Control Automático II - Ing. Electrónica
Ejercicio Resuelto 3: Teorema de Cayley-Hamilton

Introducción

A continuación se presentan unos pocos y simples ejemplos que muestran como puede emplearse el Teorema de Cayley-Hamilton para simplificar algunas deducciones y cálculos algebraicos que son frecuentes en la teoría del control moderno.

Polinomio de matrices

Cualquier polinomio escalar

$$P\left(x\right) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k, \tag{1}$$

puede emplearse para definir un polinomio de matrices $P(M_{n \times n})$

$$P\left(M\right) = c_0 I + c_1 M + c_2 M^2 + ... + c_k M^k. \tag{2}$$

También, puede decirse que todo polinomio de matrices tiene asociado un polinomio escalar.

Una propiedad interesante de la correspondencia entre polinomios escalares y matriciales es que toda operación realizada sobre el polinomio escalar también es válida para el polinomio matricial.

Así, por ejemplo, expresiones alternativas a la ecuación (1) del polinomio escalar $P(x)$

$$P\left(x\right) = K\left(x - a_1\right)\left(x - a_2\right)...\left(x - a_k\right), \tag{3}$$

$$P\left(x\right) = K\left(x^2 - \left(a_1 + a_2\right)x + a_1 a_2\right)...\left(x - a_k\right), \tag{4}$$

también son válidas para el polinomio de matrices $P(M)$:

$$P\left(M\right) = K\left(M - a_1 I\right)\left(M - a_2 I\right)...\left(M - a_k I\right), \tag{5}$$

$$P\left(M\right) = K\left(M^2 - \left(a_1 + a_2\right)M + a_1 a_2 I\right)...\left(M - a_k I\right). \tag{6}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Este teorema, debido a Arthur Cayley y William Rowan Hamilton, dice que toda matriz verifica su ecuación característica. Luego, si

$$Q(\lambda) = |\lambda I - M| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n \tag{7}$$

es la ecuación característica de M, entonces:

$$Q(M) = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + ... + a_n M^n = 0_{n\times n}. \tag{8}$$

Ejemplo 1. Inversión de matrices.

Calculemos la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

La ecuación característica de A es:

$$|\lambda I - A| = (s-3)(s-2) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 \tag{10}$$

Y dado que toda matriz satisface su propia ecuación característica (Cayley-Hamilton):

$$A^2 - 5A + 5I = 0. \tag{11}$$

Luego, premultiplicando por la inversa de la matriz A, conseguimos que dicha inversa aparezca explícitamente:

$$A - 5I + 5A^{-1} = 0, \tag{12}$$

y fácilmente puede despejarse

$$A^{-1} = I - \frac{A}{5} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Ejemplo 2. Reducción del orden de un polinomio de matrices.

Demostrar que el orden de un polinomio de matrices

$$P(M) = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + ... + a_k M^k, \tag{14}$$

puede ser reducido a $n-1$, donde n define la dimensión de la matriz cuadrada $M_{n\times n}$. Obviamente, nos interesa el caso en que $k > n$ pudiendo tomar un valor infinito.

Consideremos el polinomio escalar asociado al polinomio de matrices (14):

$$P(\lambda) = a_0 I + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + ... + a_k \lambda^k \tag{15}$$

y dividámoslo por el polinomio característico

$$Q(\lambda) = |\lambda I - M| \tag{16}$$

de la matriz M. De esta operación resulta

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = C(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \tag{17}$$

$$P(\lambda) = Q(\lambda)\, C(\lambda) + R(\lambda)\,. \tag{18}$$

donde,

1) $C(\lambda)$ es el polinomio cociente, y

2) $R(\lambda)$ es el polinomio resto, siendo su orden menor que n, es decir $R(\lambda)$ es de la forma

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + ... + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{19}$$

Considerando (18), podemos retomar el polinomio de matrices

$$P(M) = Q(M)\, C(M) + R(M)\,, \tag{20}$$

expresión que puede simplificarse dado que toda matriz verifica su ecuación característica, es decir

$$Q(M) = 0_{n\times n}. \tag{21}$$

Luego:

$$P(M) = R(M) = \alpha_0 I + \alpha_1 M + ... + \alpha_{n-1}M^{n-1}. \tag{22}$$

Observe que esta expresión, alternativa de $P(M)$, puede ser mucho más simple que la expresión (14) dado que k puede ser muy grande (incluso infinito) y n corresponde a la dimensión de la matriz cuadrada M.

Para calcular los coeficiente α_i de (22) puede evaluarse el polinomio escalar (18) en cada autovalor λ_i. Dado que la ecuación característica se anula en los autovalores, resulta

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + ... + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1}. \tag{23}$$

Así, se dispone de n ecuaciones (una para cada autovalor) que permiten despejar las n incógnitas α_i.

En el caso de existir polos múltiples este procedimiento debe modificarse. Efectivamente, si M posee un autovalor λ_k de orden m, al reemplazar λ_k en (18), sólo se obtendrá una ecuación independiente. Para obtener otras $m-1$ ecuaciones linealmente independientes puede diferenciarse ambos miembros de la ecuación (18). Dado que

$$\left.\frac{d^j Q(\lambda)}{d\lambda^j}\right|_{\lambda=\lambda_k} = 0 \qquad j = 0, 1, ..., m-1, \tag{24}$$

las $m-1$ ecuaciones restantes resultan

$$\left.\frac{d^j P(\lambda)}{d\lambda^j}\right|_{\lambda=\lambda_k} = \left.\frac{d^j R(\lambda)}{d\lambda^j}\right|_{\lambda=\lambda_k} \qquad j = 0, 1, ..., m-1. \tag{25}$$

Ejemplo 3. Cálculo de la matriz de transición de estados.

Se quiere obtener la matriz de transición de estados del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x. \tag{26}$$

Los autovalores de la matriz A pueden calcularse a partir de:

$$Q(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 = 0. \tag{27}$$

Luego el sistema tiene un autovalor multiple en $\lambda = -1$. A partir del ejemplo anterior

$$\Phi(t) = P(A) = e^{At} = R(A), \tag{28}$$

y como la matriz A es de 2×2

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A. \tag{29}$$

Los coeficientes α_i (teniendo presente que el autovalor es de orden 2) se calculan a partir de

1)

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \tag{30}$$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-t} = \alpha_0 + \alpha_1(-1) \tag{31}$$

$$\alpha_0 = e^{-t} - \alpha_1 \tag{32}$$

2)

$$\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=-1} = \left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=-1} \tag{33}$$

$$\alpha_1 = te^{-t}. \tag{34}$$

Así, la matriz de transisción de estados resulta:

$$\Phi(t) = e^{At} = \left((1+t)\,e^{-t}\right) I + \left(te^{-t}\right) A \ , \tag{35}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} (1+t)\,e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)\,e^{-t} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Ejemplo 4. Cálculo de la potencia de una matriz.

En numerosos problemas tanto de sistemas de tiempo continuo, como de tiempo discreto es necesario elevar una matriz a una dada potencia. Consideremos el caso particular en que nos interesa conocer la matriz de transición de estado para un tiempo $t = 100seg$

$$\Phi_{(t=100seg)} = \Phi^{100}_{(t=1seg)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{100} =? \tag{37}$$

a partir de la misma matriz evaluada en $t = 1seg$

$$\Phi_{(t=1seg)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &P(\Phi) = R(\Phi) \\ &\Phi^{100} = \alpha_0 I + \alpha_1 \Phi \end{aligned} \tag{39}$$

Donde los coeficientes α_0 y α_1 pueden calcularse a partir de

$$\begin{aligned} &P(\lambda_i) = \lambda_i^{100} = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i, \\ &(-1)^{100} = \alpha_0 - \alpha_1, \\ &1^{100} = \alpha_0 + \alpha_1. \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = 1, \\ &\alpha_1 = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Resultando

$$\Phi_{(t=100seg)} = I. \tag{42}$$

Ejemplo 5. Test de controlabilidad.

Sabemos que la solución de la ecuación de estados es

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\ d\tau, \tag{43}$$

y que si el sistema es completamente controlable sus estados iniciales pueden transferirse al origen en un tiempo finito T, es decir,

$$x(T) = 0 = e^{AT} x(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau)\ d\tau, \tag{44}$$

$$0 = x(0) + \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau)\ d\tau. \tag{45}$$

Ahora bien, a partir de los dos ejemplos previos puede escribirse

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k, \tag{46}$$

luego,

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^T \alpha_k\, u(\tau)\ d\tau. \tag{47}$$

Donde, llamando

$$\alpha'_k = \int_0^T \alpha_k \, u(\tau) \; d\tau, \tag{48}$$

resulta

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \; \alpha'_k \; = -\left[\begin{array}{cccc} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_2 \end{array} \right]. \tag{49}$$

Si el sistema es completamente controlable, esta ecuación debe satisfacerse para cualquier condición inicial, luego la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{array} \right] \tag{50}$$

debe de ser de rango completo (test de controlabilidad de Kalman).