Control Automático II - Ing. Electrónica

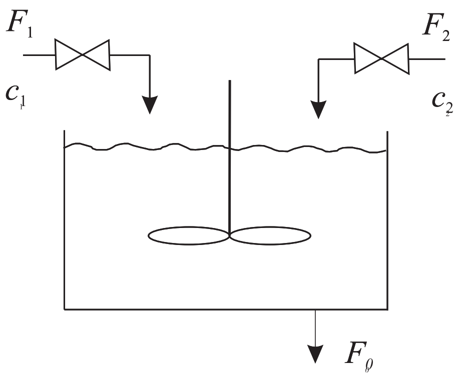
Trabajo práctico 7: Introducción al Control Óptimo

Ejercicio 1: Considere, nuevamente, el ejercicio 5 de la práctica de realimentación de estados (control del ángulo de pitch de una aeronave). Habrá notado, en el enunciado de dicho problema, una cierta arbitrariedad en la elección de los polos de lazo cerrado. Repita el diseño con otra asignación de polos: $p_1 = -0,3 - 0,3j$, $p_2 = -0{,}3 + 0{,}3i$ y $p_3 = -3$. Probablemente, esta elección le resulte más razonable o intuitiva, ya que asegura un par de polos dominantes con un coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0,7$. Simule la respuesta ante el mismo cambio de referencia solicitado en la práctica 5. ¿La simulación da lo esperado?. ¿A qué lo atribuye?.

Ejercicio 2: La figura representa un sistema (reactor) en el cual se quieren controlar dos variables: la concentración de una mezcla, y el flujo de salida F_0. Con esta finalidad se dispone de dos acciones de control, el flujo F_1 (con concentración c_1) y el flujo F_2 (con concentración c_2). El sistema puede ser modelado, en el entorno del punto de operación, con:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0 \\ 0 & -0{,}02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

donde $x^T = [\Delta volumen \;\; \Delta concentración]$, y $u^T = [\Delta F_1 \;\; \Delta F_2]$.



Verifique la ubicación de los autovalores de lazo cerrado cuando los estados son realimentados con los siguientes juegos de ganancias:

a. $K_a = \begin{bmatrix} 1{,}1 & 3{,}7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b. $K_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}1 & -1{,}233 \end{bmatrix}$,

c. $K_c = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$.

Simule las respuestas de lazo cerrado ante las condiciones iniciales $x(0)^T = [1\ 0]$ y $x(0)^T = [0\ 1]$. ¿A qué atribuye las distintas respuestas?

Ejercicio 3: ¿Cuáles de las siguientes expresiones podrían ser empleadas como índices de performance en un problema de optimización?

a. $\displaystyle\int_0^{t_f} \left(x^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + u^T u \right) dt,$

b. $\displaystyle\int_0^{t_f} u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \; dt,$

c. $\displaystyle\int_0^{t_f} x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \; dt,$

d. $\displaystyle x^T x + \int_0^{t_f} u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \; dt$

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(x^2(k) + u(k) \right) + x^T(N)\, x(N)$

Ejercicio 4: ¿Qué efectos pueden esperarse cuando se emplean distintos índices de performance para optimizar el comportamiento de un mismo sistema?. Analice comparativamente los siguientes casos:

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^2(t) \; dt,$

b. $\displaystyle\int_0^{\infty} |e(t)| \; dt,$

c. $\displaystyle\int_0^{\infty} t\, e^2(t) \; dt,$

d. $\displaystyle\int_0^{\infty} t\, |e(t)| \; dt,$

Ejercicio 5: Considere el sistema discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k). \end{aligned}$$

Obtenga una estrategia de control óptima que minimice el índice de performance:

$$J = x_1^2(3) + x_2^2(3) + \sum_{k=0}^{2} \left(x_1^2(k) + 2x_2^2(k) + u^2(k) \right).$$

Ejercicio 6: Considere el sistema descripto por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + u(t).$$

Obtenga la ley de control que minimiza el siguiente índice de performance:

$$J = \int_0^{t_f} \left(3x^2(t) + 0{,}25u^2(t) \right) dt.$$

Ejercicio 7: Obtenga la ley de control que minimiza el siguiente índice de performance:

$$J = \int_0^{\infty} \left(x_1^2(t) + u^2(t) \right) \, dt,$$

para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Simule la respuesta.

Ejercicio 8: Considere el modelo de estados de un control de posición (con motor DC y control por par):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \alpha &= B/J = 4{,}6 \ s^{-1}, \\ \kappa &= k/J = 0{,}787 \ r/(V \cdot s^2), \\ J &= 10 \ kg \cdot m^2. \end{aligned}$$

a. Obtenga la ley de control que minimiza el índice de performance:

$$J = \int_0^{\infty} \left(x_1^T x_1 + \rho u^2 \right) \, dt$$

con $\rho = 2 \cdot 10^{-5} \ rad^2/V^2$.

b. Evalúe la influencia de distintos valores de ρ sobre la ubicación de los polos de lazo cerrado.

Ejercicio 9: Considere nuevamente el reactor del ejercicio 2. Obtenga la ley de control que minimiza el índice de performance:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix} x + u^T \rho \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} u) \, dt$$

para distintos valores de ρ $(= 0{,}1; 1; 10; \infty)$ y obtenga por simulación las evoluciones de los estados y de las acciones de control a las siguientes condiciones iniciales $x(0) = [0{,}1 \quad 0]$ y $x(0) = [0 \quad 0{,}1]$. Compare las mismas.

Ejercicio 10: Considere nuevamente el modelo del ejercicio 1, pero en un contexto diferente. Suponga que la aeronave vuela a velocidad y altura constante, es decir $(\theta - \alpha) \to 0$. Se quiere diseñar un control que asegure que ante la presencia de una turbulencia que saque a la aeronave de esta condición le permita recuperarla en forma suave, evitando incomodidades en los pasajeros. A tal efecto se propone obtener un control óptimo que minimice:

$$J = \int_0^{\infty} (\rho \, (\theta - \alpha)^2 + R\delta^2) \, dt.$$

Note que

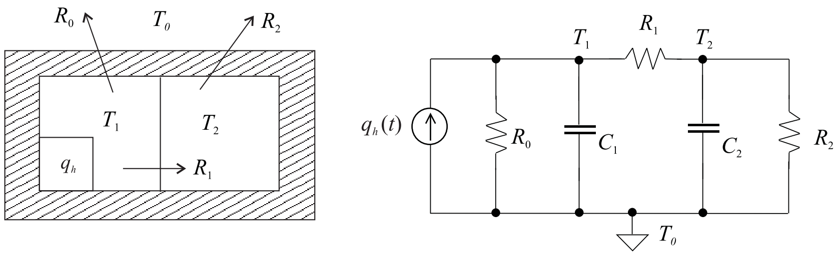
$$Q = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Considere los siguientes valores para la relación ρ/R:0,1; 1; 3; 10. Simule el comportamiento dinámico.

b. Si $|\delta|$ debe ser inferior a 10, seleccione la relación ρ/R que permite la mayor velocidad de respuesta.

Nota: Cuando diseñe el control, piense en que Ud. va a viajar en el avión.

Ejercicio 11: Una construcción está dividida en dos zonas, como se muestra en la figura 1a (en la parte b de la figura se representa una red eléctrica análoga).



Sea T_0 es la temperatura ambiente y T_1 y T_2 son las temperaturas de cada zona. Las ecuaciones del flujo de calor pueden escribirse como

$$\begin{aligned} C_1\dot{T}_1 &= q_h - (T_1 - T_0)/R_0 - (T_1 - T_2)/R_1, \\ C_2\dot{T}_2 &= (T_1 - T_2)/R_1 - (T_1 - T_2)/R_1. \end{aligned}$$

donde C_i y R_i son las capacitancias y resistencias térmicas de la zona i, y q_h representa el calor del calefactor ubicado en la zona 1.

Sean los estados x_1 y x_2, las temperaturas incrementales de las zonas 1 y 2 sobre la temperatura ambiente. Las ecuaciones de estado se convierten en

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_0 + R_1}{C_1R_0R_1} & \dfrac{1}{C_1R_1} \\ \dfrac{1}{C_2R_1} & -\dfrac{R_2 + R_1}{C_2R_2R_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Diseñe un controlador LQ con ganancias constantes que minimicen

$$J = \int_0^\infty ((x - \eta)^T Q(x - \eta) + Ru^2)dt,$$

donde $\eta = [1 \quad 1]^T$ es el vector de temperaturas deseadas por encima de la temperatura ambiente, es decir, los puntos de establecimiento (set points). Por simplicidad se considera un modelo a escala con $C_1 = C_2 = 1$, $R_0 = 10$, $R_1 = 1$, y $R_2 = 2$. Considere $R = 1$ y $Q = \alpha.I$ para cuatro valores de α : 0,1; 1; 10 y 100. Simule la respuesta del sistema. Considere también, distintos pesos para los componentes de $(x - \eta)^T$ para mejorar la respuesta dinámica del conjunto.