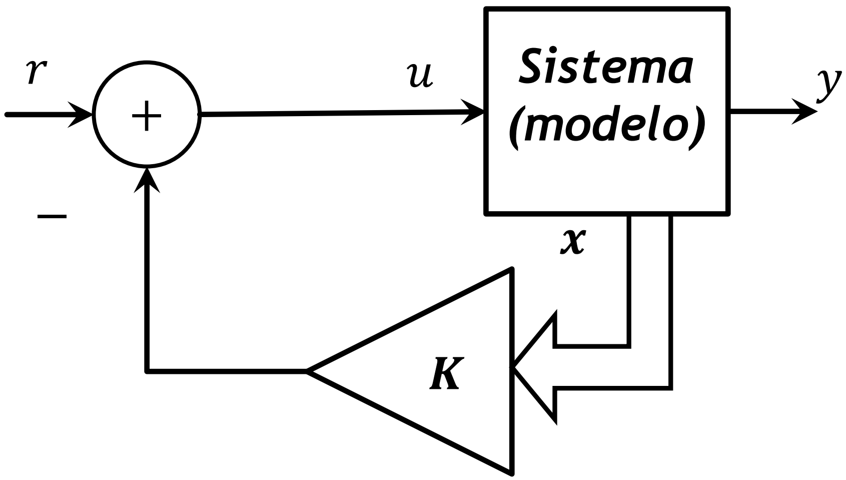
Control Automático 2

Sistemas Lineales en Variables de Estado.

- Observadores de Estado
- Modelos de Estados Discretos

F. Valenciaga 2022

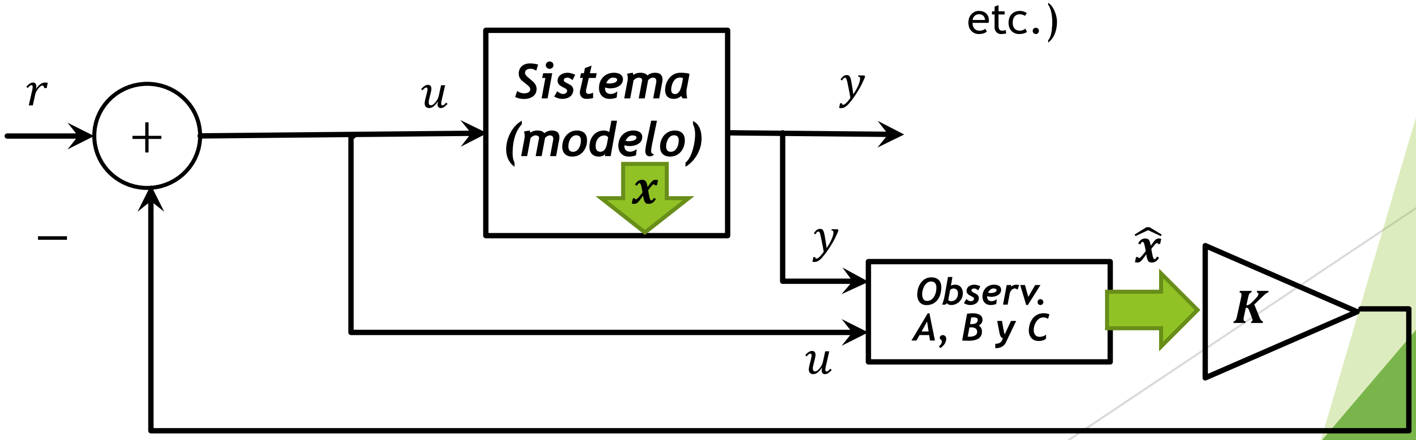
Observadores de Estado



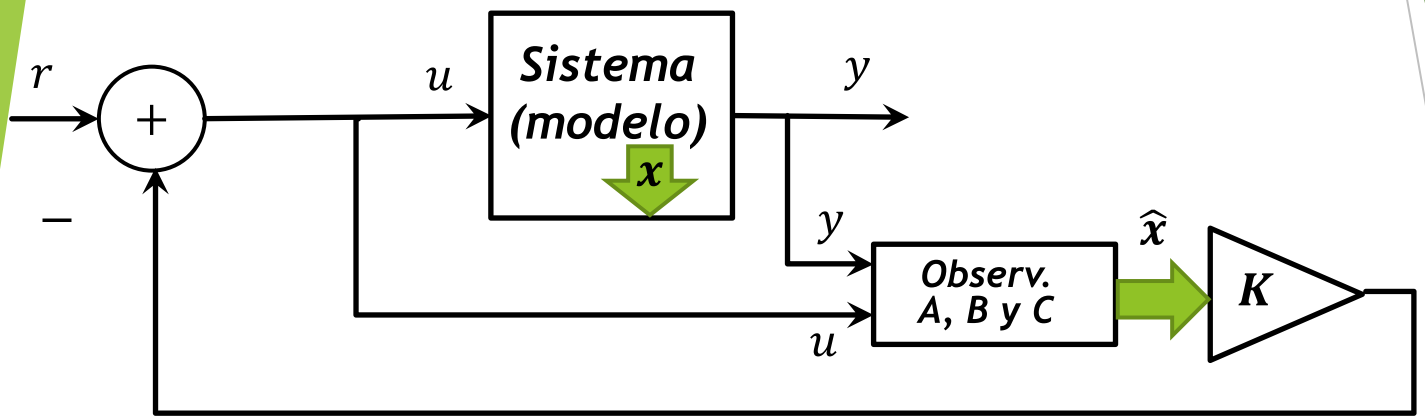
El control por V.E realimentado supone que todas las variables de estado del sistema son accesibles (medibles).

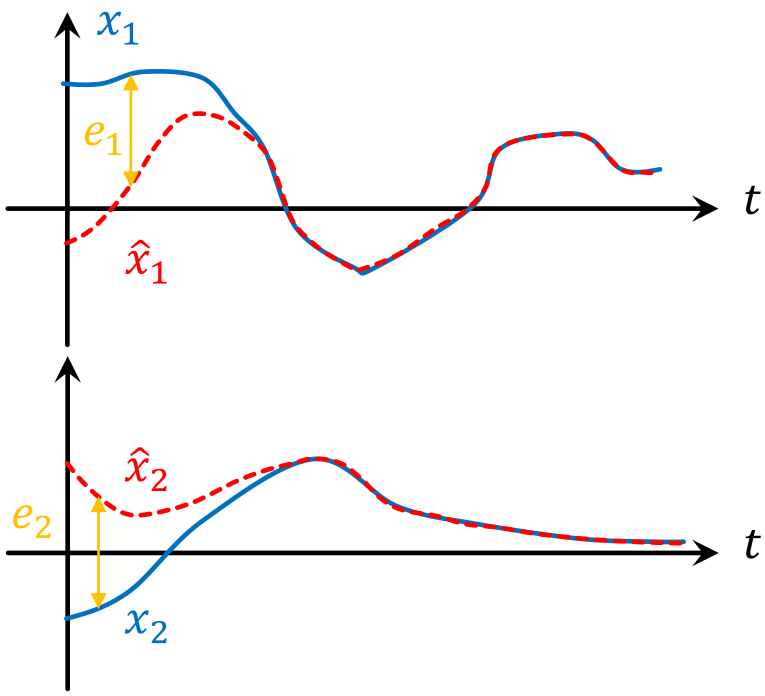
Problemas de disponibilidad de las V.E.

- Imposibilidad de acceso físico a algunas /todas las V.E.
- Imposibilidad de viabilidad económica en la medición de algunas/todas las V.E. (carestía de los sensores, dificultades instrumentales, etc.)



Observadores de Estado





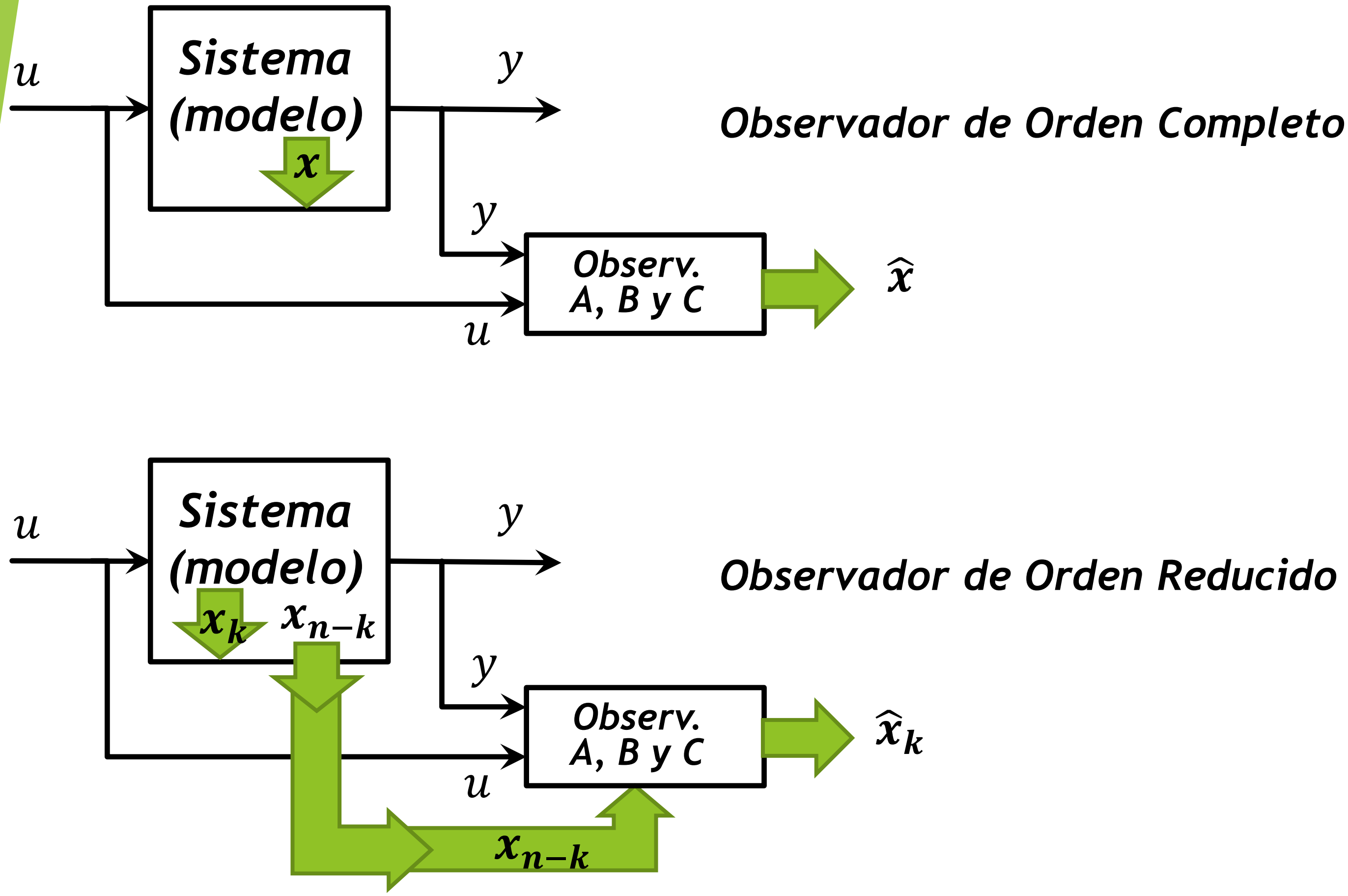
El diseño de este observador debe asegurar que las estimaciones converjan rápidamente a los valores reales de los estados.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 = x_2 - \hat{x}_2 \end{array}\right. \longrightarrow \mathbf{0}$$

Cuando el Observador lo emplee como un medidor virtual de estados exclusivamente, su dinámica de convergencia deberá ser mas rápida que la correspondiente a los estados de LA.

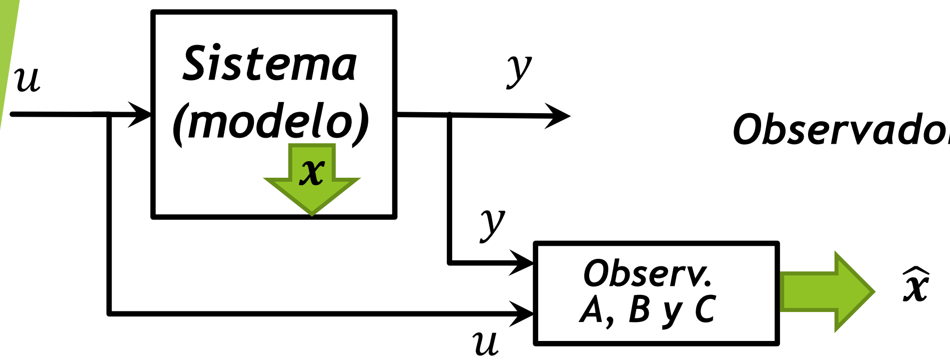
En el caso que lo emplee para un control realimentado, su dinámica de convergencia deberá ser mas rápida que la correspondiente a los estados de LC.

Observadores de Estado



Este segundo caso es mas frecuente ya que frecuentemente hay alguna variable accesible para medir. En ese caso siempre es mejor la medición que la estimación.

Observadores de Estado



Observador de Orden Completo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A_o\hat{x} + Ly + Z(u)$$

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dot{e} = Ax - A_o\hat{x} - Ly + Bu - Z$$

$$\dot{e} = Ax - A_o\hat{x} - LCx + Bu - Z$$

$$\dot{e} = (A - LC)x - A_o\hat{x} + Bu - Z$$

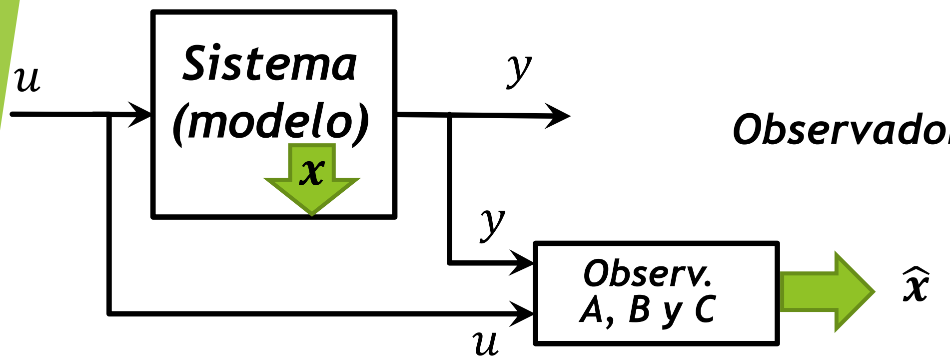
A, B y C conocidas
L, A_o y Z dependen del diseño

Si elijo $A_o = A - LC$ y $Z = Bu$

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Como ***A*** y ***C*** son matrices del sistema, deberé elegir ***L*** de tal manera que la matriz M presente autovalores con parte real negativa y posicionándolos de acuerdo a la dinámica elegida para el observador

Observadores de Estado



Observador de Orden Completo

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y + \boldsymbol{B}u$$

L vector columna ***n* x 1**
(Ganancias del Observador)

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}$$

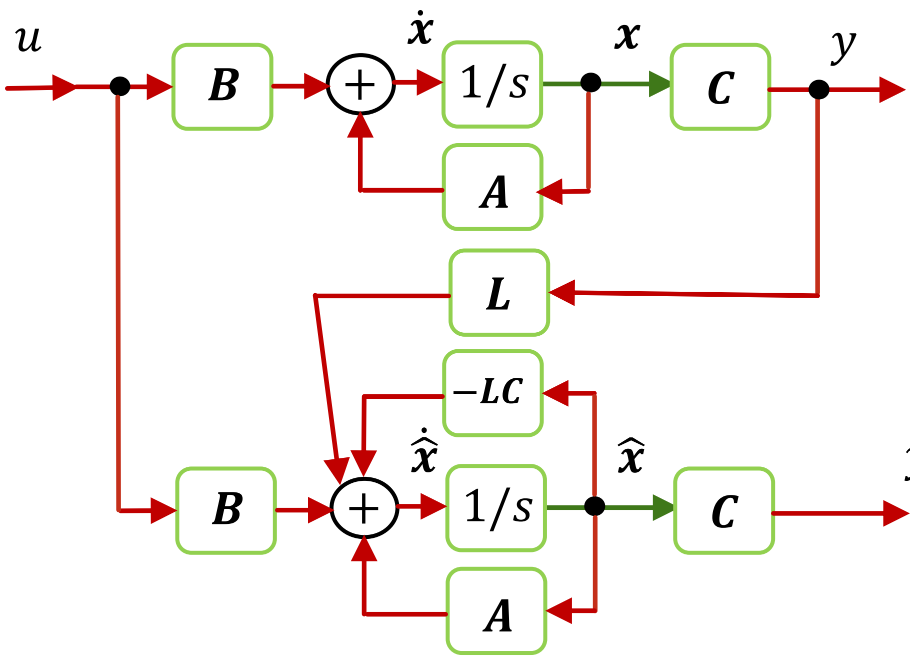
$$|s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})| = \boldsymbol{0}$$

Polinomio característico del Observador (autovalores)

Si el sistema es completamente observable siempre voy a poder encontrar las ganancias de la matriz ***L*** para asignar libremente los polos de mi observador.

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques

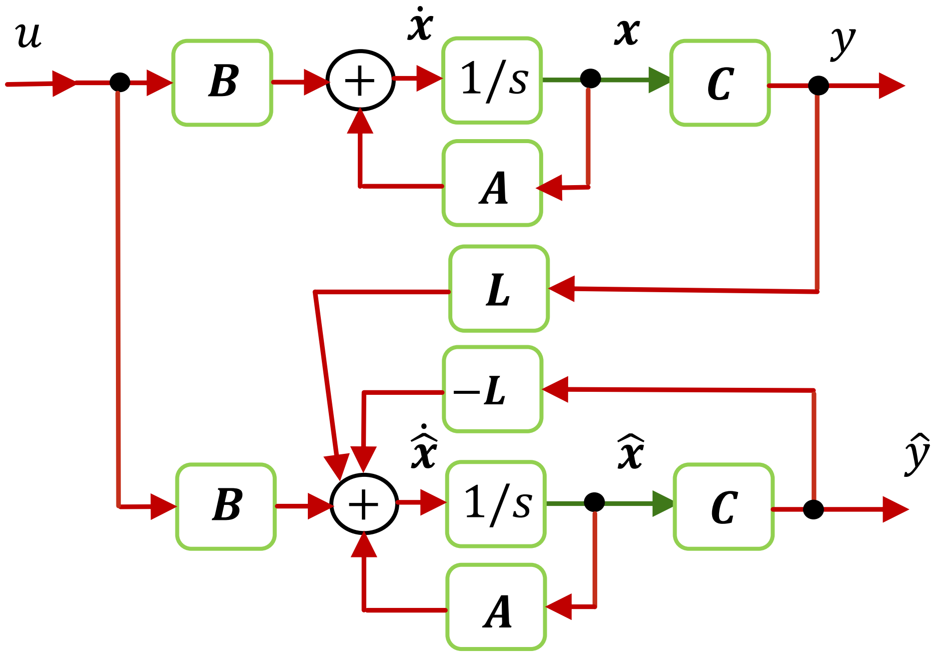


$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques

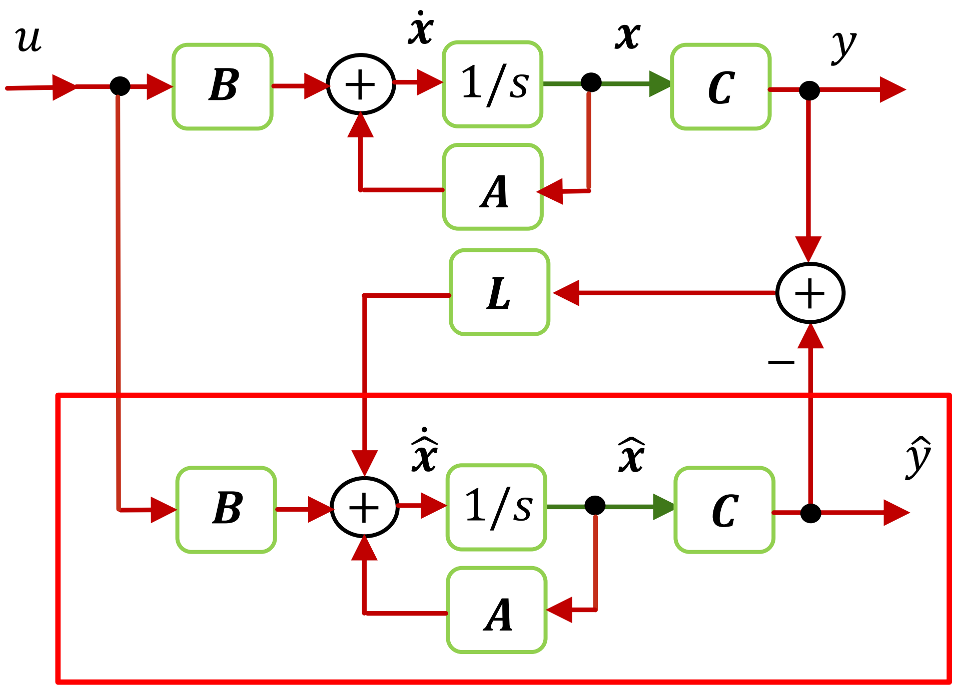


$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y + \boldsymbol{B}u$$

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques



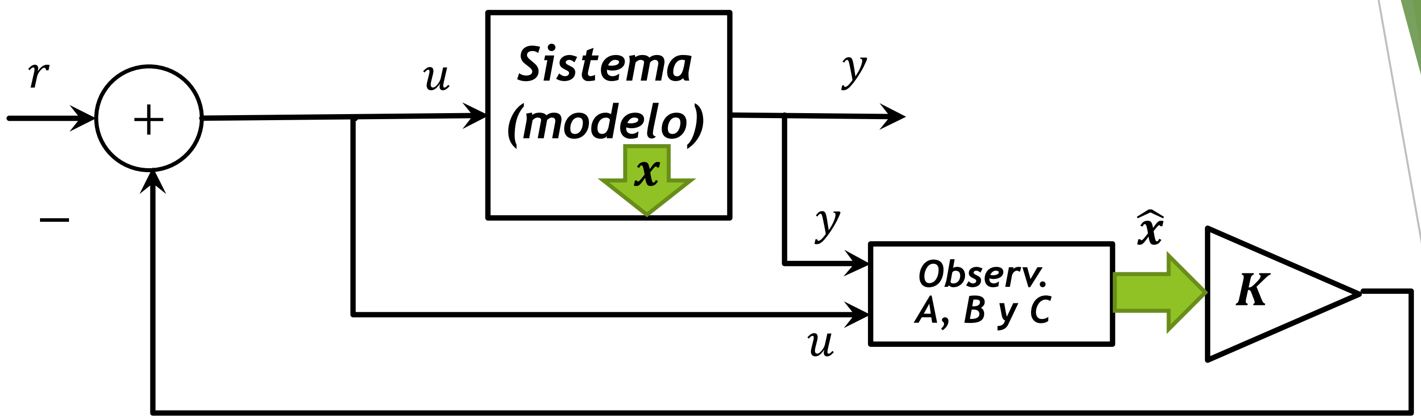
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

El Observador es una copia del sistema pero, para que pueda corregir los valores iniciales de los estados estimados y seguir las variaciones de los estados del sistema, incorpora un lazo de corrección planteado a partir del error de la salida. Este error, pesado con diferentes ganancias, debe afectar adecuadamente la derivada de los estados estimados.

Observadores de Estado

Principio de Separación



¿Las ganancias K diseñadas suponiendo que los estados eran accesibles funcionaran imponiendo la misma dinámica de LC cuando en lugar de usar las x use las $\hat{x}$ proporcionadas por el Observador?

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = r - K\hat{x}$$

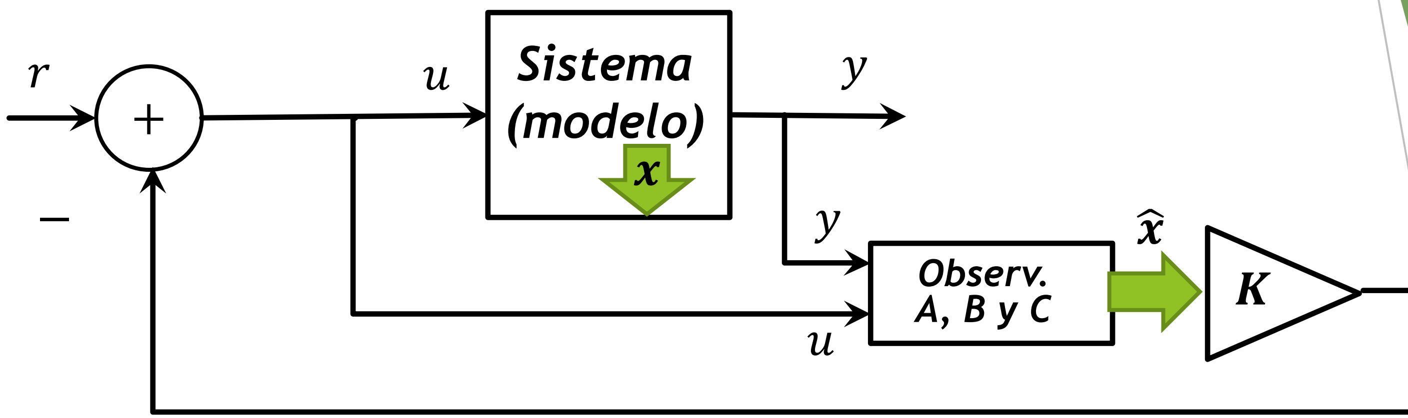
$$\dot{x} = Ax + B(r - K\hat{x})$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - K\hat{x})$$
$$e = x - \hat{x}$$

$$\dot{x} = Ax + B\big(r - K(x - e)\big)$$
$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe + Br$$
$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Observadores de Estado

Principio de Separación



$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{BKe} + \boldsymbol{B}r$$
$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\boldsymbol{e}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{e}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}r$$

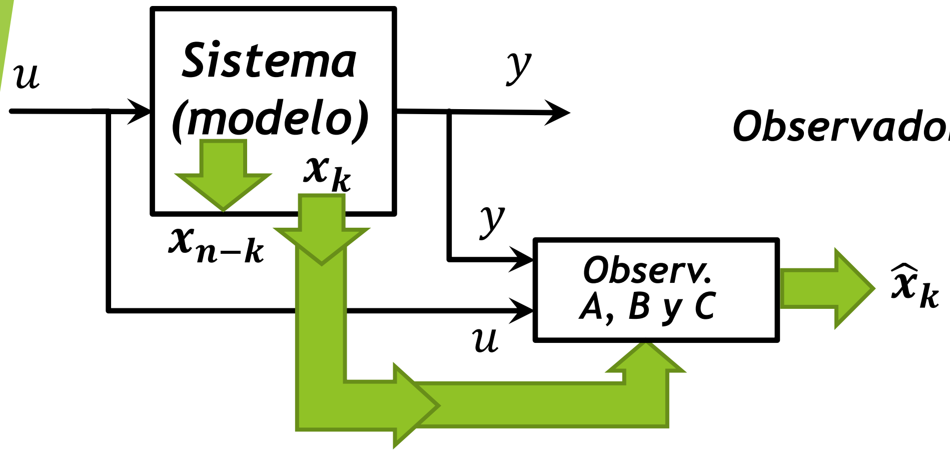
$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix}s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK}\\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}\end{vmatrix} = |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}||s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}|$$

$$= |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{LC}}||s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{o}}|$$

Los polos del sistema completo a LC son los del observador y los del LC diseñado originalmente. Pueden realizarse los diseños en forma separada.

Todo el desarrollo considera una medición exacta de ***y***. No es la realidad y para contemplarla habrá que seguir perfeccionando el Observador. Acciones integrales en el LC ayudan a eliminar el efecto de algunos errores.

Observadores de Estado



Observador de Orden Reducido

Este segundo caso es mas frecuente ya que usualmente hay alguna variable accesible para medir. En ese caso siempre es mejor la medición que la estimación.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

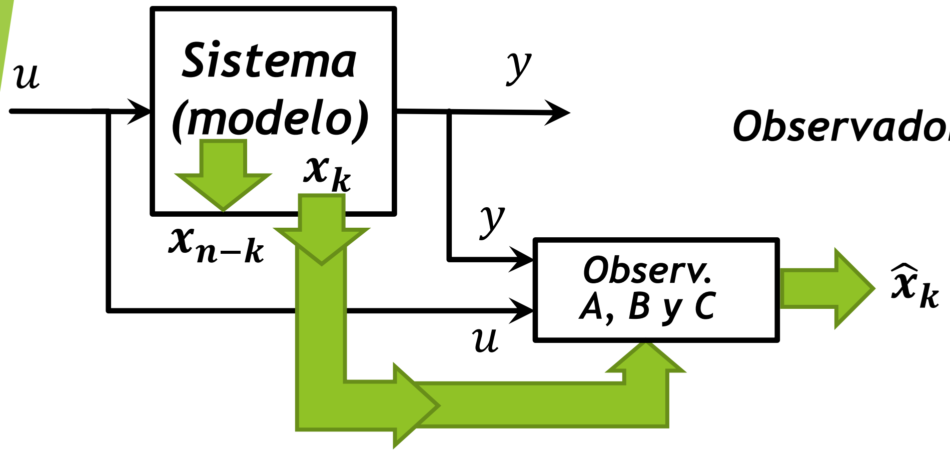
$$\dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2u$$

Dinámica de los estados a Observar

$$\dot{X}_2 = A_{22}X_2 + \underbrace{B_2u + A_{21}X_1}$$

Entradas conocidas al subsistema dinámico X_2

Observadores de Estado



Observador de Orden Reducido

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

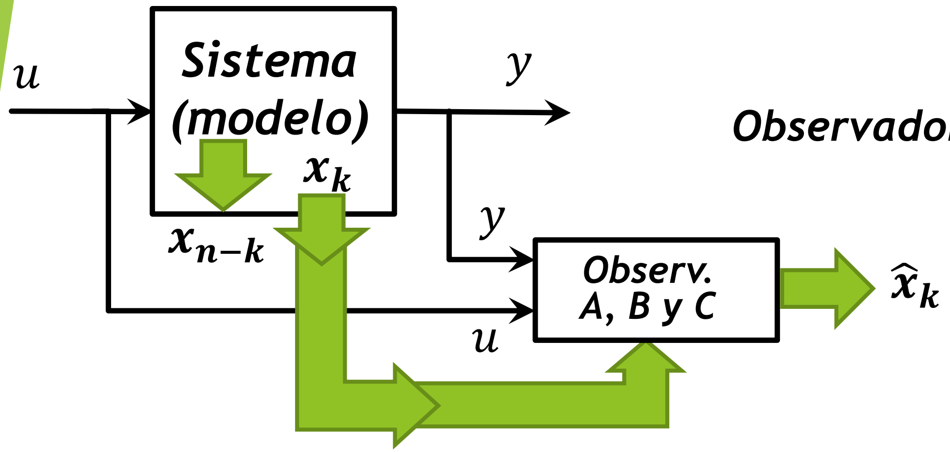
$$\dot{X}_2 = A_{22} X_2 + \underbrace{B_2 u + A_{21} X_1}_{\text{Entradas conocidas al subsistema dinámico } X_2}$$

Creo una salida ficticia que llamaré $y_f = A_{12} X_2$

Luego, de la primera fila:

$$A_{12} X_2 = y_f = -A_{11} X_1 + \dot{X}_1 - B_1 u$$

Observadores de Estado



Observador de Orden Reducido

Consideremos entonces el sistema:

$$\dot{X}_2 = A_{22}X_2 + B_2 u + A_{21}X_1$$

$$y_f = A_{12}\, X_2$$

Sobre este sistema diseño el mismo observador que antes:

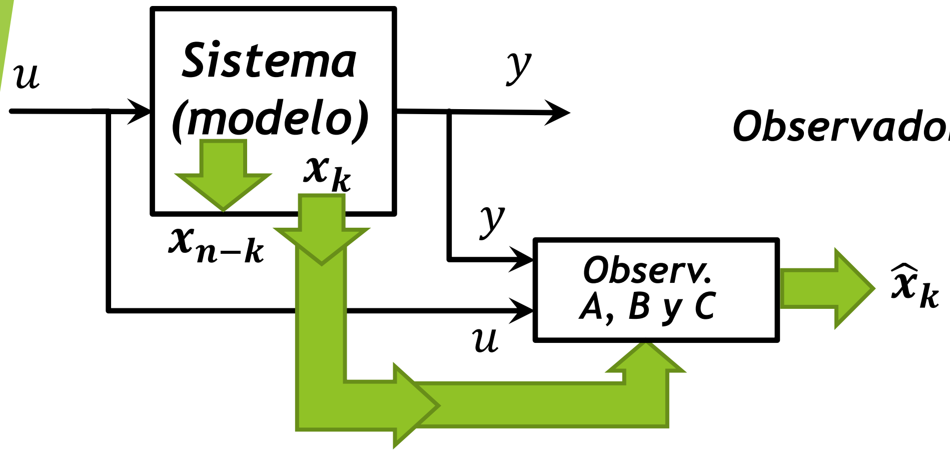
$$\dot{\hat{X}}_2 = A_o\hat{X}_2 + Ly_f + Z$$

Restando las ecuaciones dinámicas :

$$\dot{X}_2 - \dot{\hat{X}}_2 = \dot{E}_2 = A_{22}X_2 - A_o\hat{X}_2 - LA_{12}X_2 + A_{21}X_1 - Z + B_2 u$$

$$\dot{E}_2 = (A_{22} - LA_{12})X_2 - A_o\hat{X}_2 + A_{21}X_1 - Z + B_2 u$$

Observadores de Estado



Observador de Orden Reducido

$$\dot{E}_2 = (A_{22} - LA_{12})X_2 - A_o\hat{X}_2 + A_{21}X_1 - Z + B_2u$$

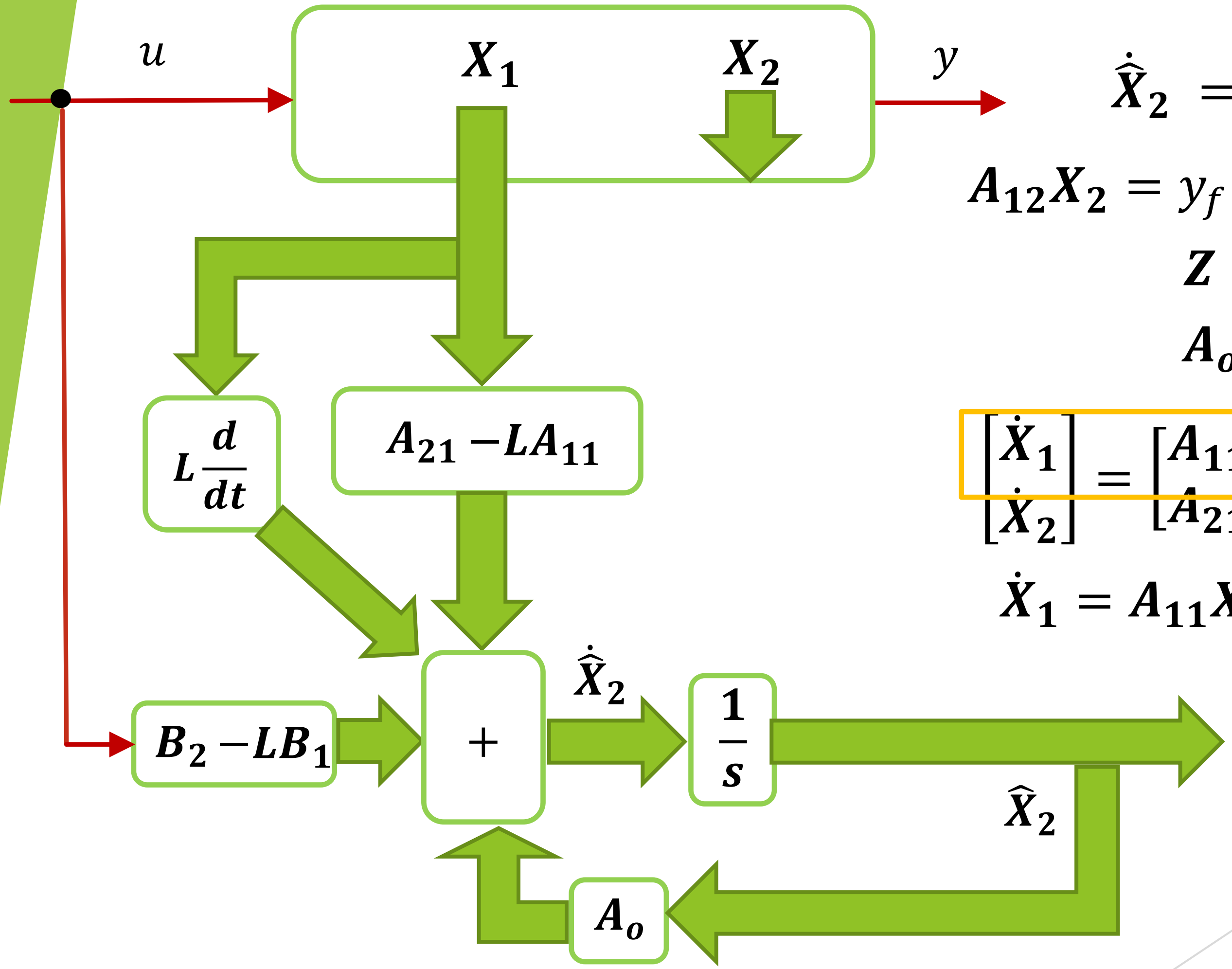
Haciendo como antes: $A_o = A_{22} - LA_{12}$ y $Z = A_{21}X_1 + B_2u$

$$\dot{E}_2 = (A_{22} - LA_{12})E_2$$

Nuevamente, diseñando las k ganancias del Observador de Orden Reducido, podré hacer converger el error a cero "tan rápido como yo quiera"

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques



$$\dot{\hat{X}}_2 = A_o\hat{X}_2 + Ly_f + Z$$

$$A_{12}X_2 = y_f = -A_{11}X_1 + \dot{X}_1 - B_1u$$

$$Z = A_{21}X_1 + B_2u$$

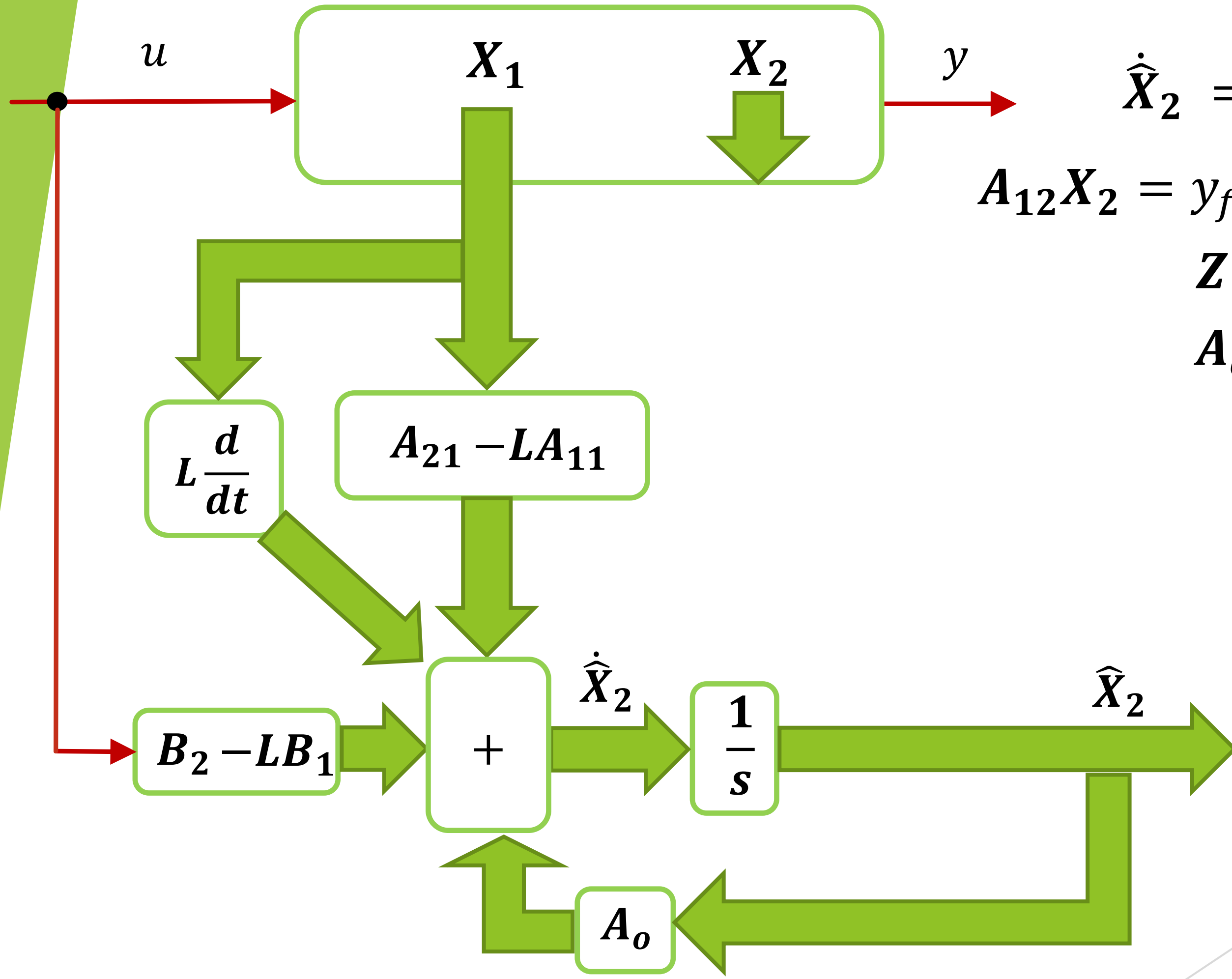
$$A_o = A_{22} - LA_{12}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u}$$

$$\dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + B_2u$$

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques



$$\dot{\hat{X}}_2 = A_o\hat{X}_2 + Ly_f + Z$$

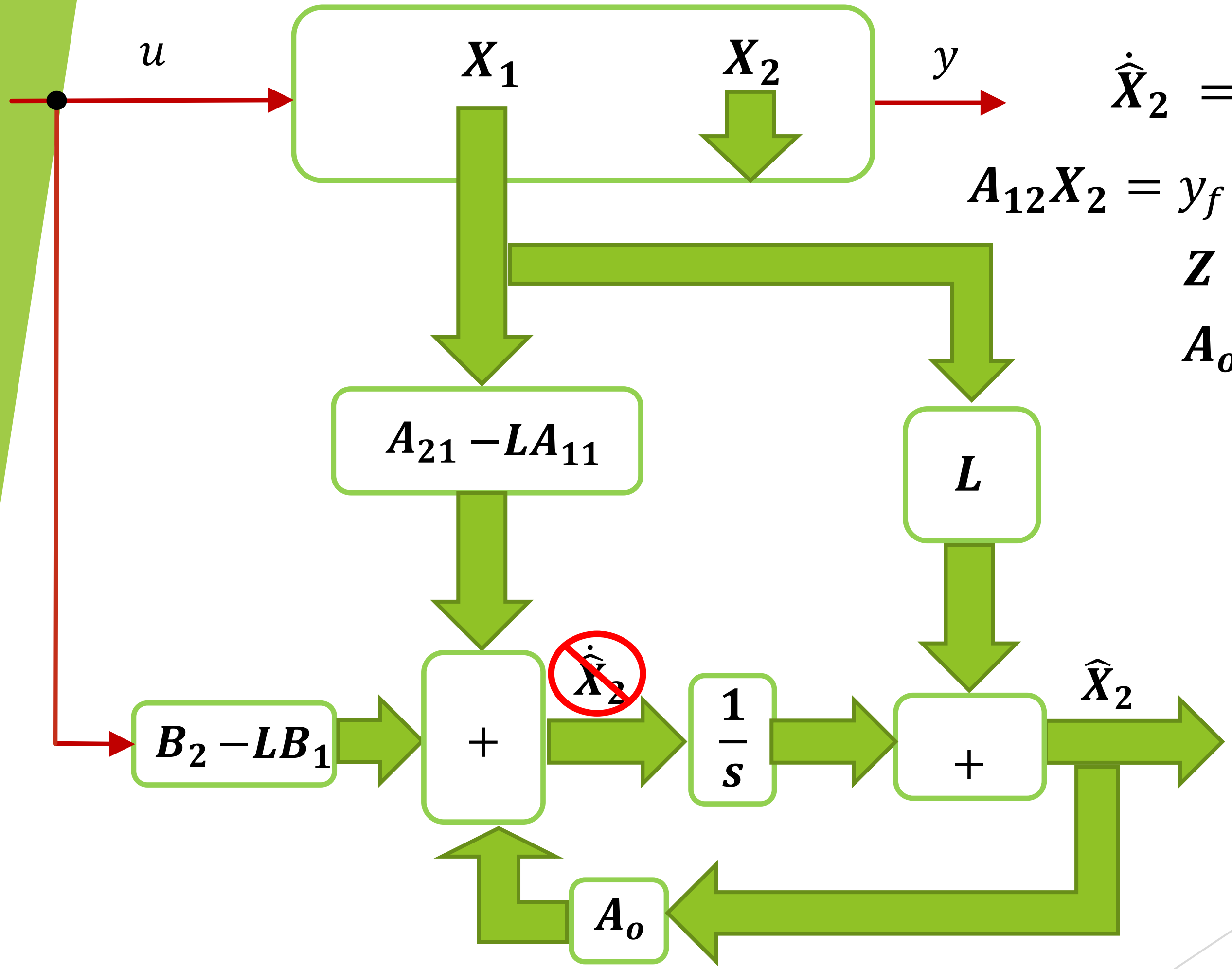
$$A_{12}X_2 = y_f = -A_{11}X_1 + \dot{X}_1 - B_1u$$

$$Z = A_{21}X_1 + B_2u$$

$$A_o = A_{22} - LA_{12}$$

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques



$$\dot{\hat{X}}_2 = A_o\hat{X}_2 + Ly_f + Z$$

$$A_{12}X_2 = y_f = -A_{11}X_1 + \dot{X}_1 - B_1u$$

$$Z = A_{21}X_1 + B_2u$$

$$A_o = A_{22} - LA_{12}$$

Observadores de Estado

Ejemplo: Motor de C.C

1. ***Observador de Orden Completo***

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \quad u = [V_a] \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}1125 \\ -9{,}8875 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y + \boldsymbol{B}u$$

$$\boldsymbol{A_o} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & -1 & 1 \\ -l_3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC} = \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 & 0 \\ l_2 & s + 1 & -1 \\ l_3 & 1 & s + 10 \end{bmatrix}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_{LC}}| = (s + l_1)(s + 1)(s + 10) + l_3 + (s + l_1) + l_2(s + 10)$$
$$= s^3 + s^2(11 + l_1) + \mathrm{s}(11 + 11l_1 + l_2) + (11l_1 + 10l_2 + l_3)$$

Observadores de Estado

Ejemplo: Motor de C.C

1. ***Observador de Orden Completo***

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \quad u = [V_a] \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}1125 \\ -9{,}8875 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o}| = s^3 + s^2(11 + l_1) + \mathrm{s}(11 + 11l_1 + l_2) + (11l_1 + 10l_2 + l_3)$$

Como no estoy planteando un lazo cerrado si no tan solo un observador de estados, la dinámica del observador debe ser mas rápida que la del sistema. Por lo tanto elijo que presente tres autovalores en -50 (5 veces mas rápido que el polo mas rápido del sistema.

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o}| = (s + 50)^3 = s^3 + 150s^2 + 7500\mathrm{s} + 125000$$

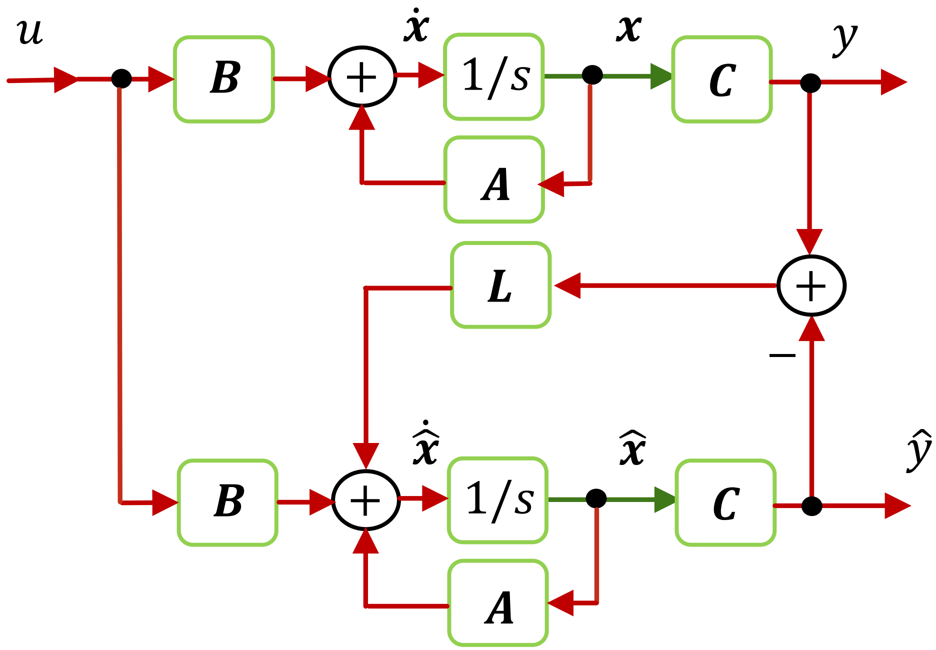
$$\left.\begin{aligned} 11 + l_1 &= 150 \\ 11 + 11l_1 + l_2 &= 7500 \\ 11l_1 + 10l_2 + l_3 &= 125000 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} l_1 &= 139 \\ l_2 &= 5960 \\ l_3 &= 63871 \end{aligned}$$

Si fuera a usar el observador para realizar control a lazo cerrado, el polinomio objetivo estará construido con los factores correspondientes a los autovalores de LC deseados.

Observadores de Estado

Ejemplo: Motor de C.C

1. ***Observador de Orden Completo***



$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y + \boldsymbol{B}u$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 139 \\ 5960 \\ 63871 \end{bmatrix}$$

Observadores de Estado

Ejemplo: Motor de C.C

2. Observador de Orden Reducido

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \quad u = [V_a] \qquad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}1125 \\ -9{,}8875 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Se puede medir solamente la posición. Voy a observar la velocidad angular y la corriente de armadura

$$\boldsymbol{A_{12}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \qquad \dot{\boldsymbol{E}}_2 = (\boldsymbol{A_{22}} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A_{12}})\boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{A_o}\boldsymbol{E_2}$$

$$\boldsymbol{A_{22}}$$

$$\boldsymbol{A_o} = \boldsymbol{A_{22}} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A_{12}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 1 \\ -1 - l_2 & -10 \end{bmatrix}$$

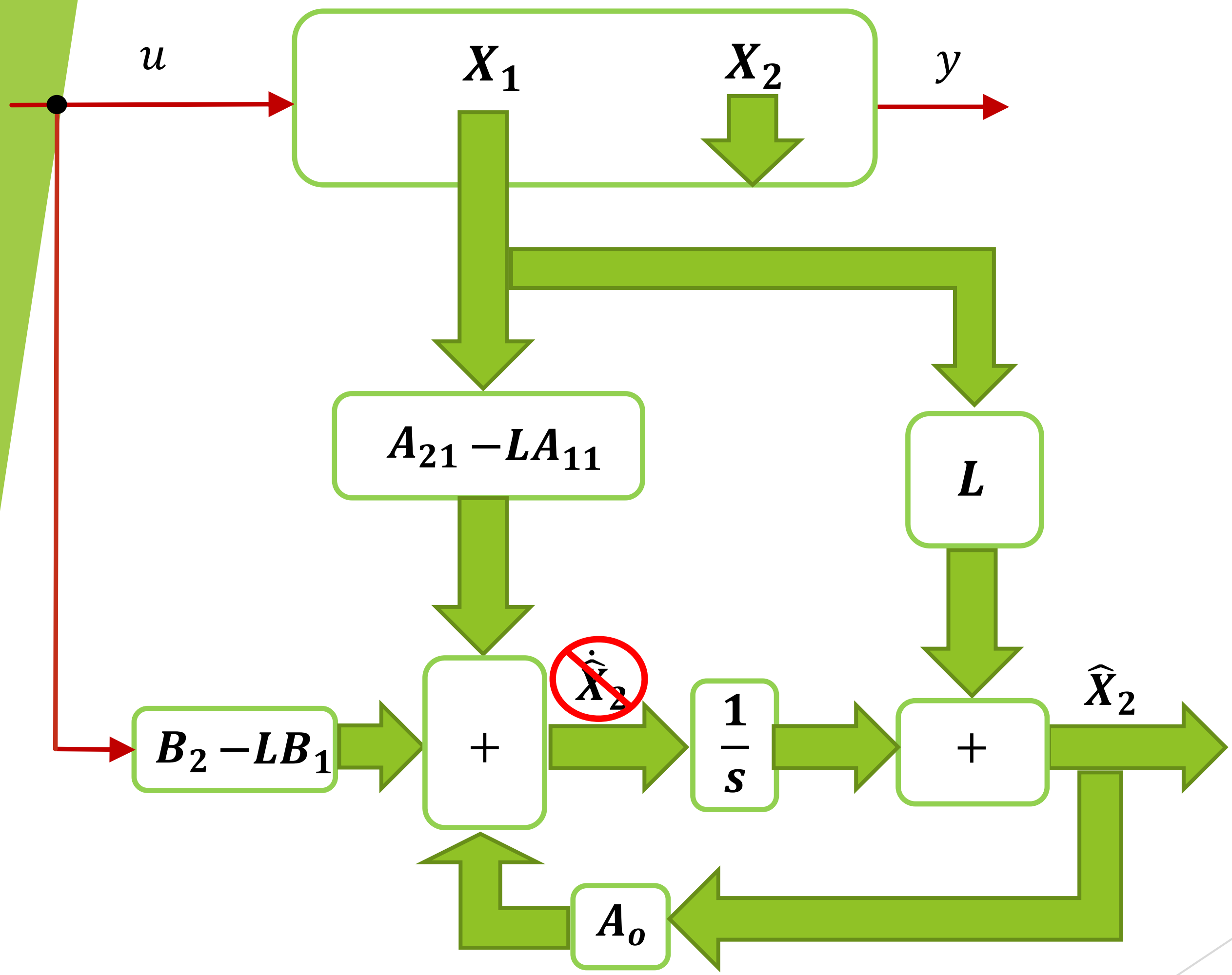
$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o} = s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} s + l_1 + 1 & -1 \\ 1 + l_2 & s + 10 \end{bmatrix}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o}| = (s + l_1 + 1)(s + 10) + (1 + l_2) = s^2 + s(11 + l_1) + (10l_1 + l_2 + 11)$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_o}| = (s + 50)^2 = s^2 + 100s + 2500 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_1 &= 89 \\ l_2 &= 1599 \end{aligned}$$

Observadores de Estado

Diagrama en Bloques



$$\boldsymbol{A_{11}} = [0] \qquad \boldsymbol{A_{21}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{21}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{22}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_1} = [0]$$

$$\boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_o} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$$

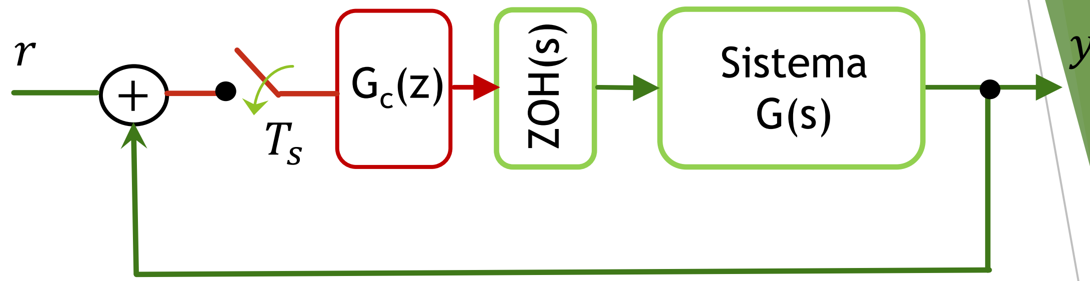
$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 89 \\ 1599 \end{bmatrix}$$

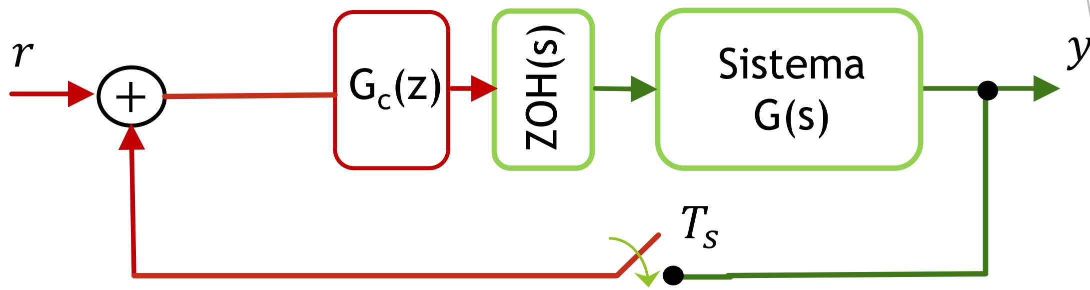
Observadores de Estado

Los dos observadores diseñados no terminan con la determinación de las ganancias. Luego de estos cálculos se debe realizar el diagrama en bloques especificando todas las matrices involucradas. Las simulaciones se arman fácilmente desde estos diagramas.

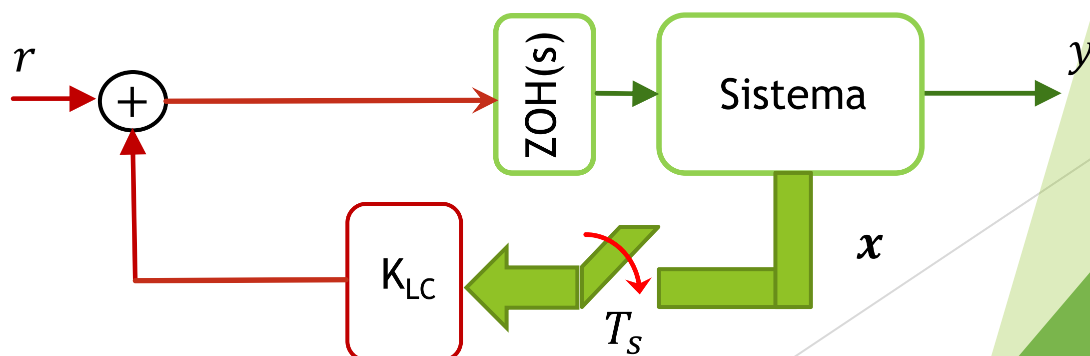
Modelo de Estados Discretos

CA 1 - CyS A



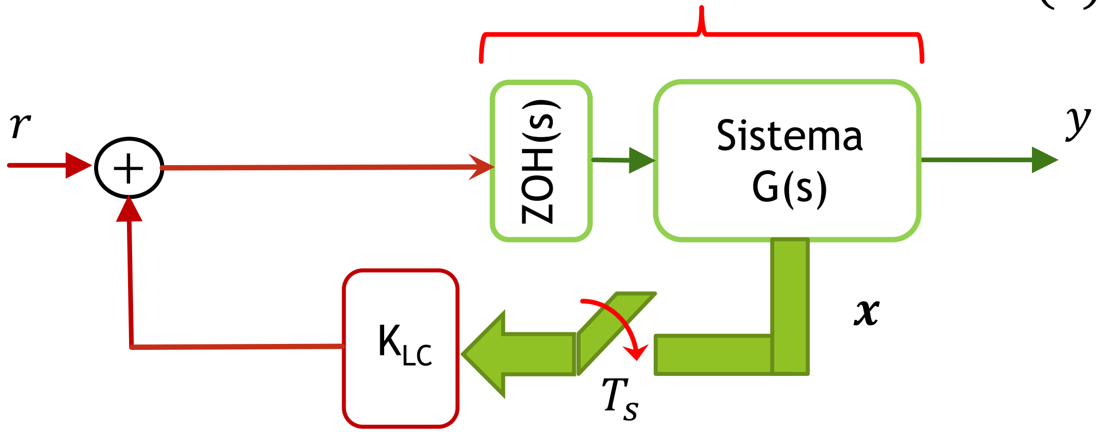


CA 2 - CM



Modelo de Estados Discretos

$$Z\{ZOH(s)G(s)\} = \frac{N(z)}{D(z)}$$



Modelo Entrada / Salida: $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{N(z)}{D(z)} = \dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z^1 + b_o}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_o}$

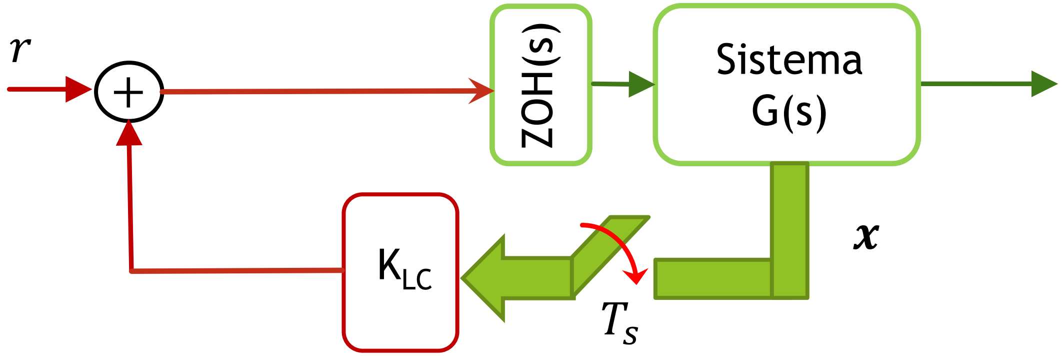
$$(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_o) Y(z) \; = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z^1 + b_o) \; U(z)$$

$$y(k+n) \; + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_o y(k)$$
$$= b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_o u(k)$$

$$y(k+n)$$
$$= -a_{n-1} y(k+n-1) - \cdots - a_1 y(k+1) - a_o y(k) + b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1)$$
$$+ \cdots + b_1 u(k+1) + b_o u(k)$$

Modelo de Estados Discretos

$$Z\{ZOH(s)G(s)\} = \frac{N(z)}{D(z)}$$



Modelo Entrada/Salida (FT): $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{N(z)}{D(z)} = \dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z^1 + b_o}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_o}$

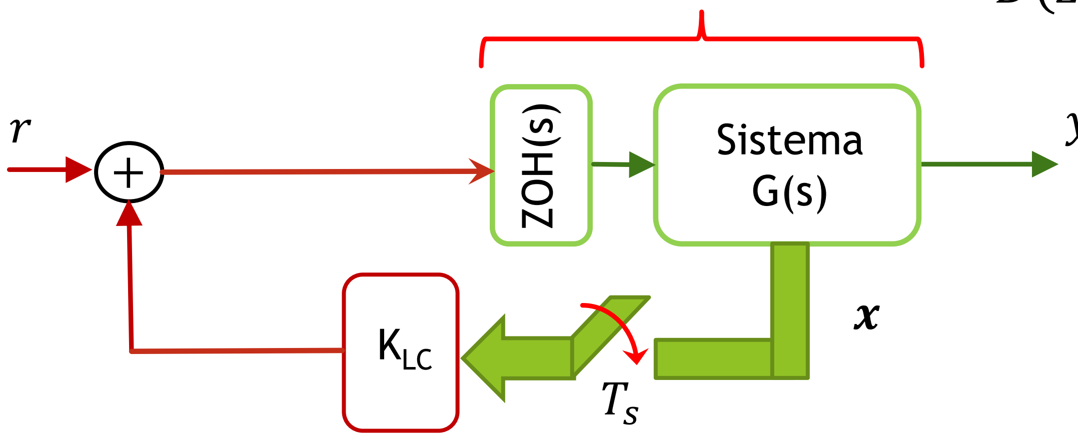
Modelo Entrada/Salida (Ecuación en Diferencias con T_s implícito):

$$y(k+n) = -a_{n-1} y(k+n-1) - \cdots - a_1 y(k+1) - a_o y(k) + b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_o u(k)$$

$$y(k) = -a_{n-1} y(k-1) - \cdots - a_1 y(k-n+1) - a_o y(k-n) + b_m u(k+m-n) + b_{m-1} u(k+m-n-1) + \cdots + b_1 u(k-n+1) + b_o u(k-n)$$

Modelo de Estados Discretos

$$Z\{ZOH(s)G(s)\} = \frac{N(z)}{D(z)}$$



Modelo Entrada/Salida (FT): $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z^1 + b_o}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_o}$

Modelo Entrada/Salida (Ecuación en Diferencias con T_s implícito):

$$y(k+n) \\ = -a_{n-1} y(k+n-1) - \cdots - a_1 y(k+1) - a_o y(k) + b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) \\ + \cdots + b_1 u(k+1) + b_o u(k)$$

Modelo de Estados Discreto SISO:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\,u(k)$$
$$y(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k)$$

Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Controlable:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = k\frac{\prod_i (z-z_i)}{\prod_j (z-p_j)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)}\frac{V(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad \frac{b_m z^m + \ldots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{1}$$

$$\frac{V(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \Rightarrow V(s)(z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) = U(z)$$

$$v(k+n) + a_{n-1}\underbrace{v(k+n-1)}_{x_n} + \ldots + a_2\underbrace{v(k+2)}_{x_3} + a_1\underbrace{v(k+1)}_{x_2} + a_0\underbrace{v(k)}_{x_1} = u$$

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k)$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$

$$x_n(k+1) = u - a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \cdots - a_{n-1} x_n(k)$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Controlable:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = b_m z^m + \ldots + b_2\, z^2 + b_1 z + b_0$$

$$b_m \underbrace{v(k+m)}_{x_{m+1}} + b_{m-1} \underbrace{v(k+m-1)}_{x_m} + \ldots + b_2\, \underbrace{v(k+2)}_{x_3} + b_1 \underbrace{v(k+1)}_{x_2} + b_0 \underbrace{v(k)}_{x_1} = y$$

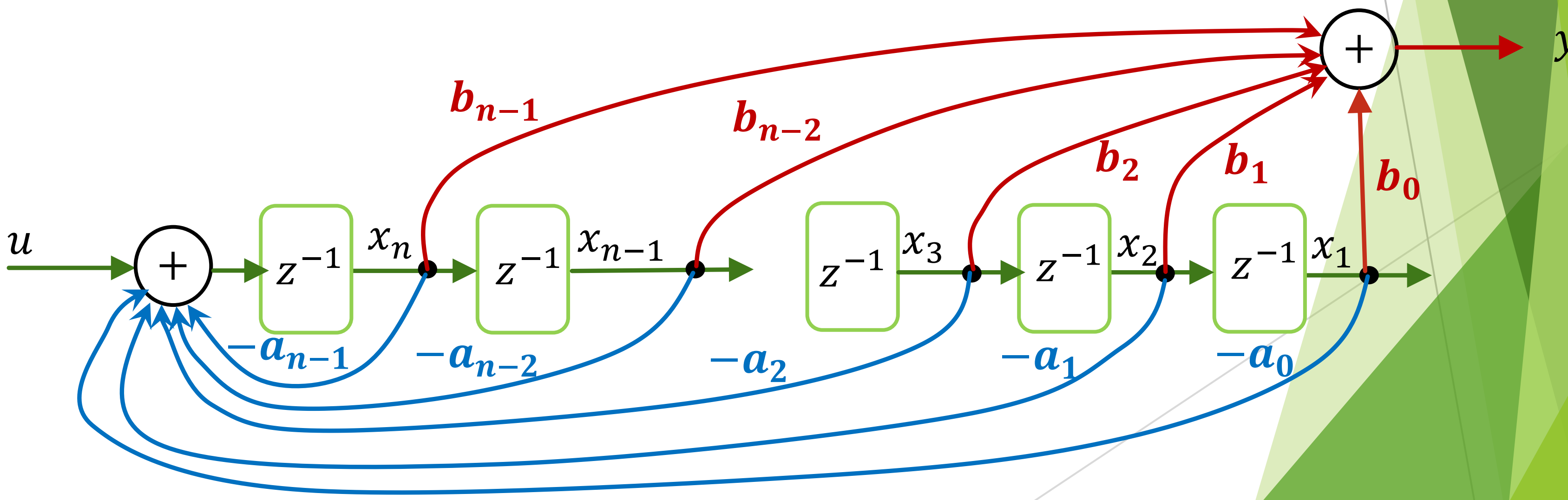
$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n-(m+1)}] x(k)$$

Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Controlable:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x(k)$$



Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Simples y Múltiples:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = k\frac{\prod_i (z-z_i)}{\prod_j (z-p_j)} = \frac{b_m z^m + \ldots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$Y(s) = \frac{R_1 U(z)}{z-\lambda_1} + \frac{R_{21} U(z)}{z-\lambda_2} + \frac{R_{22} U(z)}{(z-\lambda_2)^2} + \cdots \frac{R_{2r} U(z)}{(z-\lambda_2)^r} + \cdots \frac{R_n U(z)}{z-\lambda_n}$$

$$R_{2i} = \frac{1}{(i-1)!}\lim_{z\to\lambda_2}\left(\frac{d^{i-1}[Y(z)/U(z)\,(z-\lambda_2)^r]}{dz^{i-1}}\right) \qquad i = 1\cdots r$$

$$Y(z) = R_1\underbrace{\frac{U(z)}{z-\lambda_1}}_{x_1} + R_{21}\underbrace{\frac{U(z)}{z-\lambda_2}}_{x_2} + \frac{R_{22} U(z)}{(z-\lambda_2)^2} + \cdots \frac{R_{2r} U(z)}{(z-\lambda_2)^r} + \cdots R_n\underbrace{\frac{U(z)}{z-\lambda_n}}_{x_n}$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \lambda_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \lambda_2 x_2(k) + u(k) \\ x_n(k+1) &= \lambda_n x_n(k) + u(k) \end{aligned}$$

$$\frac{U(s)}{(z-\lambda_2)^2} = \frac{x_2}{z-\lambda_2} = x_3 \Rightarrow x_3(k+1) = x_2(k) + \lambda_2 x_3(k)$$

$$\frac{U(s)}{(z-\lambda_2)^r} = \frac{x_r}{z-\lambda_2} = x_{r+1} \Rightarrow x_{r+1}(k+1) = x_r(k) + \lambda_2 x_{r+1}(k)$$

Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Simples y Múltiples:

$$Y(z)=\frac{R_1U(z)}{z-\lambda_1}+\frac{R_{21}U(z)}{z-\lambda_2}+\frac{R_{22}U(z)}{(z-\lambda_2)^2}+\cdots\frac{R_{2k}U(z)}{(z-\lambda_2)^r}+\cdots\frac{R_nU(z)}{z-\lambda_n}$$

$$x_1(k+1)=\lambda_1x_1(k)+u(k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2(k+1)&=\lambda_2x_2(k)+u(k)\\ x_3(k+1)&=x_2(k)+\lambda_2x_3(k)\\ &\vdots\\ x_{r+1}(k+1)&=x_r(k)+\lambda_2x_{r+1}(k)\end{aligned}}$$

$$\vdots$$

$$x_n(k+1)=\lambda_2x_n(k)+u(k)$$

$$\Rightarrow \quad r=4$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[R_1 \quad \boxed{R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23} \quad R_{24}} \quad R_3 \quad \cdots \quad R_n]\,\boldsymbol{x}(k)$$

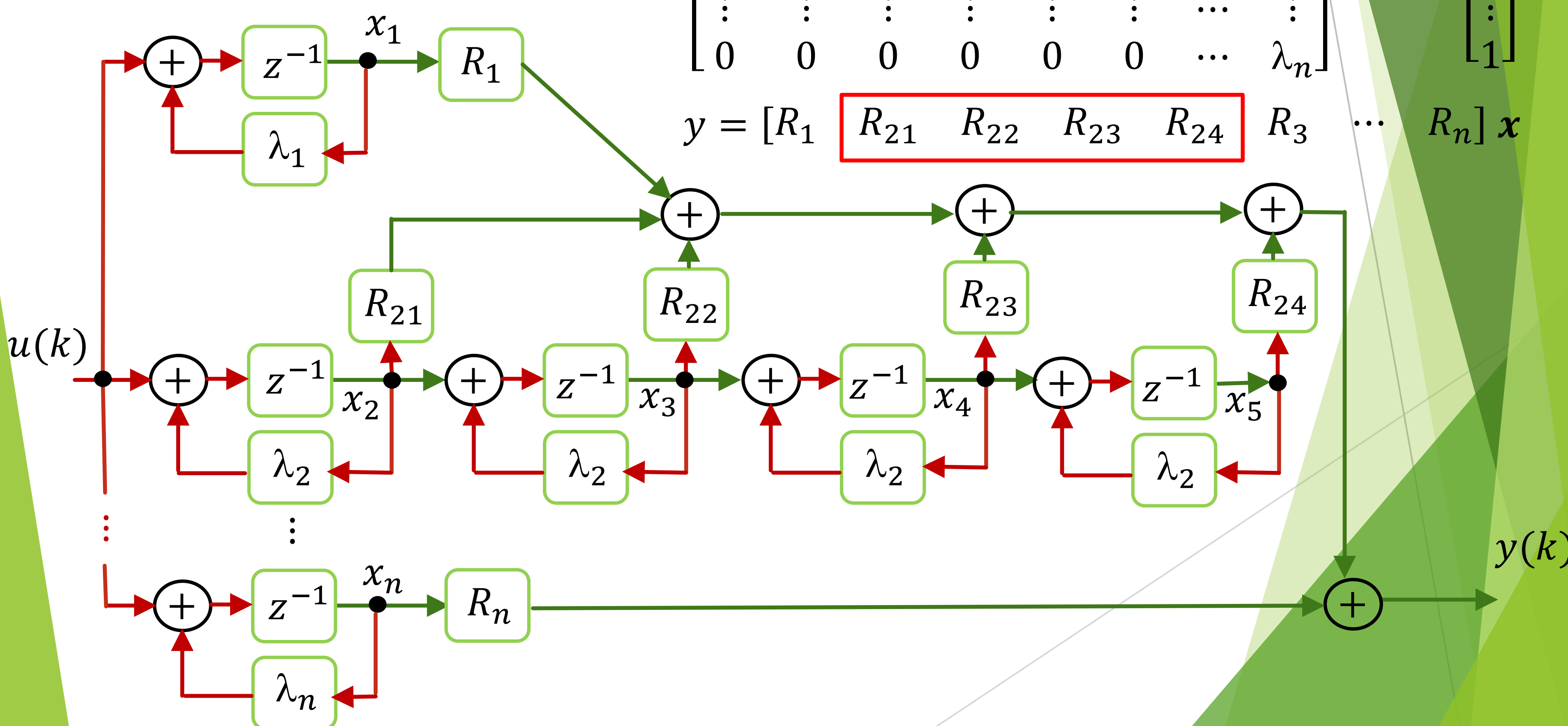
Modelo de Estados Discretos

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Simples y Múltiples:

$$
\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u(k)
$$

$$
y=\begin{bmatrix}R_1 & R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_3 & \cdots & R_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}
$$



Modelo de Estados Discretos

Determinación de la Función de Transferencia:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\,u(k)$$
$$y(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k)$$

Si transformamos esta expresión matricial a Z:

$$z\boldsymbol{X}(z) - \boldsymbol{z}\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}U(\boldsymbol{z})$$
$$Y(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

Considerando condiciones iniciales nulas:

$$z\boldsymbol{X}(z) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{B}U(z)$$
$$Y(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

$$\Rightarrow$$

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{B}U(z)$$
$$Y(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z)$$
$$Y(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

$$\Rightarrow$$

$$Y(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

Modelo de Estados Discretos

Transformación de Modelos de Estado:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}z(k) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}z(k) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}z(k) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}z(k) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{A_t} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$$
$$\boldsymbol{B_t} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C_t} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Las transformaciones de modelos siguen las mismas pautas que las realizadas para modelos continuos

Modelo de Estados Discretos

Solución de la Ecuación de Estados

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(0)$$
$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\,\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{AB}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(1)$$
$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(2) = \boldsymbol{A}^3\,\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{AB}\,\boldsymbol{u}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k-1) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k-1}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k-2}}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(1) + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k-3}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2) + \cdots + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{x}(0) + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{k-1}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k-i-1}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \underbrace{\Phi(k)\boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{RL}} + \underbrace{\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{k-1}} \Phi(k-i-1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)}_{\boldsymbol{RF}}$$

$$\Phi(k) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$$

La matriz e transición de estados discreta conserva las mismas propiedades que su versión continua.

Modelo de Estados Discretos

Solución de la Ecuación de Estados(Transformada Z)

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(k)$$

$$z\boldsymbol{X}(z) - z\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

$$z\boldsymbol{X}(z) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) = z\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{B}U(\boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(z) = z\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$$

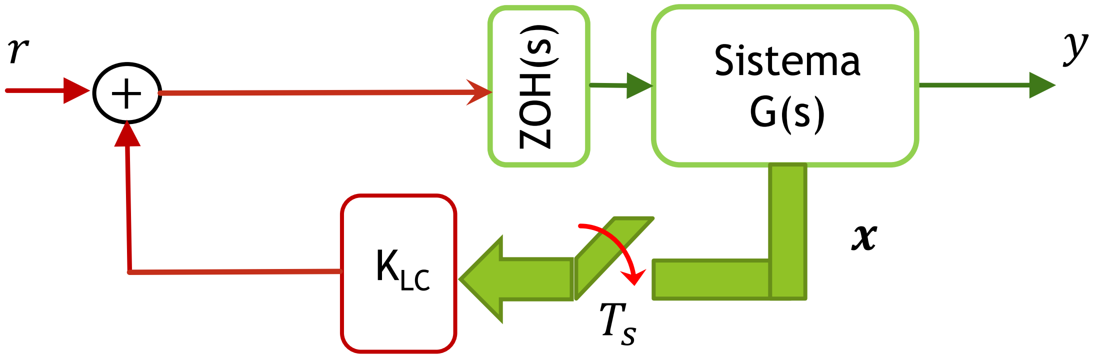
$$\boldsymbol{X}(z) = \underbrace{(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})}_{\boldsymbol{RL}} + \underbrace{(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}U(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{RF}}$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \Phi(k)\boldsymbol{x}(0) + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{k-1}} \Phi(k-i-1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)$$

$$\Phi(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z$$

Modelo de Estados Discretos

Obtención del Modelo en V.E. Discreto desde uno Continuo



Hasta ahora se obtenía el modelo en V.E Discreto a partir de funciones de transferencia discretas. Este proceso puede realizarse a partir del modelo de V.E. Continuo sin pasar por la FT.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A_D}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B_D}u(k)$$
$$y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} \qquad\qquad\qquad y(k) = \boldsymbol{C_D}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\boldsymbol{t}} \Phi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\tau})d\tau$$

Al incluir el ZOH, la alimentación del sistema será escalonada. Cada uno de esos escalones tendrá magnitud constante durante un período T.

Modelo de Estados Discretos

Obtención del Modelo en V.E. Discreto desde uno Continuo

Luego, la solución de la ecuación de estados considerando el estado inicial como *kT*, será:

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t - kT)\boldsymbol{x}(kT) + \int_{kT}^{t} \Phi(t - \tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

Evaluando esta solución en el instante *(k+1)T*:

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = \Phi(T)\boldsymbol{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi\big((k+1)T - \tau\big)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

Dado que la excitación es constante en ese intervalo:

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = \Phi(T)\boldsymbol{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi\big((k+1)T - \tau\big)\boldsymbol{B}d\tau\, \boldsymbol{u}(kT)$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A_D}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B_D}u(k) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{A_D} = \Phi(T) = e^{AT} \\ \boldsymbol{B_D} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} \Phi(\lambda)\boldsymbol{B}d\lambda \end{cases}$$

Las matrices A_D y B_D del sistema discreto pueden obtenerse directamente desde la matriz de transición de estados del sistema continuo.

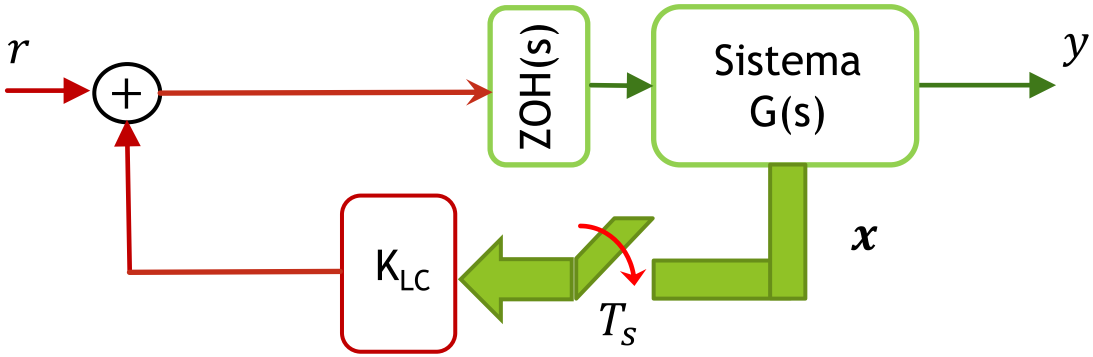
Modelo de Estados Discretos

Controlabilidad y Observabilidad:

Ambas propiedades se interpretan de igual manera que el caso continuo. El test de Gilbert aplicado sobre el modelo diagonal y el Test de Kalman son válidos dentro del contexto discreto.

Modelo de Estados Discretos

Realimentación de Estados. Asignación de Autovalores de LC



$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u$$
$$y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A_D}\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B_D}u(k)$$
$$y(k) = \boldsymbol{C_D}\boldsymbol{x}(k)$$

$$u(k) = \boldsymbol{r}(k) - \boldsymbol{K_{LC}}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A_D} - \boldsymbol{B_D}\boldsymbol{K_{LC}})\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B_D}r(k)$$
$$y(k) = \boldsymbol{C_D}\boldsymbol{x}(k)$$

Si el sistema es controlable no habrá dificultades para ubicar los autovalores donde lo desee. Tener en cuenta que esta asignación se realiza en el plano discreto Z con todas las particularidades del caso.
En el mismo sentido, para corregir por ejemplo errores de EE deberé expandir el sistema en la forma ya conocida pero asegurando un polo discreto en z=1.