Control Automático 2

Sistemas Lineales en Variables de Estado.

- Modelos Matemáticos de Sistemas Dinámicos
- Generalidades

F. Valenciaga 2022

Modelos Matemáticos

Modelo Matemático: una representación del comportamiento de un ***sistema*** a través de un conjunto de expresiones matemáticas que resultan ***adecuadas*** para los propósitos buscados.

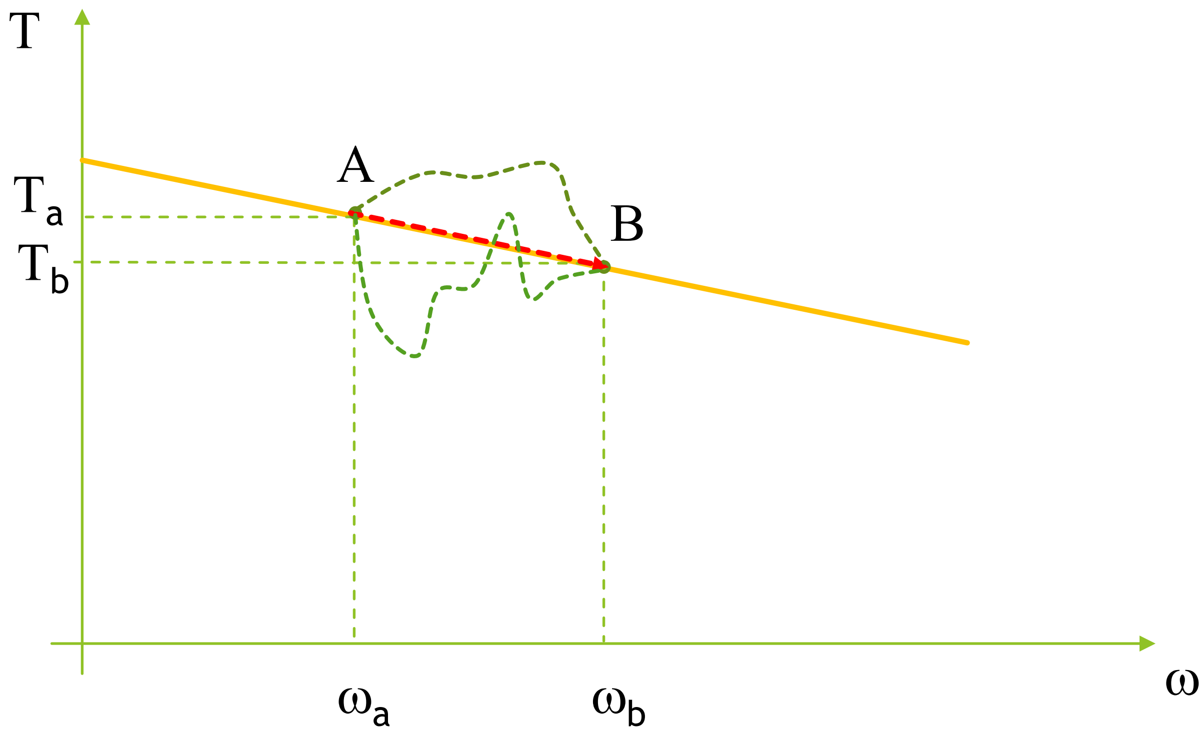
En este contexto el adjetivo ***adecuadas*** se refiere a que la descripción que realizan las ecuaciones planteadas sea útil y suficientemente precisa en el contexto del objetivo buscado.

Sistema: constituye la parte del mundo que queremos representar ya sea para su análisis o, como en nuestro caso, con el fin proponer/diseñar acciones que permitan modificar su comportamiento.

Modelos Matemáticos

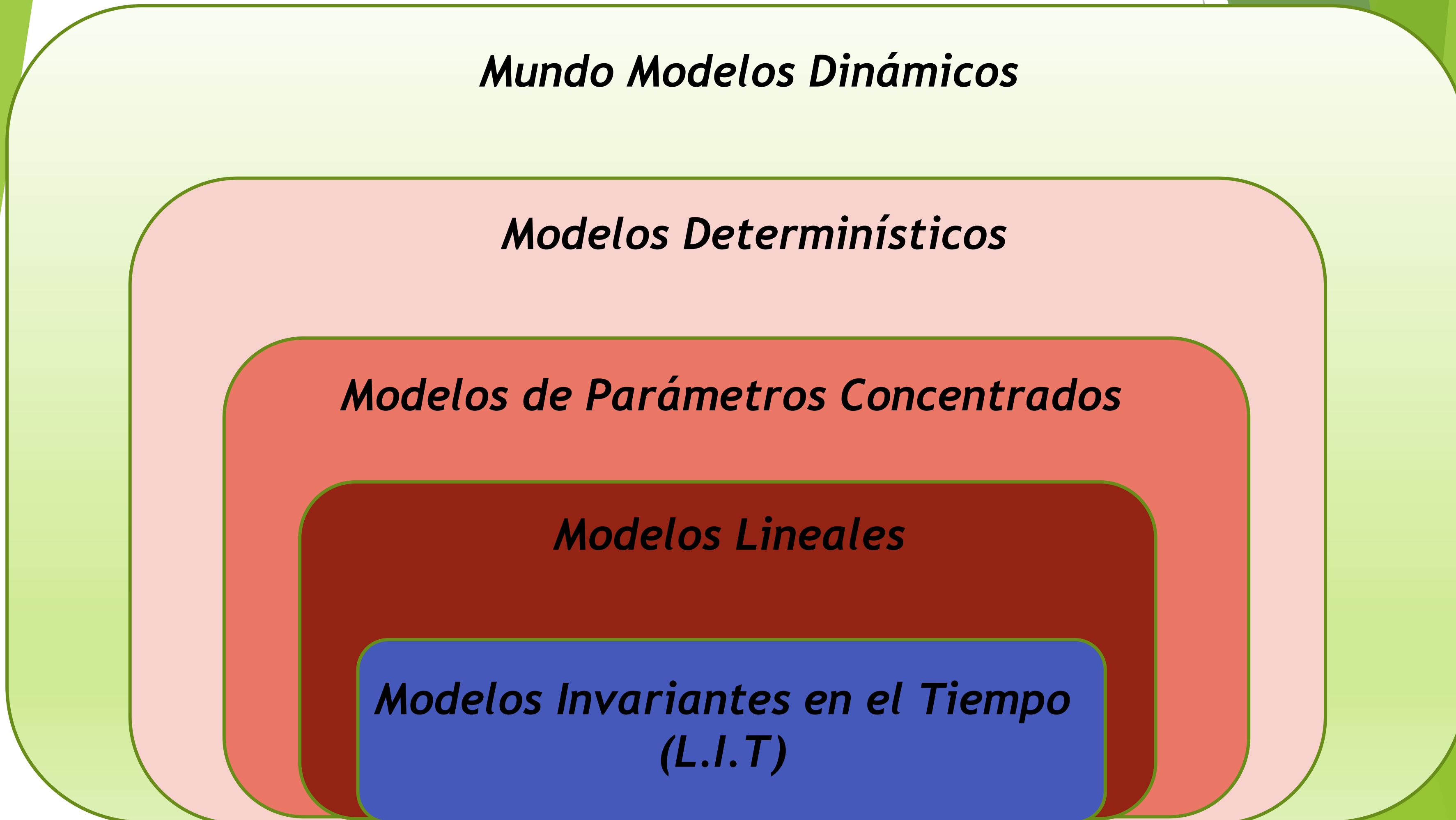
Tipos de Modelos Matemático

- ***Modelos Estáticos***
- ***Modelos Dinámicos f(t)***



Modelos Dinámicos

Tipos de Modelos Matemáticos



Modelos Matemáticos

Tipos de Representaciones Matemáticas Habituales en Control:

Función de Transferencia:

- *Sistemas Lineales*
- *SISO*
- *Parámetros Ctes.*
- *Condiciones Iniciales nulas*
- *Modelo entrada - salida*

SISO-LIT

Ecuaciones de Estados:

- *Sistemas Lineales / No Lineales*
- *SISO / MIMO*
- *Parámetros Ctes./ Parámetros Variantes en el Tiempo*

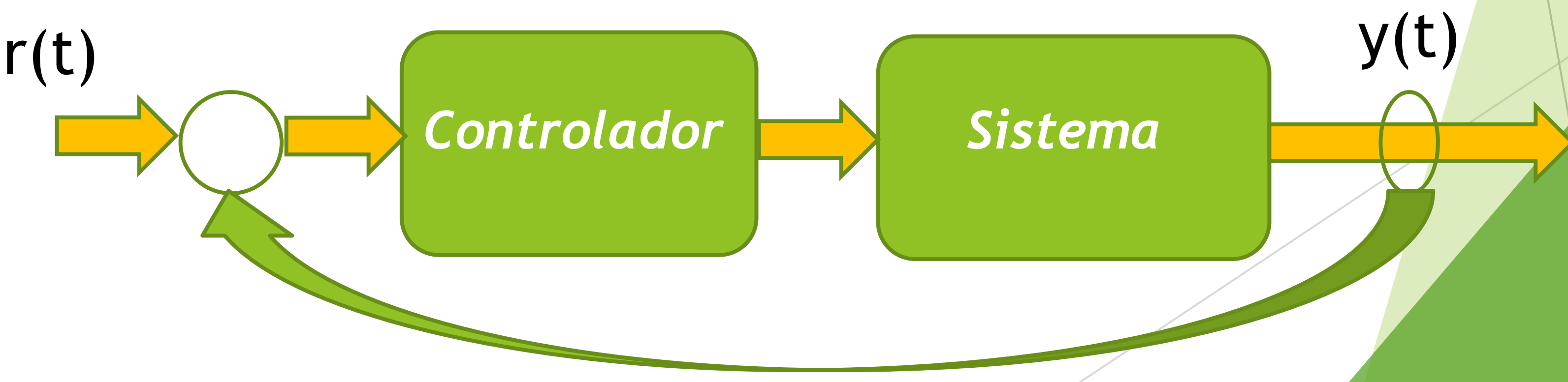
Modelos Matemáticos

Modelos SISO - LIT (FT) → ***CA1 / CyS A***

Salida

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=k\frac{\prod_i(s-z_i)}{\prod_j(s-p_j)}=\frac{b_m s^m+\dots+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\dots+a_2 s^2+a_1 s+a_0}\qquad n>m$$

Entrada



Modelos Matemáticos

Modelos SISO - LIT (E/S) ⇒ ***Limitaciones***

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0}$$

⇕ ***Equivalentes como modelo E/S***

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - \overset{=0}{y(0)}$$

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} = s^2 Y(s) - s\overset{=0}{y(0)} - \overset{=0}{y'(0)}$$

Condiciones Iniciales Nulas para encontrar G(s)

Modelos Matemáticos

Modelos SISO - LIT (E/S) → Limitaciones

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Modelo Frecuencial
Condiciones Iniciales Nulas

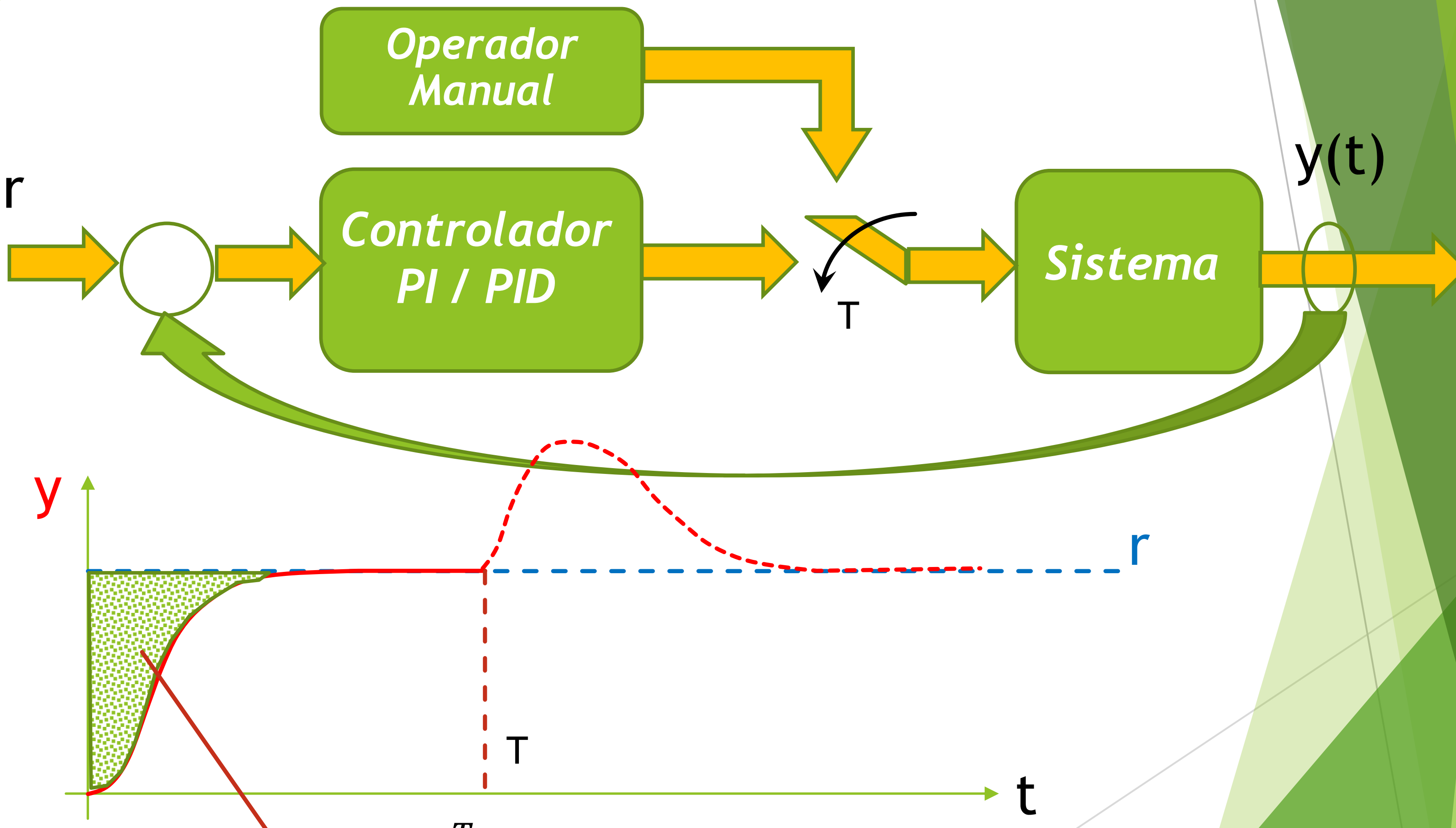
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Modelo Temporo - Diferencial
Dificultad de Resolución en Sist. Alto Orden

Condiciones Iniciales → Son Importantes ???

Modelos Matemáticos

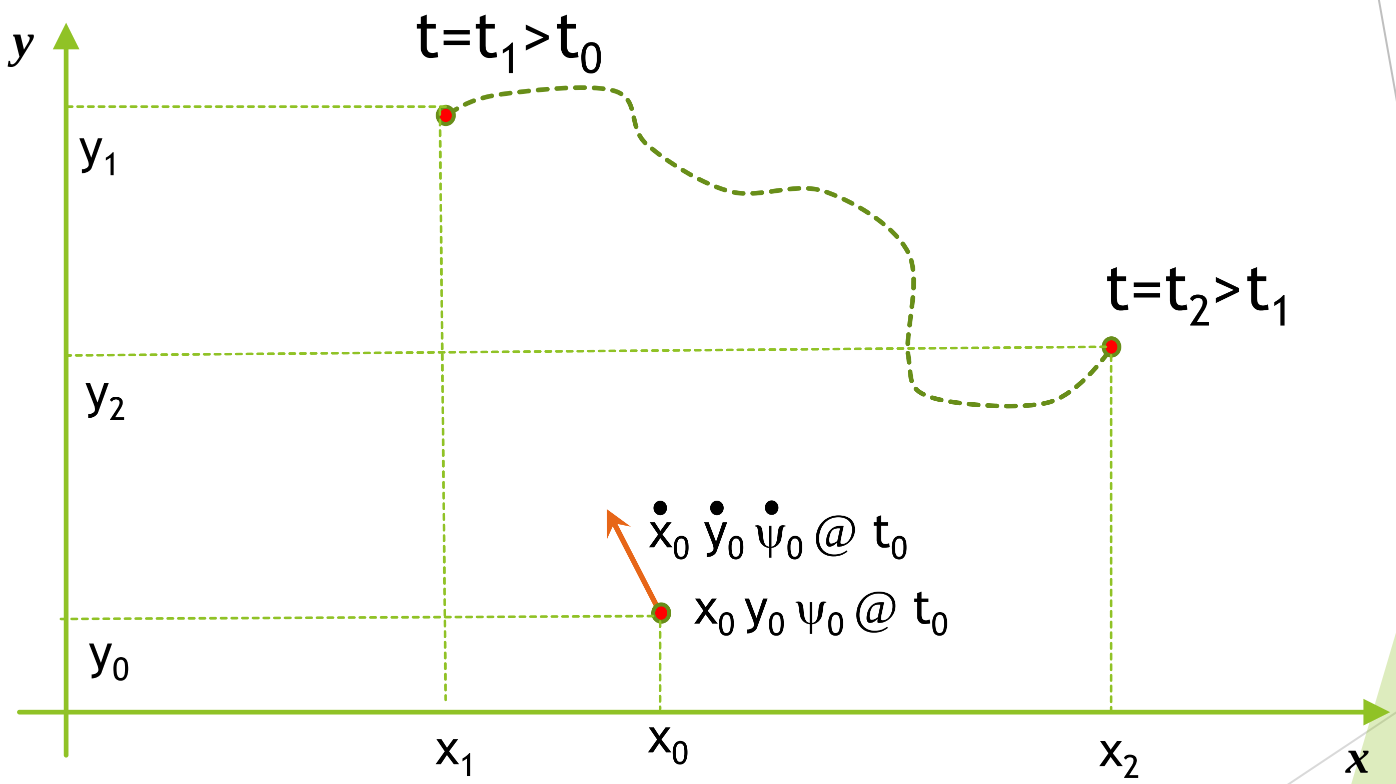
Regulación (Procesos Químicos):



$$I = \int_0^T e(t)dt \neq 0 \quad \mathrm{P} = K_p e(t) = 0$$

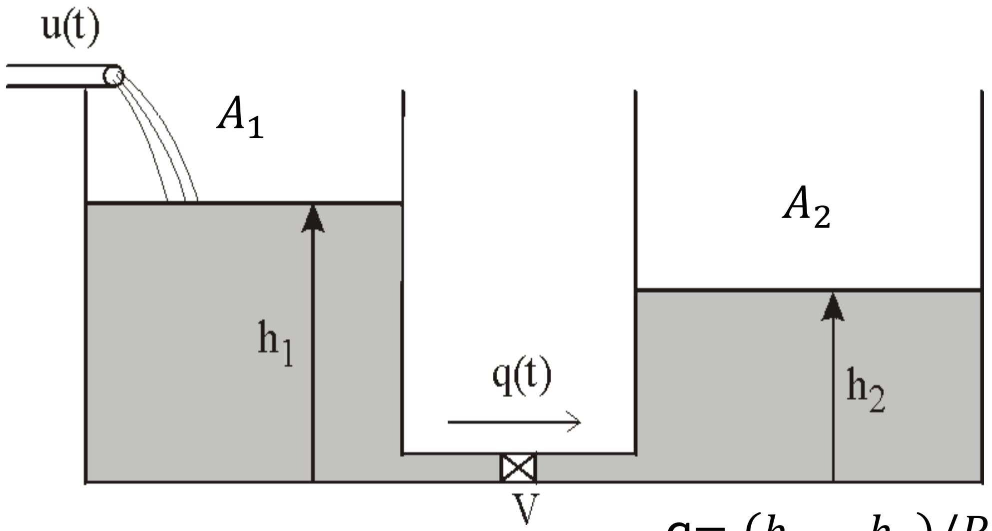
Modelos Matemáticos

Alcance y Seguimiento de Trayectorias (vehículos):



Modelos Matemáticos

Ejemplo: Sistema de Tanques Conectados



q= $(h_1 - h_2)/R$

Principio de conservación de la masa:

Masa entrante – masa saliente= masa acumulada

$$u(t) - \big(h_1(t) - h_2(t)\big)/R = \frac{dV_1(t)}{dt}$$

$$\big(h_1(t) - h_2(t)\big)/R = \frac{dV_2(t)}{dt}$$

$$u - (h_1 - h_2)/R = A_1 \frac{dh_1}{dt} = A_1 \dot{h}_1$$

$$(h_1 - h_2)/R = A_2 \frac{dh_2}{dt} = A_2 \dot{h}_2$$

Modelos Matemáticos

Ejemplo: Sistema de Tanques Conectados

$$u - (h_1 - h_2)/R = A_1 \frac{dh_1}{dt} = A_1 \dot{h}_1$$

$$(h_1 - h_2)/R = A_2 \frac{dh_2}{dt} = A_2 \dot{h}_2$$

Condiciones Iniciales Nulas

$$U(s) - \big(H_1(s) - H_2(s)\big)/R = A_1 s H_1(s) \quad 1$$

$$\big(H_1(s) - H_2(s)\big)/R = A_2 s H_2(s) \quad 2$$

Despejando de 2

$$H_1(s) = A_2 R s H_2(s) + H_2(s)$$

Reemplazando en 1

$$U(s) - \big(A_2 R s H_2(s) + H_2(s) - H_2(s)\big)/R = A_1 s\big(A_2 R s H_2(s) + H_2(s)\big)$$

Ordenando términos:

$$RU - (A_2 R s H_2) = R A_1 s (A_2 R s + 1) H_2$$

$$U = s(A_1 A_2 R s + A_1 + A_2) H_2$$

$$\boxed{\frac{H_2}{U} = \frac{1}{A_1 A_2 R} \frac{1}{[s(s + (A_1 + A_2)/A_1 A_2 R)]}}$$

Para encontrar la FT eliminamos CI y la variable interna h_1

Modelos Matemáticos

Ejemplo: Sistema de Tanques Conectados

$$u - (h_1 - h_2)/R = A_1 \frac{dh_1}{dt} = A_1 \dot{h}_1$$

$$(h_1 - h_2)/R = A_2 \frac{dh_2}{dt} = A_2 \dot{h}_2$$

C.I. Nulas

$$\boxed{\frac{H_2}{U} = \frac{1}{A_1 A_2 R} \frac{1}{[s(s + (A_1 + A_2)/A_1 A_2 R)]}}$$

Despejando de la primer y segunda ecuación:

$$u/A_1 - (h_1 - h_2)/RA_1 = \frac{dh_1}{dt} \qquad h_1 = RA_2 \frac{dh_2}{dt} + h_2$$

Derivando la segunda ecuación:

$$\left(\frac{dh_1}{dt} - \frac{dh_2}{dt}\right)/R = A_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2}$$

Luego reemplazando: $\left(u/A_1 - \left(RA_2 \frac{dh_2}{dt} + \cancel{h_2} - \cancel{h_2}\right)/RA_1 - \frac{dh_2}{dt}\right)/R = A_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2}$

$$\left(u/A_1 - \frac{A_2}{A_1}\frac{dh_2}{dt} - \frac{dh_2}{dt}\right)/R = A_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2}$$

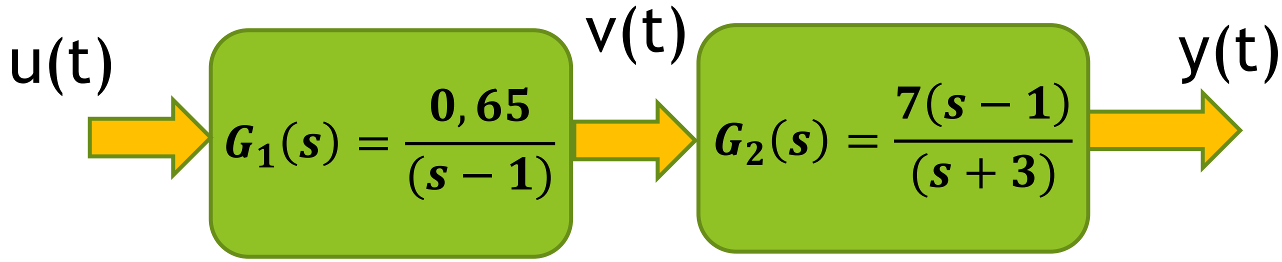
$$\boxed{u = A_1 A_2 R \frac{d^2 h_2}{dt^2} + (A_1 + A_2) \frac{dh_2}{dt}}$$

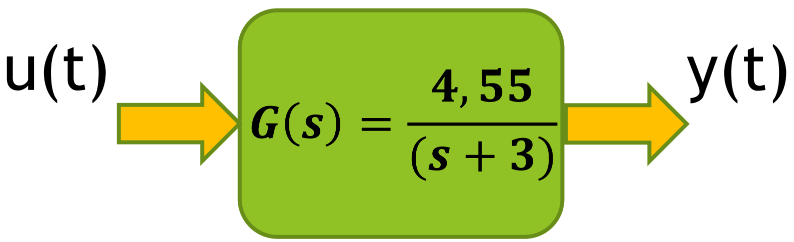
Modelos Matemáticos

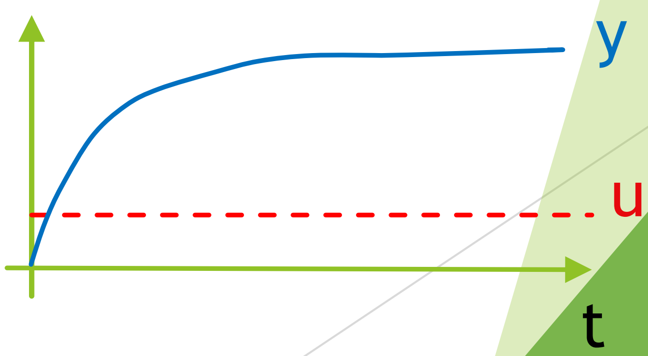
Entrada / Salida : sin descripción de las variables internas

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=k\frac{\prod_i(s-z_i)}{\prod_j(s-p_j)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_2\,s^2+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_2\,s^2+a_1 s+a_0}$$

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+a_2\frac{d^2 y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_2\frac{d^2 u}{dt^2}+b_1\frac{du}{dt}+b_0 u$$



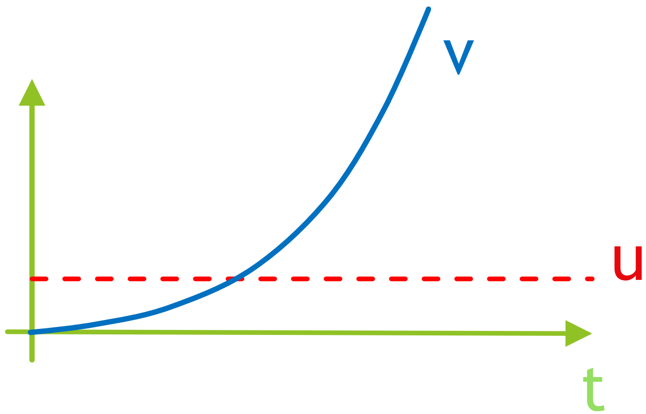




Modelos Matemáticos

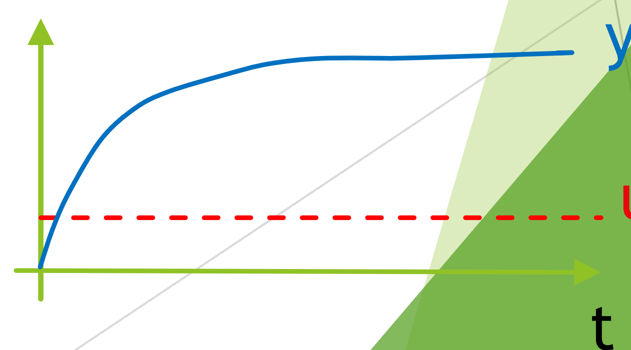
Entrada / Salida : sin descripción de las variables internas

$$u(t) \rightarrow \boxed{G_1(s) = \frac{0,65}{(s-1)}} \xrightarrow{v(t)} \boxed{G_2(s) = \frac{7(s-1)}{(s+3)}} \rightarrow y(t)$$



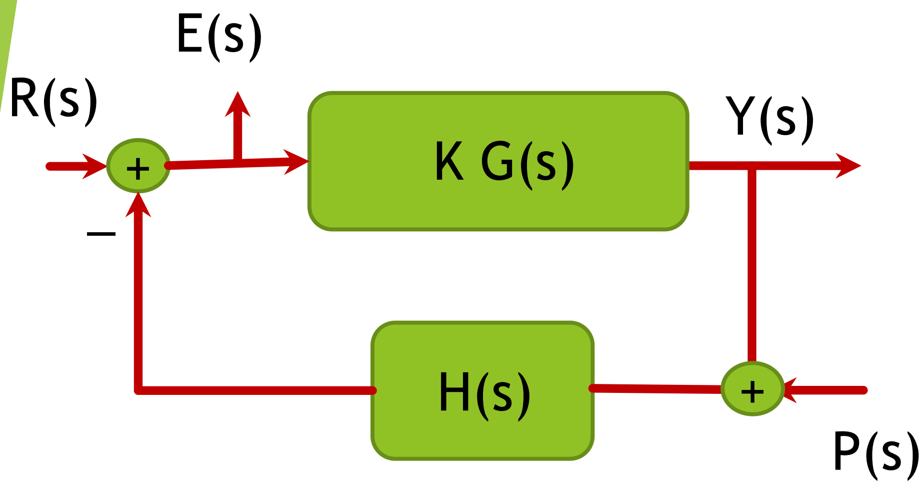
Sistema Inestable Internamente
(saturación de etapas; peligros varios)

$$u(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{4,55}{(s+3)}} \rightarrow y(t)$$



Modelos Matemáticos

Estabilidad interna a LC (CA1 / CyS A)



$$G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}$$

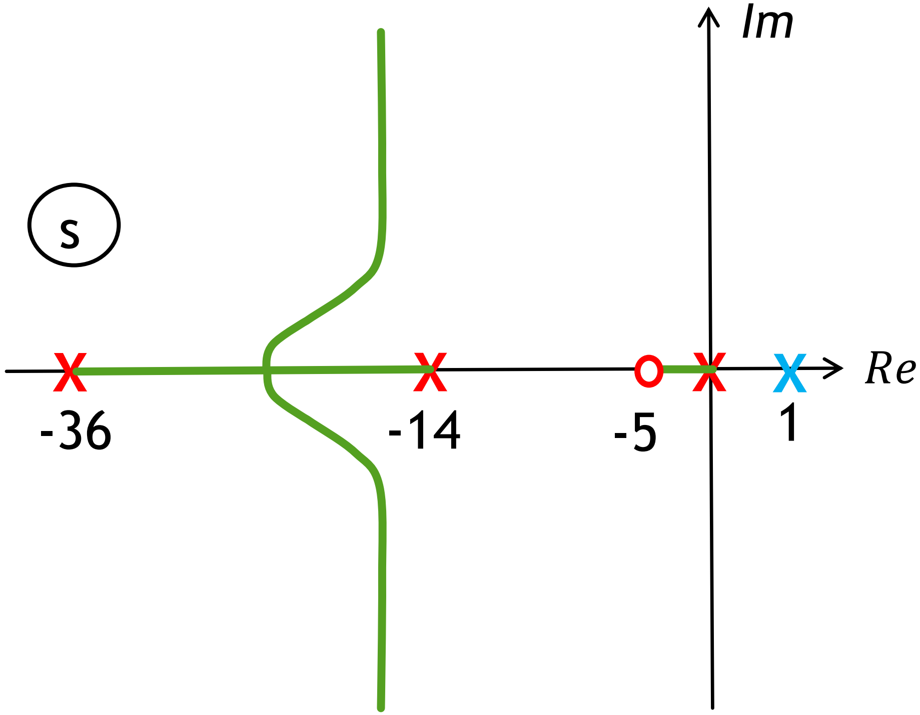
$$\mathrm{H}(s) = \frac{(s+5)}{(s-1)}$$

$$T_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}}{1 + \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}\frac{(s+5)}{(s-1)}} = \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36) + K(s+5)}$$

$$T_2(s) = \frac{E(s)}{P(s)} = \frac{\frac{(s+5)}{(s-1)}}{1 + \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}\frac{(s+5)}{(s-1)}} = \frac{K(s+5)}{(s-1)[s(s+14)(s+36) + K(s+5)]}$$

Cancelaciones e Inestabilidad Interna

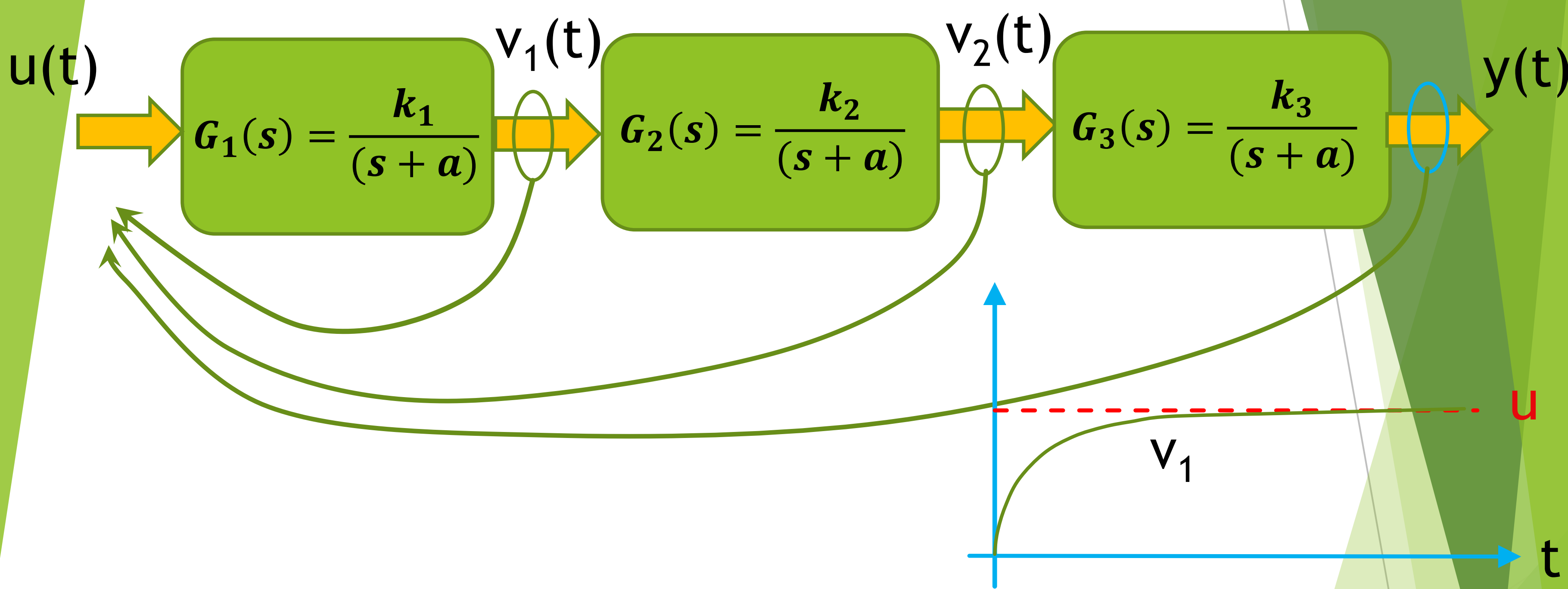
$$T_2(s) = \frac{E(s)}{P(s)} = \frac{\dfrac{(s+5)}{(s-1)}}{1 + \dfrac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}\dfrac{(s+5)}{(s-1)}} = \frac{K(s+5)}{(s-1)[s(s+14)(s+36)+K(s+5)]}$$

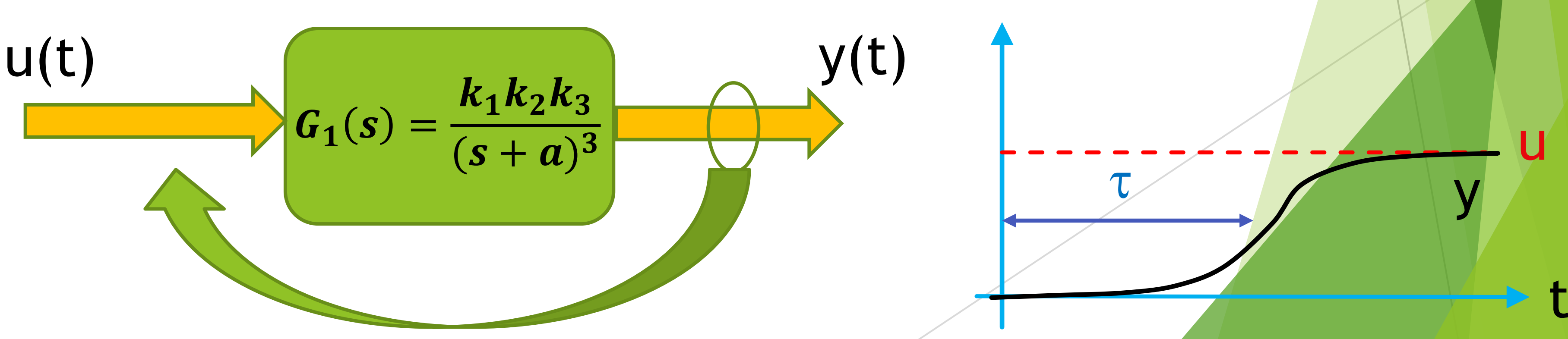


En este lugar de raíces se observa la aparición de un polo de LC fijo (no se mueve cuando cambia la ganancia) que muestra la inestabilidad interna del sistema y que no se ve desde el modelo Entrada / Salida Y(s)/R(s)

Modelos Matemáticos

Entrada / Salida : sin descripción de las variables internas





Modelos Matemáticos por V.E

Modelo en el dominio temporal que no presenta la complejidad de resolución de la ecuación diferencial de orden n de los sistemas de E/S.
Como el orden es característico del sistema, en reemplazo de una ecuación de orden n se propone una modelización de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que conserva las variables internas independientes del mismo

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

$x_i(t)$ se denominan estados del sistema y se relacionan al número de elementos independientes que almacenan energía en el sistema

las $u_i(t)$corresponden a las entradas del mismo.

El sistema anterior tiene n estados y m entradas

Modelos Matemáticos por V.E

Conjunto de ecuaciones algebraicas que representan las salidas del sistema

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

$$\vdots$$

$$y_r = g_r(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots u_m)$$

Estas r salidas representan la información de interés que uno quiere ver del sistema (elección).
Las expresiones vistas corresponden a un sistema genérico (no lineal) con n estados, m entradas y r salidas

Modelos Matemáticos por V.E

Las expresiones anteriores para un sistema del tipo de los que abordaremos en el curso (MIMO-LIT) se reducen al sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes constantes:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Las expresiones anteriores para un sistema del tipo de los que abordaremos en el curso (MIMO-LIT) se reducen al sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes constantes:

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$[y]_{r\times 1} = [C]_{r\times n}[x]_{n\times 1} + \cancel{[D]}_{r\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

Sistemas SISO

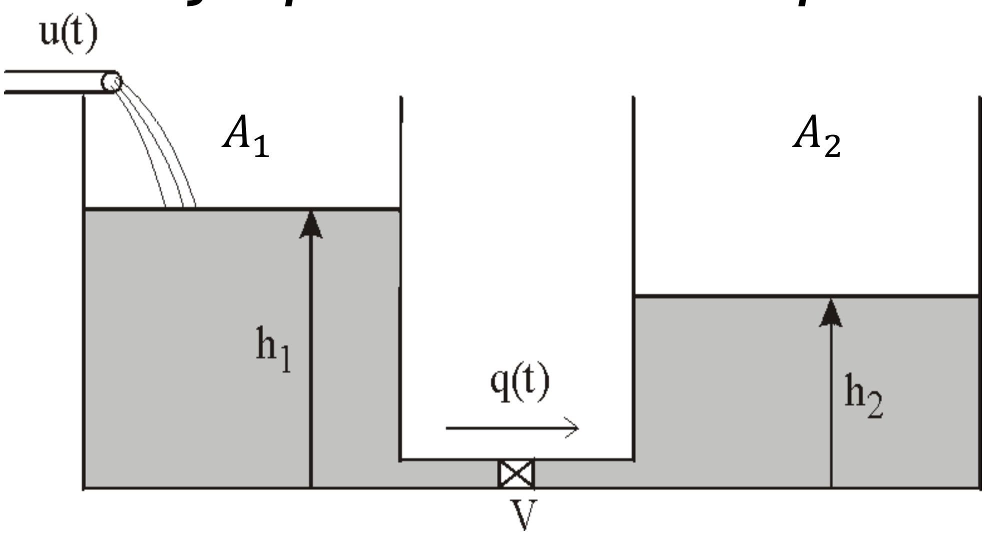
$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times 1}\,[u]_{1\times 1}$$

$$[y]_{1\times 1} = [C]_{1\times n}[x]_{n\times 1} + \cancel{[D]}^{\,=\,\mathbf{0}}_{1\times 1}\,[u]_{1\times 1}$$

Al abordar la construcción de un modelo tengo que elegir entonces las variables con que lo voy a representar.
Cuantas? Tantas como el número de elementos que tienen memoria dentro del sistema. Obviamente todas las elegidas deben ser independientes entre sí. Esta elección no es única y por lo tanto un sistema puede presentar diferentes representaciones equivalentes (infinitas).

Modelos Matemáticos por V.E

Ejemplo: Sistema de Tanques Conectados



q= $(h_1 - h_2)/R$

$$u - (h_1 - h_2)/R = A_1 \frac{dh_1}{dt} = A_1 \dot{h}_1$$

$$(h_1 - h_2)/R = A_2 \frac{dh_2}{dt} = A_2 \dot{h}_2$$

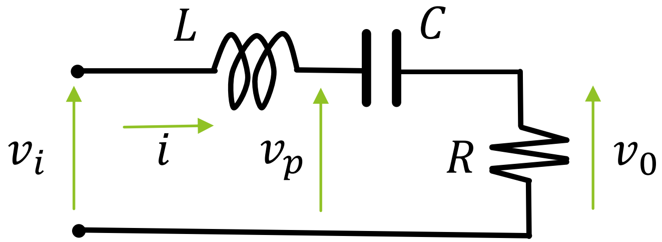
$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1 R} & \frac{1}{A_1 R} \\ \frac{1}{A_2 R} & \frac{-1}{A_2 R} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$h_2 = \underbrace{[0 \quad 1]}_{C} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$

Modelos Matemáticos por V.E

Ejemplo: Sistema LCR serie

Variables de estado elegidas: i y v_c



$$L\frac{di}{dt} + v_c + R\,i = v_i \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = -\frac{v_c}{L} - \frac{R}{L}\,i + \frac{1}{L}v_i$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}\,i$$

$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0]v_i$$

Modelos Matemáticos por V.E

Ejemplo: Sistema LCR serie

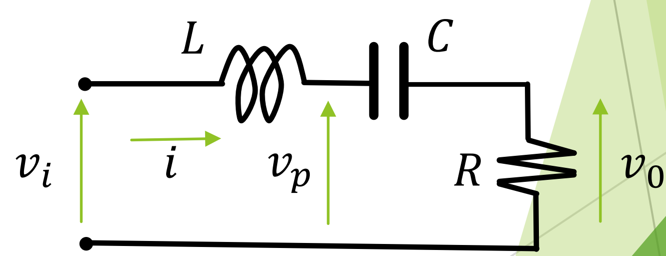
Variables de estado elegidas: v_0 y v_c

$$\frac{LR}{R}\frac{di}{dt} + v_c + v_0 = v_i \quad\Rightarrow\quad \frac{dv_0}{dt} = -\frac{Rv_c}{L} - \frac{R}{L}v_0 + \frac{R}{L}v_i$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}\,i$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_0\\ \dot{v}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{R}{L}\\ \frac{1}{RC} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_0\\ v_c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}v_i$$

$$v_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_0\\ v_c\end{bmatrix} + [0]v_i$$



Variables de estado elegidas: v_p y v_c

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_p\\ \dot{v}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(\frac{1}{RC} - \frac{R}{L}\right) & -\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_p\\ v_c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}v_i$$

$$v_0 = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_p\\ v_c\end{bmatrix} + [0]v_i$$

No existe unicidad en la representación por VE.

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación de Ecuaciones de Estado

Como vimos no existe unicidad en la postulación de un sistema a través de V.E.
Existen infinitas representaciones que resultan ser combinaciones lineales entre si.

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \qquad \dot{z} = A'z + B'u$$
$$y = C\,x + D\,u \qquad y = C'z + D'u$$

A partir de los estados originales de una representación, consideremos otro conjunto de n estados que resultan de combinaciones lineales independientes de los anteriores:

$$z = T^{-1}\,x \quad \Longrightarrow \quad x = T\,z$$

Obviamente T (n x n) es una matriz de constantes y debe ser invertible:

Derivando la segunda expresión respecto del tiempo:

$$\dot{x} = T\,\dot{z}$$

Luego, reemplazando:

$$T\dot{z} = A\,Tz + B\,u \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{z} = T^{-1}A\,Tz + T^{-1}B\,u$$
$$y = C\,Tz + D\,u \qquad\qquad\qquad y = C\,Tz + D\,u$$

La nueva realización del modelo será entonces:

$$\dot{z} = A'\,z + B'\,u \quad \Longrightarrow \quad A' = T^{-1}A\,T$$
$$y = C'\,z + D\,u \qquad\qquad B' = T^{-1}B$$
$$C' = C\,T$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación de Ecuaciones de Estado

Este tipo de transformaciones permite llevar un modelo escrito en cualquier forma a determinadas Formas Canónicas (Estructuras particulares) que se usan con el fin de analizar propiedades del sistema y/o para facilitar la metodología de diseño de controladores.

Existen muchas Formas Canónicas. En este curso trabajaremos especialmente con tres de ellas. Las mismas se verán en breve luego de algunas consideraciones. Debe quedar claro el procedimiento de transformación:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u} \end{aligned} \xrightarrow[\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{x}]{} \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{A}'\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}'\,\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}'\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$$
$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{T}$$

Es importante no perder de vista las dimensiones de cada una de las matrices.

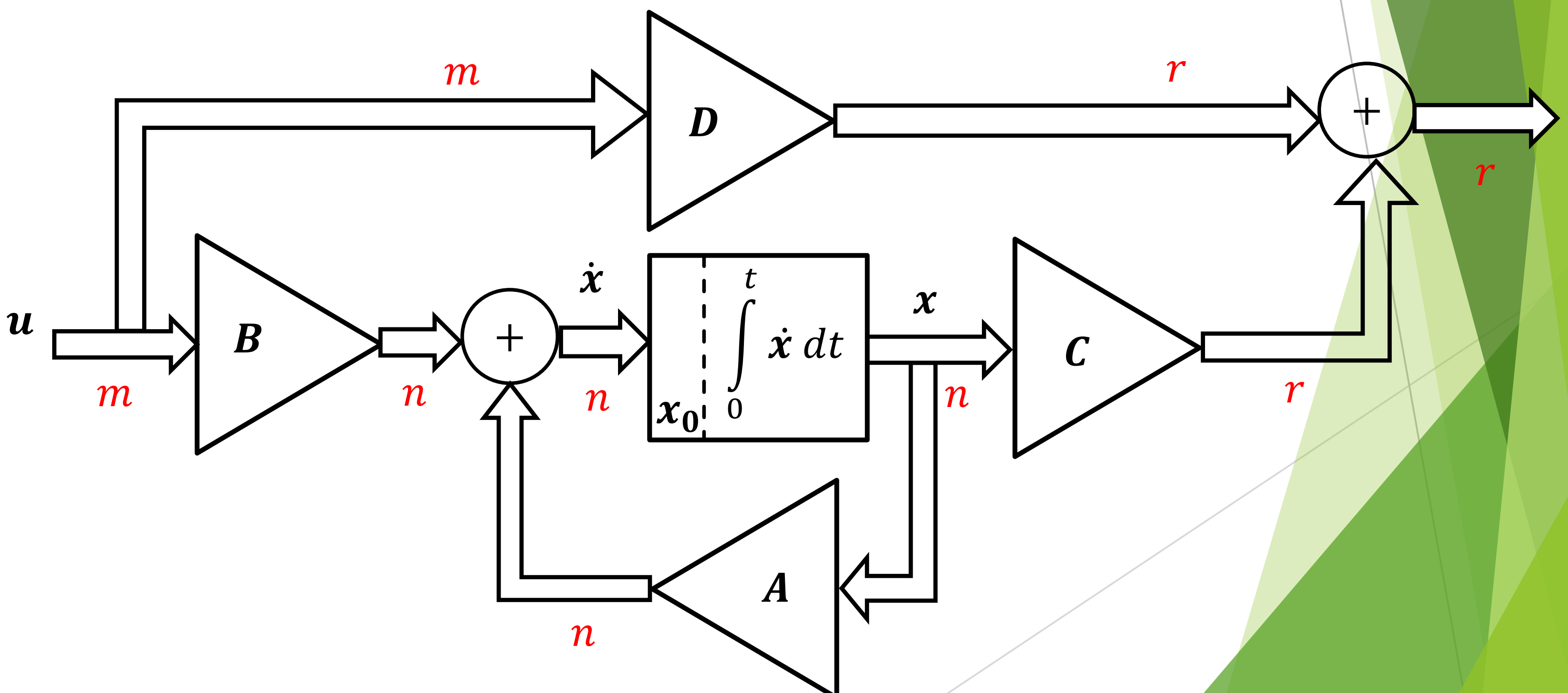
Modelos Matemáticos por V.E

Representación Grafica: Diagrama en Bloques

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$[y]_{r\times 1} = [C]_{r\times n}[x]_{n\times 1} + [D]_{r\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$\boldsymbol{\dot{x} = A\,x + B\,u}$$
$$\boldsymbol{y = C\,x + D\,u}$$



Modelos Matemáticos por V.E

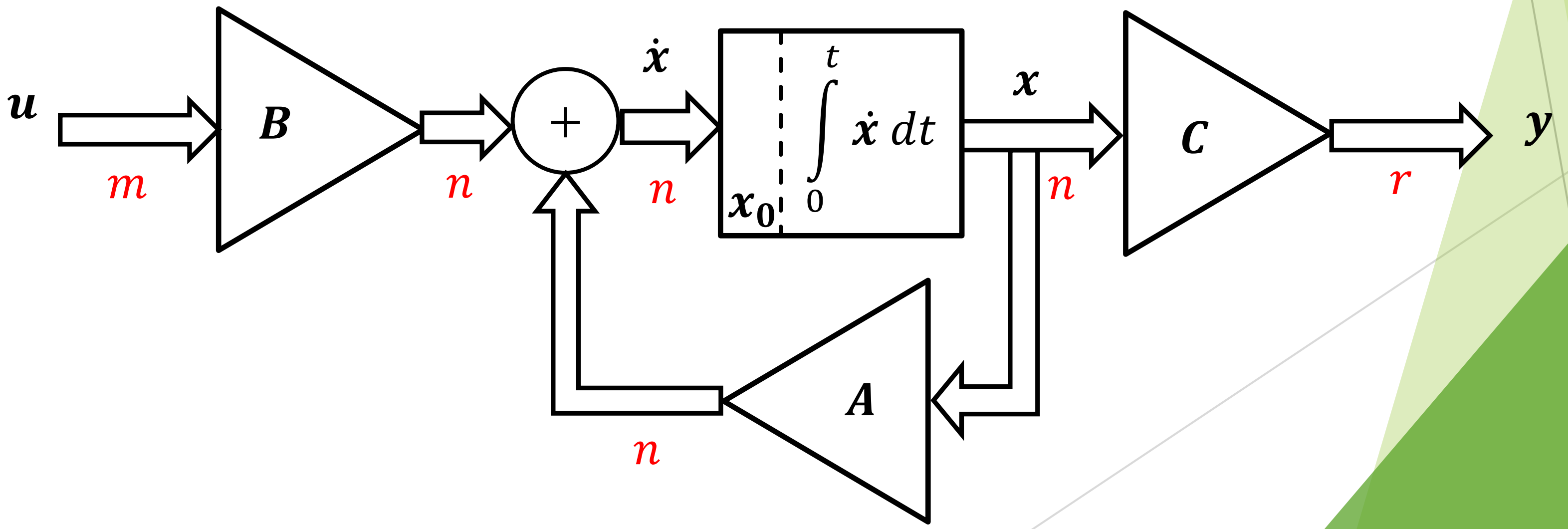
Representación Grafica: Diagrama en Bloques

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$[y]_{r\times 1} = [C]_{r\times n}[x]_{n\times 1} + [D]_{r\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$\boldsymbol{\dot{x}} = \boldsymbol{A\,x} + \boldsymbol{B\,u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C\,x} + \boldsymbol{D\,u}$$

Caso MIMO con D = 0



Modelos Matemáticos por V.E

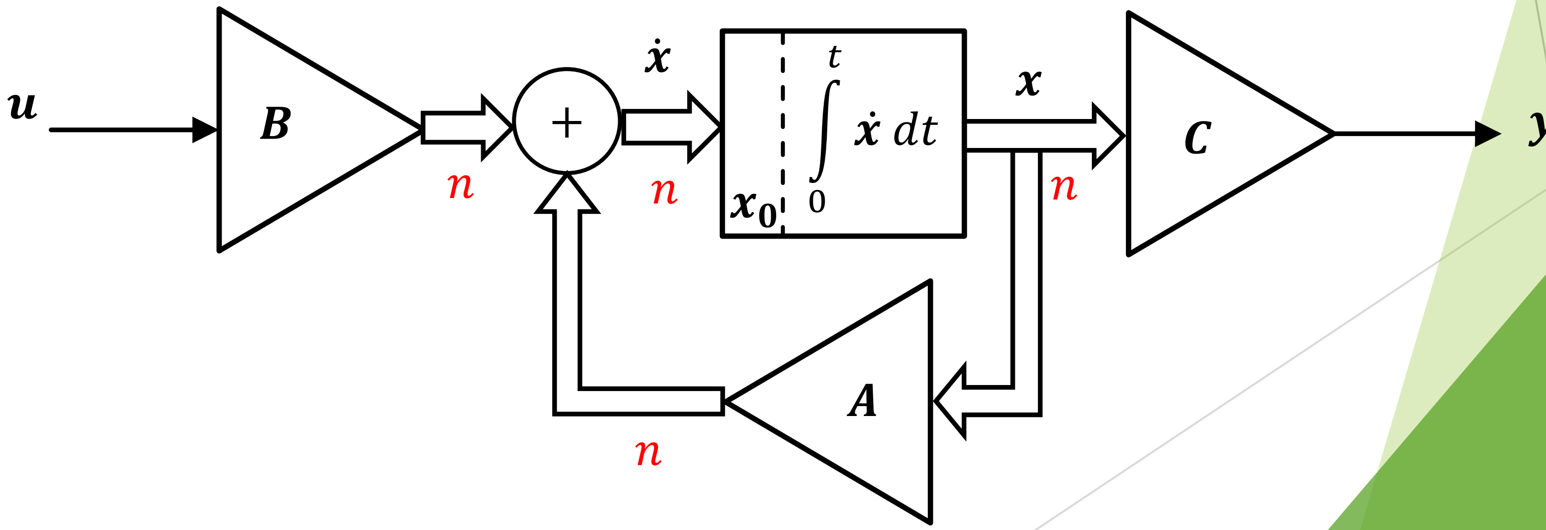
Representación Grafica: Diagrama en Bloques

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

$$[y]_{r\times 1} = [C]_{r\times n}[x]_{n\times 1} + [D]_{r\times m}\,[u]_{m\times 1}$$

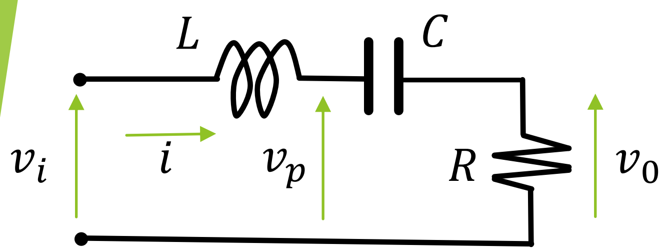
$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u \\ y &= \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,u \end{aligned}$$

Caso SISO con D = 0



Modelos Matemáticos por V.E

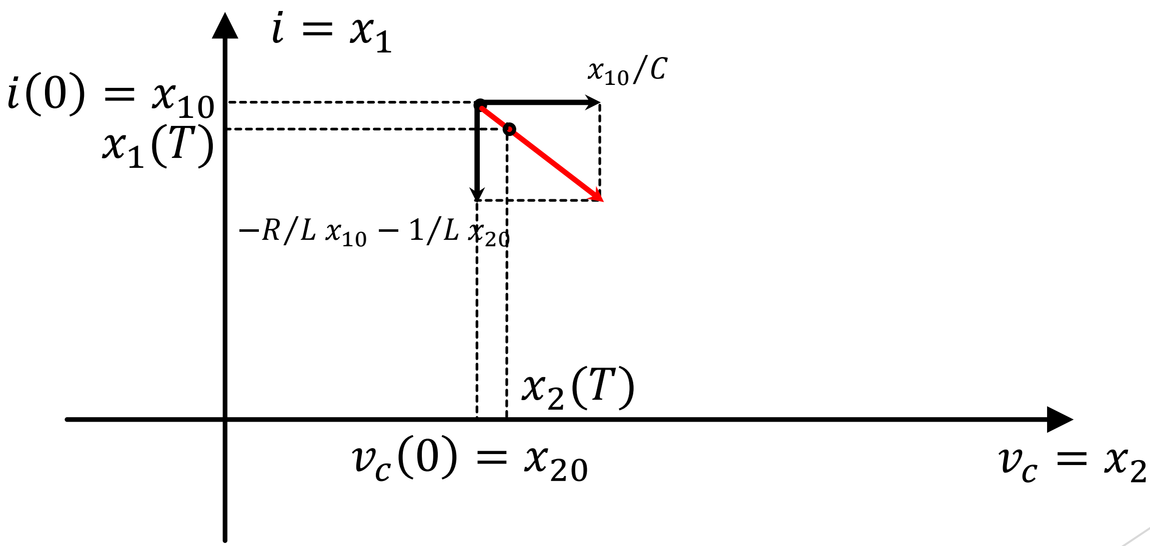
Interpretación Grafica del Modelo en V.E:



$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}} v_i$$

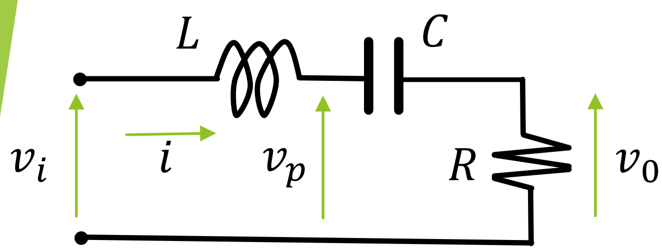
$$v_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0] v_i$$

Evolución Libre $v_i = 0$



Modelos Matemáticos por V.E

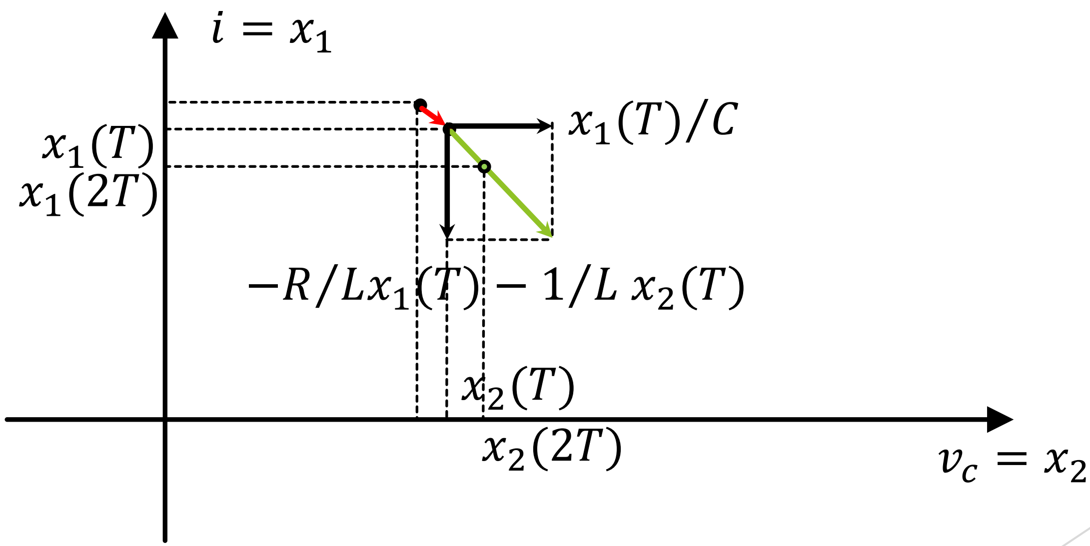
Interpretación Grafica del Modelo en V.E:



$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i}$$

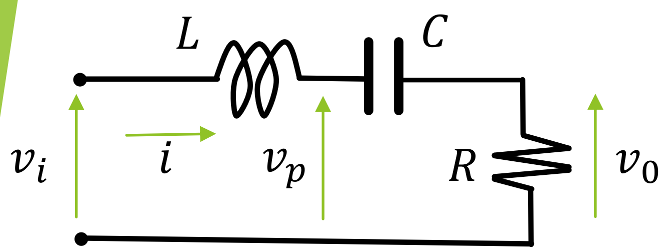
$$v_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0] v_i$$

Evolución Libre $v_i = 0$



Modelos Matemáticos por V.E

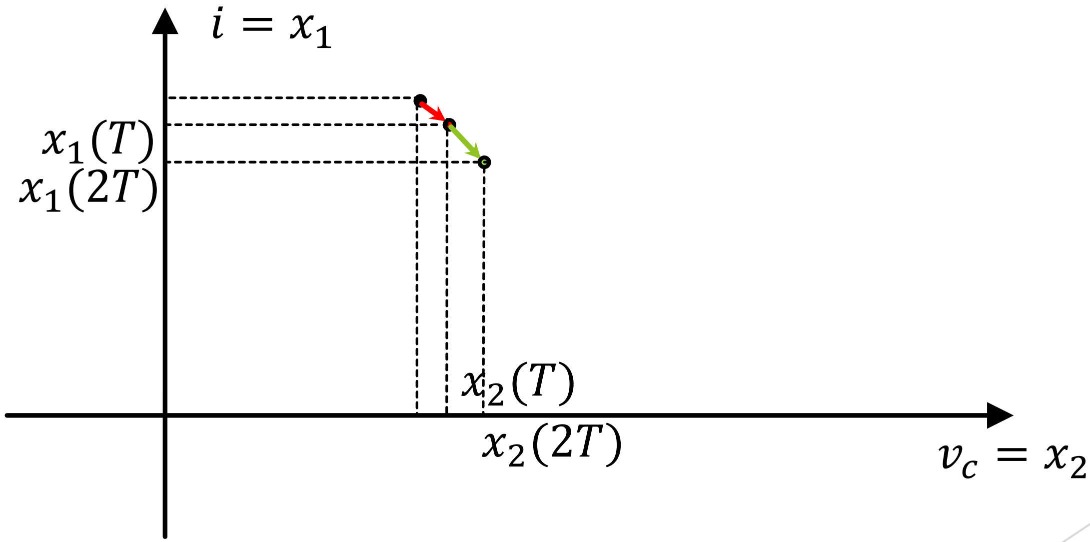
Interpretación Grafica del Modelo en V.E:



$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}} v_i$$

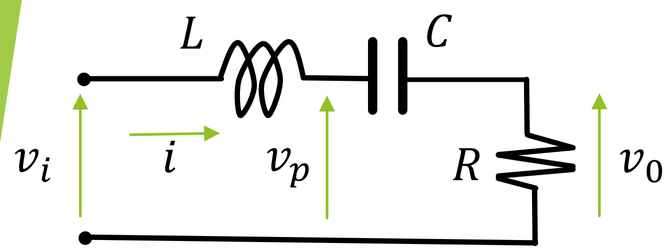
$$v_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0] v_i$$

Evolución Libre $v_i = 0$



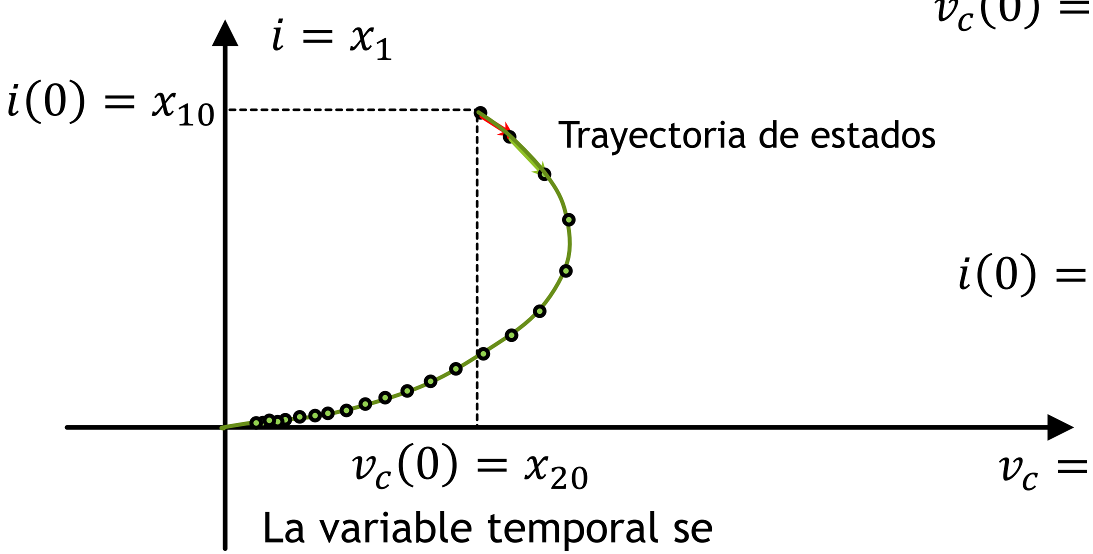
Modelos Matemáticos por V.E

Interpretación Grafica del Modelo en V.E:

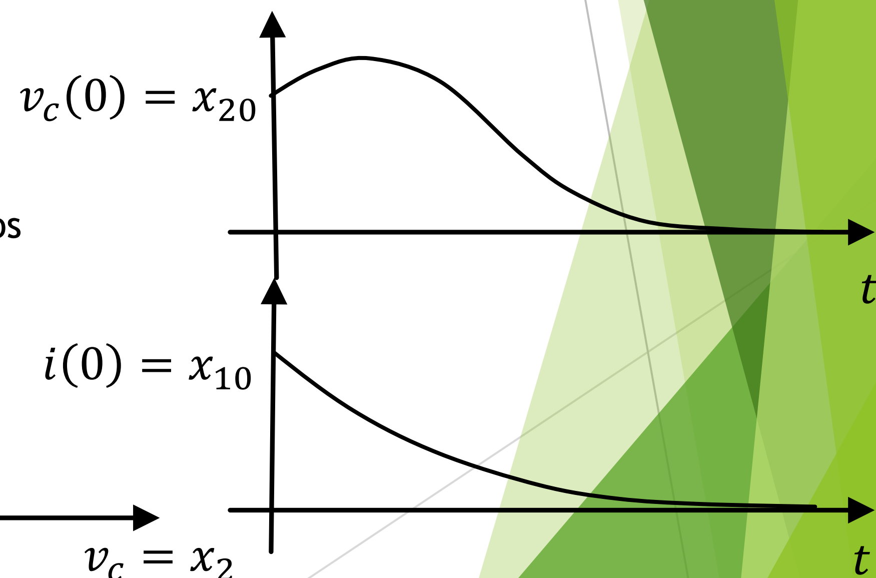


$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}} v_i$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0] v_i$$



La variable temporal se encuentra parametrizada

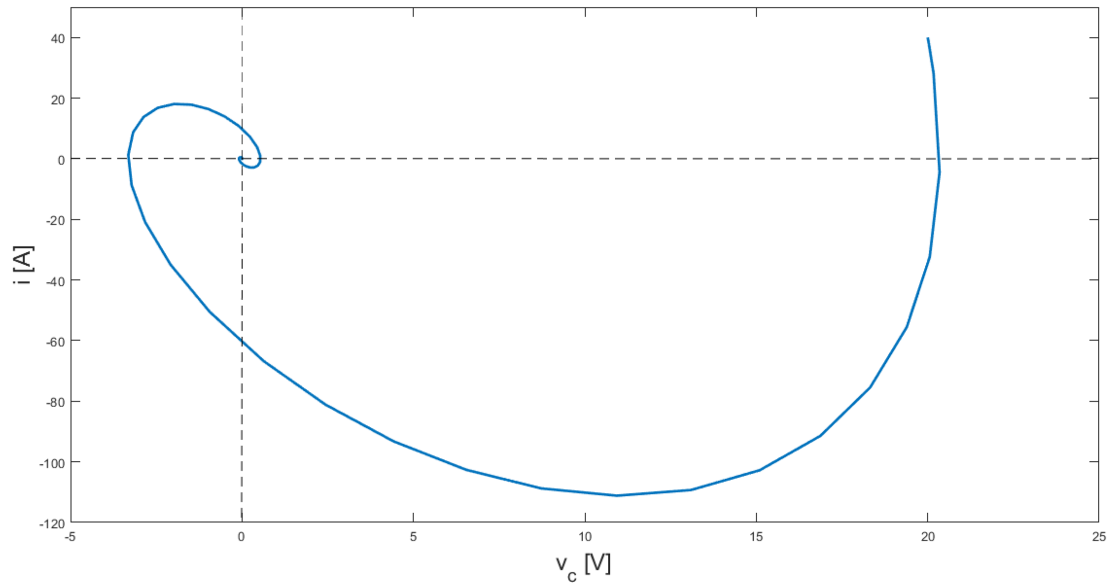


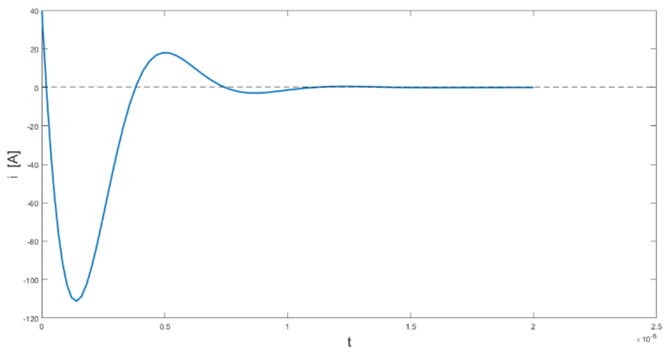
Modelos Matemáticos por V.E

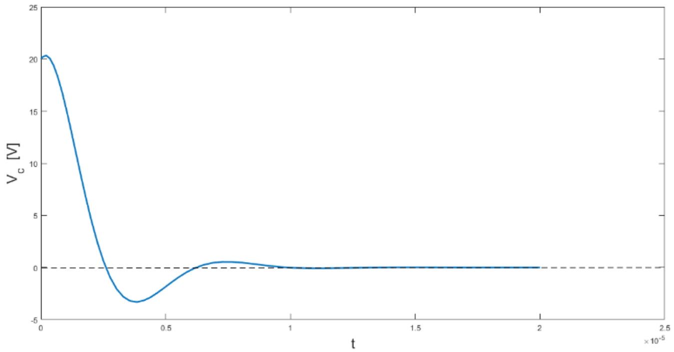
Interpretación Grafica del Modelo en V.E:

Evolución Libre $\nu_i = 0$

R=10 Ω L=1 μHy C=10μF







Modelos Matemáticos por V.E

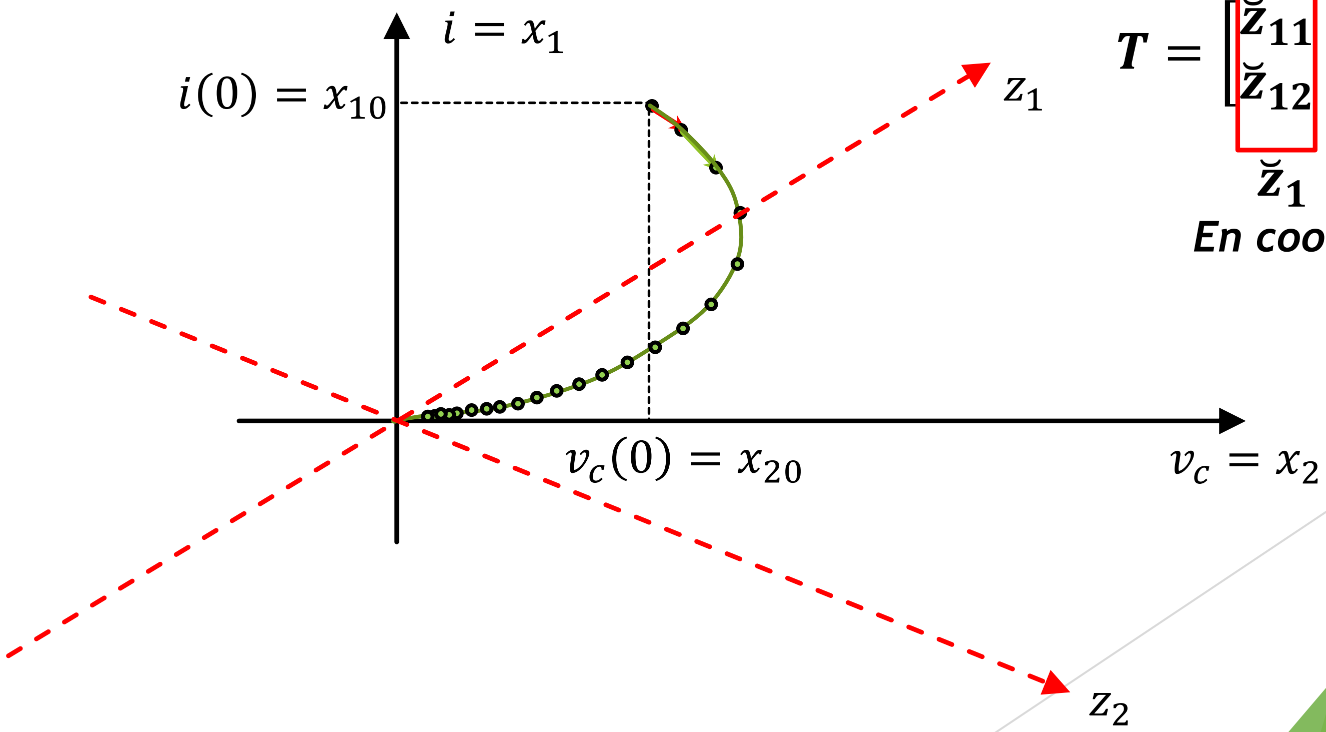
Transformación de Ecuaciones de Estado

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x + D\,u$$

$$z = T^{-1}\,x$$

$$\dot{z} = A'\,z + B'\,u$$
$$y = C'\,z + D\,u$$

$$A' = T^{-1} A\,T$$
$$B' = T^{-1} B$$
$$C' = C\,T$$



$$T = \begin{bmatrix} \breve{z}_{11} & \breve{z}_{21} \\ \breve{z}_{12} & \breve{z}_{22} \end{bmatrix}$$

$\breve{z}_1$ $\breve{z}_2$

En coordenadas x

Modelos Matemáticos por V.E

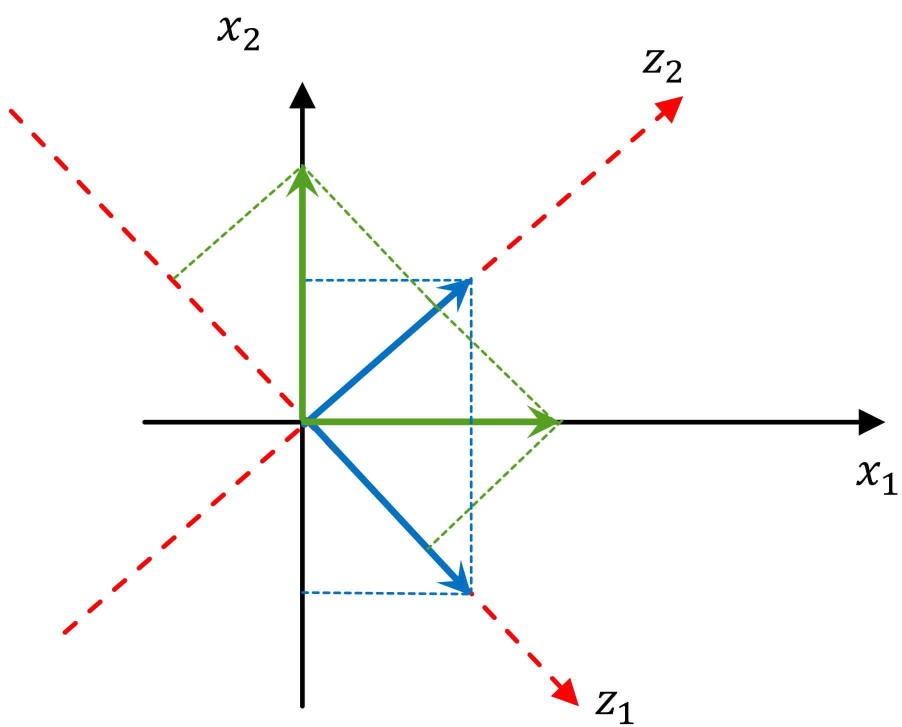
Transformación de Ecuaciones de Estado

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x + D\,u$$

$$z = T^{-1}\,x$$

$$\dot{z} = A'\,z + B'\,u$$
$$y = C'\,z + D\,u$$

$$A' = T^{-1} A\,T$$
$$B' = T^{-1} B$$
$$C' = C\,T$$

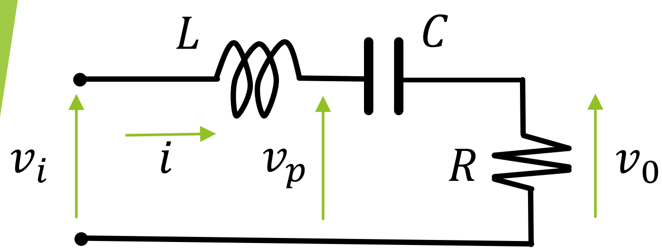


$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

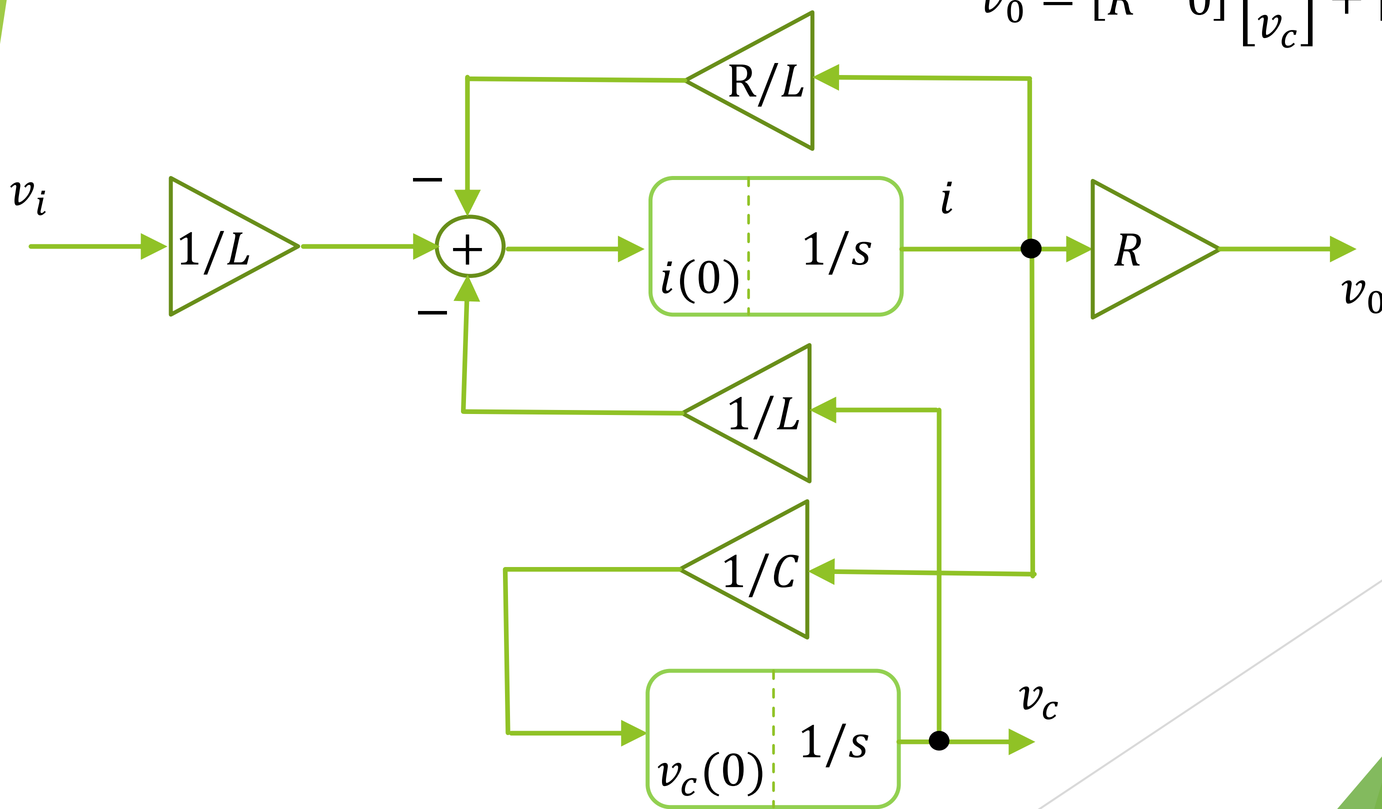
Modelos Matemáticos por V.E

Simulación (Computadora Analógica):



$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

$$v_0 = [R \quad 0] \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + [0] v_i$$



Modelos Matemáticos por V.E

Relación entre Modelos por V.E y Función de Transferencia

Para encontrar esta relación puede aplicarse la Transformada de Laplace a las ***expresiones matriciales***:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,u$$
$$y = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

$\Rightarrow$ Sistema SISO
Dominio temporal!!!

$$s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) - \cancel{\boldsymbol{x}(0)} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\,U(s) \Rightarrow s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}\,U(s)$$

$$Y(s) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{X}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{B}\,U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\,U(s) \Leftarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\,U(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}} \xrightarrow{\text{MIMO}} \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{U_1} & \frac{Y_1}{U_2} \cdots & \frac{Y_1}{U_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{Y_r}{U_1} & \frac{Y_r}{U_2} & \frac{Y_r}{U_m} \end{bmatrix}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Relación entre Modelos por V.E y Función de Transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{(\boldsymbol{Adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}))^{T}}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} \Longrightarrow \boldsymbol{Adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \cdots & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \cdots & \boldsymbol{a_{23}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n2}} & \boldsymbol{a_{n2}} \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_{ij}} = (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{i+j}}\, \boldsymbol{Det}\,(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \quad \underset{\textit{sin columna j}}{\textit{sin fila i}}$$

$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ Polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{s}$ que, al igualarlo a cero nos da los $\boldsymbol{n}$ polos de la función de transferencia. Estos coinciden con los denominados autovalores de la matriz ***A***. En este contexto se suele hablar de autovalores y no de polos

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \Longrightarrow \lambda_1; \lambda_2; \cdots \lambda_n$$

La información de la dinámica del sistema (polos) se encuentra dentro de la matriz A que por eso suele recibir el nombre de Matriz del Sistema.

Modelos Matemáticos por V.E

Formas Canónicas:

- Forma Canónica Controlable
- Forma Canónica Diagonal
- Forma Canónica Observable

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{z}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= A_c\,x + B_c\,u\\ y &= C_c\,x\end{aligned}}$$

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_2\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_2\frac{d^2 u}{dt^2} + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Controlable:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s-z_i)}{\prod_j (s-p_j)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{V(s)}\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n+\ldots+a_2 s^2+a_1 s+a_0} \quad \frac{b_m s^m+\ldots+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{1}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n+\ldots+a_2 s^2+a_1 s+a_0} \Rightarrow V(s)\left(s^n + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0\right) = U(s)$$

$$\underbrace{\frac{d^n v}{dt^n}} + a_{n-1}\underbrace{\frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}}}_{x_n} + \ldots + a_2\underbrace{\frac{d^2 v}{dt^2}}_{x_3} + a_1\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{x_2} + a_0\underbrace{v}_{x_1} = u$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= x_3\\
\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n\\
\dot{x}_n &= u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1}\, x_n
\end{aligned}
\Rightarrow
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
-a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}
\end{bmatrix}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Controlable:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{V(s)} \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{1}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b_m s^m + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0$$

$$b_m \underbrace{\frac{d^m v}{dt^n}}_{x_m} + b_{n-1} \underbrace{\frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}}}_{x_{m-1}} + \ldots + b_2 \underbrace{\frac{d^2 v}{dt^2}}_{x_3} + b_1 \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{x_2} + b_0 \underbrace{v}_{x_1} = y$$

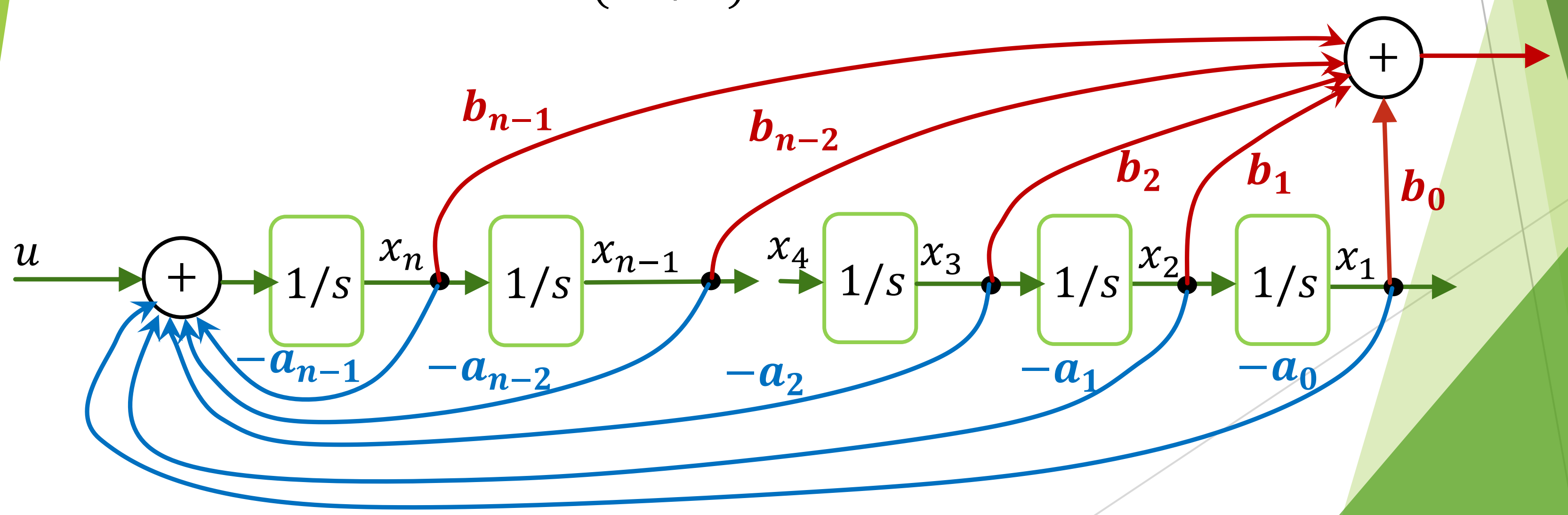
$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n-(m+1)}] \boldsymbol{x}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Controlable:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n-(m+1)}]\boldsymbol{x}$$



Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Forma Canónica Diagonal:

- ***Polos Reales Simples***
- ***Polos Reales Múltiples***
- ***Polos C****

Polos Reales Simples:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - \lambda_i} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \cdots \frac{R_n}{s - \lambda_n}$$

$$R_i = \lim_{s \to \lambda_i} \left(\frac{Y(s)}{U(s)} (s - \lambda_i) \right)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i U(s)}{s - \lambda_i} = R_1 \underbrace{\frac{U(s)}{s - \lambda_1}}_{x_1} + R_2 \underbrace{\frac{U(s)}{s - \lambda_2}}_{x_2} + \cdots R_n \underbrace{\frac{U(s)}{s - \lambda_n}}_{x_n}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Simples:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-\lambda_i} = \frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1} + \frac{R_2 U(s)}{s-\lambda_2} + \cdots \frac{R_n U(s)}{s-\lambda_n}$$

$$x_1 \qquad\qquad x_2 \qquad\qquad x_n$$

$$x_1 = \frac{U(s)}{s-\lambda_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$$

$$x_2 = \frac{U(s)}{s-\lambda_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$x_n = \frac{U(s)}{s-\lambda_n} \Rightarrow \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u$$

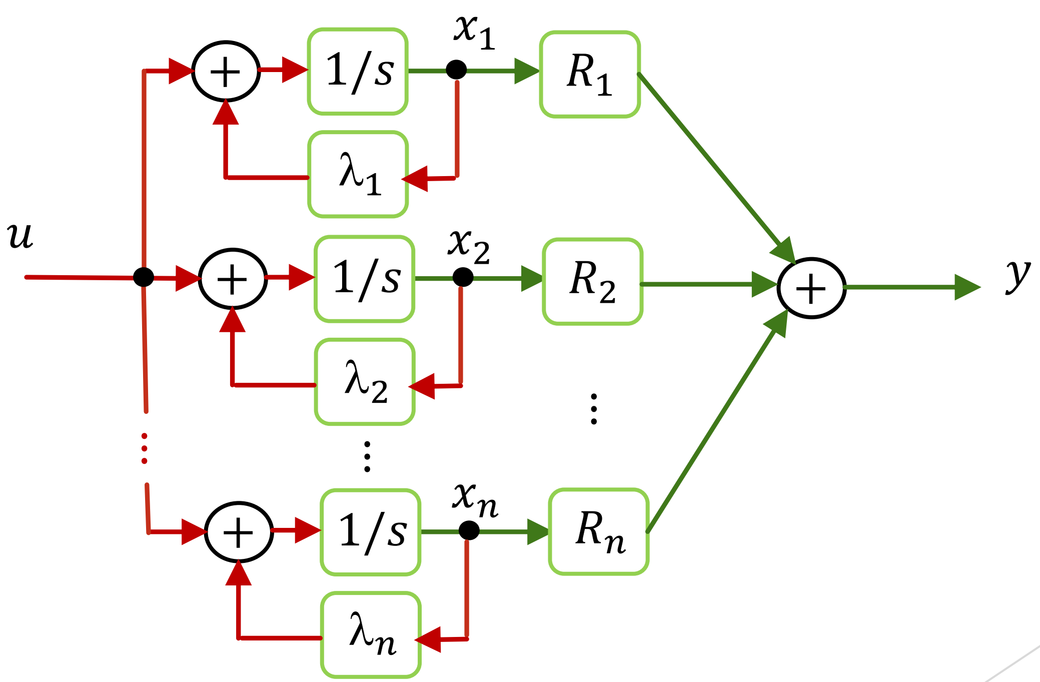
$$y = R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots + R_n x_n \Rightarrow y = [R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_{n-1} \quad R_n]\, \boldsymbol{x}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Simples:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_{n-1} \quad R_n]\, \boldsymbol{x}$$



Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Múltiples:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$Y(s) = \frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1} + \frac{R_{21} U(s)}{s-\lambda_2} + \frac{R_{22} U(s)}{(s-\lambda_2)^2} + \cdots \frac{R_{2k} U(s)}{(s-\lambda_2)^k} + \cdots \frac{R_n U(s)}{s-\lambda_n}$$

$$R_{2i} = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s\to\lambda_2} \left(\frac{d^{i-1}\left[Y(s)/U(s)\,(s-\lambda_2)^k\right]}{ds^{i-1}} \right) \qquad i = 1 \cdots k$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1}}_{x_1} + \underbrace{\frac{R_{21} U(s)}{s-\lambda_2}}_{x_2} + \frac{R_{22} U(s)}{(s-\lambda_2)^2} + \cdots \frac{R_{2k} U(s)}{(s-\lambda_2)^k} + \cdots \underbrace{\frac{R_n U(s)}{s-\lambda_n}}_{x_n}$$

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u$$
$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u$$

$$\frac{U(s)}{(s-\lambda_2)^2} = \frac{x_2}{s-\lambda_2} = x_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = x_2 + \lambda_2 x_3$$

$$\frac{U(s)}{(s-\lambda_2)^k} = \frac{x_k}{s-\lambda_2} = x_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{k+1} = x_k + \lambda_2 x_{k+1}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Múltiples:

$$Y(s) = \frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1} + \frac{R_{21} U(s)}{s-\lambda_2} + \frac{R_{22} U(s)}{(s-\lambda_2)^2} + \cdots \frac{R_{2k} U(s)}{(s-\lambda_2)^k} + \cdots \frac{R_n U(s)}{s-\lambda_n}$$

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 + \lambda_2 x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{k+1} &= x_k + \lambda_2 x_{k+1} \end{aligned}}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u$$

$$k = 4$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [R_1 \quad \boxed{R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23} \quad R_{24}} \quad R_3 \quad \cdots \quad R_n]\, \boldsymbol{x}$$

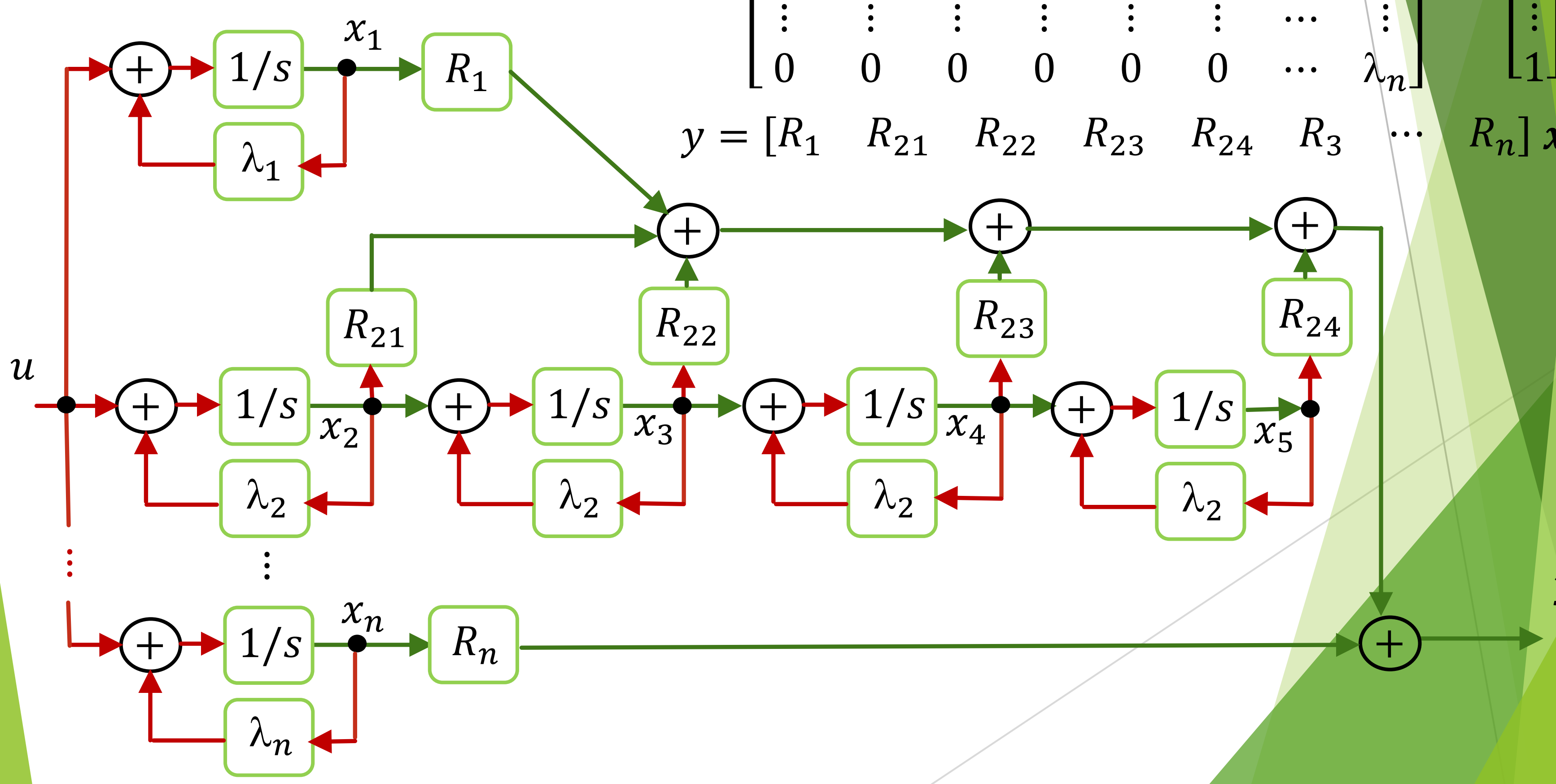
Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Reales Múltiples:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [R_1 \quad R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23} \quad R_{24} \quad R_3 \quad \cdots \quad R_n]\, \boldsymbol{x}$$



Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Complejos Conjugados:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$Y(s) = \frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1} + \frac{R_{21} U(s)}{s-\lambda_2} + \frac{R_{22} U(s)}{(s-\lambda_2)^2} + \frac{R_{23} U(s)}{(s-\lambda_2)^3} + \cdots + \frac{(\lambda + j\gamma)U(s)}{s+\sigma-j\omega} + \frac{(\lambda - j\gamma)U(s)}{s+\sigma+j\omega}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R_1 U(s)}{s-\lambda_1}}_{x_1} + \underbrace{\frac{R_{21} U(s)}{s-\lambda_2}}_{x_2} + \underbrace{\frac{R_{22} U(s)}{(s-\lambda_2)^2}}_{x_3} + \underbrace{\frac{R_{23} U(s)}{(s-\lambda_2)^3}}_{x_4} + \cdots \frac{2\big(\lambda s + (\lambda\sigma - \omega\gamma)\big)U(s)}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2}$$

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + \lambda_2 x_3$$

$$\dot{x}_4 = x_3 + \lambda_2 x_4$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma^2 - \omega^2 & -2\sigma \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

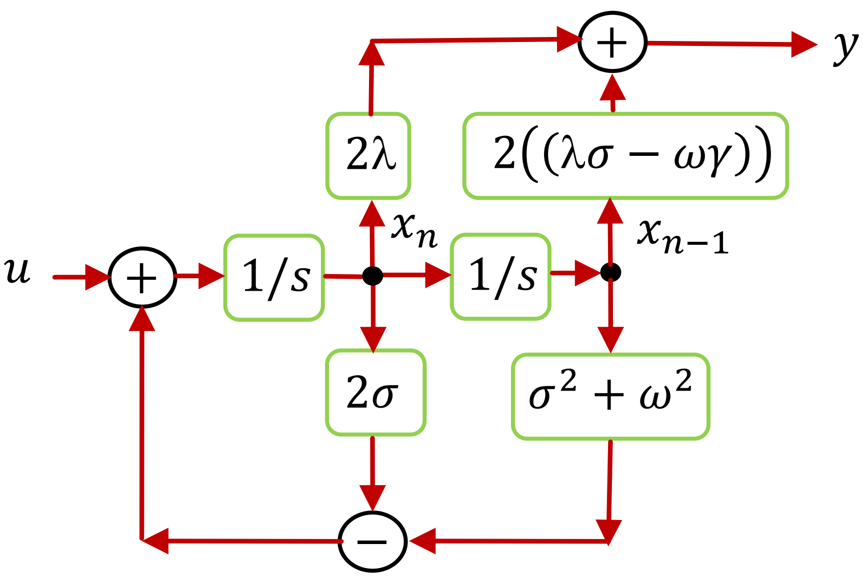
$$y = \begin{bmatrix} R_1 & R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & 2\big((\lambda\sigma - \omega\gamma)\big) & 2\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

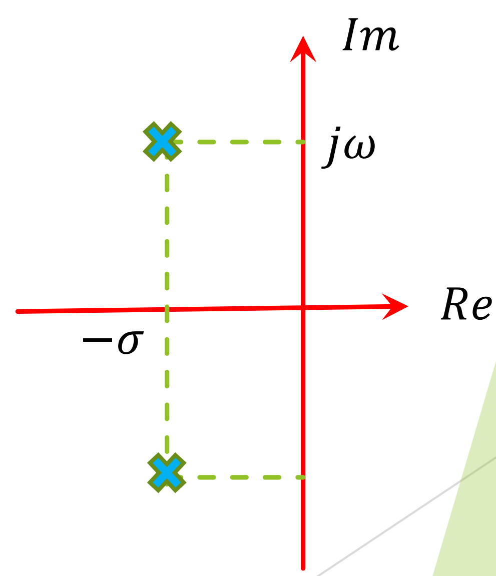
Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Diagonal:

Polos Complejos Conjugados:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & -\sigma^2 - \omega^2 & -2\sigma \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} \cdots & 2\big((\lambda\sigma - \omega\gamma)\big) & 2\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$





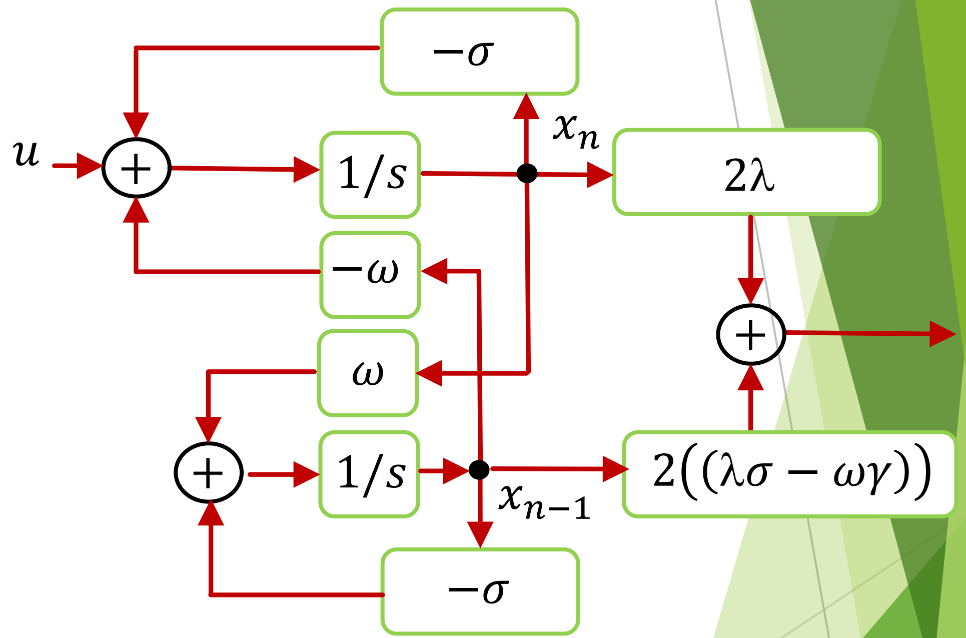
Modelos Matemáticos por V.E

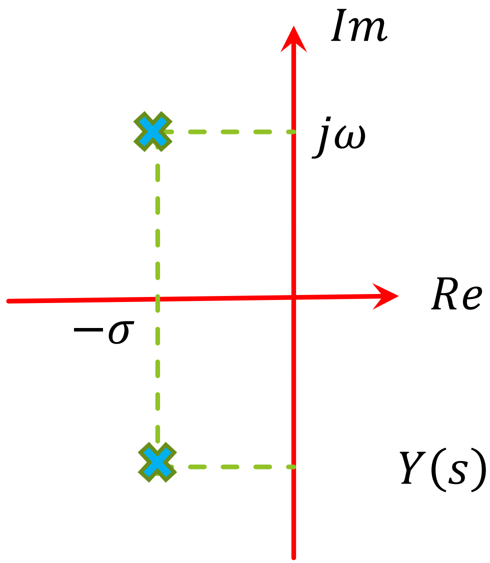
Forma Canónica Diagonal:

Polos Complejos Conjugados:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -\sigma & \omega \\ \cdots & -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \cdots & 2\big((\lambda\sigma - \omega\gamma)\big) & 2\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$





$$Y(s) = \cdots \frac{2\big(\lambda s + (\lambda\sigma - \omega\gamma)\big)U(s)}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} = \frac{(\lambda + j\gamma)U(s)}{s + \sigma - j\omega} + \frac{(\lambda - j\gamma)U(s)}{s + \sigma + j\omega}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Observable:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = k\frac{\prod_i (s-z_i)}{\prod_j (s-p_j)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2\, s^2 + a_1 s + a_0\right)Y(s) = \left(b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_2\, s^2 + b_1 s + b_0\right)U(s)$$

$$s^n Y(s) + s^{n-1}\left(a_{n-1}Y(s) - b_{n-1}U(s)\right) + \cdots + s\left(a_1 Y(s) - b_1 U(s)\right) + \left(a_0 Y(s) - b_0 U(s)\right) = 0$$

$$Y(s) = \frac{\left(-a_{n-1}Y(s) + b_{n-1}U(s)\right)}{s} + \cdots + \frac{\left(-a_1 Y(s) + b_1 U(s)\right)}{s^{n-1}} + \frac{\left(-a_0 Y(s) + b_0 U(s)\right)}{s^n}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\left[\left(-a_{n-1}Y(s) + b_{n-1}U(s)\right) + \cdots + \frac{\left(-a_1 Y(s) + b_1 U(s)\right)}{s^{n-2}} + \frac{\left(-a_0 Y(s) + b_0 U(s)\right)}{s^{n-1}}\right]$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Observable:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}\left[\left(-a_{n-1}Y(s)+b_{n-1}U(s)\right)+\cdots+\underbrace{\frac{1}{s}\left[\left(-a_1Y(s)+b_1U(s)\right)+\underbrace{\frac{1}{s}\left[\left(-a_0Y(s)+b_0U(s)\right)\right]}_{x_1}\right]}_{x_2}\right]}_{x_n}$$

$$x_1 = \frac{1}{s}\left[\left(-a_0Y(s)+b_0U(s)\right)\right] \Rightarrow \dot{x}_1 = -a_0\, y + b_0\, u$$

$$x_2 = \frac{1}{s}\left[\left(-a_1Y(s)+b_1U(s)\right)+x_1\right] \Rightarrow \dot{x}_2 = -a_1\, y + b_1\, u + x_1$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{s}\left[\left(-a_{n-2}Y(s)+b_{n-2}U(s)\right)+x_{n-2}\right] \Rightarrow \dot{x}_{n-1} = -a_{n-2}\, y + b_{n-2}\, u + x_{n-2}$$

$$x_n = \frac{1}{s}\left[\left(-a_{n-1}Y(s)+b_{n-1}U(s)\right)+x_{n-1}\right] \Rightarrow \dot{x}_n = -a_{n-1}\, \underbrace{y}_{x_n} + b_{n-1}\, u + x_{n-1}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Observable:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -a_0\, y + b_0\, u \\
\dot{x}_2 &= -a_1\, y + b_1\, u + x_1 \\
\dot{x}_{n-1} &= -a_{n-2}\, y + b_{n-2}\, u + x_{n-2} \\
\dot{x}_n &= -a_{n-1}\, y + b_{n-1}\, u + x_{n-1}
\end{aligned}
$$

x_n

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -a_0 x_n + b_0\, u \\
\dot{x}_2 &= -a_1 x_n + b_1\, u + x_1 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= -a_{n-2}\, x_n + b_{n-2}\, u + x_{n-2} \\
\dot{x}_n &= -a_{n-1}\, x_n + b_{n-1}\, u + x_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
$$

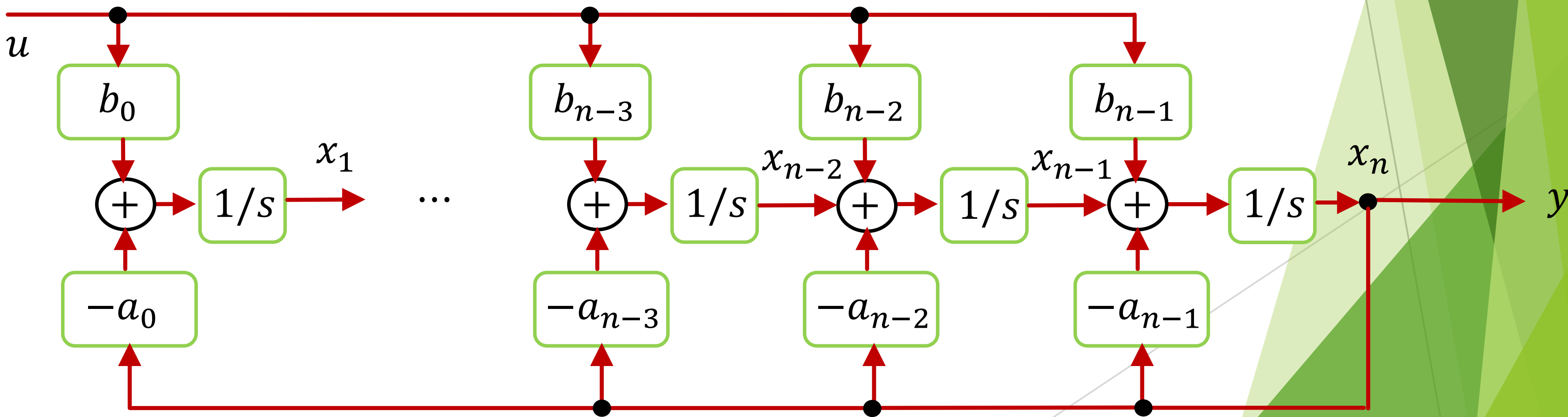
- $A_o = A_c^T$

Modelos Matemáticos por V.E

Forma Canónica Observable:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1]\, \boldsymbol{x}$$



Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Este tipo de transformaciones permite llevar un modelo escrito en cualquier forma a determinadas Formas Canónicas (Estructuras particulares) que se usan con el fin de analizar propiedades del sistema y/o para facilitar la metodología de diseño de controladores.

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \qquad\qquad \dot{z} = A'\,z + B'\,u$$
$$y = C\,x + D\,u \quad \xrightarrow[z = T^{-1}\,x]{} \quad y = C'\,z + D\,u$$

$$A' = T^{-1} A\,T$$
$$B' = T^{-1} B$$
$$C' = C\,T$$

Donde ahora ***A'*** ***B'*** y ***C'*** corresponden a una de las formas canónicas vistas.

La cuestión entonces es como encontrar la matriz de transformación ***T***

Consideremos que queremos encontrar la matriz ***T*** que nos lleve a la FC diagonal. Como esta forma tiene varios casos, tomemos inicialmente el mas fácil que es el de autovalores (polos) reales y distintos.

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Diagonal Pura:

$$A' = A_d = T^{-1} A\, T \quad \Longrightarrow \quad T A_d = A\, T$$

T es invertible y esta formada por *n* vectores columna **LI** que denominaremos $\boldsymbol{v_i}$

$$[\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \dots \quad \boldsymbol{v_n}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \underset{n \times n}{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{v_1} \quad \underset{n \times 1}{\boldsymbol{v_2}} \quad \dots \quad \boldsymbol{v_n}]$$

λ_i *Autovalores (polos)*

$$[\boldsymbol{v_1}\lambda_1 \quad \boldsymbol{v_2}\lambda_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{v_n}\lambda_n] = [\boldsymbol{A v_1} \quad \boldsymbol{A v_2} \quad \dots \quad \boldsymbol{A v_n}]$$

$$\boldsymbol{v_i}\lambda_i - \boldsymbol{A v_i} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0} \quad i = 1 \cdots n$$

$\boldsymbol{v_i}$ *Autovectores de la matriz **A***

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Diagonal Pura:

T está conformada por los *n* autovectores de la matriz ***A*** (columnas)

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{A_1R} & \dfrac{1}{A_1R}\\ \dfrac{1}{A_2R} & \dfrac{-1}{A_2R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A_1}\\ 0\end{bmatrix}u \qquad h_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+[0]u$$

$$|\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0} \quad i=1\cdots n$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{A_1R} & \dfrac{1}{A_1R}\\ \dfrac{1}{A_2R} & \dfrac{-1}{A_2R}\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}\lambda+\dfrac{1}{A_1R} & \dfrac{-1}{A_1R}\\ \dfrac{-1}{A_2R} & \lambda+\dfrac{1}{A_2R}\end{bmatrix}\right|=\left(\lambda+\frac{1}{A_1R}\right)\left(\lambda+\frac{1}{A_2R}\right)-\frac{1}{A_1RA_2R}=0$$

$$\left(\lambda+\frac{1}{A_1R}\right)\left(\lambda+\frac{1}{A_2R}\right)-\frac{1}{A_1RA_2R}=\lambda^2+\lambda\left(\frac{1}{A_1R}+\frac{1}{A_2R}\right)+\cancel{\frac{1}{A_1RA_2R}}-\cancel{\frac{1}{A_1RA_2R}}=0$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{1}{A_1R} + \frac{1}{A_2R}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -\frac{(A_1 + A_2)}{A_1A_2R}$$

$$(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0} \quad i = 1 \cdots n$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1R} & \frac{-1}{A_1R} \\ \frac{-1}{A_2R} & \frac{1}{A_2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{A_1R}v_{11} - \frac{1}{A_1R}v_{21} = 0 \\ \frac{-1}{A_2R}v_{11} + \frac{1}{A_2R}v_{21} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -\frac{(A_1 + A_2)}{A_1A_2R}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R} & 0 \\ 0 & -\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1R} & \frac{1}{A_1R} \\ \frac{1}{A_2R} & \frac{-1}{A_2R} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R} + \frac{1}{A_1R} & \frac{-1}{A_1R} \\ \frac{-1}{A_2R} & -\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R} + \frac{1}{A_2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R}+\dfrac{1}{A_1R} & \dfrac{-1}{A_1R} \\ \dfrac{-1}{A_2R} & -\dfrac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R}+\dfrac{1}{A_2R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{A_2R} & \dfrac{-1}{A_1R} \\ \dfrac{-1}{A_2R} & -\dfrac{1}{A_1R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{A_2}v_{12}-\frac{1}{A_1}v_{22}&=0 \\ -\frac{1}{A_2}v_{12}-\frac{1}{A_1}v_{22}&=0 \end{aligned}\right\} \quad v_{12}=\frac{-A_2}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \quad v_{22}=\frac{A_1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}}$$

$$T=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-A_2}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{A_1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}A_1}{A_1+A_2} & \dfrac{\sqrt{2}A_2}{A_1+A_2} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

$$\boldsymbol{A_d = T^{-1} A\, T}$$

$$\boldsymbol{A_d} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}A_1}{A_1+A_2} & \dfrac{\sqrt{2}A_2}{A_1+A_2} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{A_1R} & \dfrac{1}{A_1R} \\ \dfrac{1}{A_2R} & \dfrac{-1}{A_2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-A_2}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{A_1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{(A_1+A_2)}{A_1A_2R} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_d = T^{-1}B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}A_1}{A_1+A_2} & \dfrac{\sqrt{2}A_2}{A_1+A_2} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{A_1+A_2} \\ \dfrac{-\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}}{A_1(A_1+A_2)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C_d = CT} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-A_2}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{A_1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{A_1}{\sqrt{{A_2}^2+{A_1}^2}} \end{bmatrix}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Diagonal con Bloque de Jordan:

$$[\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \boldsymbol{v_3} \quad \boldsymbol{v_4} \quad \boldsymbol{v_5}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \boldsymbol{v_3} \quad \boldsymbol{v_4} \quad \boldsymbol{v_5}]$$

$$\boldsymbol{v_4}\lambda_2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v_4}$$

$$\boldsymbol{v_3}\lambda_2 + \boldsymbol{v_4} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v_3}$$

$$\boldsymbol{v_2}\lambda_2 + \boldsymbol{v_3} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v_2}$$

Conocidos los autovectores puedo entonces conformar la matriz T y transformar el sistema a su forma 'diagonal'

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Diagonal con Bloque de Jordan:

$$[\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \boldsymbol{v_3} \quad \boldsymbol{v_4} \quad \boldsymbol{v_5} \quad \boldsymbol{v_6}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & -\sigma \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \boldsymbol{v_3} \quad \boldsymbol{v_4} \quad \boldsymbol{v_5} \quad \boldsymbol{v_6}]$$

$$-\boldsymbol{v_5}\sigma - \boldsymbol{v_6}\omega - \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_5} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{v_5}\omega - \boldsymbol{v_6}\sigma - \boldsymbol{A}\boldsymbol{v_6} = \boldsymbol{0}$$

Cada ecuación anterior implica dos combinaciones lineales diferentes de las componentes de ambos autovectores.

Luego, conocidos los autovectores puedo entonces conformar la matriz T y transformar el sistema a su forma 'diagonal'

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Controladora: $A_c = T^{-1}A\,T$

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = A[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]$$

$$-v_n a_0 - Av_1 = 0$$

$$v_1 - v_n\, a_1 - Av_2 = 0$$

$$v_2 - v_n\, a_2 - Av_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} - v_n\, a_{n-1} - Av_n = 0$$

$B_c = T^{-1}B$ ⇒ $TB_c = B$ ⇒ $[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = B$ ⇒ $v_n = B$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Controladora:

$$\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{v_{n-1}} - \boldsymbol{v_n}\, a_{n-1} - \boldsymbol{A v_n} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_{n-1}} = \boldsymbol{B} a_{n-1} + \boldsymbol{AB}$$

$$\boldsymbol{v_{n-2}} - \boldsymbol{v_n}\, a_{n-2} - \boldsymbol{A v_{n-1}} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_{n-2}} = \boldsymbol{B} a_{n-2} + \boldsymbol{AB} a_{n-1} + \boldsymbol{A^2 B}$$

$$\boldsymbol{v_{n-3}} - \boldsymbol{v_n}\, a_{n-3} - \boldsymbol{A v_{n-2}} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_{n-3}} = \boldsymbol{B} a_{n-3} + \boldsymbol{AB} a_{n-2} + \boldsymbol{A^2 B} a_{n-1} + \boldsymbol{A^3 B}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_n}\, a_1 - \boldsymbol{A v_2} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{B} a_1 + \boldsymbol{AB} a_2 + \boldsymbol{A^2 B} a_3 + \cdots \boldsymbol{A^{n-1} B}$$

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A^2 B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A^{n-1} B}]}_{\text{Matriz de Controlabilidad } Q_c} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Controladora (forma alternativa):

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$Q_{cc} = \left[B_c \quad A_cB_c \quad A_c^2B_c \quad \cdots \quad A_c^{n-1}B_c\right]$$

$$A_c = T^{-1}A\,T$$
$$B_c = T^{-1}B$$

$$Q_{cc} = \left[T^{-1}B \quad T^{-1}A\,TT^{-1}B \quad \left(T^{-1}A\,T\right)\left(T^{-1}A\,T\right)T^{-1}B \quad \cdots \quad \left(T^{-1}A\,T\right)^{n-1}T^{-1}B\right]$$

$$Q_{cc} = \left[T^{-1}B \quad T^{-1}A\,B \quad \left(T^{-1}A\right)(A)B \quad \cdots \quad T^{-1}(A)^{n-1}B\right]$$

$$Q_{cc} = T^{-1}[B \quad A\,B \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = T^{-1}\,Q_c$$

$$\boxed{T = Q_cQ_{cc}^{-1}}$$

Modelos Matemáticos por V.E

Transformación hacia Formas Canónicas

Forma Observadora:

$$Q_o = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T$$

$$Q_{oo} = \left[C_o \quad C_oA_o \quad C_oA_o^2 \quad \cdots \quad C_oA_o^{n-1}\right]^T$$

$$A_o = T^{-1}A\,T$$
$$C_o = CT$$

$$Q_{oo} = \left[CT \quad CTT^{-1}A\,T \quad CTT^{-1}A\,TT^{-1}A\,T \quad \cdots \quad CT\left(T^{-1}A\,T\right)^{n-1}\right]^T$$

$$Q_{oo} = [CT \quad CAT \quad CA^2T \quad \cdots \quad CA^{n-1}T]^T$$

$$Q_{oo} = T^T[C \quad CA \quad CA^2 \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T = T^TQ_o$$

$$\boxed{T = \left(Q_{oo}Q_o^{-1}\right)^T = {Q_o^{-1}}^T{Q_{oo}}^T}$$