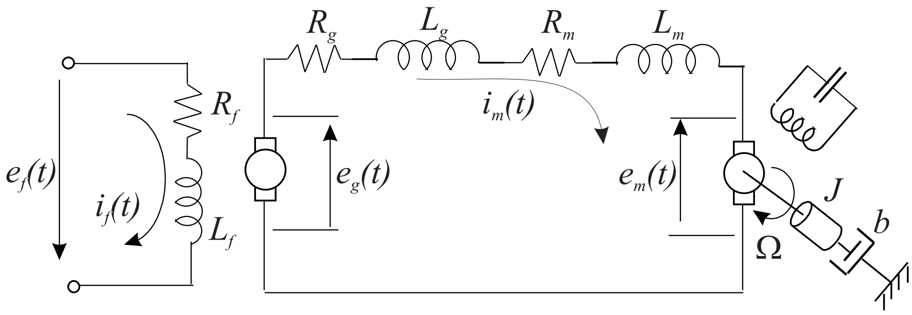
Control Automático II - Ing. Electrónica
Ejercicio Resuelto 3: Solución de las Ecuaciones de Estado

Considere el sistema motor-generador esquematizado en la figura,



el cual puede ser modelado con tres estados (ver Modern Control Theory, Brogan, pág. 115):

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i}_m \\ \dot{i}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2{,}5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i_m \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_f \tag{1}$$

El sistema es excitado y una vez que alcanza una velocidad de estado estacionario $\Omega = 100\ r/s$ se anula la tensión e_f. Nos interesa calcular la evolución de la velocidad $\Omega(t)$ una vez eliminada la excitación. Las condiciones iniciales de los dos estados restantes pueden ser calculadas a partir de igualar a cero la derivada de los estados. Rápidamente podemos verificar que $i_m(t_0) = 50$, y $i_f(t_0) = 150$. Los estados evolucionarán de acuerdo a:

$$x(t - t_0) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \tag{2}$$

y en particular

$$\Omega(t - t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - t_0) \tag{3}$$

Luego, la mayor complejidad en la resolución del problema radica en el cálculo de la matriz de transición de estados. Con esta finalidad, emplearemos el teorema de Cayley-Halmiton. Sabemos que

$$\Phi(t) = f(A) = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \tag{4}$$

donde el polinomio $f(A)$ de matrices puede ser evaluado a partir del polinomio escalar

$$f(\lambda) = 1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots \tag{5}$$

Si dividimos el polinomio $f(\lambda)$ por el polinomio característico del sistema bajo análisis $q(\lambda) = |\lambda I - A|$, resulta:

$$\frac{f(\lambda)}{q(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{q(\lambda)} \tag{6}$$

o bien

$$f(\lambda) = Q(\lambda)q(\lambda) + R(\lambda) \tag{7}$$

siendo $Q(\lambda)$ y $R(\lambda)$ los polinomios cociente y resto respectivamente (obviamente, el orden del polinomio $R(\lambda)$ es menor que el correspondiente a la ecuación característica, es decir es de la forma $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}$). Luego,

$$f(A) = Q(A)q(A) + R(A) \tag{8}$$

pero, por Cayley-Hamilton, sabemos que toda matriz satisface su propia ecuación característica, por consiguiente:

$$f(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} \tag{9}$$

donde los coeficientes α_i pueden ser calculados a partir de evaluar la ecuación (7) en los autovalores del sistema

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1}; \qquad \text{con} \quad i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

En nuestro problema, $q(\lambda) = |\lambda I - A|$ es de orden tres, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \qquad (11) \\ \Phi(t) &= \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 - 4\alpha_2 & 2\alpha_1 - 16\alpha_2 & 8\alpha_2 \\ -2{,}5\alpha_1 + 20\alpha_2 & \alpha_0 - 7\alpha_1 - 44\alpha_2 & 4\alpha_1 - 48\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0 - 5\alpha_1 + 25\alpha_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde los coeficientes α_0, α_1 y α_2 se obtienen evaluando (10) en los autovalores del sistema $(-2, -5, -6)$:

$$e^{\lambda_i t} = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2; \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \tag{12}$$

es decir:

$$e^{-2t} = R(-2) = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \tag{13}$$

$$e^{-5t} = R(-5) = \alpha_0 - 5\alpha_1 + 25\alpha_2 \tag{14}$$

$$e^{-6t} = R(-6) = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 36\alpha_2 \tag{15}$$

resultando:

$$\alpha_0 = \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-5t} + \frac{5}{2}e^{-6t} \tag{16}$$

$$\alpha_1 = \frac{11}{12}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t} + \frac{7}{4}e^{-6t} \tag{17}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{-6t} \tag{18}$$

Reemplazando (16), (17) y (18) en (11) obtenemos la matriz de transición de estados:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-6t} & \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t} + 2e^{-6t} \\ -\frac{5}{8}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{-6t} & -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-6t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{16}{3}e^{-5t} - 5e^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \tag{19}$$

La evolución de los tres estados del sistema esta dada por:

$$x(t - t_0) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \tag{20}$$

y en particular la velocidad $\Omega(t)$ a partir del instante en que se anula la excitación es:

$$\Omega(t - t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t_0) = 250e^{-2(t-t_0)} - 400e^{-5(t-t_0)} + 250e^{-6(t-t_0)} \tag{21}$$