Control Automático II - Ing. Electrónica
Ejercicio resuelto 6: Modelo discreto de estados

Consideremos el sistema de tiempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \tag{1}$$

1. Autovalores, Autovectores y Polinomio Característico

El procedimiento a seguir para hallar estos elementos es totalmente análogo al utilizado en sistemas de tiempo continuo. Igualmente desarrollaremos este caso a modo de ejemplo.

Los autovalores del sistema están dados por las raíces de:

$$|zI - A| = 0$$

que para este sistema nos lleva a:

$$\begin{vmatrix} z-0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & z-0{,}8 \end{vmatrix} = (z-0{,}9)(z-0{,}8) = 0 \tag{2}$$

De la ecuación (2), podemos obtener los autovalores del sistema, así también como el polinomio característico:

$$\lambda_1 = 0{,}9, \quad \lambda_2 = 0{,}8, \tag{3}$$

$$\Delta(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = z^2 - 1{,}7z + 0{,}72. \tag{4}$$

Para hallar los autovectores debemos resolver, para cada uno de los autovalores, la ecuación:

$$AV_i = A\lambda_i. \tag{5}$$

Auxiliándonos con el MATLAB podemos obtener fácilmente autovalores y autovectores utilizando la función `[V,D]=eig(A)`, de lo cual resulta [1]:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

2. Transformaciones

Como vimos en los Trabajos Prácticos previos, las transformaciones lineales resultan muy útiles tanto en el análisis como en el diseño de sistemas en variables de estado. Obtendremos aquí algunas trasformaciones que utilizaremos más adelante.

[1] En realidad esta función proporciona autovectores de módulo unitario $V_1 = [\ 1 \quad 0\ ]^T$, $V_2 = [\ 0{,}707 \quad 0{,}707\ ]^T$. Por comodidad, se utilizó como segundo autovector $V_2 = [\ 1 \quad 1\ ]^T$

2.1. Forma Diagonal

La matriz de trasformación P_d, que nos permite llevar el sistema a la forma diagonal, está compuesta por los autovectores del sistema:

$$P_d = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

aplicando esta trasformación lineal, las matrices del nuevo modelo resultan:

$$A_d = P_d^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad B_d = P_d^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_d = C P_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.2. Forma Canónica Controlable

Una transformación P_c, que nos permite llevar al sistema a la forma canónica controlable, está dada por:

$$P_c = MW \tag{9}$$

donde M es la matriz de controlabilidad del sistema:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}7 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \tag{10}$$

y W una matriz que se compone con los coeficientes del polinomio característico. Recordemos que estos se ubican en la primer columna y las restantes resultan de desplazamientos de esta columna.

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Obtenidas M y W, la matriz de transformación P_c es:

$$P_c = MW = \begin{bmatrix} -1{,}7 & 2{,}0 \\ -0{,}9 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

y el nuevo modelo:

$$A_c = P_c^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}72 & 1{,}7 \end{bmatrix}, \quad B_c = P_c^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = C P_c = \begin{bmatrix} -1{,}7 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

2.3. Forma Canónica Observable

Para transformar el sistema a la Forma Canónica Observable, podemos utilizar la transformación lineal P_o dada por:

$$P_o = (W N^T)^{-1}. \tag{13}$$

Siendo W la matriz descripta anteriormente y N la matriz de observabilidad del sistema.

$$N = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0 & -0{,}1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Finalmente la matriz P_o resulta

$$P_o = (W N^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \end{bmatrix} \tag{15}$$

y el nuevo modelo, correspondiente a la forma canónica observable:

$$\begin{aligned} A_o &= P_o^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}72 \\ 1 & 1{,}7 \end{bmatrix}, \quad B_o = P_o^{-1} B = \begin{bmatrix} -1{,}7 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ C_c &= C P_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Matriz de Transición de Estados

La matriz de Transición de estados para un sistema discreto esta dada por:

$$\phi(k) = A^k \tag{16}$$

Existen diversos caminos para obtenerla. Exploraremos algunos.

3.1. A partir del modelo diagonal

En un modelo diagonal, es muy simple obtener $\phi_d(k)$. En este caso:

$$\phi_d(k) = \begin{bmatrix} 0{,}9^k & 0 \\ 0 & 0{,}8^k \end{bmatrix} \tag{17}$$

Si queremos hallar la $\phi(k)$ correspondiente al modelo original, basta con aplicar la transformación lineal P_d, hallada anteriormente según:

$$\phi(k) = P_d \phi_d(k) P_d^{-1} \tag{18}$$

Para este ejemplo:

$$\phi(k) \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9^k & 0 \\ 0 & 0{,}8^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9^k & 0{,}8^k - 0{,}9^k \\ 0 & 0{,}8^k \end{bmatrix}$$

3.2. Utilizando el Teorema de Caley Hamilton

El procedimiento es análogo al utilizado en la Practica 3 para obtener $\phi(t)$ aplicando este teorema. La matriz $\phi(k)$ de este sistema de segundo orden puede escribirse como un polinomio de grado 1 en A según:

$$\phi(k) = A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A \tag{19}$$

Los coeficientes α_0, α_1 se obtienen de evaluar (19) en los autovalores del sistema, es decir:

$$\begin{aligned} \lambda_1^k &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1, \\ \lambda_2^k &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2. \end{aligned} \tag{20}$$

(21)

Para este ejemplo resulta

$$\begin{aligned} 0{,}9^k &= \alpha_0 + \alpha_1 0{,}9, \\ 0{,}8^k &= \alpha_0 + \alpha_1 0{,}8. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -8 \cdot 0{,}9^k + 9 \cdot 0{,}8^k, \\ \alpha_1 &= 10 \cdot 0{,}9^k - 10 \cdot 0{,}8^k \end{aligned}$$

y reemplazando en (19) finalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi(k) &= A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A \\
\phi(k) &= \begin{bmatrix} -8\cdot 0{,}9^k + 9\cdot 0{,}8^k & 0 \\ 0 & -8\cdot 0{,}9^k + 9\cdot 0{,}8^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9\cdot 0{,}9^k - 9\cdot 0{,}8^k & -0{,}9^k + 0{,}8^k \\ 0 & 8\cdot 0{,}9^k - 8\cdot 0{,}8^k \end{bmatrix} \\
\phi(k) &= \begin{bmatrix} 0{,}9^k & 0{,}8^k - 0{,}9^k \\ 0 & 0{,}8^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.3. Aplicando Transformada Z

La matriz $\phi(k)$ también puede hallarse utilizando la transformada Z a partir de:

$$\phi(k) = Z^{-1}\left\{(zI - A)^{-1} z\right\} \tag{22}$$

Reemplazando las matrices correspondientes a este ejemplo y antitransformando obtenemos:

$$\phi(k) = Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0{,}9} & \dfrac{1}{(z-0{,}9)(z-0{,}8)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-0{,}8} \end{bmatrix} z\right\} = \begin{bmatrix} 0{,}9^k & 0{,}8^k - 0{,}9^k \\ 0 & 0{,}8^k \end{bmatrix} \tag{23}$$

4. Realimentación

A modo de ejemplo diseñaremos una realimentación del vector de estados tal que los autovalores de lazo cerrado resulten $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$.

Para trabajar en el diseño de la realimentación nos resultará particularmente cómodo utilizar la forma canónica controlable:

$$x_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}72 & 1{,}7 \end{bmatrix} x_c(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} -1{,}7 & 2{,}0 \end{bmatrix} x(k) \tag{24}$$

Este modelo corresponde al sistema a lazo abierto. Si utilizamos una realimentación completa del vector de estados, $u = r - K_c x_c$, la nueva matriz A de lazo cerrado estará dada por:

$$A_{LC_c} = A_c - B_c K_c \tag{25}$$

4.1. Asignación de autovalores

El polinomio característico deseado a lazo cerrado es:

$$\Delta_{LC_c}(z) = (z - 0{,}5)(z - 0{,}5) = z^2 - z + 0{,}25 \tag{26}$$

y la matriz A_{LC} de lazo cerrado:

$$A_{LC_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}25 & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Como se indicó en (25) esta matriz depende del vector de realimentación K_c, según:

$$A_{LC} = A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{c1} & K_{c2} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

es decir,

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_2 + K_{c1}) & -(a_1 + K_{c2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(0{,}72 + K_{c1}) & -(1{,}7 + K_{c2}) \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Comparando la matriz A_{LC} deseada de la ecuación (26) con (29), obtenemos el vector de realimentación K_c

$$\begin{aligned} -0{,}72 - K_{c1} = -0{,}25 \quad &\Rightarrow \quad k_{c1} = -0{,}47, \\ 1{,}7 - K_{c2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad K_{c2} = 0{,}7. \end{aligned}$$

Recordemos que este vector de realimentación corresponde a la forma canónica controlable, es decir que corresponde a una realimentación de la forma $u = r - K_c x_c$. Para calcular la realimentación en términos de los estados originales, es necesario aplicar la trasformación lineal P_C^{-1}, calculada en el punto 2.2

$$u(k) = \begin{bmatrix} K_{c1} & K_{c2} \end{bmatrix} x_c(k) = \begin{bmatrix} K_{c1} & K_{c2} \end{bmatrix} P_c^{-1} x_c(k). \tag{30}$$

De este modo, se obtiene finalmente:

$$K = \begin{bmatrix} K_{c1} & K_{c2} \end{bmatrix} P_c^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}47 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 9 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6 & -2{,}5 \end{bmatrix} \tag{31}$$

y la nueva matriz A de lazo cerrado A_{LC} será:

$$A_{LC} = A - BK = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}6 & -2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}3 & 4{,}9 \\ -1{,}6 & 3{,}3 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores verifican los requeridos ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$).

4.2. Error de Estado estacionario

La acción de control del sistema realimentado está dada por:

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \tag{32}$$

y el modelo correspondiente al sistema de lazo cerrado resulta:

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + Br(k), \quad y = Cx(k). \tag{33}$$

Si aplicamos una referencia r constante, el sistema alcanzará el estado estacionario, cuando se verifique:

$$x(k+1) = x(k) = x_{EE}. \tag{34}$$

Entonces, en esta condición, el modelo se reduce a:

$$x_{EE} = (A - BK)x_{EE} + Br, \tag{35}$$

$$x_{EE} = (I - A_{LC})^{-1} Br. \tag{36}$$

A partir de (36) podemos obtener el valor de la salida y_{EE} en estado estacionario.

$$y_{EE} = Cx_{EE} = C(I - A_{LC})^{-1} Br. \tag{37}$$

La Ganancia en continua, definida como la relación entre y_{EE} y la referencia r, resulta:

$$G_{EE} = C(I - A_{LC})^{-1}B \tag{38}$$

que para este caso es:

$$G_{EE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2{,}3 & -4{,}9 \\ 1{,}6 & 1-0{,}33 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1{,}2. \tag{39}$$

Es decir, que este sistema presentará un Error de Estado Estacionario (EEE) del 20 %, tal como lo muestra la respuesta al escalón indicada en la Fig. 1.

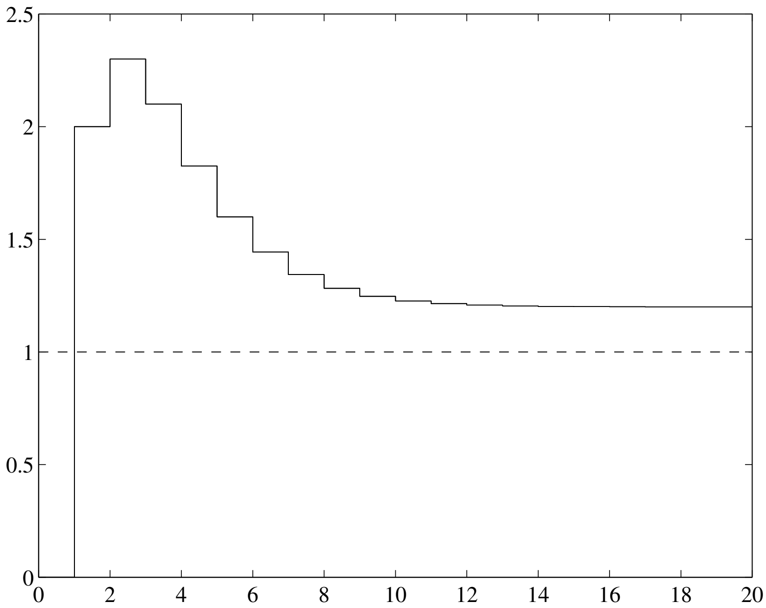

Figura 1: Respuesta a un escalón unitario del sistema realimentado.

Si queremos asegurar un EEE nulo, debemos expandir el sistema agregando un estado integral x_i, definido como

$$x_i(k+1) = x_i(k) + (r(k) - y(k)). \tag{40}$$

Utilizando la ecuación de salida del sistema, resulta:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + C \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + r(k) \tag{41}$$

y el sistema expandido queda:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -C & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right] u(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] r(k), \tag{42}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k), \tag{43}$$

llevándolo a la forma canónica controlable, su matriz A_c será:

$$A_{C_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}72 & -2{,}42 & 2{,}7 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Por inspección de la última fila de esta matriz, podemos obtener el nuevo polinomio característico de lazo abierto:

$$\Delta(z) = z^3 - 2{,}7z^2 + 2{,}42z - 0{,}72. \tag{45}$$

Debemos asignar tres autovalores. Si fijamos como autovalores deseados ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0{,}5$), el polinomio característico a lazo cerrado deseado es:

$$\Delta(z) = (z - 0{,}5)^3 = z^3 - 1{,}5z^2 + 0{,}75z - 0{,}125. \tag{46}$$

Comparando (45) con (46) obtenemos las ganancias de realimentación necesarias en el modelo en su forma canónica controlable:

$$\begin{aligned} 0{,}72 - K_{c1} = 1{,}25 \quad &\Rightarrow \quad K_{c1} = 0{,}595 \\ -2{,}42 - K_{c2} = -0{,}75 \quad &\Rightarrow \quad K_{c2} = -1{,}67 \\ 2{,}7 - K_{c3} = 1{,}5 \quad &\Rightarrow \quad K_{c3} = -1{,}2 \end{aligned}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 0{,}595 & -1{,}67 & 1{,}2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

y el vector de realimentación considerando las variables originales:

$$K = P_c^{-1} K_c = \begin{bmatrix} -2{,}33 & 5{,}66 & -0{,}42 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Finalmente, en la Fig. 2, se muestra la respuesta a un escalón unitario considerando esta nueva realimentación de estados.

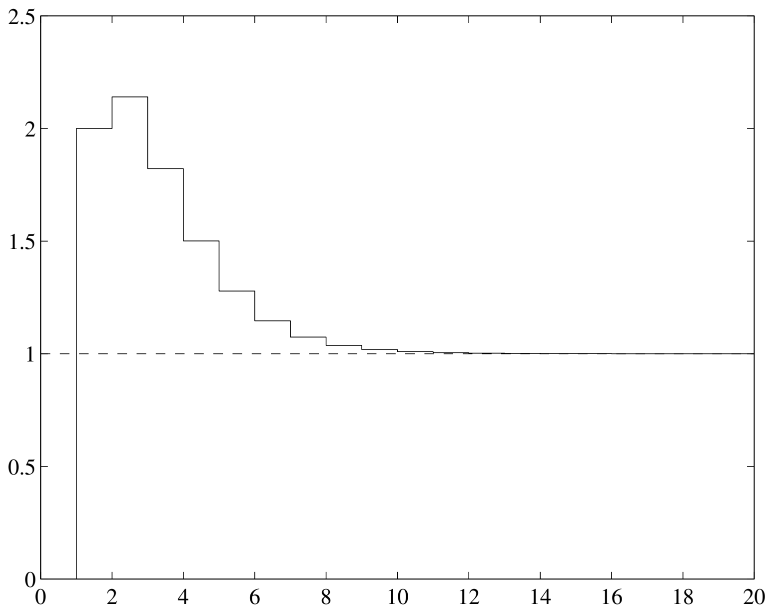

Figura 2: Respuesta a un escalón unitario del sistema aumentado y realimentado para tener EEE nulo