

E-1214 FUNDAMENTOS DE LAS COMUNICACIONES - AÑO 2024

TP N°5: Introducción a las Comunicaciones Digitales.

1. Ruido de Cuantización

- a) Genere en MATLAB muestras de un proceso aleatorio gaussiano pasa bajos con ancho de banda $W = 100$ kHz. Cuantice la señal obtenida en $M = 4, 16, 64$ y 128 niveles usando la función `quantiz`, para valores de entrada en $[-1,1]$. Obtenga una estimación de la distribución del error de cuantización y su DEP utilizando las funciones `hist` y `pwelch`. Puede guiarse usando las siguientes instrucciones:

```
fm=1e6; W=100e3; N=1e6; t=0:1/fm:(N-1)/fm; M=4; s=2/M; Nlp=round(N*W/fm);
flp=[ones(1,Nlp) zeros(1,N-2*Nlp) ones(1,Nlp)];
n=randn(size(t)); nlp=real(ifft(fft(n).*flp));
figure(1); plot(t,nlp); figure(2);
pwelch(nlp,ones(1,10000),0,[],fm,'twosided'); % DEP estimada con FFTs de largo 1000
[ind,nq,dist]=quantiz(nlp,[-1+s:s:1-s],[-1+s/2:s:1-s/2]);
eq=nlp-nq; % Error de cuantización
figure(3); hist(eq,500); % Distribución aproximada
figure(4); pwelch(eq,ones(1,10000),0,[],fm,'twosided'); % DEP estimada
```

Baje la frecuencia de muestreo (remuestreando la señal) y observe como a medida que la señal ocupa el ancho de banda útil, el espectro del ruido de cuantización se vuelve plano.

- b) Genere una senoide de exactamente 10 kHz y amplitud unitaria. Cuantícela como en el inciso anterior y observe las características del error. Note que en este caso la frecuencia de portadora y la de muestreo son “sincrónicas”. Cambie ligeramente la frecuencia de portadora a $30/\pi$ kHz y repita las operaciones. ¿Qué diferencias encuentra? Cambie la amplitud a un valor 0.1 y repita los cálculos para $M = 4$ y 16 .

2. Espectro de algunas Comunicaciones Digitales

- a) Compruebe que la DEP de una señal PAM, $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT)$, con la secuencia de amplitudes A_n de media a , varianza σ_A^2 y no correlacionada es:

$$S_{XX} = \frac{\sigma_A^2}{T} |P(f)|^2 + \frac{|a|^2}{T} \text{sac}(fT) |P(f)|^2 \quad (1)$$

- b) Obtenga la DEP de la señal transmitida, la respuesta impusional del filtro adaptado para recibirla y la probabilidad de error que resulta en la recepción óptima con ruido blanco cuando se utilizan las siguientes señalizaciones en banda base:

- | | |
|-----------------|--|
| I. NRZ bipolar | II. NRZ unipolar |
| III. RZ bipolar | IV. RZ unipolar |
| V. Manchester | VI. $s_1(t) = -s_2(t) = \bigwedge ((t - T_b)/T_b)$ |

- c) Obtenga la DEP de la señal transmitida, la respuesta impusional del filtro adaptado para recibirla y la probabilidad de error que resulta en la recepción óptima con ruido blanco cuando se utilizan las siguientes señalizaciones pasa-banda:

- I. OOK (ASK con amplitudes 0 y A).
- II. BPSK

3. PCM+Comunicación Digital

Se desea transmitir una señal analógica $m(t)$ con un ancho de banda $W = 10$ kHz y distribución de amplitudes uniforme entre -1 y 1V. Para ello se utiliza un enlace de comunicaciones digital con señalización RZ unipolar por cable coaxil.

- Calcule la tasa de bits mínima que debe tener el sistema para que al digitalizar la relación señal a ruido de cuantización, SNR_Q , sea mayor que 25dB.
- Suponiendo que la señal transmitida posee niveles de tensión 0 y 5V, calcule y grafique su DEP.
- Obtenga la salida del filtro adaptado a la secuencia 1011001 y el diagrama de ojo.
- Dé una expresión para la probabilidad de error de bit para este sistema en función de la energía de bit media recibida, E_b , y la DEP de ruido, $N_0/2$ (supuesto blanco) a la entrada del receptor.
- Suponiendo que el sistema opera a la tasa de bit hallada en *a*), que el cable de 50Ω se encuentra a temperatura $T = 300K$ y su atenuación es 50dB/km, que la figura de ruido del receptor es 4dB, que se halla todo adaptado, y que despreciamos el ruido generado por el transmisor, calcule la longitud máxima posible para el cable para que la probabilidad de error de bit no sea superior a 10^{-5} .

4. Todo triangular!

Se desea transmitir una señal que posee distribución de amplitudes triangular en el intervalo $[-1, 1]V$ y ancho de banda de 10kHz utilizando un sistema de comunicación digital. Considere que la transmisión digital binaria en banda base utiliza la señalización dada por $s_1(t) = A \wedge (2t/T)$ y $s_0(t) = 0$, para la transmisión de un bit en el intervalo $[-T/2, T/2]$.

- Indique la tasa mínima de muestreo del conversor A/D, el rango de tensiones de entrada y cuantos bits se necesitan para realizar la cuantización si se debe lograr que la relación SNR_Q mínima sea 40dB. Suponga cuantización uniforme. ¿Cuál es la tasa de bits resultante?
- Indique cuál es la probabilidad de error de bit, suponiendo sincronismo de símbolo perfecto.
- Calcule y grafique el espectro de la señal a partir de la fórmula del espectro de señales PAM. Suponga que la secuencia de bits transmitidos cada T segundos se consideran equiprobables y no correlacionados.
- Grafique esquemáticamente el diagrama de ojo (a la salida del F.A. y sin ruido) suponiendo que el canal no limita el espectro de la señal. Indique el momento de toma de decisión.

5. Mirando el receptor a los ojos

El diagrama de ojos permite verificar varios aspectos del funcionamiento de un receptor de comunicaciones digitales de una manera práctica. En particular nos interesa estudiar cómo se aprecia la existencia o no de interferencia intersímbolo (ISI).

- Considere una comunicación NRZ polar con tiempo de bit T . Suponiendo que el canal posee ancho de banda infinito grafique el diagrama de ojos correspondiente a la salida del filtro adaptado sin ruido. Indique cuáles son los instantes en los que el receptor toma una decisión. ¿Qué probabilidad de error hay en estas decisiones si en el canal se adiciona ruido blanco gaussiano con DEP $N_0/2$?
- Si en lugar de utilizar el filtro adaptado el receptor utilizara un filtro RC pasabajos, con frecuencia de corte $f_0 = 3/(2\pi T)$ ¿Cómo se modifica el diagrama de ojos? Grafique nuevamente suponiendo que el canal posee ancho de banda infinito, puede guiarse por el siguiente código ¿Cuál es la nueva probabilidad de error utilizando el criterio de la distorsión pico?

```
h=3/T*exp(-t*3/T).*(t>=0); % Respuesta impulsional del filtro del Rx
s1=A*(t>=0).*(t<T);        % Señal NRZ
y1=conv(s1,h,'same')*dt;    % Salida del filtro del Rx
```

- Suponga ahora que el canal posee una transferencia que puede aproximarse con un filtro de un polo con frecuencia de corte $f_0 = 3/(2\pi T)$ y que el receptor implementa el filtro adaptado a la forma de pulso original (como en *a*)). Grafique aproximadamente el nuevo diagrama de ojos y obtenga la probabilidad de error correspondiente de la misma manera que en *b*). Puede ayudarse con el siguiente código.

```

hc=3/T*exp(-t*3/T).*(t>=0); % Respuesta impulsional del canal
y0 = A^2*((T+t).*(t>=-T).*(t<0)+(T-t).*(t>=0).*(t<T)); % Salida FA (canal ideal)
y2=conv(y0,hc,'same')*dt; % Salida del FA con el modelo de canal propuesto

```

6. Ojos e ISIs en MATLAB

Simularemos en MATLAB la transmisión de 10^5 bits y su recepción con el filtro adaptado, utilizando 10 muestras por bit. Si suponemos que la frecuencia de muestreo es 1 MHz, entonces tendremos una tasa de transmisión de 100 kbps.

- a) Utilice forma de onda NRZ polar. Grafique el diagrama de ojos y calcule la tasa de errores en la detección. Puede utilizar las siguientes sentencias como guía:

```

fm=1000000; N=1000000; ebn0=4.75;
h1=ones(1,10)*sqrt(1/10); % Filtro de transmisión
b=sign(rand(1,100000)-0.5); % Bits aleatorios
n=randn(1,1000000)/sqrt(2*ebn0); % Ruido blanco (verificar la escala!)
nrz=kron(b,h1); % Señal NRZ
figure(1); pwelch(nrz,ones(1,10000),0,[],fm,'twosided');% DEP estimada
y=conv(nrz,h1); % Señal filtrada con FA sin ruido
figure(2); plot(reshape(y(1:10000),20,500)); % Diagrama de ojos
y1=conv(nrz+n,h1); % Señal filtrada con FA con ruido
figure(3); plot(reshape(y1(1:10000),20,500)); % Diagrama de ojos
be1=sign(y1(10:10:end)); % Bits demodulados
sum(b~=be1)/100000 % Tasa de errores estimada

```

Compare la tasa obtenida con el valor teórico correspondiente. Note que debido a que la respuesta impulsional del filtro adaptado es simétrica no es necesario reflejarla.

- b) Simule ahora la presencia de una limitación en el ancho de banda del canal con un filtro Butterworth de 5º orden y frecuencia de corte $f_m/(2\pi)$, con la siguiente sentencia:

```
[Z,Y]=butter(5,1/pi); nrzf=filter(Z,Y,nrz);
```

Repita los cálculos anteriores y compare con la expresión teórica utilizando el criterio de la distorsión pico. Note que el retardo de grupo del canal es aproximadamente 3 muestras. En consecuencia, los instantes de toma de decisión deberán desplazarse en dicha cantidad ¿Qué sucedería si dicho retardo no corresponde a un número entero de muestras?

- c) Simule ahora la misma comunicación (sin limitación en el canal) pero utilizando forma de pulso raíz de coseno elevado con $\alpha = 0,5$. Puede guiarse con las siguientes sentencias:

```

% Respuesta impulsional raíz coseno elevado (alfa=0.5) aproximada.
h2=[0 -0.0170 -0.0229 -0.0117 0.0131 0.0266 0.0185 -0.0155 -0.0564 -0.0774...
-0.0483 0.0424 0.1839 0.3382 0.4588 0.5038 0.4588 0.3382 0.1839 0.0424 -0.0483...
-0.0774 -0.0564 -0.0155 0.0185 0.0266 0.0131 -0.0117 -0.0229 -0.0170 0];
cel=filter(h2,1,kron(b,[1 zeros(1,9)])); % Señal transmitida
y3=conv(cel+n,h2); % Salida del filtro adaptado
be3=sign(y(31:10:end)); % Bits demodulados.

```

Verifique la DEP de la señal transmitida, mediante el diagrama de ojos compruebe que los instantes de toma de decisión son correctos, y que la tasa de errores obtenida es razonable.

- d) Introduzca ahora la limitación en el ancho de banda del canal (como en e)) y vuelva a simular. Grafique los diagramas de ojos con y sin ruido y obtenga la tasa de errores correspondiente. Recuerde elegir adecuadamente los instantes de toma de decisión.

7. Música Digital Elevada.

Se desea transmitir por un enlace inalámbrico una señal de música digitalizada usando PCM y modulación BPSK con conformación espectral raíz de coseno elevado. La señal de música posee un espectro limitado a 15kHz, amplitudes máximas $\pm 1V$ y valor cuadrático medio $0,1V^2$.

- Especifique el conversor A/D necesario para que al digitalizar la relación señal a ruido de cuantización, S/Q , sea mayor que 60dB. Calcule la tasa de bits del sistema.
- Calcule el ancho de banda ocupado si se usa un factor de “roll-off” $\alpha = 0,5$. Grafique esquemáticamente el espectro de la señal, y las formas de pulso utilizadas. ¿Se solapan los pulsos de los distintos bits en tiempo? Suponiendo que no hay distorsión en el canal, ¿habrá ISI si se utiliza el receptor con filtro adaptado?
- Dé una expresión para la probabilidad de error de bit para este sistema en función de la energía de bit media recibida, E_b , y la DEP de ruido, $N_0/2$ (supuesto blanco) a la entrada del receptor.
- Suponiendo que la temperatura equivalente de ruido de la antena es $T_a = 300K$, la figura de ruido de receptor es 6dB y que el receptor se encuentra conectado a la antena mediante un cable con atenuación de 10dB a temperatura ambiente, calcule la potencia disponible mínima que debe entregar la antena para que la probabilidad de error de bit no sea superior a 10^{-5} .

8. ★ Fsk Simulando anda oK

El cálculo del espectro de señales FSK es bastante complicado y no posee una expresión analítica sencilla. Por eso recurriremos a una simulación para obtener una estimación del mismo en distintas condiciones de desviación de frecuencia.

- Genere en MATLAB una señal FSK (de fase continua) con tiempo de bit $T_b = 0,1$ ms y frecuencias $f_1 = f_c + f_d$ y $f_2 = f_c - f_d$, donde $f_c = 100$ kHz y $f_d = 1,75$ kHz. Puede guiarse con las siguientes sentencias:

```
fm=1000000; N=1000000; fc=100000; fd=2500;
b=sign(rand(1,10000)-0.5); % Bits aleatorios
d=kron(b,ones(1,100)); % Muestras de la señal NRZ equivalente
x=cos(2*pi*100000*t+2*pi*fd*cumsum(d)/fm); % Señal FSK
```

Estime su DEP usando la función `pwelch`. Repita los cálculos para $f_d = 2,5$ kHz, 3,75 kHz y 5 kHz.

- Calcule la probabilidad de error de bit para los distintos valores de f_d si se realiza una recepción óptima. ¿Qué dificultad le parece que presenta este esquema? Proponga esquemas alternativos (subóptimos) para recuperar los bits transmitidos.
- Las líneas telefónicas convencionales poseen un ancho de banda útil (sin ecualizar) de aproximadamente 4 kHz. La norma V.21 especifica un módem full-duplex (que puede transmitir y recibir al mismo tiempo) con dos canales de 300 bps cada uno utilizando FSK. El canal 1 utiliza frecuencias $f_1 = 980$ Hz y $f_2 = 1180$ Hz, en tanto que el canal 2 utiliza $f_1 = 1050$ Hz y $f_2 = 1250$ Hz. La máxima potencia esperada en la recepción es de $1 \mu W$ y supongamos que el ruido presente es blanco con DEP $N_0/2 = 125$ pW/Hz. Suponiendo que cada canal está completamente desacoplado del otro calcule cuál es probabilidad de error con la que puede operar cada canal en el mejor de los casos.

Algunos resultados

2. b) I. $S_{XX}(f) = A^2T \text{sinc}^2(fT)$, $h_{FA}(t) = 2A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right)$.
 II. $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{4} \text{sinc}^2(fT) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$, $h_{FA}(t) = A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right)$.
 III. $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$, $h_{FA}(t) = 2A \square \left(\frac{-t-T/4}{T/2} \right)$.
 IV. $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{A^2T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \uparrow\uparrow\uparrow(fT)$, $h_{FA}(t) = A \square \left(\frac{-t-T/4}{T/2} \right)$.
 V. $S_{XX}(f) = A^2T \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$, $h_{FA}(t) = 2A \left[\square \left(\frac{-t-T/4}{T/2} \right) - \square \left(\frac{-t-3T/4}{T/2} \right) \right]$.
 VI. $S_{XX}(f) = T_b \text{sinc}^4(fT_b)$, $h_{FA}(t) = 2 \wedge \left(\frac{-t-T_b}{T_b} \right)$.
 c) I., III., V. y VI. $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$.
 II. y IV. $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$.
 d) I. $h_{FA}(t) = A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right) \cos(2\pi f_p t)$, o con conversión a banda base: $h_{FA}(t) = A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right)$,
 $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$, $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{16} \{ \text{sinc}^2[(f+f_p)T] + \text{sinc}^2[(f-f_p)T] \} + \frac{A^2}{16} [\delta(f+f_p) + \delta(f-f_p)]$.
 II. $h_{FA}(t) = 2A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right) \cos(2\pi f_p t)$, o con conversión a banda base: $h_{FA}(t) = 2A \square \left(\frac{-t-T/2}{T} \right)$,
 $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$, $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{4} \{ \text{sinc}^2[(f+f_p)T] + \text{sinc}^2[(f-f_p)T] \}$.
 3. a) $R_{b,min} = 100\text{kbps}$.
 b) $S_{XX}(f) = \frac{25T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{25T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \uparrow\uparrow\uparrow(fT)$, con $T = 10\mu\text{s}$.
 d) $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$.
 e) $l \leq 2,96\text{km}$.
 4. a) $f_m \geq 20\text{kHz}$, $V_{in} \in [-1V, 1V]$, $N = 8$, $R_{b,min} = 160\text{kbps}$.
 b) $P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$.
 c) $S_{XX}(f) = \frac{A^2T}{16} \text{sinc}^4\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{A^2T}{16} \text{sinc}^4\left(\frac{fT}{2}\right) \uparrow\uparrow\uparrow(fT)$.
 5. a) $P_e = Q \left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}} \right)$.
 b) $P_e = Q \left(\sqrt{1,08\frac{E_b}{N_0}} \right)$, Degradación: $D = 2,67\text{dB}$.
 c) $P_e = Q \left(\sqrt{0,63\frac{E_b}{N_0}} \right)$, Degradación: $D = 5,01\text{dB}$.
 7. a) $f_m \geq 30\text{kHz}$, $V_{in} \in [-1V, 1V]$, $N = 11$, $R_{b,min} = 330\text{kbps}$.
 b) $\text{BW} = 495\text{kHz}$.
 c) $P_{min} = -93,18\text{dBm}$.