# Control Automático 2

## Sistemas Lineales en Variables de Estado.

- Solución de la Ecuación de Estados
- Controlabilidad y Observabilidad
- Realimentación de Estados

F. Valenciaga 2021

# Solución de la Ecuación de Estados

Consideremos un sistema dinámico escalar (una sola variable de estado) lineal representado por sus ecuaciones, es decir:

$$\dot{x} = a\,x + b\,u$$
$$y = c\,x$$

Este sistema tiene una respuesta libre y una forzada (dependiente de u). Consideremos inicialmente la respuesta libre:

$$\dot{x} = a\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t)$$

La solución para esta ecuación diferencial se encuentra de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{x} = a\,d\tau \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} a\,d\tau$$

$$ln\big(x(t)\big) - ln(x_0) = a(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}\Big|_{t_0=0} = x_0 e^{at} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Esta solución obviamente debe verificar la ecuación diferencial:

$$x(t) = x_0 e^{at} = x_0\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = x_0 a e^{at}} = x_0\left(a + a^2t + \frac{a^3t^2}{2} + \frac{a^4t^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$a x_0\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial: $\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t)}$

En términos de expresiones en serie también debe verificarse

$$x_0\left(a + a^2t + \frac{a^3t^2}{2} + \frac{a^4t^3}{3!} + \cdots\right) = a x_0\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t)}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Volvamos al sistema de ecuaciones matricial en respuesta libre, es decir:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$$

Por analogía se propone como solución la siguiente expresión matricial:

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x_0}$$

Esta solución propuesta obviamente debe verificar la ecuación diferencial:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 t + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^4 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{A}\overbrace{\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x}(t)}$$

Al igual que antes, por analogía la solución verificada se escribe como:

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x_0} = e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x_0} = \Phi(t)\boldsymbol{x_0}$$

Donde $\Phi(t)$ se denomina Matriz de Transición de Estados (no calculable como $e^{\boldsymbol{A}t}$)

# Solución de la Ecuación de Estados

Una vez encontrada la solución de las trayectorias libres de los estados desde sus valores iniciales:

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x}_0 = e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}_0 = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0$$

es inmediato encontrar la trayectoria de las salidas ya que son combinaciones lineales de los estados, es decir:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{C}\Phi(t)\boldsymbol{x}_0$$

Para mayor generalidad de la solución se puede considerar que el instante inicial no es t=0 sino t=$\tau$

$$x(t) = x(\tau)e^{a(t-\tau)} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{x}(\tau) = \Phi(t-\tau)\boldsymbol{x}(\tau)}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Autovalores

$\lambda_1$=-3 ; $\lambda_2$=-5

Autovectores

$v_1=[0\ 1]^T$

$v_2=[1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}]^T$

$$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{x_d} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x_d}$$

$$\boldsymbol{A_d} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A_d^2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A_d^3} = \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -125 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_d}(t) = \left( \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_d} t + \frac{\boldsymbol{A}_d^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}_d^3 t^3}{3!} + \cdots \right) \boldsymbol{x_{d0}}$$

$$\boldsymbol{x_d}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3t + \frac{9t^2}{2} - \frac{27t^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 - 5t + \frac{25t^2}{2} - \frac{125t^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix} \boldsymbol{x_{0d}} = \overbrace{\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}}^{\Phi_d(t)} \boldsymbol{x_{0d}}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:

$$\boldsymbol{x_d}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \boldsymbol{x_{0d}}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{x}_d$$

$$\boxed{\Phi(t) = T\,\Phi_d(t)\,T^{-1}}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-5t} & e^{-5t} \end{bmatrix}}^{\Phi(t)} \boldsymbol{x_0}$$

Resolución con el sistema original sin pasar por diagonalización:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{A^2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -16 & 25 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A^3} = \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 98 & -125 \end{bmatrix}$$

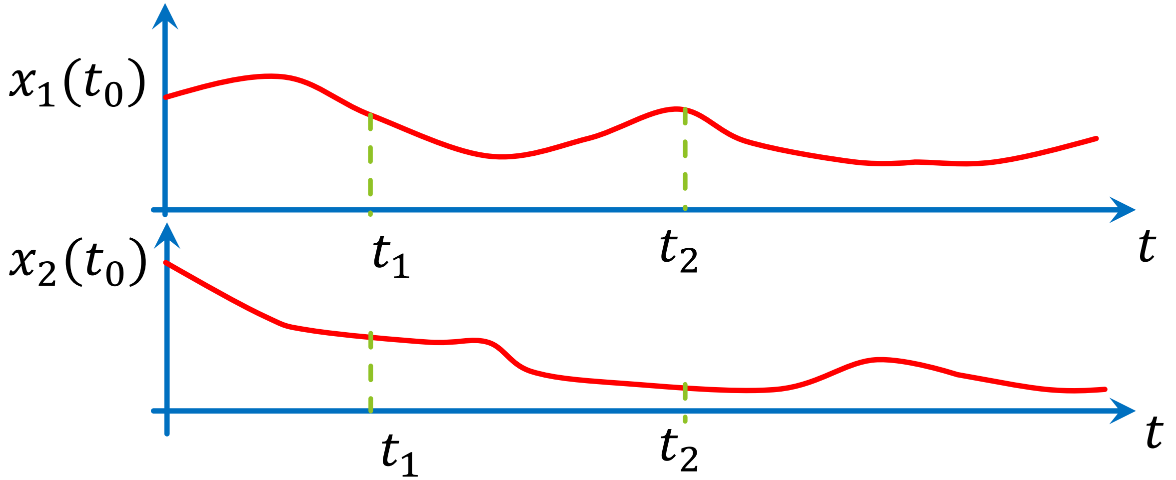
$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3t + \frac{9t^2}{2} - \frac{27t^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 1 + 2t - \frac{16t^2}{2} + \frac{98t^3}{3!} + \cdots & 1 - 5t + \frac{25t^2}{2} - \frac{125t^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix} \boldsymbol{x_0}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-5t} & e^{-5t} \end{bmatrix} \boldsymbol{x_0}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Algunas propiedades de la matriz de transición de estados:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{x}(\tau) = \Phi(t-\tau)\boldsymbol{x}(\tau)$$




$$\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t_1)\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)}$$

La matriz de transición de estados puede evaluarse completa o en subperíodos. $t_1$ no debe estar necesariamente entre $t_0$ y $t_2$.

# Solución de la Ecuación de Estados

De esta propiedad se desprende que si conociera solamente $\Phi(t_1)$

$$\boxed{\Phi(100t_1) = \Phi(t_1)^{100}}$$

Luego, a partir del conocimiento de la matriz de estados en un tiempo determinado podría anticipar los valores de los estados en ciertos instantes del futuro.

$$\Phi(0) = ?$$

$$\Phi(0) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\Bigg|_{t=0} = \boldsymbol{I}$$

Es posible conociendo el valor de los estados en el presente saber sus valores en el pasado?

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\Phi(t_1 - t_0)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)^{-\mathbf{1}}\Phi(t_1 - t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t_1 - t_0)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t_0 - t_1)\boldsymbol{x}(t_1)$$

$$\boxed{\Phi(t_0 - t_1) = \Phi(t_1 - t_0)^{-\mathbf{1}}} \Rightarrow \boxed{\Phi(-t) = \Phi(t)^{-\mathbf{1}}}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Solución de la ecuación matricial en respuesta forzada:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

Multiplicando ambos miembros por $\Phi(-t) = e^{-\boldsymbol{A}t}$ :

$$\Phi(-t)\dot{\boldsymbol{x}} = \Phi(-t)\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \Phi(-t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\underbrace{\Phi(-t)\dot{\boldsymbol{x}} \underbrace{-\ \Phi(-t)\boldsymbol{A}}_{\dot{\Phi}(-t)}\,\boldsymbol{x}} = \Phi(-t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\frac{d(\Phi(-t)\boldsymbol{x})}{dt} = \Phi(-t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(-t) &= \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} - \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\\ \dot{\Phi}(-t) &= -\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 t + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2} - \cdots\right)\\ \dot{\Phi}(-t) &= -\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} - \cdots\right)\boldsymbol{A}\end{aligned}}$$

$$\int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \frac{d(\Phi(-\tau)\boldsymbol{x})}{d\tau}\,d\tau = \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

$$\Phi(-t)\boldsymbol{x} - \Phi(-\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}) = \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

# Solución de la Ecuación de Estados

$$\underbrace{\Phi(t)\,\Phi(-t)}_{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}(t) - \Phi(t)\Phi(-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t)\int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\;d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi(-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \Phi(t)\int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\;d\tau$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\;d\tau}$$

Considerando $t_0$=0:

$$\boldsymbol{x}(t) = \underbrace{\Phi(t)\boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{RL}} + \underbrace{\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\;d\tau}_{\boldsymbol{RF}}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\Phi(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{C}\Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} h(t-\tau)\ u(\tau)\ d\tau$$

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \boxed{\boldsymbol{C}\Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}}\ \boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

Matriz de
Respuesta
impulsiva

# Solución de la Ecuación de Estados

Solución de la ecuación matricial en respuesta forzada:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

Si transformamos esta expresión matricial por Laplace:

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \Rightarrow (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

Anti-transformando las dos expresiones anteriores elemento a elemento se pueden encontrar las expresiones temporales de los estados y de las salidas.

# Solución de la Ecuación de Estados

Comparando la solución obtenida anteriormente reemplazando $t_0 = 0$ con la expresión transformada:

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

$$\boldsymbol{X}(s) = \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}}_{\Phi(s)}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

Por lo tanto la matriz de transición de estados temporal puede calcularse por antitransformación:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{X}(s) = \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)}_{\boldsymbol{RL}} + \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)}_{\boldsymbol{RF}}$$

$$\Phi(t)\boldsymbol{x}(0) \qquad \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Métodos "simples" para obtener la MTE:

- Llevar al sistema a su forma diagonal, hallar la MTE en ese entorno (será también diagonal en el caso mas sencillo) y finalmente retornar a las variables originales. La matriz de transformación estará conformada por los autovectores (columnas).

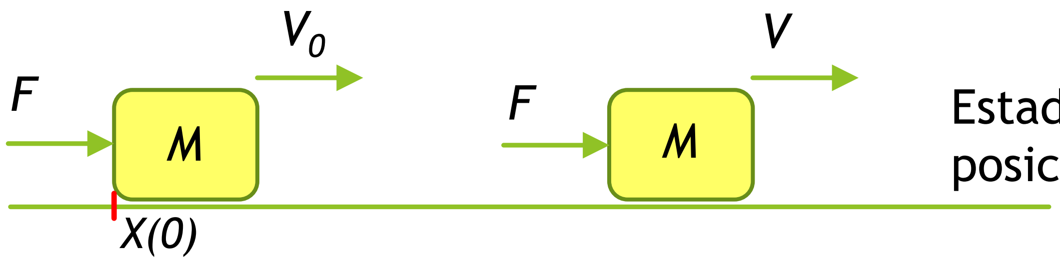
- Encontrar la expresión de la MTE en el ámbito de Laplace $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ y luego antitransformar elemento a elemento.

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}$$

- Empleando el Teorema de Cayley-Hamilton

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:




Estados:
posición $x_1$ ; velocidad $x_2$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F$$

Que debería dar la solución temporal de este sistema?

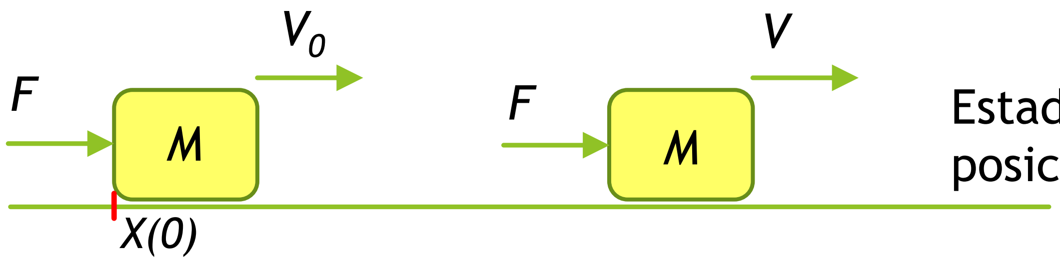
$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t - t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t}} \Phi(t - \tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\ d\tau$$

$$con\ \ t_0 = 0 \qquad \Phi(t) = \left( \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots \right)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:




Estados:
posición $x_1$ ; velocidad $x_2$

$$\Phi(t) = \left( \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \cdots \right)$$

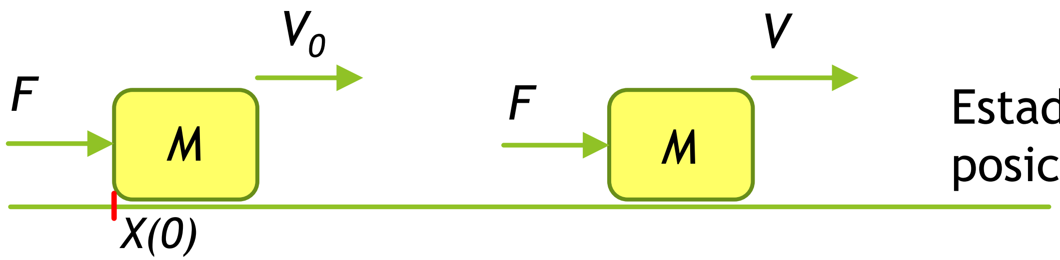
$$\Phi(t) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F \, d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \begin{bmatrix} (t-\tau)F/M \\ F/M \end{bmatrix} d\tau \; \begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + t x_2(0) + \dfrac{F}{M}\dfrac{t^2}{2} \\ x_2(t) = x_2(0) + \dfrac{F}{M} t \end{cases}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:




Estados:
posición $x_1$ ; velocidad $x_2$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

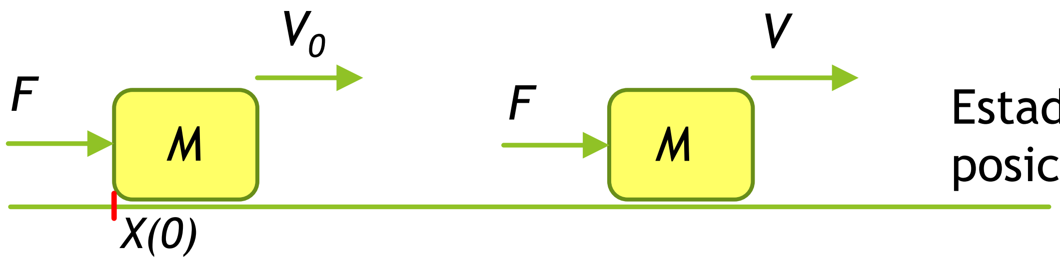
$$\boldsymbol{X}(s) = \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \boldsymbol{x}(0) + \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \frac{F}{s}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \frac{F}{s}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \frac{F}{s}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Ejemplo:




Estados:
posición $x_1$ ; velocidad $x_2$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \frac{F}{s}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + t x_2(0) + \dfrac{F}{M}\dfrac{t^2}{2} \\ x_2(t) = x_2(0) + \dfrac{F}{M} t \end{cases}$$

# Solución de la Ecuación de Estados

Métodos "simples" para obtener la MTE:

- Llevar al sistema a su forma diagonal, hallar la MTE en ese entorno (será también diagonal en el caso mas sencillo) y finalmente retornar a las variables originales. La matriz de transformación estará conformada por los autovectores (columnas).

- Encontrar la expresión de la MTE en el ámbito de Laplace $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ y luego antitransformar elemento a elemento.

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}$$

- Empleando el Teorema de Cayley-Hamilton

# Teorema de Cayley-Hamilton

***Toda matriz satisface su ecuación característica.***

Dada una matriz $\boldsymbol{M}$ de $n_x n$, su ecuación característica estará dada por:

$$Q(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Luego el teorema establece que el polinomio matricial:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}^n + a_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-1} + a_{n-2}\boldsymbol{M}^{n-2} \dots + a_1\boldsymbol{M} + a_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}_{nxn}$$

La aplicación de este resultado permite realizar fácilmente algunas operaciones que de otra manera resultan engorrosas. Entre ellas veremos solamente dos:

La primera es la inversión de una matriz.

La segunda es el cálculo de la matriz de transición de estados.

# Teorema de Cayley-Hamilton

## Inversión de una matriz por calculo algebraico:

Dada una matriz $\boldsymbol{M}$ de *nxn*, por el teorema de C-H sabemos que satisface su ecuación característica :

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}^n + a_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-1} + a_{n-2}\boldsymbol{M}^{n-2} \dots + a_1\boldsymbol{M} + a_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}_{nxn}$$

Luego multiplicando a izquierda por $\boldsymbol{M}^{-1}$ :

$$\boldsymbol{M}^{n-1} + a_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-2} + a_{n-2}\boldsymbol{M}^{n-3} \dots + a_1\boldsymbol{I} + a_0\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{0}_{nxn}$$

Despejando:

$$\boldsymbol{M}^{-1} = [-\boldsymbol{M}^{n-1} - a_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-2} - a_{n-2}\boldsymbol{M}^{n-3} \dots -a_1\ \boldsymbol{I}]/a_0$$

La inversión de una matriz se reduce a realizar una operación algebraica donde lo mas complicado es elevar la matriz a diferentes potencias. La máxima potencia a elevar la matriz es un orden menor que el correspondiente a la matriz.

# Teorema de Cayley-Hamilton

Inversión de una matriz por calculo algebraico:

Ej:
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -3 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -6 & \lambda \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \lambda(\lambda - 1)\lambda - 24 - 12\lambda - 12\lambda = \lambda^3 - \lambda^2 - 24\lambda - 24$$

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2 - 24\boldsymbol{A} - 24\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}_{nxn}$$

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 24\boldsymbol{I} - 24\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{0}_{nxn}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = [\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 24\boldsymbol{I}]/24$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 4 & 25 & 6 \\ 24 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Inversión de una matriz por calculo algebraico:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = [\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 24]/24$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 4 & 25 & 6 \\ 24 & 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}\right]/24$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \left[\begin{bmatrix} -12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 24 & 0 & -12 \end{bmatrix}\right]/24$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

## Reducción del Orden de Polinomio Matricial:

Consideremos un polinomio matricial de una matriz $\mathbf{M}$ de $n_x n$, de orden $k$ mayor que el índice $n$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}^k + a_{k-1}\boldsymbol{M}^{k-1} + a_{k-2}\boldsymbol{M}^{k-2} \ldots + a_1\boldsymbol{M} + a_0\boldsymbol{I}$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$Q(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

y el correspondiente polinomio característico matricial:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}^n + \alpha_{n-1}\boldsymbol{M}^{n-1} + \alpha_{n-2}\boldsymbol{M}^{n-2} \ldots + \alpha_1\boldsymbol{M} + \alpha_0\ \boldsymbol{I}$$

Dado que las operaciones polinomiales matriciales son análogas a las conocidas para polinomios comunes y $k > n$ , se verifica lo siguiente:

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = C(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \quad \rightarrow P(\lambda) = C(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

donde el grado de $R(\lambda)$ es como máximo $n$-$1$. El polinomio matricial correspondiente es:

$$\underset{\Downarrow\atop k}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M})} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{M})\underset{\Downarrow\atop \mathbf{0}_{nxn}}{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M})} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}) = \underset{\Downarrow\atop n-1}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M})}$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Reducción del Orden de Polinomio Matricial:

Ejemplo:

Dada la matriz : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Y el polinomio matricial

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^6 + 11\boldsymbol{A}^5 + 2\boldsymbol{A}^4 + 8\boldsymbol{A}^3 + 7\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I}$$

Podemos calcular el polinomio característico de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$$Q(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - \lambda^2 - 24\lambda - 24$$

Cuyas raíces se encuentran en: 5,8263, -3,7185 y -1,1078

Como sabemos que : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \beta_2 \boldsymbol{A}^2 + \beta_1 \boldsymbol{A} + \beta_0 \boldsymbol{I}$

Podemos calcular los $\beta_i$ usando algebra sobre los polinomios tradicionales considerando las raíces del polinomio característico $Q(\lambda)$:

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \beta_2 {\lambda_i}^2 + \beta_1 \lambda_i + \beta_0$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Reducción del Orden de Polinomio Matricial:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \beta_2\boldsymbol{A}^2 + \beta_1\ \boldsymbol{A} + \beta_0\boldsymbol{I}$$

Dado que las raíces del polinomio característico son: 5,8263, -3,7185 y -1,1078

$$5{,}8263^{\boldsymbol{6}} + 11 * 5{,}8263^5 + 2 * 5{,}8263^4 + 8 * 5{,}8263^3 + 7 * 5{,}8263^2 + 5{,}8263 + 3 =$$

$$\boxed{1{,}1710\ 10^5 = \beta_2 5{,}8263^2 + \beta_1 5{,}8263 + \beta_0}$$

$$(-3{,}7185)^{\boldsymbol{6}} + 11 * (-3{,}7185)^5 + 2 * (-3{,}7185)^4 + 8 * (-3{,}7185)^3 + 7 * (-3{,}7185)^2 - 3{,}7185 + 3 =$$

$$\boxed{-5{,}1097\ 10^3 = \beta_2(-3{,}7185)^2 + \beta_1(-3{,}7185) + \beta_0}$$

$$(-1{,}1078)^{\boldsymbol{6}} + 11 * (-1{,}1078)^5 + 2 * (-1{,}1078)^4 + 8 * (-1{,}1078)^3 + 7 * (-1{,}1078)^2 - 1{,}1078 + 3 =$$

$$\boxed{-13{,}8837 = \beta_2(-1{,}1078)^2 + \beta_1(-1{,}1078) + \beta_0}$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Reducción del Orden de Polinomio Matricial:

$$\begin{bmatrix} 5{,}8263^2 & 5{,}8263 & 1 \\ (-3{,}7185)^2 & (-3{,}7185) & 1 \\ (-1{,}1078)^2 & (-1{,}1078) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1710\ 10^5 \\ -5{,}1097\ 10^3 \\ -13{,}8837 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5650\ \ 10^3 \\ 9{,}5050\ \ 10^3 \\ 8{,}5950\ \ 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{6}} + 11\boldsymbol{A}^5 + 2\boldsymbol{A}^4 + 8\boldsymbol{A}^3 + 7\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \beta_2\boldsymbol{A}^2 + \beta_1\ \boldsymbol{A} + \beta_0\boldsymbol{I}$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Calculo de la Matriz de Transición de Estados:

Ejemplo:

Dada la matriz de un sistema dinámico: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Ya hemos calculado sus autovalores que resultaron: $\lambda_i$ = 5,8263, -3,7185 y -1,1078

El polinomio infinito que involucra el cálculo de la MTE, $\boldsymbol{e}^{At}$ sabemos por C-H que puede reducirse a un polinomio de grado n-1:

$$\Phi(t) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \gamma_2 \boldsymbol{A}^2 + \gamma_1 \boldsymbol{A} + \gamma_0 \boldsymbol{I}$$

Al igual que antes, podemos calcular los $\gamma_i$ usando algebra sobre los polinomios tradicionales en las raíces del polinomio característico *Q*($\lambda$):

$$P(\lambda_i) = e^{\lambda_i \boldsymbol{t}} = \gamma_2 {\lambda_i}^2 + \gamma_1 \lambda_i + \gamma_0$$

# Teorema de Cayley-Hamilton

Calculo de la Matriz de Transición de Estados:

$$\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \gamma_2\boldsymbol{A}^2 + \gamma_1\ \boldsymbol{A} + \gamma_0\boldsymbol{I}$$

$$e^{\lambda_i t} = \gamma_2{\lambda_i}^2 + \gamma_1\lambda_i + \gamma_0$$

$\lambda_i$ = 5,8263, -3,7185 y -1,1078

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{5{,}8263\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{e}^{-3{,}7185\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{e}^{-1{,}1078\boldsymbol{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}8263^2 & 5{,}8263 & 1 \\ (-3{,}7185)^2 & (-3{,}7185) & 1 \\ (-1{,}1078)^2 & (-1{,}1078) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

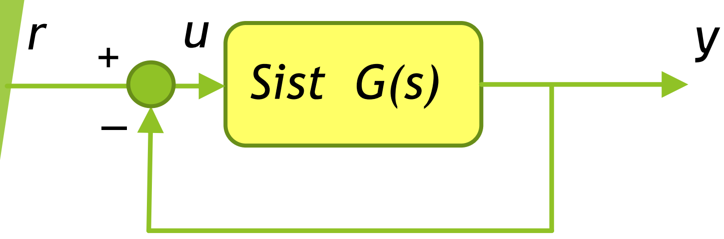
$$\begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Comb.Lin_{\,1}\left(\boldsymbol{e}^{5{,}8263\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-3{,}7185\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-1{,}1078\boldsymbol{t}}\right) \\ Comb.Lin_{\,2}\left(\boldsymbol{e}^{5{,}8263\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-3{,}7185\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-1{,}1078\boldsymbol{t}}\right) \\ Comb.Lin_{\,3}\left(\boldsymbol{e}^{5{,}8263\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-3{,}7185\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{e}^{-1{,}1078\boldsymbol{t}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \gamma_2 \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 4 & 25 & 6 \\ 24 & 6 & 12 \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

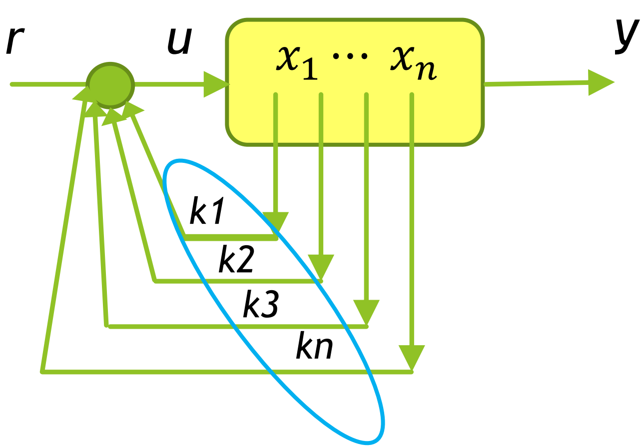
# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Controlabilidad y Observabilidad

### Paradigma CyS A – CA 1




### Paradigma CM – CA 2




En este esquema estructural es vital que la entrada de control "llegue" a todas las variables internas para poder controlar la salida a través de ellas.
Si el sistema tiene la propiedad de que la entrada puede afectar en forma independiente todas las variables internas vamos a decir que presenta la propiedad de **Controlabilidad Completa**.

Por otro lado, si la salida posee información independiente de todos los estados, conociéndola podré tener la información completa de las variables internas del sistema. Es decir que podría observar a través de ella el estado interno del sistema.
Si el sistema cumple este requisito se dice que tiene **Observabilidad Completa**.

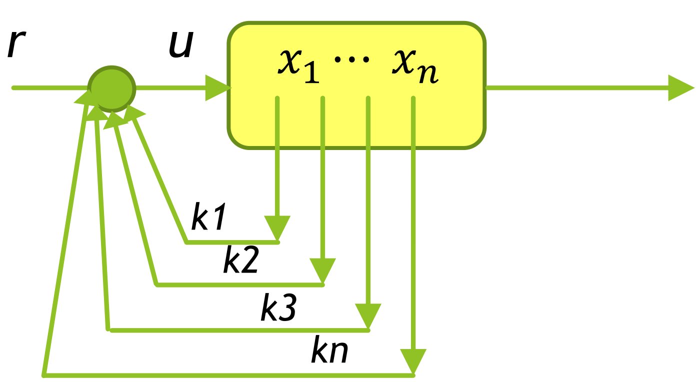
# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Controlabilidad y Observabilidad

El cumplimiento de las propiedades de Controlabilidad y Observabilidad habilita determinadas herramientas en el diseño del control.
Sin embargo, cuando alguna de estas propiedades no se cumple, se pueden realizar determinadas operaciones para lograrlas y así poder diseñar un control exitoso.

## Controlabilidad:

El objetivo consiste en poder controlar cada una de las variables internas del sistema para, de esta manera, controlar la salida ***y*** que es una combinación lineal de ellas.




Para que esto pueda hacerse la estructura del sistema debe permitir que la señal de control ***u*** controle en forma independiente cada una de las variables internas.

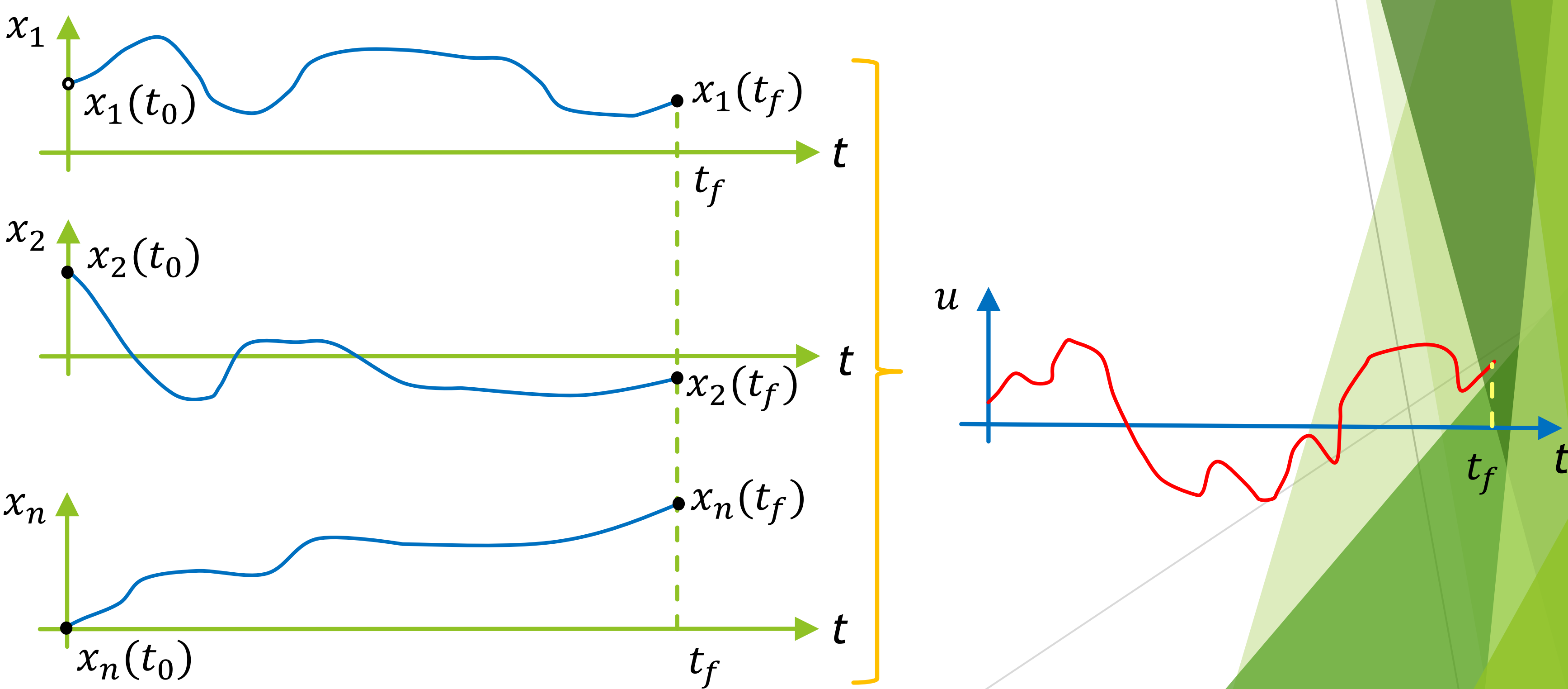
Si esto es viable se dirá que el sistema es **Completamente Controlable** y si alguna de las variables internas no es alcanzada por el control ***u*** se dice que el sistema es **Parcialmente Controlable**.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Controlabilidad:

**Definición Formal:**

Se dice que un sistema es completamente controlable si existe una señal de control $\boldsymbol{u}(t)$ acotada que, a partir de un estado inicial arbitrario $\boldsymbol{x}_0$ del sistema, permite llevarlo a cualquier otro estado arbitrario $\boldsymbol{x}_f$ en un tiempo finito, $\boldsymbol{t_f}$.

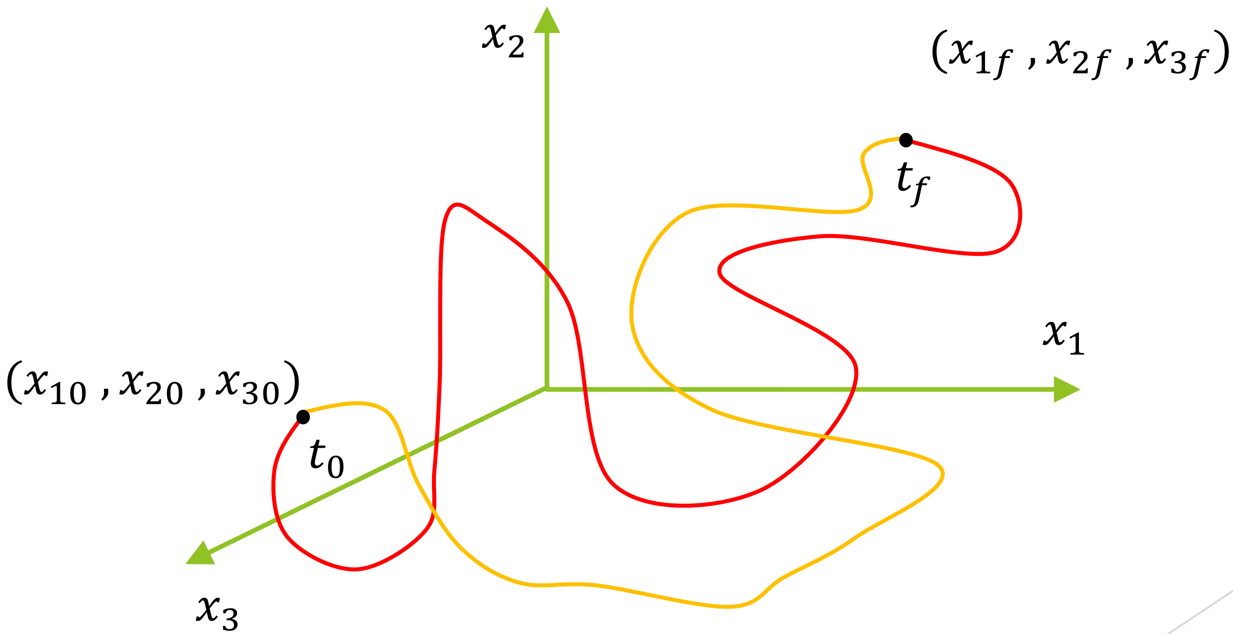


# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Controlabilidad:

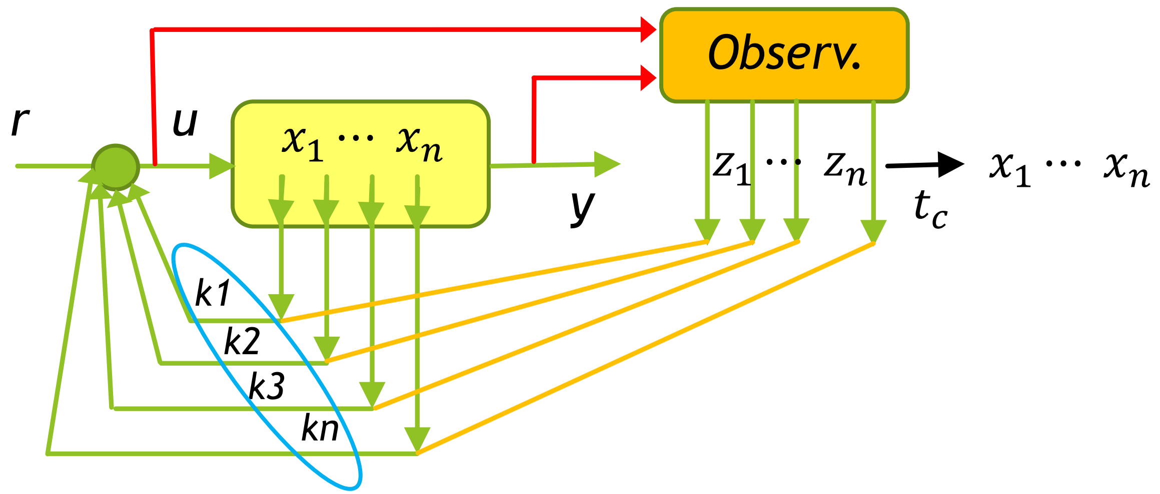
**Definición Formal:**

Se dice que un sistema es completamente controlable si existe una señal de control $\boldsymbol{u}(t)$ acotada que, a partir de un estado inicial arbitrario $\boldsymbol{x}_0$ del sistema, permite llevarlo a cualquier otro estado arbitrario $\boldsymbol{x}_f$ en un tiempo finito, $\boldsymbol{t_f}$.



# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Observabilidad:




No siempre las variables internas están accesibles. A veces por problemas técnicos y otras por viabilidad económica no es posible contar con la información necesaria para implementar el controlador diseñado.

En esos casos a veces es posible construir un dispositivo denominado Observador que, a partir de la medición de la salida y la entrada permite reconstruir o estimar los valores de las variables internas.

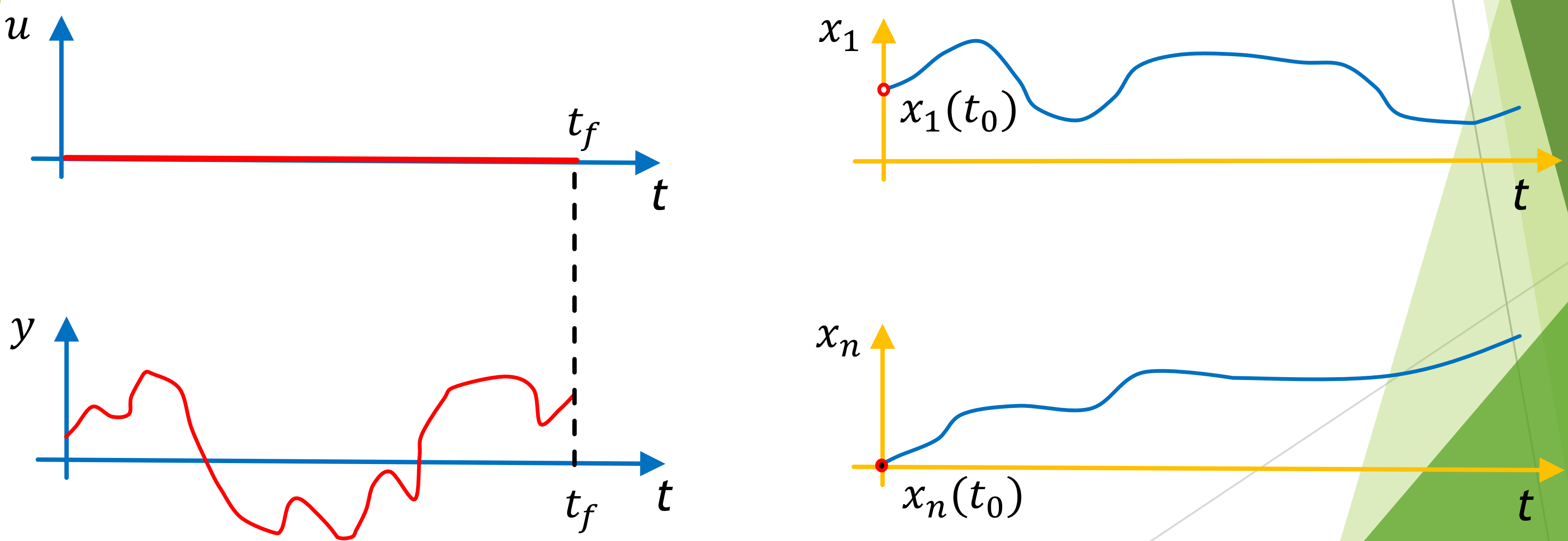
Para que esto último sea posible es necesario que el sistema sea completamente observable a través de esa salida, es decir que esta posea información de todas las variables internas en forma independiente. Si una variable interna no aporta en la conformación de esa salida, no voy a poder inferir su estado. En ese caso el sistema es parcialmente observable a través de la salida elegida.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Observabilidad:

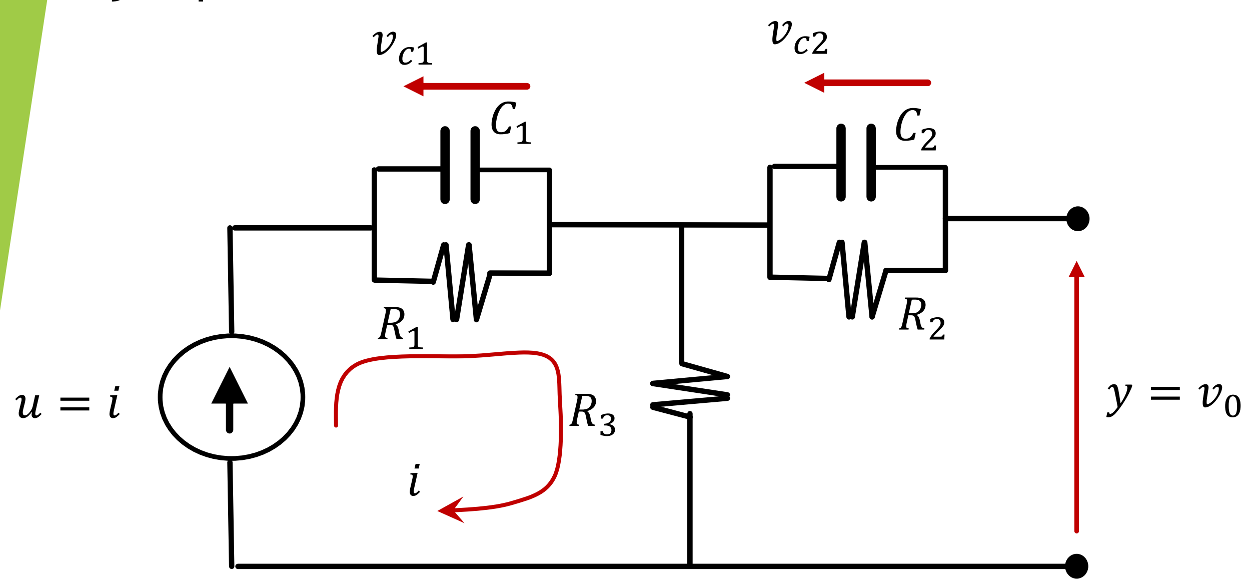
**Definición Formal:**

Se dice que un sistema es ***completamente observable*** si, siendo $\boldsymbol{u}(t)$ conocida, a partir de la medición de la salida durante un intervalo de tiempo finito $[\boldsymbol{t_0}\ \boldsymbol{t_f}]$ se pueden inferir los valores iniciales de todas las variables internas $\boldsymbol{x_{i0}}$. En particular la entrada podría ser $\boldsymbol{u}(t)=0$ en ese intervalo. Del mismo modo el sistema será ***parcialmente observable*** si solo puedo inferir algunos de los estados iniciales.

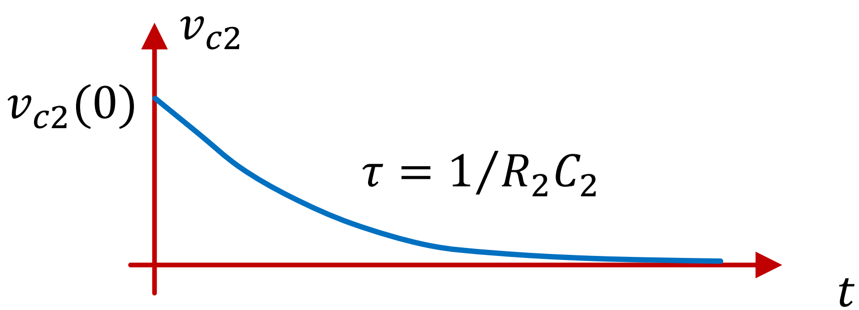


# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

Ejemplos Intuitivos:




Existirá una corriente ***i*** que me permita llevar en tiempo finito vc1 y vc2 a otros valores elegidos arbitrariamente?

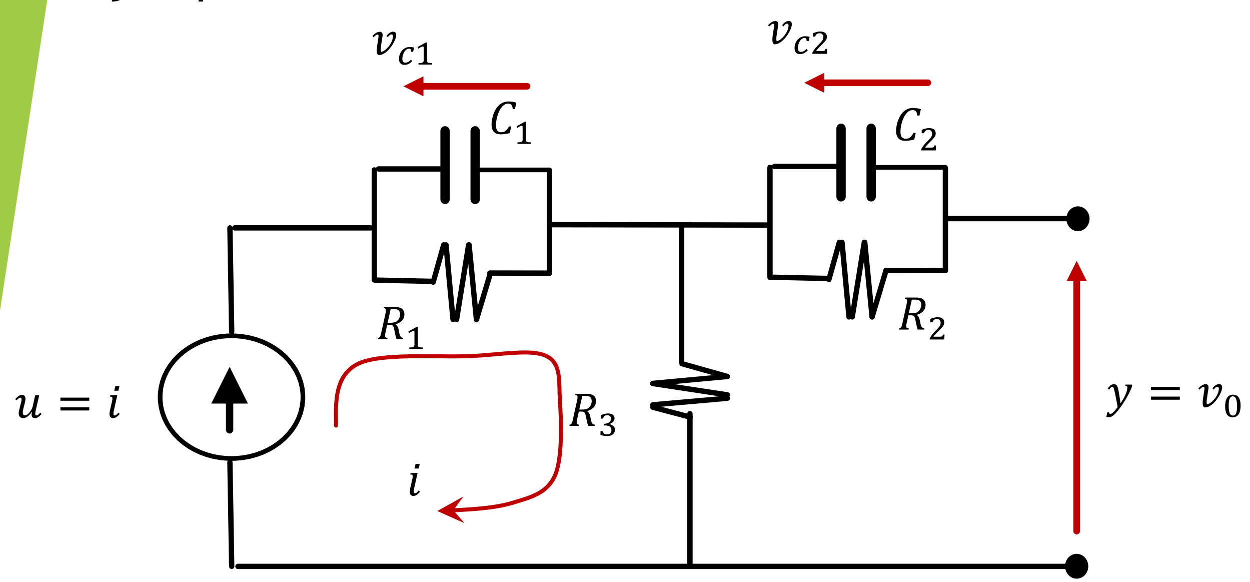



La tensión de $\boldsymbol{C_2}$ no está afectada por la corriente i y por lo tanto no puedo controlarla.

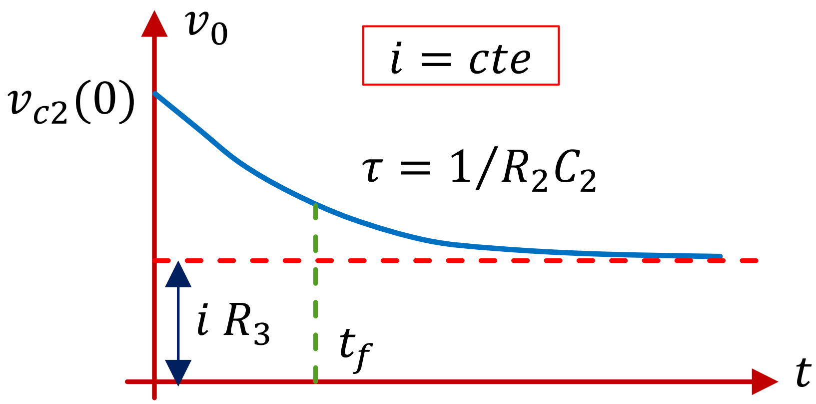
El sistema así planteado es ***parcialmente controlable***.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

Ejemplos Intuitivos:




Conocida ***u=i***, midiendo ***y*** durante un intervalo de tiempo finito, podré determinar los estados iniciales de las tensiones en los capacitores?



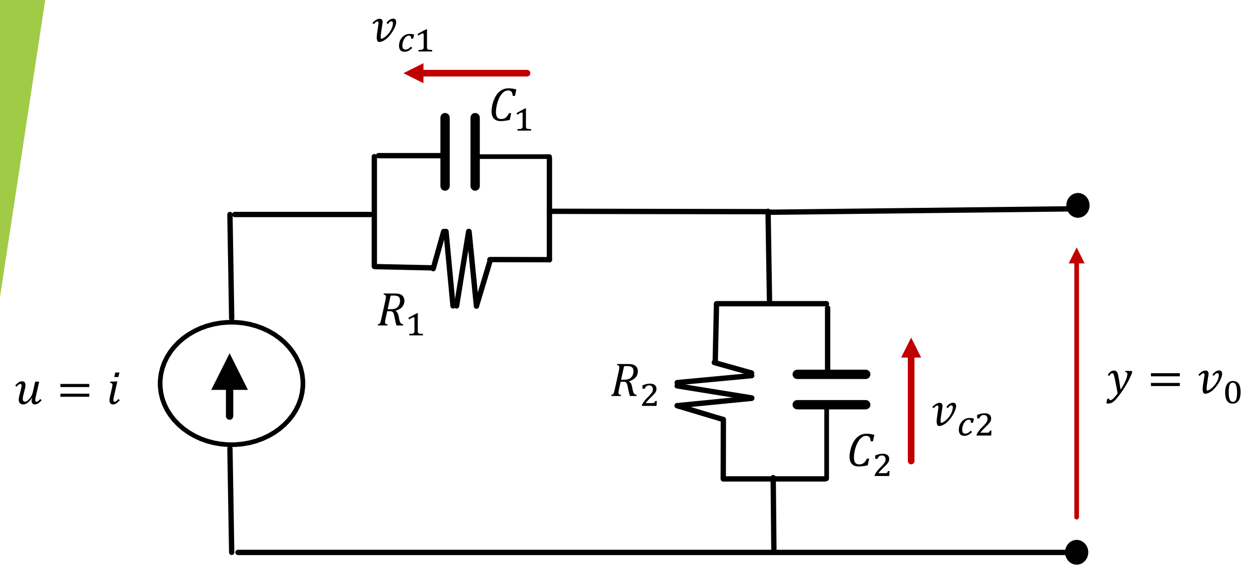

$$y = v_0 = v_{c2} + iR_3$$

La tensión sobre ***C₁*** queda bloqueada por la resistencia ***R₃*** y por lo tanto no se manifiesta en la salida elegida.

El sistema así planteado es ***parcialmente observable***.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

Ejemplos Intuitivos:



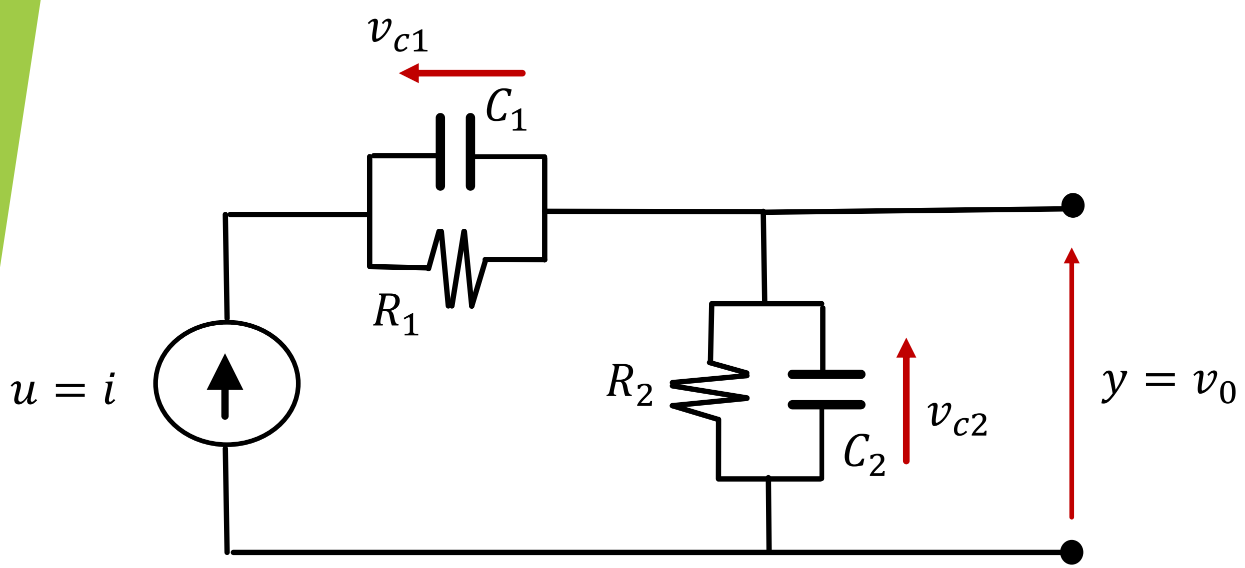

Existirá una corriente ***i*** que me permita llevar en tiempo finito vc1 y vc2 a otros valores elegidos arbitrariamente?

Puede realizarse siempre y cuando las constantes de tiempo de los dos paralelos ***RC*** no sean iguales, es decir, cuando $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$.

Bajo esa condición el sistema es ***Completamente Controlable***.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

Ejemplos Intuitivos:



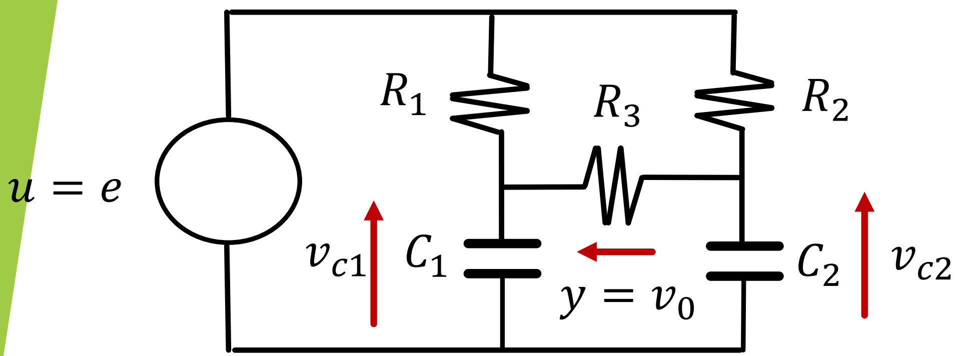

Conocida ***u=i***, midiendo ***y*** durante un intervalo de tiempo finito, podré determinar los estados iniciales de las tensiones en los capacitores?

Puede verse que la salida es la tensión del capacitor $\boldsymbol{C_2}$ que no tiene información de la tensión sobre $\boldsymbol{C_1}$.

El sistema es ***Parcialmente Observable***.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Ejemplos Intuitivos:




$$\boxed{R_1C_1 = R_2C_2}$$

$$\boxed{\dot{v}_0 = -\frac{v_0}{\tau}}$$

Si el sistema está balanceado $\boldsymbol{R_1 C_1 = R_2 C_2}$ la tensión en la salida se extingue con una cte. de tiempo determinada por los valores de $\boldsymbol{R_1 C_1}$ $\boldsymbol{R_2 C_1}$ y $\boldsymbol{R_3}$. Es decir que en estado estacionario la tensión sobre $\boldsymbol{R_3}$ es cero. Luego, será imposible manejar independientemente las tensiones sobre los capacitores para llevarlos a otros valores elegidos arbitrariamente ya que tienen iguales ctes. de tiempo. El sistema es entonces ***Parcialmente Controlable***.
Nuevamente el sistema presenta algún tipo de simetría.

Como dijimos anteriormente la salida se extingue con una cte. de tiempo determinada. Luego, será imposible encontrar los valores iniciales de los estados a partir de su medición en un intervalo de tiempo finito. Bajo esa condición el sistema no es ***Observable***.
Si la salida fuera $\boldsymbol{v_{c2}}$, no dispondré en ella de información sobre la tensión en el otro capacitor y por ende nunca podré saber su valor inicial por mas que observe la salida. ***Parcialmente Observable***

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

## Algunas especificaciones

Los problemas de Controlabilidad y Observabilidad no se presentan en la mayoría de los sistemas. En los casos en que se presenten es factible solucionarlos.

Sistemas que presentan cierta simetría suelen manifestar problemas desde el punto de vista de la controlabilidad y/o observabilidad.

Sistemas sobredimensionados en cuanto al número de variables de estado manifiestan problemas desde el punto de vista de la controlabilidad y/o observabilidad. Esto es intuitivo ya que habrá algunas variables de estado linealmente dependientes entre sí.

Cualquiera sea el motivo por el cual se produzca la falta de controlabilidad u observabilidad completa, en el dominio de la función de transferencia se observará como una cancelación polo/cero.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

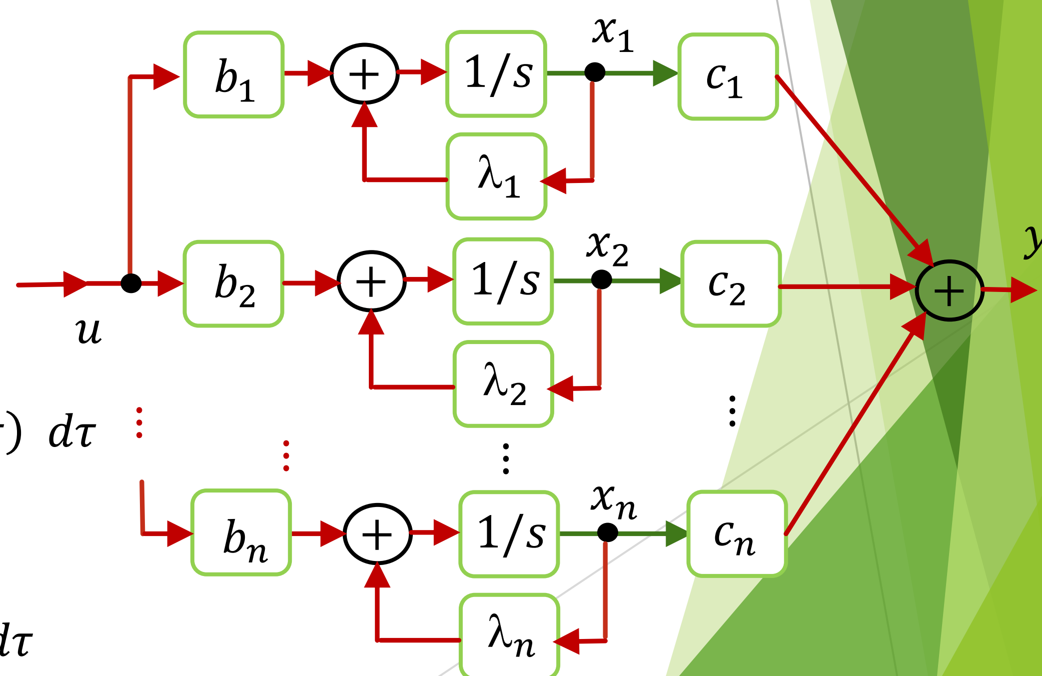
Test de Gilbert

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}\end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}\end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}\boldsymbol{A_d} &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{B_d} &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C_d} &= \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}\end{aligned}$$

Caso 1 (SISO): $A_d$ completamente diagonal (autovalores reales y distintos)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$




$$x_i(t_f) = e^{\lambda_i t_f} x_i(0) + \int_0^{t_f} e^{\lambda_i (t_f - \tau)} b_i u(\tau)\ d\tau$$

$$\boxed{\frac{x_i(t_f) - e^{\lambda_i t_f} x_i(0)}{e^{\lambda_i t_f}}} = \int_0^{t_f} e^{-\lambda_i \tau} b_i u(\tau)\ d\tau$$

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

Test de Gilbert

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

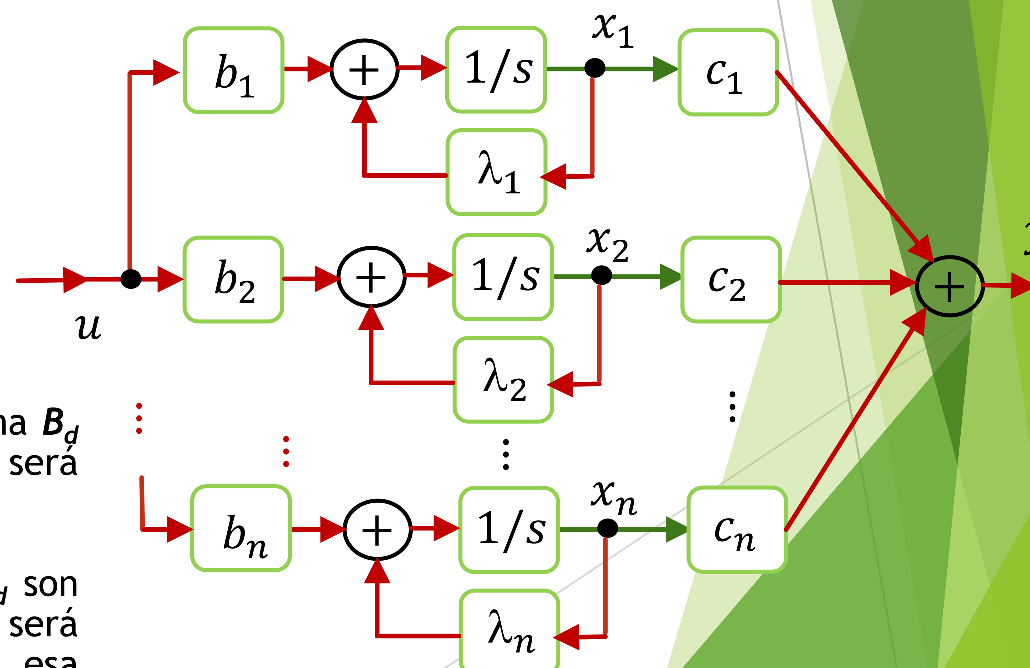
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{A_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$$
$$\boldsymbol{B_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C_d} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Caso 1 (SISO): $\boldsymbol{A_d}$ completamente diagonal (autovalores reales y distintos)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1} \quad c_n]\,\boldsymbol{x}$$




Si todos los elementos $\boldsymbol{b_i}$ de la matriz columna $\boldsymbol{B_d}$ son diferentes de cero el sistema será ***Completamente Controlable***.

Si todos los elementos $\boldsymbol{c_i}$ de la matriz fila $\boldsymbol{C_d}$ son diferentes de cero el sistema será ***Completamente Observable*** a través de esa salida.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

Test de Gilbert

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{B_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C_d} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Caso 1 (MIMO): $\boldsymbol{A_d}$ completamente diagonal (autovalores reales y distintos)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & \cdots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{r(n-1)} & c_{rn} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Si todas las filas de la matriz $\boldsymbol{B_d}$ poseen al menos un elemento $\boldsymbol{b_{ij}}$ diferente de cero el sistema será ***Completamente Controlable***.

Si todas las columnas de la matriz fila $\boldsymbol{C_d}$ poseen al menos un elemento $\boldsymbol{c_i}$ diferente de cero el sistema será ***Completamente Observable*** a través de sus salidas.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

Test de Gilbert

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{B_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C_d} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Caso 2 (SISO): $\boldsymbol{A_d}$ diagonal con bloque de Jordan (algún autovalor real múltiple)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\dot{x}_3 = \lambda_1\,x_3 + b_3\,u$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_1\,x_2 + x_3 + b_2\,u$$

$$\dot{x}_1 = \lambda_1\,x_1 + x_2 + b_1\,u$$

El coeficiente $\boldsymbol{b_i}$ del último elemento del bloque de Jordan correspondiente a la matriz columna $\boldsymbol{B_d}$ debe ser diferente de cero para que el bloque sea ***Completamente Controlable***.

El $\boldsymbol{c_i}$ correspondiente a la primer columna del bloque de Jordan de la matriz fila $\boldsymbol{C_d}$ debe ser diferente de cero para que el sistema sea ***Completamente Observable*** a través de la salida elegida.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

Test de Gilbert

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{B_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C_d} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Caso 2 (MIMO): $A_d$ diagonal con bloque de Jordan (algún autovalor real múltiple)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & \lambda_n \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & \cdots & b_{3m} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & c_{rn} \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Algún coeficiente $\boldsymbol{b_i}$ de la fila correspondiente último elemento del bloque de Jordan en la matriz $\boldsymbol{B_d}$ debe ser diferente de cero para que el bloque sea ***Completamente Controlable***.

La primer columna de la matriz $\boldsymbol{C_d}$ correspondiente del bloque de Jordan debe contener al menos un elemento $\boldsymbol{c_i}$ diferente de cero para que el sistema sea ***Completamente Observable*** a través de las salidas elegidas.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

Test de Gilbert

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{z} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{B_d} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C_d} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Caso 3 (MIMO): $A_d$ diagonal con bloque de Jordan por autovalores C*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -\omega^2-\sigma^2 & -2\sigma \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & \lambda_n \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & c_{rn} \end{matrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Algún coeficiente $\boldsymbol{b_i}$ del bloque de Jordan en la matriz $\boldsymbol{B_d}$ debe ser diferente de cero para que el bloque sea ***Completamente Controlable***.

El bloque de Jordan de la matriz $\boldsymbol{C_d}$ debe contener al menos un elemento $\boldsymbol{c_i}$ diferente de cero para que el sistema sea ***Completamente Observable*** a través de las salidas elegidas.

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

## Test de Kalman

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\mathbf{1})} = \boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n})}\, \boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\mathbf{1})} + \boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{r})}\, \boldsymbol{u}_{(\boldsymbol{r}\mathrm{x}\mathbf{1})}$$
$$\boldsymbol{y}_{(\boldsymbol{m}\mathrm{x}\mathbf{1})} = \boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{m}\mathrm{x}\boldsymbol{n})}\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\mathbf{1})}$$

La principal ventaja del test de Kalman es que se hace usando las matrices del sistema dado. No hay que transformar al modelo diagonal.

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}\boldsymbol{r})} = \underbrace{\left[\boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{r})} \quad \boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n})}\boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{r})} \quad \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n})}\boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{r})} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n})}\boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{r})}\right]}_{\boldsymbol{n}\ \mathrm{x}\ (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r})}$$

$\boldsymbol{n}\ \mathrm{x}\ (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{r}) \Rightarrow \boldsymbol{n}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{n}$ Una sola entrada

Si el rango de $\boldsymbol{Q}_c$ es $\boldsymbol{n}$ el sistema será ***Completamente Controlable***. Si es menor, habrá algunos estados no controlables.

**Ejemplo:**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

El sistema será ***Completamente Controlable***.

## *Transformación hacia Forma Canónica Controladora*

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]}_{\text{Matriz de Controlabilidad } Q_c} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}}$$

Si la Matriz de Controlabilidad no es de rango completo, no existe una matriz ***T*** invertible que me permita poner las ecuaciones del sistema en su forma canónica controlable

# Propiedades Importantes de Sistemas en V.E

- ***Tests de Controlabilidad y Observabilidad***

## Test de Kalman

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{(\boldsymbol{nx1})} = \boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{nxn})}\,\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{nx1})} + \boldsymbol{B}_{(\boldsymbol{nxr})}\,\boldsymbol{u}_{(\boldsymbol{rx1})}$$
$$\boldsymbol{y}_{(\boldsymbol{mx1})} = \boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{mxn})}\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{nx1})}$$

La principal ventaja del test de Kalman es que se hace usando las matrices del sistema dado. No hay que transformar al modelo diagonal.

$$\boldsymbol{Q_o}_{(\mathbf{nxnm})} = \underbrace{\left[\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}_{(\mathbf{nxm})} \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}_{(\mathbf{nxn})}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}_{(\mathbf{nxm})} \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{2}}}_{(\mathbf{nxn})}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}_{(\mathbf{nxm})} \quad \dots \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n-1}}}_{(\mathbf{nxn})}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}_{(\mathbf{nxm})}\right]}_{\boldsymbol{n}\ \mathbf{x}\ (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{m})\ \Longrightarrow\ \boldsymbol{n}\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{n}\ \text{Una sola salida}}$$

Si el rango de $\boldsymbol{Q_c}$ es $\boldsymbol{n}$ el sistema será ***Completamente Observable***. Si es menor, habrá algunos estados no observables.

**Ejemplo:**
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$y = [3 \quad 4 \quad 1]\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A^T C^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{T^2} C^T} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 36 \\ 0 & -11 & 60 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

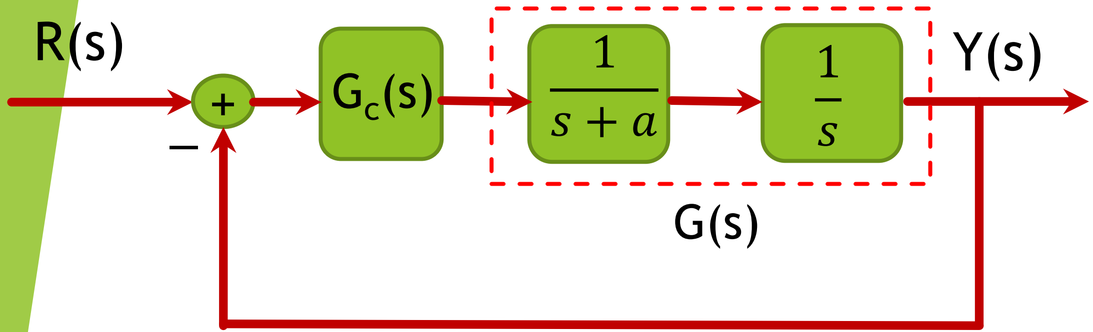
$$\boldsymbol{Q_o} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 4 & -8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rango 1. El sistema será ***Parcialmente Observable***.

# Realimentación de Estados

## *Motivación:*

***Compensación con FT:***



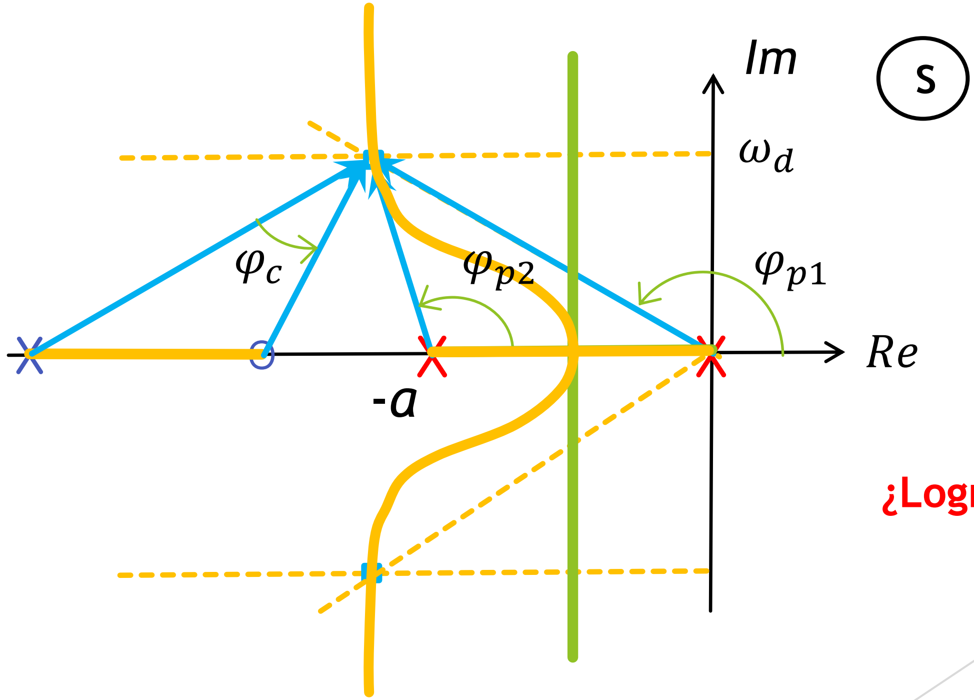

***Especificaciones:***

- ***Sobrepico < xx***

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- ***$t_r$ < yy***

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad \cos(\beta)=\xi$$



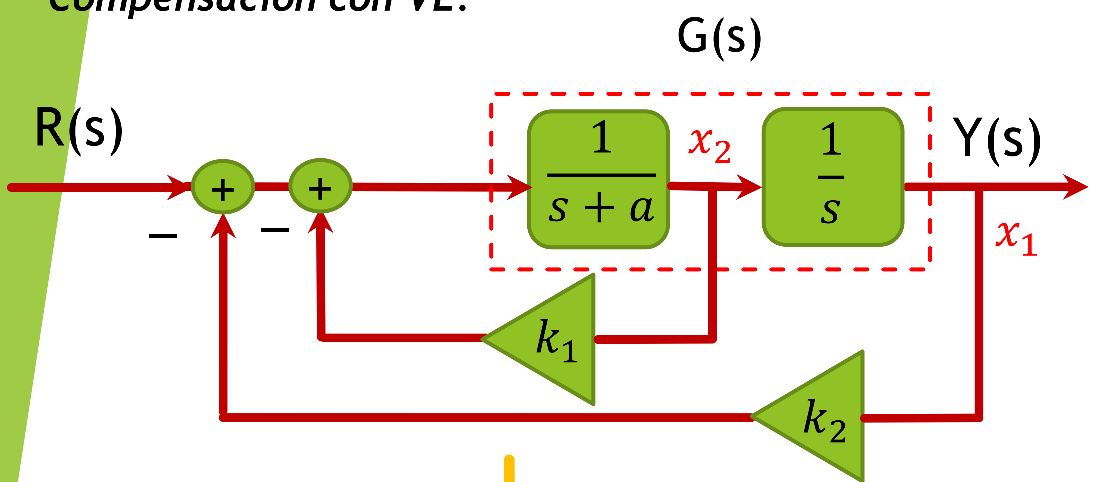

$$\varphi_c = -180° + \varphi_{p1} + \varphi_{p2}$$

¿Logramos cumplir las especificaciones ?

# Realimentación de Estados

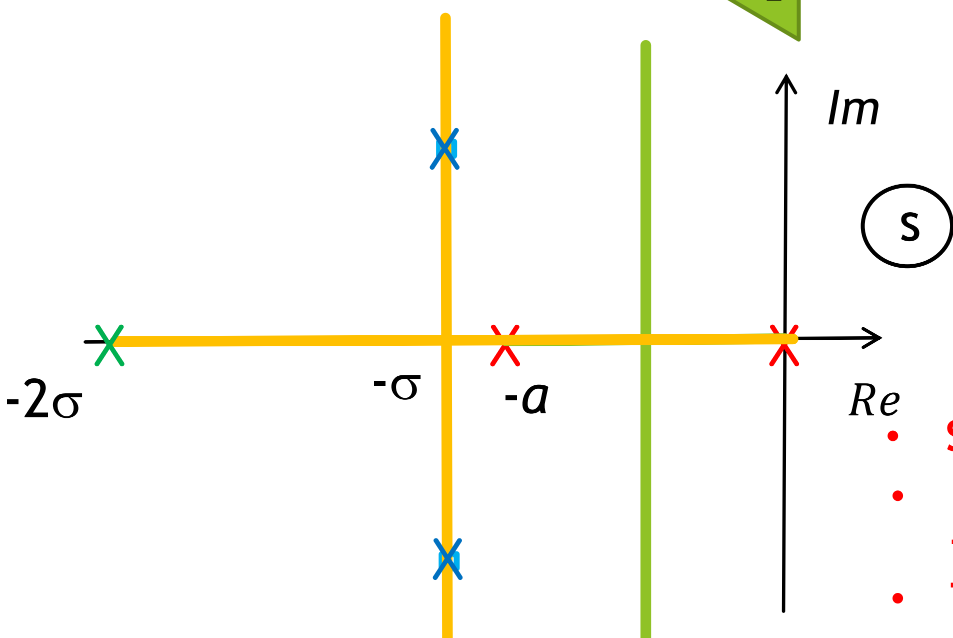
***Motivación:***

***Compensación con VE:***




$$T_1(s) = \frac{G_1}{1 + k_1 G_1} = \frac{\frac{1}{s+a}}{1 + \frac{k_1}{s+a}} = \frac{1}{s + a + k_1}$$

Elijo: $k_1 = 2\sigma - a$

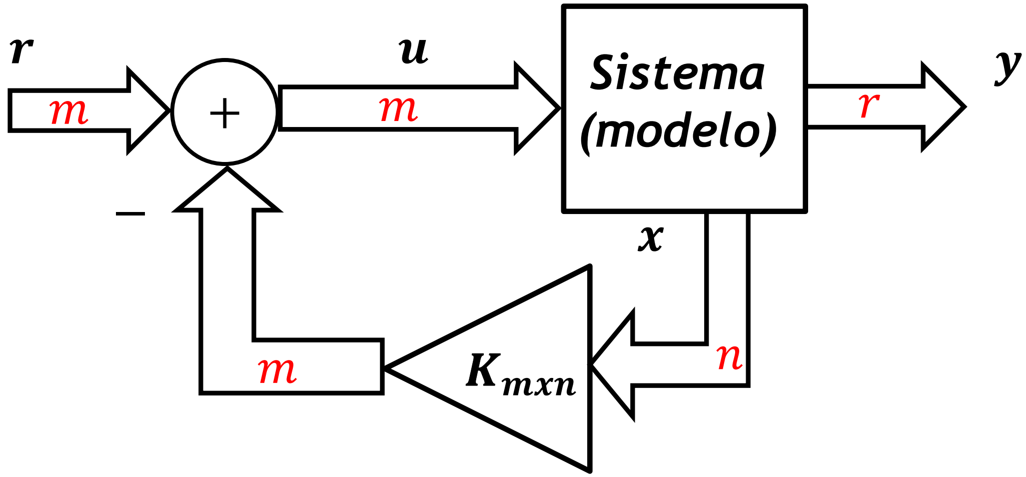



Y luego $k_2$ de manera que los polos de LC se ubiquen en los lugares deseados

¿Logramos cumplir las especificaciones ?

- Solo usamos ganancias (no dinámica)
- Logramos cumplir las especificaciones sin iteraciones
- Todo el plano S es accesible
- Limitaciones prácticas

# Realimentación de Estados




$$\begin{rcases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} \\ \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x} \end{rcases} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}) = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})}_{\boldsymbol{A_{LC}}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}$$

Elijo las constantes de la matriz de realimentación de estados $\boldsymbol{K}$ de manera que los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A_{LC}}$ se encuentren en los lugares deseados (especificaciones)

# Realimentación de Estados

**Ejemplo:**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})}_{\boldsymbol{A_{LC}}} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\ r$$

$$\boldsymbol{A_{LC}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

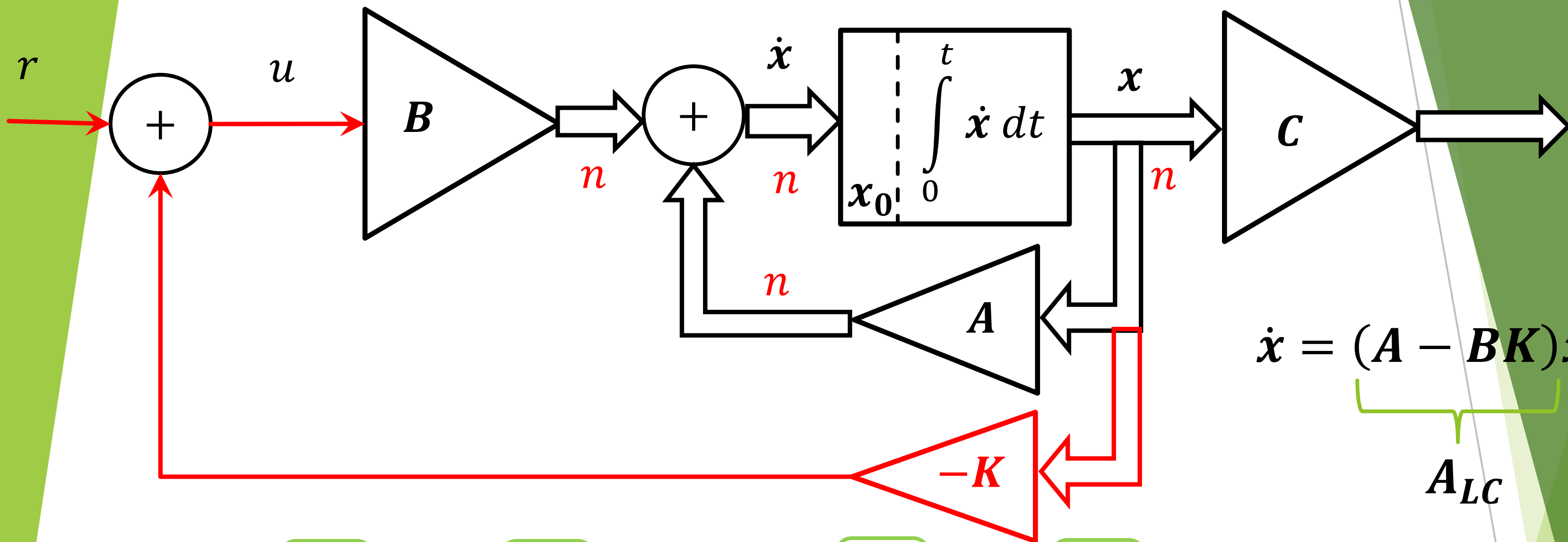
$$\boldsymbol{A_{LC}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & -a_3 - k_4 \end{bmatrix}$$

$$T_1(s) = \frac{N(s)}{s^4 + (a_3 + k_4)s^3 + (a_2 + k_3)s^2 + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1)}$$

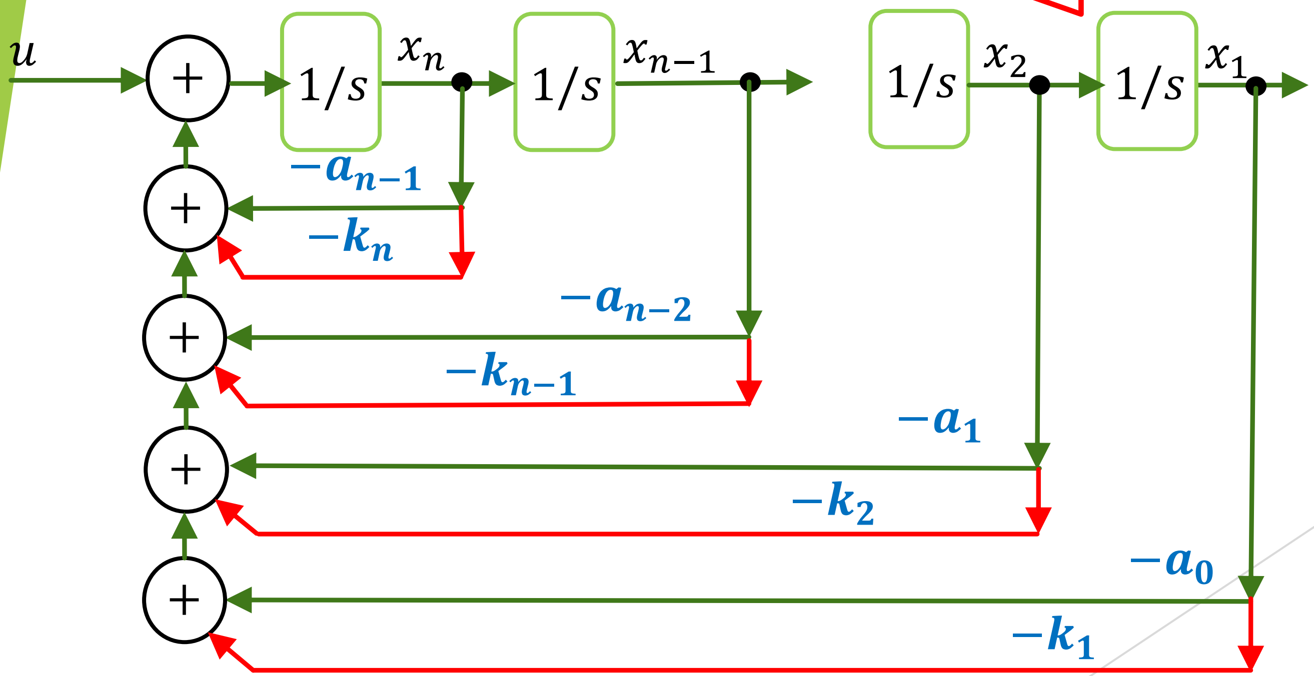
Si conozco la ubicación de los polos deseados puedo plantear el polinomio de autovalores de LC requerido. Luego, igualando coeficientes con el polinomio divisor de $\boldsymbol{T_1}$ encontrar los valores de las $\boldsymbol{k_i}$

Si el sistema es controlable, no habrá restricciones matemáticas para ubicar los polos donde se quiera.

# Realimentación de Estados




$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})}_{\boldsymbol{A}_{LC}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\ r$$




Si el sistema se encuentra en la forma canónica controlable, el cálculo de las ganancias es inmediato ya que cada cte. afecta un único coeficiente del polinomio característico. El sistema a LC también queda en la F.C.C. Para poder realimentar así debemos poder acceder a c/u de las V.E

# Realimentación de Estados

**Caso General SISO:**

$$\textbf{S.L.A}\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \\ y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}\end{cases}$$

***Especificaciones de LC:***
***(Ubicación de autovalores)***

$$\Rightarrow (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$\textbf{S.L.C}\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \\ y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} \\ u = r - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}\end{cases} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})}_{\boldsymbol{A}_{LC}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,r$$

$$\boldsymbol{A}_{LC} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_1k_1 & a_{12} - b_1k_2 & \cdots & a_{1n} - b_1k_n \\ a_{21} - b_2k_1 & a_{22} - b_2k_2 & \cdots & a_{2n} - b_2k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} - b_nk_1 & a_{n2} - b_nk_2 & \cdots & a_{nn} - b_nk_n \end{bmatrix} \Rightarrow |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{LC}|$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{LC}| = s^n + \beta_{n-1}(k_i)s^{n-1} + \cdots + \beta_1(k_i)s + \beta_0(k_i)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

# Realimentación de Estados

**Caso General SISO:**

$$\mathbf{S.L.A}\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \\ y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}\end{cases}$$

***Estados solo accesibles en esta modelización***

***Especificaciones de LC: (Ubicación de autovalores)***

$$(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \\ y &= \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{A_c}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B_c}\,u \\ y &= \boldsymbol{C_c}\,\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

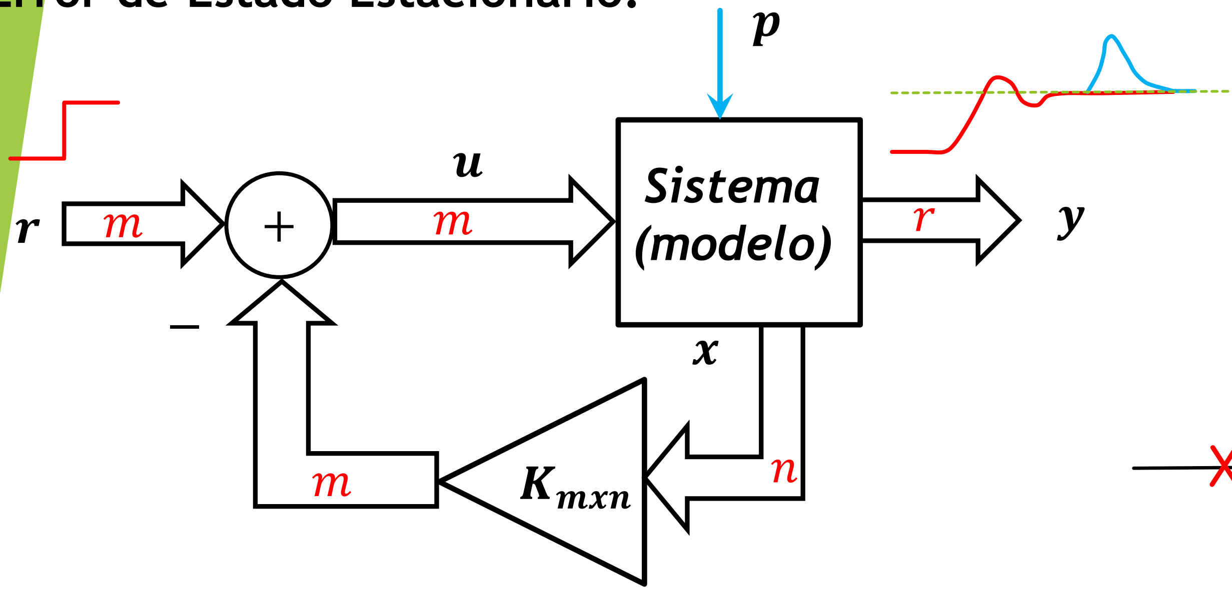
$$\Downarrow \quad \mathbf{S.L.C} \quad u = r - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{z}$$

$$u = r - \underbrace{\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^{-1}}_{\boldsymbol{K}'}\,\boldsymbol{x} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{A_c} - \boldsymbol{B_c}\boldsymbol{K})\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B_c}r \\ \text{Se determina K fácilmente en la F.C. Controlable}\end{cases}$$

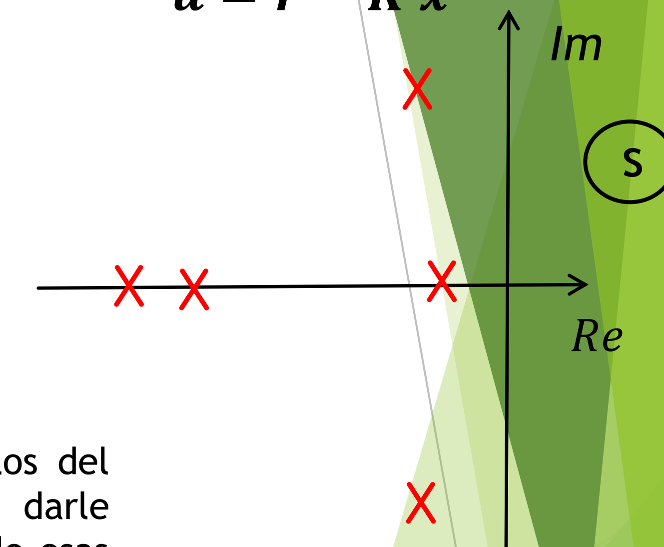
$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1^T \\ \boldsymbol{t}_1^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}_1^T\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{t}_1^T = [\mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{1}]\boldsymbol{Q}_c^{-1}$$

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario:**




$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x$$
$$u = r - K\,x$$

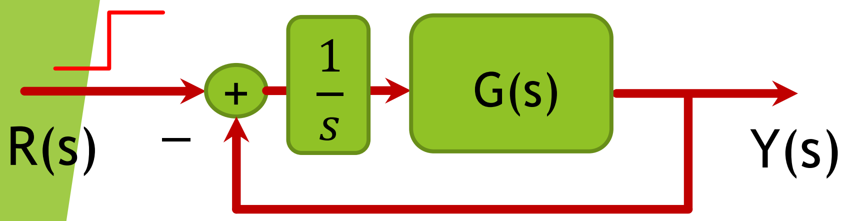



Con la ley de realimentación diseñada logramos ubicar los polos del sistema de lazo cerrado donde queríamos de manera de darle determinadas características a la respuesta transitoria. Dentro de esas características no hemos considerado aún el error de estado estacionario.

Ese error de estado estacionario se puede considerar tanto para señales de referencia como para perturbaciones. En cuanto a la referencia es habitual querer que la salida del sistema pueda seguirla sin error. En cuanto a las perturbaciones lo que se quiere es que estas sean rechazadas, en especial en estado estacionario.

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario:**




$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Dado que en EE la excitación es continua ($\omega$=0), ¿cómo debe ser T(s) en esa frecuencia para que el error de E.E sea cero?

Considerando lo anterior, ¿cuál debería ser entonces el valor de G(s) en esa frecuencia?

Conclusión: necesito que G(s) gane infinito en frecuencia cero.

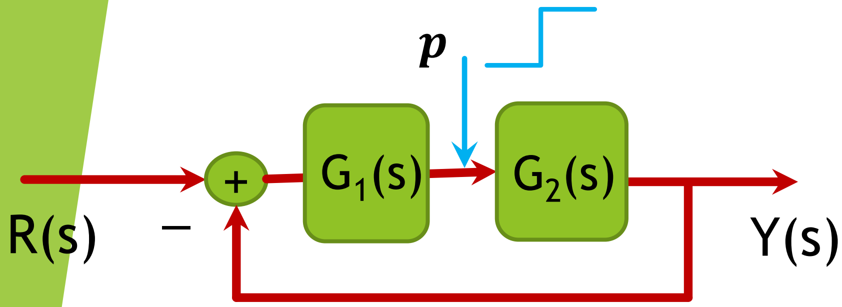
Teniendo en cuenta esto último, si yo tuviera una referencia de frecuencia $\omega_r$ y quisiera que la salida la siguiera sin error, ¿qué debería asegurar?

Nuevamente tendría que generar un compensador con una ganancia infinita en esa frecuencia para que la T(s) sea unitaria en ese valor frecuencial.

Muchas veces no puedo hacer que la ganancia sea infinita. En esos casos, cuanto mas grande sea ésta en la frecuencia (o rango frecuencial) menor será el error de estado estacionario.

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario:**




$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

¿Cuánto debe valer la transferencia de LC para que la perturbación no aparezca en la salida en E.E.?

Considerando lo anterior, ¿cuáles deberían ser entonces los valores de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ en esa frecuencia?

$G_2(s) \rightarrow \infty$ @ s=0

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{1}{\frac{1}{G_2(s)} + G_1(s)} \cong \frac{1}{G_1(s)}$$

$G_1(s) \rightarrow \infty$ @ s=0

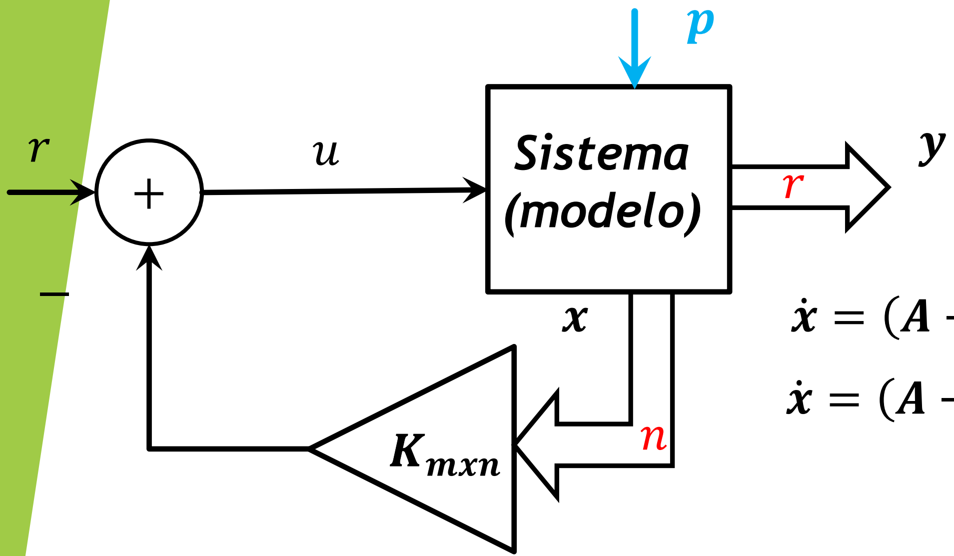
$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cong 0$$

Esto es lo que buscábamos. Con el mismo integrador que corregimos el Eee a la referencia, podemos rechazar esas perturbaciones en E.E

***Observación Importante:*** cuando de rechazar perturbaciones se trate, la ganancia elevada (infinita) debe corresponder a bloques previos a su punto de inyección. Si la planta tuviera un integrador en $G_1$ rechazaría muy bien las perturbaciones consideradas, mientras que si estuviera en $G_2$ eso no sucedería.

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario:**




$$\dot{x} = (A - BK)x + B\,r = A_{LC}\,x + B_{LC}\,r$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + B\,r = A_{LC}\,x + B_{LC_1}r + B_{LC_2}\,p$$

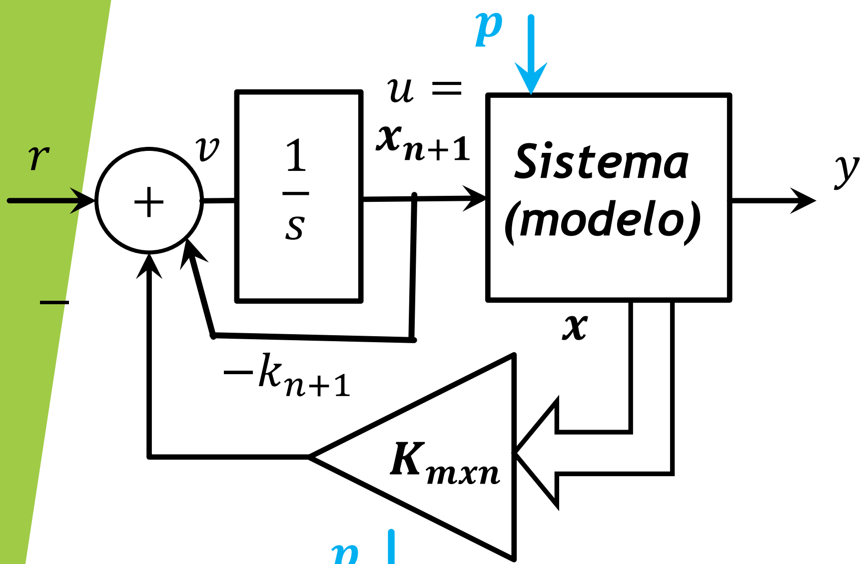
**E.E.:** $\cancel{\dot{x}} = A_{LC}\,x + B_{LC_1}r + B_{LC_2}\,p \;\Rightarrow\; x_{ee} = -A_{LC}^{-1}B_{LC_1}r - A_{LC}^{-1}B_{LC_2}\,p$

$$y_{ee} = -CA_{LC}^{-1}B_{LC_1}r - CA_{LC}^{-1}B_{LC_2}\,p$$

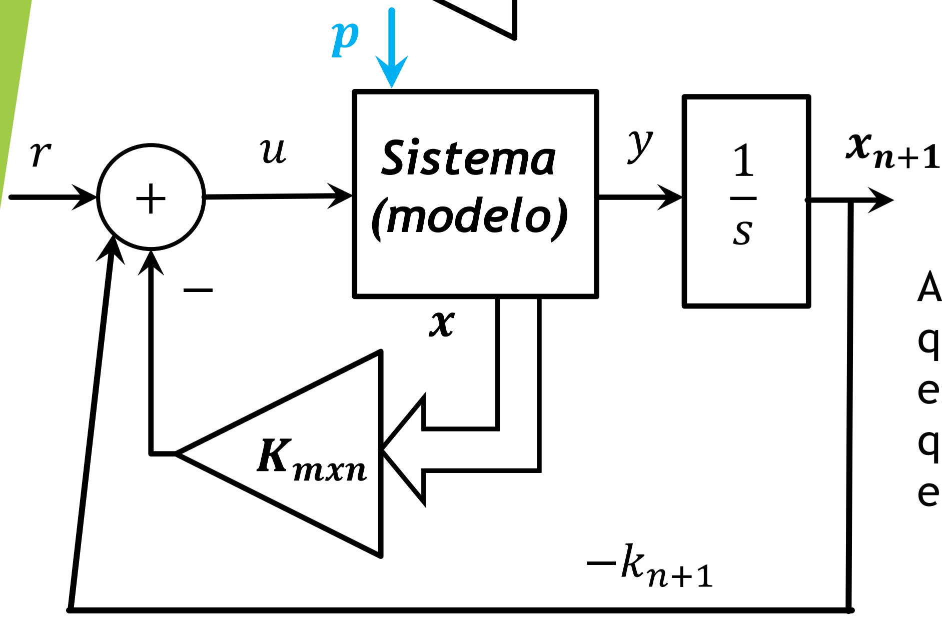
Es claro que para que las cosas funcionen bien, $CA_{LC}^{-1}B_{LC_1}$ debería ser una matriz identidad (1 en SISO) y $CA_{LC}^{-1}B_{LC_2}$ una matriz nula (0 en SISO).

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario: Corrección**



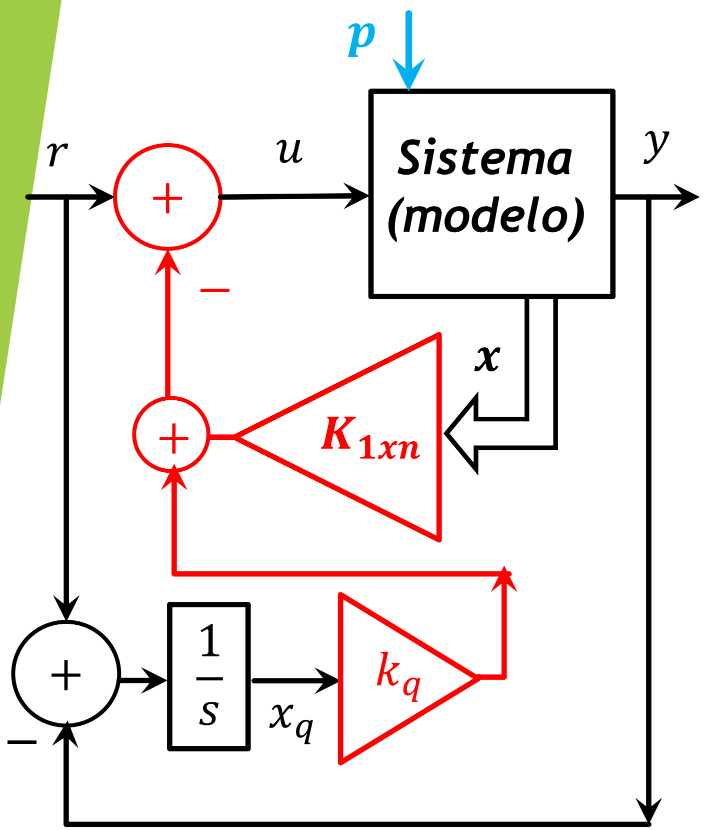

Extendiendo dinámicamente el sistema a la entrada, la constante de realimentación de ese nuevo estado correría el polo en el origen hacia una posición Re(-). El resto del sistema no lo vería como un integrador.
Si $k_{n+1}$ fuera cero, el integrador tendería a hacer cero la resta entre la referencia y una combinación 'extraña' de estados que no necesariamente coincide combinación de estados de la salida.




Agregar un integrador a la salida haría que el sistema tienda a anular en estado estacionario esa misma salida que estoy queriendo que se establezca en el valor de referencia.

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario: Corrección**




Para eliminar en estado estacionario la diferencia entre dos señales, la misma debe encontrarse a la entrada de un integrador de lazo cerrado.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u$$
$$\dot{x}_q = 0\,x_q + r - y$$
$$y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u$$
$$\dot{x}_q = 0\,x_q + r - \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

Sistema dinámicamente expandido:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_e + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_e$$
$$y = [\boldsymbol{C} \quad 0]\,\boldsymbol{x}_e$$

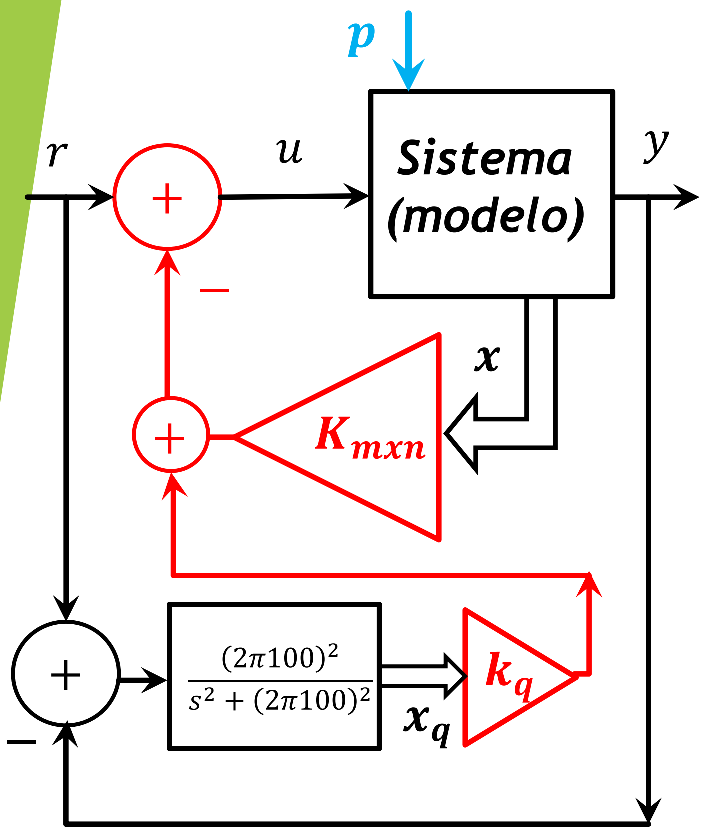
Realimentación:

$$u = r - [\boldsymbol{K} \quad \boldsymbol{k}_q]\,\boldsymbol{x}_e$$

Si con la realimentación el sistema es estable, la entrada del integrador tenderá a cero mas allá de los valores ctes. de r y p.

# Realimentación de Estados

**Error de Estado Estacionario: Corrección**

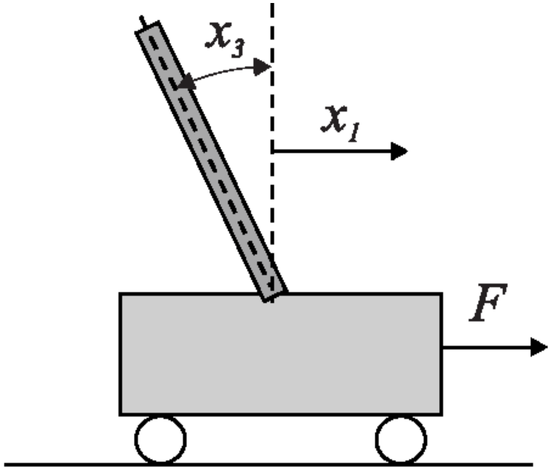



Consideremos que la perturbación es una sinusoide de 100Hz que afecta la salida del sistema. ¿Cómo hago para suprimirla?

En este caso el bloque agregado presenta dos estados nuevos y presenta alta ganancia en la frecuencia en que quiero rechazar la perturbación.

Obviamente en la realidad las perturbaciones no son conocidas ni sinusoides puras, de manera que deberé proporcionar un bloque con un Bode de módulo con alta ganancia en la zona de frecuencias de interés. Eso implica la necesidad de incorporar tantos estados como haga falta.

# Ejemplo Realimentación de Estados




$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 31 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} u$$

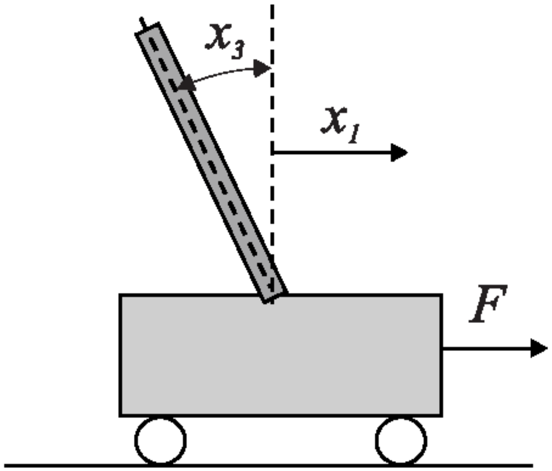
$$y = [0 \quad 0 \quad 37{,}6 \quad 0]\, \boldsymbol{x}$$

$$\lambda_i = [0 \quad -8{,}433 \quad -4{,}412 \quad 5{,}310]$$

los estados $x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$ corresponden a la posición [m] y velocidad [m/s] de la base móvil, y la posición angular [rad] y velocidad angular [rad/s] del péndulo, respectivamente

Puede probarse fácilmente que el sistema es absolutamente controlable y observable

# Ejemplo Realimentación de Estados




Forma controladora:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 197{,}6273 & 31 & -7{,}5364 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad -32{,}8 \quad -0{,}9024 \quad 0]\ \boldsymbol{x}_c$$

$$\lambda_i = [0 \quad -8{,}433 \quad -4{,}412 \quad 5{,}310]$$

Polos de lazo cerrado deseados $[-7+j \quad -7-j \quad -2 \quad -2{,}85]$

Polinomio Característico de LC Deseado:

$$s^4 + 18{,}85s^3 + 123{,}71s^2 + 322{,}85s + 285{,}71$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{c}} = [-285{,}71 \quad -322{,}85 \quad -123{,}71 \quad -18{,}85]$$

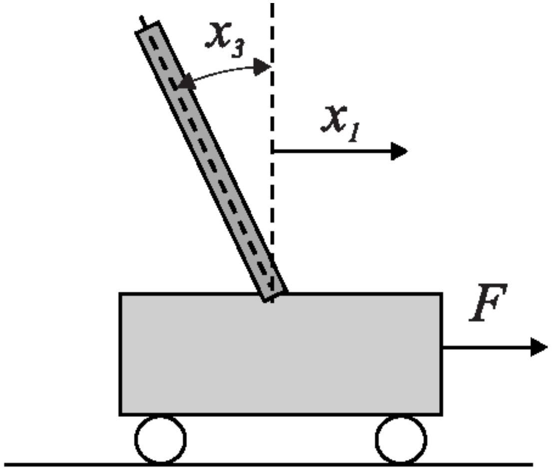
$$k_{c1} = 0 + 285{,}71 = 285{,}71$$

$$k_{c2} = 197{,}62730 + 322{,}85 = 520{,}48$$

$$k_{c3} = 31 + 123{,}71 = 154{,}71$$

$$k_{c4} = 18{,}85 - 7{,}31 = 11{,}32$$

# Ejemplo Realimentación de Estados




Forma original:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 31 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 37{,}6 \quad 0]\, \boldsymbol{x}$$

$$\lambda_i = [0 \quad -8{,}433 \quad -4{,}412 \quad 5{,}310]$$

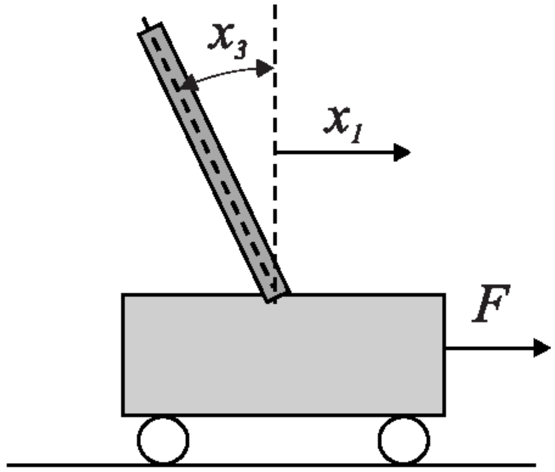
Polinomio Característico de LC Deseado:

$$s^4 + 18{,}85s^3 + 123{,}71s^2 + 322{,}85s + 285{,}71$$

Realimentación en las variables de estado originales: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K_c T^{-1}}$

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= -1{,}2117 \\ k_2 &= -2{,}1819 \\ k_3 &= -6{,}8539 \\ k_4 &= -1{,}2899 \end{aligned} \right.$$

# Ejemplo: Dinámica de LC y Rechazo a Perturbaciones



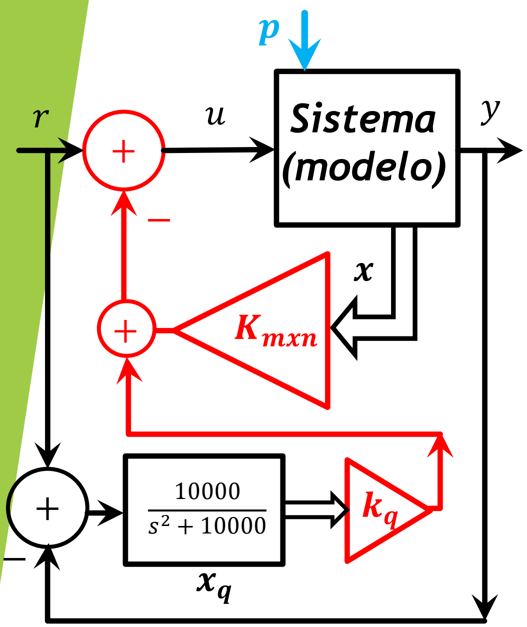

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 31 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 37{,}6 \quad 0]\, \boldsymbol{x}$$

Polos de LC $[-7+j \quad -7-j \quad -2 \quad -2{,}85]$

Producto de interferencias, una perturbación sinusoidal de frecuencia 100rad/s y amplitud 0,01 se suma a la salida correspondiente al estado *x3* haciendo que, a pesar del esquema de realimentación anterior, el péndulo “tiemble” alrededor de su posición de equilibrio vertical. Especificar un nuevo esquema de control donde este efecto sobre la posición del péndulo (x3) sea corregido, es decir que logre que éste luzca vertical y quieto y se mantengan los autovalores del punto anterior. Determine las nuevas ganancias de realimentación.

# Ejemplo: Dinámica de LC y Rechazo a Perturbaciones




$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 31 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} u$$

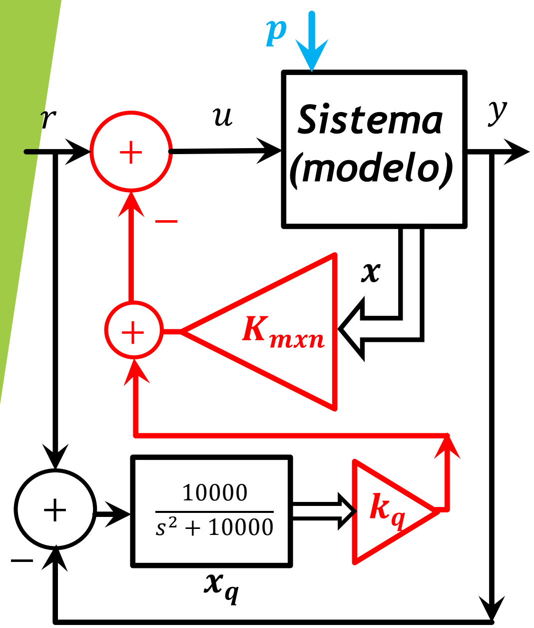
$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\, \boldsymbol{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{q}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10000 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_q &= [0 \quad 10000]\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{q}} \end{aligned}\right\} \; y_q = \frac{10000}{s^2 + 10000}(x_3 - r)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{ext}}\boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ext}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{ext}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -10000 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \\ -24 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Dinámica de LC y Rechazo a Perturbaciones




$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{ext}}\boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ext}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{ext}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}5364 & -1{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -10000 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \\ -24 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Dinámica de LC y Rechazo a Perturbaciones

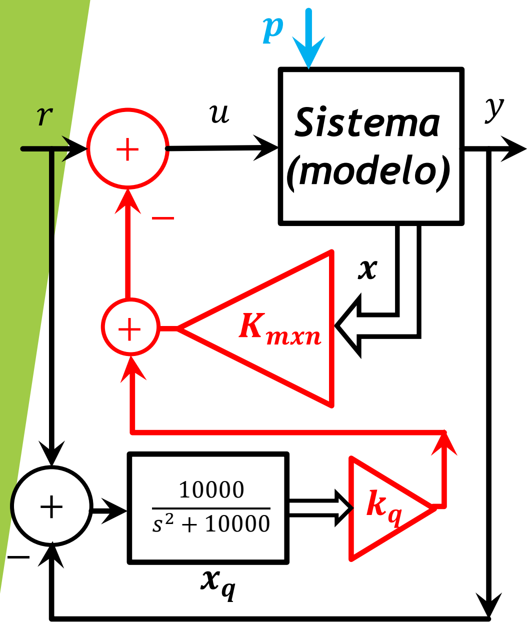
Llevado a la forma controladora:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.9763e+06 & 3.1000e+05 & \text{-}7.5166e+04 & \text{-}9.9690e+03 & \text{-}7.5364 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0011 \\ 0 & 0 \\ 1 & \text{-}11{,}0816 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: Dinámica de LC y Rechazo a Perturbaciones




Polos de LC originales deseados $[-7+j \quad -7-j \quad -2 \quad -2{,}85]$

Pero ahora tengo 6 polos!!!!

Elijo los otros dos en -70 y -72 por ejemplo!!!

$$A_{ext} - B_{ext}(:,1)K_c$$

Elijo los $k_i$ de manera que los coeficientes del polinomio de 6$^{to}$ grado correspondan a los del polinomio deseado (polos deseados y elegidos)

Una vez determinado el vector $K_c$ debo transformarlo al sistema coordenado original a través de $K = K_c T^{-1}$