

## Control Automático II - Ing. Electrónica

### Ejercicio resuelto 1: Modelo de estados de un motor de corriente continua

#### 1. Introducción

A fin de obtener modelos de estado para las distintas configuraciones que puede adoptar esta máquina eléctrica plantearemos en primer lugar las ecuaciones que describen su funcionamiento. En la Fig. 1, se muestra un esquema del sistema. En favor de la simplicidad supondremos que el flujo en el entrehierro es producido por una fuente de corriente  $i_f$ .

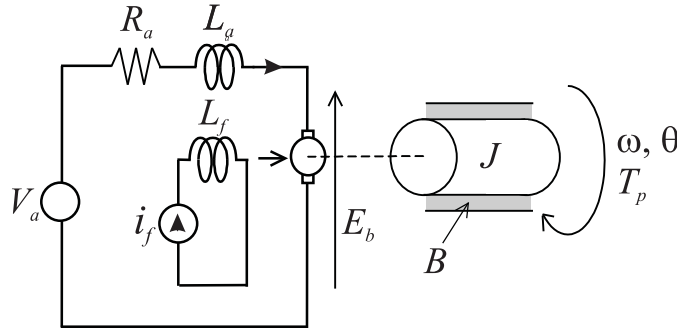


Figura 1: Esquema de máquina de CC

Las ecuaciones principales son la ‘eléctrica’ correspondientes a la malla de armadura

$$V_a = L_a \dot{i}_a + R_a i_a + E_b, \quad (1)$$

y la ‘mecánica’ planteada sobre el rotor

$$J\dot{\omega} + B\omega = T + T_p. \quad (2)$$

Estas ecuaciones no corresponden a dos sistemas aislados, la ecuación que los relaciona y sintetiza esta transducción electro-mecánica es

$$T = k_1 \Phi i_a. \quad (3)$$

Además, la fem inducida  $E_b$  es proporcional al flujo y a la velocidad de rotación según

$$E_b = k_2 \Phi \omega \quad (4)$$

y si nos mantenemos fuera de la zona de saturación, el flujo será proporcional a la corriente de excitación

$$\Phi = k_3 i_f. \quad (5)$$

Si consideramos que la potencia eléctrica transferida al entrehierro es transformada totalmente en energía mecánica en el eje, podemos escribir

$$\begin{aligned} P_{elec} &= P_{mec}, \\ E_b i_a &= T \omega \end{aligned} \quad (6)$$

reemplazando (3) y (4) en (6) obtenemos

$$k_1 \Phi \omega i_a = k_2 \Phi \omega i_a,$$

y podemos concluir que

$$k_1 = k_2 = k. \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones presentadas puede describirse, en forma simplificada, el funcionamiento de la máquina de continua. De acuerdo a la configuración adoptada, las variables involucradas podrán mantenerse constantes, constituir acciones de control, perturbaciones o variables de estado. A continuación analizaremos algunos casos típicos.

## 2. Motor de Corriente Continua controlado por corriente de armadura

En este modo de funcionamiento, la corriente de excitación  $i_f$  es constante, por consiguiente también lo es el flujo  $\Phi$ . En esta condición  $E_b = k\omega$ ,  $T = ki_a$ , y las ecuaciones (1) y (2) toman la forma

$$V_a = L_a \dot{i}_a + R_a i_a + k\omega, \quad (8)$$

$$J\dot{\omega} + B\omega = ki_a + T_p, \quad (9)$$

despejando  $\dot{i}_a$  de (8) y  $\dot{\omega}$  de (9), se obtienen

$$\dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} V_a, \quad (10)$$

$$\dot{\omega} = \frac{k}{J} i_a - \frac{B}{J} \omega + \frac{1}{J} T_p. \quad (11)$$

Si se desea un control de posición debemos incluir una ecuación adicional para esta variable

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (12)$$

Las ecuaciones (10)-(12) constituyen las ecuaciones de estado y pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{k}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ T_d \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Definiendo el vector de estados  $x = [i_a \ \theta \ \omega]^T$  y el vector de entrada  $u = [V_a \ T_d]^T$ , la ecuación (13) toma la forma general

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

De los elementos del vector  $u$ ,  $V_a$  es la acción de control. El par mecánico externo en el eje  $T_d$  no puede variarse a voluntad sino que está impuesta por el sistema mecánico acoplado, además, dado que difícilmente tendremos información acerca de ella, debemos considerarla una perturbación. Para distinguir entre entradas que son acciones de control y perturbaciones, las ecuaciones de estado (13) pueden reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{k}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} T_d, \quad (14)$$

respondiendo a la forma

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_p p,$$

siendo  $u$  el vector de las acciones de control y  $p$  el de las perturbaciones.

### 3. Motor de Corriente Continua controlado por corriente de excitación

Una posibilidad de operación del motor CC continua controlado por corriente de excitación es mantener constante la tensión de armadura  $V_a$  y actuar sobre la corriente de excitación  $i_f$  que determina el flujo en el entrehierro. Esta corriente constituirá la acción de control.

Reemplazando (3) y (4) en (1) y (2), suponiendo  $k_1 = k_2 = k$ , tenemos

$$\begin{aligned} V_a &= L_a \dot{i}_a + R_a i_a + k k_3 i_f \omega, \\ J \dot{\omega} + B \omega &= k k_3 i_a i_f + T_d, \end{aligned} \quad (15)$$

recordemos que si deseamos plantear un control de posición debemos incluir

$$\dot{\theta} = \omega.$$

despejando  $\dot{i}_a$  y  $\dot{\omega}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{i}_a &= -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_2 k_3 i_f}{L_a} \omega + \frac{V_a}{L_a}, \\ \dot{\omega} &= \frac{k_1 k_3}{J} i_a i_f - \frac{B}{J} \omega + \frac{1}{J} T_d, \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Definiendo un vector de entrada  $u^1$ ,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_a & i_f & T_d \end{bmatrix}^T,$$

y un vector de estados  $x$  dado por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_a & i_f & T_d \end{bmatrix}^T,$$

las ecuaciones en (16) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{k_2 k_3}{L_a} u_2 x_2 + \frac{u_1}{L_a}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_1 k_3}{J} x_1 u_2 - \frac{B}{J} x_2 + \frac{1}{J} u_3, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned} \quad (17)$$

pero no es posible llevarlas a la forma  $\dot{x} = AX + Bu$ , pues se trata de un sistema no lineal. El sistema queda de la forma

$$\dot{x} = f(x, u).$$

---

<sup>1</sup>No todas las componentes de este vector de entrada constituyen acciones de control. Para este caso el par  $T_d$  no puede variarse a voluntad sino que está determinado por la carga mecánica externa, deberíamos considerarlo una perturbación.