E-1214 FUNDAMENTOS DE LAS COMUNICACIONES - AÑO 2024
TP Nº1: Correlación, Densidad Espectral de Potencia.

1. **Función de Autocorrelación**

   a) Dadas las siguientes señales determine si son de energía o de potencia. Calcule su valor medio, su función de autocorrelación y su densidad espectral de energía o de potencia según corresponda.
   I. $x(t) = \operatorname{sen}(20\pi t) + j\cos(40\pi t)$ II. $x(t) = \sqcap(t/5)$ III. $x(t) = u(t)$ (escalón unitario)
   IV. $x(t) = e^{-j2\pi t^2}$ (note que $\displaystyle\int_0^\infty \cos(2\pi t^2)dt = \int_0^\infty \operatorname{sen}(2\pi t^2)dt = \frac{1}{4}$, integrales de Fresnel)

   b) Escriba la desigualdad de Cauchy-Schwarz para modelo de señal determinística de energía y de potencia $x(t)$ e $y(t)$.

   c) Considere un SLIT BIBO estable con respuesta impulsional $h(t)$, entrada $x(t)$ de potencia y salida $y(t)$.
      I. Halle una expresión del valor medio de la salida $< y(t) >$ en función de $< x(t) >$.
      II. Demuestre que $r_{yx}(\tau) = \{h * r_{xx}\}(\tau)$ y $r_{xy}(\tau) = \{h^{-*} * r_{xx}\}(\tau)$, con $h^{-}(t) = h(-t)$.
      III. Demuestre que $r_{yy}(\tau) = \{r_{hh} * r_{xx}\}(\tau)$.

   d) Una señal de audio $s(t)$, es emitida por un parlante en una sala de conferencias. Debido al rebote de la misma en las paredes del local, un micrófono muy cercano al parlante obtiene la señal $x(t) = s(t) + k_1 s(t - \tau_1)$. Obtenga la autocorrelación de la señal $x(t)$ en función de la autocorrelación de la señal emitida, $r_{ss}(\tau)$. ¿Es posible obtener los parámetros k_1, y τ_1 a partir de $r_{xx}(t)$ o $r_{xs}(t)$?

2. **DEP por definición**

   Sea $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, con ω_0 y A ctes. y $\theta \sim \mathcal{U}[-\pi/4, \pi/4]$.

   a) Calcule la potencia instantánea del proceso, $\mathcal{P}_{XX}(t) = \mathrm{E}\{|X(t)|^2\}$. ¿Cómo debería ser este valor si el proceso fuera ESA?

   b) Calcule la potencia media del PA, $\overline{\mathcal{P}}_{XX}$, como el valor medio (temporal) de $\mathcal{P}_{XX}(t)$.

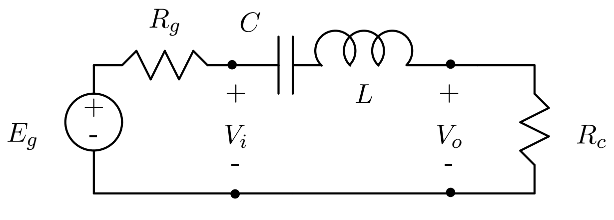
   c) Calcule la TF de la versión truncada de $X(t)$ al intervalo $[-T, T]$, $\mathcal{F}\{X_T(t)\}$, y con ella, la densidad espectral de energía del proceso truncado, $\mathrm{E}\{|\mathcal{F}\{X_T(t)\}|^2\}$.

   d) Dividiendo por $2T$ y tomado el límite para $T \to \infty$, obtenga la densidad espectral de potencia de $X(t)$, $S_{XX}(f)$, por definición. Recuerde que $\lim\limits_{T\to\infty} T\operatorname{sinc}(Tf)$ "=" $\lim\limits_{T\to\infty} T\operatorname{sinc}^2(Tf)$ "=" $\delta(f)$.

   e) Calcule el promedio temporal de $R_{XX}(t + \tau, t)$ (con respecto a t). Luego obtenga su TF y verifique que coincide con $S_{XX}(f)$. ¿Cuánto vale la integral de S_{XX} en todo el espectro?

3. **Filtro Pasa-Banda**

   En la figura se muestra el esquema de un filtro pasa-banda pasivo.



   a) Verifique que su transferencia es $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{E_g(s)} = \dfrac{(K\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$, con $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{\omega_0 L}{R_g + R_c}$ y $K = \frac{R_c}{R_g + R_c}$. Consideraremos que $4Q^2 \gg 1$.

b) Muestre que el ancho de banda de 3 dB del filtro es igual a $B_3 = f_0/Q$, con $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Ayuda: Exprese la ganancia del sistema como $|H(\omega)|^2 = \dfrac{K^2}{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$

c) Obtenga el ancho de banda de ruido del filtro (puede usar teoría de residuos).

d) Considerando que $R_g = R_c = 50\Omega$, dé valores a L y C para obtener un filtro pasabanda con $f_0 = 970$kHz y $B_3 = 590$kHz.

e) Suponga que a la entrada del filtro hay ruido blanco con DEP $1\mu V^2/Hz$. Usando *c*) calcule la potencia media normalizada de la señal a la salida del filtro para los valores hallados en *d*).

4. **Ancho de Banda de Ruido usando MATLAB**

En este ejercicio simularemos el filtrado de ruido blanco gaussiano con un SLIT sencillo. Supondremos que el sistema es causal y tiene una función de transferencia $H(s) = \frac{1}{s+1}$ y que a su entrada está el PA $X(t)$ con media nula, $R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$ y distribución gaussiana.

a) Calcule el Ancho de Banda de -3dB y el equivalente de Ruido del sistema. Calcule la potencia y la DEP de la salida $Y(t)$.

b) Considere que el PA de entrada se muestrea a 100Hz utilizando un filtro anti-replicado ideal. Dé una expresión para la potencia del PA muestreado. Suponiendo que esta potencia es igual a 1 simule 1000 segundos de una realización. Verifique media, varianza y distribución (usando `hist`).

c) Obtenga un filtro digital que aproxime al SLIT continuo utilizando la transformación bilineal ($s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, con T tiempo de muestreo). Halle la ecuación en diferencias correspondiente y filtre la realización obtenida anteriormente. Puede usar el comando `filter`.

d) Calcule la potencia de la secuencia obtenida al filtrar (recuerde descontar el transitorio inicial). Compare con el resultado teórico de *a*).

5. **SNR a pedir de oido**

En este ejercicio intentaremos relacionar la calidad de una señal de voz de acuerdo a la relación señal a ruido que ésta posea. ¡Para ello deberemos escuchar y ver que pasa!

a) Con alguna aplicación que permita grabar audio genere un archivo de sonido `.wav`. La calidad del sonido debe ser muy buena ya que supondremos que no tiene ruido apreciable. Otra opción es bajar el archivo `audio.wav` de la página de la cátedra.

b) Utilizando el comando `[X,fs]=audioread('archivo.wav');` cargue en la matriz `X` las secuencias de muestras que representan los dos canales de la señal de audio estereo en el Matlab. Además en `fs` podrá ver la frecuencia de muestreo y en `nb` el número de bits utilizados para representar el valor de estas muestras. Descarte uno de los dos canales haciendo `x=X(:,1);`.

c) Verifique lo hecho hasta ahora escuchando la señal con el comando `sound(x,fs)`.
Calcule la potencia normalizada de la señal.

d) Genere distintas secuencias de ruido blanco gaussiano de igual largo que la señal y con potencia tal que al sumarlas la relación señal a ruido (SNR) sea 0dB, 10dB , 20dB, 30dB, 40dB y 50dB.
Use el comando `randn`.

e) Sumando las distintas secuencias de ruido genere versiones de audio con distintas SNR. Escuche las señales resultantes y vea que le parece. A su juicio ¿Qué SNR es necesaria para que una señal de audio sea de buena calidad? ¿Y para que sea inteligible?

Algunos resultados

1. *a)* I. $\bar{x}=0$, $\mathcal{P}_x=1$, $r_{xx}(\tau)=\dfrac{\cos(20\pi\tau)+\cos(40\pi\tau)}{2}$ y $s_{xx}(f)=\dfrac{\delta(f-10)+\delta(f+10)+\delta(f-20)+\delta(f+20)}{4}$.

   II. $\bar{x}=0$, $\mathcal{E}_x=5$, $r_{xx}(\tau)=5\bigwedge(\tau/5)$ y $s_{xx}(f)=25\,\mathrm{sinc}^2(5f)$.

   III. $\bar{x}=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}_x=\frac{1}{2}$, $r_{xx}(\tau)=\frac{1}{2}$ y $s_{xx}(f)=\frac{1}{2}\delta(f)$.

   IV. $\bar{x}=0$, $\mathcal{P}_x=1$, $r_{xx}(0)=1$ pero $r_{xx}(\tau)=0$ si $\tau\neq 0$.

   d) $r_{xx}(\tau)=r_{ss}(\tau)(1+|k_1|^2)+k_1^* r_{ss}(\tau+\tau_1)+k_1 r_{ss}(\tau-\tau_1)$, $r_{xs}(\tau)=r_{ss}(\tau)+k_1 r_{ss}(\tau-\tau_1)$

2. *a)* $\mathcal{P}_{XX}(t)=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{\pi}\cos(2\omega_0 t)$

   b) $\overline{\mathcal{P}}_{XX}=\frac{A^2}{2}$

3. *c)* $B_N=\frac{\pi}{2}B_3$.

   e) $\mathcal{P}=0{,}46\mathrm{V}^2$.

4. *a)* $f_{c_{-3dB}}=BW_{-3dB}=\dfrac{1}{2\pi}\quad B_N=\dfrac{1}{4}\quad P_y=\dfrac{N_0}{4}$

   b) $R_{X_fX_f}[m]=50N_0\delta[m]\quad P_{X_f}=50N_0$

   c) $y[n]=\frac{199}{201}y[n-1]+\frac{1}{201}x[n]+\frac{1}{201}x[n-1]$