Control Automático 2

Plano de Fase y e Introducción al Control por Estructura Variable

F. Valenciaga 2022

Variables de Fase (F.C. Controlable)

El plano de fase es el espacio de estados empleado para representar la evolución de sistemas de dos variables cuando éstos se encuentran expresados en variables de fase.

Veremos que la evolución o trayectoria de un sistema en estos espacios de estados particulares se relacionan íntimamente a la posición de los autovalores en el plano complejo.

Es posible luego de este estudio, extrapolar los comportamientos de sistemas de mayor número de variables que posean las mismas características fundamentales (autovalores).

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A_c}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B_c}u(t)$$
$$y(t) = \boldsymbol{C_c}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1}$$
$$\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} -a_i\, x_i + u$$

Cadena de integradores mas una ecuación diferencial de primer orden combinación de todos los estados y el control.

La metodología del plano de fase es muy útil para abordar problemas con alinealidades importantes e incluso para sintetizar cierto tipo de controladores.

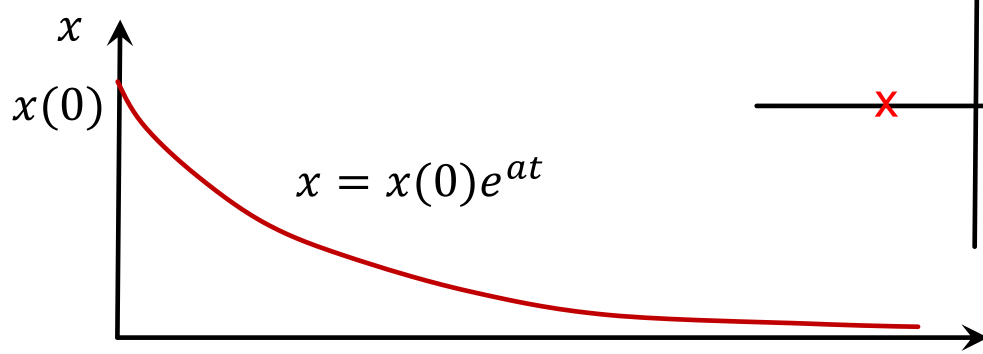
Variables de Fase (F.C. Controlable)

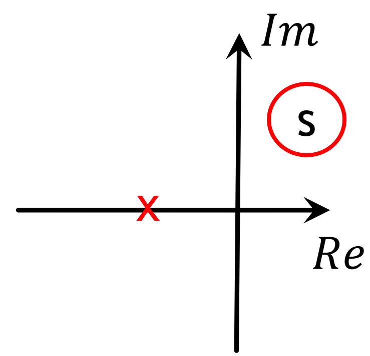
Comencemos con el caso mas simple de una única variable. Ahí la forma controladora no tiene relevancia alguna.

$$\dot{x} = ax + bu$$

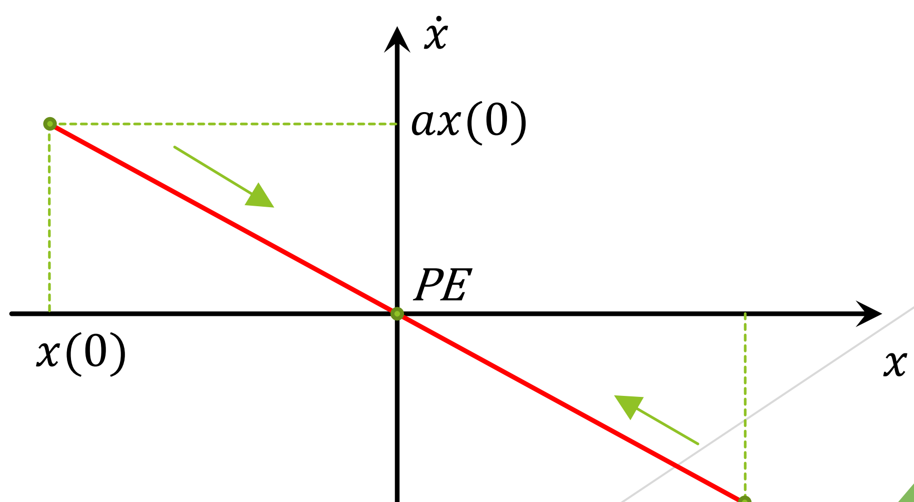
Inicialmente consideramos que $b=0$ y que $a<0$.

$$\dot{x} = ax$$





Trayectoria del sistema cuando *u*=0, parametrizada en *t*



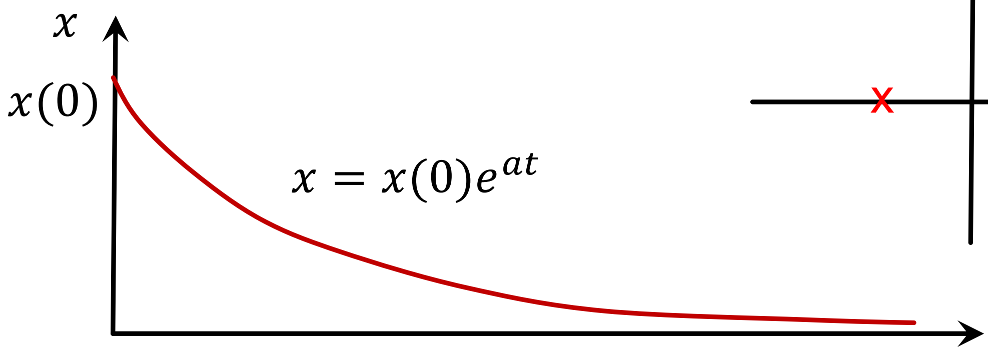
Variables de Fase (F.C. Controlable)

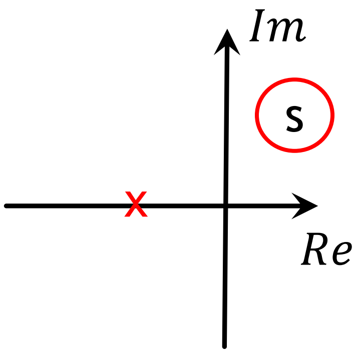
Comencemos con el caso mas simple de una única variable. Ahí la forma controladora no tiene relevancia alguna.

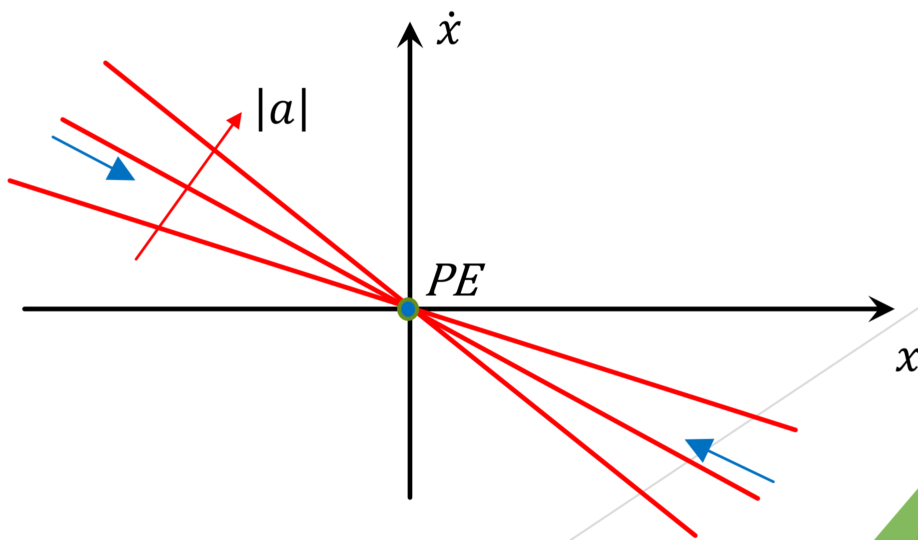
$$\dot{x} = ax + bu$$

Inicialmente consideramos que $b=0$ y que $a<0$.

$$\dot{x} = ax$$



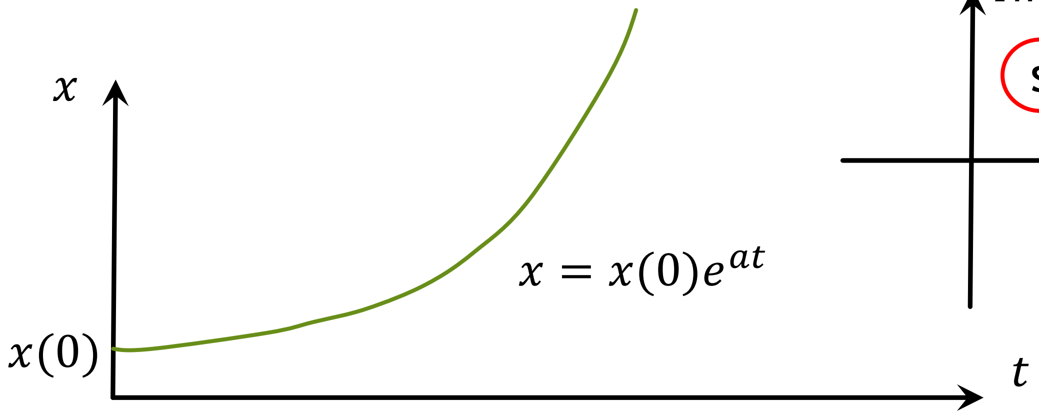


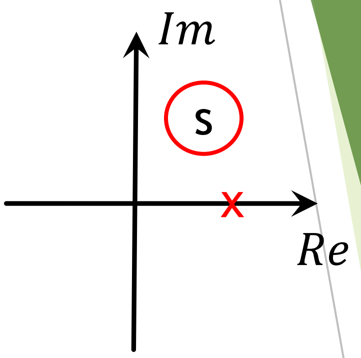


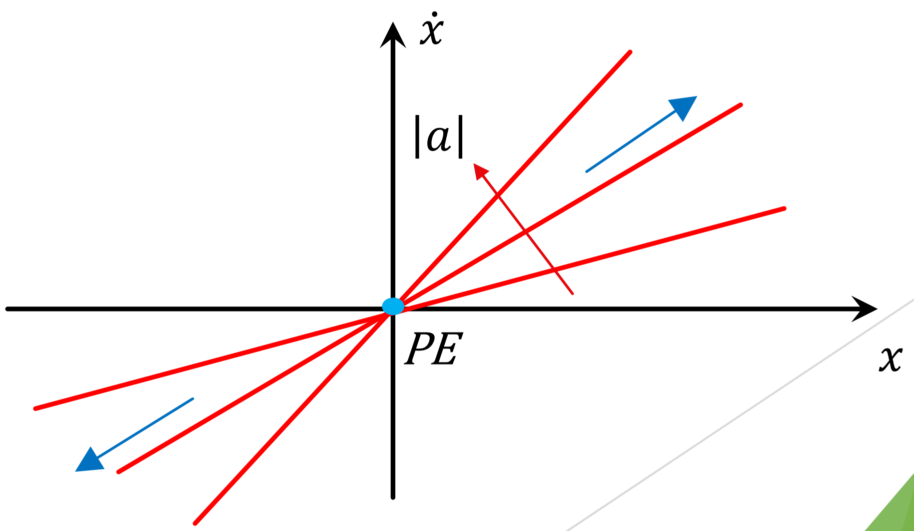
Variables de Fase (F.C. Controlable)

Supongamos ahora que $b=0$ y que $a>0$.

$$\dot{x} = ax$$





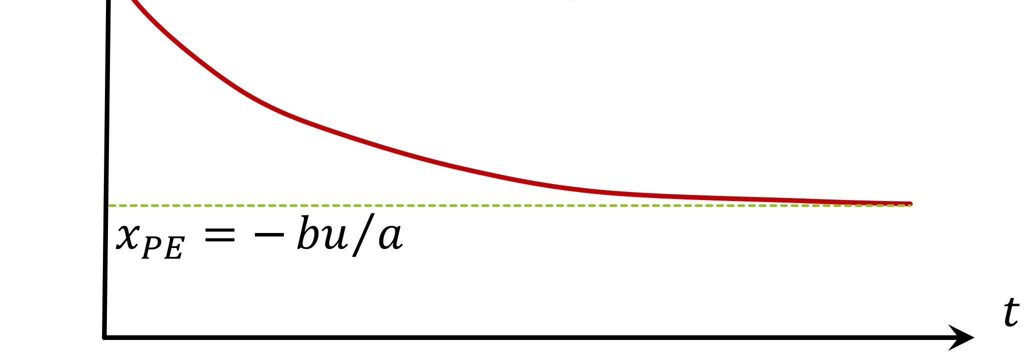


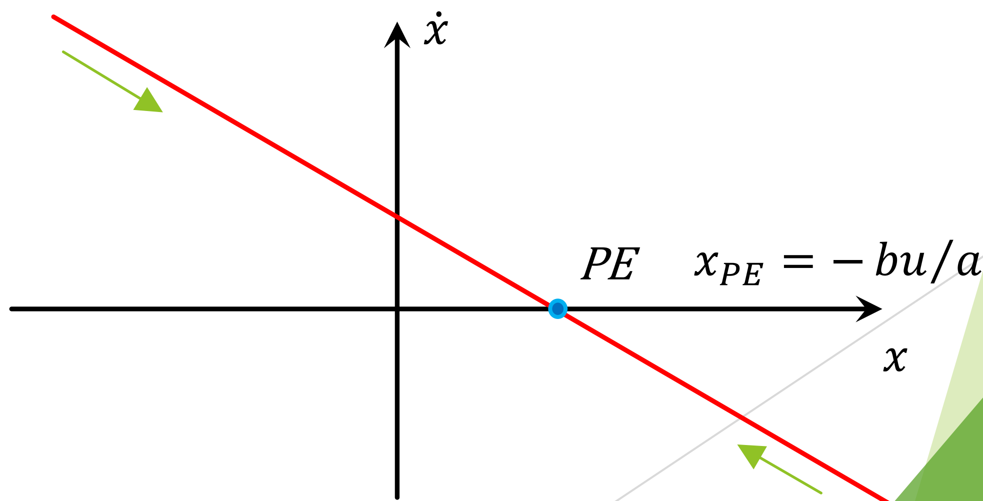
Variables de Fase (F.C. Controlable)

Qué pasaría si u fuera una cte. Positiva diferente de cero? ($a<0$)

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$x = x(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\, bu\, d\tau = x(0)e^{at} - bu/a(1 - e^{at})$$

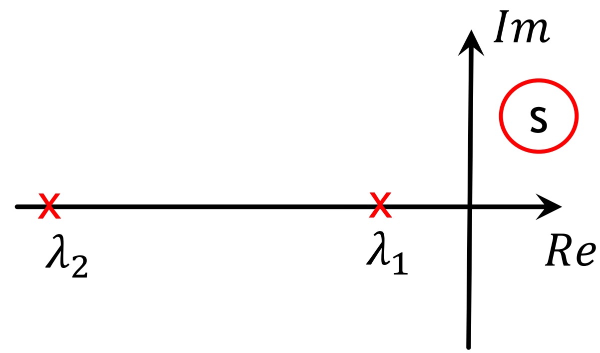




Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Segundo Orden:

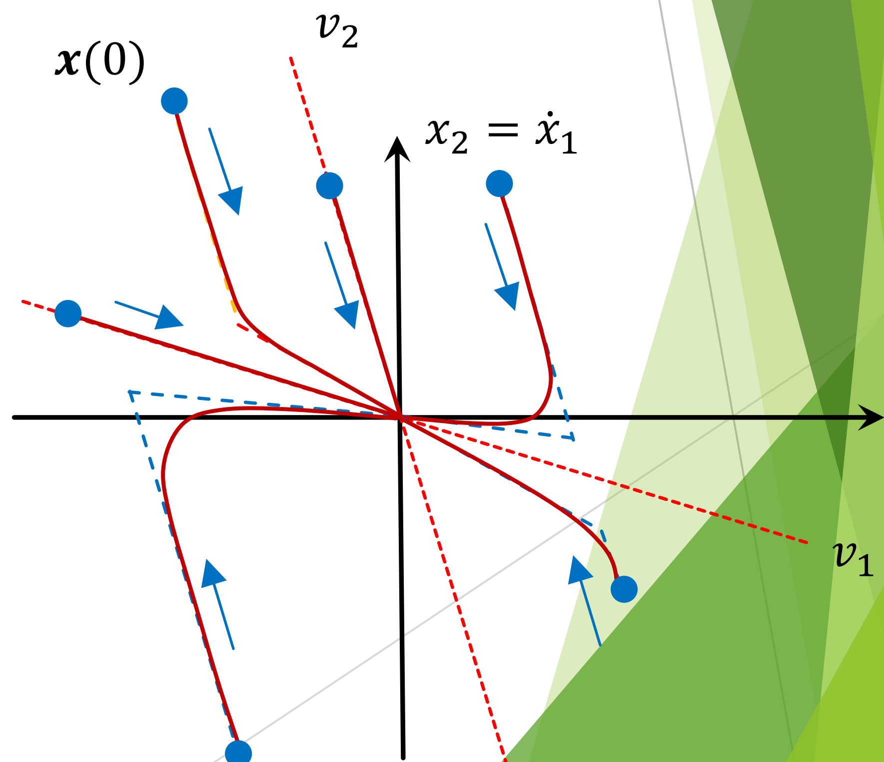
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + \cancelto{0}{bu}$$



$$|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$$

$$x_1 = \boxed{C_{11}e^{\lambda_1 t}} + \boxed{C_{12}e^{\lambda_2 t}}$$

$$x_2 = \boxed{C_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t}} + \boxed{C_{12}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}$$



Dada la diferencia numérica entre autovalores, al comienzo, la evolución estará dominada por los términos 'rápidos' es decir:

$$\Delta x_2/\Delta x_1 = C_{12}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}/C_{12}e^{\lambda_2 t} = \lambda_2$$

Luego, extinguidos los términos rápidos, el sistema evolucionará de acuerdo a:

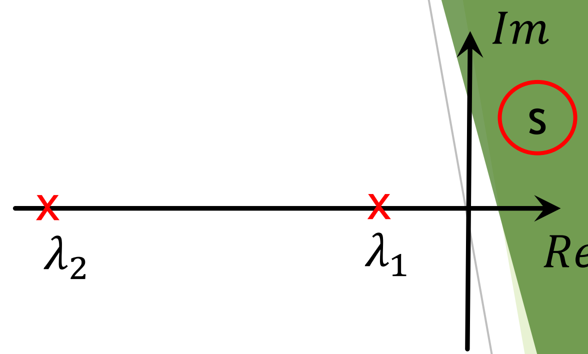
$$\Delta x_2/\Delta x_1 = C_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t}/C_{11}e^{\lambda_1 t} = \lambda_1$$

Variables de Fase (F.C. Controlable)

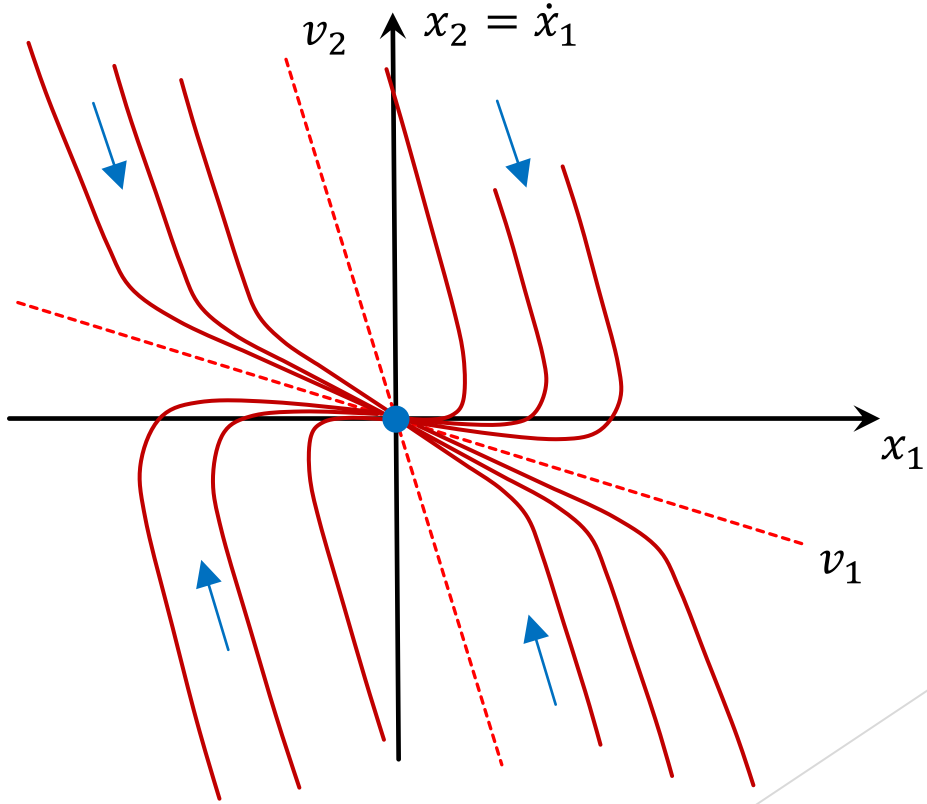
Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \cancelto{0}{bu}$$

$$|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$$



Nodo Estable

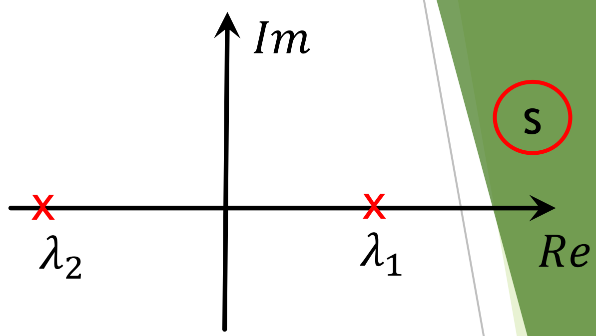


Variables de Fase (F.C. Controlable)

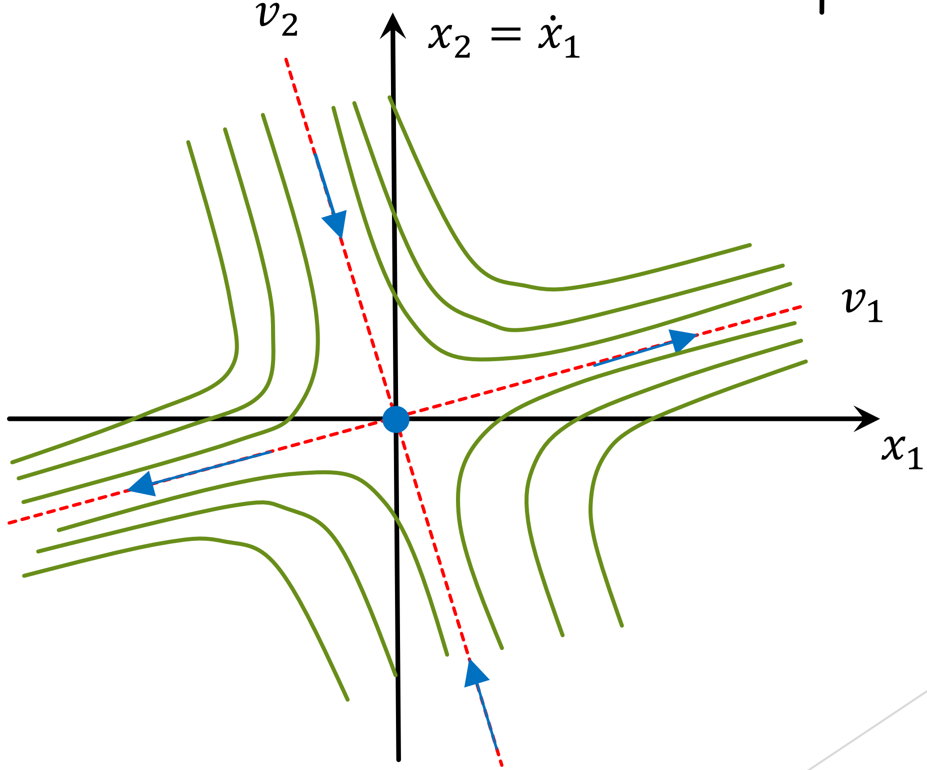
Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \cancel{bu}\ 0$$

$$\lambda_1 > 0$$



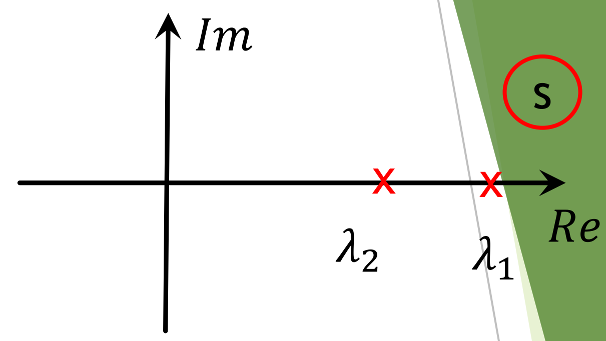
Silla de Montar



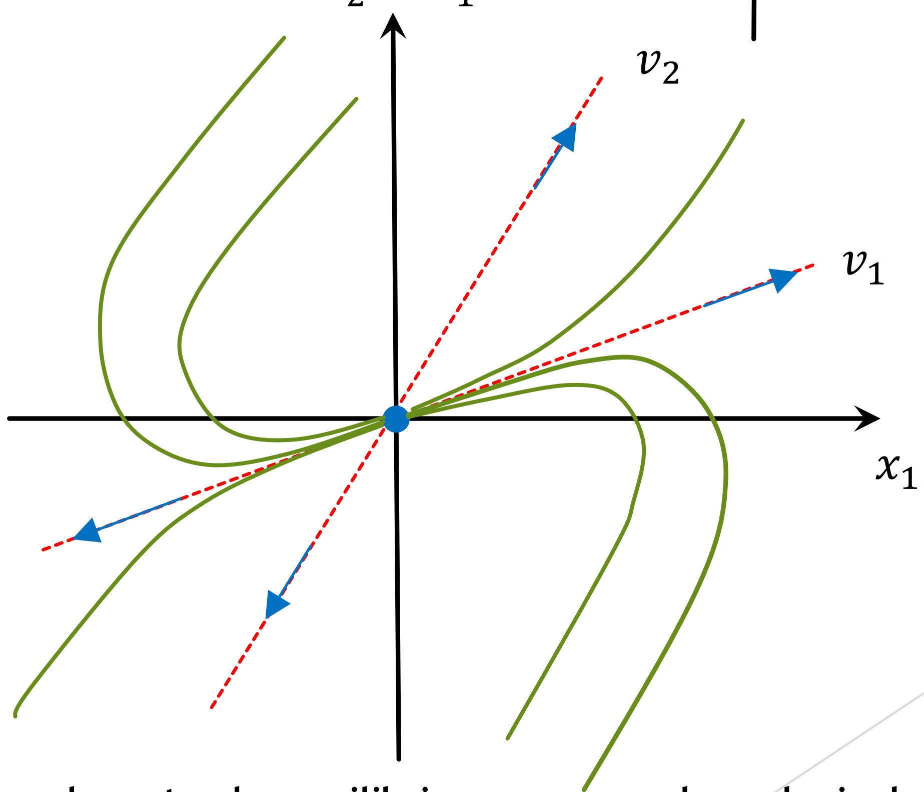
Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + \cancelto{0}{bu}$$



Nodo Inestable



En todos los casos vistos el punto de equilibrio se corre sobre el eje horizontal cuando la u es constante diferente de cero

Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 + \cancelto{0}{bu}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\omega_0^2 x_1}{x_2}$$

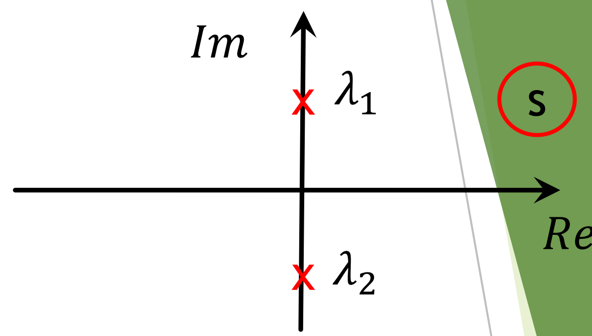
$$x_2 dx_2 = -\omega_0^2 x_1 \; dx_1$$

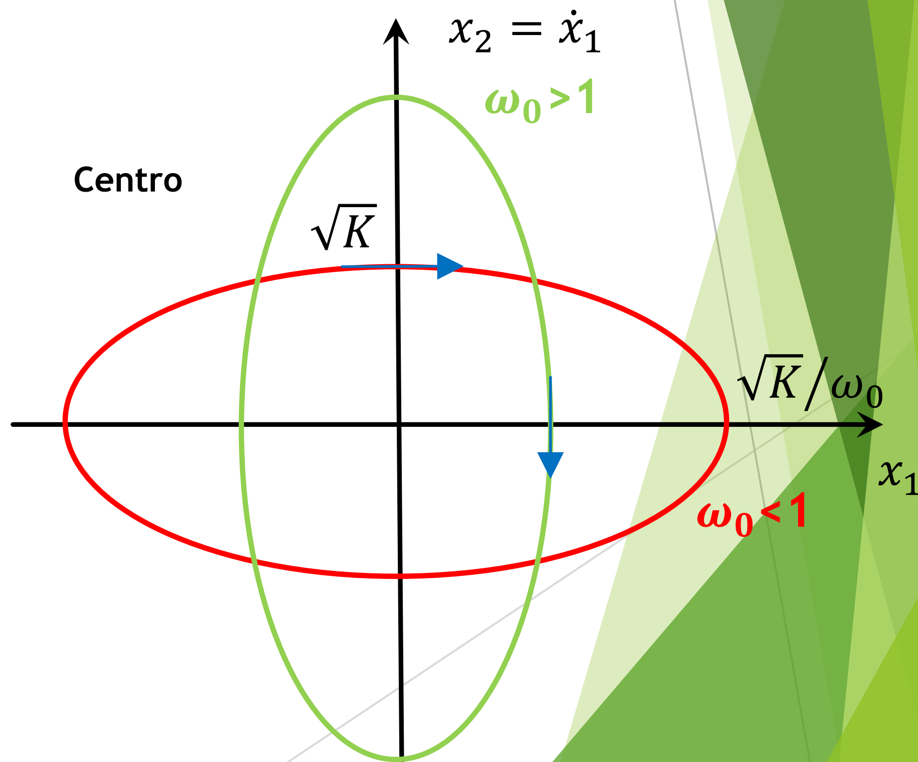
$$\int_{x_2(0)}^{x_2(t)} x_2 dx_2 = \int_{x_1(0)}^{x_1(t)} -\omega_0^2 x_1 \; dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2(0)^2}{2} = -\omega_0^2 \frac{x_1^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x_1(0)^2}{2}$$

$$x_2^2 + \omega_0^2 x_1^2 = K$$

$$K = \omega_0^2 x_1(0)^2 + x_2(0)^2$$

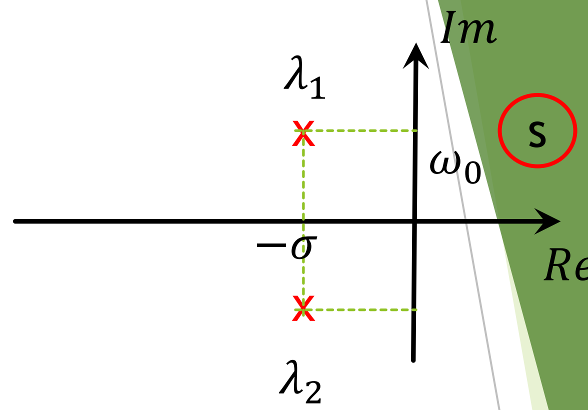


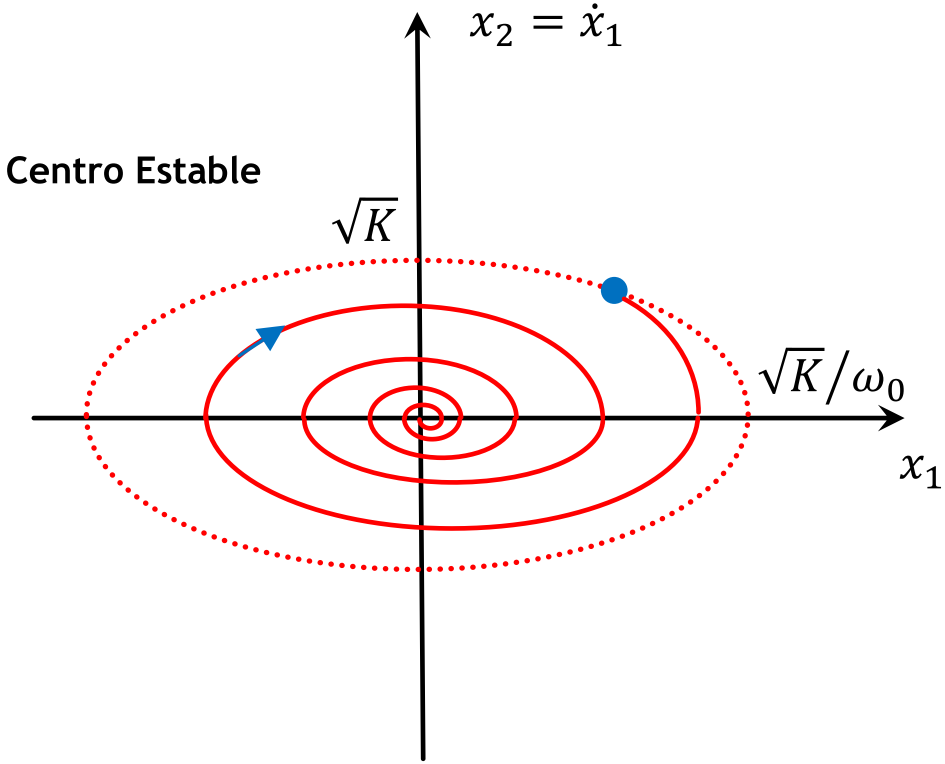


Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(\omega_0^2 + \sigma^2)x_1 - 2\sigma x_2 + \cancelto{0}{bu}$$

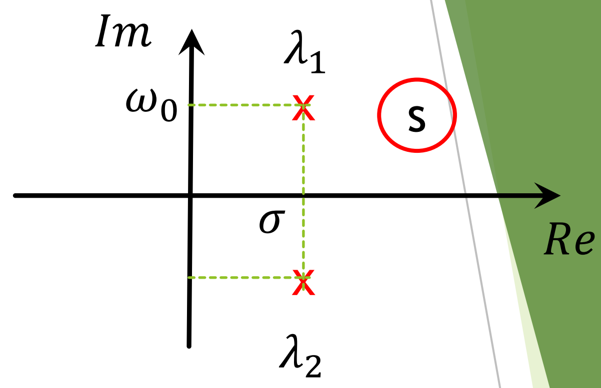


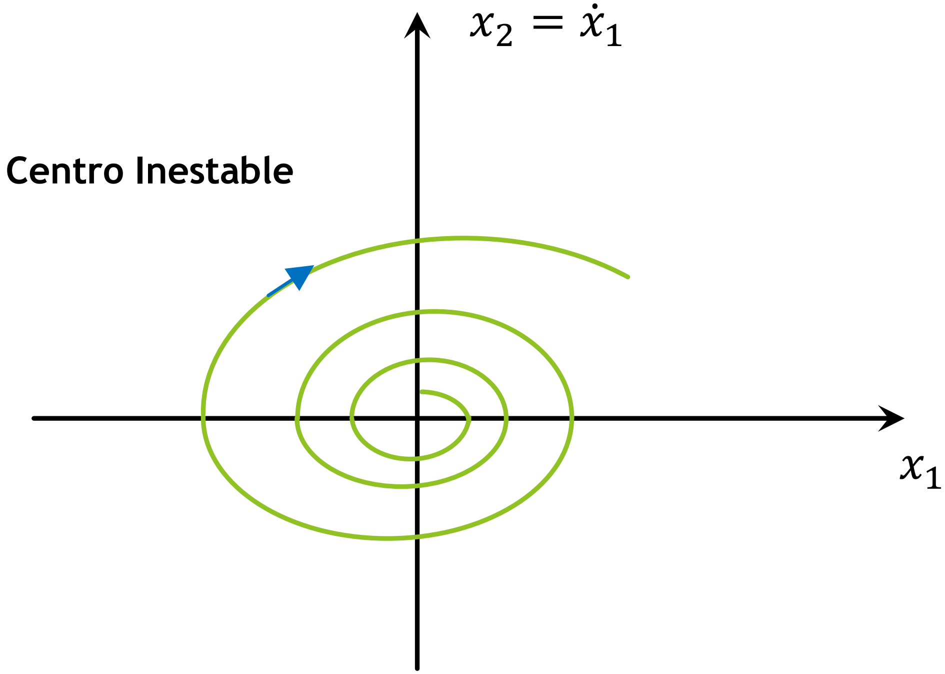


Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Segundo Orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(\omega_0^2 + \sigma^2)x_1 - 2\sigma x_2 + \cancelto{0}{bu}$$



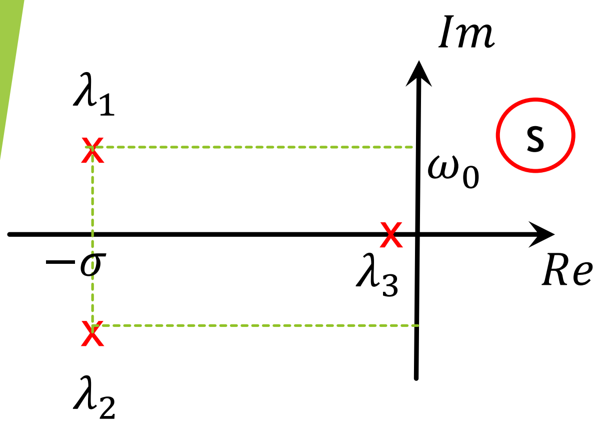


Nuevamente, el punto de equilibrio se corre sobre el eje horizontal cuando la u es constante diferente de cero

Variables de Fase (F.C. Controlable)

Sistemas de Tercer Orden:

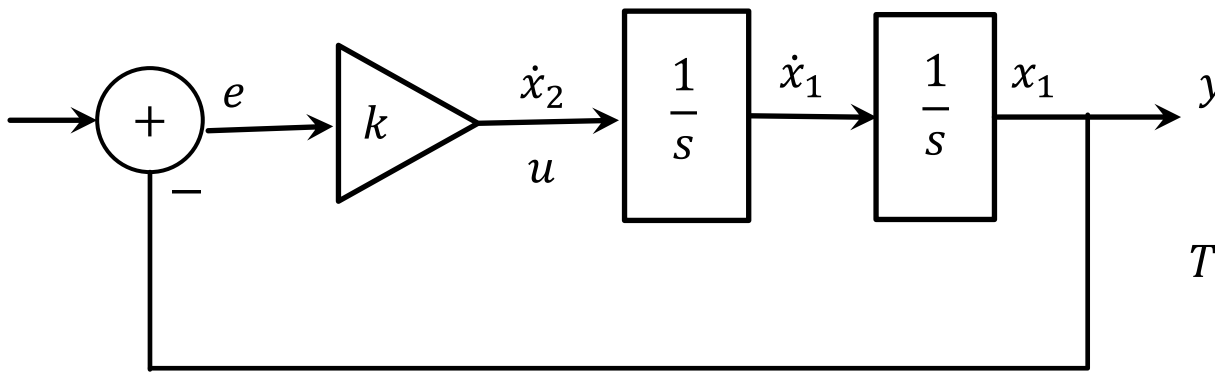
Cuando existen tres estados se obtendrán tres autovalores con sus autovectores en el espacio de fase. De acuerdo a las características de los autovalores habrá que componer la trayectoria de fase en base a los casos de dos dimensiones vistos recientemente.



$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + bu$$

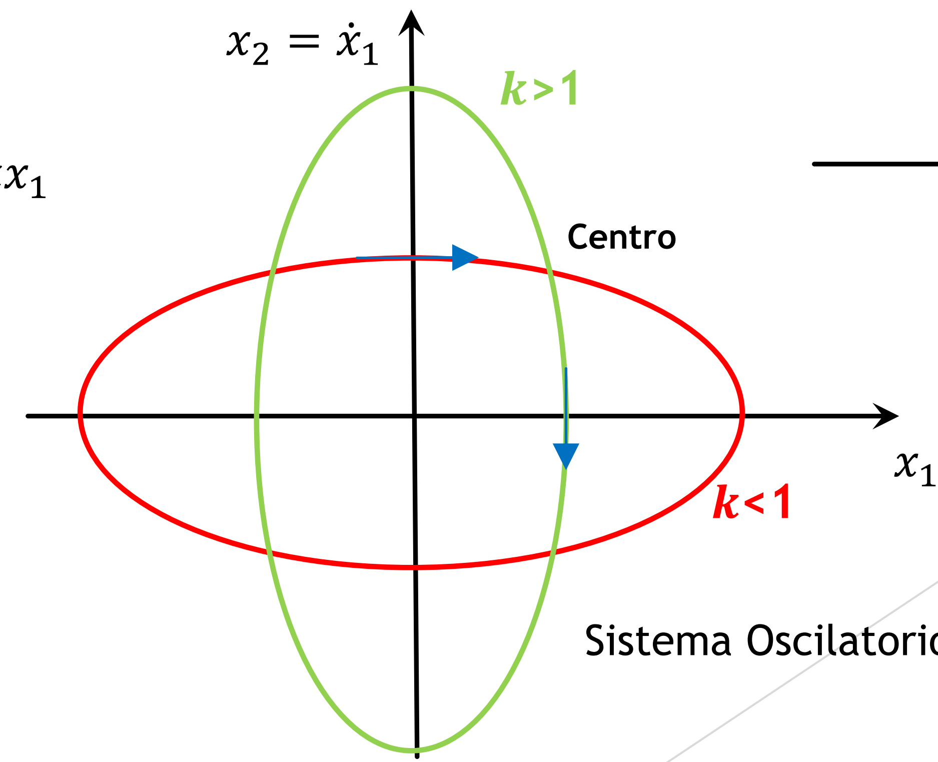
En el caso planteado la trayectoria evolucionará inicialmente sobre un plano v_1-v_2 (autovectores correspondientes a los autovalores complejos) manteniendo una coordenada sobre la dirección v_3 prácticamente constante y describiendo la curva característica de un foco estable. En realidad la coordenada sobre la dirección v_3 evoluciona lentamente hacia el origen (autovalor real negativo pequeño) de manera que por la diferencia de magnitud entre las partes reales de los autovalores, se producirá inicialmente la evolución oscilatoria sobre las direcciones v_1-v_2 avanzando muy poco sobre la dirección v_3 y, una vez que ésta prácticamente converge al eje v_3 , avanza sobre el mismo hacia el origen.

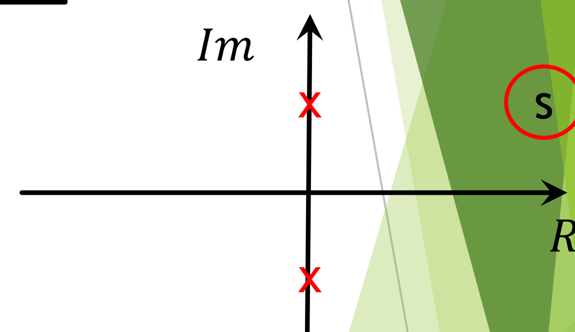
Introducción al Control por Estructura Variable



$$T(s) = \frac{k}{s^2 + k}$$

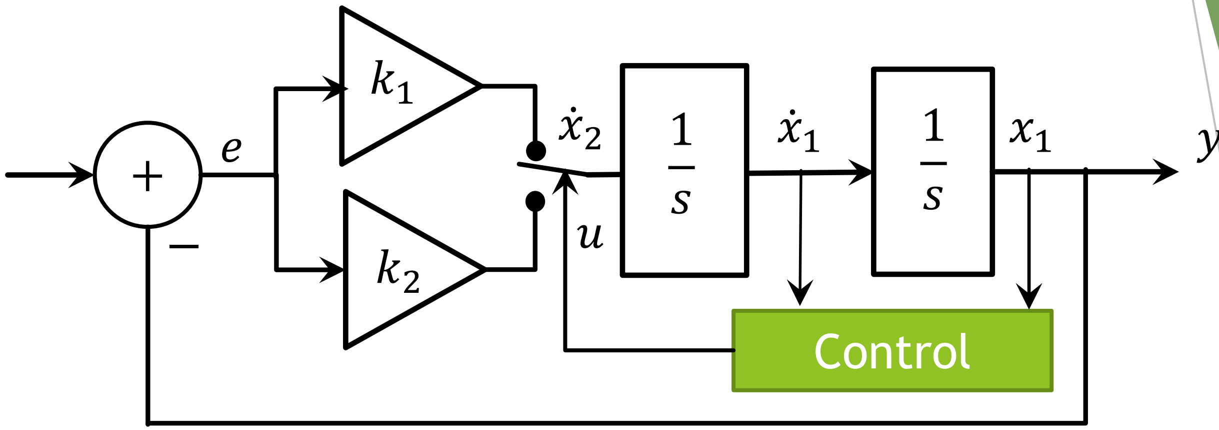
$r = 0$
$e = -x_1$
$u = -ke = -kx_1$





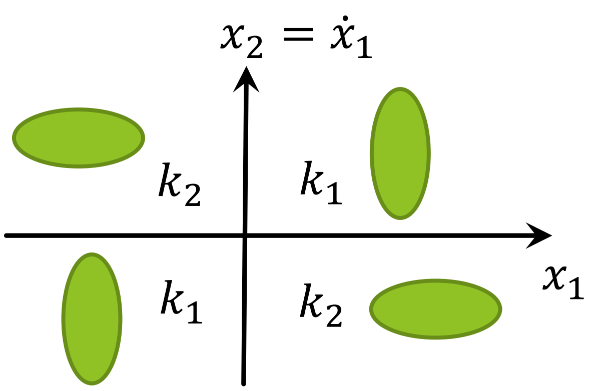
Sistema Oscilatorio para cualquier valor de k

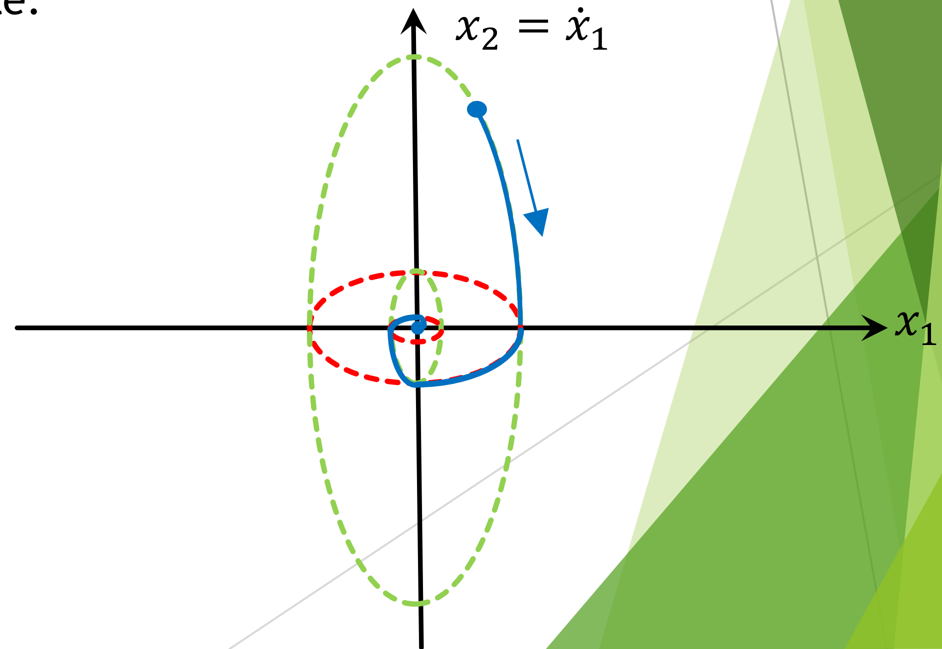
Introducción al Control por Estructura Variable



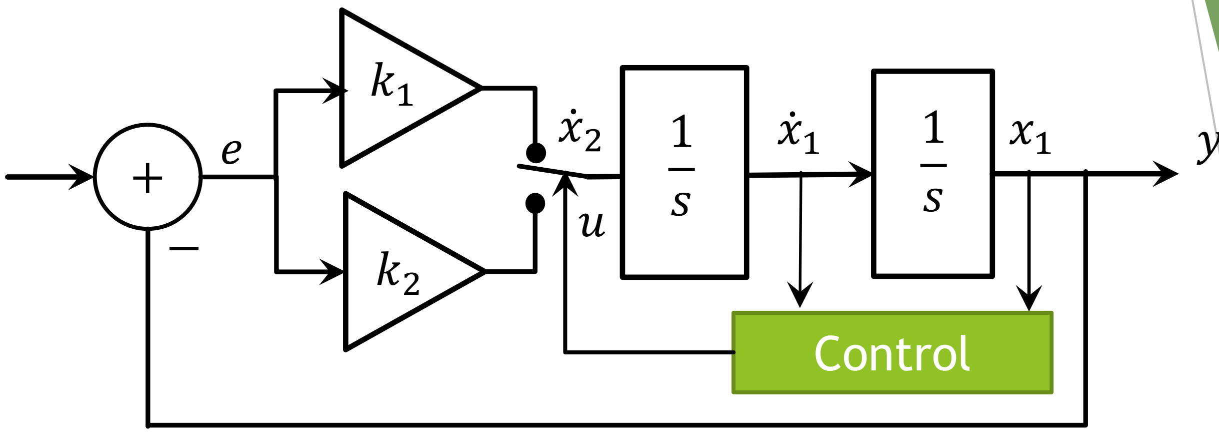
$r = 0$
$e = -x_1$
$u = -k_i e = -k_i x_1$

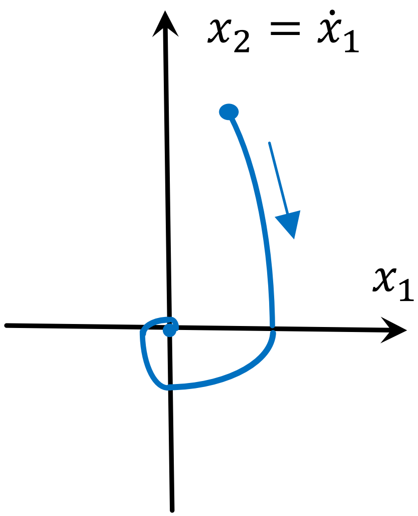
Elegimos un k_1 mayor que uno y un k_2 menor que uno de manera de poder conmutar entre los dos comportamientos vistos anteriormente.

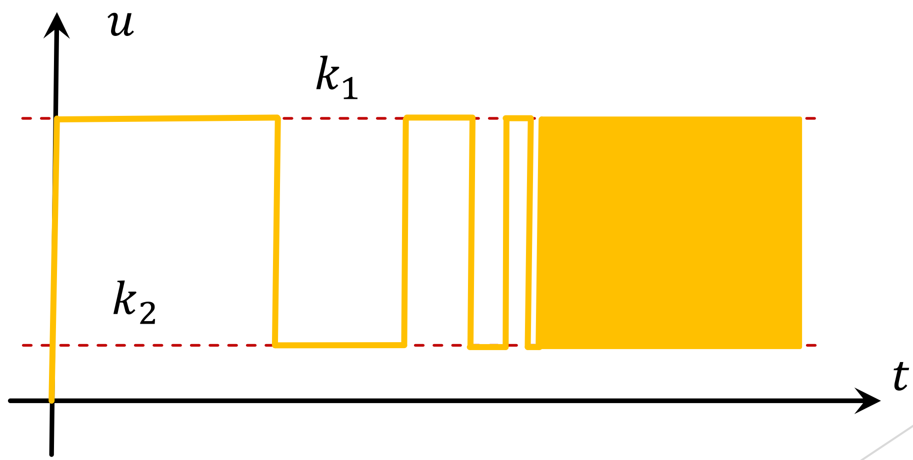




Introducción al Control por Estructura Variable





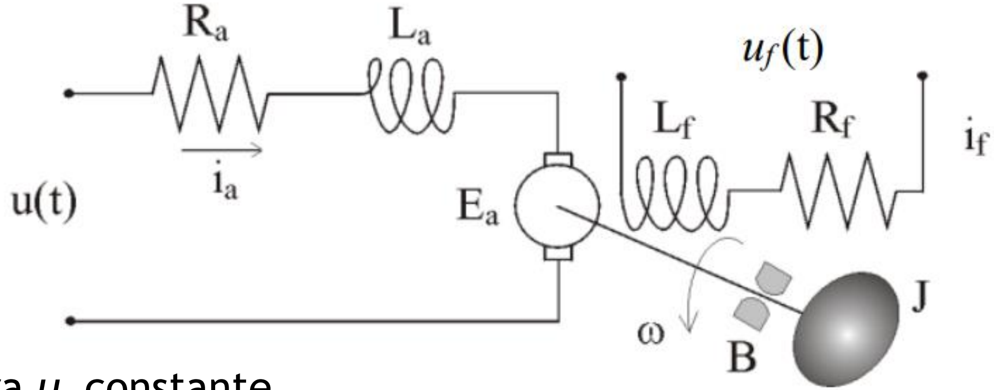


A partir de la estrategia de conmutación de la realimentación logramos transformar un sistema oscilatorio en otro que converge ‘rápidamente’ al equilibrio. ¿Qué pasaría si invirtiéramos la lógica de conmutación?

Introducción al Control por Estructura Variable

Motor de C.C

Introducción al Control por Estructura Variable



Para u_f constante

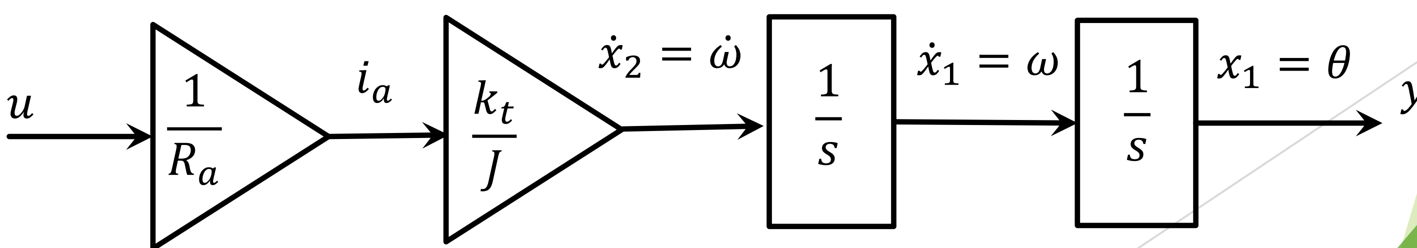
$$i_a = \frac{1}{L_a}(-R_a i_a - k_e\omega + u)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(k_t i_a - B\omega)$$

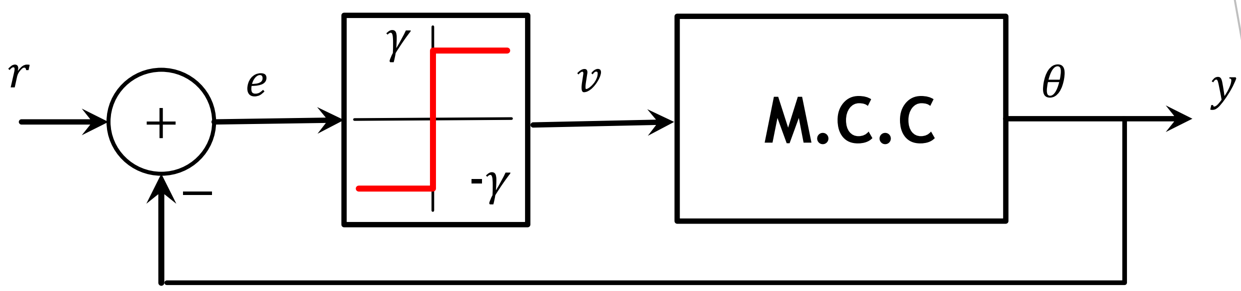
$$\Rightarrow \quad T(s) = \frac{\omega}{u} = \frac{k_t}{(sJ+B)(sL_a+R_a) + \cancel{k_t k_e}}$$

Despreciando la dinámica eléctrica y haciendo *B*=0

$$T(s) = \frac{\omega}{u} = \frac{k_t}{R_a J s} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{k_t u}{J R_a}$$



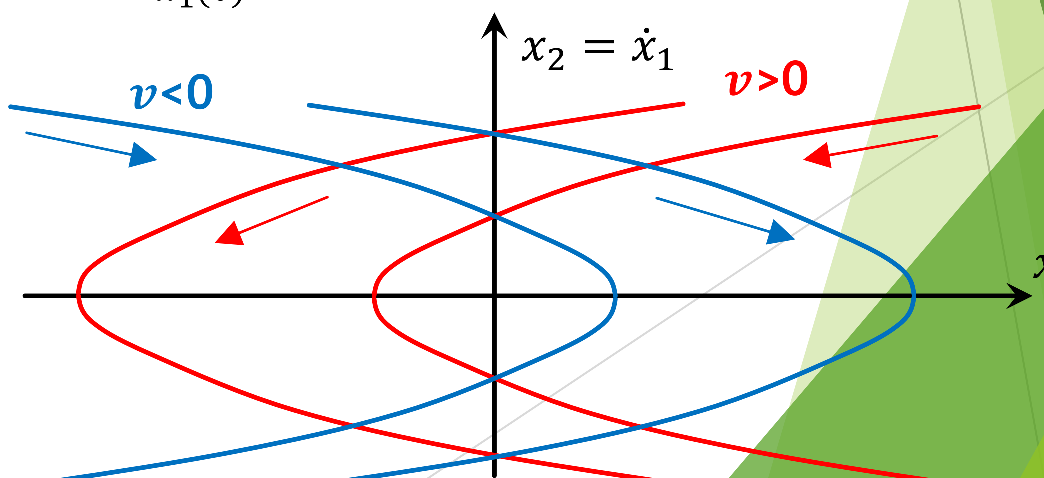
Introducción al Control por Estructura Variable



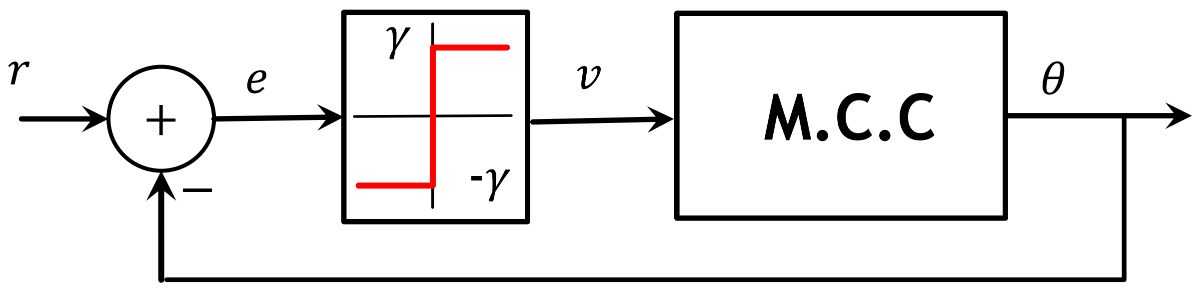
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{k_t}{JR_a}u = v = \begin{cases} \gamma & x_1 > r \\ -\gamma & x_1 < r \end{cases}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{v}{x_2} \Rightarrow \int_{x_2(0)}^{x_2} x_2\, dx_2 = v \int_{x_1(0)}^{x_1} dx_1 \Rightarrow \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2(0)^2}{2} = vx_1 - vx_1(0)$$

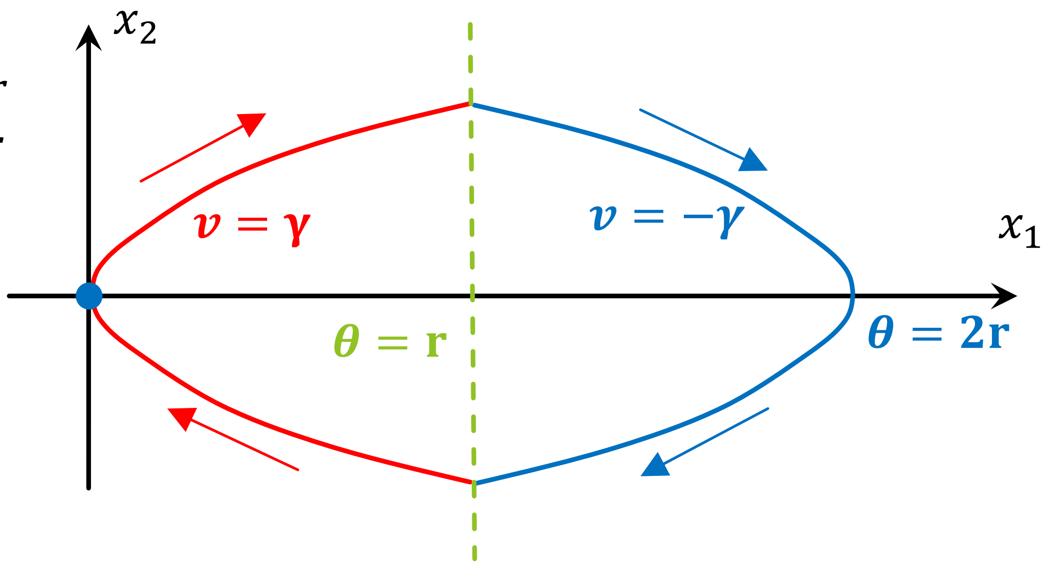
$$x_1 = x_1(0) - \frac{x_2(0)^2}{2v} + \frac{x_2^2}{2v}$$



Introducción al Control por Estructura Variable

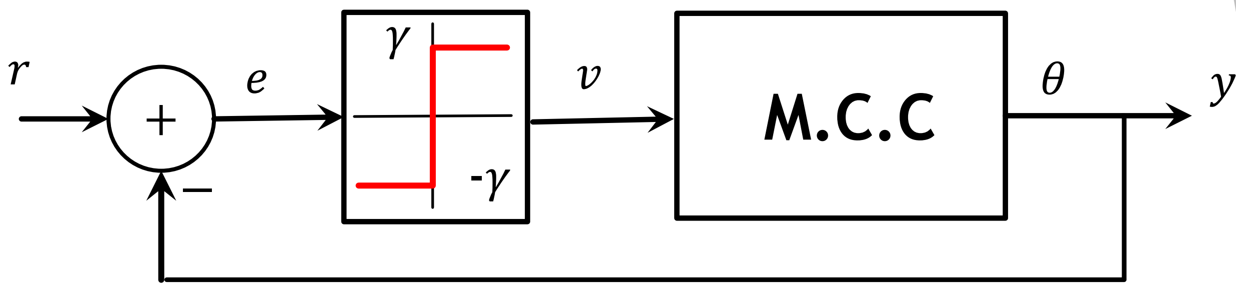


$$v = \begin{cases} \gamma & x_1 > r \\ -\gamma & x_1 < r \end{cases}$$

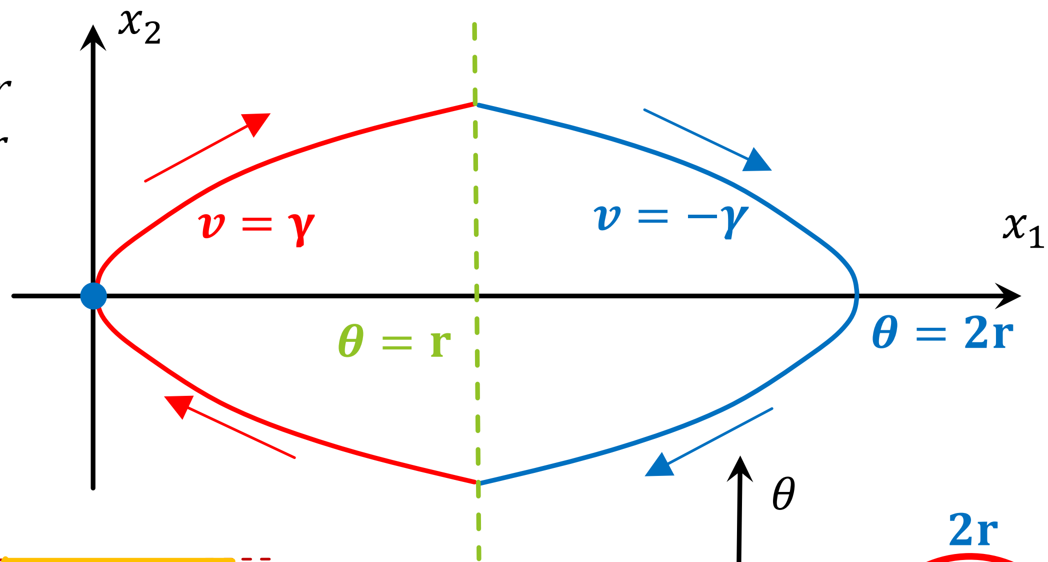


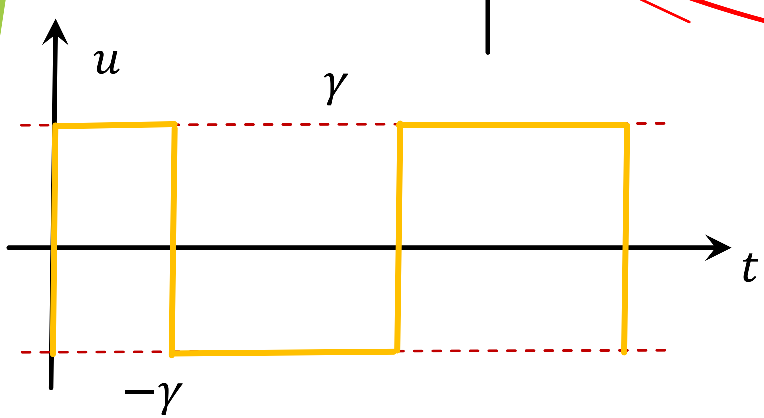
El brazo se pasa de la posición de referencia hasta duplicarla y luego regresa a su posición original. Nunca puede descargar.

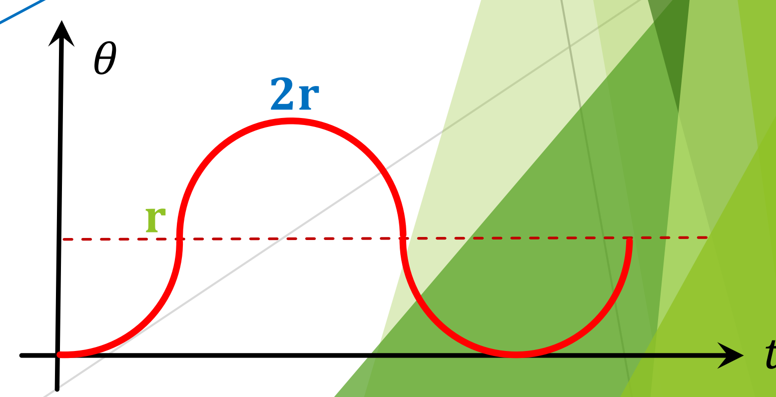
Introducción al Control por Estructura Variable



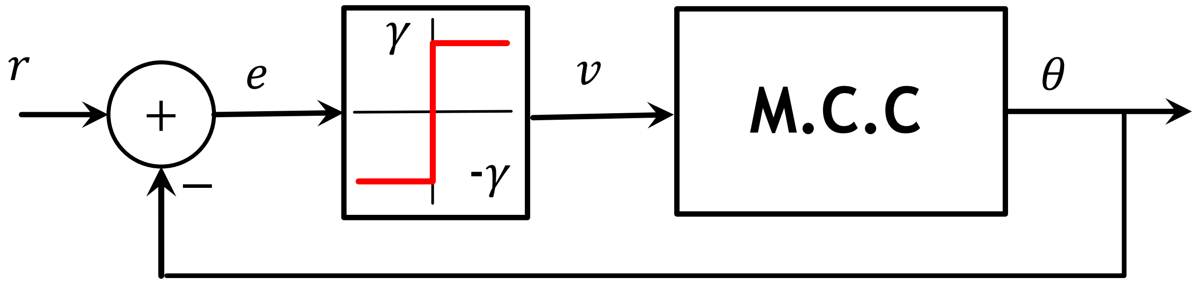
$$v = \begin{cases} \gamma & x_1 > r \\ -\gamma & x_1 < r \end{cases}$$

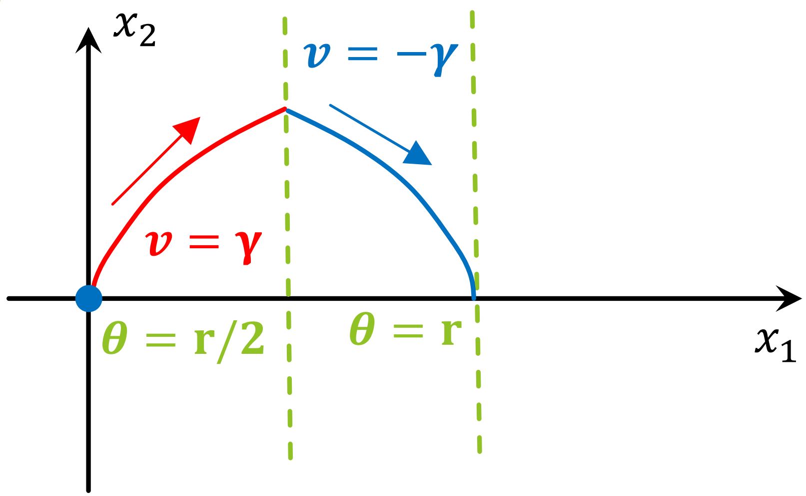




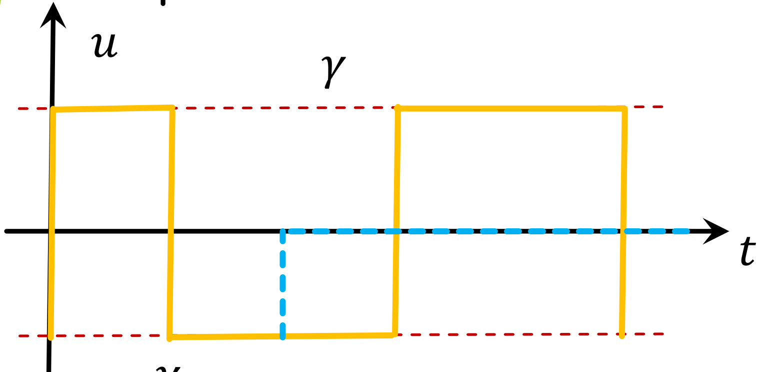


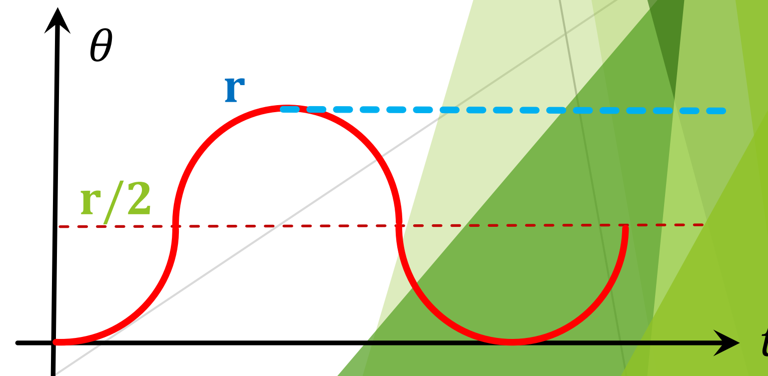
Introducción al Control por Estructura Variable



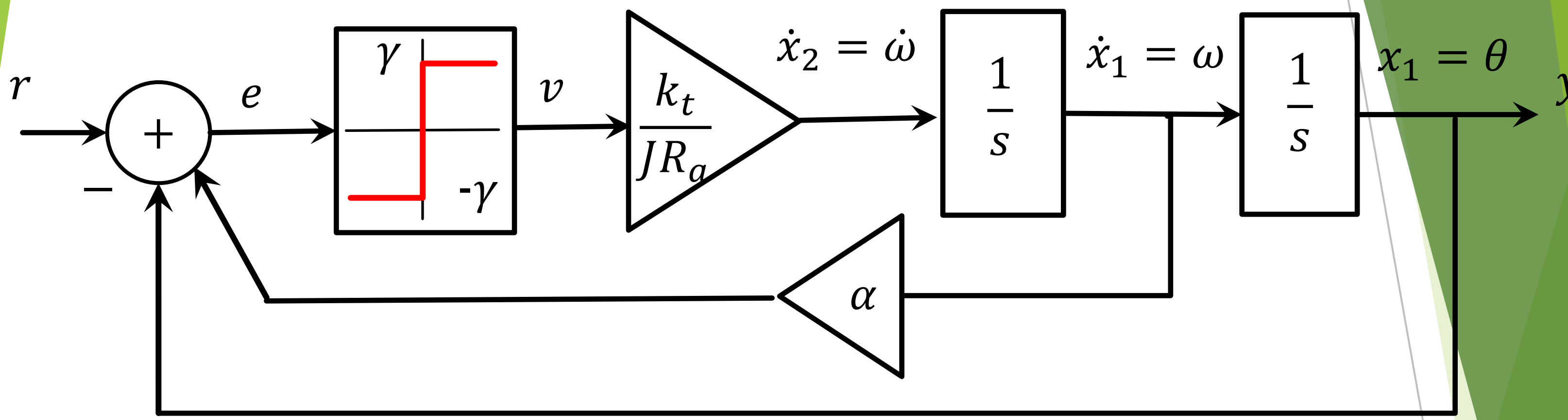


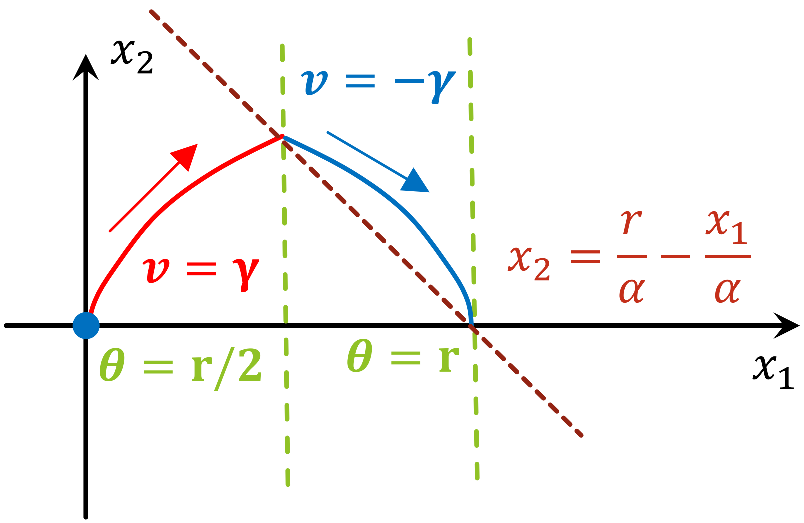
Esta estrategia podría funcionar y sería óptima en sentido de tiempo. Sin embargo debería ser muy precisa para dar buenos resultados y además habría que cortar la aplicación del control justo cuando se llega a la posición deseada. Caso contrario volveríamos a la situación anterior pero con amplitud r





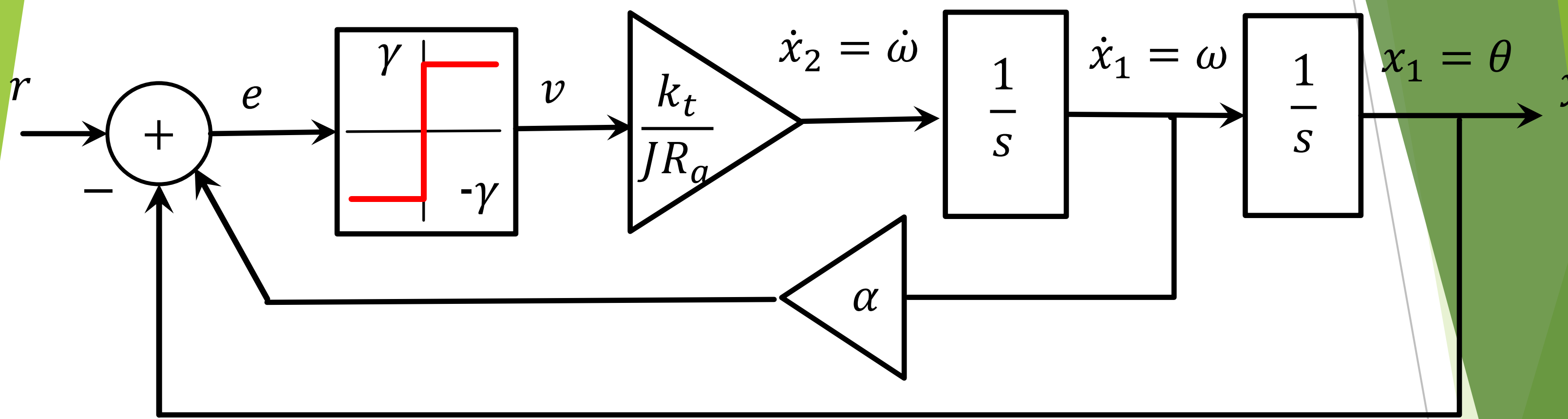
Introducción al Control por Estructura Variable

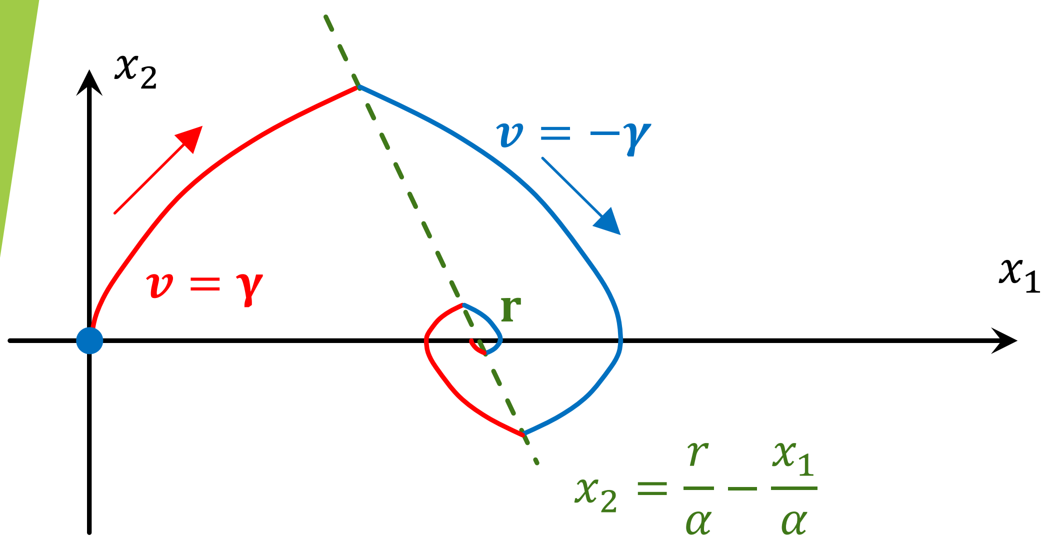




Esta alternativa consiste en elegir una recta de conmutación de pendiente -1/α y que pase por el punto deseado. Habrá que elegir un valor de α adecuado para asegurar la convergencia. Esta estrategia sería óptima en el sentido temporal y no necesita cortar la aplicación del control.

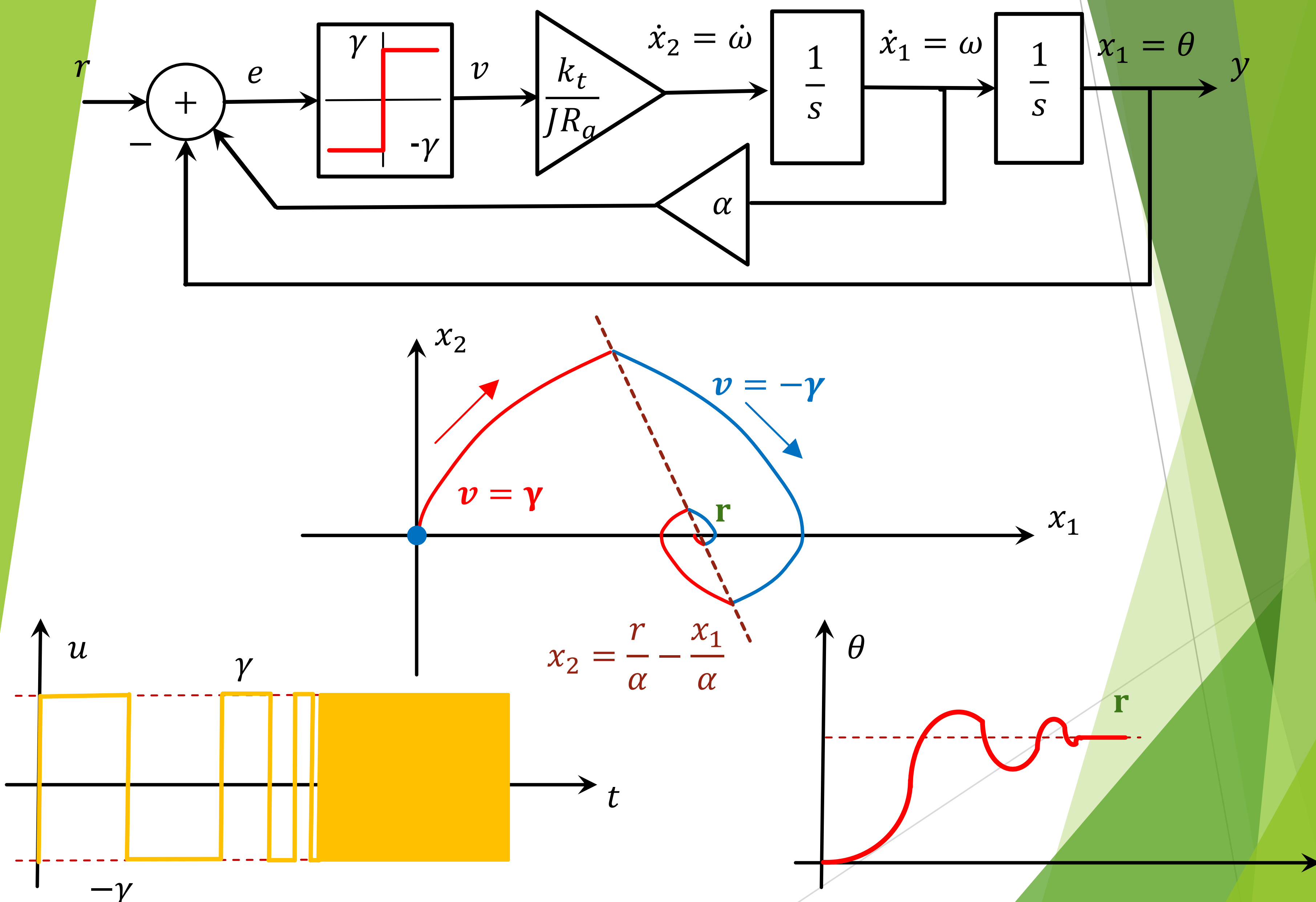
Introducción al Control por Estructura Variable



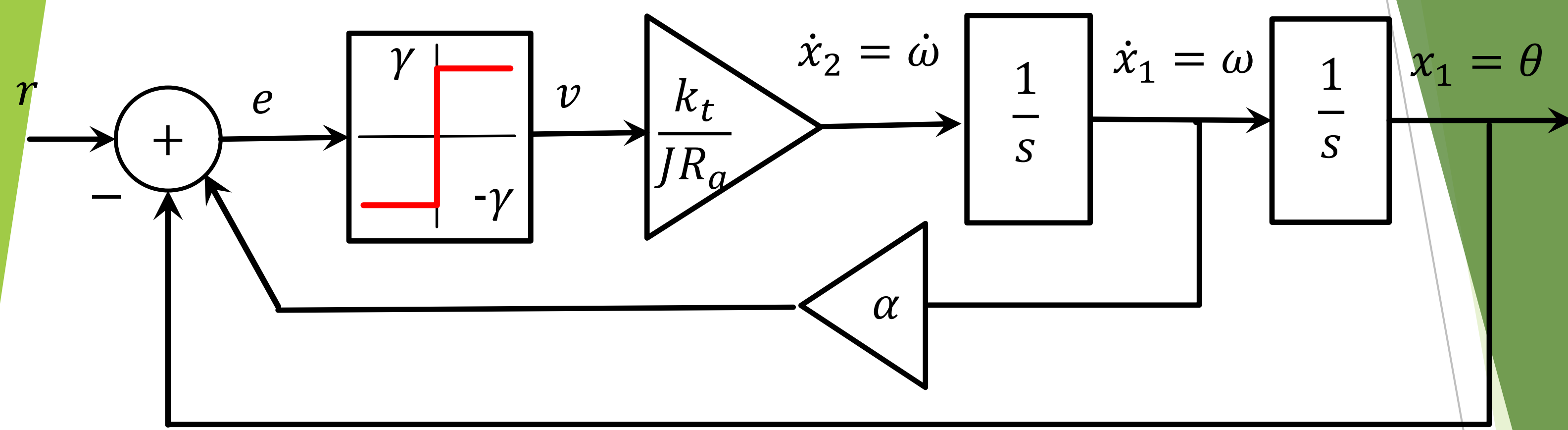


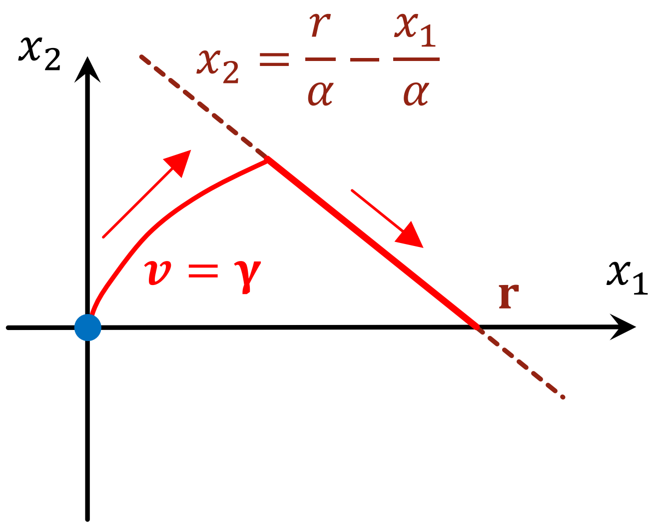
Si elegimos una pendiente mayor que la anterior el sistema converge al punto deseado en forma estable. Una vez en este punto la señal de control permanecerá conmutando entre sus valores límite tan rápido como pueda. Esta conmutación puede ser perjudicial para el motor y en caso de que no sea muy rápida producirá un temblor en torno a la posición deseada.

Introducción al Control por Estructura Variable



Introducción al Control por Estructura Variable





Si elegimos una pendiente suficientemente menor, una vez que la trayectoria interseca la recta de conmutación (modo alcance), el control comienza a conmutar entre sus límites a la mayor frecuencia posible. Si se supone que esta frecuencia es infinita la trayectoria del sistema se 'deslizará' sobre la recta de conmutación (modo deslizante) hasta llegar al punto deseado y quedarse sobre el mismo sin necesidad de 'apagar' el control.

Debe observarse que cuando esta última fase tiene lugar, el sistema dinámico reduce su orden dinámico en uno ya que existe una dependencia lineal entre las variables de estado.

Cuando la frecuencia de conmutación no es infinita aparecerá una 'rugosidad' en torno a la recta de conmutación ('superficie de deslizamiento') denominada 'chattering'. En algunos casos este fenómeno puede ser perjudicial para la planta o para los actuadores.

Introducción al Control por Estructura Variable