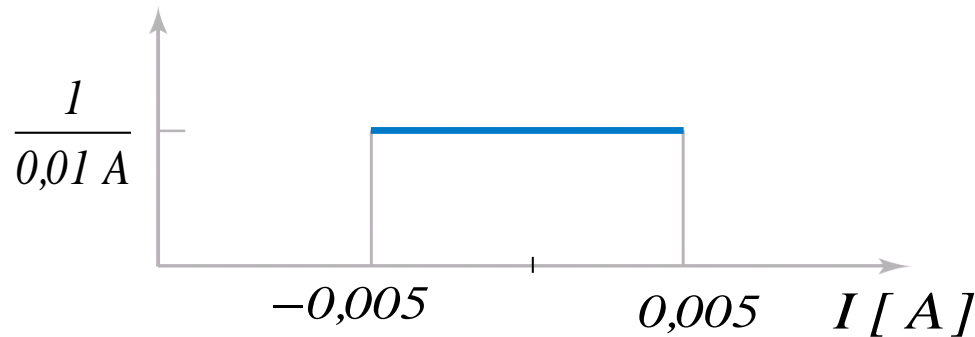
podemos escribir entonces:

$$u_2 = \frac{U_{\text{multímetro}}}{\sqrt{3}} = \frac{0,0302 A}{\sqrt{3}} = 0,0174 A$$

(componente de la incertidumbre Tipo B,
correspondiente a la incertidumbre del instrumento)

b) Resolución del instrumento:

Siendo un instrumento de $3\frac{1}{2}$ dígitos, y para la medición en cuestión, su presentación es **10,00 A**, por lo que su resolución será **0,01 A**. De acuerdo a lo visto antes para una distribución rectangular:



$$u_3 = u_{\text{resolución}} = \frac{0,01 A}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{0,005 A}{\sqrt{3}} = 0,0029 A$$

(componente de la incertidumbre **Tipo B**,
correspondiente a la resolución de la incógnita)

La incertidumbre final será
entonces:

$$u(I) = \sqrt{(c_1 \cdot u_1)^2 + (c_2 \cdot u_2)^2 + (c_3 \cdot u_3)^2}$$

Además, y ya que en nuestro caso
se trata de una medición directa:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

$$\Rightarrow u(I) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$= \sqrt{0,0407^2 + 0,0174^2 + 0,0029^2} \text{ A}$$

$$= 0,0444 \text{ A}$$

Así, ya estamos en condiciones de efectuar una primera presentación de los resultados de forma tabulada:

<i>Magnitud X_i</i>	<i>Tipo de incerti- dumbre</i>	<i>Incertidum- bre típica $u(x_i)$</i>	<i>Coeficiente de sensibilidad c_i</i>	<i>Contribución a la incertidumbre típica $u_i(y)$</i>	<i>Grados de Libertad ν_i</i>
<i>Repetibi- lidad</i>	<i>A</i>	<i>0,0407 A</i>	<i>1</i>	<i>0,0407 A</i>	<i>4</i>
<i>Instrumento</i>	<i>B</i>	<i>0,0174 A</i>	<i>1</i>	<i>0,0174 A</i>	∞
<i>Resolución</i>	<i>B</i>	<i>0,0029 A</i>	<i>1</i>	<i>0,0029 A</i>	∞

$$I = 10,222 \text{ A} \quad ; \quad u(I) = 0,0444 \text{ A}$$

*(Incertidumbre típica de
la estimación de salida)*

Resta ahora determinar la incertidumbre expandida $U(I)$, multiplicando la incertidumbre típica $u(I)$, por un factor de cobertura k . Según lo solicitado en el enunciado del problema se debe hallar la incertidumbre de medición para una probabilidad de cobertura del **95 %**.

Empleando la expresión de Welch-Satterhwaite, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \nu_{eff} &= \frac{u^4(I)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(I)}{\nu_i}} = \frac{u^4(I)}{\frac{u_1^4(I)}{4} + \frac{u_2^4(I)}{\infty} + \frac{u_3^4(I)}{\infty}} \\
 &= \frac{0,0444^4}{\frac{0,0407^4}{4} + \frac{0,0174^4}{\infty} + \frac{0,0029^4}{\infty}} = 6
 \end{aligned}$$

Así, mediante la distribución de Student, para una probabilidad de cobertura (p) del **95 %** y **6 grados de libertad**, se obtiene un factor de cobertura $k (t_p(\nu))$ igual a **2,45**.

La incertidumbre expandida $U(I)$, se obtienen ahora multiplicando la incertidumbre típica $u(I)$, por el factor de cobertura k hallado:

$$\Rightarrow U(I) = k * u(I) = 2,45 * 0,0444 \text{ A} = 0,11 \text{ A}$$

Así, la expresión final del resultado, de acuerdo a lo sugerido antes, se puede escribir como:

$$I = (10,22 \pm 0,11) \text{ A}$$

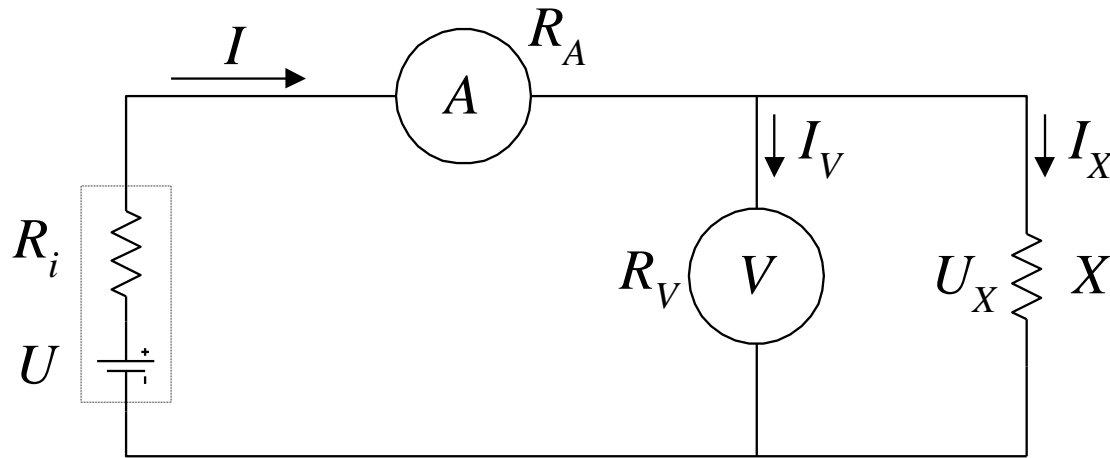
*“Correspondiente a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el **95 %**.”*

Tabla G.2 - Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t , para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que incluye la fracción p de la distribución.

Número de grados de libertad, ν	Fracción p , en porcentaje					
	68,27 ^{a)}	90	95	95,45 ^{a)}	99	99,73 ^{a)}
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76



Método del Voltímetro y el Amperímetro



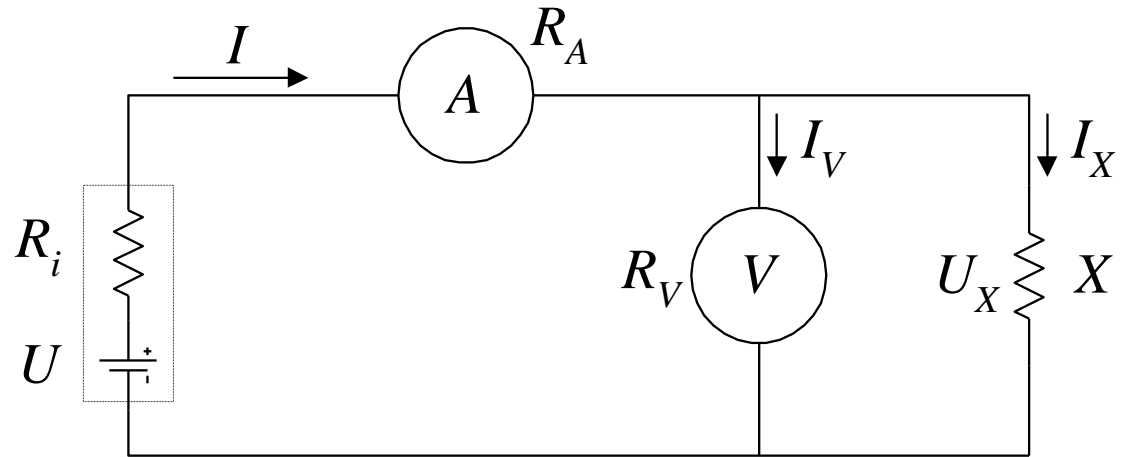
(Conexión
Corta)

$$X = \frac{U_X}{I_X}$$

$$e_X = \pm(e_{U_X} + e_{I_X})$$

El amperímetro no medirá I_X , sino $I_m = I_X + I_V$

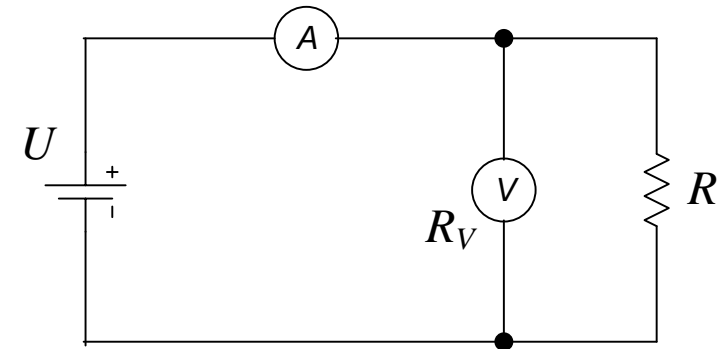
Conexión Corta



$$X = \frac{U_X}{(I_m - I_V)} = \frac{U_m}{\left(I_m - \frac{U_m}{R_V}\right)}$$

$$e_X = \pm \left(1 + \frac{X}{R_V}\right) * (e_{U_m} + e_{I_m})$$

Ejemplo: se efectuó la determinación del valor de una resistencia R , empleando el método del voltímetro y el amperímetro (*en conexión corta*).



Expresar la incertidumbre de medición según la forma $(y \pm U)$, para una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95%.

Valores medidos:

Medición N°	1	2	3	4	5	6
$V_m [V]$	12,615	12,610	12,614	12,612	12,615	12,613
$I_m [mA]$	237,21	237,20	237,18	237,22	237,20	237,21

Instrumentos utilizados: multímetros Hewlett Packard, modelo HP974A, en los alcances de 50 V y 500 mA de corriente continua, respectivamente.

Specifications

Calibration period: six months minimum. Specifications apply at $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$, $< 80\% \text{ RH}$

Accuracy = \pm (% of reading + number of digits)

Temperature Coefficient = Accuracy $0.1/^{\circ}\text{C}$ (0°C to 18°C ; 28°C to 55°C)

DC Voltage

Range	Resolution	Accuracy	Input Resistance
500 mV	10 μV	$\pm (0.05\% + 2)$	$> 1000 \text{ M}\Omega$
5 V	100 μV		11 $\text{M}\Omega$ (nominal)
50 V	1 mV		10 $\text{M}\Omega$ (nominal)
500 V	10 mV		
1000 V	100 mV		

DC Current, AC Current (40 Hz to 1 kHz), 5% to 100% of range

Range	Resolution	DC Current Accuracy	AC Current Accuracy	Input Resistance	Maximum Input
500 μA	10 nA	$\pm (0.3\% + 2)$	$\pm (1\% + 20)$	$< 1050 \Omega$	0.5 A (fused)
50 mA	1 μA			$< 12 \Omega$	
500 mA	10 μA			$< 2.5 \Omega$	
10 A	1 mA	$\pm (0.7\% + 2)$		$< 0.05 \Omega$	15 A (fused)

Expresión de la magnitud de salida en función de las magnitudes de entrada, en primera aproximación:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) = f(V_m, I_m) = R = \frac{V_m}{I_m}$$

Pero, teniendo en cuenta el consumo del voltímetro para la conexión usada, se debería efectuar, al menos inicialmente, la siguiente corrección:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) = f(V_m, I_m, R_V) = R = \frac{V_m}{I_m - \frac{V_m}{R_V}}$$

con R_V resistencia del
voltímetro.

Estimación de salida y , a partir de las estimaciones de entrada x_1, x_2, \dots, x_N . Para el primer par de valores:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{12,615 \text{ V}}{237,21 \text{ mA} - \frac{12,615 \text{ V}}{10 \text{ M}\Omega}} = 53,181 \text{ }\Omega$$

Repitiendo el procedimiento para los restantes pares de valores, se obtiene:

Medición N°	1	2	3	4	5	6
$R_m [\Omega]$	53,181	53,162	53,184	53,166	53,183	53,173

Para determinar la incertidumbre de la estimación de salida, $u(y)$, se tendrá en cuenta que en este caso conviven el **Tipo A** y el **Tipo B**, y que el valor de la resistencia R_V se conoce sin error.

Evaluación **Tipo A** de la incertidumbre típica:

A partir de los 6 valores determinados de R_m , se obtiene:

$$\bar{R} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 R_j = 53,175 \ \Omega$$

y la incertidumbre típica de **Tipo A** :

$$u_A(R) = s(\bar{R}) = \frac{s(R)}{\sqrt{6}} = 0,0038 \ \Omega$$

(coeficiente de sensibilidad igual a 1)

Evaluación **Tipo B** de la incertidumbre típica:

De las expresiones de los errores de los instrumentos, para el promedio de los valores medidos de tensión y corriente:

$$E_{V_m} = \pm (0,05 \% V_m + 2 \text{ díg}) = \pm 0,0083 \text{ V}$$

$$E_{I_m} = \pm (0,3 \% I_m + 2 \text{ díg}) = \pm 0,73 \text{ mA}$$

Resoluciones de los instrumentos:

$$Re s_{V_m} = \pm \frac{0,001 \text{ V}}{2} = \pm 0,0005 \text{ V}$$

$$Re s_{I_m} = \pm \frac{0,01 \text{ mA}}{2} = \pm 0,005 \text{ mA}$$

Considerando para los cuatro valores anteriores, una distribución de probabilidad rectangular:

$$u(E_{V_m}) = \frac{0,0083 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,0048 \text{ V}$$

$$u(E_{I_m}) = \frac{0,73 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,42 \text{ mA}$$

$$u(Re s_{V_m}) = \frac{0,0005 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,00029 \text{ V}$$

$$u(Re s_{I_m}) = \frac{0,005 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,0029 \text{ mA}$$

Para hallar la incertidumbre típica de **Tipo B**, ($u_B(R)$), resta determinar los coeficientes de sensibilidad c_i , que para este caso son:

$$u_B(R) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u(x_i) \right]^2}$$

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bigg|_{X_i=x_i \dots X_N=x_N}$$

$$c_{V_m} = \frac{\partial R}{\partial V_m} = \frac{I_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V} \right)^2} = 4,2159 \frac{1}{A}$$

$$c_{I_m} = \frac{\partial R}{\partial I_m} = \frac{-V_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V} \right)^2} = -224,18 \frac{V}{A^2}$$

(No se ha determinado el coeficiente de sensibilidad correspondiente a R_V ya que se ha considerado que su valor se conoce sin error)

La incertidumbre típica de **Tipo B**,
 $u_B(R)$, será:

$$u_B(R) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u(x_i) \right]^2}$$

$$u_B(R) = \pm \sqrt{[u_{V_m}^2(R) + u_{I_m}^2(R)]}$$

$$u_B(R) = \pm \sqrt{c_{V_m}^2 [u^2(E_{V_m}) + u^2(Re s_{V_m})] + c_{I_m}^2 [u^2(E_{I_m}) + u^2(Re s_{I_m})]}$$

$$\begin{aligned} u_B(R) &= \pm \sqrt{4,2159^2 [0,0048^2 + 0,00029^2] + 224,18^2 [0,00042^2 + 0,0000029^2]} \Omega = \\ &= \pm \sqrt{0,02024^2 + 0,00122^2 + 0,09416^2 + 0,00065^2} \Omega = \pm 0,096 \Omega \end{aligned}$$

Considerando ahora todas las contribuciones a la incertidumbre (**Tipo A** y **Tipo B**), la incertidumbre típica de la estimación de salida, $u(R)$, será:

$$\begin{aligned} u(R) &= \pm \sqrt{u_A^2(R) + u_B^2(R)} \\ &= \pm \sqrt{0,0038^2 + 0,096^2} = \pm 0,096 \, \Omega \end{aligned}$$

(Notar que, para este ejercicio, la contribución a la incertidumbre típica de **Tipo A** es despreciable frente a la de **Tipo B**)

Para determinar la incertidumbre expandida de medida **U** , se deberá hallar el factor de cobertura **k** que asegure un intervalo de confianza de aproximadamente el **95 %**. Según lo visto antes, se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- ❖ El número de grados de libertad ν_i para la componente de incertidumbre de Tipo A, **$(n-1)$** , es igual a **5**.
- ❖ El número de grados de libertad ν_i para las componentes de incertidumbre de Tipo B es infinito (∞).

Con lo cual el número efectivo de grados de libertad, ν_{eff} , según la expresión de Welch-Satterhwaite, será:

$$\begin{aligned} \nu_{eff} &= \frac{u^4(R)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(R)}{\nu_i}} = \frac{u^4(R)}{\frac{u_A^4(R)}{5} + \frac{u_{V_m}^4(R)}{\infty} + \frac{u_{I_m}^4(R)}{\infty}} \\ &= \frac{(0,096 \text{ } \Omega)^4}{\frac{(0,0038 \text{ } \Omega)^4}{5}} > 2 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la tabla de la Distribución “t” de Student, para un intervalo de confianza del **95 %** e ∞ grados de libertad, se obtiene un factor de cobertura **$k(t_p(\nu))$** igual a **1,96**.

Tabla G.2 - Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t , para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que incluye la fracción p de la distribución.

Número de grados de libertad, ν	Fracción p , en porcentaje					
	68,27	90	95	95,45	99	99,73
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
----	----	----	----	----	----	----
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

Tabla de presentación de datos del análisis de incertidumbre

<i>magnitud</i> X_i		<i>Estima- ción</i> x_i	<i>Incetidum- bre típica</i> $u(x_i)$	<i>Coeficiente de sensibilidad</i> c_i	<i>Contribución a la incertidumbre típica</i> $u_i(y)$	<i>Grados de libertad</i> ν_i
R_m		53,175 Ω	0,0038 Ω	1	0,0038 Ω	5
V_m	E_{V_m}	12,613 V	0,0048 V	$4,2159 \frac{1}{A}$	0,02024 Ω	∞
	$Re s_{V_m}$		0,00029 V		0,00122 Ω	∞
R_V		10 M Ω	-----	-----	-----	---
I_m	E_{I_m}	237,20 mA	0,42 mA	$- 224,18 \frac{V}{A^2}$	0,09416 Ω	∞
	$Re s_{I_m}$		0,0029 mA		0,00065 Ω	∞
R		53,175 Ω	-----	-----	0,096 Ω	∞

Considerando el factor de cobertura **$k=1,96$** , la incertidumbre expandida asociada será:

$$U = k \cdot u(y) = 1,96 \cdot 0,096 \, \Omega = 0,19 \, \Omega$$

Por lo que el resultado de la medición, expresado de la forma $(y \pm U)$, será:

$$R = (53,18 \pm 0,19) \, \Omega$$

*“La incertidumbre expandida de medida se ha obtenido multiplicando la incertidumbre típica de medición por el factor de cobertura **$k = 1,96$** que, para una distribución normal, corresponde a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el **95 %**.”*