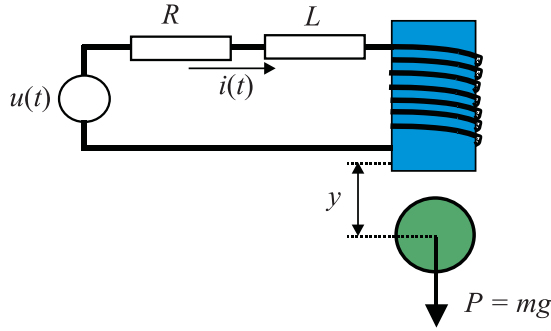


Control Automático II - Ing. Electrónica

Ejercicio resuelto 5: Realimentación de estados

El sistema de la figura tiene por objetivo mantener el cuerpo de peso P levitando a una distancia y .



$$\begin{aligned} m &= 50 \text{ g} \\ K &= 10^{-4} \text{ Nm/A}^2 \\ L &= 10 \text{ mH} \\ R &= 1 \text{ } \Omega. \end{aligned}$$

Si bien las ecuaciones diferenciales que describen al sistema son no lineales:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} &= mg - \frac{K i^2}{y}, \\ u &= L \frac{di}{dt} + iR, \end{aligned} \tag{1}$$

restringiremos el análisis al entorno del punto de operación $[i_e = 7 \text{ A}, u_e = 7 \text{ V}, v_e = 0 \text{ m/s}, y_e = 10 \text{ cm}]$. A tal efecto, consideraremos un modelo linealizado. Elegimos como variables de estado y acción de control a:

$$\begin{aligned} \underline{x}^T &= (x - x_e) = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & i \end{bmatrix}^T, \\ \underline{u} &= u - u_e \end{aligned} \tag{2}$$

donde,

$$\begin{aligned} \underline{y} &= y - y_e, \\ \underline{v} &= v - v_e, \\ \underline{i} &= i - i_e. \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, el modelo linealizado lo obtenemos a partir de:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} \underline{u}, \\ \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K x_{3e}^2}{m x_{1e}^3} & 0 & -\frac{2K x_{3e}}{m x_{1e}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \underline{u}, \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2,8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \underline{u}. \quad (4)$$

Calculando los autovalores de lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 31,3, \\ \lambda_2 &= -31,3, \\ \lambda_3 &= -100, \end{aligned}$$

se detecta la presencia de un autovalor en el semiplano derecho que da lugar a un comportamiento inestable.

Previamente a intentar el diseño de un controlador que estabilice el sistema en el entorno del punto de operación, verifiquemos la controlabilidad del mismo (¿por qué?). La matriz de controlabilidad resulta:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -280 \\ 0 & -280 & 28000 \\ 10^2 & -10^4 & 10^6 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

la cual es de rango 3, es decir, el sistema es completamente controlable.

El diseño del controlador lo haremos con ayuda del modelo canónico controlable (obviamente esto no es estrictamente necesario, pero muchas veces simplifica los cálculos). La matriz de transformación:

$$T = \begin{bmatrix} -0,0036 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0036 & 0 \\ -3,5 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

permite obtener dicho modelo (el procedimiento para el cálculo de T puede encontrarse en el apéndice).

Luego, es posible disponer del modelo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c \underline{u}, \\ y &= C_c z, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_c &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 98000 & 980 & -100 \end{bmatrix}, & B_c &= TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_c &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} -280 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. Asignación de autovalores de lazo cerrado.

Supongamos que se desea que la dinámica de lazo cerrado quede definida por los polos

$$\begin{aligned} p_1 &= -20 - j20, \\ p_2 &= -20 + j20, \\ p_3 &= -30, \end{aligned} \quad (7)$$

que definen la ecuación característica:

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = s^3 + 70s^2 + 2000s + 24000. \quad (8)$$

Por otra parte sabemos que la matriz de lazo cerrado es

$$A_{c_{LC}} = A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 98000 - k_{c1} & 980 - k_{c2} & -100 - k_{c3} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Igualando los coeficientes de la última fila de $A_{c_{LC}}$ con los coeficientes del polinomio característico deseado, resulta:

$$\begin{aligned} k_{c1} &= 98000 + 24000 = 122000, \\ k_{c2} &= 980 + 2000 = 2980, \\ k_{c3} &= -100 + 70 = 30. \end{aligned}$$

Luego, las ganancias de realimentación de los estados originales son:

$$K_c T = \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} -330,7 & -10,64 & -0,3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

La Fig. 1 muestra el efecto del control sobre la posición de la bola, cuando ésta es apartada de su posición de equilibrio en 5 mm (es decir, las condiciones iniciales son $x_0^T = \begin{bmatrix} 0,005 & 0 & 0 \end{bmatrix}$).

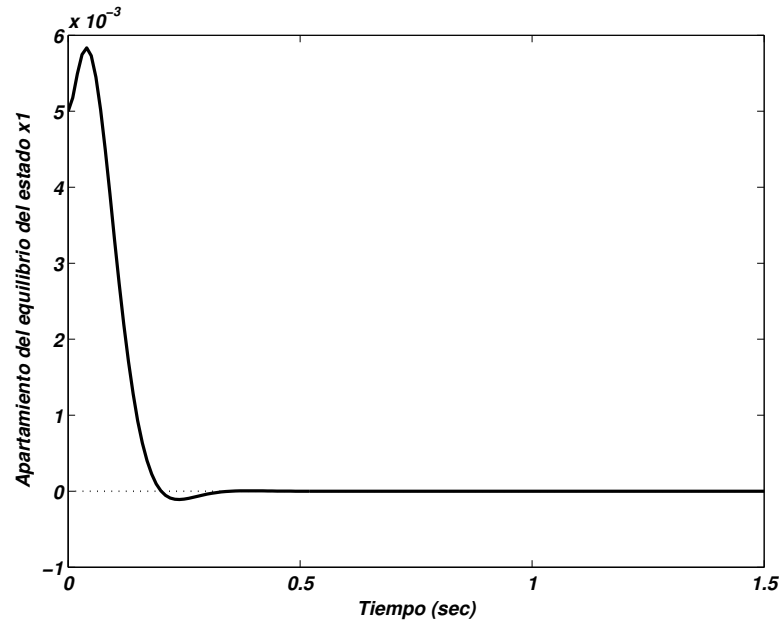


Figura 1: Simulación de la respuesta a lazo cerrado

APÉNDICE: Matriz de transformación para obtener el modelo canónico controlable.

Se quiere transformar un modelo genérico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (11)$$

a uno canónico controlable:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + B_c u, \\ y &= C_c z.\end{aligned}\tag{12}$$

Sabemos que

$$A_c = P^{-1}AP = TAT^{-1},\tag{13}$$

luego, el problema se reduce a encontrar T , tal que:

$$A_c T = TA.\tag{14}$$

Con esta finalidad, expresamos a T como:

$$T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{bmatrix}\tag{15}$$

Luego, debe verificarse

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} A.\tag{16}$$

Igualando las filas de las matrices de ambos miembros, resulta:

$$\begin{aligned}t_2^T &= t_1^T A, \\ t_3^T &= t_2^T A = t_1^T A^2, \\ &\vdots \\ t_n^T &= t_{n-1}^T A = t_1^T A^{n-1},\end{aligned}$$

$$-a_n t_1^T - a_{n-1} t_2^T - \dots - a_1 t_n^T = t_n^T A.\tag{17}$$

es decir, existen ecuaciones suficientes para despejar los t_i^T . Sin embargo, en vez de ésta última ecuación emplearemos la que nos impone la forma de B_c :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} B.\tag{18}$$

Igualando filas,

$$\begin{aligned}0 &= t_1^T B, \\ 0 &= t_2^T B = t_1^T AB, \\ 0 &= t_3^T B = t_2^T AB = t_1^T A^2 B, \\ &\vdots \\ 0 &= t_{n-1}^T B = t_1^T A^{n-2} B, \\ 1 &= t_n^T B = t_1^T A^{n-1} B.\end{aligned}$$

La ecuación previa puede expresarse como:

$$t_1^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

y teniendo presente que la matriz de controlabilidad es:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad (20)$$

la expresión de la primer fila de T se reduce a:

$$t_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Q_c^{-1} \quad (21)$$

Luego, la matriz que transforma un modelo de estados genérico en el modelo canónico controlable es:

$$T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ t_1^T A^2 \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$