Control Automático 2

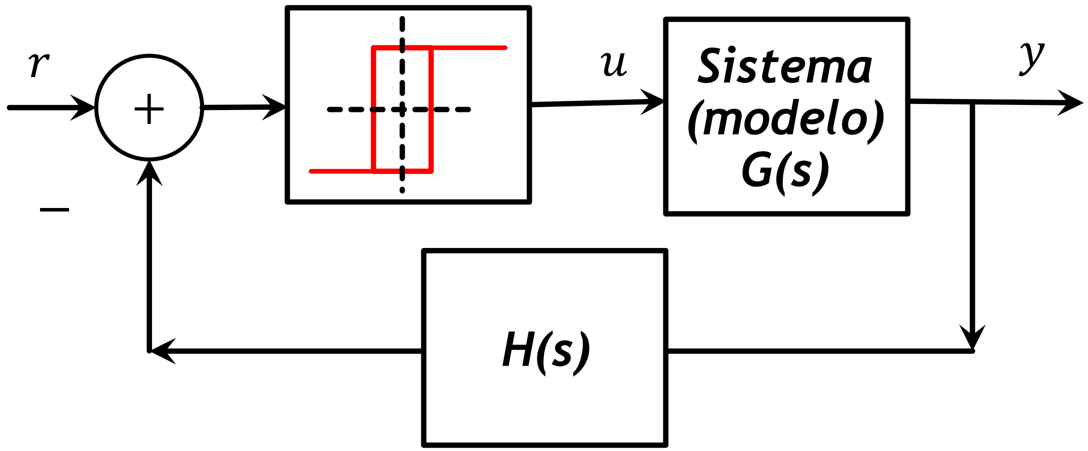
Sistemas No Lineales.

- Función Descriptiva

F. Valenciaga 2021

Función Descriptiva

Método de análisis y diseño planteado en el marco de sistemas entrada/salida realimentados, descriptos por funciones de transferencia y que en el lazo incorpora alguna no linealidad.

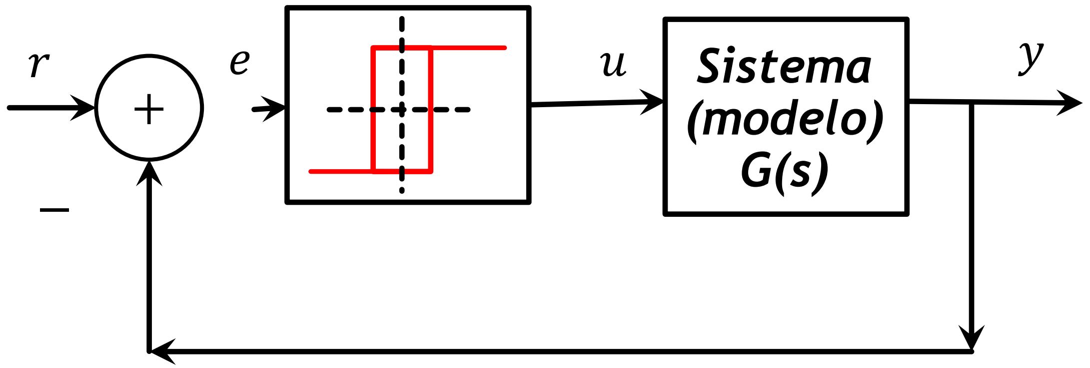


Condiciones de aplicabilidad de la metodología:

- Existencia de una no linealidad principal que concentre todas las no linealidades del sistema
- Característica impar de la no linealidad
- Característica estable y suficientemente pasa bajos de la parte lineal del sistema (Mínima fase)

Función Descriptiva

Método de análisis y diseño planteado en el marco de sistemas entrada/salida realimentados descriptos por funciones de transferencia y que en el lazo incorporan alguna no linealidad.



Por simplicidad consideraremos H(s) =1 y que el lazo se encuentra abierto en el punto anterior a la no linealidad.

Para explicar el método de análisis consideremos que:

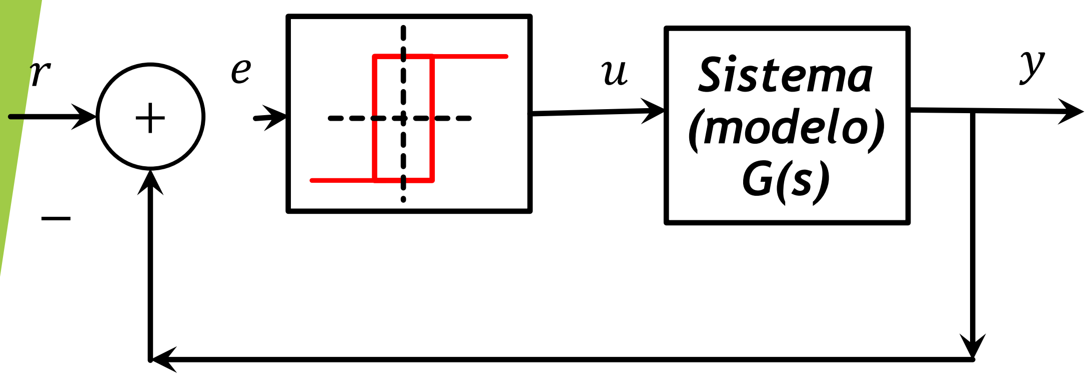
$$e(t) = A\,sen(\omega_i t) \qquad \omega_i = 2\pi/T$$

Por la simetría impar de la no linealidad, el desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica de salida será:

$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} a_n\,cos(n\omega_i t) + b_n sen(n\omega_i t)$$

No posee término de continua y presenta solamente armónicas impares

Función Descriptiva



$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} a_n \cos(n\omega_i t) + b_n sen(n\omega_i t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(n\omega_i t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\, sen(n\omega_i t)dt$$

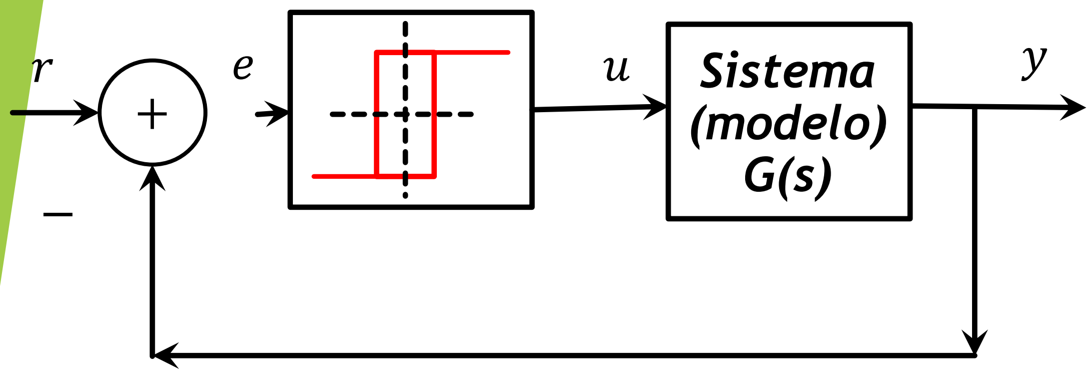
$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} U_n\, sen(n\omega_i t + \alpha_n)$$

$$U_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\alpha_n = tg^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} Im\left\{U_n\, e^{j(n\omega_i t+\alpha_n)}\right\} = \sum_{n=1,3,5\ldots} Im\left\{U_n\, e^{jn\omega_i t} e^{j\alpha_n}\right\}$$

Función Descriptiva



Si la transferencia *G(s)* es suficientemente pasa bajos, las armónicas superiores generadas por la alinealidad pueden considerarse despreciables a la salida de la misma. Luego, puede analizarse la estabilidad del lazo considerando solamente la componente fundamental:

$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} Im\left\{U_n\, e^{jn\omega_i t} e^{j\alpha_n}\right\} \approx U_1 sen(\omega t + \alpha_1)$$

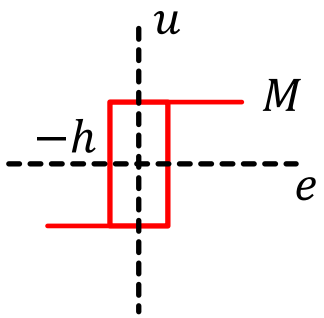
Bajo esta consideración es posible entonces considerar que la no linealidad presenta una "***función de transferencia fundamental***" dada por:

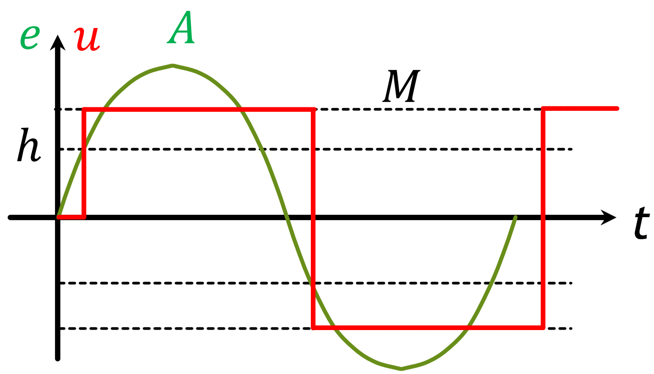
$$N = \frac{U_1}{A} e^{j\alpha_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{A}\; e^{jtg^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)}$$

Función descriptiva de la alinealidad (módulo y fase)

Función Descriptiva

Ejemplo: ***histéresis***





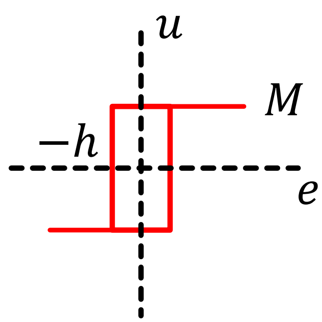
Como puede observarse a la entrada senoidal el sistema no lineal responde con una señal cuadrada retrasada en un valor en relación con ***h***.

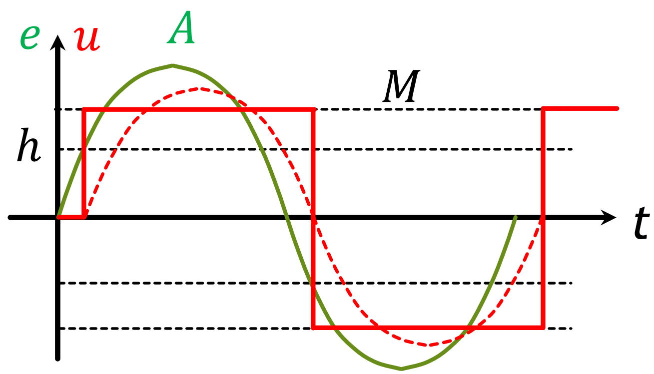
Si la salida no estuviera retrasada, seria una señal impar $(a_n = 0)$ y por lo tanto el coeficiente de la fundamental podría calcularse como:

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T M\, sen(\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} M\, sen(\omega t)dt = \frac{4M}{\pi}$$

Función Descriptiva

Ejemplo: *histéresis*





Luego, la fundamental correspondiente a la señal de salida cuadrada puede postularse como:

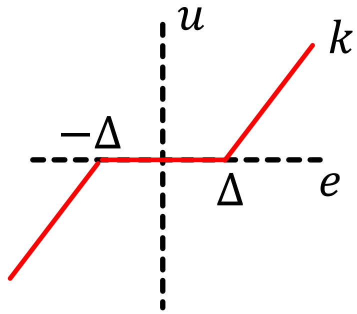
$$u(t) = \frac{4M}{\pi} sen(\omega t + \alpha_1) \qquad \alpha_1 = -sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)$$

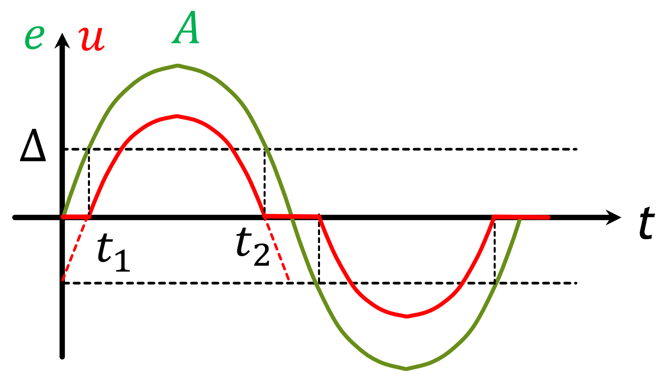
La función descriptiva de esta alinealidad puede entonces escribirse como:

$$\boxed{N = \frac{4M}{\pi A} e^{-j\left(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)\right)}}$$

Función Descriptiva

Ejemplo: zona muerta





Como puede observarse a la entrada senoidal el sistema no lineal responde con una señal impar ($a_n = 0$) .

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\, sen(\omega t)dt \qquad Asen(\omega t_1) = \Delta \qquad t_1 = sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{A}\right)$$

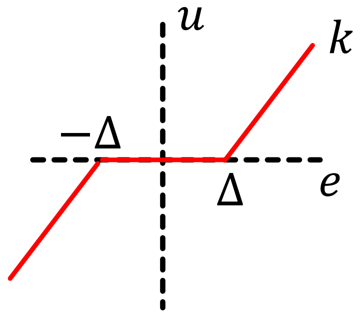
$$t_2 = \frac{T}{2} - sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{A}\right)$$

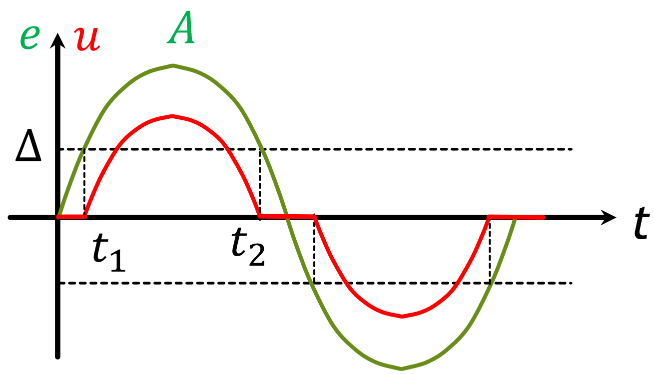
$$u(t) = \begin{cases} 0 \;\; si\; t < t_1 \\ k(Asen(\omega t) - \Delta)\; si \;\; t_2 < t < t_1 \\ 0 \;\; si\; t > t_2 \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} k(Asen(\omega t) - \Delta)\, sen(\omega t)dt = \frac{2kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{A}\right) - \frac{\Delta}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\,\right]$$

Función Descriptiva

Ejemplo: zona muerta

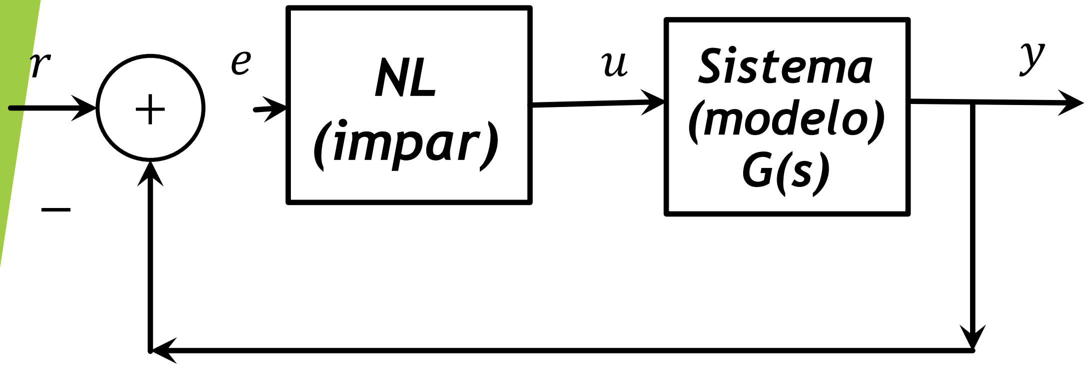




$$b_1 = \frac{2kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{A}\right) - \frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{N = \left(k - \frac{2k}{\pi}sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{A}\right) - \frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right)e^{-j0}}$$

Función Descriptiva



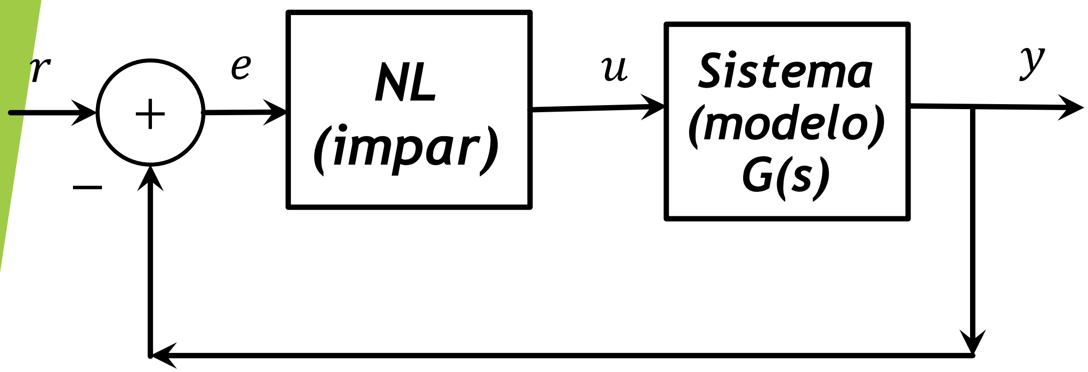
$$u(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} Im\left\{U_n\, e^{jn\omega_i t} e^{j\alpha_n}\right\}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G(j\omega_i) = |G(j\omega_i)| e^{j\varphi_1} \\ \cancel{G(j3\omega_i) = |G(j3\omega_i)| e^{j\varphi_3}} \\ \cancel{G(j5\omega_i) = |G(j5\omega_i)| e^{j\varphi_5}} \\ \vdots \end{cases}$$

Si la transferencia *G(s)* es suficientemente pasa bajos, las armónicas superiores pueden considerarse despreciables a la salida de la misma.

$$\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} \approx N\, G(j\omega_i) = N\, |G(j\omega_i)|\, e^{j\varphi_1}$$

Función Descriptiva



$$\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} \approx N\,G(j\omega) = N\,|G(j\omega)|\,e^{j\varphi}$$

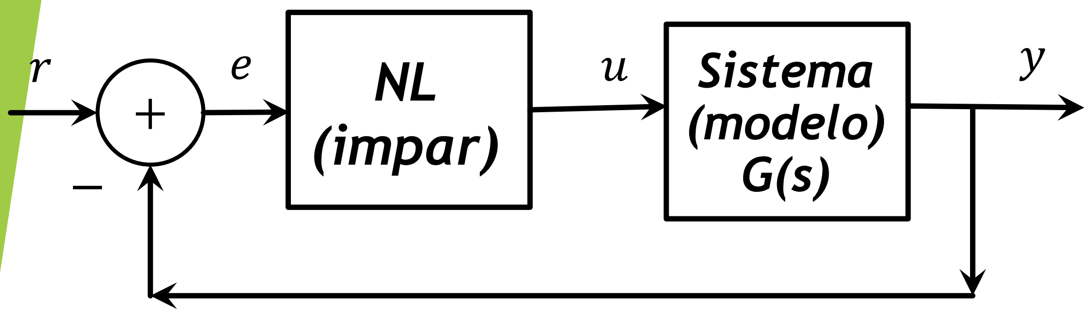
A cerrar el lazo la transferencia corresponde a: $\dfrac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \dfrac{N\,G(j\omega)}{1 + N\,G(j\omega)}$

Ecuación Característica: $1 + N\,G(j\omega) = 0$

Analizando la estabilidad es inmediato ver que, cuando: $G(j\omega) = -\dfrac{1}{N}$

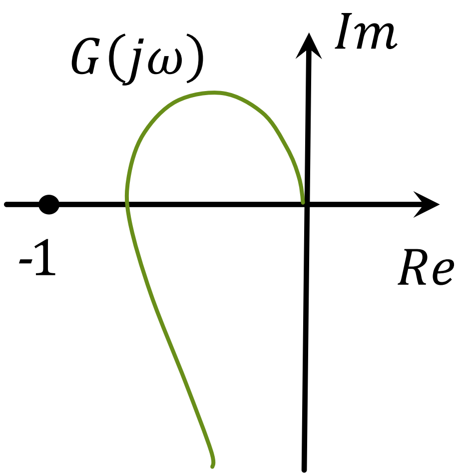
El sistema presenta una oscilación sostenida, es decir un ciclo límite.

Función Descriptiva

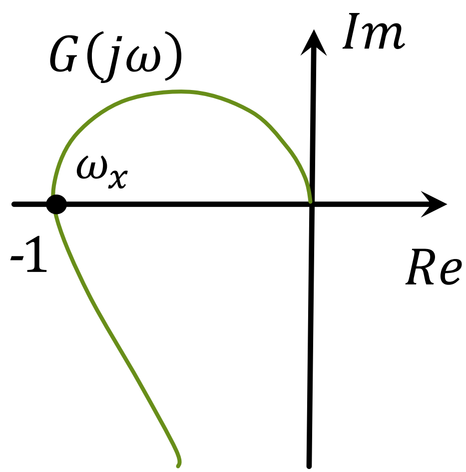


Dado que $G(j\omega)$ y N son valores complejos dependientes de la frecuencia se pueden usar métodos gráficos a partir de los cuales, dibujando el módulo y fase de ambas funciones, se pueden analizar características de estabilidad del sistema.

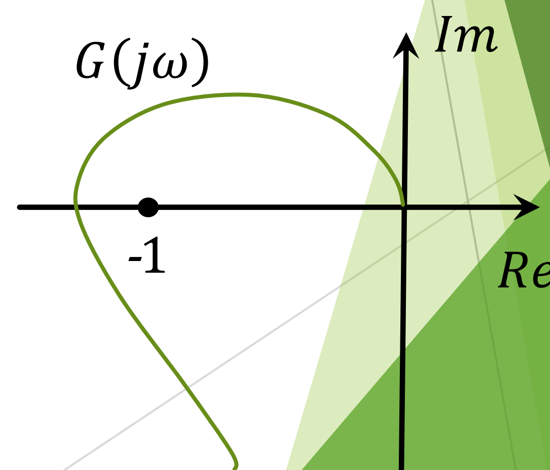
$G(j\omega)$ de Mínima Fase



Sistema Estable

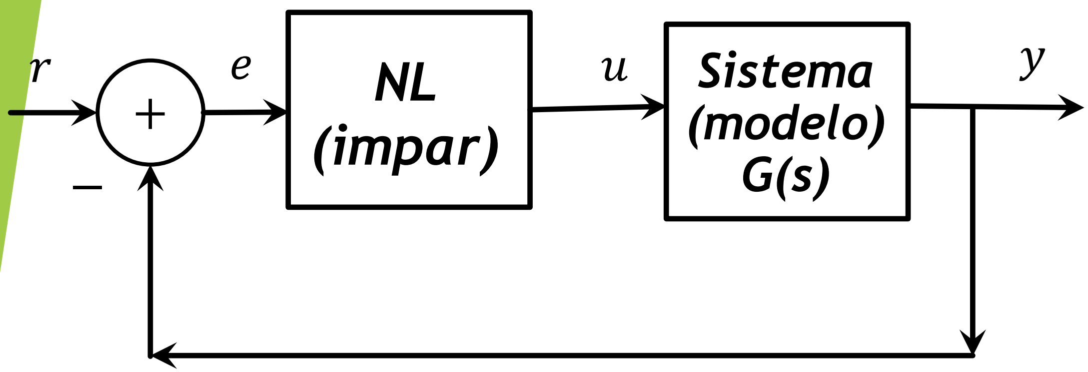


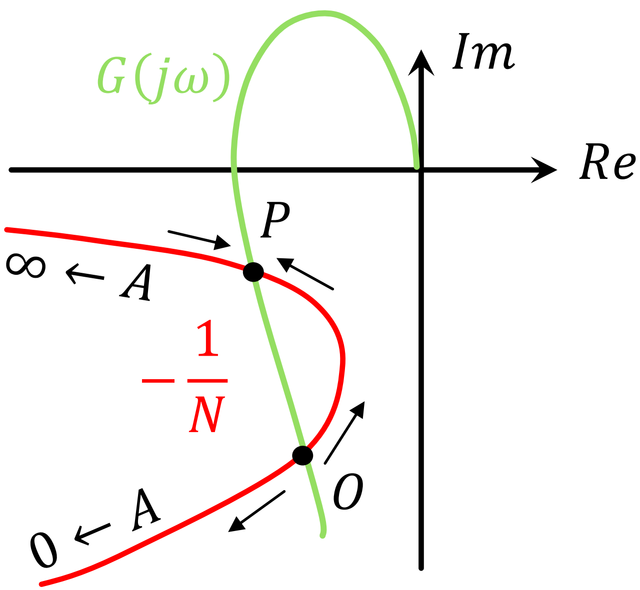
Sistema Oscilatorio



Sistema Inestable

Función Descriptiva





Dado que $G(j\omega)$se considera de mínima fase, si el sistema se encuentra operando en el punto ***O*** y, a partir de una perturbación, la amplitud de la oscilación se reduce, el sistema dejará de oscilar debido a que la curva de G($j\omega$) deja de rodear al punto de funcionamiento.

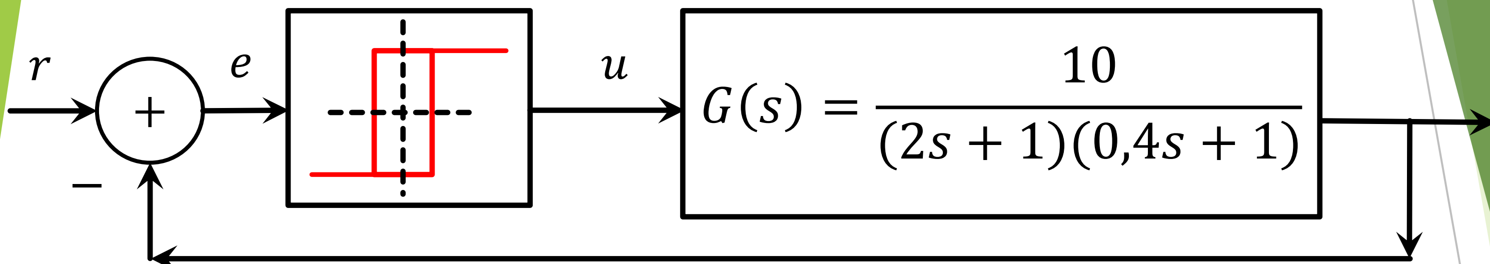
Si por el contrario, la amplitud de la oscilación aumenta, el punto de funcionamiento pasa a estar rodeado por la curva de G($j\omega$), pasando a ser inestable.

Luego, la amplitud de la salida aumentaría hasta encontrar un valor límite de seguridad del sistema.

En el caso planteado el sistema encuentra un punto de funcionamiento en ***P*** que corresponde a un ciclo límite estable.

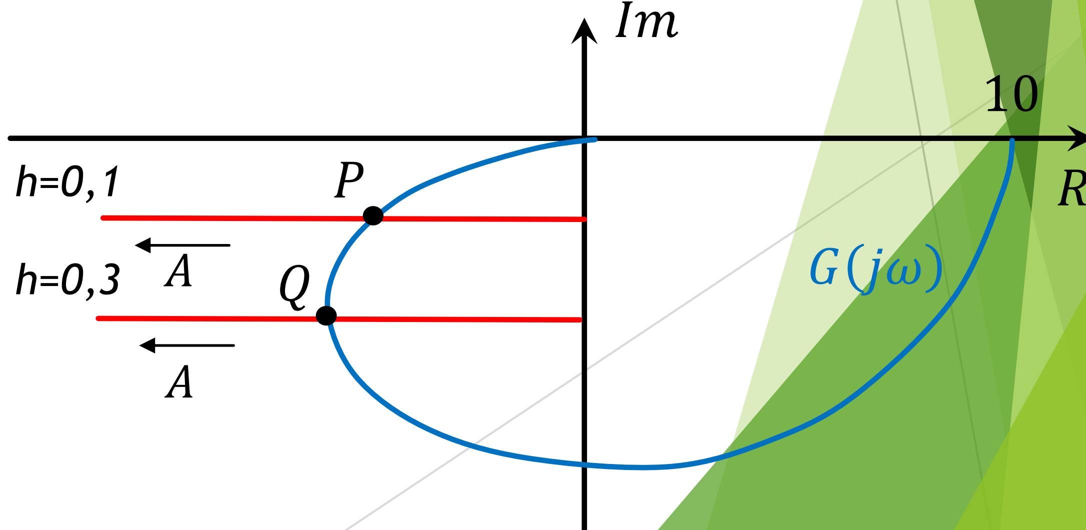
Función Descriptiva

Ejemplo: ***histéresis***



$$-\frac{1}{N}\bigg|_{M=1} = -\frac{\pi A}{4} e^{j\left(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)\right)} = -\frac{\pi A}{4A}\cos(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) - j\frac{\pi A}{4}\, sen\left(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{N}\bigg|_{M=1} = -\frac{\pi A}{4}\cos(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right) - j\frac{\pi h}{4} = -\frac{\pi}{4}\sqrt{A^2 - h^2} - j\frac{\pi h}{4}$$



$P \longrightarrow \quad A = 0{,}27 \quad \omega = 7r/s$

$Q \longrightarrow \quad A = 0{,}57 \quad \omega = 5{,}1r/s$

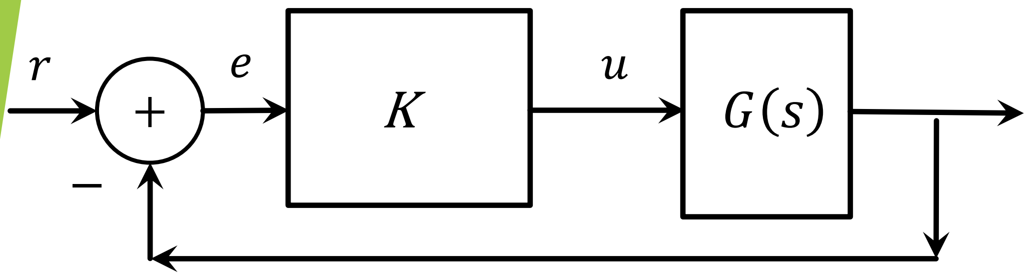
Auto-sintonía de PIDs:

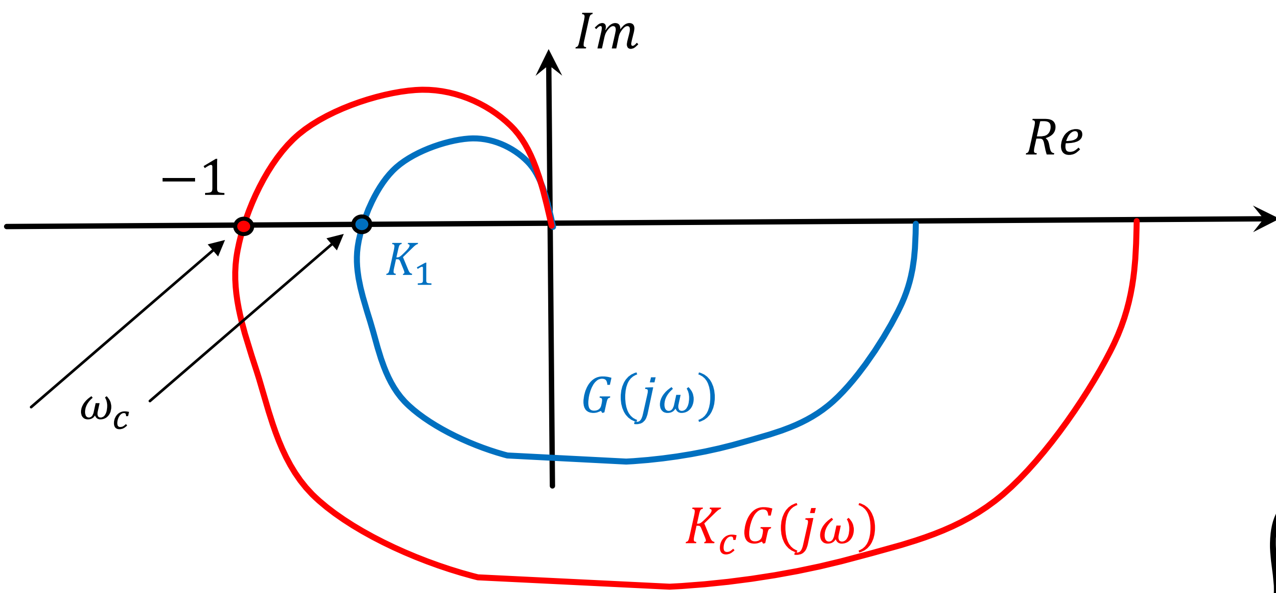
Tanto el método de Ziegler y Nichols como los de margen de fase presentan una importante limitación de orden práctico, cuando no se conoce la estructura del sistema a controlar, ya que en estas condiciones, para la determinación de la ganancia crítica Kc y de la pulsación de oscilación ωc = 2Pi/Pc, es necesario someter al proceso a ensayos que muchas veces pueden ser excesivamente exigentes.

Astrom y Hagglund propusieron un método para la determinación de Kc y ωc en condiciones mucho menos exigentes para el proceso que las citadas. Este método se basa en que cualquier sistema que presente un desfasaje mayor que 180º, puede oscilar con amplitud controlada cuando es 'compensado' con alguna no linealidad.

Esta condición de oscilación es compatible con la consideración del orden que debe tener la planta para aplicar el método de oscilación.

Auto-sintonía de PIDs:



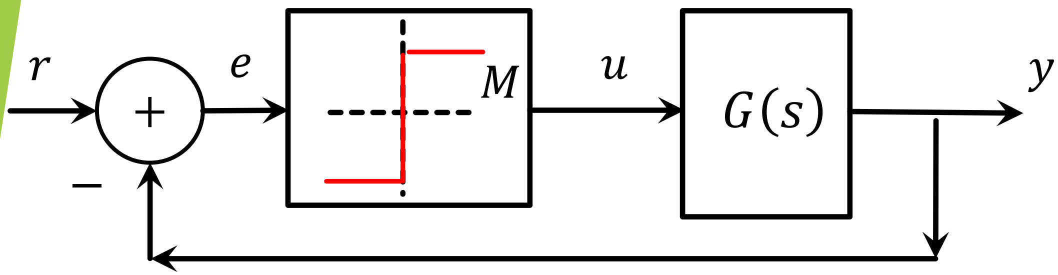


$$K_c = 1/K_1$$

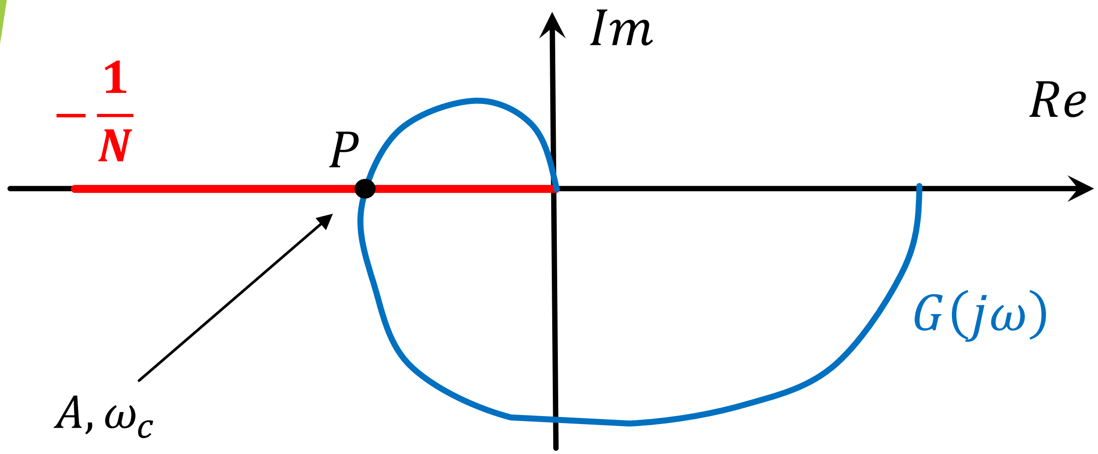
$$K_c \;\; \omega_c = \begin{cases} K_p = 0{,}6K_c \\ T_i = 0{,}5\; T_c \\ T_d = 0{,}125\; T_c \end{cases}$$

Auto-sintonía de PIDs: Ziegler-Nichols

No linealidad 'bang-bang'



$$N = \frac{4M}{\pi A}$$



El sistema oscilará en un ciclo límite correspondiente al punto P donde se cumple:

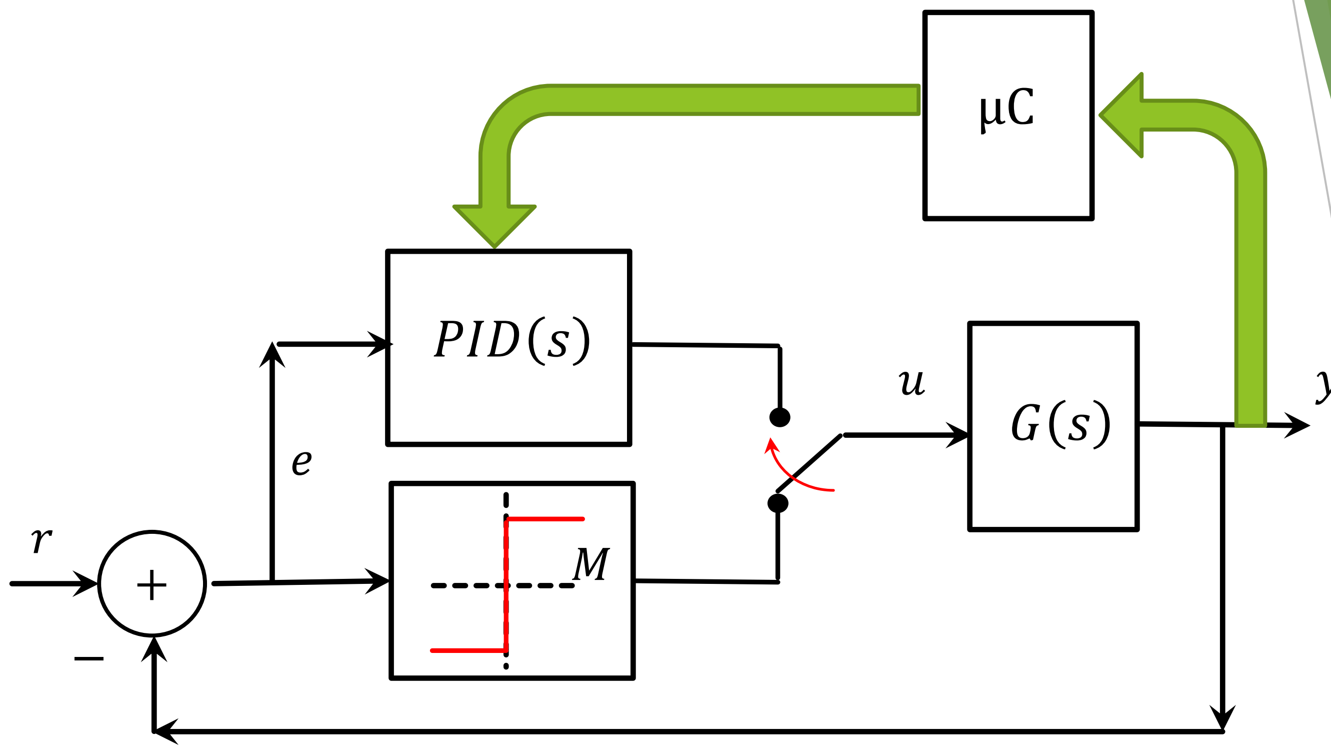
$$G(j\omega_c) = -\frac{\pi A}{4M}$$

La amplitud de la oscilación dependerá del valor de M, con lo cual puedo hacer que sea segura.

Luego midiendo A y ω_c puedo determinar los parámetros necesarios para la sintonía del PID

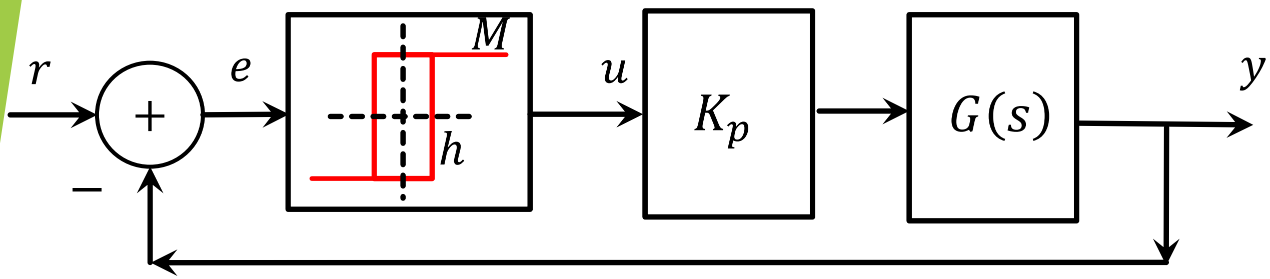
$$k_c = \frac{4M}{\pi A} \qquad T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

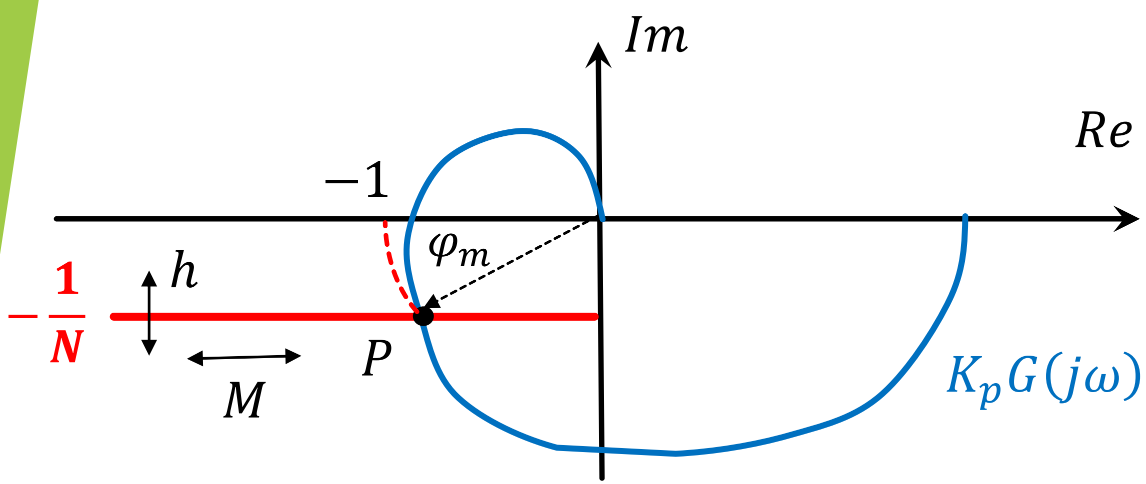
Auto-sintonía de PIDs: Ziegler-Nichols



Auto-sintonía de PIDs: Margen de Fase

No linealidad histéresis



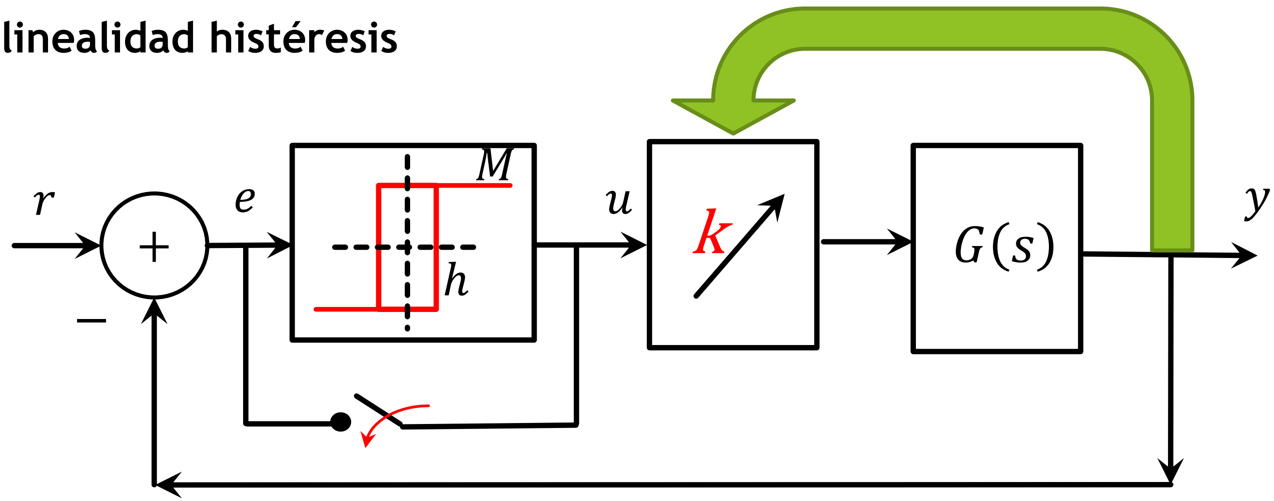


$$-\frac{1}{N} = -\frac{\pi A}{4M} e^{j\left(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)\right)} = -\frac{\pi A}{4M} cos\left(sen^{-1}\left(\frac{h}{A}\right)\right) - j\frac{\pi h}{4M} = -\frac{\pi}{4M}\sqrt{A^2 - h^2} - j\frac{\pi h}{4M}$$

$P \Rightarrow \quad \frac{\pi A}{4M} = 1 \qquad \frac{\pi h}{4M} = sen\varphi_m$

Auto-sintonía de PIDs: Margen de Fase

No linealidad histéresis

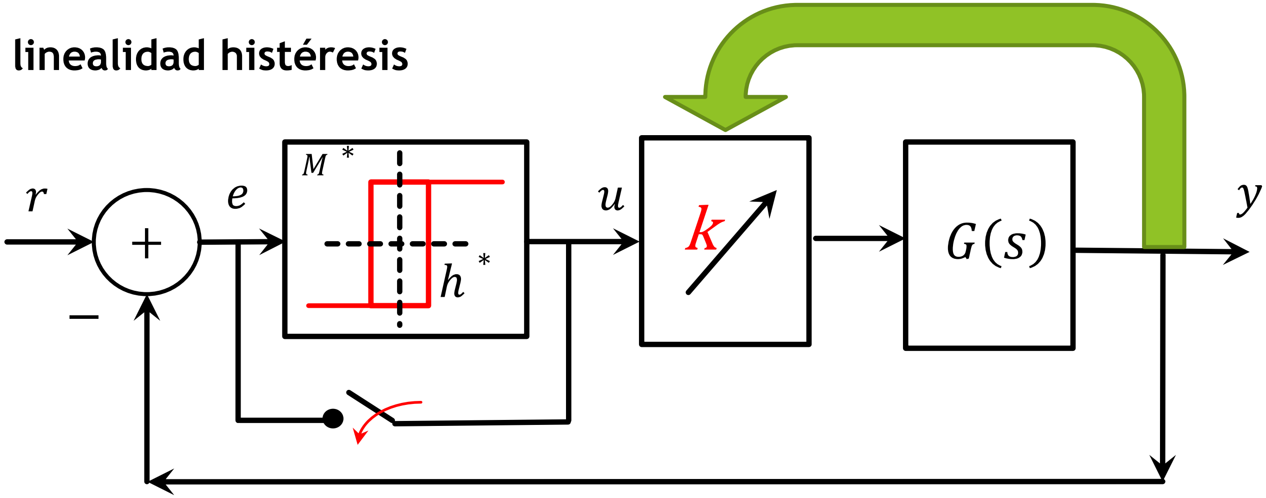


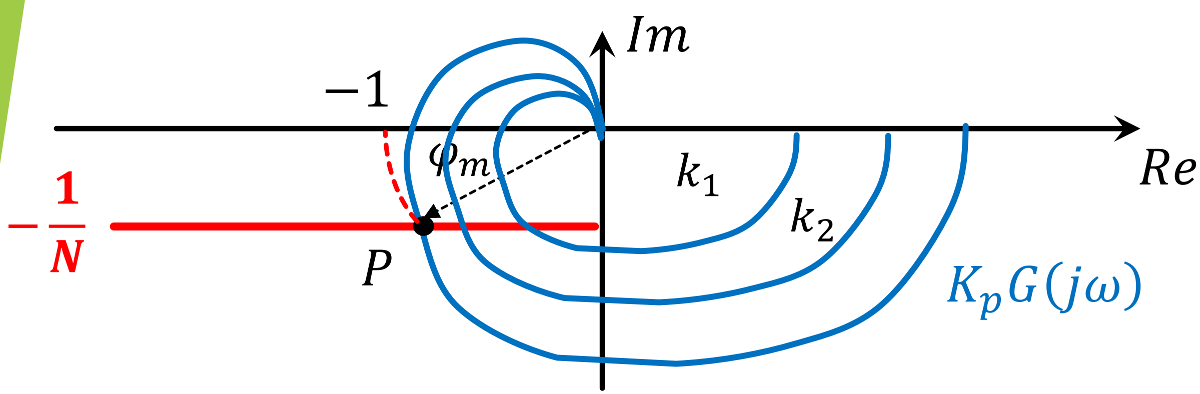
Elijo una amplitud segura A^* para la oscilación controlada. Luego, podría determinar las características necesarias del ciclo de histéresis para que el sistema tenga la capacidad de poder establecerse en el punto P, es decir:

$$\frac{\pi A}{4M} = 1 \Rightarrow M^* = \frac{\pi A^*}{4} \qquad \frac{\pi h}{4M} = sen\varphi_m \Rightarrow h^* = A^* sen\varphi_m$$

Auto-sintonía de PIDs: Margen de Fase

No linealidad histéresis





El proceso de determinación de *Kp* se realiza variando *k* hasta que se mida en la salida una oscilación de amplitud A^*. Esto puede hacerse siguiendo un algoritmo en pasos como:

$$k_n = k_{n-1} + (A_{n-1} - A^*)\frac{k_{n-1} - k_{n-2}}{A_{n-1} - A_{n-2}}$$