## Control Automático II - Ing. Electrónica
## Trabajo práctico 9: Análisis de estabilidad por Lyapunov

**Ejercicio 1:** Demuestre, usando el argumento de Lyapunov, que el sistema $\dot{x} = Ax$ es estable si existen matrices $P$ y $Q$ definidas positivas tal que $A^T P + PA = -Q$. Esta ecuación se conoce como ecuación de Lyapunov. (Ayuda: use $V = x^T Px$)

**Ejercicio 2:** Demuestre, usando el argumento de Lyapunov, que el sistema $x(k+1) = Ax(k)$, es estable si existen matrices $P$ y $Q$ definidas positivas tal que $A^T PA - P = -Q$. Esta ecuación se conoce como ecuación discreta de Lyapunov. (Ayuda : use $V(k) = x^T(k)Px(k)$)

**Ejercicio 3:** Encuentre una función de Lyapunov para los siguientes sistemas lineales:

**a.** $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x,$

**b.** $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0{,}9 \end{bmatrix} x(k).$

**Ejercicio 4:** Encuentre los puntos de equilibrio de estos modelos de estados y determine su estabilidad empleando Lyapunov.

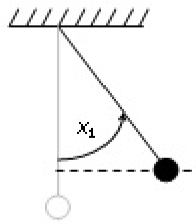
**a.** $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{cases}$

**b.** $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{cases}$

**c.** $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(3 - x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - x_1 - x_2) \end{cases}$

**Ejercicio 5:** Sea el siguiente modelo de estados correspondientes a un péndulo:

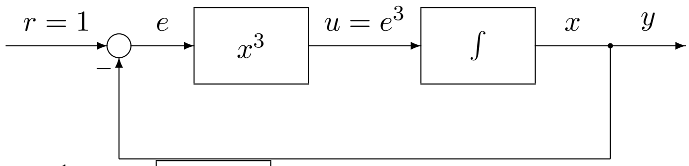
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -sin(x_1) - b^2 x_2 \end{cases}$$



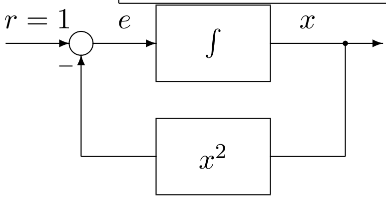

Analice la estabilidad de sus puntos de equilibrio utilizando el primer y el segundo método de Lyapunov. Utilice el método que crea conveniente para cada caso y considere los casos b=0 y b $\neq$0.

**Ejercicio 6:** Analice la estabilidad de los siguientes sistemas realimentados utilizando el criterio de Lyapunov.

**a.**




**b.**




**Ejercicio 7:** Determine, aplicando Lyapunov (sin hallar autovalores), el rango de valores de $k$ para los cuales los siguientes sistemas son estables.

**a.** $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$, realimentado según la ley de control $u = -[k \quad 1]x$.

**b.** $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + x_1^3(k-1) \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 \end{array} \right.$

**Ejercicio 8:** Analice mediante el segundo método de Lyapunov la estabilidad de los puntos de equilibrio del siguiente sistema de tiempo discreto:

$x(k+1) = 0{,}1x(k) - 0{,}1x^2(k) + 1$