Sistemas con retardo

Tema 02

V2 - 2024

Nota

El material de estas diapositivas está basado en los libros:

- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. “Control of Dead-time Processes”. Springer, 2007,

Sistemas con retardo

Índice

Tema 02

V2 - 2024

CA3: Sistemas con retardo

Introducción

- Los retardos aparecen en muchos procesos en la industria y en otros campos, incluidos los sistemas económicos y biológicos.

- Son causados por algunos de los siguientes fenómenos:

  - El tiempo necesario para transportar masa, energía o información.
  - La acumulación de retrasos en un gran número de sistemas conectados en serie.
  - Aproximación de un sistema de alto orden o ecuación en derivadas parciales por un modelo de bajo orden.
  - El tiempo de procesamiento requerido por sensores, como analizadores; controladores que necesitan algo de tiempo para implementar un algoritmo o proceso de control complicado.

- Retardo importante => Dificultad para el control

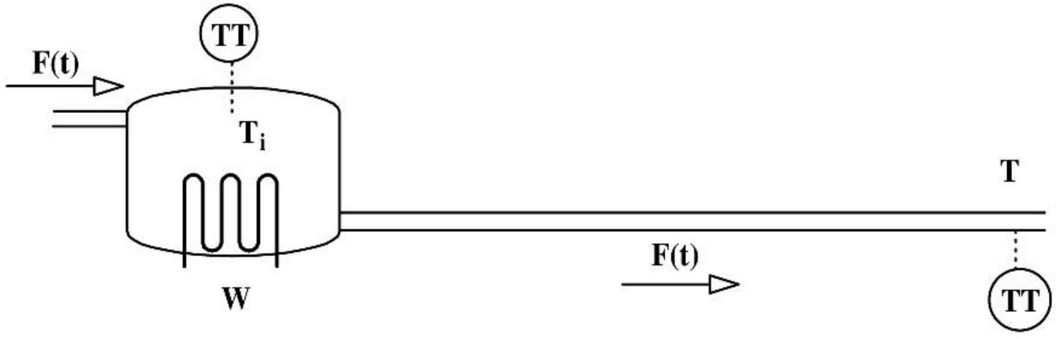
- Las dificultades son provocadas por:

  - la acción de control se calcula en base en un error pasado
  - la acción de control demora en causar efecto en la variable controlada
  - el efecto de las perturbaciones demora en ser apreciado

Los retardos introducen un retraso adicional en la fase del sistema, lo que disminuye el margen de fase y de ganancia dificultando el control de estos sistemas.

CA3: Sistemas con retardo

Introducción: Ejemplo 1 – Caldera con cañería larga



$$\begin{cases} u = W \\ y = T \end{cases} \qquad L = \frac{V}{F}$$

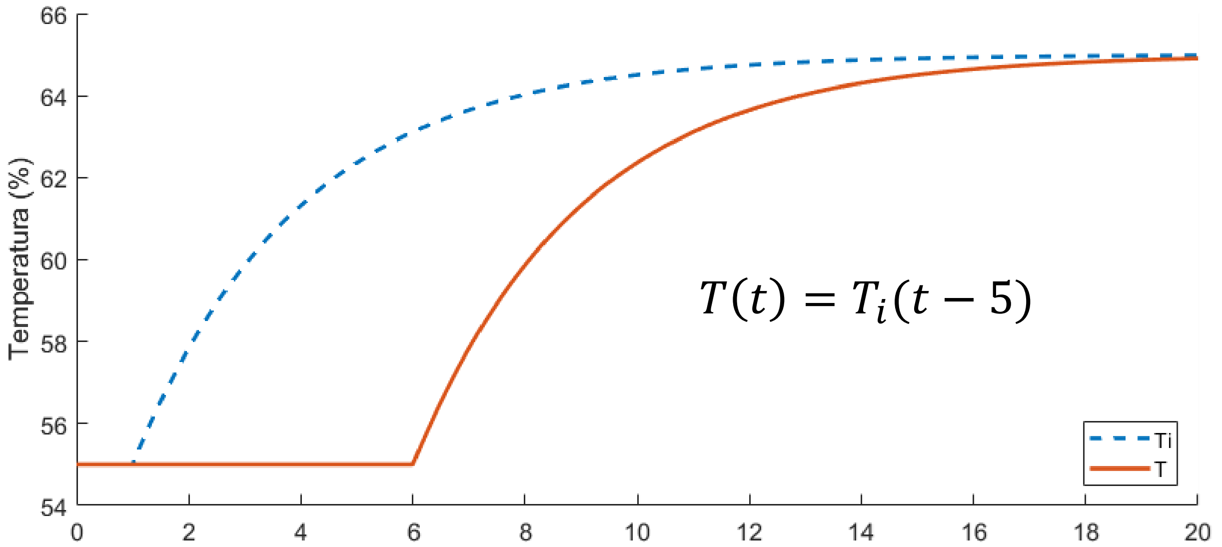
F: flujo (cte.)
V: volumen del caño
L: retardo

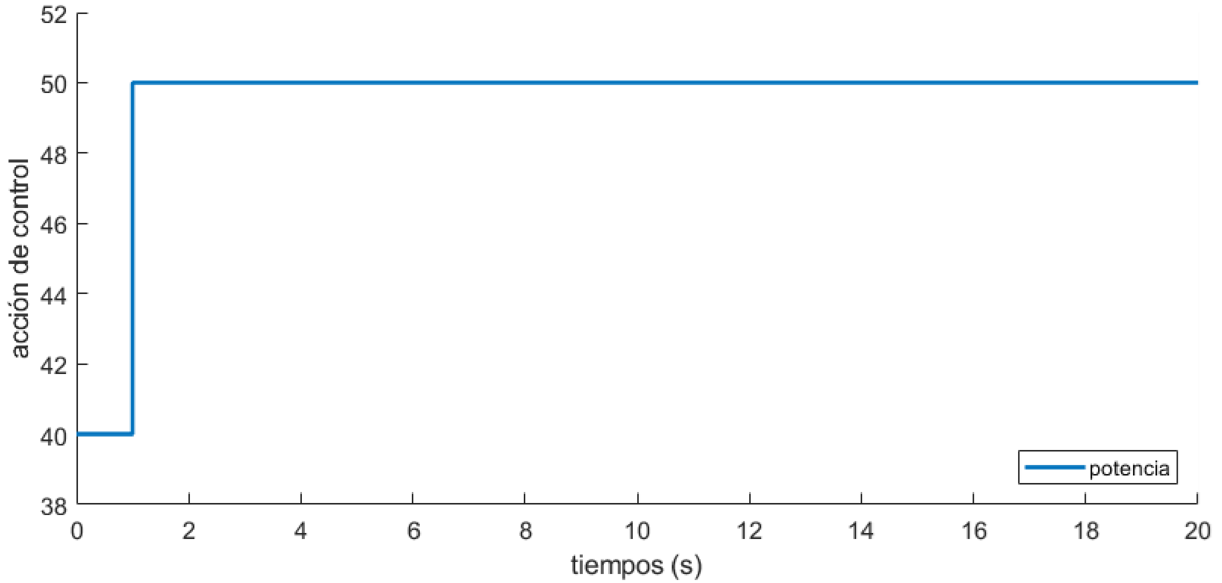
Modelo lineal en W_0, T_0.

$$G(s) = \frac{\Delta T_i(s)}{\Delta W(s)} \Rightarrow \Delta T_i(s) = G(s)\Delta W(s)$$

$$\Delta T(s) = \Delta T_i(s)e^{-Ls}$$

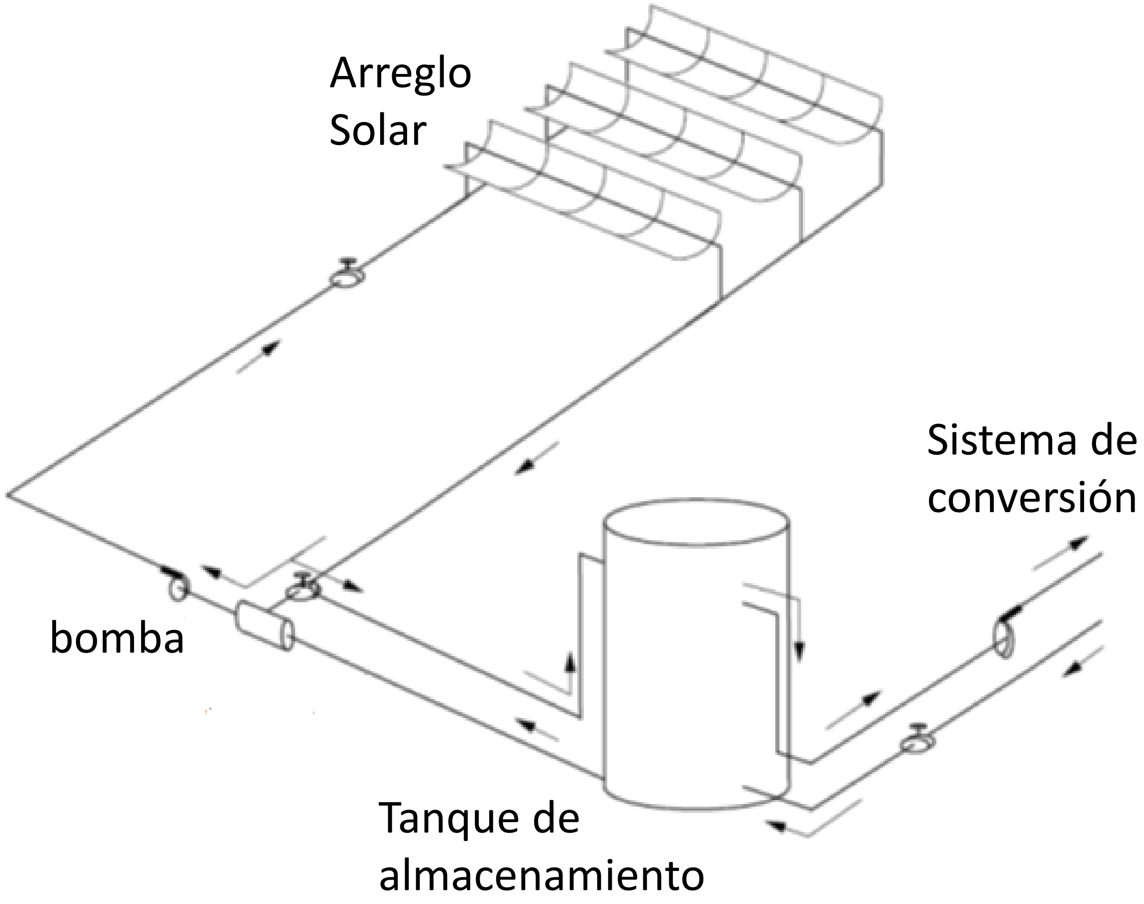
$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta W(s)} = G(s)e^{-Ls}, L > 0 \longrightarrow T(s) = \frac{1}{3s+1}e^{-5s}$$



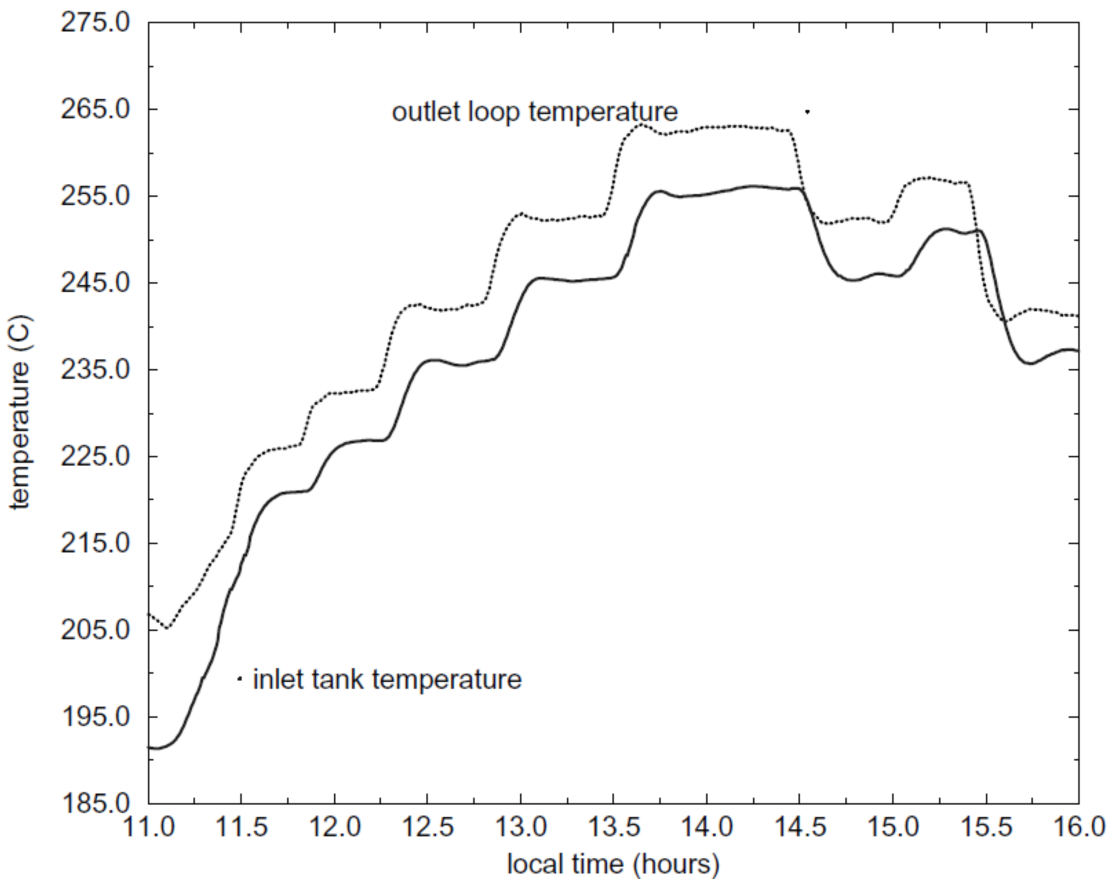


CA3: Sistemas con retardo

Introducción: Ejemplo 2 – Control de temperatura en una planta solar térmica



El objetivo de control es mantener la temperatura del aceite de salida en el nivel deseado a pesar de perturbaciones como cambios en el nivel de irradiancia solar, la reflectividad de los espejos o la temperatura del aceite de entrada.

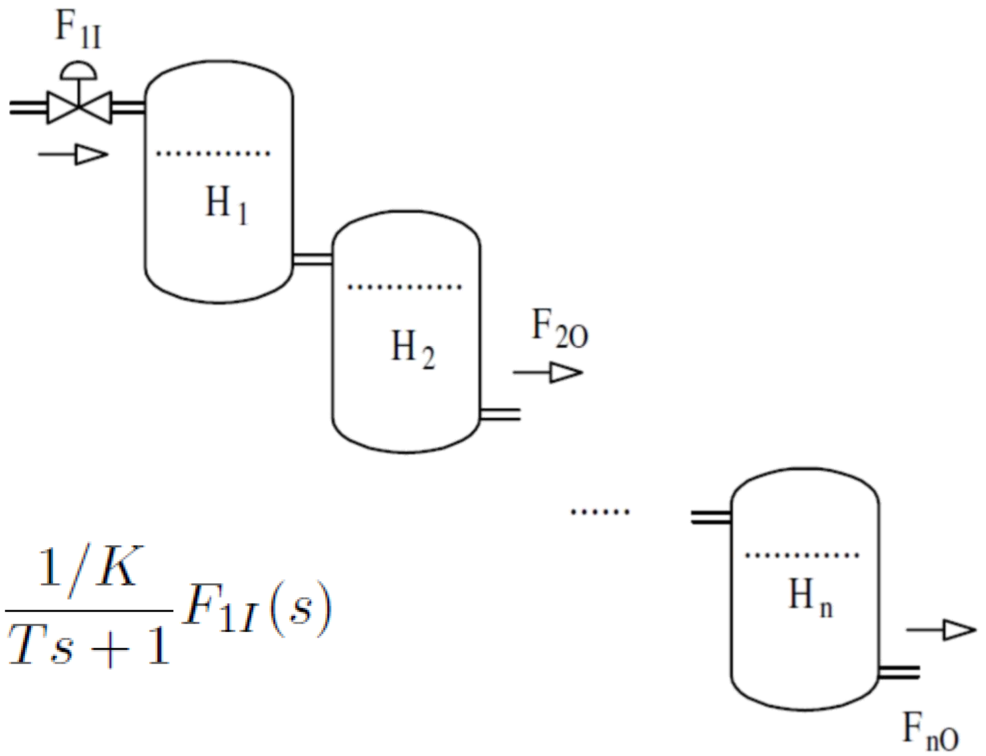


Dado que la radiación solar no se puede controlar, esto solo se puede lograr ajustando el flujo de aceite resultando en cambios sustanciales del flujo de aceite durante el funcionamiento.

CA3: Sistemas con retardo

Introducción: Ejemplo 3 – Sistemas de alto orden

Cerca de un punto de operación, el comportamiento dinámico del nivel en cada tanque H_i se puede modelar mediante un sistema lineal:



$$A\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t} = F_{iI} - F_{iO},$$
$$F_{iO} = KH_i,$$

A: área del tanque
K: cte. dependiente de las características del tanque

Transferencia entre el nivel y el flujo de entrada:

$$H_i(s) = \frac{1/K}{Ts+1}F_{iI}(s), \quad T = A/K$$

Para el tanque 1

$$H_1(s) = \frac{1/K}{Ts+1}F_{1I}(s)$$

Para el tanque 2

$$H_2(s) = \frac{1/K}{Ts+1}F_{2I}(s) = \frac{1/K}{Ts+1}F_{1O}(s) = \frac{1/K}{Ts+1}KH_1(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1/K}{Ts+1}F_{1I}(s) = \frac{1/K}{(Ts+1)^2}F_{1I}(s)$$

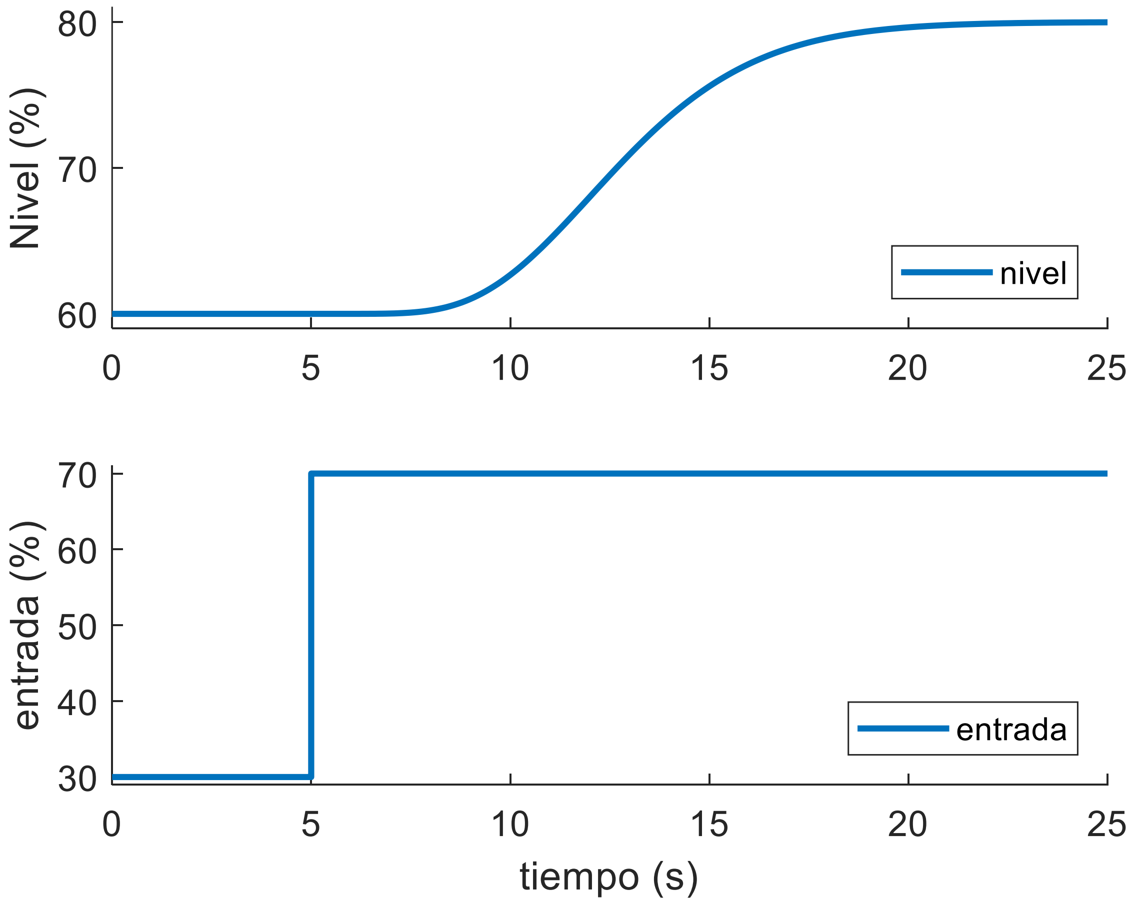
Para el tanque n

$$H_n(s) = P(s)F_{1I}(s) = \frac{K_e}{(Ts+1)^n}F_{1I}(s), \quad K_e = 1/K$$

Introducción: Ejemplo 3 – Sistemas de alto orden - Poniendo números

$$H_n(s) = P(s)F_{1I}(s) = \frac{K_e}{(Ts+1)^n}F_{1I}(s) \qquad K_e = \frac{1}{K}$$

$$n = 8 \quad K = 2 \quad T = 1\,s \qquad P(s) = \frac{0{,}5}{(s+1)^8}$$

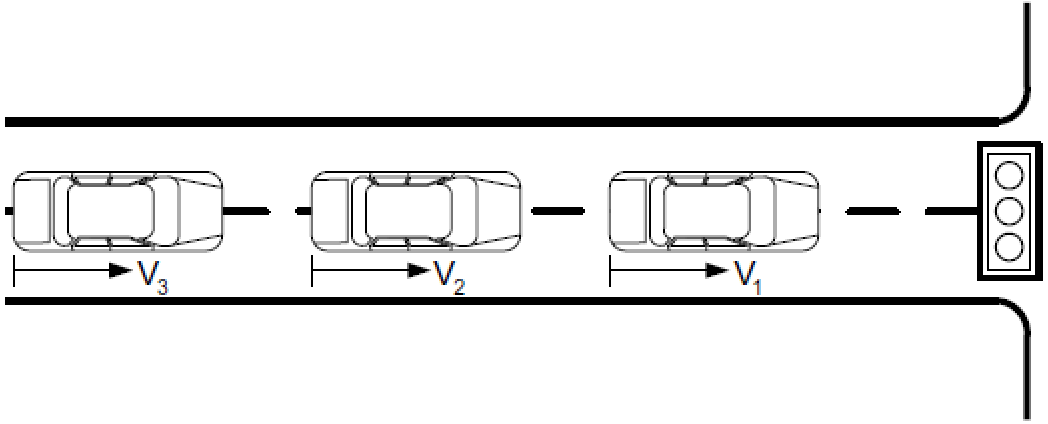


En muchos casos el retardo es causado por el efecto producido por la acumulación de un gran número de sistemas de bajo orden.

CA3: Sistemas con retardo

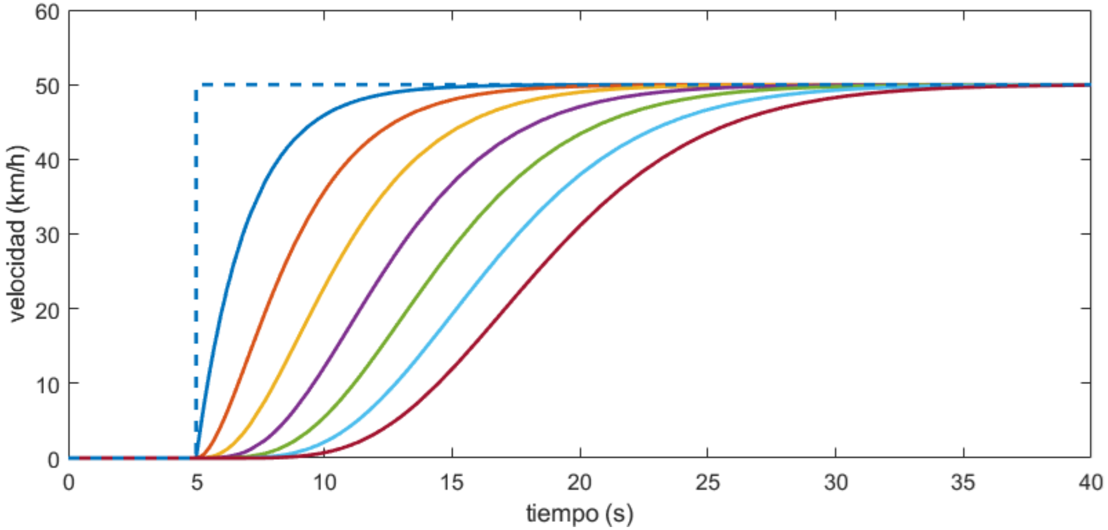
Introducción: Ejemplo 4 – Autos en un semáforo

Se puede obtener un modelo simple teniendo en cuenta que cada conductor intentará seguir la velocidad del coche de adelante (el primer coche intentará seguir la velocidad deseada v_0).



$$\frac{dv_i(t)}{dt} = K[v_{i-1}(t) - v_i(t)] \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

$$sV_i(s) = K[V_{i-1}(s) - V_i(s)] \Rightarrow (1+s/K)V_i(s) = V_{i-1}(s) \longrightarrow \frac{V_i(s)}{V_{i-1}(s)} = G(s) = \frac{1}{1+s/K} \longrightarrow V_N(s) = \frac{1}{(1+s/K)^N} V_0(s)$$

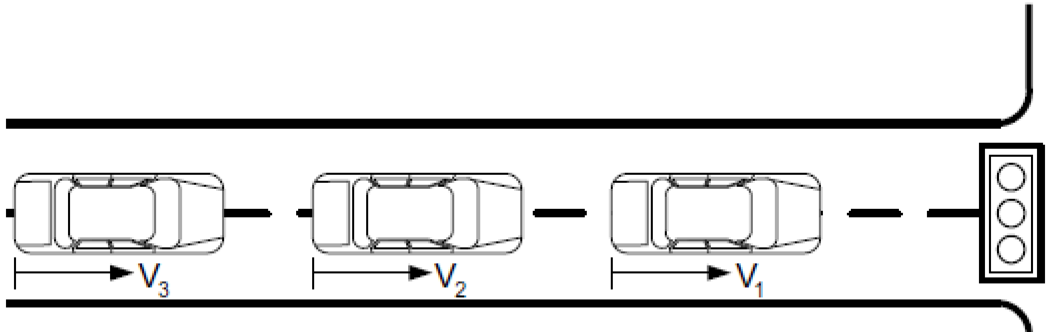


$N = 7$

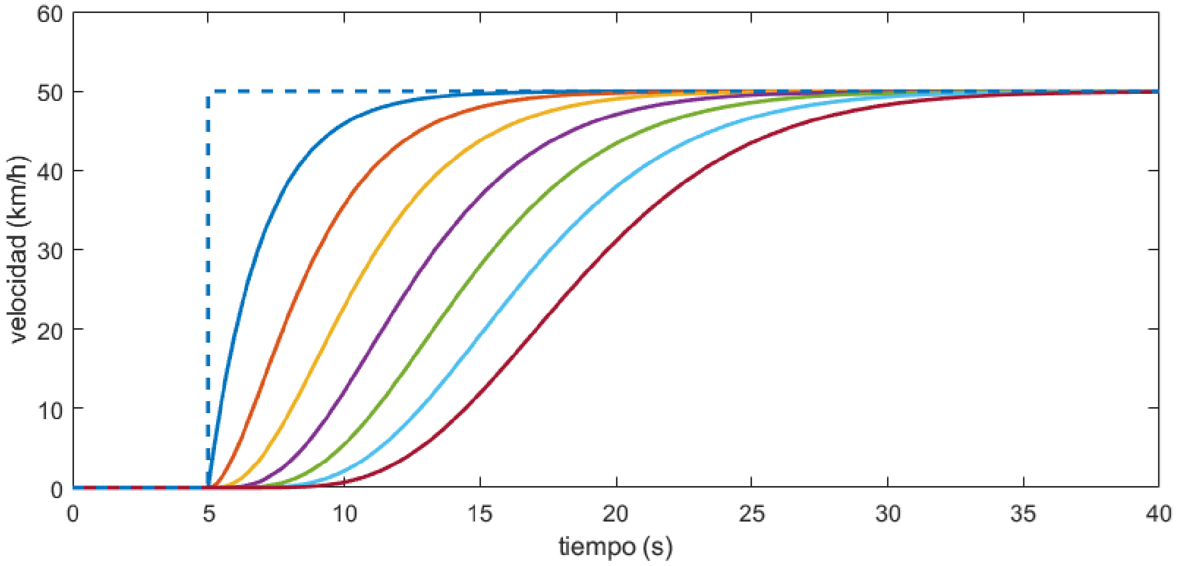
$K = 0{,}5$

CA3: Sistemas con retardo

Introducción: Ejemplo 4 – Autos en un semáforo



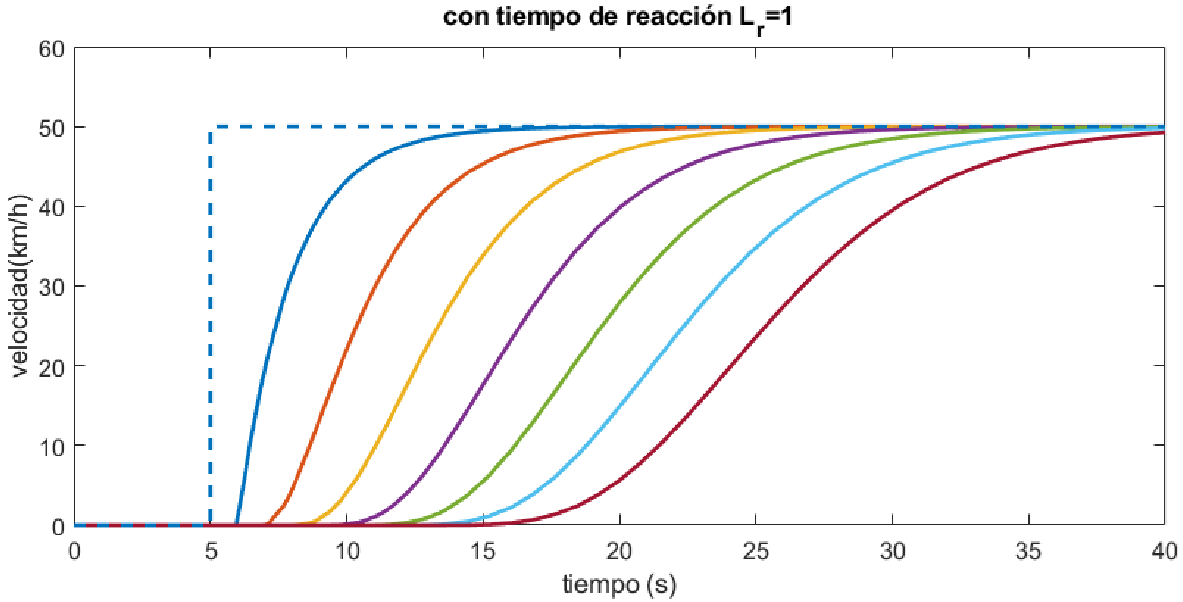
$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = K[v_{i-1}(t) - v_i(t)] \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$



El modelo podría considerar también que cada conductor tiene un "tiempo de reacción" dado por L_r:

$$V_i(s) = \frac{e^{-L_r s}}{1 + s/K} V_{i-1}(s) \longrightarrow V_N(s) = \frac{e^{-N L_r s}}{(1 + s/K)^N} V_0(s)$$

$$N = 7 \quad K = 0{,}5 \quad L_r = 1$$



Retardo causado por sistemas de alto orden

- Generalizando para cualquier proceso que tenga N elementos de primer orden en serie, cada uno con una constante de tiempo L/N, la función de transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \frac{L}{N}s)^N}$$

Considerando el límite cuando N -> ∞

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{(1 + \frac{L}{N}s)^N} = e^{-Ls}$$

En un sistema con una constante de tiempo mucho mayor que las demás, las constantes de tiempo más pequeñas trabajan juntas para producir un retraso que actúa como un retardo puro. La dinámica se debe principalmente a la constante de tiempo mayor.

Es posible aproximar el modelo de un proceso dinámico, complejo y de muy alto orden con un modelo simplificado que consiste en un proceso de primer orden combinado con un elemento de retardo puro.

Sistemas con retardo

Índice

Tema 02

V2 - 2024

CA3: Sistemas con retardo

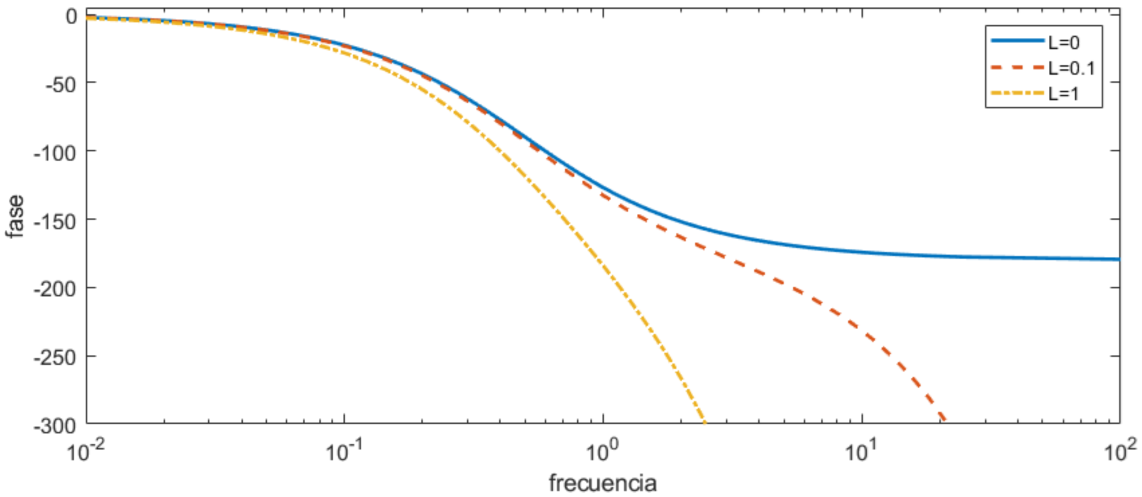
Representación del retardo en el dominio de la frecuencia

- Modelo lineal de un retardo puro: $G(s) = e^{-Ls}$, $L > 0$.
- Respuesta en frecuencia: $G(j\omega) = e^{-j\omega L}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| = 1, \text{ y } \angle G(j\omega) = -\omega L$$

Ejemplo

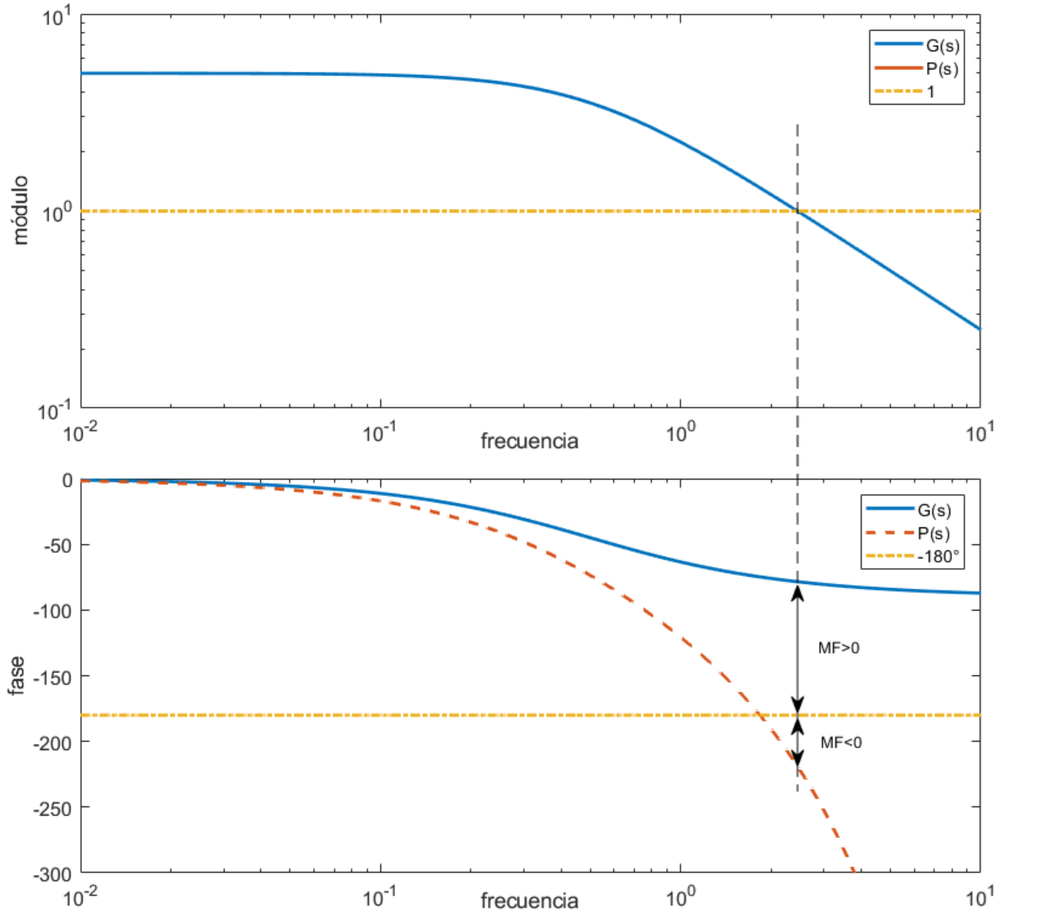
$$P(s) = \frac{5}{(2s+1)^2} e^{-Ls} \quad L \in \{0,;0{,}1,;1\}$$



Ejemplo

$$P(s) = \frac{5}{1+2s} e^{-s} = G(s) e^{-s}$$

$$|P(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{1+(2\omega)^2}}; \quad \varphi_{P(j\omega)} = -\arctan(2\omega) - \omega$$



CA3: Sistemas con retardo

Aproximaciones polinomiales del retardo

- El retardo se puede representar directamente en el dominio de la frecuencia. Los métodos de análisis y diseño de frecuencia se pueden utilizar sin aproximaciones del retardo.
- La función de transferencia del retardo no es racional. Para representaciones polo-cero se utilizan aproximaciones polinómicas.
- La representación no racional del retardo e^{-Ls} se puede aproximar a una función de transferencia racional de la forma $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ usando diferentes enfoques.

Para fines de control, cuando se necesitan modelos simples para diseñar controladores (ej. PID), se utilizan aproximaciones polinomiales de bajo orden.

- Expansión en series de Taylor de e^{-Ls}:

$$T_i(s) = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{i} \frac{(sL)^i}{i!}}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

- Truncado de orden i de

$$e^{-Ls} = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{(1 + Ls/i)^i}$$

$$G_i(s) = \frac{1}{(1 + \frac{Ls}{i})^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

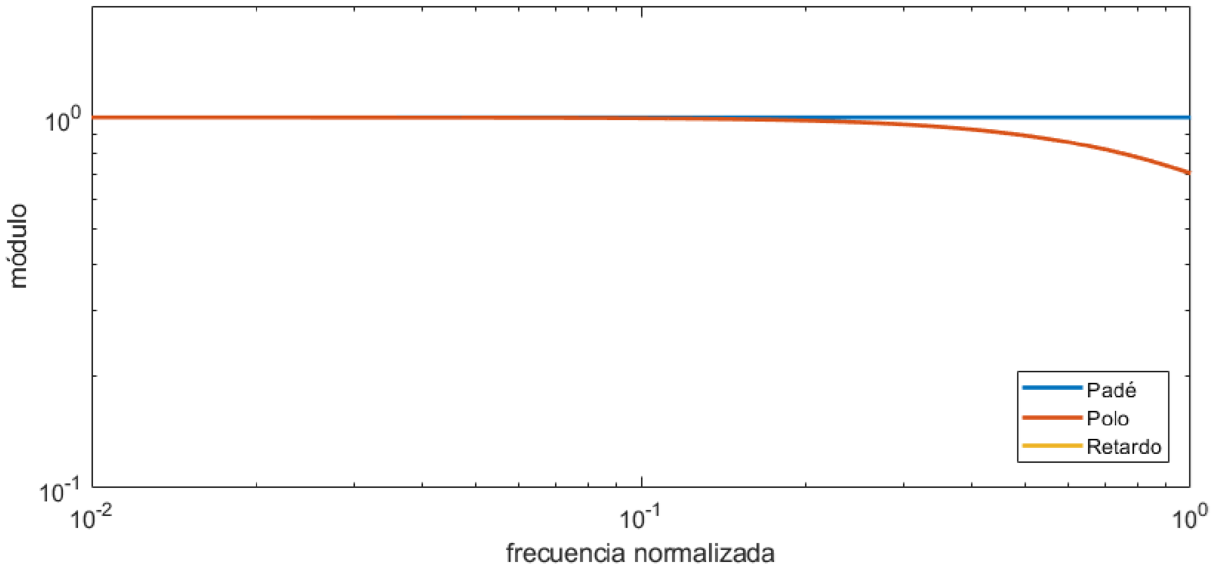
- Aproximación de Padé de orden ij.

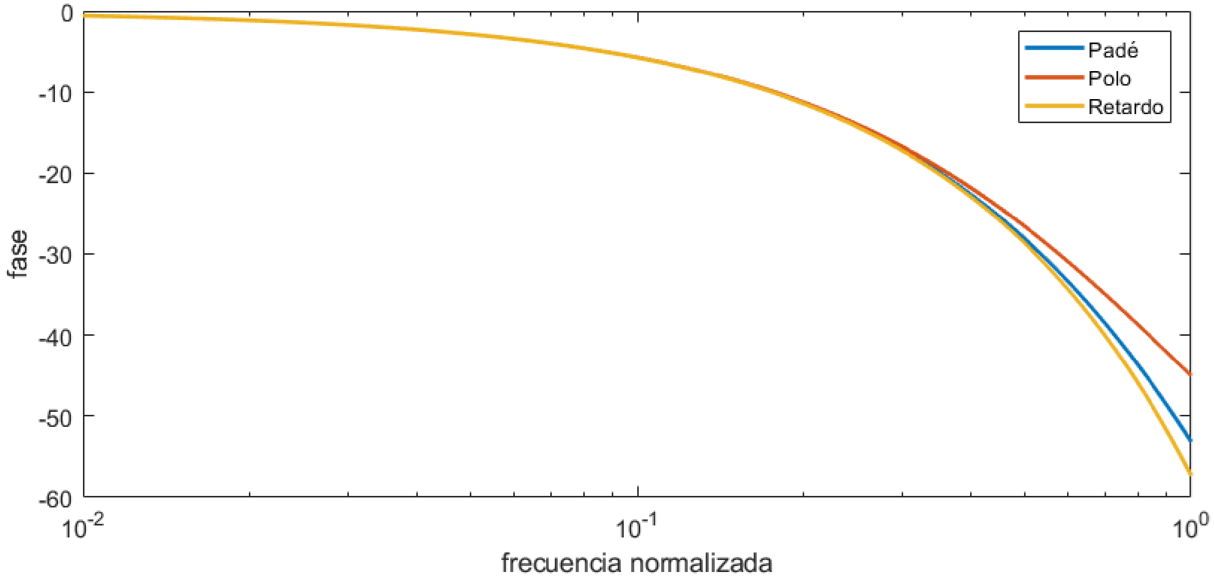
$$P_{11}(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s}{1 + \frac{L}{2}s} \qquad P_{22}(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s + \frac{L^2}{12}s^2}{1 + \frac{L}{2}s + \frac{L^2}{12}s^2}$$

- Cero de no mínima fase

CA3: Sistemas con retardo

Aproximaciones polinomiales del retardo – Análisis en frecuencia





$$P_{11}(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s}{1 + \frac{L}{2}s}$$

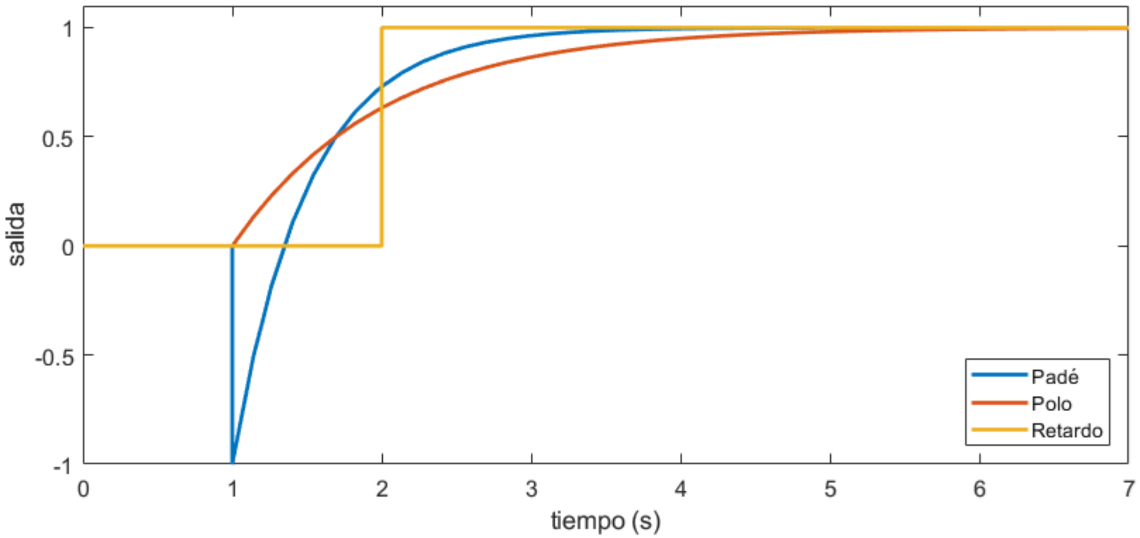
verifica

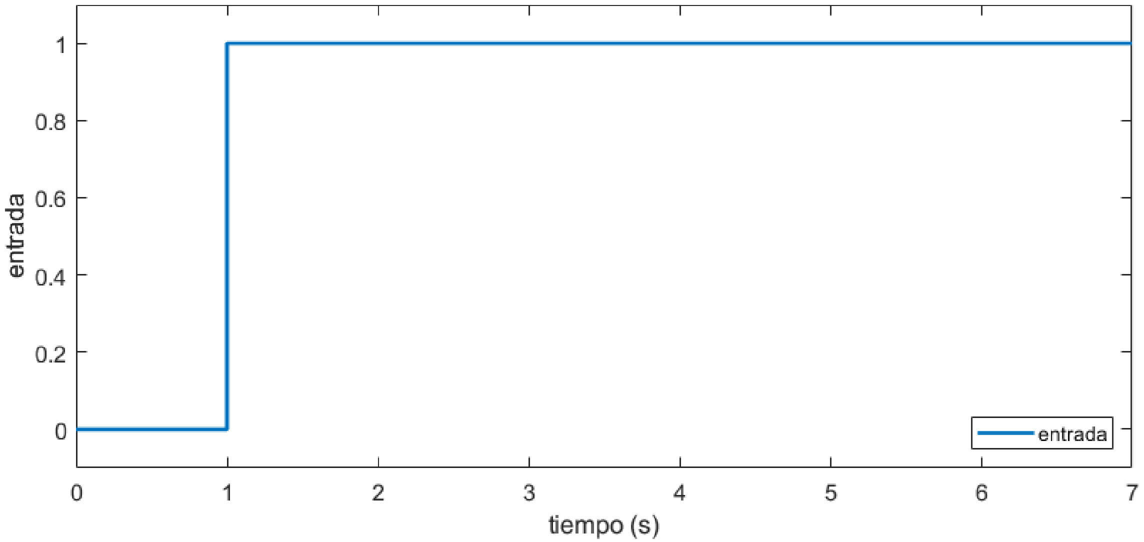
$$|P_{11}(s)|_{s=j\omega} = 1 \qquad \forall\, \omega$$

- Para todos los métodos de aproximación, en el análisis de fase el error es infinito cuando $\omega \rightarrow \infty$.
- Se puede definir un error máximo admisible y calcular el rango de frecuencias válido para este error.

CA3: Sistemas con retardo

Aproximaciones polinomiales del retardo – Análisis en el tiempo

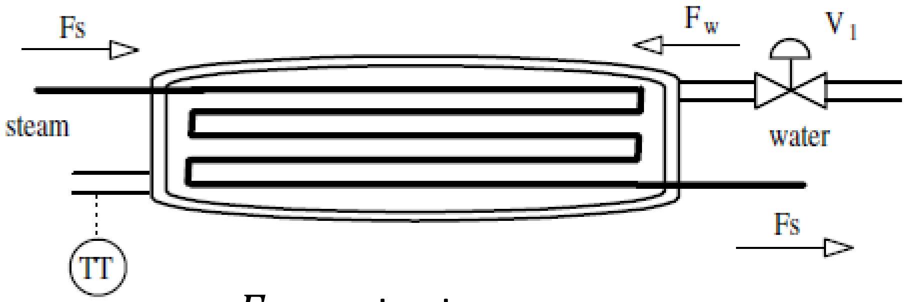




- Utilizando la respuesta al escalón y la integral del error cuadrático (ISE) como medida de comparación.
- El modelo P_{11} tiene un ISE = 5.23 y el modelo G_1 un ISE = 2.22.
- P_{11} presenta un comportamiento de fase no mínima.
- La selección de la aproximación más adecuada dependerá del tipo de análisis a realizar.
- G_1 es claramente superior si se necesita un modelo para simulación.
- P_{11} parece ser mejor para un diseño de control basado en frecuencia.

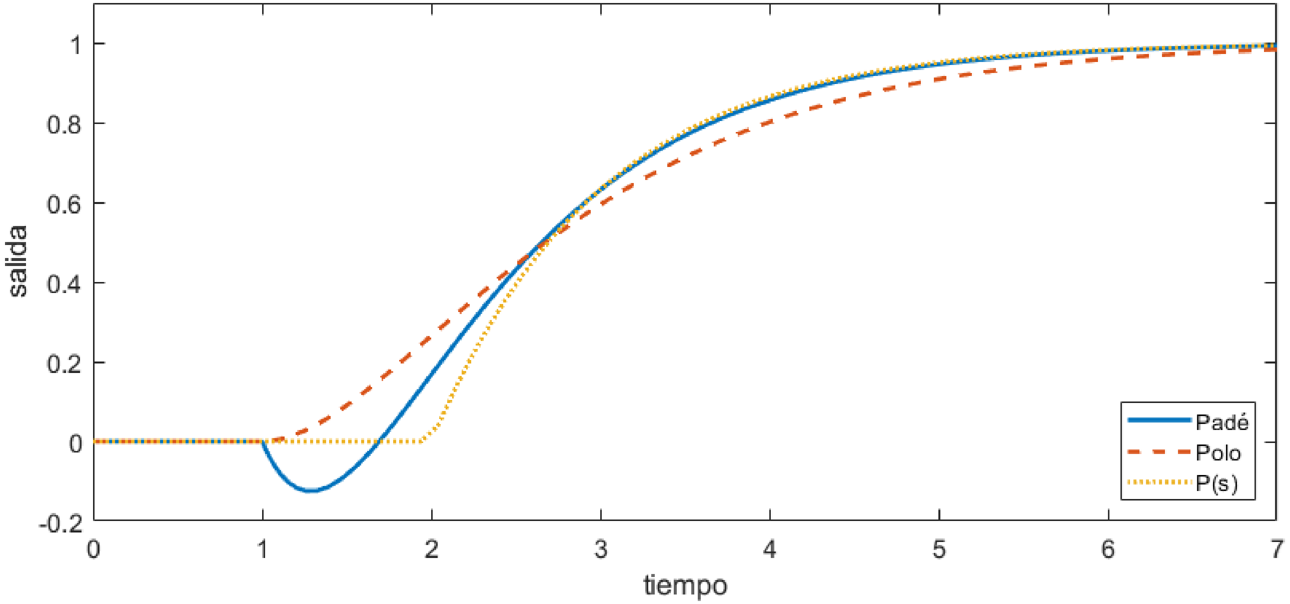
CA3: Sistemas con retardo

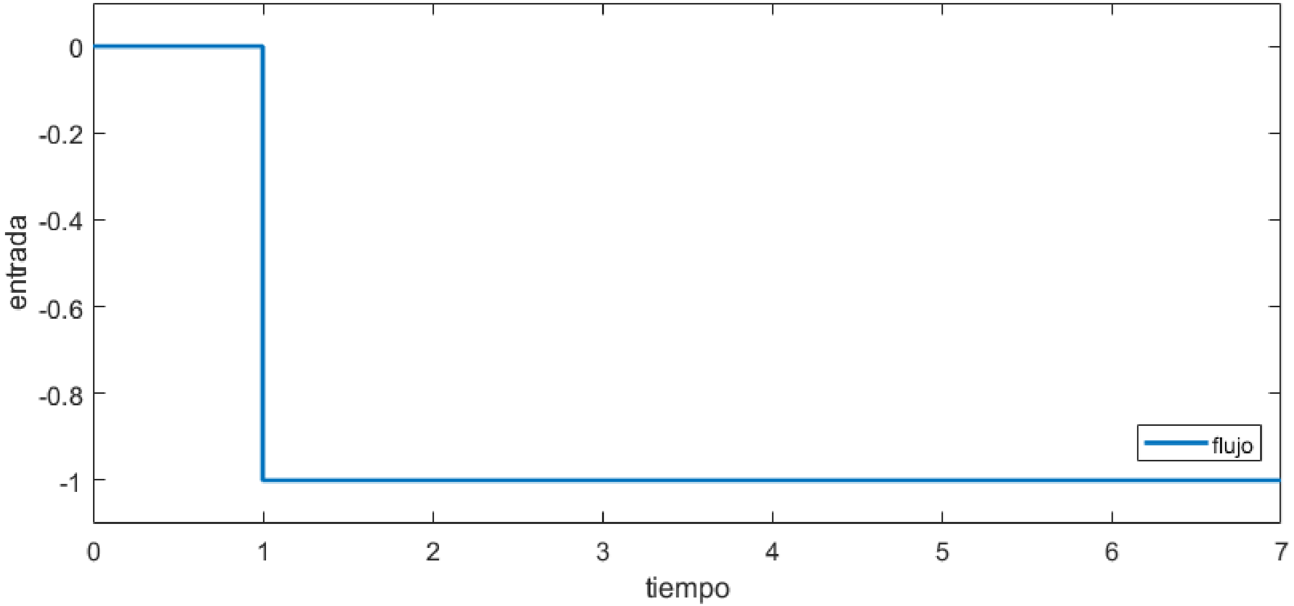
Aproximaciones polinomiales del retardo – Ejemplo



F_s constante
F_w variable manipulada

$$\frac{T(s)}{F_w(s)} = P(s) = \frac{-e^{-s}}{s+1}$$





CA3: Sistemas con retardo

Representación discreta del retardo

- Dependiendo de la naturaleza del proceso, la descripción del modelo se puede hacer directamente en el dominio discreto ($x_2(t) = x_1(t-d)$).

- Cuando se utiliza equipo digital para controlar sistemas continuos:
  - Discretización del controlador diseñado en el dominio continuo
  - Diseño discreto basado en la representación discreta del proceso
    - Es necesario tener un modelo discreto del retardo.

- Partiendo de $P(s) = G(s)e^{-Ls}$, la descripción discreta está dada por

$$P(z) = \mathcal{Z}\{B_o(s)P(s)\}$$

- Se pueden dar dos casos:
  - T_s es un submúltiplo entero de L, $L = dT_s$
  - T_s no es un submúltiplo entero de L, $L = dT_s + \delta L$

- $L = dT_s$

$$P(z) = G(z)\mathrm{z}^{-\mathrm{d}}$$

- $L = dT_s + \delta L, \quad -\frac{T_s}{2} \leq \delta L \leq \frac{T_s}{2}$

  - El error δL puede ser despreciado cuando $\delta L \ll T_s$.
  - Si el error δL debe ser considerado, se puede usar una aproximación polinómica.

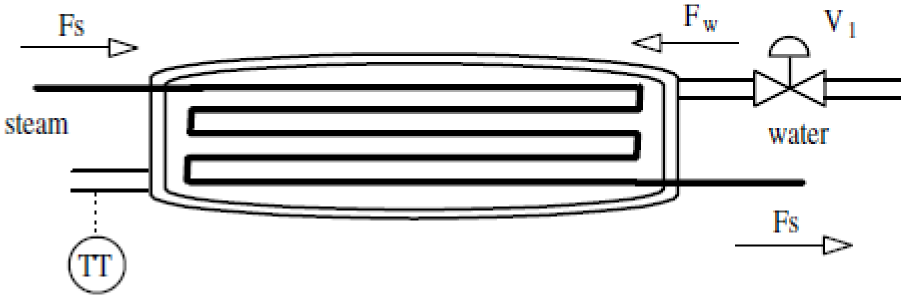
$$P(s) = G(s)e^{-Ls} = G(s)A(s)e^{-dT_s s}$$

$$P(z) = G(z)\mathrm{z}^{-\mathrm{d}}$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{B_o(s)G(s)A(s)\}$$

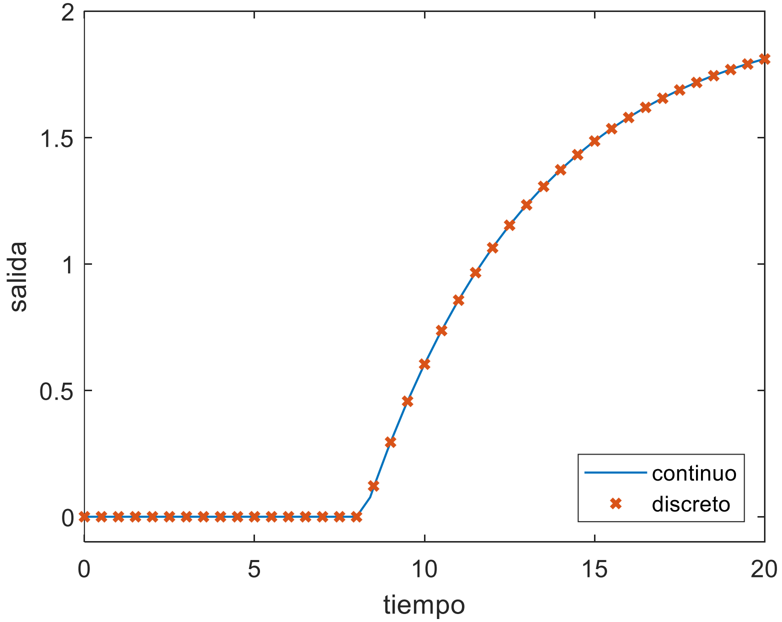
CA3: Sistemas con retardo

Representación discreta del retardo - Ejemplo



- Variable manipulada: flujo de vapor (F_s)
- Modelo en torno a un punto de operación:

$$P(s) = G(s)e^{-Ls} = \frac{5}{1+2s}e^{-4s}$$



- Con $T_s = 0{,}4$, el modelo discreto es:

$$P(z) = \frac{5(1-0{,}8187)}{z-0{,}8187}z^{-10} = \frac{0{,}9065}{z-0{,}8187}z^{-10}$$

- Con $T_s = 0{,}5$ y el modelo

$$P(s) = \frac{2}{1+5s}e^{-7.2s} \longrightarrow \begin{array}{l} L = dT_s + \delta L \\ L = 0{,}5d + \delta L \end{array}$$

  - Resulta $d = 14$ y $\delta L = 0{,}2$.
  - Aproximando $e^{-0{,}2s}$ por $\frac{1}{1+0{,}2s}$

$$P(s) \simeq \frac{2}{(1+5s)(1+0.2s)}e^{-7s}$$

  - La representación discreta es:

$$P(z) = \frac{0.1218z + 0.0529}{z^2 - 0.9869z + 0.0743}z^{-14}$$

CA3: Sistemas con retardo

Representación del retardo en el espacio de estados

- Representación continua

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u'(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t).$$

$$\longrightarrow u'(t) = u(t-L) \longrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t-L)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t),$$

$$\longleftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = P(s) = G(s)e^{-Ls}$$

$$U'(s) = U(s)e^{-Ls} \longrightarrow Y(s) = G(s)U'(s) = G(s)e^{-Ls}U(s) = P(s)U(s)$$

$$e^{-Ls} = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(sL)^i}{i!}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t-L), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t),$$

Es de dimensión infinita

- Representación discreta

$$P(z) = G(z)z^{-d} = \frac{B(z)z^{-d}}{A(z)} = \frac{B(z)}{A(z)z^d}$$

$$A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$B(s) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0$$

$$A(z)z^d = z^{d+n} + a_{n-1}z^{d+n-1} + \ldots + a_1 z^{d+1} + a_0 z^d$$

Ejemplo: modelo FOPDT con retardo dominante $L = 5T$ y $T_s = 0.1T$

$$P(s) = \frac{e^{-Ls}}{sT+1}$$

$n = 1$ y $d = 50$

El sistema libre de retardo tiene dimensión 1.
El sistema con retardo tiene dimensión 51.

Sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Representación y aproximación del retardo
- ***<u>Modelos de sistemas con retardo</u>***
- Análisis de error de modelado
- Márgenes y efectos del retardo
- Control ideal de sistemas con retardo

Tema 02

V2 - 2024

Modelos simples para sistemas con retardo - FOPDT

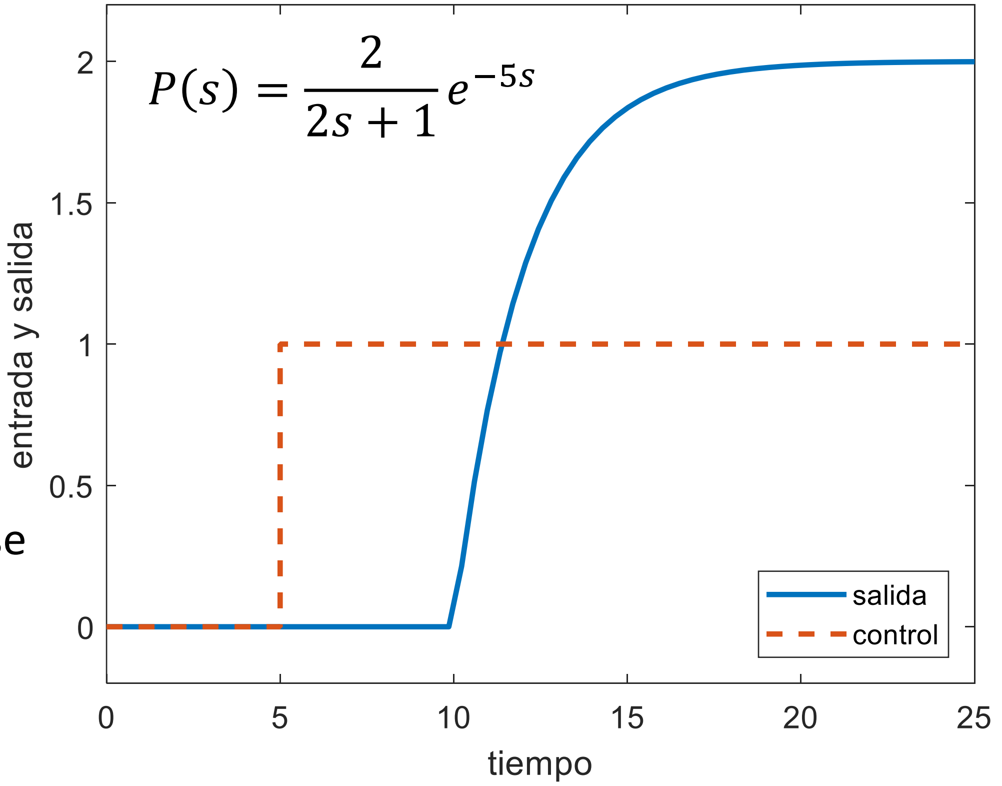
- En la industria es común usar modelos simples para representar el comportamiento dinámico del proceso (incluyendo retardo como parte de la representación).

Normalmente se obtienen mediante linealización o identificación -> respuesta al escalón.

- Modelos estables de lazo abierto con retardo
  - FOPDT (first-order-plus-dead-time)

$$P(s) = \frac{K_p}{1+Ts}e^{-Ls}$$

$T > 0$: *constante de tiempo equivalente*
K_p: *ganancia* en continua
$L > 0$: *retardo equivalente*



  - Es probablemente el más utilizado en la industria y también es la base para la mayoría de las reglas clásicas de ajuste de PID.

La respuesta al escalón tiene una derivada no nula en el primer instante después del tiempo muerto.

- Modelos estables de lazo abierto con retardo
  - SOPDT (second-order-plus-dead-time)

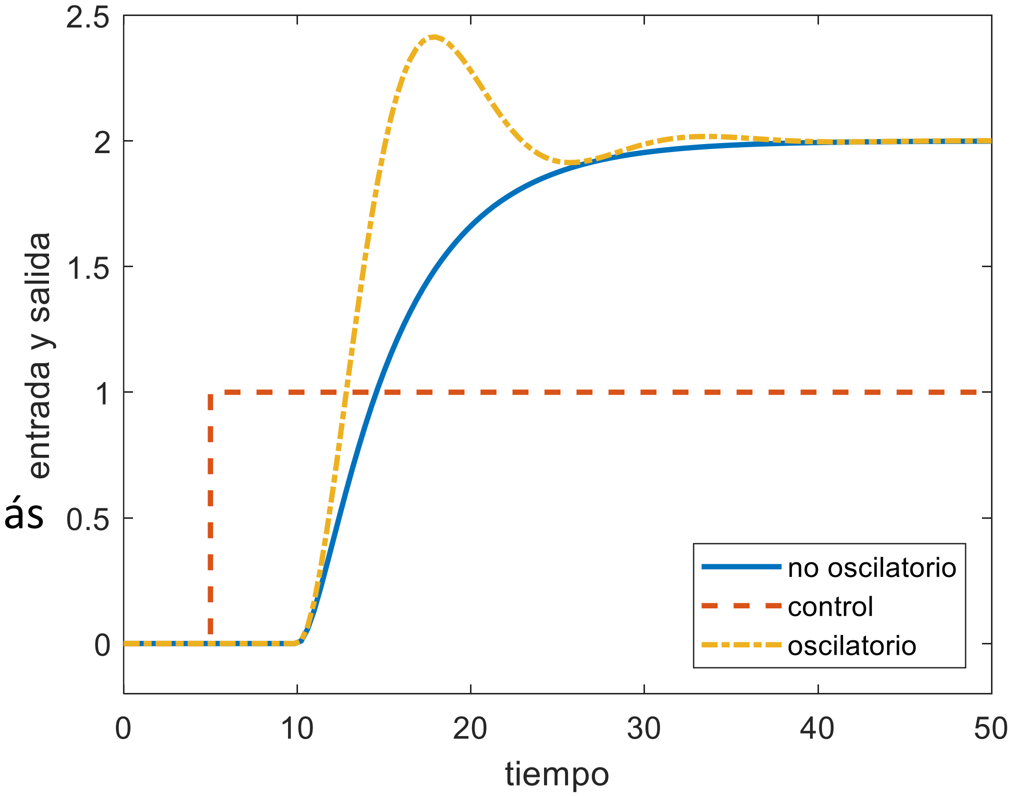
$$P(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{K_p e^{-Ls}}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

T_1 y $T_2 > 0$: *constantes de tiempo equivalentes (caso no oscilatorio)*
K_p: *ganancia* en continua
$L > 0$: *retardo equivalente*
ξ: *amortiguamiento (caso oscilatorio)*
ω_n: *puslsasión natural (caso oscilatorio)*

  - Se utiliza cuando se desea representar una respuesta al escalón más suave en la primera parte del transitorio o una respuesta oscilatoria.

$$P_1(s) = \frac{2}{5s^2 + 6s + 1} e^{-5s}$$

$$P_2(s) = \frac{2}{5s^2 + 2s + 1} e^{-5s}$$



CA3: Sistemas con retardo

Modelos simples para sistemas con retardo – IPDT y SOIPDT

$$P_1(s) = \frac{2}{s}e^{-5s}$$

$$P_2(s) = \frac{2}{s(3s+1)}e^{-5s}$$

- Modelos integradores con retardo
  - IPDT (integrative-plus-dead-time)

$$P(s) = \frac{K_v}{s}e^{-Ls}$$

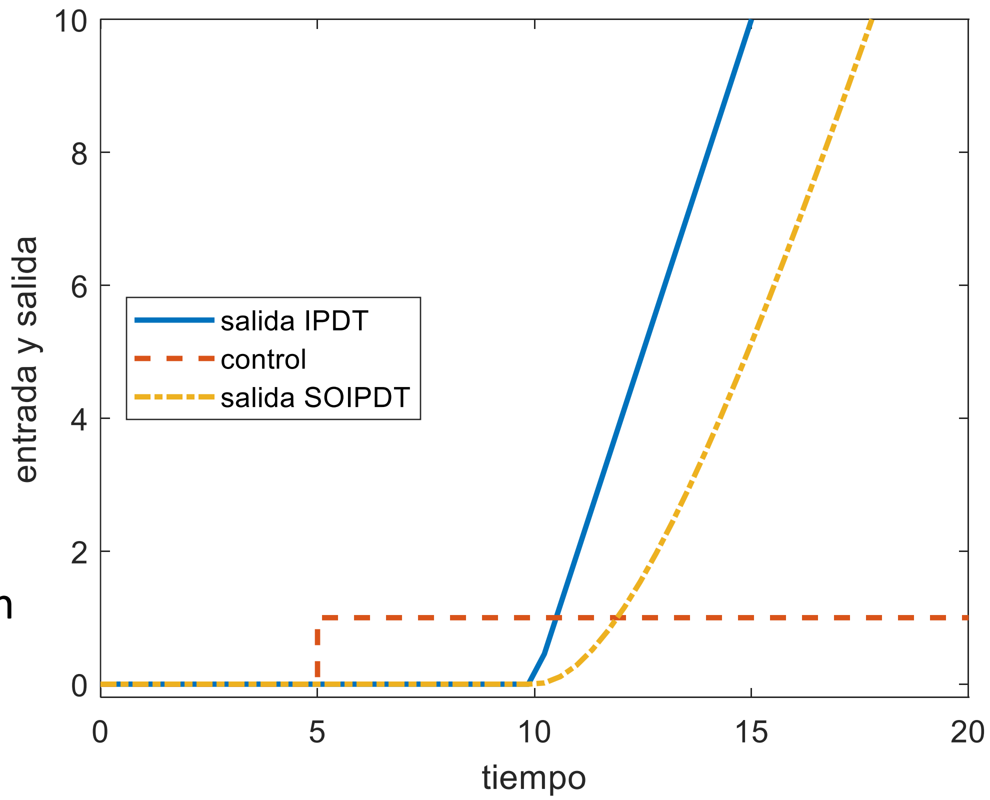
K_v: *ganancia*
$L > 0$: *retardo equivalente*

  - SOIPDT (second-order-integrative-plus-dead-time)

$$P(s) = \frac{K_v}{s(1+Ts)}e^{-Ls}$$

$T > 0$: *constante de tiempo equivalente de la parte no integradora*

  - Se utilizan cuando el proceso presenta un comportamiento integrador.
  - El modelo SOIPDT se utiliza para representar una respuesta al escalón más suave en la primera parte del transitorio.



CA3: Sistemas con retardo

Modelos simples para sistemas con retardo – Modelo inestable

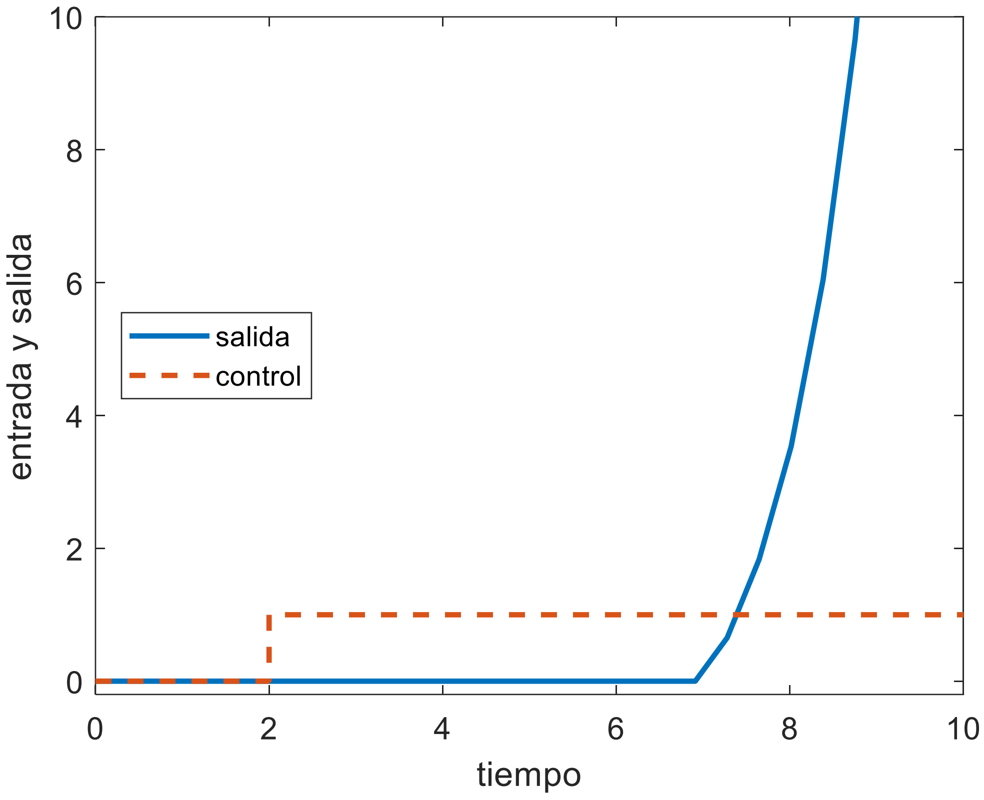
$$P(s) = \frac{2}{s-1}e^{-5s}$$

- Modelos inestables de lazo abierto con retardo

$$P(s) = \frac{K_p}{1-Ts}e^{-Ls}$$

L: retardo equivalente

$T\ y\ K_p\ representan\ el\ creciemieno\ exponencial$



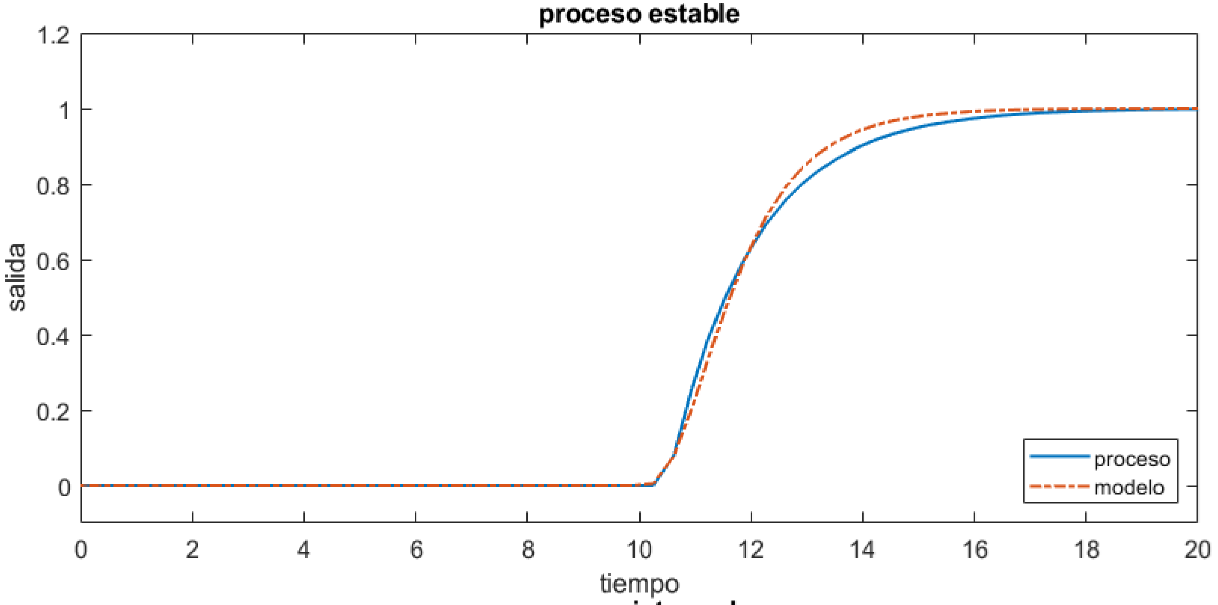
Modelos simples para sistemas con retardo – Ejemplo

- Proceso “real” (estable)

$$P(s) = \frac{e^{-10s}}{(1+s)(1+.5s)(1+.25s)(1+.125s)}$$

  - Aproximación (FOPDT)

$$P(s) = \frac{K_p}{1+Ts}e^{-Ls} \qquad K_p = 1, T = 1{,}5, L = 10{,}5$$

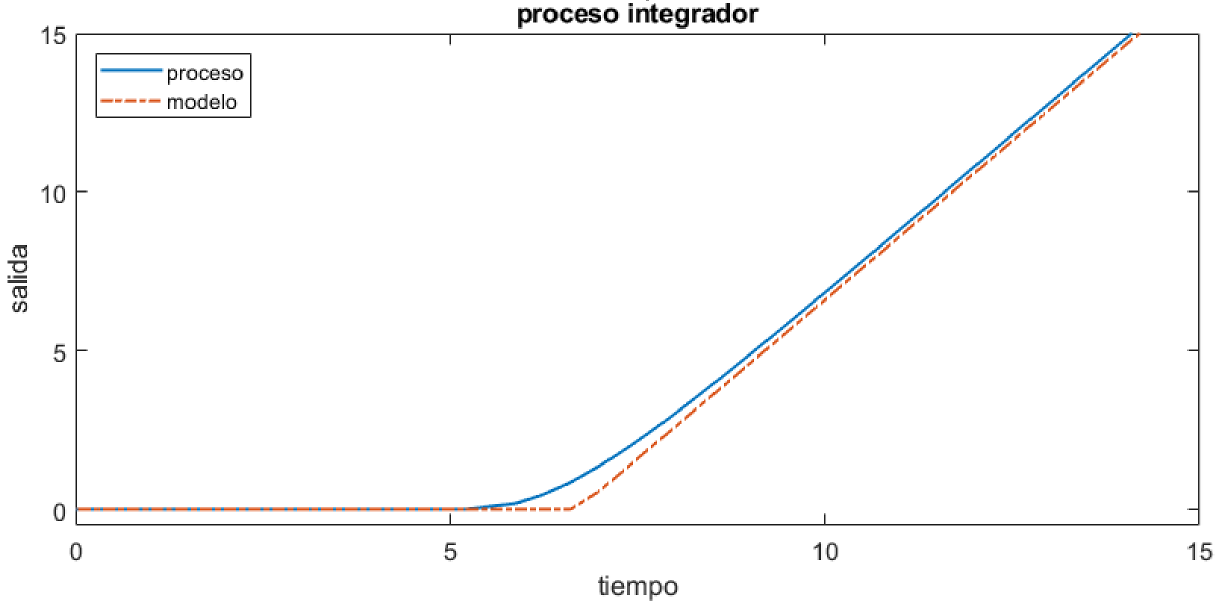


- Proceso “real” (con integrador)

$$P(s) = \frac{2e^{-5s}}{s(1+s)(1+0.5s)(1+0.1s)}$$

  - Aproximación (IPDT)

$$P(s) = \frac{K_v}{s}e^{-Ls} \qquad K_v = 2, L = 6{,}7$$



CA3: Sistemas con retardo

Modelos simples para sistemas con retardo

- La relación entre el retardo y la constante de tiempo asociada con la parte libre de retardo del proceso representa una característica importante del proceso.

- Una forma de tener en cuenta esta relación es normalizar el retardo utilizando la constante de tiempo del modelo FOPDT.

$$\tau = \frac{L}{L+T}, \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

τ se suele usar para definir las dificultades asociadas con el diseño del controlador. Mayores valores de τ implican más dificultades.

- Retardo dominante -> $\tau \approx 1$
- Polo dominante -> $\tau \approx 0$

A τ se le suele llamar “razón de controlabilidad”.

- Una regla general es considerar que un proceso es dominante el retardo cuando $\tau > 2/3$ $(L > 2T)$.

Sistemas con retardo

Índice

Tema 02

V2 - 2024

CA3: Sistemas con retardo

Análisis de error de modelado – Error de modelado en procesos con retardo

Las incertidumbres pueden estar asociadas con:

- el error en la estimación del retardo L
- las simplificaciones utilizadas para aproximar la dinámica libre del retardo

Analizaremos los siguientes tipos de incertidumbres:

- Errores en la estimación de las ganancias K_p o K_v
- Errores en la estimación del retardo
- Errores en la estimación de la constante de tiempo dominante en el caso estable
- Dinámica sin modelar: polos y ceros más rápidos que el dominante se aproximan mediante un modelo de primer orden con una constante de tiempo equivalente T_u menor que la dominante T

- Planta estable
  - Proceso "real":

$$P(s) = e^{-Ls} \frac{K}{(1+sT)(1+sT_u)}$$

  - Modelo nominal:

$$P_n(s) = e^{-L_n s} \frac{K_n}{1+sT_n}$$

- Planta con integrador
  - Proceso "real":

$$P(s) = e^{-Ls} \frac{K}{s(1+sT_u)}$$

  - Modelo nominal:

$$P_n(s) = e^{-L_n s} \frac{K_n}{s}$$

CA3: Sistemas con retardo

Análisis de error de modelado – Error de modelado en procesos con retardo

- Planta estable

$$\delta P(s) = \frac{P(s) - P_n(s)}{P_n(s)} \qquad \delta P(s) = \frac{\frac{Ke^{-Ls}}{(1+sT)(1+sT_u)} - \frac{K_n e^{-L_n s}}{1+sT_n}}{\frac{K_n e^{-L_n s}}{1+sT_n}} = \frac{K}{K_n}\frac{(1+sT_n)e^{-(L-L_n)s}}{(1+sT)(1+sT_u)} - 1$$

- Parametrizando respecto a L_n

$$\omega_n = \omega L_n \quad L' = \frac{L}{L_n}$$
$$T' = \frac{T}{L_n} \quad T'_u = \frac{T_u}{L_n}$$
$$T'_n = \frac{T_n}{L_n} \quad T' = \frac{T}{L_n}$$

- Lo errores relativos son:

$$\delta L' = \delta L = \frac{L - L_n}{L_n}$$
$$\delta T' = \delta T = \frac{T - T_n}{T_n}$$
$$\delta K = \frac{K - K_n}{K_n}$$

- Consideraciones:
  - el proceso es del tipo retardo dominante (*L* > 2*T*)
  - T_u representa a las dinámicas de alta frecuencia con relación a *T*.

- $\delta P(j\omega_n)$ resulta:

$$\delta P(j\omega_n) = (1+\delta K)\frac{1 + j\omega_n T'_n}{1 + j\omega_n T'_n(1+\delta T)}\frac{1}{1 + j\omega_n T'_u} e^{-j\omega_n \delta L} - 1$$

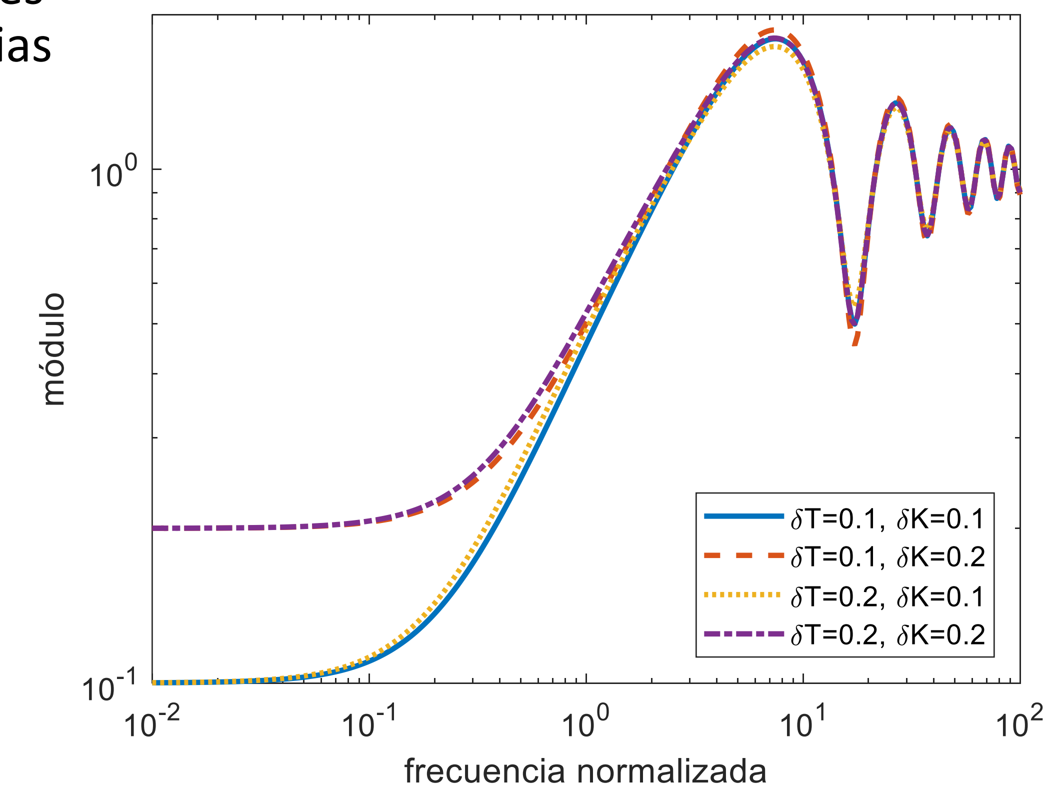
CA3: Sistemas con retardo

Análisis de error de modelado – Error de modelado en procesos con retardo - Ejemplo

- El error en la ganancia tiene un efecto importante sobre los errores multiplicativos a bajas frecuencias pero casi ningún efecto a medias y altas frecuencias.
- De frecuencias medias a altas las curvas están dominadas por el error en la estimación del retardo.

Se debe prestar especial atención al error de estimación del retardo en este tipo de procesos.

$$T_n' = 0{,}5\,;T_u' = 0{,}1\,;\delta L = 30\%$$



CA3: Sistemas con retardo

Análisis de error de modelado – Error de modelado en procesos con retardo

- Planta con integrador

$$\delta P(s) = \frac{e^{-Ls}\frac{K}{s(1+sT_u)} - e^{-L_n s}\frac{K_n}{s}}{e^{-L_n s}\frac{K_n}{s}} = e^{-(L-L_n)s}\frac{K}{K_n}\frac{1}{1+sT_u} - 1$$

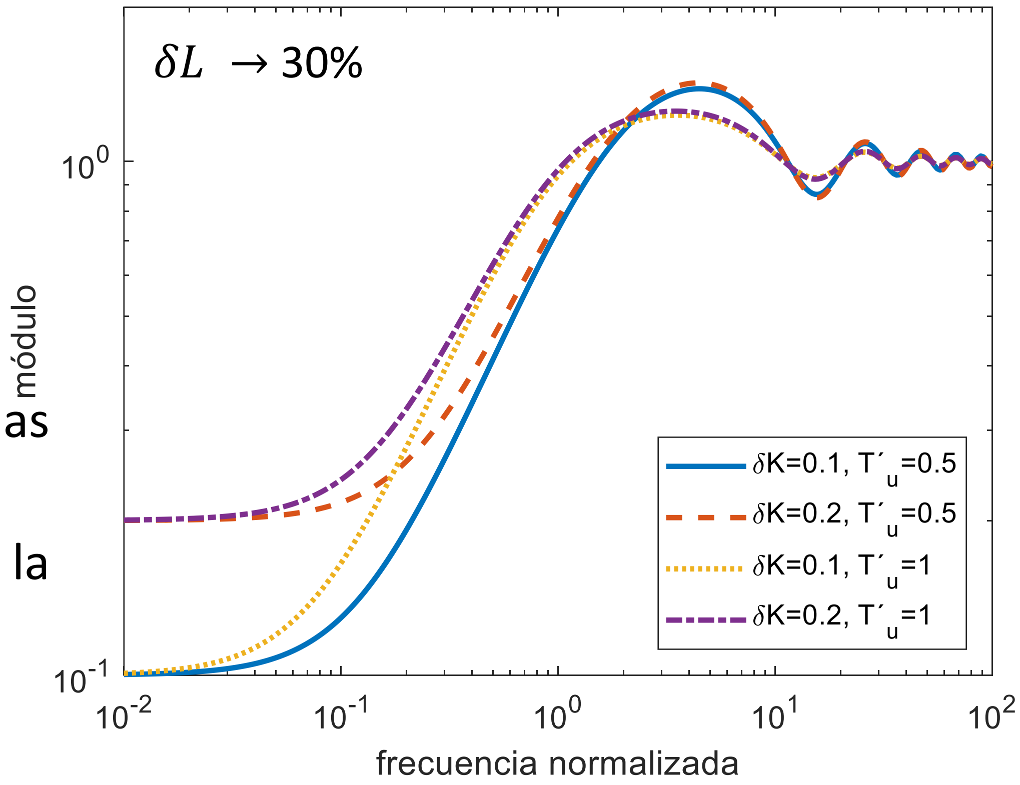
- Usando la misma parametrización que en el caso estable

$$\delta P(j\omega_n) = (1+\delta K)\frac{1}{1+j\omega_n T_u'}e^{-j\omega_n \delta L} - 1$$

- El error está casi definido por los errores en el retardo.
- El error en la ganancia y T_u son más importantes en las frecuencias bajas y medias.
- A medida que T_u aumenta, el valor máximo de $\delta P\,(j\omega)$ y la frecuencia a la que ocurre disminuyen.

Si el retardo es dominante, o al menos importante, este error será responsable de llevar el sistema a LC a la inestabilidad.

- Consideraciones:
  - El retardo se considera tal que $L \geq T_u$.



Sistemas con retardo

Índice

Tema 02

V2 - 2024

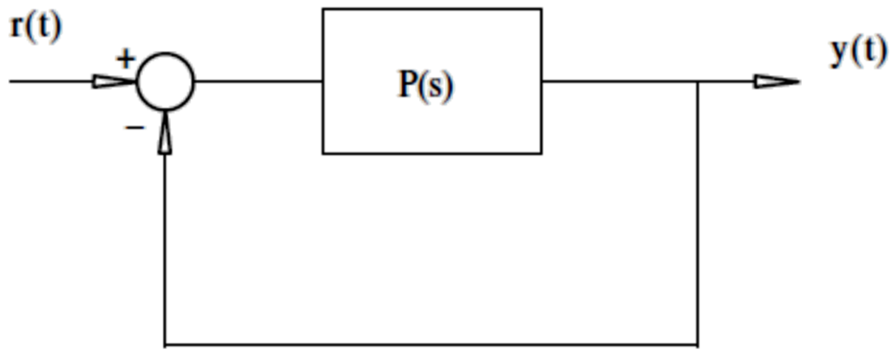
CA3: Sistemas con retardo

Margen de retardo e incertidumbre en el retardo

- Para evaluar el efecto que el error en la estimación del retardo tiene sobre la robustez, se define el margen de retardo del sistema como la variación más grande que puede ocurrir en el retardo del proceso $P(s)$ antes de que el sistema a LC se vuelva inestable.

- El margen de retardo D_m se define como:

$$D_m = \min_i \left(\frac{\phi_i}{\omega_i} \right)$$



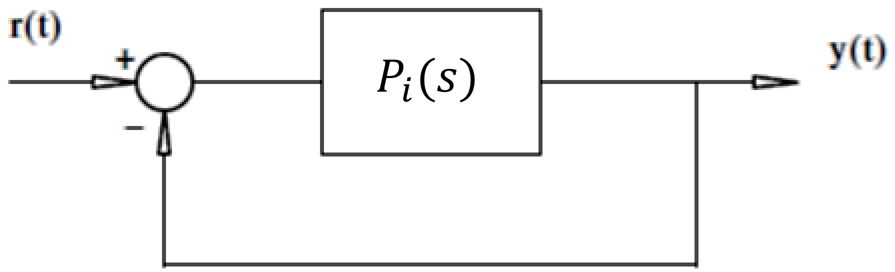
  - ω_i es la frecuencia donde el diagrama de Nyquist del sistema cruza el círculo unitario
  - φ_i margen de fase en ω_i

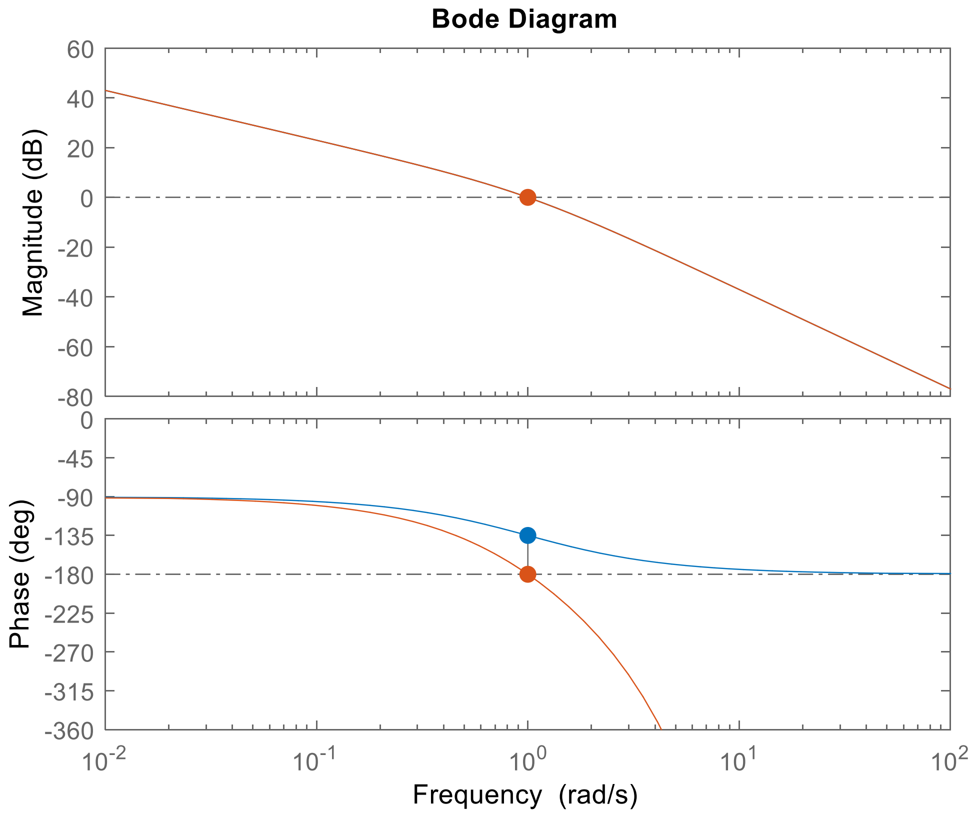
CA3: Sistemas con retardo

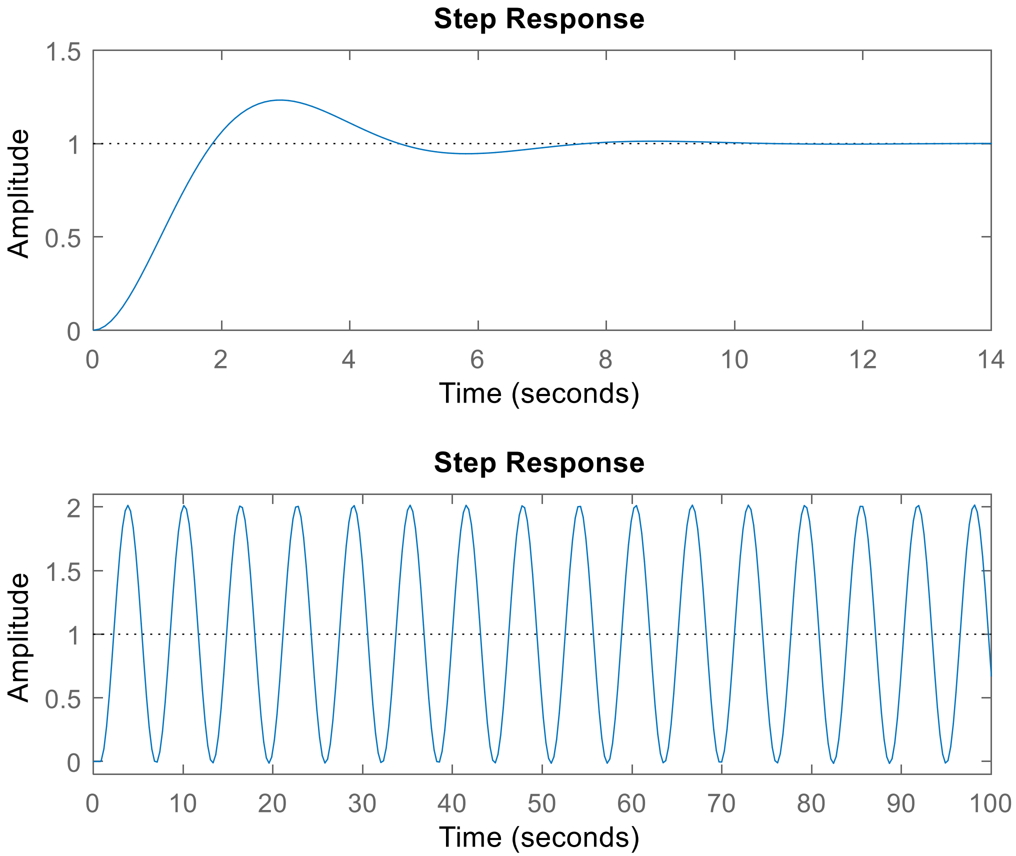
Margen de retardo e incertidumbre en el retardo - Ejemplo

$$P_1(s) = \frac{K}{s(1+sT)} \qquad P_2(s) = \frac{K}{s(1+sT)}e^{-Ls}$$

$$T = 1$$
$$K = \sqrt{2}/T$$
$$L = \pi T/4$$





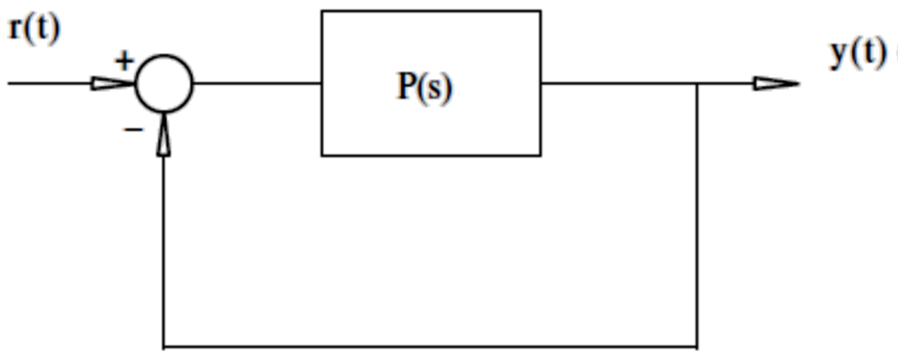


CA3: Sistemas con retardo

Margen de fase e incertidumbre en el retardo - Ejemplo

- Dado

$$P_i(s) = \frac{K_i}{s(1 + sT_i)}, \qquad i = 1, 2,$$



- K_i se ajusta para lograr un margen de fase de $45°$ en $\omega_i = 1/T_i$ y un margen de ganancia infinito.
- $\angle P_i(j\omega_i) = -135°\ (-3\pi/4)$, $K_i$resulta:

$$|\,P_i(j\omega_i)\,| = \frac{K_i}{\sqrt{2}\omega_i} = 1 \Rightarrow K_i = \sqrt{2}\omega_i$$

El sistema con mayor ancho de banda se vuelve inestable con un retardo menor.

- Supongamos que no se tuvo en cuenta un retardo $e^{-L_i s}$ durante el modelado.

¿Cuál es el valor máximo de retardo L_i que puede haber sin perder la estabilidad de lazo cerrado?

$$D_m = \min_i \left(\frac{\phi_i}{\omega_i}\right) \qquad\qquad D_{mi} = \frac{\pi T_i}{4} \qquad i = 1, 2$$

Como T_i puede ser tan pequeño como se desee, un valor infinitesimal de L_i podría llevar al sistema a LC a la inestabilidad incluso cuando el margen de fase es de 45° y el margen de ganancia es ∞.

CA3: Sistemas con retardo

Efecto del retardo en el lazo cerrado - Ejemplo

- Para el proceso de la caldera con una tubería larga se considera el modelo:

$$P(s) = \frac{1}{(1+1.5s)(1+0.4s)} e^{-Ls}$$

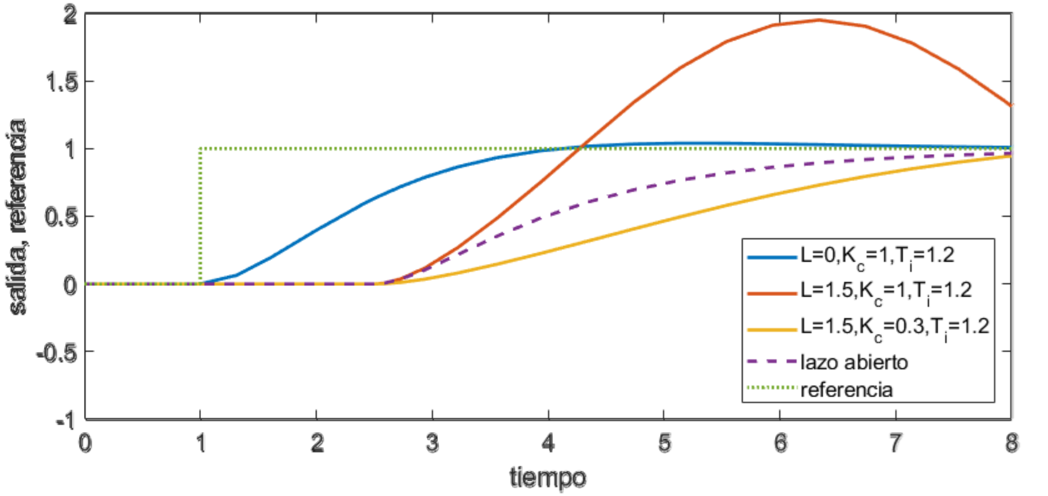
- Controlado mediante

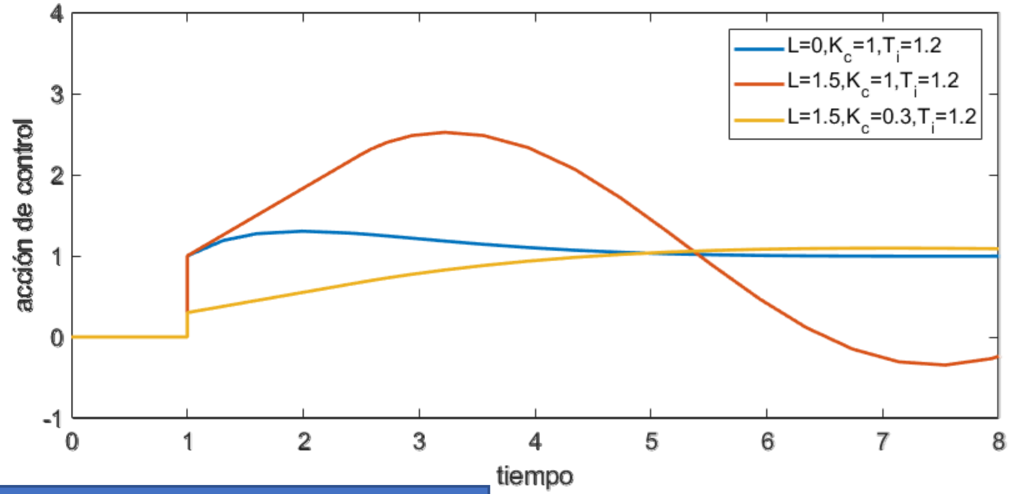
$$C(s) = K_c \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

1) Para L=0 se realiza la siguiente sintonización: $T_i = 1{,}2; K_c = 1.$

2) L=1,5 misma sintonización.

3) L=1,5, $T_i = 1{,}2; K_c = 0{,}3.$

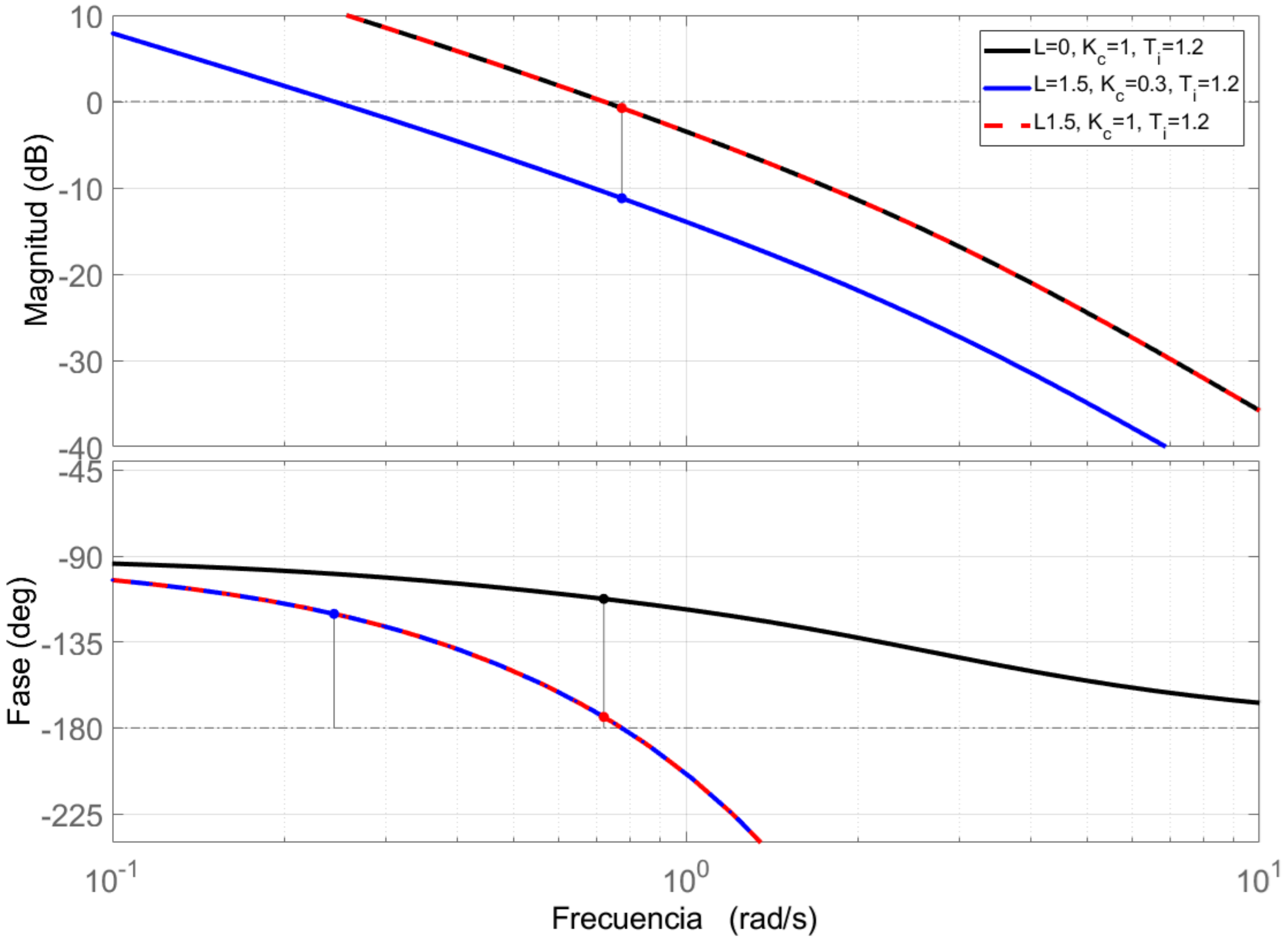




- El retardo aparece en la salida de la planta a lazo cerrado (el controlador no lo puede evitar).
- La respuesta de lazo cerrado (después del retardo) se deteriora. Se puede hacer algo al respecto.

CA3: Sistemas con retardo

Efecto del retardo en el lazo cerrado – Ejemplo (en frecuencia)



- Con L = 0 el sistema tiene un $MF \approx 70°$ y $\omega = \omega_1 > 0{,}7\, rad/s$.
- Con L = 1,5 $MF \approx 5°$, dando un sistema poco amortiguado.
- Para una respuesta no oscilatoria, la ganancia Kc se disminuye hasta que $MF > 60°$, dando un valor menor de la frecuencia de cruce $\omega_2 < \omega_1$.
- Para $\omega \approx 0{,}25\, rad/s$ el transitorio es más lento después del retardo como resultado de la fase introducida por el retardo.

Para una respuesta de lazo cerrado más rápida o un mayor retardo, el avance de fase del PID no será suficiente. Así, se podría incrementar el orden del controlador nuevamente, pero este proceso no tiene fin.

Se podría utilizar un PID para mejorar el rendimiento. La acción derivativa se sintoniza para mejorar el margen de fase de la función de transferencia de lazo abierto $(C(s)P(s))$ cerca de la frecuencia de cruce.

Sistemas con retardo

Índice

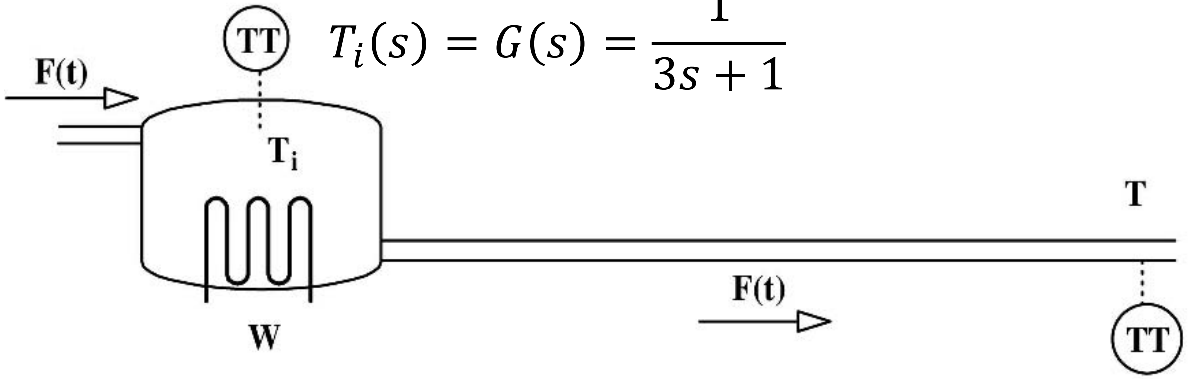
Tema 02

V2 - 2024

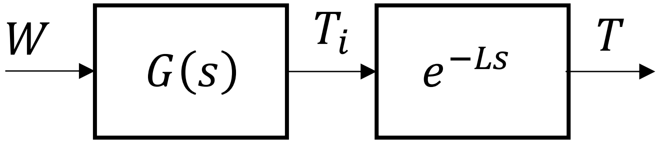
CA3: Sistemas con retardo

Control ideal de sistemas con retardo

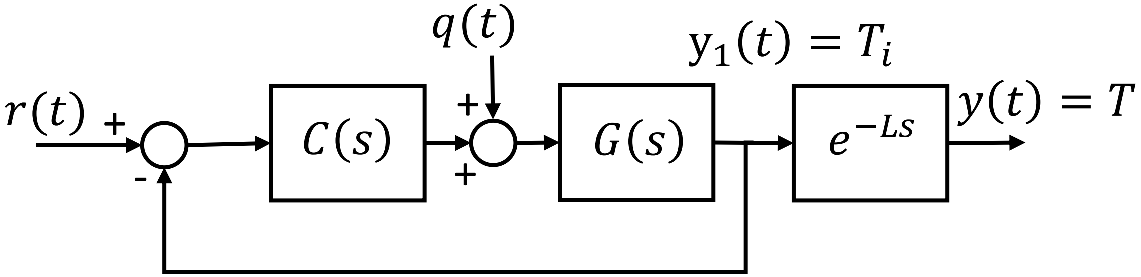
$$T_i(s) = G(s) = \frac{1}{3s+1}$$



$$T(s) = G(s)e^{-Ls} = \frac{1}{3s+1}e^{-5s}$$



- Midiendo la temperatura al inicio de la cañería



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}e^{-Ls}$$

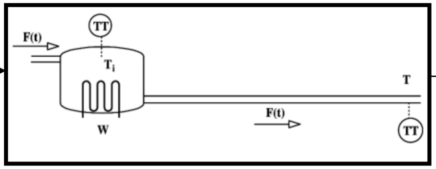
- La implementación real de esta solución, en general, no es posible en la práctica porque:
  - el sensor no se puede instalar en la posición deseada
  - el tiempo muerto del proceso no es causado por el transporte de masa

Se puede obtener una solución simple para este problema utilizando la idea de predicción.

CA3: Sistemas con retardo

Predictor de Smith – Modelo de predicción

Planta:

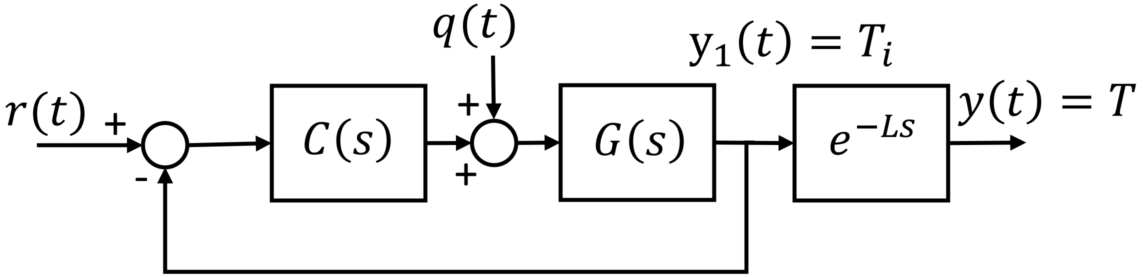
W →  → T

$$P(s) = G(s)e^{-Ls}$$

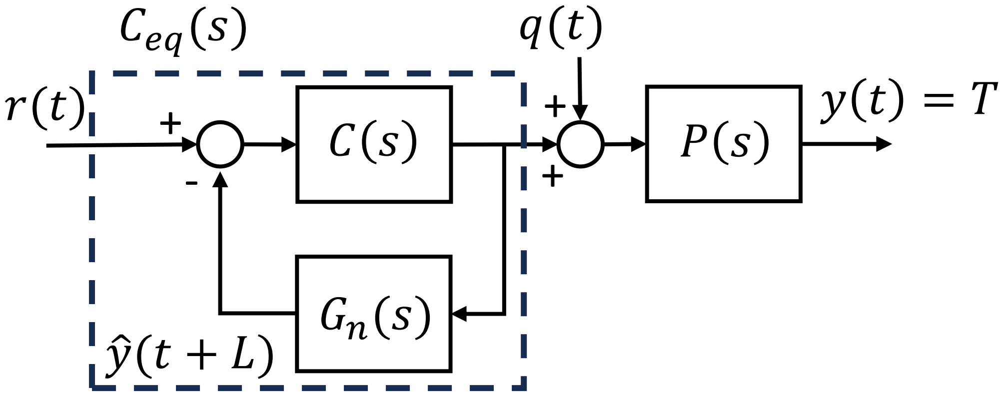
Modelo nominal:

$$W \rightarrow \boxed{P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s}} \rightarrow T$$

$G_n(s)$: modelo libre de retardo de la planta



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}e^{-Ls}$$



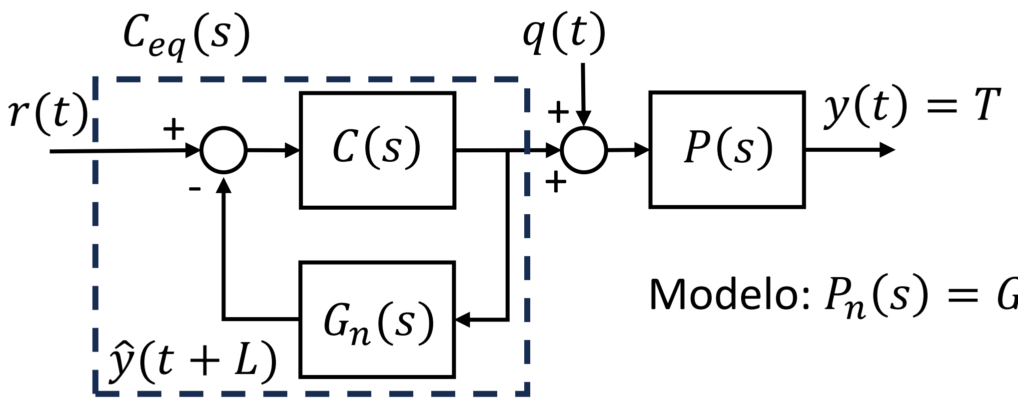
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}P(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}G(s)e^{-Ls}$$

- Si $G_n(s) = G(s)$, $C(s)$ se puede sintonizar considerando sólo $G(s)$ y la respuesta a lazo cerrado es la misma que en el caso ideal.
- El controlador equivalente para sistema es

$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}$$

Control ideal de sistemas con retardo – Predictor a lazo abierto



Modelo: $P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)} P(s)$$

$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)}$$

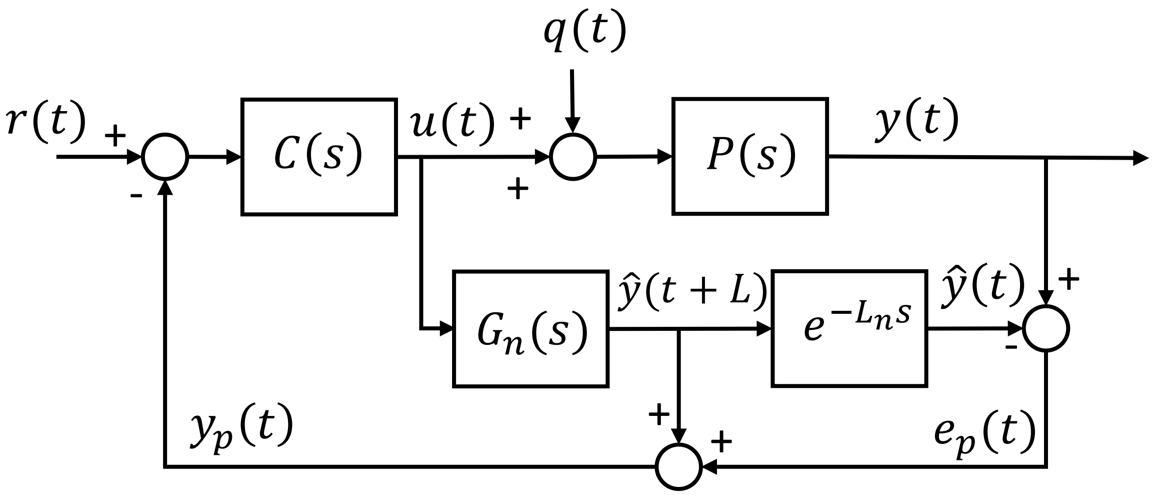
- ¿Qué se puede mencionar?
  - Es un controlador a lazo abierto
- ¿Tiene alguna desventaja?
  - No se pueden corregir perturbaciones
  - No se pueden corregir errores de modelado

A esta estructura se la conoce como control basado en predictor a lazo abierto.

CA3: Sistemas con retardo

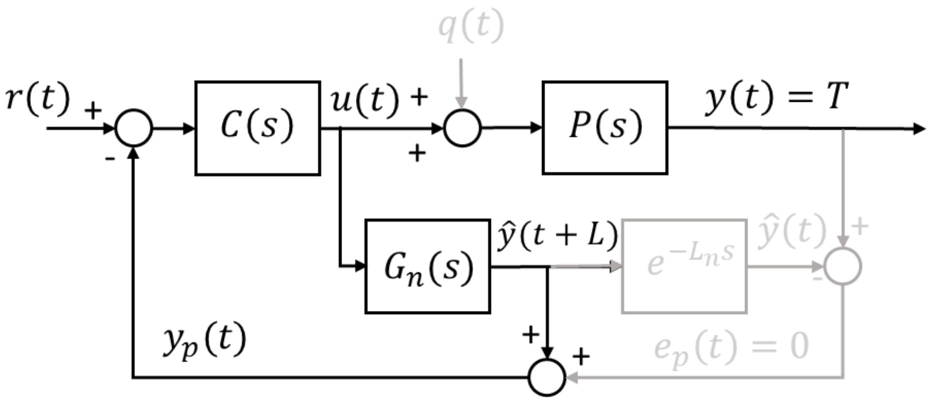
Control ideal de sistemas con retardo – Predictor de Smith

- Smith propuso una mejor solución para este problema en la década del 50 basándose en una estructura de predicción de lazo cerrado del proceso estable de lazo abierto.



- La predicción se calcula mediante el uso de un modelo de la planta sin tiempo muerto ($G_n(s)$).
- Para corregir los errores de modelado se realimenta la diferencia entre la salida del proceso y el modelo.

- Si $P(s) = P_n(s)$ y $q(s) = 0$, $e_p(t) = 0$ $\Rightarrow$ controlador se puede sintonizar como si la planta no tuviera retardo.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-Ls}}{1 + C(s)G(s)}$$

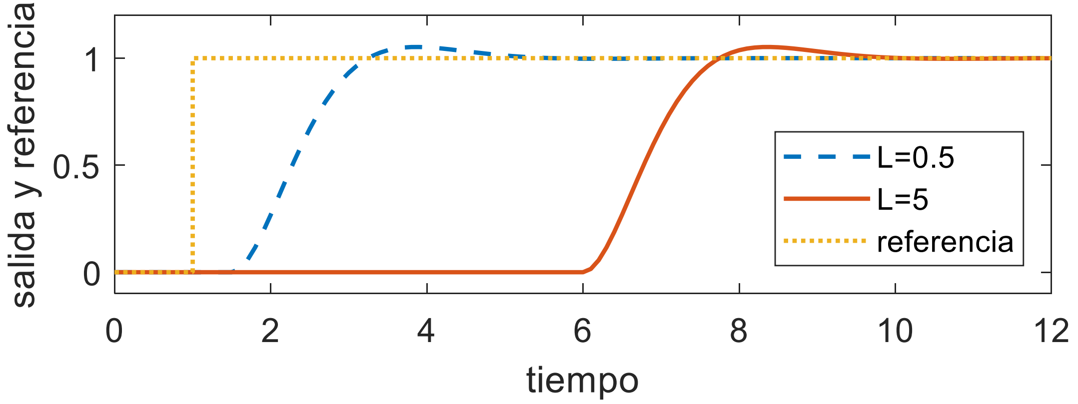
- El caso nominal ofrece el mismo rendimiento que la solución ideal.

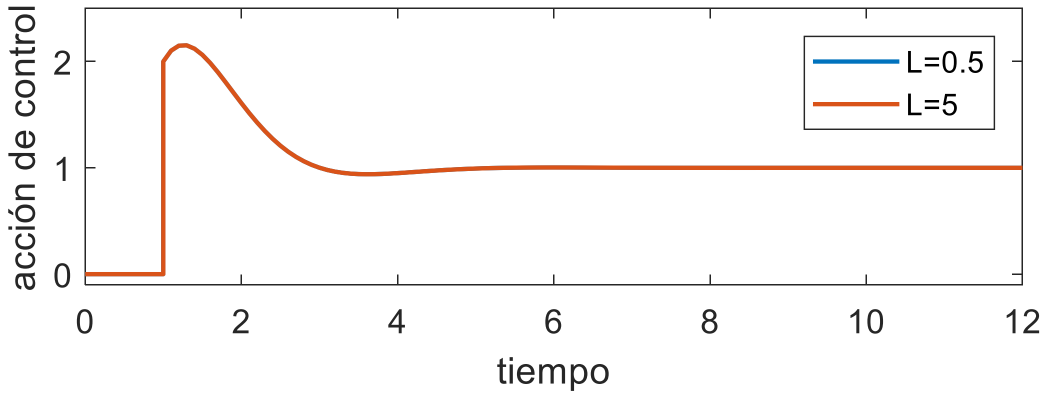
Control ideal de sistemas con retardo – Predictor de Smith - Ejemplo

- Se sintoniza un predictor de Smith para el proceso (ya analizado)

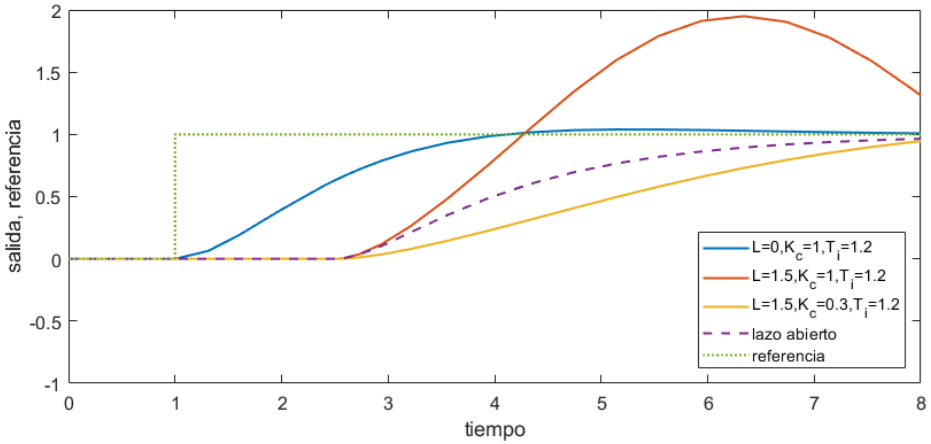
$$P(s) = \frac{1}{(1+1.5s)(1+0.4s)}e^{-Ls}$$

- Se considera L=0,5 y L=5.





- Considerando modelado perfecto, se utiliza un PI con $K_c = 2$ y $T_i = 1{,}5$ en ambos casos dado que el predictor de Smith "se encarga" del retardo.



La acción de control es la misma en ambos casos porque el controlador actúa como si el proceso no tuviera retardo.

CA3: Sistemas con retardo

Bibliografía

- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. “Control of Dead-time Processes”. Springer, 2007,