Repaso de Herramientas algebraicas

Pablo Muñoz

Índice

1. Matrices

Recordemos que una matriz A de $n \times m$ es un ordenamiento rectangular de escalares dispuestos en m filas y n columnas:

$$\begin{array}{cc}
A \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{pmatrix} & \leftarrow \text{fila } i \\
\uparrow \text{columna } j &
\end{array}$$

Para designar a cada uno de los $m \cdot n$ elementos de la matriz se utiliza un doble subíndice que indica el número de fila y número de columna que le corresponde en el arreglo. Así, en forma general el elemento a_{ij} es el elemento de la matriz que está ubicado en la fila i y en la columna j.

Definimos a la matriz nula de $n \times m$ como la aquella cuyos elementos son todos ceros y la anotamos $O_{n\times m}$, es decir, $O_{n\times m} = (o_{ij})$ con $o_{ij} = 0 \forall i, j$; y decimos que dos matrices son iguales si son del mismo orden (misma cantidad de filas y columnas) y sus elementos son iguales, es decir, si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$.

1.1. Suma y producto de matrices

Recordemos que la suma de matrices se define como la suma elemento a elemento y por lo tanto las matrices tienen que ser del mismo orden, es decir, si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ entonces

$$A + B = C \in \mathbb{C}^{n\times m} \mid c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i, j,$$

por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4{,}5 \end{pmatrix}.$$

También se pueden multiplicar matrices por escalares, y nuevamente resulta una operación elemento a elemento. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\alpha A = B \in \mathbb{C}^{n\times m} \mid b_{ij} = \alpha a_{ij} \ \forall i, j,$$

por ejemplo,

$$5 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}.$$

La suma de matrices y multiplicación por escalares tienen las siguientes propiedades. Si $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces se verifica que:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O_{n\times m} = O_{n\times m} + A = A$

- $A + (-A) = (-A) + A = O_{n\times m}$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $1A = A$

Otra operación que se puede realizar entre matrices es el producto que tiene algunas diferencias con el producto entre escalares. Para comenzar, recordemos como se define: sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$, o sea se cumple que la cantidad de columnas de la primera es igual a la cantidad de filas de la segunda, entonces el producto es

$$AB = C \in \mathbb{C}^{n\times r} \mid c_{ij} = \text{fila } i\text{de } A \cdot \text{columna } j\text{de } B,$$

que en forma concisa se escribe

$$AB = C \in \mathbb{C}^{n\times r} \mid c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ el producto resulta

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 & 4\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 4\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}. \end{aligned}$$

Note que no se puede calcular BA ya que el número de columnas de B no coincide con el número de filas de A. Por lo tanto, **en general el producto de matrices NO es conmutativo**. El producto de matrices tiene las siguientes propiedades. Si A, B y C son matrices de dimensiones adecuadas entonces se verifica que:

- $(AB)C = A(BC)$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = (\alpha A)B,\ \alpha \in \mathbb{C}$
- $OA = O$ y $AO = O$, con O la matriz nula de dimensión adecuada

1.2. Otras operaciones

Definimos a la traspuesta de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, que anotamos como A^T, como a la matriz de $m \times n$ que se obtienen a partir de A cambiando las filas por las columnas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si A y B son matrices de dimensiones adecuadas entonces se verifica que:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T,\ \alpha \in \mathbb{C}$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

También, definimos la conjugada de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, que anotamos como $\overline{A}$, que resulta una operación elemento a elemento, es decir, si A tiene elementos a_{ij} entonces $\overline{A}$ tiene elementos $\overline{a_{ij}}$, por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 5i \\ 4 & 5-3i & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & -5i \\ 4 & 5+3i & 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si A y B son matrices de dimensiones adecuadas entonces se verifica que:

- $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A},\ \alpha \in \mathbb{C}$
- $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$

Otra operación que podemos definir sobre la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la adjunta de la matriz, que anotamos como A^*, y se define $A^* = \overline{A}^T$ con las siguientes propiedades que resultan de forma inmediata de las propiedades de la traspuesta y la conjugación de matrices:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*,\ \alpha \in \mathbb{C}$
- $(A^*)^* = A$
- $(AB)^* = B^* A^*$

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con m incógnitas (sistema de $n \times m$) de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \ \text{y} \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en forma compacta la expresión de un sistema de ecuaciones lineales es:

$$AX = B,$$

donde A es la matriz de coeficientes, X es el vector de incógnitas y B es el vector de términos independientes. Llamamos matriz ampliada del sistema a la matriz que se arma al agregar el vector de términos independientes B a la matriz de coeficientes A, es decir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right).$$

Por último, si en el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, el vector de términos independientes $B = O$ (el vector columna nulo de n filas), entonces el sistema se dice homogéneo.

Soluciones del sistema de ecuaciones lineales

En función de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales decimos que el sistema resulta:

- **Incompatible** si no tienen solución
- **Compatible determinado** si tiene solución y es única
- **Compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones

Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales tienen las siguientes propiedades: si X_1, $X_2, \ldots$ son soluciones del sistema $S_B : AX = B$; Y_1, $Y_2, \ldots$ son soluciones del sistema homogéneo asociado $S_O : AX = O$; y $k_1, k_2 \ldots \in \mathbb{R}$, entonces

- $k_1 Y_1$ es solución del sistema S_O
- $Y_1 + Y_2$ es solución del sistema S_O
- $k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \cdots + k_j Y_j$ es solución del sistema S_O
- $X_1 - X_2$ es solución del sistema S_O
- $X_1 + Y_1$ es solución del sistema S_B
- $X_1 + k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \cdots + k_j Y_j$ es solución del sistema S_B

Cómo hallamos las soluciones

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Recordemos que existe un conjunto de operaciones que podemos realizar sobre las filas de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales que dan como resultado un sistema equivalente. Estas operaciones las conocemos como operaciones de Gauss sobre filas de una matriz y son:

- Intercambiar dos filas (elemental)
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero (elemental)
- A una fila sumarle el múltiplo de otra fila (elemental)
- A un múltiplo no nulo de una fila, sumarle el múltiplo de otra fila (no elemental: método del pivote)

Entonces, una forma de encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones del tipo $AX = B$ es realizando operaciones de Gauss sobre las filas de la matriz ampliada del sistema de manera de simplificar las ecuaciones. Esta forma simplificada es la que llamamos **matriz escalonada en las filas reducida** (o simplemente matriz reducida). Recordemos sus características:

- Las filas de ceros están abajo
- El primer elemento no nulo de cada
  la es un uno (unos principales)
- Cuanto más abajo la fila, más a la derecha su uno principal
- En las columnas que tengan unos principales, los demás elementos son cero

En definitiva, la matriz reducida es una matriz que tiene la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & k_{12} & \cdots & k_{1(m-1)} & k_{1m} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & k_{2(m-1)} & k_{2m} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & k_{(n-1)m} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \end{array}\right).$$

De aquí, queda claro que $x_n = c_n$, y reemplazando en la ecuación de la fila anterior se puede encontrar el valor de x_{n-1} y así sucesivamente se resuelve el sistema de "abajo para arriba".

3. Matrices cuadradas

Decimos que una matriz es cuadrada si tiene la misma cantidad de filas y columnas; y denominamos $\mathbb{C}^{n\times n}$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n. La diagonal principal de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ está formada por los elementos a_{ii}.

Definimos a la matriz identidad de orden n, que denotamos $\mathbb{I}_n$, como a la matriz cuadrada de orden n con unos en la diagonal principal y ceros en todos los demás elementos.

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices cuadradas (es como el 1 para el producto de números reales) de tal manera que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se verifica que:

$$\mathbb{I}_n A = A\mathbb{I}_n = A.$$

Matriz inversa

Decimos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, si existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que:

$$AB = BA = \mathbb{I}_\ltimes,$$

y decimos que la matriz B es la inversa de A. En general, anotamos a la inversa de A como A^{-1}.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibles entonces se verifica que:

- AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

O sea el producto de matrices invertibles es invertible. Note que la suma de matrices invertibles NO es necesariamente invertible. Por ejemplo, si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, entonces $A + (-A) = O_n$ que no es invertible.

- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, con $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Matrices cuadradas especiales

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada de orden n, definimos que:

- A es simétrica si y sólo si $A = A^T$
- A es antisimétrica si y sólo si $A = -A^T$

- A es hermítica si y sólo si $A = A^*$
- Dada A existe una única forma de escribir a $A = B + C$ con B simétrica y C antisimétrica y es utilizando $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ y $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$.
- A es triangular superior cuando los elementos debajo de la diagonal principal son ceros, es decir, si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- A es triangular inferior cuando los elementos debajo de la diagonal principal son ceros, es decir, si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- A es una matriz diagonal si es triangular superior e inferior, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

4. Determinantes

El determinante de una matriz es una cantidad especial que se asocia a una matriz cuadrada. Proporciona información sobre la geometría lineal de las transformaciones representadas por la matriz. En lo que sigue, recordamos cómo calcular el determinante de una matriz y algunas de sus propiedades fundamentales.

- **Menores de una matriz**: Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, llamamos menor ij de A y escribimos M_{ij} a la matriz que resulta de la fila i y la columna j de A.
- **Cofactores de una matriz**: Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos los cofactores de A como $c_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$. A la matriz $\mathrm{Cof}(A)$ con elemento c_{ij} la llamamos matriz de cofactores.

NOTA: Llamamos adjunta de A a $(\mathrm{Cof}(A))^T$, y anotamos $\mathrm{Adj}(A)$. No debe confundirse con la operación adjunta $A^* = \overline{A}^T$.

Métodos de Cálculo

Dada una matriz cuadrada A, el determinante se denota por $\det(A)$ o $|A|$. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Regla de Sarrus (sólo para 3×3)

Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, puedes usar la regla de Sarrus para calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \searrow & + \searrow & + \searrow & - \swarrow & - \swarrow & - \swarrow \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned} &=(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) + (a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - \\ &-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}) - (a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}). \end{aligned}$$

Desarrollo por fila y por columna

Consideremos una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de A se puede calcular por el desarrollo por filas o por columnas. El método de desarrollo por filas es el siguiente:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in},$$

donde c_{ij} es el cofactor asociado al elemento a_{ij}.

Análogamente, el desarrollo por columnas es:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

La elección entre desarrollo por filas o columnas depende de la conveniencia y de la simplicidad del cálculo.

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollo por filas:

$$\det(A) = 1 \cdot \det(M_{11}) - 2 \cdot \det(M_{12}) + 3 \cdot \det(M_{13}),$$

donde M_{ij} es el menor ij.

Desarrollo por columnas:

$$\det(A) = 1 \cdot \det(M_{11}) - 0 \cdot \det(M_{21}) - 4 \cdot \det(M_{31}).$$

Propiedades

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k \in \mathbb{C}$ y f_i las filas de la matriz A. Se cumplen las siguientes propiedades:

- $|A^T| = |A|$
- $|\overline{A}| = \overline{|A|}$
- $|A^*| = \overline{|A|}$

- $|AB| = |A|\,|B|$
- $|kA| = k^n\,|A|$
- A es invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- Si A es invertible, entonces $|A|\,\left|A^{-1}\right| = 1$
- $A\mathrm{Adj}(A) = |A|\,\mathbb{I} \Rightarrow$si $|A| \neq 0$ resulta $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$
- El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene solución única $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- El determinante de una matriz diagonal es el producto de sus elementos diagonales
- El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de sus elementos diagonales

Las siguientes propiedades descritas por filas, también valen por columnas.

- Si una matriz tiene una fila de ceros, entonces su determinante es cero
- Si una matriz tiene dos filas múltiplos, su determinante es cero
- $\begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ k \cdot f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i + f_i' \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i' \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$

Regla de Cramer

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible y consideremos el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, con $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Si llamamos $\Delta = |A|$ y Δ_i al determinante de A pero donde la columna i fue reemplazada por B, entonces $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

5. Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada A, denotada por $\mathrm{tr}(A)$, es la suma de los elementos de su diagonal principal. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la traza se calcula como:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Propiedades

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{C}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$
- $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
- $\mathrm{tr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$
- $\mathrm{tr}(A^*) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$