Control Automático II - Ing. Electrónica
Ejercicio Resuelto 2: Transformaciones

1. Introducción

Las transformaciones nos ayudan a percibir un problema de otra forma, sin que ello implique en absoluto una modificación en las características del mismo. Si a un sistema se le aplica una transformación lineal, éste conservará todas sus cualidades, como son: los autovalores, observabilidad, controlabilidad, etc. El cambio de base del sistema de coordenadas de referencia que implica una transformación es equivalente a una multiplicación de matrices: $x = Pz$, donde existe una matriz que relaciona ambas bases entre sí. Esta matriz P es de suma importancia ya que es la que nos permitirá pasar de un sistema a otro para poder aprovechar las ventajas de cálculo y retornar al sistema original con los resultados finales. Veamos que sucede con un modelo de estados al aplicar una transformación lineal $x = Pz$, donde x es el vector de estados original y z el vector transformado. Sea el modelo de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \tag{1}$$

Si aplicamos la trasformación $x = Pz$ y reemplazamos en (1), obtendremos

$$P\dot{z} = APz + Bu, \quad y = CPz. \tag{2}$$

Premultiplicando por P^{-1}

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu, \quad y = CPz \tag{3}$$

y reordenando, obtendremos un nuevo modelo de estados

$$\dot{z} = A_z z + B_z u, \quad y = C_z z \tag{4}$$

donde $A_z = P^{-1}AP$, $B_z = P^{-1}B$ y $C_z = CP$.

2. Aplicaciones

Estas transformaciones son útiles para expresar el modelo original en otras variables de estados donde ciertas características propias sean más fácilmente observadas. Tal vez las más utilizadas son aquellas que nos permiten obtener un modelo de estados en forma diagonal (matriz A diagonal), en forma de Jordan o en forma canónica controlable.

2.1. Forma diagonal

Consideremos el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -14 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x. \tag{5}$$

Buscamos un modelo de estados alternativo cuya matriz A sea diagonal. Si el sistema presenta autovalores reales y distintos (es este caso) la nueva matriz A_d será[1]

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

[1] ¿Por qué la matriz A_d tiene esta estructura, con los autovalores en la diagonal?

donde λ_1, λ_2 son los autovalores de A.

Para obtener el modelo diagonal debemos hallar la matriz de transformación P, tal que

$$P^{-1}AP = A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Esta condición puede reescribirse como

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

y, si consideramos P compuesta por dos vectores columna $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, es decir, $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$, entonces

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Luego, para hallar los vectores $\mathbf{v}_i$ debemos resolver dos sistemas de ecuaciones de la forma

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \tag{10}$$

donde $\mathbf{v}_i$ es el autovector asociado al autovector λ_i de la matriz A.

Apliquemos estas ideas al ejemplo. Primero debemos encontrar los autovalores del sistema, esto es, debemos resolver

$$\begin{aligned} |\lambda I_{2\times 2} - A| &= 0, \\ \begin{vmatrix} (\lambda+14) & 4 \\ -4 & (\lambda+4) \end{vmatrix} &= \lambda^2 + 18\lambda + 72 = 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = -12$.

Una vez hallados los autovalores, debemos plantear la ecuación (10) para hallar los autovectores asociados a cada uno de ellos.

Para $\lambda_1 = -6$, la (10) corresponde a

$$A\mathbf{v}_1 = -6\mathbf{v}_1,$$

reemplazando A y $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} -14 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6v_{11} \\ -6v_{21} \end{bmatrix}.$$

Expandiendo,

$$\left\{ \begin{aligned} -14v_{11} - 4v_{21} &= -6v_{11} \\ 4v_{11} - 4v_{21} &= -6v_{21} \end{aligned} \right. \quad \rightarrow \left\{ \begin{aligned} v_{11} &= -v_{21}/2 \\ v_{21} &= v_{21} \end{aligned} \right.$$

Adoptando, por ejemplo, $v_{21} = 1$ entonces $v_{11} = 1/2$. El vector resultante puede dividirse por su norma para normalizarlo, con lo cual, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^T$.

Para $\lambda_2 = -12$, debemos resolver $A\mathbf{v}_2 = -12\mathbf{v}_2$, es decir,

$$\begin{bmatrix} -14 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12v_{12} \\ -12v_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} & v_{22} \end{bmatrix}^T$. El sistema de ecuaciones anterior es equivalente a $v_{12} = -2v_{22}$. Luego, eligiendo $v_{22} = 1$ y normalizando $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^T$.

Finalmente, la matriz de transformación P resulta

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

y el nuevo modelo de estados

$$\dot{z} = A_d z + B_d u, \quad y = C_d z,$$

donde

$$A_d = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad B_d = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_d = CP = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Forma de Jordan

Consideremos el siguiente modelos de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Al resolver la ecuación

$$|A - \lambda I_{3\times 3}| = 0 \tag{12}$$

obtenemos dos autovalores distintos $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -1$, este último de multiplicidad 2. Cuando A tiene autovalores reales pero no todos son distintos, no siempre tendremos los suficientes autovectores linealmente independientes para expresar la matriz A en forma diagonal. Si no tenemos autovectores linealmente independientes la matriz de transformación P será singular. En este caso, podemos hallar los denominados autovectores generalizados y expresar la matriz A en la forma de Jordan, esto es

$$A_z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Observemos que A_z estará formada por bloques, los bloques correspondientes a los autovalores de multiplicidad 1 serán diagonales y los correspondientes a autovalores de multiplicidad mayor tendrán la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Comencemos con el autovector asociado a $\lambda_1 = -5$. Como este tiene multiplicidad 1 podemos hallar un autovector asociado a λ_1 usando (10), es decir,

$$(A + 5I_{3\times 3})\mathbf{v}_1 = 0, \tag{13}$$

definiendo $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \end{bmatrix}^T$, la (13) es equivalente a

$$\begin{cases} 4v_{11} - 2v_{21} &= 0, \\ 4v_{21} &= 0, \\ 3v_{11} - 3v_{21} &= 0, \end{cases} \tag{14}$$

de donde se verifica que el vector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ es solución de (13).

El problema surge en los autovectores asociados al autovalor doble $\lambda_2 = -1$. Si buscamos las restantes columnas de P a partir de (10) sólo obtendremos vectores linealmente dependientes. Para salvar el inconveniente reemplazamos (10) por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I_{3\times 3})\mathbf{v}_2 &= 0, & (15)\\ (A - \lambda_2 I_{3\times 3})\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2. & (16) \end{aligned}$$

Reemplazando en (15) los valores del ejemplo considerado y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} & v_{22} & v_{32} \end{bmatrix}^T$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

que simplificando resulta en dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} -2v_{22} &= 0, \\ 3v_{12} - 3v_{22} - 4v_{32} &= 0, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

que son equivalente a $3v_{12} = 4v_{32}$. Luego, adoptando $v_{32} = 3$ y normalizando, tenemos

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}^T.$$

Obtenido el vector $\mathbf{v}_2$, reemplazamos en (16) y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Simplificando,

$$\left\{ \begin{aligned} -2v_{23} &= 4, \\ 3v_{13} - 3v_{23} - 4v_{33} &= 3. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Luego, esto implica que $v_{23} = -2$ y que $3v_{13} - 4v_{33} = -3$. Adoptando $v_{13} = 3$ y normalizando, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & -2/\sqrt{22} & 3/\sqrt{22} \end{bmatrix}^T$.

Finalmente, a partir de los tres autovectores obtenemos la matriz de transformación

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 3/\sqrt{22} \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{22} \\ 1 & 3/5 & 3/\sqrt{22} \end{bmatrix}.$$

Con esta transformación, la matriz A_z tiene la forma Jordan correspondiente

$$A_z = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$