Control Automático 2

Sistemas Dinámicos Lineales y No Lineales.

- Métodos de Estabilidad de Lyapunov

F. Valenciaga 2023

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

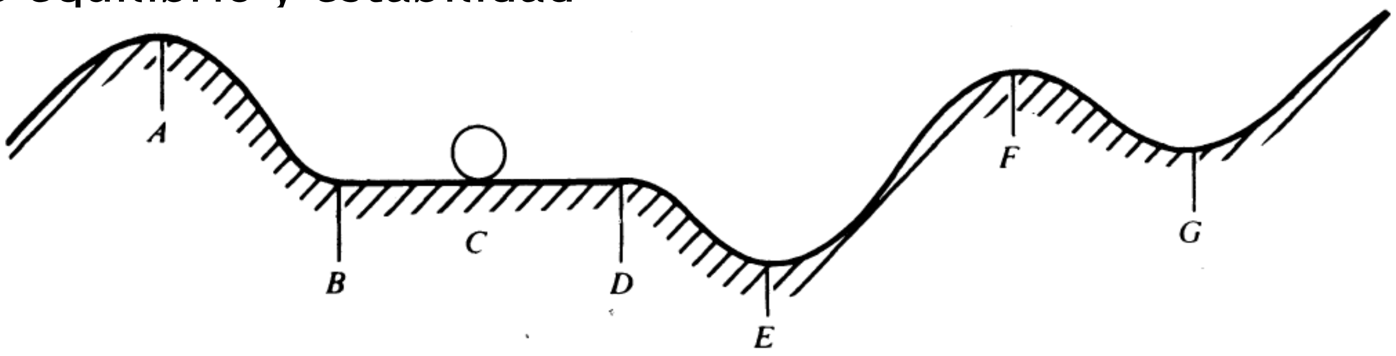
- El criterio de estabilidad empleado ha sido hasta ahora el criterio BIBO (Entrada Acotada – Salida Acotada). Seguiremos considerando un criterio similar, pero de entrada a estados.

- Para sistemas dinámicos lineales resulta “sencillo” determinar la estabilidad de un punto de operación. Sin embargo, esta determinación se complica sobre sistemas dinámicos no lineales. A veces no se llega a obtener una determinación concluyente.

- El análisis a través de la metodología de Lyapunov permite estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos no lineales en forma analítica. Sin embargo, esta metodología no garantiza obtener resultados cerrados. En sistemas complejos depende del ingenio que se tenga en el planteamiento de funciones de Lyapunov adecuadas.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Puntos de equilibrio y estabilidad



Determinar estabilidad requiere contestar preguntas como: si en $t = t_0$ el estado es perturbado de su estado de equilibrio, el estado retorna a x_e? Se mantiene cerca de x_e o diverge?

En el espacio de estados, un punto de equilibrio para un sistema continuo es un punto en el cual $\dot{x} = 0$ ($x(k+1) = x(k)$ para un sistema discreto) en ausencia de toda entrada y perturbaciones. Si el sistema se coloca en ese estado, se mantiene ahí indefinidamente.
Obviamente, si se considera existencia de perturbaciones la amplitud de la perturbación puede hacer que el sistema se vaya del entorno de un punto de equilibrio aunque este sea estable. Esto no modifica la característica de estabilidad de ese punto. Esta se define para perturbaciones suficientemente "pequeñas".

En el caso de la figura, A, E, F y G son puntos de equilibrio aislados del sistema. Un punto C ubicado en cualquier lugar del segmento [B,D] también lo es.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Puntos de equilibrio y estabilidad

La expresión analítica que representa la dinámica de un sistema no lineal puede escribirse como:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n \; y \; \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$$

Los puntos de equilibrio de este sistema pueden obtenerse a partir de la resolución de:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, t \geq t_0 \longrightarrow \boldsymbol{x_e}$$

Cualquier punto de equilibrio asilado puede ser trasladado al origen mediante un cambio de variables ($\bar{x} = x - x_e$).

Sólo consideraremos entonces puntos de equilibrios aislados en $x_e = 0$ sin perder generalidad

En el caso de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LIT) esto significa que si A es no singular (tiene inversa) el origen es el único punto de equilibrio y obviamente es aislado. En el caso de ser singular existen infinitos puntos de equilibrio:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Puntos de equilibrio y estabilidad

El sistema dinámico no lineal $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ se dice autónomo si $\boldsymbol{f}$ no depende explícitamente del tiempo, es decir, si se puede escribir como $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$. Caso contrario el sistema es no autónomo.

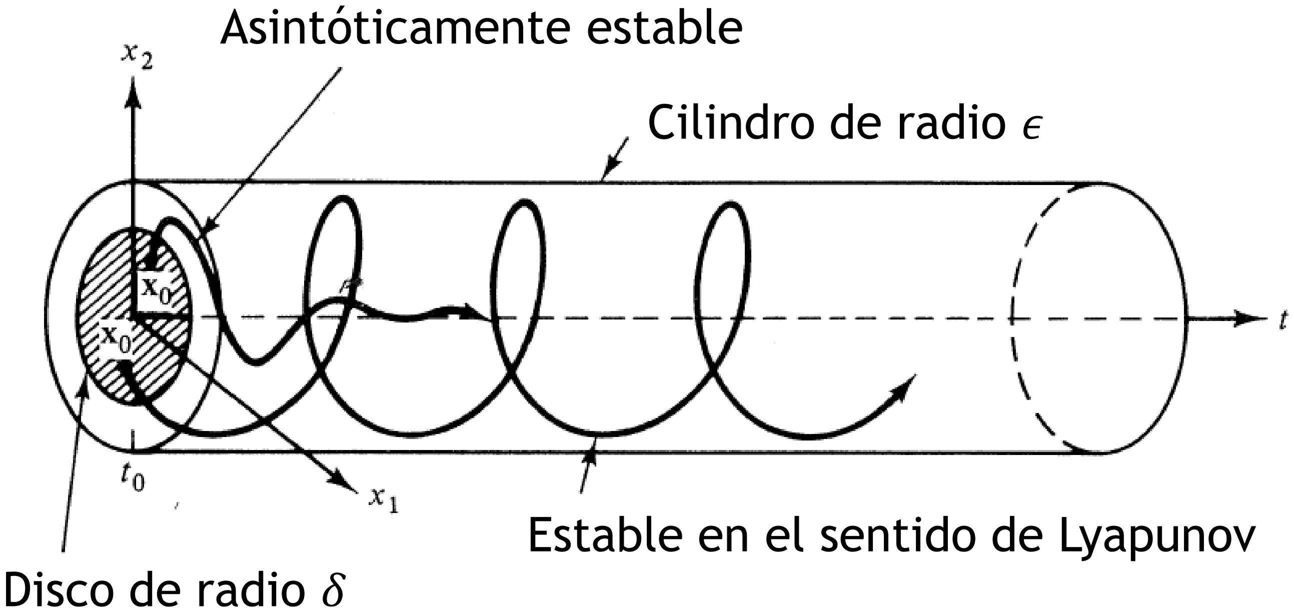
La principal diferencia entre un sistema autónomo y uno no autónomo radica en que las trayectorias de un sistema autónomo no dependen del tiempo inicial, mientras que para un sistema no autónomo generalmente no es así.

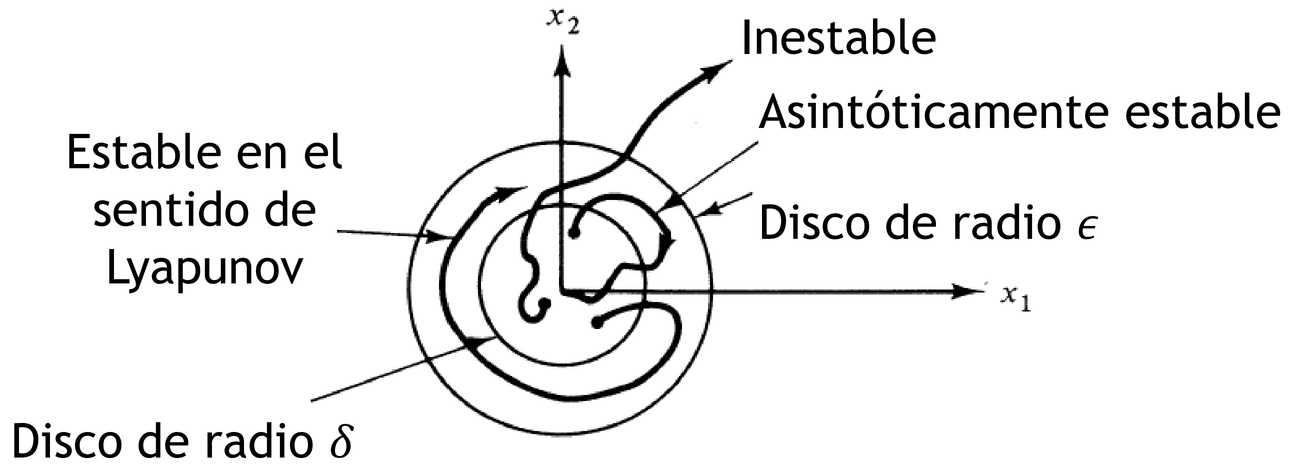
El concepto de sistema autónomo es una idealización así como lo es el concepto de sistema lineal. Un sistema se puede volver no autónomo (y también no lineal) debido al controlador.

En el ámbito de los sistemas dinámicos lineales esta clasificación corresponde a que los sistemas sean invariantes o variantes en el tiempo respectivamente (valores de los elementos de la matriz A variando en el tiempo).

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

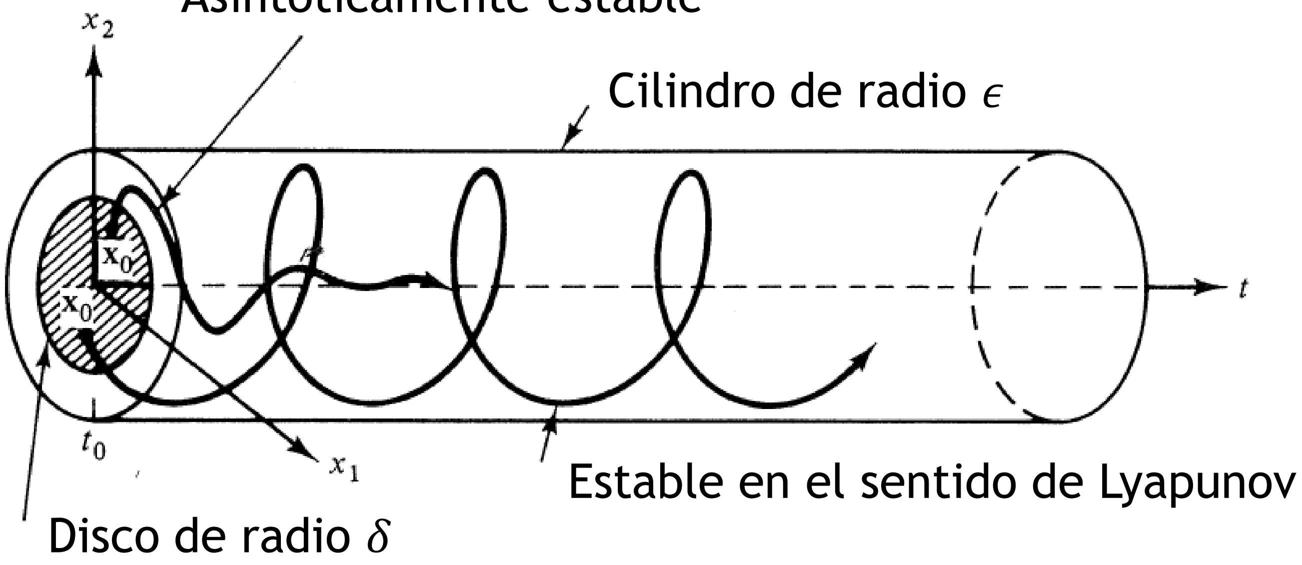
Estabilidad en el sentido de Lyapunov





Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Estabilidad en el sentido de Lyapunov



Formalización:

Un estado de equilibrio $\boldsymbol{x_e}$ del sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ es **estable en el sentido de Lyapunov** si, en correspondencia con cada $S(\epsilon)$, existe una $S(\delta(\epsilon, t_0))$ tal que las trayectorias que empiezan dentro de $S(\delta(\epsilon, t_0))$ evolucionan contenidas dentro de $S(\epsilon)$ conforme t se incrementa indefinidamente $(t \geq t_0)$.

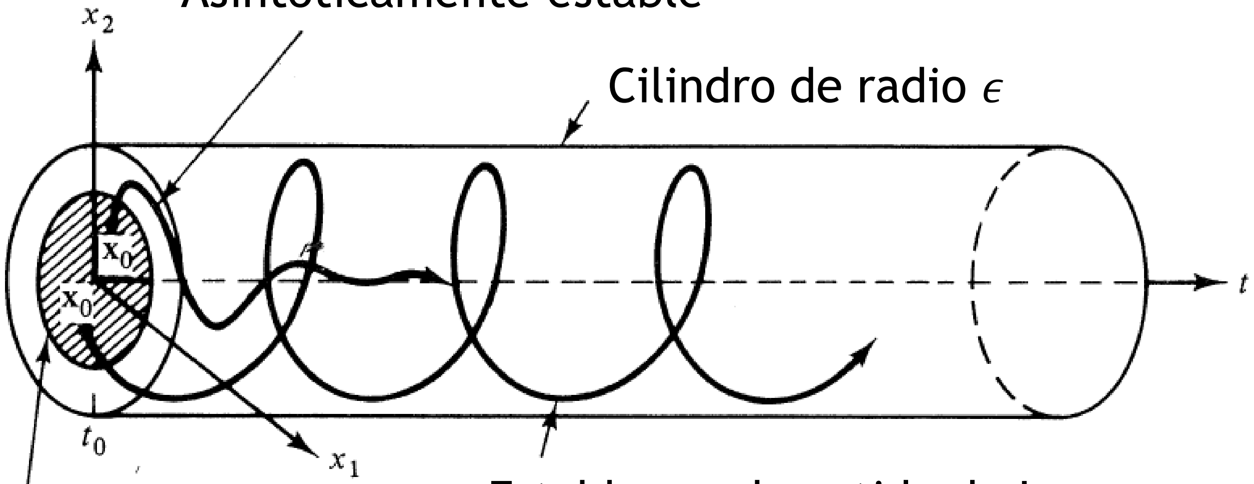
- El número real $\delta(\epsilon, t_0)$ depende de ϵ y en general también depende de t_0.
- Si δ no depende de t_0, se dice que el estado de equilibrio es uniformemente estable.
- Se necesita conocer la solución analítica o trayectoria del sistema dinámico.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Asintóticamente estable

Cilindro de radio ϵ



Estable en el sentido de Lyapunov

Disco de radio δ

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_e}\|$ se denomina norma euclídea y se calcula como:

$$\sqrt{(x_1-x_{1e})^2+(x_2-x_{2e})^2+\cdots+(x_n-x_{ne})^2}$$

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_e}\|<k$ determina el conjunto de puntos dentro de una región esférica de radio k

Primero seleccionamos la región $S(\epsilon)$ y, para cada $S(\epsilon)$, debe existir una región $S(\delta)$ tal que las trayectorias que empiezan dentro de $S(\delta)$ no se apartan de $S(\epsilon)$ conforme t se incrementa indefinidamente.

- Dado el conjunto de todos los puntos $S(\epsilon)$:

$$\|\phi(t;x_0,t_0)-x_e\|\leq\epsilon, \qquad \forall\, t\geq t_0$$

donde $\phi(t;x_0,t_0)$ es la solución del sistema dinámico

Debe poder encontrarse el conjunto de puntos $S(\delta)$:

$$\|x-x_e\|\leq\delta$$

tales que cualquier trayectoria que comience en $S(\delta)$ no se aparte de $S(\epsilon)$.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

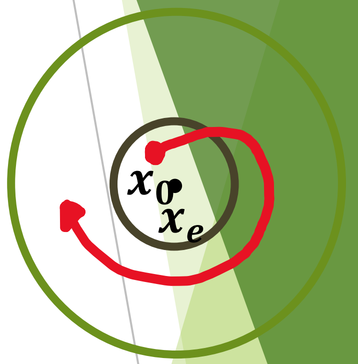
Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Estabilidad asintótica: Se dice que un estado de equilibrio x_e del sistema $\dot{x} = f(x,t)$ es asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y todas las soluciones que empiezan dentro de $S(\delta(\epsilon, t_0))$ convergen a x_e ($\phi(t; x_0, t_0) \rightarrow x_e$), sin abandonar $S(\epsilon)$, conforme t se incrementa indefinidamente ($t \geq t_0$).
La estabilidad asintótica es un concepto local. Se requiere de cierto conocimiento del tamaño de la región más grande de la estabilidad asintótica.

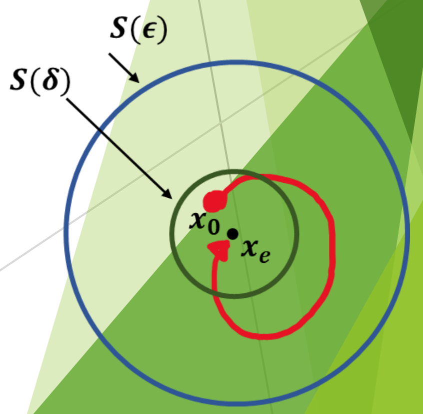
Dominio de atracción: Parte del espacio de estados en el cual se originan las trayectorias asintóticamente estables. Todas las trayectorias que se originan en el dominio de atracción son asintóticamente estables.

Estabilidad asintótica global: Si la estabilidad asintótica es válida para todos los estados (todos los puntos en el espacio de estados) a partir de los cuales se originan trayectorias, se dice que el estado de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov

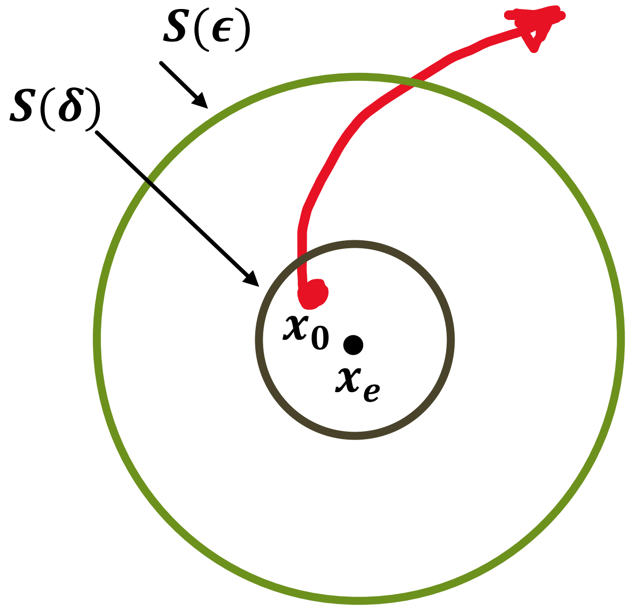


Estabilidad asintótica



Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Inestabilidad: Se dice que un estado de equilibrio x_e es inestable si para algún número real $\epsilon > 0$ y cualquier numero real $\delta > 0$, no importa qué tan pequeño sea, existe un estado x_0 en $S(\delta)$ tal que la trayectoria que empieza en este estado abandona $S(\epsilon)$.



La trayectoria se aparta de $S(\epsilon)$ e implica que el estado de equilibrio es inestable. Sin embargo, no se puede afirmar que la trayectoria tienda a infinito, dado que puede tender a un ciclo límite fuera de la región $S(\epsilon)$.

En un sistema LTI inestable, las trayectorias que empiezan cerca del estado de equilibrio inestable van al infinito. Pero en el caso de los sistemas no lineales, esto no es necesariamente cierto.

Las definiciones se aplican a la cercanía del estado de equilibrio, a menos que $S(\epsilon)$ corresponda al plano del estado completo.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Este método presenta una desventaja importante cual es necesitar de la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis. Si bien en sistemas lineales esto no presentaría mas que inconvenientes operativos, sobre sistemas no lineales se torna una dificultad a veces insalvable ya que se carece de una expresión analítica de la solución.

Existe un segundo método de Lyapunov que no requiere esta solución. El concepto subyacente es la creación de una función escalar de “energía” del sistema que permita observar su evolución en el tiempo. Si esta función de energía decrece o se mantiene constante, el sistema será estable. Caso contrario el sistema será inestable.

Consideremos como ejemplo el caso de un sistema no lineal como el del péndulo de masa unitaria, con rozamiento:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -g\ sen(x_1) - x_2$$

donde x_1 corresponde al ángulo de apartamiento respecto de la vertical y x_2 a la velocidad angular. El roce se considera viscoso y unitario. La función de energía del péndulo se puede plantear como:

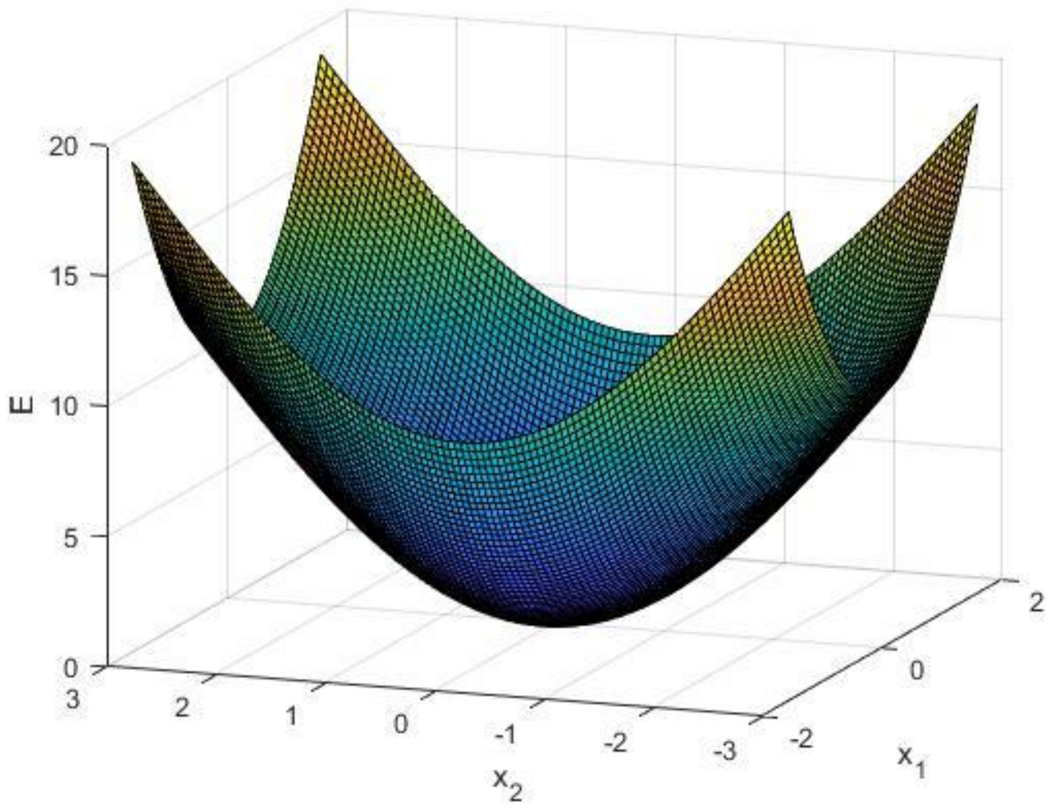
$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - cos(x_1))$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Cosas a destacar: $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - cos(x_1))$

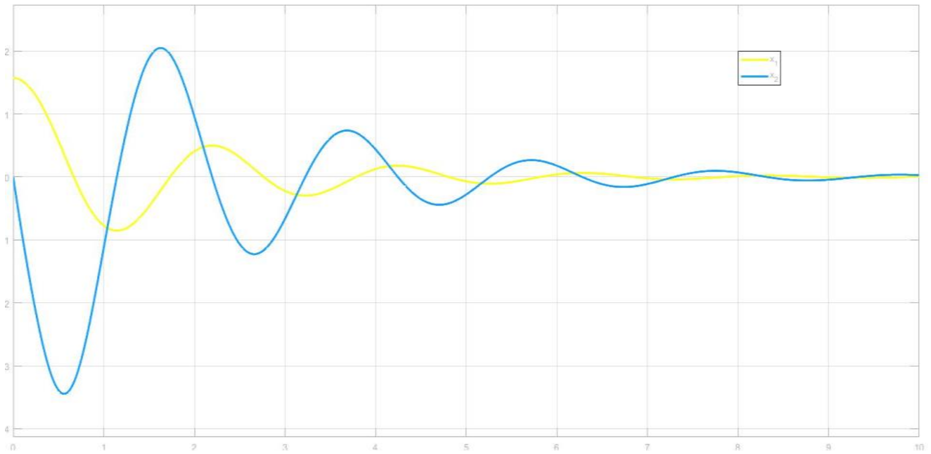
- las funciones de energía son funciones escalares, es decir que van de $Re^n \rightarrow Re$
- Son siempre positivas $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$
- Son continuamente diferenciables en los estados

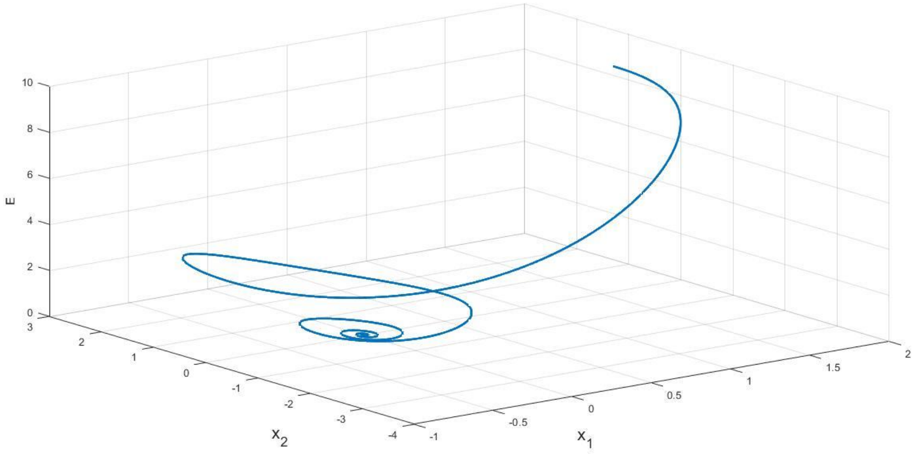
Si graficamos esta función de energía tomando como base el espacio de estados podríamos observar una forma paraboloide:



Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Intuitivamente sabemos que el péndulo con roce es asintóticamente estable en torno al punto de equilibrio inferior. Si simulamos su comportamiento y llevamos los puntos de la trayectoria solución sobre el gráfico de energía anterior observaríamos lo siguiente:





Puede verse que los puntos de la trayectoria solución proyectados sobre la función de energía generan una evolución que decrece y converge al origen. Siempre es decreciente, es decir tiene derivada siempre negativa:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Pareciera entonces que necesitaríamos nuevamente la solución del sistema para evaluar la derivada de la energía y discernir si el punto de equilibrio del sistema es estable o no.

Sin embargo para evaluar la estabilidad del equilibrio solo se necesita ver si la derivada de la función de energía es siempre negativa. Luego, podemos usar la regla de la cadena y hacer el siguiente cálculo:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}$$

Recordando que el sistema y su función de energía son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -g\ sen(x_1) - x_2\end{aligned} \qquad V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - cos(x_1))$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = x_2\dot{x}_2 + g\ sen(x_1)\dot{x}_1$$

$$= x_2(-g\ sen(x_1) - |x_2|) + g\ sen(x_1)\ x_2 = -x_2^2$$

¿Qué significa esto?

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

La ecuación anterior determina que la función de energía considerada decrece en cada instante con el valor cuadrático de la velocidad.

Así el punto de equilibrio considerado (en este caso $(0{,}0)$) resulta ser estable. No puede demostrarse que sea asintóticamente estable p.q. para $x_2 = 0$ y $x_1 \neq 0$, $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$. Luego, en esa situación la función de energía empleada $V(\boldsymbol{x})$ quedaría fija en un valor constante (sabemos que eso no pasa en la realidad, pero aún no podemos demostrarlo).

Mas allá de esta última particularidad, las cosas a destacar en el ejemplo visto son:

- Se plantea una función de energía escalar continua siempre positiva ($V(\boldsymbol{x}) \geq 0$, $Re^n \rightarrow Re$)
- Su derivada es continua.
- Si el cálculo de $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ determina que es siempre < 0 para todo $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$, el punto de equilibrio considerado es asintóticamente estable. Si $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ solamente es≤ 0 el punto de equilibrio considerado es estable.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Formalización. Definiciones previas:

Se dice que una función escalar $V(\boldsymbol{x})$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) si es continuamente diferenciable, $V(0) = 0$ y $V(\boldsymbol{x}) > 0$ para todos los estados $\boldsymbol{x}$ diferentes de cero en la región Ω .

Se dice que una función escalar $V(\boldsymbol{x})$ es semidefinida positiva si es continuamente diferenciable, $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ para todos los estados $\boldsymbol{x}$ diferentes de cero en la región Ω.

Se dice que $V(x)$ es definida negativa si $-V(x)$ es definida positiva.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es semidefinida negativa si $-V(x)$ es semidefinida positiva.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es indefinida si en la región Ω adopta tanto valores positivos como negativos, sin importar qué tan pequeña sea la región Ω.

$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \longrightarrow$ D.P.

$V(x) = (x_1 + x_2)^2 \longrightarrow$ S.D.P.

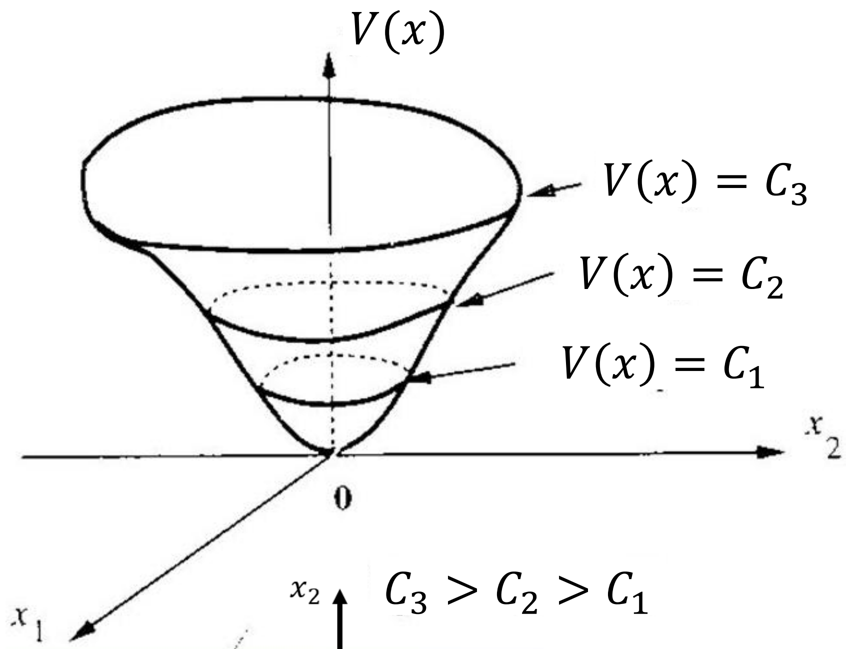
$V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2 \longrightarrow$ D.N.

$V(x) = x_1 x_2 + x_2^2 \longrightarrow$ Indef.

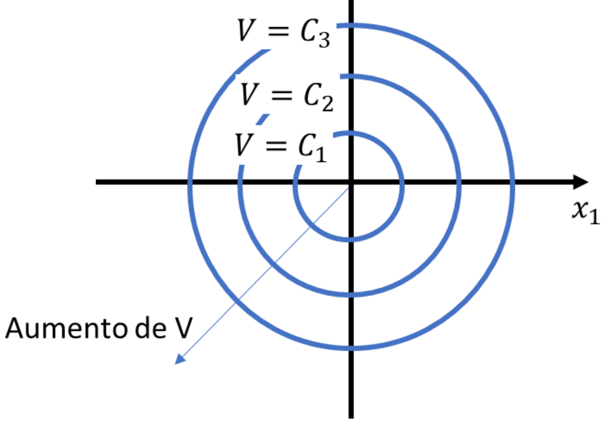
$V(x) = x_1^2 + \dfrac{2x_2^2}{1 + x_2^2} \longrightarrow$ D.P.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Formalización. Definiciones previas:



$C_3 > C_2 > C_1$



- Se puede demostrar que si una función escalar $V(\boldsymbol{x})$ en donde x es un vector de dimensión n , es definida positiva, los estados x que satisfacen

$$V(x) = C, \qquad C\ constante\ positiva$$

se encuentran en una hipersuperficie cerrada en el espacio de estados de n dimensiones, al menos en la cercanía del origen (curvas de nivel topográficas).

La hipersuperficie $V(x) = C_1$ se encuentra completamente dentro de la hipersuperficie $V(x) = C_2$ si $C_1 < C_2$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Teorema principal de la estabilidad de Lyapunov

Dado el sistema:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

en donde $f(0, t) = 0, \ \forall \ t$

- Si existe una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ con primeras derivadas parciales continuas, que satisface las condiciones:
  1. $V(\boldsymbol{x}, t) > 0$ (definida positiva)
  2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) \leq 0$ (semidefinida negativa)

  entonces el punto de equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov).

- Si además, $V(\boldsymbol{x}, t) \rightarrow \infty$ conforme $\|\boldsymbol{x}\| \rightarrow \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es global y uniformemente estable.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Teorema principal de la estabilidad de Lyapunov

Dado el sistema:

$$\dot{x} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

en donde $f(0, t) = 0, \ \forall\, t$

- Si existe una función escalar $V(\boldsymbol{x}, t)$ con primeras derivadas parciales continuas, que satisface las condiciones:
    1. $V(\boldsymbol{x}, t) > 0$ (definida positiva)
    2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) < 0$ (definida negativa)

  entonces el punto de equilibrio es uniforme y asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov).

- Si además, $V(\boldsymbol{x}, t) \to \infty$ conforme $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es global uniforme y asintóticamente estable.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Como vimos en el ejemplo del péndulo con fricción, la función de energía nos permitió determinar la estabilidad del punto de equilibrio, pero no su estabilidad asintótica. Para suplir este déficit de la teoría de Lyapunov, enunciamos el denominado Teorema de LaSalle:

Teorema de LaSalle

Dado el sistema: $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t)$ en donde $f(0, t) = 0, \ \forall\, t$

- Si existe una función escalar $V(\boldsymbol{x}, t)$ con primeras derivadas parciales continuas, que satisface las condiciones:
  1. $V(\boldsymbol{x}, t) > 0$ (definida positiva)
  2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) \leq 0$ (semidefinida negativa)
  3. Sea $S = \left\{\boldsymbol{x} \in Re^n : \dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = 0\right\}$. Si ninguna trayectoria del sistema que entra en S permanece allí indefinidamente salvo la solución trivial, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
- Si además, $V(x, t) \to \infty$ conforme $\|x\| \to \infty$, entonces el estado de equilibrio en el origen es global, uniforme y asintóticamente estable.

En el ejemplo del péndulo llegamos a determinar que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_2^2$ que se anula cuando x_2=0 sin importar el valor de x_1 y esto hacía que $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ fuera semidefinida positiva. ¿Esta situación es invariante a lo largo del tiempo? ¿x_2 se mantiene en cero cuando x_1 no está en cero?

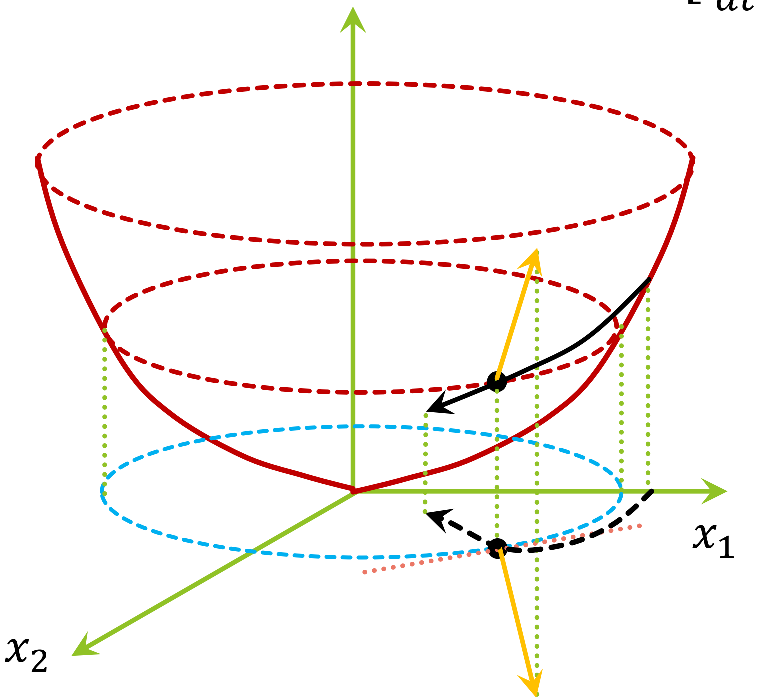
Para que eso suceda cuando x_2=0 se debería anular la derivada de x_2, es decir $\dot{x}_2 = -g\ sen(x_1) = 0$ lo cual solo puede darse si x_1=0, es decir para la solución trivial solamente. Luego el equilibrio del péndulo es asintóticamente estable.

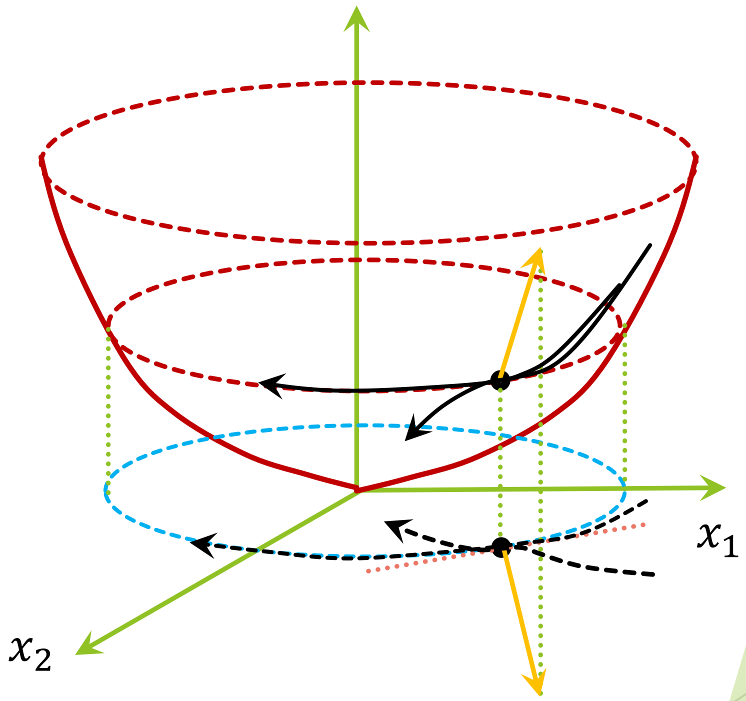
Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Interpretación Gráfica

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Producto escalar de dos vectores. Proyección de un vector sobre el otro





Siendo el gradiente un vector normal a la curva de nivel sobre el punto bajo estudio, que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$ significa que la trayectoria de estados cruza esta curva de nivel hacia el interior. Si $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ siempre es negativa el sistema necesariamente convergerá asintóticamente al origen.

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$ cuando el vector gradiente y la trayectoria son ortogonales sobre el punto bajo estudio. En ese caso la trayectoria puede quedarse a vivir sobre la curva de nivel (ciclo límite) o verificar esa condición solo temporalmente sin poder establecerse sobre la curva de nivel (LaSalle)

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Ejemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Punto de equilibrio

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$\longrightarrow$ $x_e = (0,0)$

Se propone una función escalar definida positiva

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

$\longrightarrow$ Definida negativa

$V(\boldsymbol{x})$ es una función de Lyapunov

Como además $V(x,t) \to \infty$ conforme $\|x\| \to \infty$, el estado de equilibrio en el origen es global, uniforme y asintóticamente estable.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{j\sqrt{3}}{2}$$

Punto de equilibrio $\boldsymbol{x_e} = (0,0)$

Se propone una función escalar definida positiva

$$V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 4x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} = 2x_1x_2 - 2x_2^2 \longrightarrow \text{Indefinida}$$

Esta $V(\boldsymbol{x})$ no me sirve como función de Lyapunov

Proponemos otra:

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \dot{V}(x) = 2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} = -2x_2^2 \longrightarrow \text{Semidefinida negativa}$$

Para que $\dot{V}(x)$ se anule idénticamente $\rightarrow x_2 = 0 \ \rightarrow \dot{x}_2 = 0$

Como $\dot{x_2} = -x_1 - x_2 \longrightarrow x_1 = 0$

$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ sólo se anula idénticamente en el origen

$\boldsymbol{x_e}$ es asintóticamente estable de forma global

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

En un sistema LTI, si el estado de equilibrio es local y asintóticamente estable, entonces es globalmente asintóticamente estable.
En un sistema no lineal, un estado de equilibrio puede ser local y asintóticamente estable sin ser globalmente asintóticamente estable.
Así, las implicaciones de la estabilidad asintótica del estado de equilibrio de los sistemas LTI y los de los sistemas no lineales son muy diferentes.
Existen muchos enfoques para determinar la estabilidad asintótica de los sistemas LTI ($\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$, criterio de Routh, etc.).
Existe una alternativa para este enfoque, que se basa en el segundo método de Lyapunov. Es un enfoque algebraico y no requiere factorizar el polinomio característico.

Sea un sistema LTI descripto por

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

en donde $\boldsymbol{x}$ vector de estados de dimensión n y $\boldsymbol{A}$ (no singular) matriz de coeficientes constantes de $n\ x\ n$.

Sobre sistemas lineales se propone como función de Lyapunov $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ que debe ser definida positiva.

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} \longrightarrow \dot{V}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A^T P} + \boldsymbol{PA})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

para una estabilidad asintótica, requerimos que $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ sea definida negativa.

Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ sea globalmente asintóticamente estable, es que, dada cualquier matriz $\boldsymbol{Q}$ simétrica, real y definida positiva, exista una matriz $\boldsymbol{P}$ simétrica, real y definida positiva, tal que

$$\boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{A^T P} + \boldsymbol{PA}) > 0$$

En lugar de especificar una matriz $\boldsymbol{P} > 0$ y examinar si $\boldsymbol{Q}$ es definida positiva, es conveniente primero especificar una matriz $\boldsymbol{Q} > 0$ y determinar si $\boldsymbol{P}$ es definida positiva a través de $\boldsymbol{A^T P} + \boldsymbol{PA} = -\boldsymbol{Q}$.

$\boldsymbol{Q}$ se puede elegir semidefinida positiva si $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ no se anula idénticamente a lo largo de ninguna trayectoria.

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

Una clase de funciones escalares que juega un papel importante en el análisis de estabilidad basado en el segundo método de Lyapunov es la forma cuadrática.

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$$

Criterio de Sylvester

La forma cuadrática $V(\boldsymbol{x})$ es definida positiva si y solo si todos los menores principales sucesivos de $\boldsymbol{P}$ son positivos.

Ejemplo: $V(\boldsymbol{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ ⇨ **Definida positiva?**

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$10 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

⇨ **Definida positiva!!!!**

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

Ejemplo: Análisis Estabilidad

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Función de Lyapunov tentativa $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P}$ se determina de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{I}$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$-2p_{12} = -1$$

$$p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

$$2p_{12} - 2P_{22} = -1$$

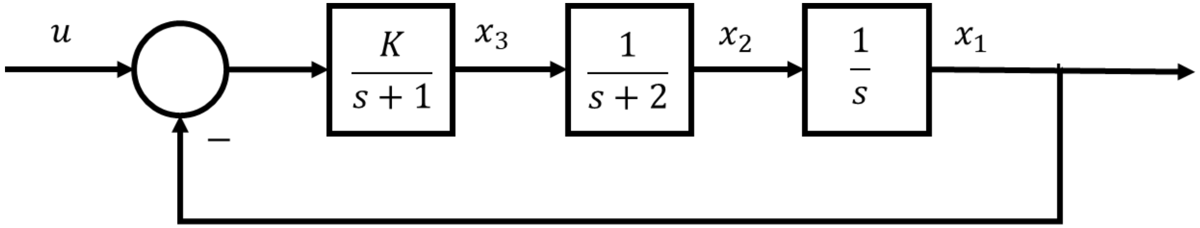
$\boldsymbol{P}$ es positiva definida ya que: $\frac{3}{2} > 0 \quad \begin{vmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{vmatrix} > 0$ $\Rightarrow$ El estado de equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable.

La función de Lyapunov es $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$ y $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

Ejemplo: Controlador Estable



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -K & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ K\end{bmatrix}u$$

Sistema lineal, suponemos $u = 0$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3\\ \dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3\end{cases}$$

Elección de $\boldsymbol{Q}$ semidefinida positiva

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = -x_3^2$$

Para que $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ se anule idénticamente $x_3 = 0$ y $\dot{x}_3 = 0$

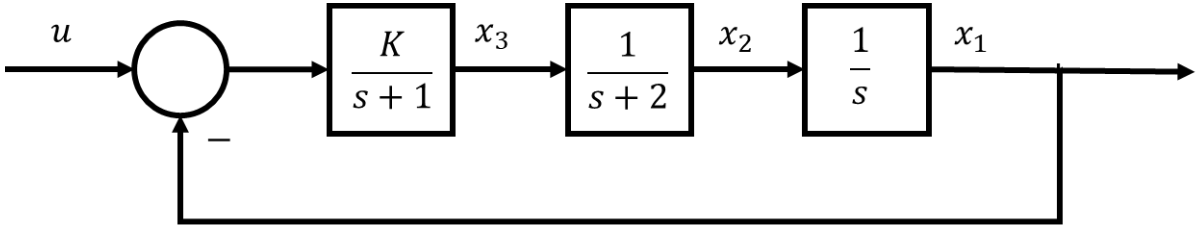
$$0 = -Kx_1 - 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales

Ejemplo: Controlador Estable



Dado el sistema de la figura determinar los valores de K que estabilizan el sistema

De $A^T P + PA = -Q$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{K^2+12K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} & 0 \\ \frac{6K}{12-2K} & \frac{3K}{12-2K} & \frac{K}{12-2K} \\ 0 & \frac{K}{12-2K} & \frac{6}{12-2K} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} 12-2K > 0 \\ K > 0 \end{matrix} \longrightarrow 0 < K < 6$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales Discretos

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)$$

en donde $\boldsymbol{x}$ vector de estados de dimensión n y $\boldsymbol{G}$ (no singular) matriz de coeficientes constantes de $n\ x\ n$.

Seleccionando una posible función de Lyapunov como

$$V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k), \qquad \boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P} > 0$$

- La diferencia entre $V(\boldsymbol{x}(k+1))$ y $V(\boldsymbol{x}(k))$ $(\Delta V\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = V(\boldsymbol{x}(k+1) - V\big(\boldsymbol{x}(k)\big))$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\Delta V\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = V(\boldsymbol{x}(k+1) - V\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = \boldsymbol{x}(k+1)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\Delta V\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = \big(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)\big)^T\boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)\big) - \boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\Delta V\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = \boldsymbol{x}(k)^T(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(k)$$

para una estabilidad asintótica, requerimos que $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ sea definida negativa.

$$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = -\boldsymbol{x}(k)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) \qquad \boldsymbol{Q} = -\big(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P}\big) > 0$$

Estabilidad de Sistemas Dinámicos - Lyapunov

Aplicación en sistemas lineales Discretos

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)$$

en donde $\boldsymbol{x}$ vector de estados de dimensión n y $\boldsymbol{G}$ (no singular) matriz de coeficientes constantes de $n\ x\ n$.

Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $\boldsymbol{x} = 0$ sea globalmente asintóticamente estable, es que, dada cualquier matriz $\boldsymbol{Q}$ simétrica, real y definida positiva, exista una matriz $\boldsymbol{P}$ simétrica, real y definida positiva, tal que

$$\boldsymbol{Q} = -\left(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P}\right)$$

La función escalar $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ es una función de Lyapunov para este sistema.

$\boldsymbol{Q}$ puede ser semidefinida positiva si $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ no se anula idénticamente a lo largo de ninguna trayectoria.

En lugar de especificar una matriz $\boldsymbol{P} > 0$ y examinar si $\boldsymbol{Q}$ es definida positiva, es conveniente primero especificar una matriz $\boldsymbol{Q} > 0$ y determinar si $\boldsymbol{P}$ es definida positiva a través de $\boldsymbol{Q} = -\left(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P}\right)$.