Control PID de sistemas con retardo

Tema 04

V2 - 2024

Nota

El material de estas diapositivas está basado en los libros:

- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. “Control of Dead-time Processes”. Springer, 2007.
- Karl J. Åström Tore Hägglund. “Control PID Avanzado”. PEARSON, 2009.

Control PID de sistemas con retardo

Índice

- ***<u>Introducción</u>***
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Introducción

- El controlador PID es el más ampliamente utilizado en todo tipo de industrias.
- En el control de procesos, más del 95% de los lazos de control son PID.
- En control avanzado multivariable, como MPC, las estrategias se organizan jerárquicamente de tal manera que los PID se utilizan en el nivel inferior y el algoritmo predictivo multivariable genera sus referencias.
- Muchas veces estos controladores se encuentran mal sintonizados.
- Los PID están hoy en día integrados en sistemas distribuidos y tienen varias funciones agregadas al algoritmo básico, como el ajuste automático, etc.

- Muchos de los métodos de sintonización están enfocados a modelos de primer orden con retardo.
- Hay que tener cuidado con las relaciones L/T definidas para cada ajuste.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

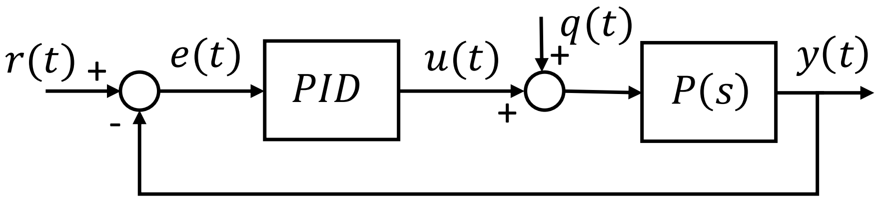
Introducción - PIDs y el control de sistemas con retardo

- Sin bien los controladores basados en predictores son una forma eficaz de controlar los procesos con retardo, los PID se utilizan comúnmente para controlar estos procesos con un éxito razonable en algunos casos.

- PID ideal estándar

$$u(t) = K_c[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}]$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$



K_c: ganancia proporcional
T_i: tiempo integral
T_d: tiempo derivativo

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

Otras formas:

- PID serie

$$C(s) = k_c\frac{(1+T_I s)}{T_I s}(T_D s + 1)$$

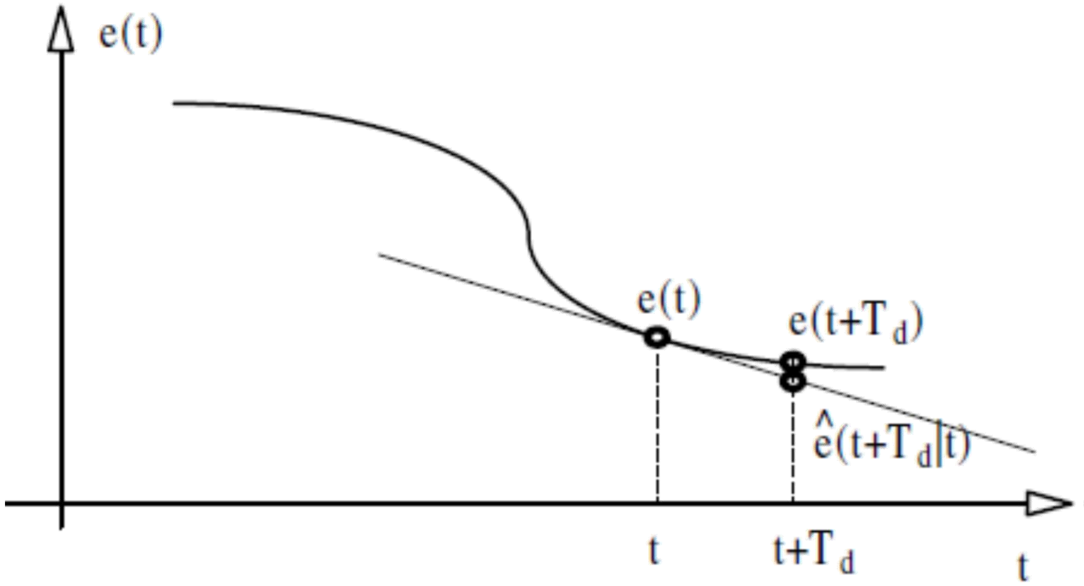
- PID paralelo

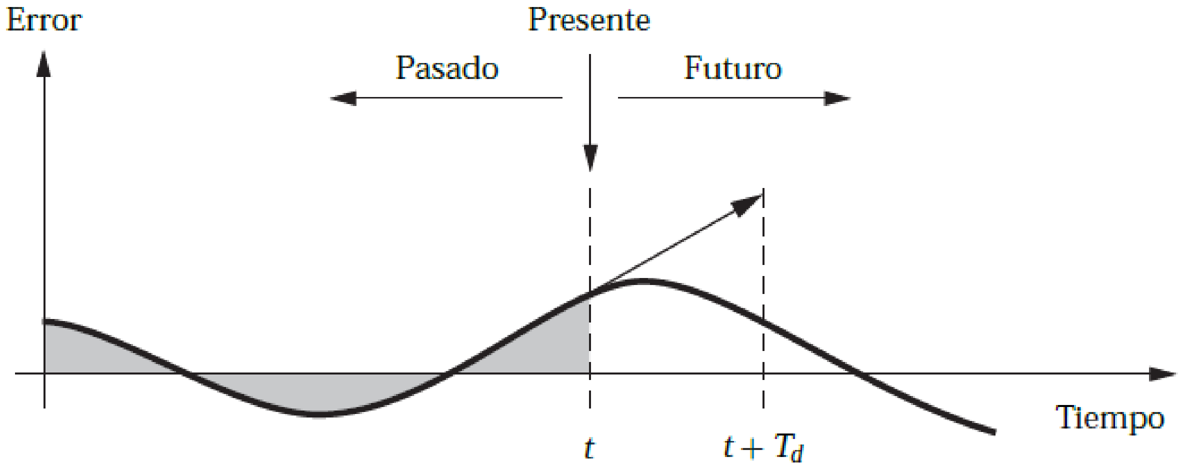
$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

- Es útil interpretar los PID como controladores predictivos.

- La acción PD se puede ver como una predicción lineal del error en $t + T_d$ usando la información en t denotado como $\hat{e}(t + T_d|t)$.

$$u_{PD}(t) = K_c[e(t) + T_d \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}] = K_c \hat{e}(t + T_d \mid t)$$

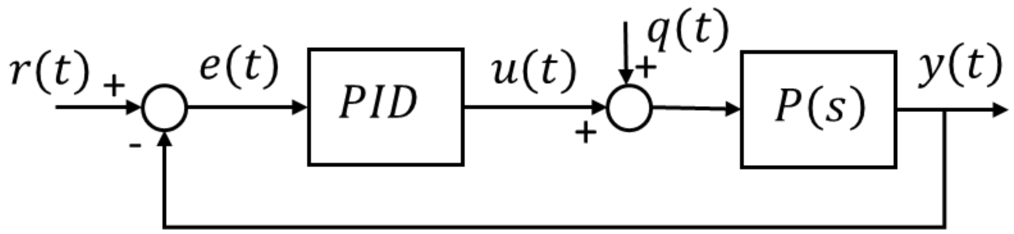




CA3: Control PID de sistemas con retardo

Introducción - PIDs y el control de sistemas con retardo

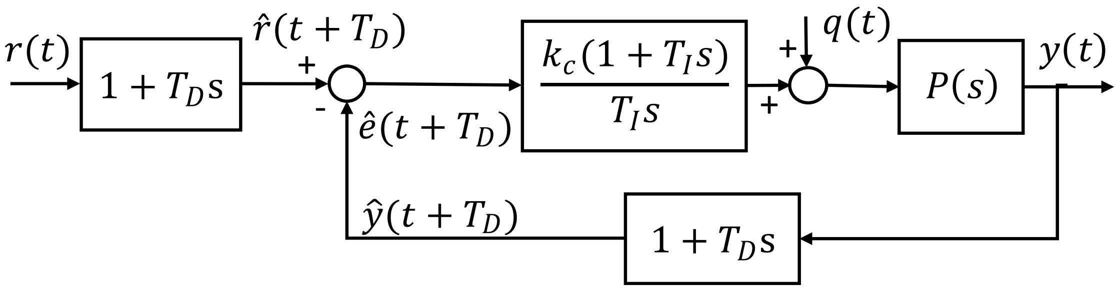
- PID en la forma serie controlando un sistema con retardo $P(s) = G(s)e^{-Ls}$.



$$\tilde{e}(t) = r(t) + T_D\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} - y(t) - T_D\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\tilde{e}(t) = \hat{e}(t+T_D) = \hat{r}(t+T_D) - \hat{y}(t+T_D)$$

$$C(s) = k_c\frac{(1+T_Is)}{T_Is}(T_Ds+1)$$



- Si $T_D = L$, el controlador PI verá una predicción del error en $t+L$. Cuando $\hat{e}(t+T_D) \cong e(t+T_D)$, el PI se puede ajustar para el proceso libre de retardo.
- Válido sólo cuando la variación de $e(t)$ es suave en el intervalo $(t, t+T_D) \Rightarrow L < T_0$.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Introducción - PIDs implementables

- Las representaciones ideales del PID no se pueden implementar en la práctica ($C(s)$ impropio).
- Normalmente se utiliza un filtro pasa bajos en la acción derivativa para hacerlo propio.

$$D(s) = \frac{K_c(T_d s)}{\alpha T_d s + 1} \qquad \alpha \in (0,1)$$

- Con α se puede ajustar la atenuación del ruido y también la robustez del lazo cerrado.
- El filtro se puede considerar como un filtro en cascada con el PID.

$$C(s) = \frac{K_c(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)}{\alpha T_d s + 1}$$

Otras formas:

- PID serie

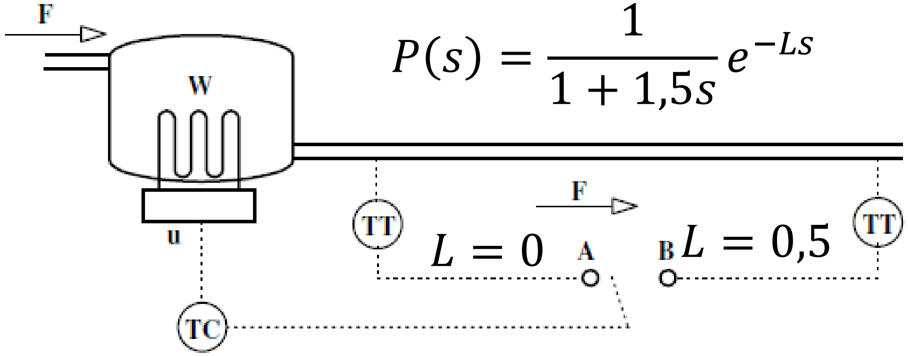
$$C(s) = k_c \frac{(1 + T_I s)}{T_I s} \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1}$$

- PID paralelo

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{\alpha K_D s + 1}$$

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Introducción- Efecto del término derivativo en la sintonización - Ejemplo

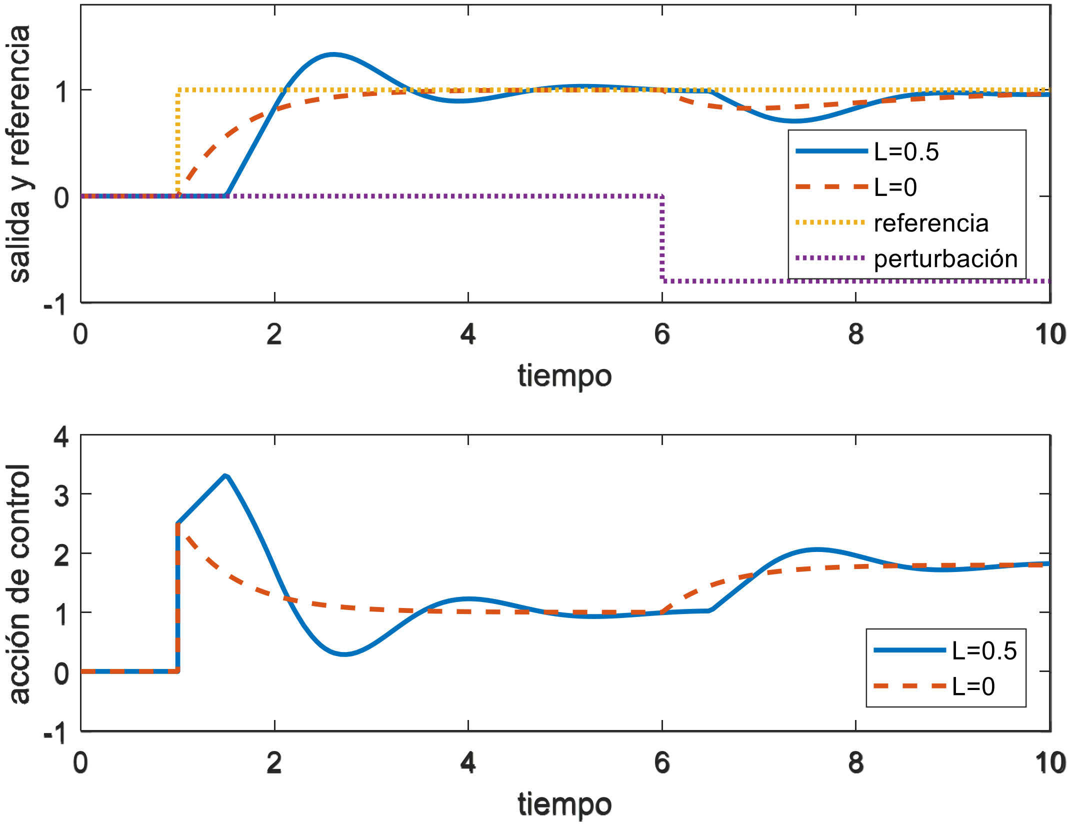


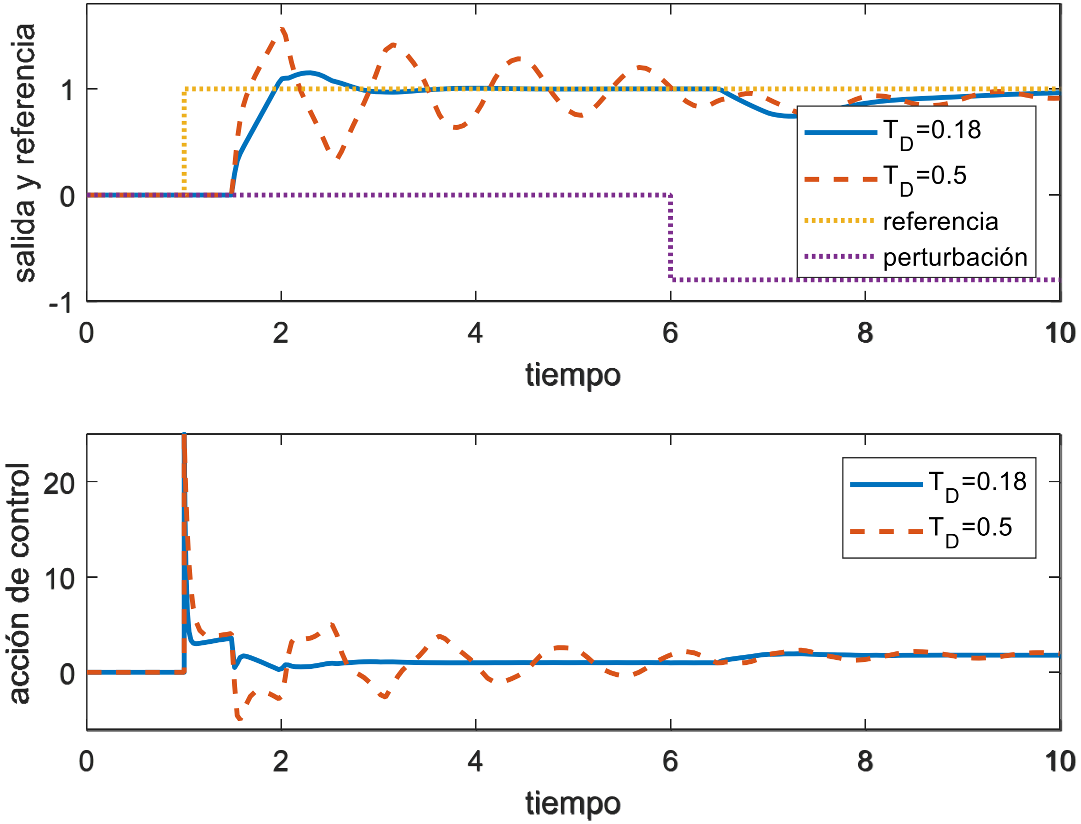
$$P(s) = \frac{1}{1+1{,}5s}e^{-Ls}$$

$L = 0$ $L = 0{,}5$

PI $\begin{cases} T_I = 1{,}5 \\ k_c = 2{,}5 \end{cases}$

PID $\begin{cases} T_I = 1{,}5 \\ k_c = 2{,}5 \\ \alpha = 0{,}1 \end{cases}$





Control PID de sistemas con retardo

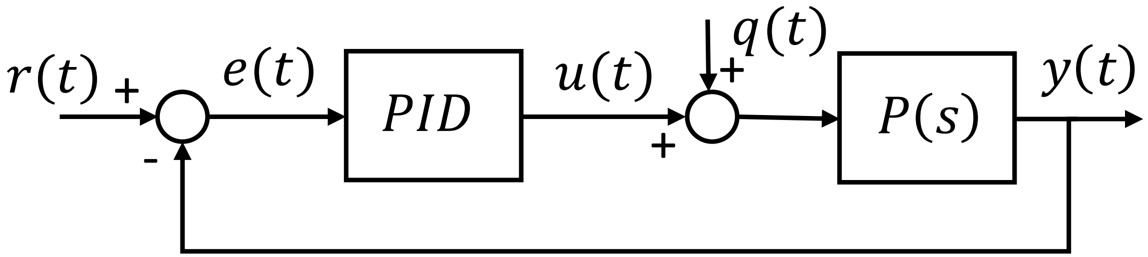
Índice

- Introducción
- ***Diseño de controladores PID***
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

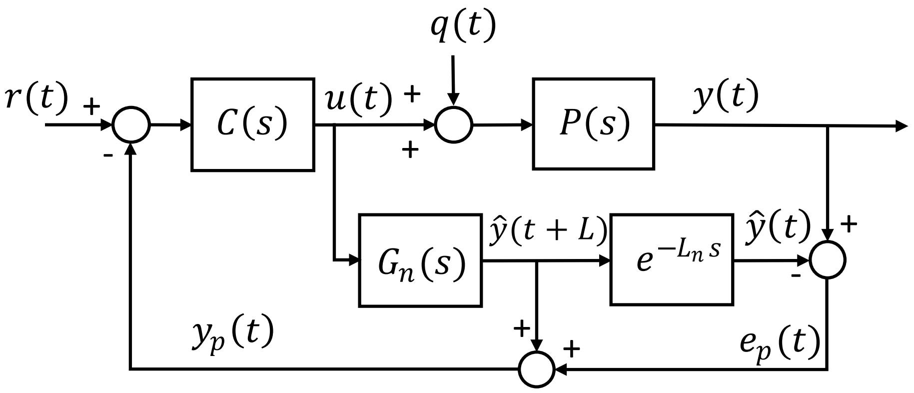
Tema 04

V2 - 2024

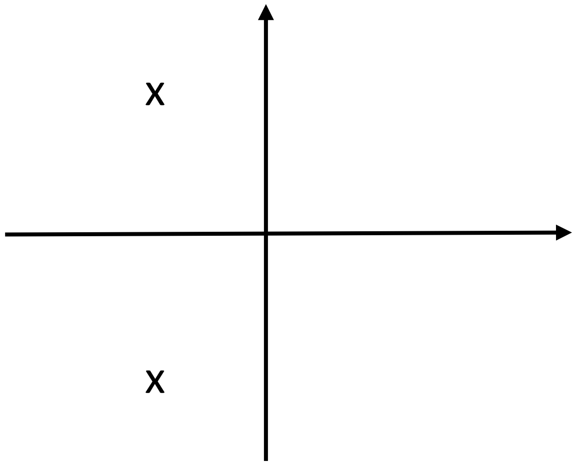
- Analizaremos dos enfoques:



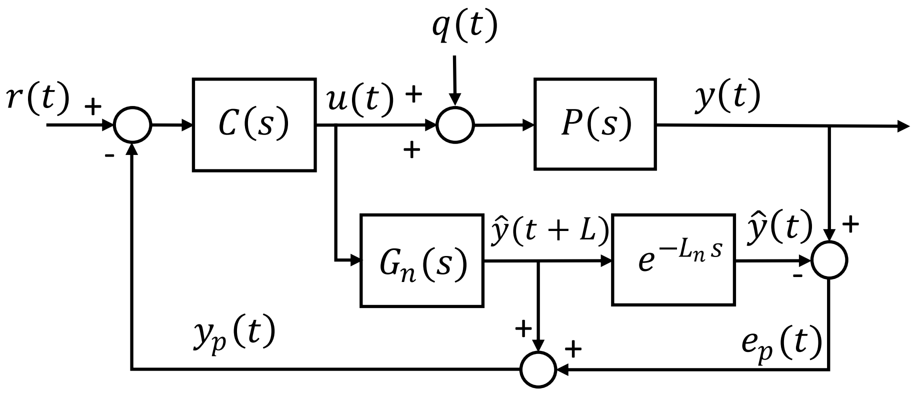
Basado en predicción

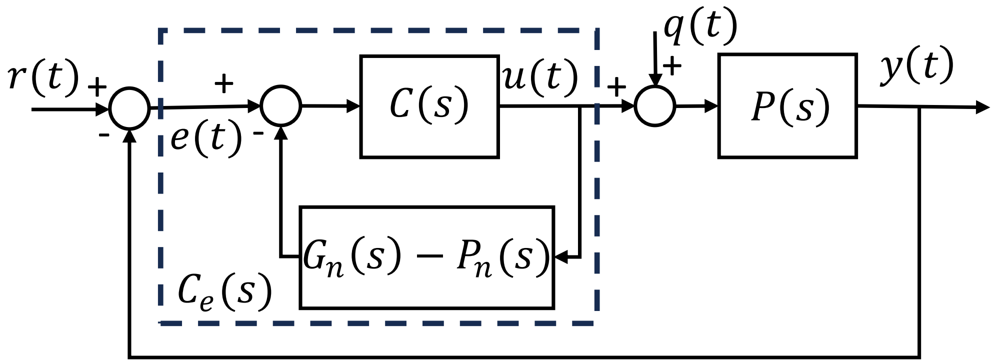


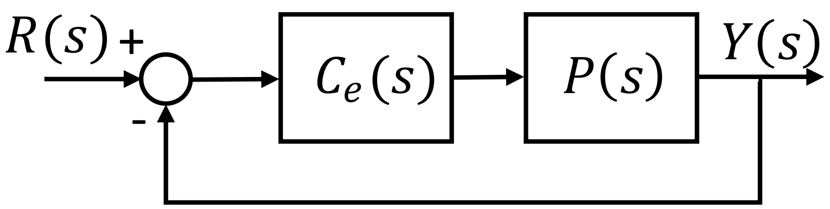
Asignación de polos



- Controlador equivalente en la estructura del predictor de Smith







$$C_e(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)[G_n(s) - P_n(s)]}$$

- El orden de $C_e(s)$ depende del orden de $G_n(s)$, que normalmente define el orden del controlador primario $C(s)$.
- $C_e(s)$ no es una función racional porque $P_n(s)$ tiene retardo.

- Considerando

$$P_n(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{1+Ts} \qquad G_n(s) = \frac{K_p}{1+Ts} \qquad C(s) = \frac{K_1(1+T_1 s)}{T_1 s}$$

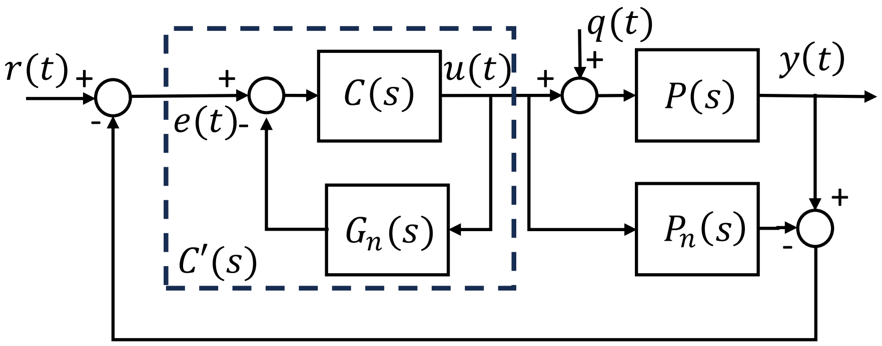
- Para la planta libre de retardo se puede sintonizar un PI cancelando el polo del modelo de lazo abierto ($T_1 = T$)

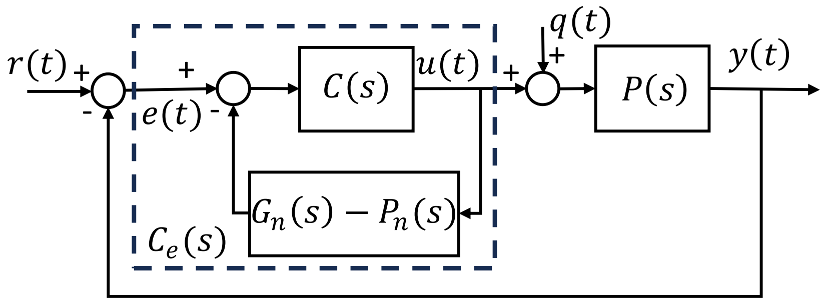
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_n(s)}{1+C(s)G_n(s)}e^{-Ls} = \frac{1}{1+T_0 s}e^{-Ls} \qquad T_0 = \frac{T}{K_1 K_p}$$

T_0 se puede usar como un parámetro de diseño para definir la performance a lazo cerrado.

- El controlador equivalente resulta:

$$C_e(s) = \frac{\frac{K_1(1+Ts)}{Ts}}{1+\frac{K_1K_p}{Ts}(1-e^{-Ls})} = \frac{K_1(1+Ts)}{Ts+K_1K_p(1-e^{-Ls})}$$





$$C_e(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)[G_n(s)-P_n(s)]}$$

- Este controlador tiene acción integral y es no racional.
- Puede aproximarse mediante un PID si el retardo se sustituye por una aproximación polinomial.

- Utilizando la aproximación $P_{11}(s)$ de Padé del retardo

$$C_e(s) = \frac{K_1(1+Ts)}{Ts + K_1K_p(1-\frac{1-sL/2}{1+sL/2})} = \frac{K_1(1+Ts)}{Ts + K_1K_p\frac{sL}{1+sL/2}}$$

$$C_e(s) = \frac{K_1(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+0.5Ls+\frac{K_1K_pL}{T})} = \frac{K_1(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+\frac{0.5Ls}{1+\frac{K_1K_pL}{T}})(1+\frac{K_1K_pL}{T})}$$

- $C_e(s)$ se puede igualar a un controlador PID serie con filtrado en la acción derivativa

$$T_I = T \quad T_D = 0.5L \qquad \alpha = \frac{1}{1+\frac{K_1K_pL}{T}} = \frac{1}{1+\frac{L}{T_0}}$$

$$C_e(s) = \frac{k_c(1+T_Is)(1+T_Ds)}{T_Is(1+\alpha T_Ds)} \qquad k_c = \frac{T}{(L+T_0)K_p}$$

- Idealmente, la constante de tiempo de lazo cerrado T_0 se puede sintonizar arbitrariamente. El límite de rendimiento que se puede alcanzar depende de la aproximación utilizada para obtener $C_e(s)$.
- Características de este diseño:
  - El mismo controlador se puede derivar utilizando el enfoque IMC.
  - El PID obtenido cancela el polo del sistema en $s = -1/T$, por lo tanto tiene las mismas ventajas y desventajas de un enfoque basado en la cancelación de polo cero.
  - El PID obtenido se puede considerar como el resultado de una asignación de polos basado en el modelo aproximado del proceso:

$$P_m(s) = \frac{K_p(1-sL/2)}{(1+Ts)(1+sL/2)}$$

Diseño de controladores PID – Enfoque basado en asignación de polos

- Aproximando el retardo con $P_{11}(s)$

$$P_m(s) = \frac{K_p(1 - sL/2)}{(1 + Ts)(1 + sL/2)}$$

- Eligiendo $C_x(s)$ propio para cancelar ambos polos

$$C_x(s) = \frac{k_x(1 + Ts)(1 + 0.5Ls)}{Ts(1 + 0.5\alpha Ls)}$$

- k_x y $0 < \alpha < 1$ se usan para definir la FT de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{C_x(s)P_m(s)}{1 + C_x(s)P_m(s)} = \frac{\frac{K_p k_x}{T}\frac{1-0.5Ls}{s(1+0.5\alpha Ls)}}{1 + \frac{K_p k_x}{T}\frac{1-0.5Ls}{s(1+0.5\alpha Ls)}} = \frac{1 - 0.5Ls}{\frac{\alpha LT}{2K_p k_x}s^2 + (\frac{T}{K_p k_x} - L/2)s + 1}$$

- Eligiendo $T_d(s) = \frac{1-0{,}5Ls}{(T_0 s+1)^2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha LT}{2K_p k_x} = T_0^2 \\ \left(\dfrac{T}{K_p k_x} - L/2\right) = 2T_0 \end{cases}$$

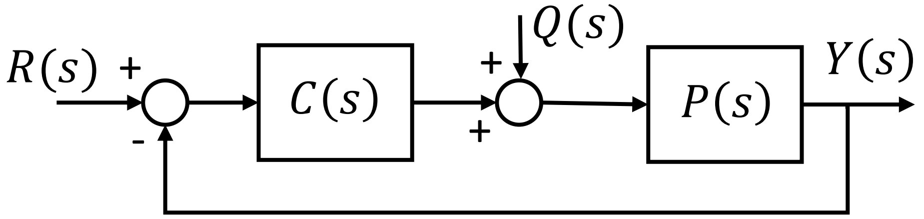
$$k_x = \frac{2T}{(L + 4T_0)K_p}$$

$$\alpha = \frac{4T_0^2}{(L + 4T_0)L}$$

Debido a la cancelación polo-cero utilizada en los dos diseños, el rechazo de perturbación será pobre si el polo cancelado es lento en comparación con los de lazo cerrado deseados.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Diseño de controladores PID - Análisis cancelación polo-cero



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{k_c K_p (1+T_D s)e^{-Ls}}{sT(1+\alpha T_D s) + k_c K_p (1+T_D s)e^{-Ls}}$$

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{e^{-Ls}}{1+sT} \; \frac{sT K_p (1+\alpha T_D s)}{sT(1+\alpha T_D s) + k_c K_p (1+T_D s)e^{-Ls}}$$

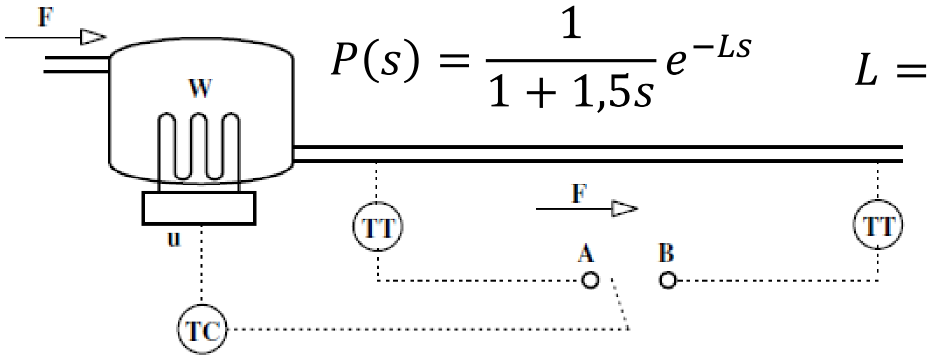
- La cancelación de dinámicas lentas debe ser evitada cuando se desea acelerar la respuesta a las perturbaciones.
- El polo de lazo abierto en $s=-1/T$ es siempre un polo de lazo cerrado de $Y(s)/Q(s)$.

- Si $L \ll T$ y se ajusta una respuesta de lazo cerrado más rápida que la del sistema a lazo abierto, el polo $s = -1/T$ dominará la respuesta de lazo cerrado de la perturbación.
- Cuando el retardo es dominante, este efecto es casi insignificante, ya que los polos de lazo cerrado no pueden ser más rápidos que el polo de lazo abierto en $s=-1/T$ debido a las condiciones de robustez.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Diseño de controladores PID - Análisis cancelación polo-cero – Cte. de tiempo dominante

- Constante de tiempo dominante



$$P(s) = \frac{1}{1+1{,}5s}e^{-Ls} \qquad L = 0{,}5$$

$$P_m(s) = \frac{K_p(1 - sL/2)}{(1+Ts)(1+sL/2)} \qquad C_x(s) = \frac{k_x(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+0.5\alpha Ls)}$$

$$T_d(s) = \frac{1-0{,}5Ls}{(T_0 s+1)^2}$$

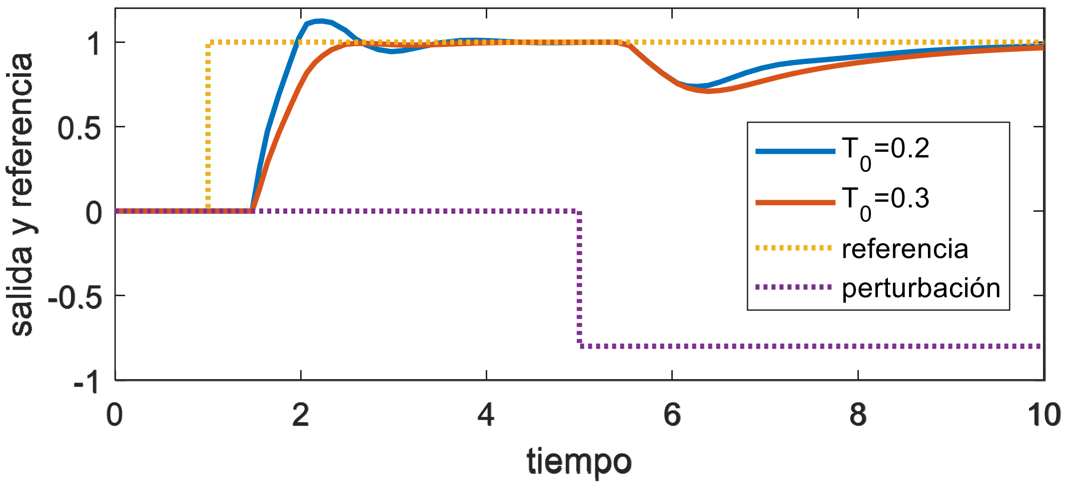
Ajustando T_0 se ajusta el comportamiento de lazo cerrado.

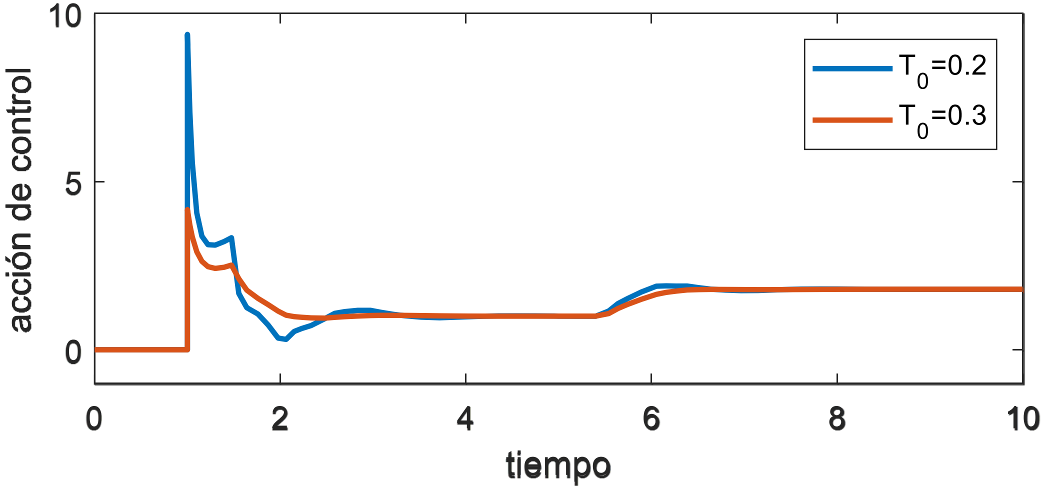
$$k_x = \frac{2T}{(L+4T_0)K_p} \qquad \alpha = \frac{4T_0^2}{(L+4T_0)L}$$

$T_I = 1{,}5$
$T_D = 0{,}25$

$T_0 = 0{,}3$
k_x =1,7647
α =0,4235

$T_0 = 0{,}2$
$k_x = 2{,}3077$
$\alpha = 0{,}2462$



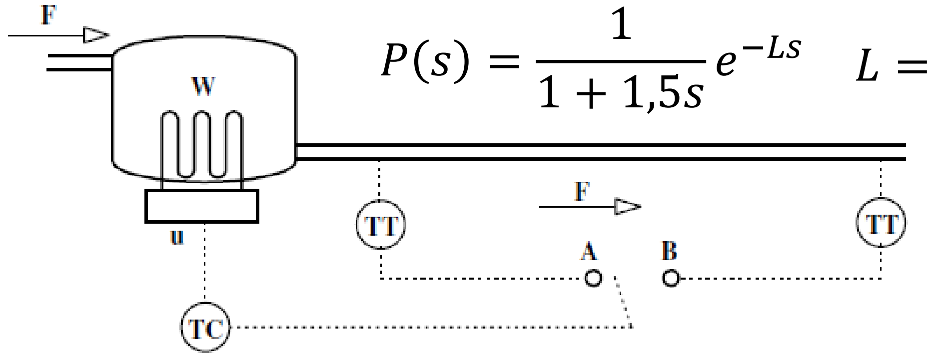


Debido a la cancelación, el rechazo de perturbaciones es más lento que la respuesta a r ($T > 3T_0$).

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Diseño de controladores PID - Análisis cancelación polo-cero – Retardo dominante

- Retardo dominante



$$P(s) = \frac{1}{1 + 1{,}5s} e^{-Ls} \qquad L = 2$$

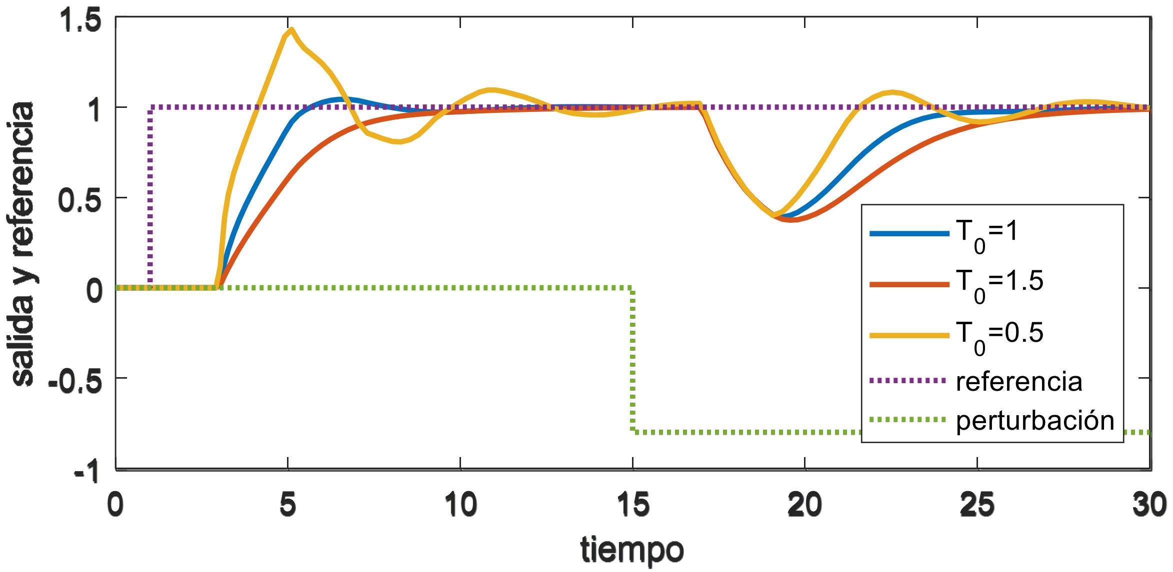
$$P_m(s) = \frac{K_p(1 - sL/2)}{(1 + Ts)(1 + sL/2)} \qquad C_x(s) = \frac{k_x(1 + Ts)(1 + 0.5Ls)}{Ts(1 + 0.5\alpha Ls)}$$

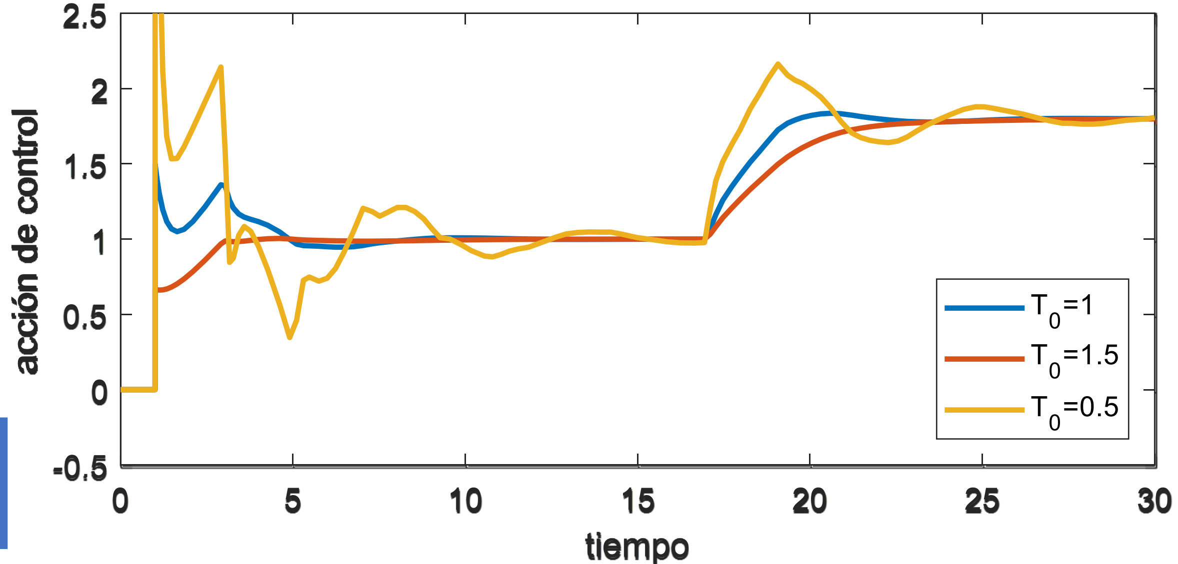
$$T_d(s) = \frac{1 - 0{,}5Ls}{(T_0 s + 1)^2} \qquad k_x = \frac{2T}{(L + 4T_0)K_p} \qquad \alpha = \frac{4T_0^2}{(L + 4T_0)L}$$

$T_I = 1{,}5$
$T_D = 1$

$T_0 = 1{,}5$	$T_0 = 1$	$T_0 = 0{,}5$
$k_x = 0{,}375$	$k_x = 0{,}5$	$k_x = 0{,}75$
$\alpha = 0{,}5625$	$\alpha = 0{,}333$	$\alpha = 0{,}125$

Respuesta satisfactoria para retardo dominante. Limitaciones para cte. de tiempo dominante.





Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- ***<u>Sintonización para sistemas con retardo dominante</u>***
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con retardo dominante

- El proceso se modela con

$$P(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{(1+Ts)} \qquad L \geq 2T$$

- Controlador PID serie

$$C_x(s) = \frac{k_x(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+0.5\alpha Ls)}$$

- Especificaciones de lazo cerrado:
  - Respuesta nominal a la referencia y rechazo a perturbaciones sin oscilaciones y pequeños sobrepasos.
  - Estabilidad robusta considerando los errores de modelado, principalmente en la estimación del retardo.
  - Respuesta a lazo cerrado lo más rápida posible.

- k_x y α se diseñan para un polo doble en $s = -1/T_0$.
- Si el proceso es igual al modelo, esta sintonía garantiza respuestas rápidas sin oscilaciones y regidas por $s = -1/T_0$ (polos reales).

$$\alpha = \frac{4T_0^2}{(L+4T_0)L} \longrightarrow T_0 = [(\alpha^2+\alpha)^{1/2}+\alpha]\frac{L}{2}$$

- La sintonía se puede parametrizar con L.

- No hay mucho interés en acelerar la respuesta del lazo cerrado:
  - tendría poco efecto en el tiempo de respuesta (incluido el retardo)
  - se obtendría una respuesta menos robusta

- El rendimiento del sistema está limitado por errores del modelo y este efecto es importante para valores pequeños de α (plantas de alto orden modeladas por bajo orden).

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con retardo dominante – Ejemplo: efecto de α

- Proceso

$$P(s) = \frac{e^{-9.7s}}{(1+s)(1+.5s)(1+.25s)(1+.125s)}$$

- Modelo

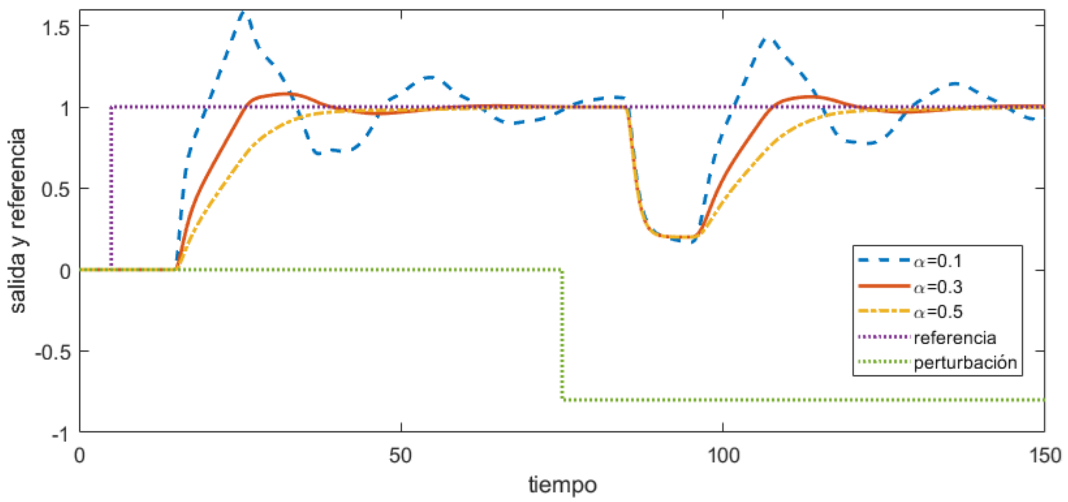
$$P_n(s) = \frac{e^{-10s}}{1.5s+1}$$

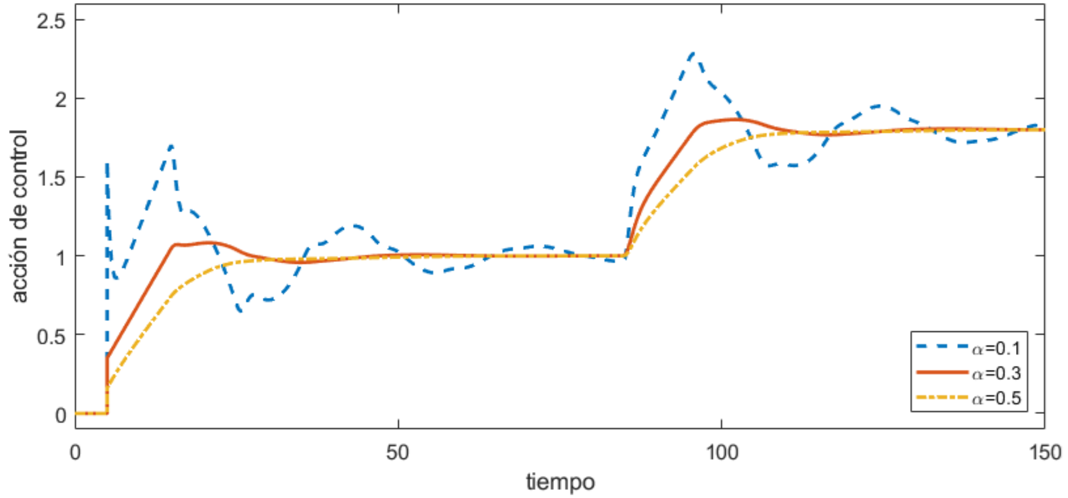
- Parámetros del controlador

$$C(s) = \frac{k_c(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+0.5\alpha Ls)}$$

$T_I = 1{,}5$
$T_D = 5$
$\alpha = [0{,}1; 0{,}3; 0{,}5]$
$k_c = [0{,}166; 0{,}1086; 0{,}0829]$

El ajuste final se definirá después del análisis de robustez.





- Si α crece el filtro del PID es dominante $T_0 = [2{,}15; 4{,}62; 6{,}83]$
- Para un valor pequeño de α, la respuesta es demasiado oscilatoria

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con retardo dominante – Otras estructuras de PID

- PID serie

$$C(s) = \frac{k_c(1+Ts)(1+0.5Ls)}{Ts(1+0.5\alpha Ls)} \longrightarrow C(s) = \frac{k_c[1+(T+0.5L)s+0.5LTs^2]}{Ts(1+0.5\alpha Ls)}$$

- PID estándar con filtro de referencia

$$C(s) = K_c(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)\frac{1}{1+sT_f} \longrightarrow C(s) = \frac{K_c}{T_i}\frac{1+T_i s+T_i T_d s^2}{s(1+sT_f)}$$

$$T_f = 0.5\alpha L \qquad T_i = T+0.5L \qquad T_d = \frac{0.5TL}{T+0.5L} \qquad K_c = \frac{k_c(T+0.5L)}{T}$$

- PID paralelo con filtro pasa bajos

$$C(s) = (K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s)\frac{1}{1+sT_F}$$

$$T_f = 0.5\alpha L \qquad K_I = \frac{k_c}{T} \qquad K_D = 0.5Lk_c \qquad K_P = \frac{k_c(T+0.5L)}{T}$$

Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- ***PID con filtrado de referencia***
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

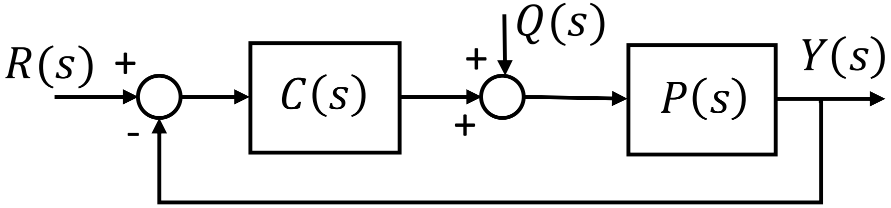
V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

PID con filtrado de referencia

- Definido α, los polos de lazo cerrado de $Y(s)/R(s)$ e $Y(s)/Q(s)$ están fijados. Los ceros son diferentes.

- Para una sintonización con una respuesta rápida de rechazo a perturbaciones sin oscilaciones y un sobrepaso pequeño, se puede observar un alto sobrepaso en la respuesta a la referencia.

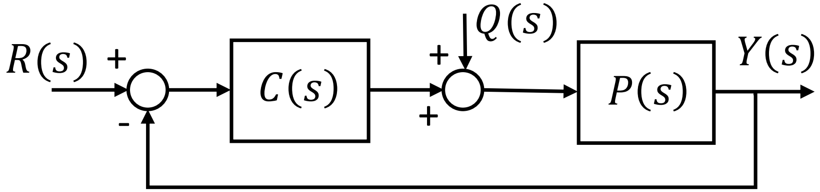


- El sobrepaso es causado por los ceros del controlador (solo aparecen en $Y(s)/R(s)$) que también tienen el efecto de acelerar la respuesta al escalón.

- Para una respuesta a la referencia nominal con un pequeño sobrepaso, se debe usar un controlador de dos grados de libertad:
  - PID con ganancias ponderadas en la acción proporcional y derivativa (2DOF-PID).
  - filtro de referencia independiente

CA3: Control PID de sistemas con retardo

PID con filtrado de referencia - PID de dos grados de libertad (2DOF-PID)



Se puede obtener una estructura más flexible tratando separadamente la referencia y la salida del proceso.

$$u(t) = K_c\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$u(t) = K_c\left(e_p(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{de_d(t)}{dt}\right)$$

$$e_p = br - y$$
$$e = r - y$$
$$e_d = cr - y$$

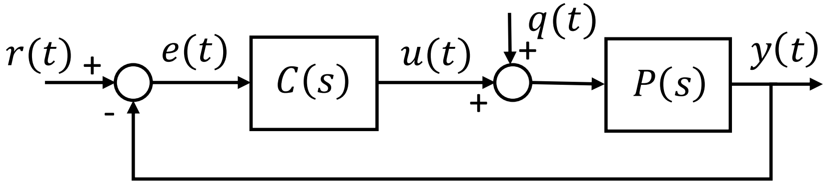
$$b \geq 0$$
$$c \geq 0$$

para evitar errores de estado estacionario

- Para diferentes valores de b y c la respuesta a las perturbaciones y al ruido no cambia.
- La respuesta a cambios en la referencia dependerá de los valores de b y c.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

PID con filtrado de referencia - PID de dos grados de libertad (2DOF-PID)



Elegido α, el tiempo subida y el sobrepaso deseados se obtienen con b y c que asignan los ceros de Y (s)/R(s).

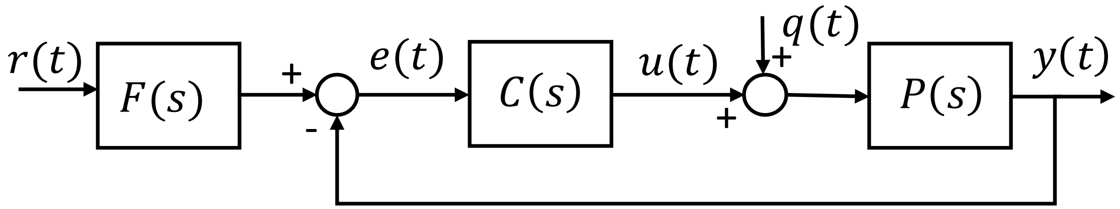
$$u(t) = K_c\left(e_p + \frac{1}{T_i}\int_0^t e\,dt + T_d\frac{de_d}{dt}\right)$$

$$e_p = br - y \quad e = r - y \quad e_d = cr - y$$

$$U(s) = K_c[(bR(s) - Y(s)) + \frac{E(s)}{T_i s} + T_d s(cR(s) - Y(s))]\frac{1}{1 + T_f s}$$

$$U(s) = -K_c[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s]\frac{Y(s)}{1 + T_f s} + K_c[b + \frac{1}{T_i s} + cT_d s]\frac{R(s)}{1 + T_f s}$$

- $b = c = 1$ -> $F(s) = 1$
- $c = 0$, acción derivativa sólo en el rechazo a perturbaciones



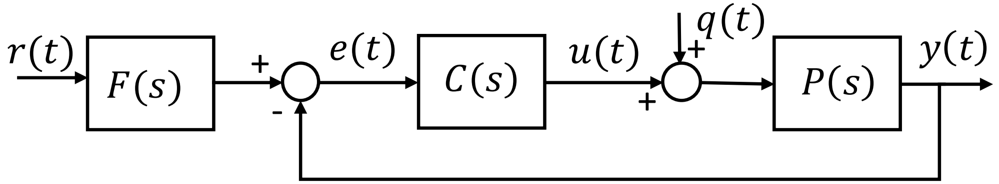
Al controlador con $b = 0$ y $c = 0$ se lo conoce como I-PD, y con $b = 1$ y $c = 0$ PI-D.

$$F(s) = \frac{1 + bT_i s + cT_i T_d s^2}{1 + T_i s + T_i T_d s^2} \qquad C(s) = \frac{K_c}{T_i}\frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{s(1 + sT_f)}$$

PID con filtrado de referencia – Filtro de referencia independiente

- Algunos PID industriales no permiten seleccionar tantos parámetros, en estos casos se usa un filtro simple

$$F(s) = \frac{1 + \beta T_r s}{1 + s T_r}$$



- Se elige T_r para eliminar el efecto del cero dominante introducido por el controlador ($T_r = L/2$).
- $\beta > 0$ se elige para un compromiso entre el sobrepaso y el tiempo de subida.
- b, c y $\beta \in$ (0,2, 0,6) dan buenos resultados en muchos casos.

Si no se puede usar un filtro de referencia, ajustar α para un compromiso entre el rechazo de perturbaciones y la respuesta a la referencia.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

PID con filtrado de referencia – Ejemplo

$$P(s) = \frac{e^{-10s}}{(1+s)^3(5s+1)} \qquad P_n(s) = \frac{e^{-12s}}{(6s+1)}$$

La respuesta a lazo cerrado debe tener el menor sobrepaso posible

PID 1:

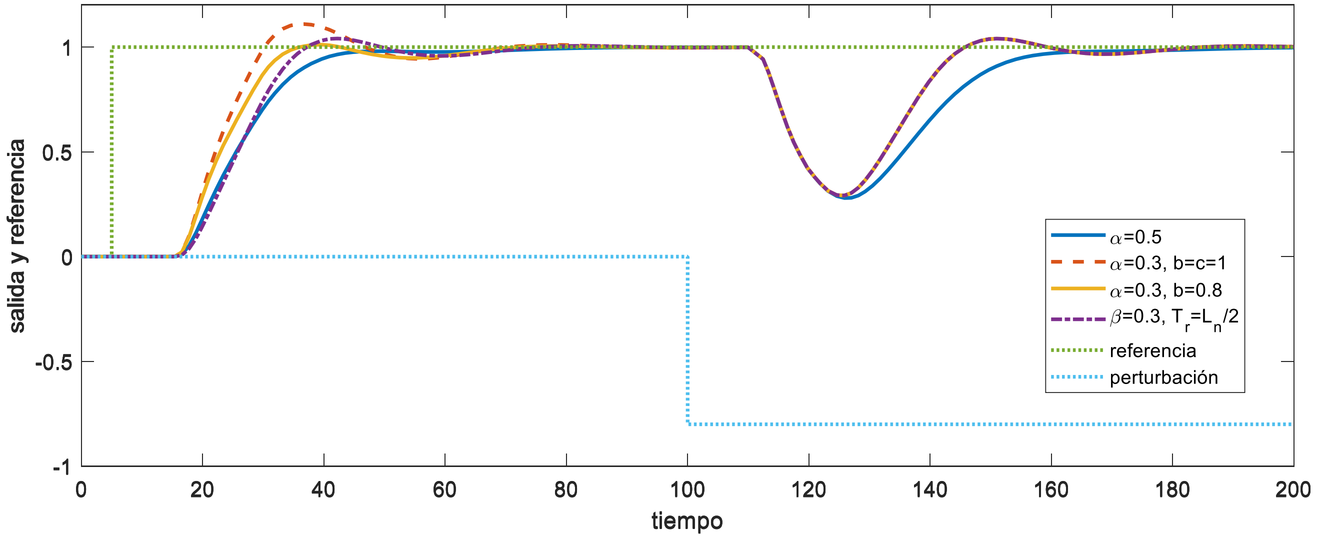
- $\alpha = 0,5$
- sin filtro de referencia

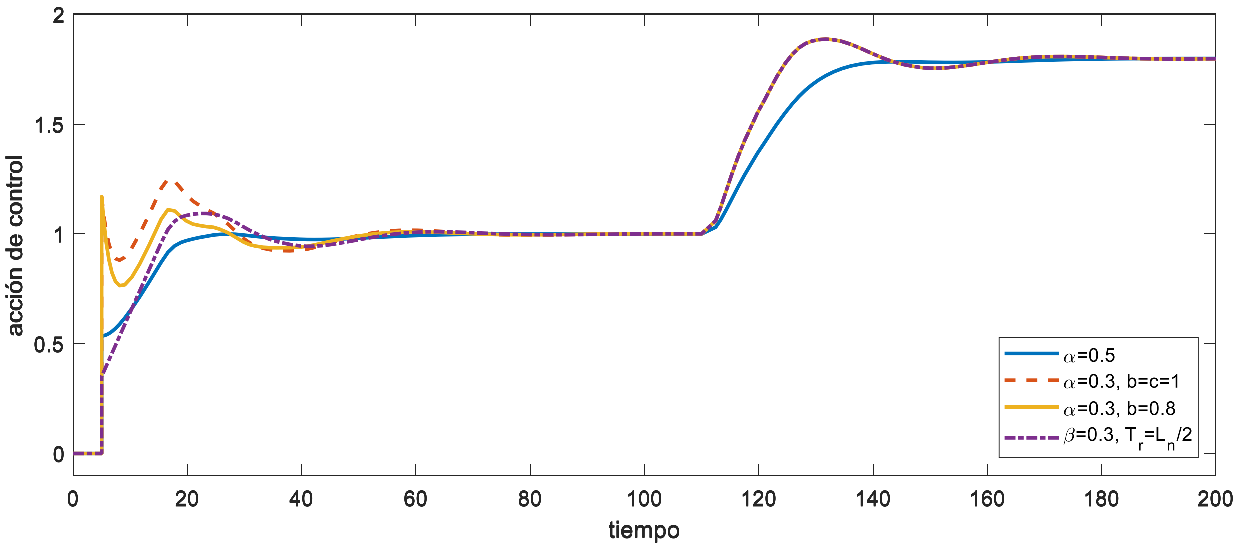
Ojo con los parámetros

Tarea

PID 2:

- $\alpha = 0,3$
- 2DOF-PID
  - $c = 1, b = 0,8$
- Filtro de referencia
  - $\beta = 0,3\ , T_r = 6$





Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- ***<u>Sintonización para sistemas con integradores</u>***
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

V2 - 2024

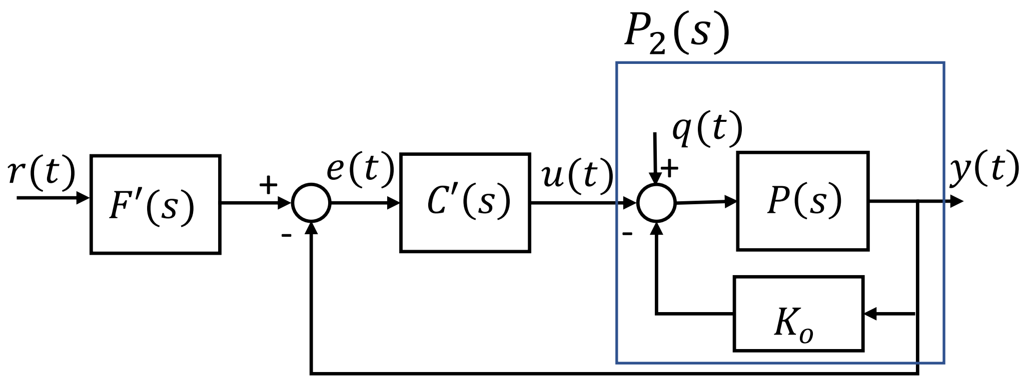
CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con integradores

- El método descripto sólo se puede aplicar a procesos estables.
- Con el objetivo de utilizar las mimas reglas se siguen tres pasos:

Planteamos directamente la variante con dos grados de libertad.

1. Estabilización



k_0 debe elegirse cuidadosamente para evitar respuestas oscilatorias.

- Proceso

$$P(s) = \frac{K_v\, e^{-Ls}}{s}$$

- Modelo

$$P_i(s) = \frac{K_v(1-0{,}5Ls)}{s(1+0{,}5Ls)}$$

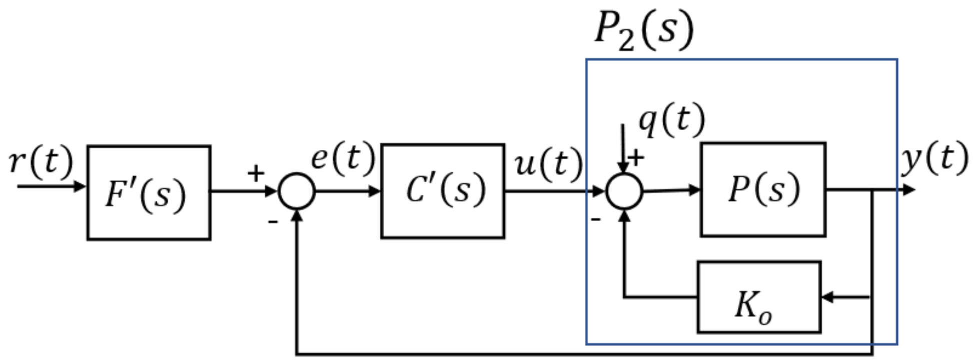
- Se calcula K_0 para un amortiguamiento de 0,75, resultando $K_0 = 0{,}5/K_vL$.

$$P_2(s) = \frac{\dfrac{K_v(1-0{,}5Ls)}{s(1+0{,}5Ls)}}{1+\dfrac{K_0K_v(1-0{,}5Ls)}{s(1+0{,}5Ls)}} = \frac{2K_vL(1-0{,}5Ls)}{1+1{,}5Ls+L^2s^2}$$

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con integradores

2. Sintonía del PID para la planta equivalente estable P_2
   - el controlador se sintoniza utilizando el mismo procedimiento de cancelación polo/cero que se presentó para el caso estable pero con la topología estándar



$$C'(s) = K_c'(1 + \frac{1}{T_i's} + T_d's)(\frac{1}{1+T_f's}) = \frac{K_c'}{T_i'}\frac{1+T_i's+T_i'T_d's^2}{s(1+sT_f')}$$

- Para obtener el mismo tipo de función de transferencia de lazo abierto que en el caso estable

$$C'(s)P_2(s) = K\frac{1-0.5Ls}{s(1+0.5\gamma Ls)} = \frac{K_c'}{T_i'}\frac{1+T_i's+T_i'T_d's^2}{s(1+sT_f')}\frac{2K_vL(1-0{,}5Ls)}{1+1{,}5Ls+L^2s^2} \longrightarrow$$

$$T_i' = 1.5L$$
$$T_d' = 2L/3$$
$$T_f' = 0.5\gamma L$$
$$K = \frac{2K_c'K_vL}{T_i'}$$

- Con el mismo valor de K (K_pK_x/T_i) que para el caso estable $(k_x = 2T/((L+4T_0)K_p))$ la sintonía da una respuesta a lazo cerrado similar con un polo doble en $-1/T_0$

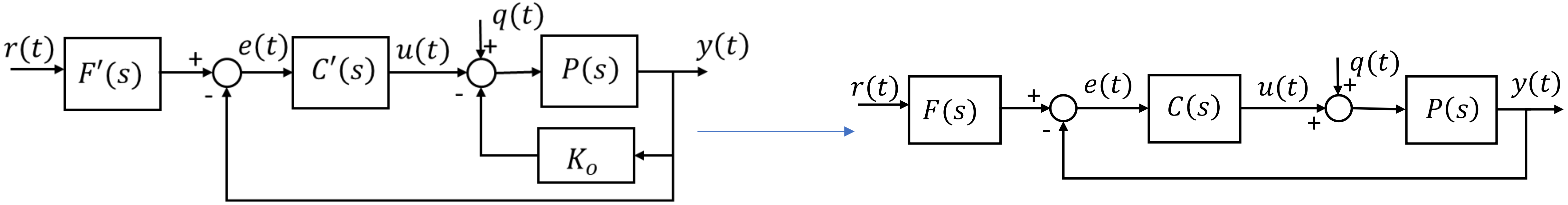
$$K = \frac{2K_c'K_vL}{T_i'} = \frac{2K_c'K_vL}{1.5L} = \frac{2}{4T_0+L} \longrightarrow K_c' = \frac{1.5}{K_v}\frac{1}{4T_0+L}$$

$$T_0 = 0.5L[\gamma + (\gamma^2+\gamma)^{1/2}] = Lf(\gamma)$$

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con integradores

3. Filtro de referencia
    - Es necesario un filtro de referencia para atenuar el sobrepaso en la respuesta a la referencia.



- Esta estructura podría ser inconveniente para la implementación en sistemas industriales.

$$C(s) = K_o + C'(s) \qquad F(s) = \frac{F'(s)C'(s)}{C(s)}$$

- El controlador 2DOF-PID final con los parámetros K_c, T_i, T_d, T_f, b, c es equivalente al par:

$$C(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\left(\frac{1}{1 + T_f s}\right)$$

$$K_c = K_c' + K_o \qquad T_f = T_f' = 0.5\gamma L$$

$$T_i = \left(1 + \frac{K_o}{K_c'}\right)T_i' \qquad T_d = \frac{K_c' T_d' + K_o T_f'}{K_c' + K_o}$$

Estos parámetros se pueden relacionar con el parámetro de ajuste γ.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con integradores

$$C(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)(\frac{1}{1 + T_f s})$$

$$K_c = K_c' + K_o$$

$$T_i = (1 + \frac{K_o}{K_c'})T_i'$$

$$T_d = \frac{K_c' T_d' + K_o T_f'}{K_c' + K_o}$$

$$T_f = T_f' = 0.5\gamma L$$

$$K_c' = \frac{1.5}{K_v} \frac{1}{4T_0 + L}$$

$$T_i' = 1.5L, \quad T_d' = 2L/3, \quad T_f' = 0.5\gamma L$$

$$K_0 = 0{,}5/K_v L$$

$$T_0 = 0.5L[\gamma + (\gamma^2 + \gamma)^{1/2}] = Lf(\gamma)$$

$$K_c = \frac{1}{2K_v L}\left[1 + \frac{3}{4f(\gamma) + 1}\right]$$

$$T_i = 2L[f(\gamma) + 1]$$

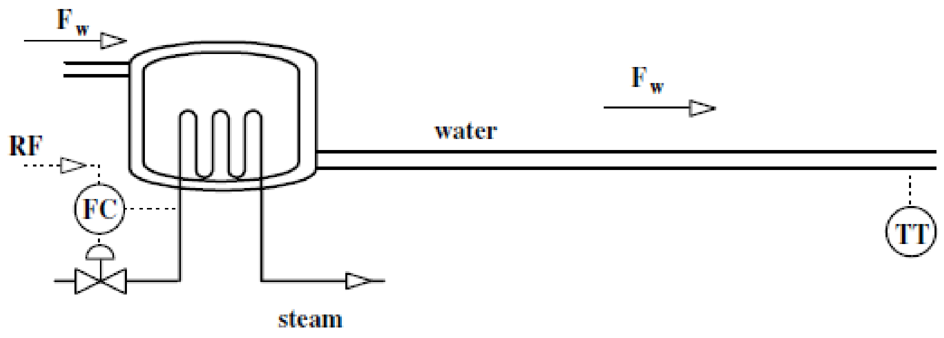
$$T_d = \frac{L}{8}\left[\frac{4 + \gamma(4f(\gamma) + 1)}{f(\gamma) + 1}\right]$$

$$T_f = \frac{\gamma L}{2}$$

Tarea

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con integradores - Ejemplo

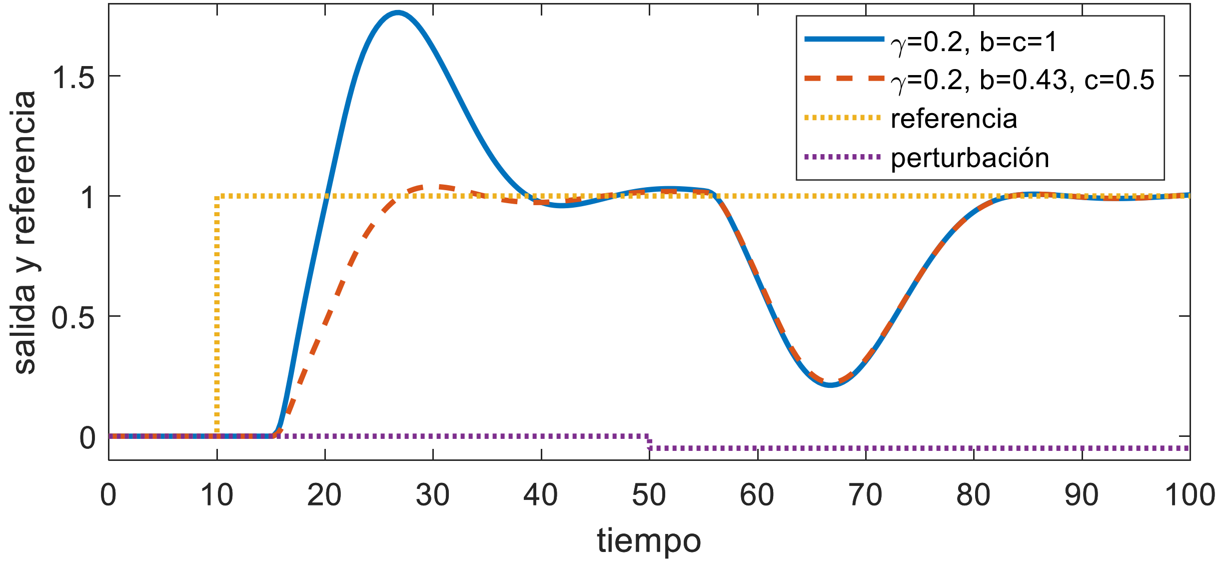


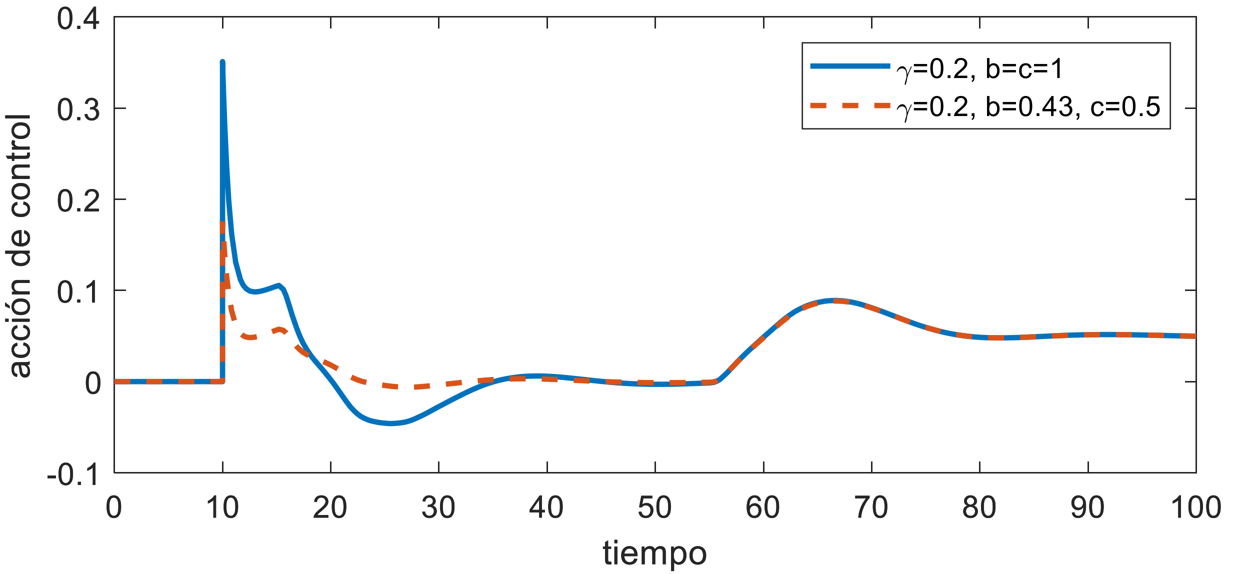
$$P(s) = \frac{2e^{-5s}}{s(1+s)(1+.5s)(1+.1s)}$$

- Se aproxima con IPDT

$$P(s) = \frac{K_v}{s} e^{-Ls} \qquad K_v = 2 \quad L = 6{,}7$$

- Sintonización:
  1. $\gamma = 0{,}2$, $b = c = 1$
  2. b y c se usan para reducir sobrepaso de respuesta a referencia ($b = c = 0{,}5$)
  3. Ajuste final por simulación $b = 0{,}43$, $c = 0{,}5$





Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- ***<u>Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante</u>***
- Análisis de robustez
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante (T>>L)

- Para procesos estables, el PID propuesto cancela el polo del proceso en $s = -1/T$ que es un polo en lazo cerrado de $Y(s)/Q(s)$.

- En el caso nominal, $Y(s)/Q(s)$ tendrá tres polos:
  - un polo doble en $s = -1/T_0$
  - un polo único en $s = -1/T$

- Cuando $T \ll L$, los polos de LC dominantes ($s = -1/T_0$) no pueden seleccionarse más rápidos que el polo de lazo abierto para mantener la robustez.

- Si $T \gg L$, los polos en LC pueden ser más rápidos que $s = -1/T$. El polo de LC en $s = -1/T$ producirá una respuesta de rechazo de perturbación lenta.

- Se hace la siguiente aproximación:

$$P(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{Ts+1} \cong \frac{K_p e^{-Ls}}{Ts} = \frac{K_v e^{-Ls}}{s}$$

$$K_v = K_p/T \qquad T >> L$$

- El ajuste del PID se define con K_v y L.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

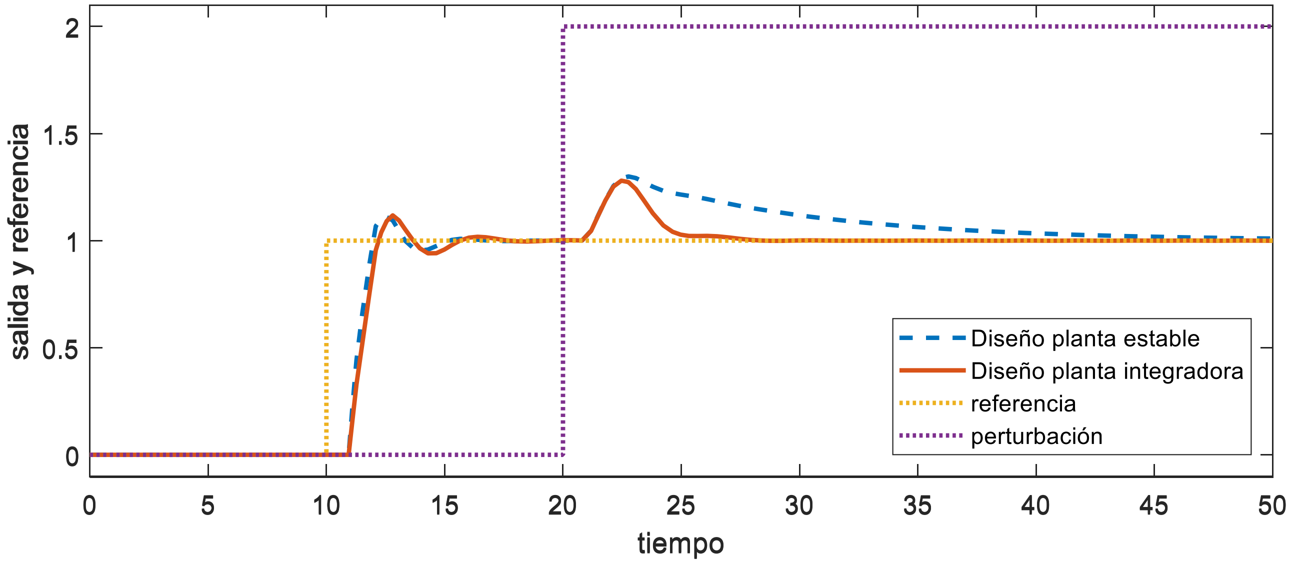
Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante (T>>L) - Ejemplo

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1+8s}$$

- PID 1: basado en diseño estable

$$K_p = 1 \qquad T_I = T = 8$$
$$T = 8 \qquad T_D = \frac{L}{2} = 0{,}5 \qquad k_c = 6$$
$$L = 1 \qquad \alpha = 0{,}26 \qquad b = c = 1$$

$$T_0 = [(\alpha^2+\alpha)^{1/2}+\alpha]\frac{L}{2} \qquad k_x = \frac{2T}{(L+4T_0)K_p}$$

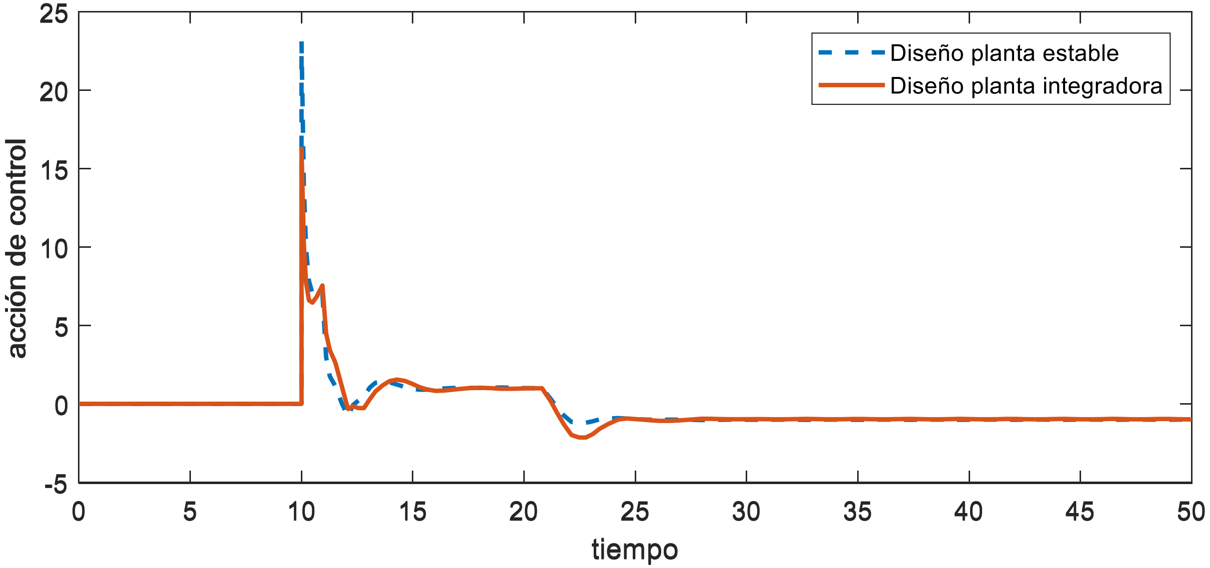


- PID 2: basado en diseño con integrador

$$K_v = \frac{K_p}{T} = 1/8 \qquad \gamma = 0{,}26 \qquad b = c = 0{,}6$$
$$L = 1$$

$$K_c = \frac{1}{2K_vL}\left[1+\frac{3}{4f(\gamma)+1}\right] \qquad T_d = \frac{L}{8}\left[\frac{4+\gamma(4f(\gamma)+1)}{f(\gamma)+1}\right]$$

$$T_i = 2L[f(\gamma)+1] \qquad T_f = \frac{\gamma L}{2}$$



CA3: Control PID de sistemas con retardo

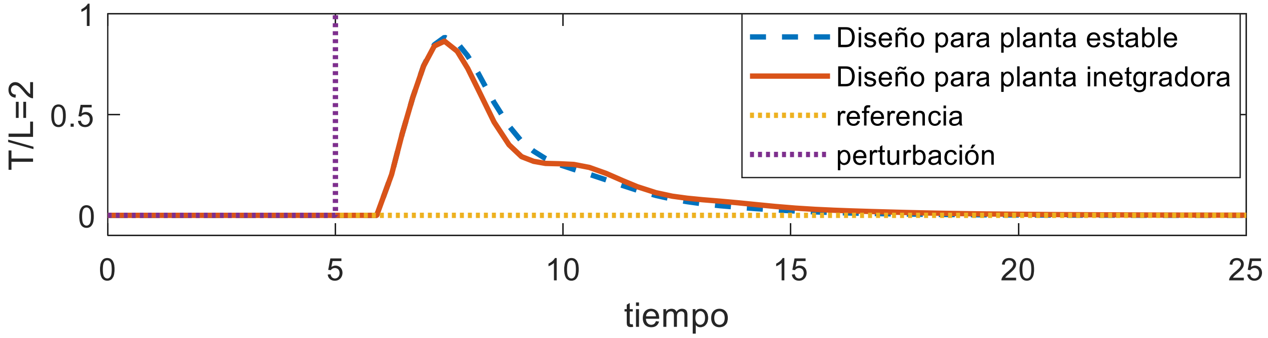
Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante (T>>L)

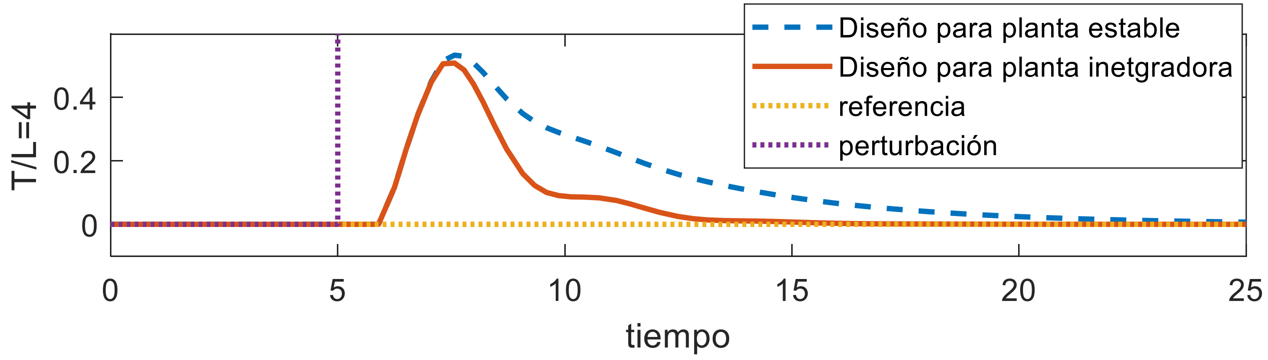
- ¿Cuándo usar el modelo con integrador para sintonizar el PID?

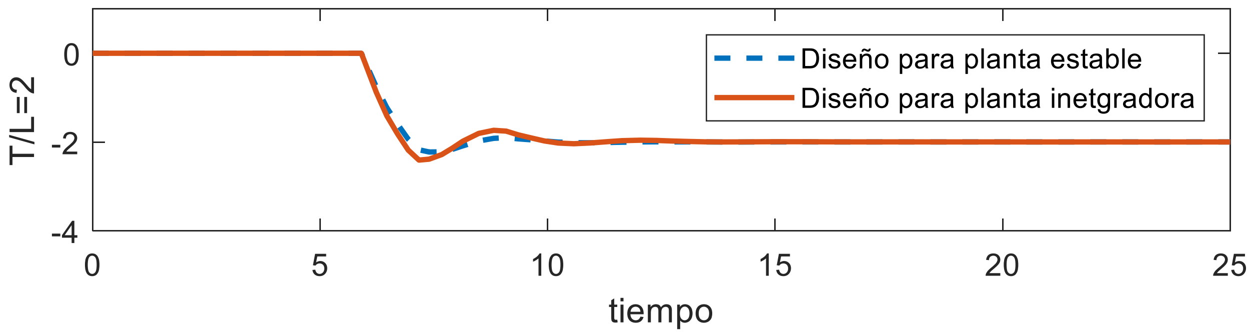
- Normalizando el modelo con respecto al retardo

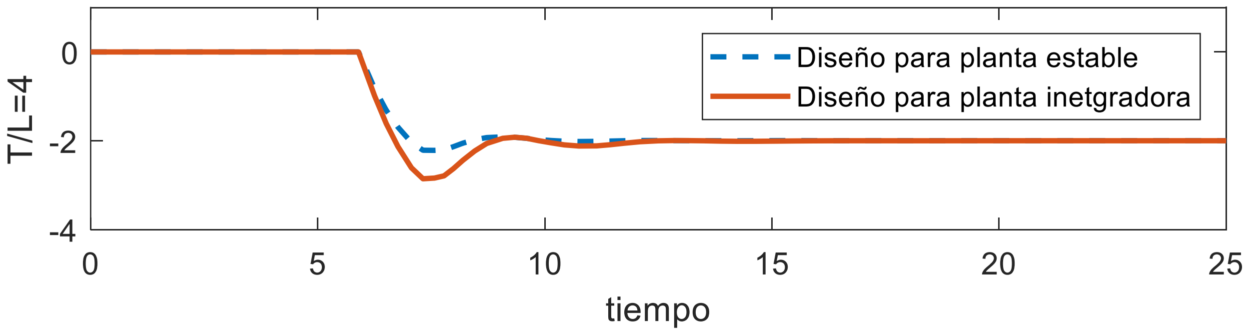
$$P_1 = \frac{e^{-s'}}{1+s'T'} \qquad P_2 = \frac{e^{-s'}}{s'T'} \qquad \begin{array}{l} T' = T/L \\ s' = Ls \end{array}$$

- Utilizar la regla de ajuste basada en el modelo con integrador para procesos estables con $\frac{T}{L} > 2$.
- Si se requiere un alto rendimiento, la aproximación utilizada para el modelado del retardo ya no es válida y el rendimiento se deteriora.
- El error en la aproximación del retardo no es el único.









Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- ***Análisis de robustez***
- Otros métodos de sintonía

Tema 04

V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

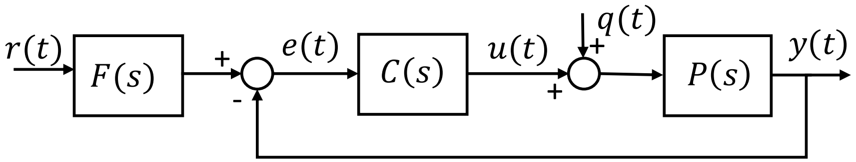
Análisis de robustez (repaso)

- La estabilidad robusta del lazo cerrado se puede analizar de forma sencilla teniendo en cuenta que $P(s)$ pertenece a una familia de modelos lineales descritos como:

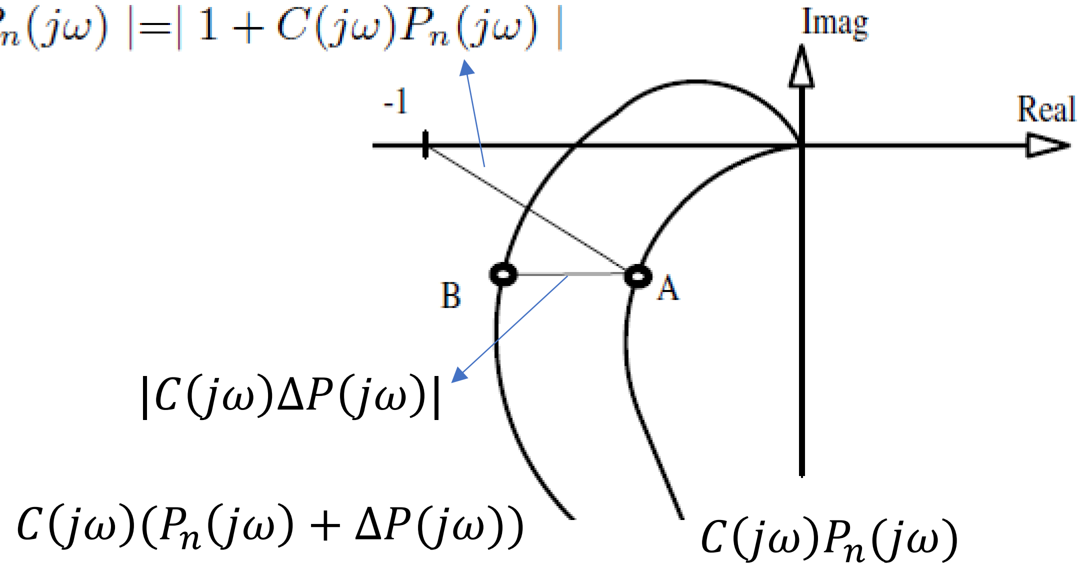
$$P(s) = P_n(s) + \Delta P(s) = P_n(s)(1 + \delta P(s))$$

P_n: modelo nominal
$\Delta P(s)$: descripción aditiva
$\delta P(s)$: descripción multiplicativa

Esta distancia se puede utilizar como una medida de la robustez de lazo cerrado.



$$|-1 - C(j\omega)P_n(j\omega)| = |1 + C(j\omega)P_n(j\omega)|$$



$$1 + C(s)P(s) = 1 + C(s)(P_n(s) + \Delta P(s)) = 0$$

- Condición de estabilidad para la familia de plantas:

$$|C(j\omega)\Delta P(j\omega)| < |1 + C(j\omega)P_n(j\omega)| \quad \forall \omega \geq 0$$

Análisis de robustez (repaso)

$$| C(j\omega)\Delta P(j\omega) | < | 1 + C(j\omega)P_n(j\omega) | \quad \forall\omega \geq 0$$

- La distancia máxima ($\Delta P(j\omega)$) entre la planta nominal y "las reales" que mantiene la estabilidad robusta del lazo cerrado es:

$$| \Delta P(j\omega) | < DP(\omega) = \frac{| 1 + C(j\omega)P_n(j\omega) |}{| C(j\omega) |} \quad \forall\omega \geq 0$$

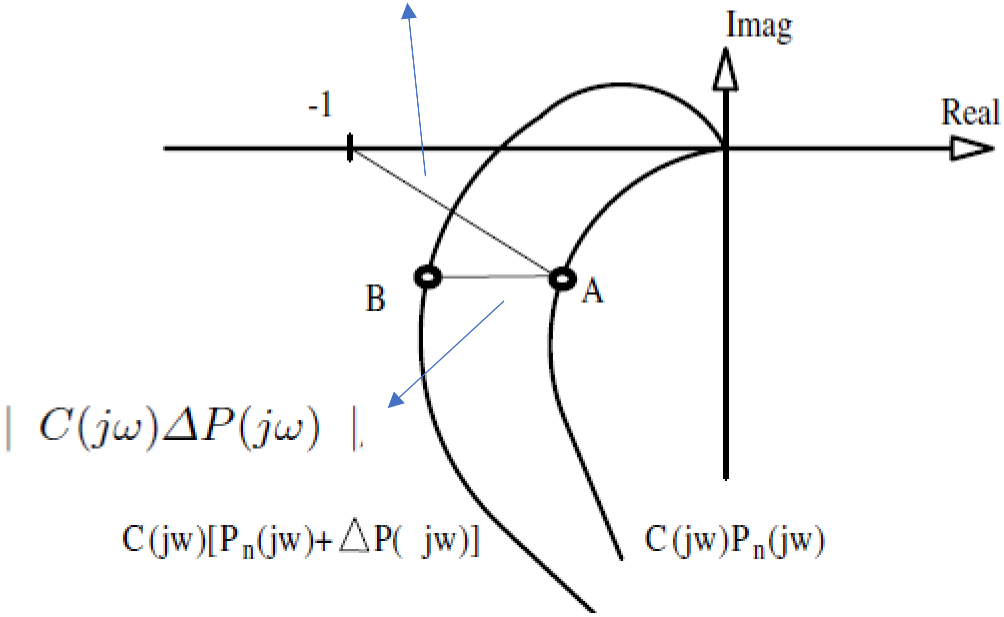
$$| \delta P(j\omega) | < dP(\omega) = \frac{| 1 + C(j\omega)P_n(j\omega) |}{| C(j\omega)P_n(j\omega) |} \quad \forall\omega \geq 0$$

- Entonces:

$$\overline{\Delta P}(\omega) < DP(\omega) \quad \forall\omega \geq 0$$

$$\overline{\delta P}(\omega) < dP(\omega) \quad \forall\omega \geq 0$$

$$| -1 - C(j\omega)P_n(j\omega) | = | 1 + C(j\omega)P_n(j\omega) |$$



$dP(\omega)$ coincide con la inversa de la función de transferencia de lazo cerrado ($T(s)$) para $F(s) = 1$. Esto muestra la relación entre performance y robustez.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Análisis de robustez - 2DOF-PID

- $P_n(s)$ es la función de transferencia utilizada para sintonizar el PID:
  - FOPDT en el caso estable
  - IPDT en el caso con integrador

$$T_d(s) = \frac{1 - 0{,}5Ls}{(T_0 s + 1)^2}$$

- Usando la aproximación de Padé del retardo y el controlador PID analizado para cada caso:
  - el caso estable resulta:

$$dP_e(\omega) = \frac{|\,(1 + T_0 j\omega)^2\,|}{|\,1 - j\omega L/2\,|} \quad \forall\omega \geq 0 \qquad T_0 = [(\alpha^2 + \alpha)^{1/2} + \alpha]\frac{L}{2}$$

  - el caso con integrador resulta:

ojo

$$dP_i(\omega) = \frac{|\,(1 + T_0 j\omega)^2\,|}{|\,1 - j\omega L/2\,|} \quad \forall\omega \geq 0 \qquad T_0 = 0.5L[\gamma + (\gamma^2 + \gamma)^{1/2}]$$

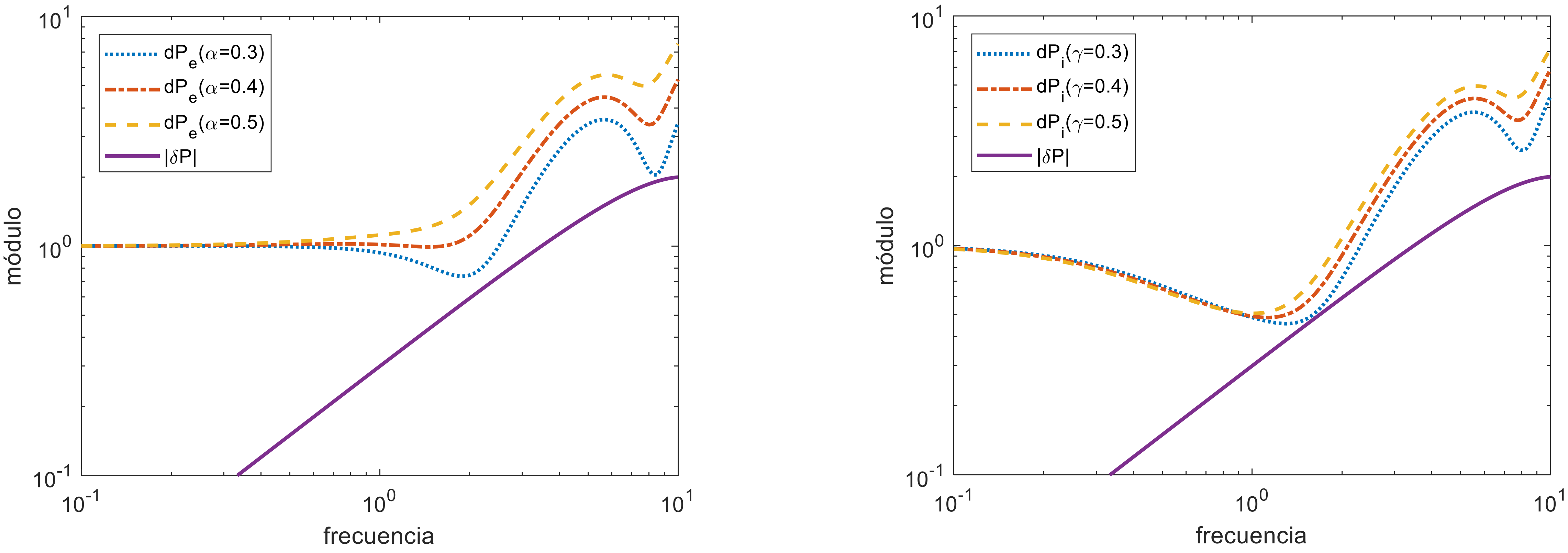
- Mayores valores de α o γ implican mayores valores de $dP(\omega)$ a altas frecuencias.
- Una mejora de la robustez implica respuestas más lentas y pérdidas de rendimiento.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Análisis de robustez - 2DOF-PID - Ejemplo

$$P_1(s) = \frac{e^{-Ls}}{1+sT}, \qquad L/T = 10 \qquad\qquad P_2(s) = \frac{e^{-Ls}}{s}$$

- 30% de error en la estimación del retardo



$\alpha \in [0{,}3, 0{,}4]$ y $\gamma \in [0{,}4, 0{,}5]$ dan un buen compromiso entre rendimiento y robustez.

Control PID de sistemas con retardo

Índice

- Introducción
- Diseño de controladores PID
- Sintonización para sistemas con retardo dominante
- PID con filtrado de referencia
- Sintonización para sistemas con integradores
- Sintonización para sistemas con cte. de tiempo dominante
- Análisis de robustez
- ***Otros métodos de sintonía***

Tema 04

V2 - 2024

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Otros métodos de sintonía

- De los métodos de diseño generales resultan controladores con un orden que coincide con el del modelo del proceso.

- Para obtener un controlador con un menor orden:
  - simplificar (reducir) el modelo del proceso
  - diseñar un controlador para un modelo complejo y reducirlo

- Los métodos especiales de diseño para PID emergieron para que sean sencillos y se puedan emplear con pocos conocimientos de control.

- La mayoría de las reglas de ajuste de PID se desarrollaron considerando retardo en el modelo de proceso.

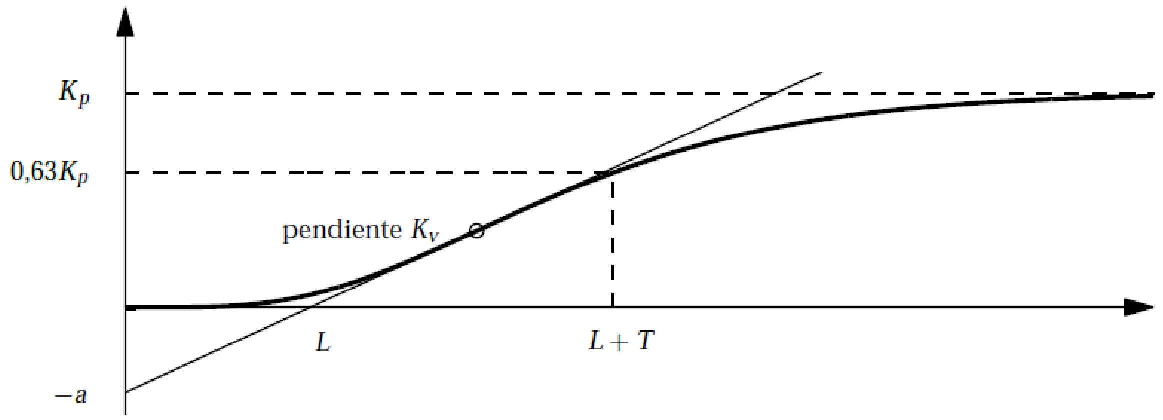
- La solución obtenida solo es válida para algunos valores particulares de la relación entre el retardo y la constante de tiempo dominante.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Otros métodos de sintonía – Método de Ziegler-Nichols (ZN) – Primer método

- Los métodos de ZN:
  - Se desarrollaron utilizando simulaciones con diferentes sistemas donde $L/T < 1$ (constante de tiempo dominante).
  - Se desarrollaron para proporcionar sistemas a lazo cerrado con buena atenuación de las perturbaciones de carga.

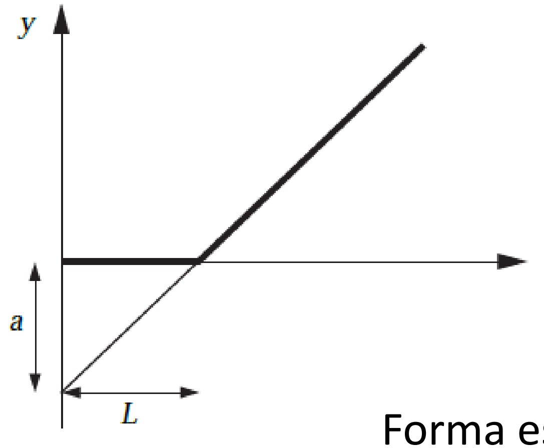
- El objetivo es una disminución de un cuarto en la relación de amplitud en la respuesta a una escalón.



$$G(s) = \frac{K_v}{s} e^{-sL} = \frac{a}{sL} e^{-sL} \qquad G(s) = \frac{K_p}{1+sT} e^{-sL}$$

- El primer método de ZN (método de lazo abierto) asume que la respuesta al escalón de lazo abierto de la planta se puede modelar como

$$P(s) = \frac{ae^{-Ls}}{sL}$$



Forma estándar

Controlador	aK	T_i/L	T_d/L
P	1		
PI	0,9	3	
PID	1,2	2	1/2

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Otros métodos de sintonía – Método de Ziegler-Nichols (ZN) – Segundo método

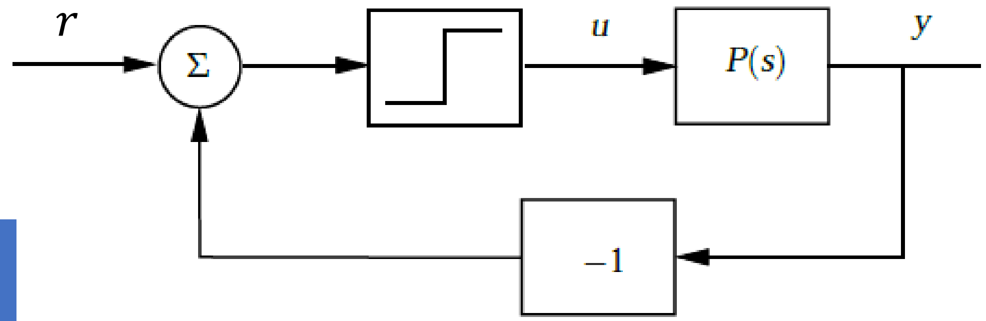
- En el segundo método de ZN (método de lazo cerrado) se conecta un controlador al proceso, y se establecen los parámetros de forma que la acción de control es proporcional ($T_i = \infty$, $T_d = 0$).
- Se incremente K_c hasta que el proceso inicia una oscilación no amortiguada. Aquí, $K_c = K_0$, y el período (T_0) de la oscilación se usa para determinar T_i y T_d.

Los métodos ZN solo permiten un rendimiento razonable cuando τ <0,4, es decir, para procesos integradores y de constante de tiempo dominante.

$$\tau = \frac{L}{L+T}$$

Forma estándar

Controlador	K/K_0	T_i/T_0	T_d/T_0
P	0,5		
PI	0,4	0,8	
PID	0,6	0,5	0,125



El método de la respuesta al escalón dará en general ganancias más grandes y tiempos integrales más pequeños.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Otros métodos de sintonía – Método de Cohen-Coon (CC)

- Se basa en un modelo FOPDT y utiliza una asignación de polos dominantes. El criterio principal de diseño es el rechazo de las perturbaciones de carga.

- Para controladores P y PD se ajustan los polos para conseguir máxima ganancia (atendiendo la restricción de decaimiento) para reducir el error de estado estacionario.

- Para controladores PI y PID se maximiza la ganancia integral ($k_i = K/T_i$) que corresponde a una minimización del error integrado (IE).

- Para controladores PID, los tres polos de lazo cerrado, uno real y dos complejos, se ubican a la misma distancia del origen. El amortiguamiento de los polos complejos se utiliza para lograr una respuesta a perturbaciones con una relación de caída de un cuarto de amplitud y la distancia al origen se calcula para minimizar el error integrado (IE) a una perturbación escalón.

$$P(s) = \frac{K_p}{1+sT}e^{-sL}$$

$$IE = \int_0^{\infty} e(t)\,dt$$

- Para valores pequeños de τ ZN y CC son similares.

- Tanto las reglas CC como ZN dan un alto sobrepaso en la respuesta a la referencia. Esto se puede evitar utilizando un filtro de referencia.

Otros métodos de sintonía – Método de Cohen-Coon (CC) - Parámetros

- Para la forma estándar del PID y con $a = K_p L/T$ y $\tau = L/(L+T)$

Controlador	aK	T_i/L	T_d/L
P	$1 + \dfrac{0{,}35\tau}{1-\tau}$		
PI	$0{,}9\left(1 + \dfrac{0{,}092\tau}{1-\tau}\right)$	$\dfrac{3{,}3 - 3{,}0\tau}{1 + 1{,}2\tau}$	
PD	$1{,}24\left(1 + \dfrac{0{,}13\tau}{1-\tau}\right)$		$\dfrac{0{,}27 - 0{,}36\tau}{1 - 0{,}87\tau}$
PID	$1{,}35\left(1 + \dfrac{0{,}18\tau}{1-\tau}\right)$	$\dfrac{2{,}5 - 2{,}0\tau}{1 - 0{,}39\tau}$	$\dfrac{0{,}37 - 0{,}37\tau}{1 - 0{,}81\tau}$

- Comparado con ZN, con CC resultan valores más bajos de T_i cuando τ aumenta lo que resulta en mejores respuestas.

Al igual que con el método ZN, este ajuste también proporciona un rendimiento deficiente para los sistemas de retardo dominante.

- Deriva de la regla de ajuste IMC.
- Se utilizan dos valores diferentes de T_I en el controlador:
  - retardo dominante
  - constante de tiempo dominante ($T > 8L$)
- Para aproximar el comportamiento dinámico del proceso se usa:
  - un SOPDT, se obtiene un PID

$$P(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{(1 + sT)(1 + sT_u)}$$

  - un modelo FOPDT, se obtiene un PI

$$P(s) = \frac{K_p e^{-Ls}}{(1 + sT)} \qquad T_u = 0$$

- Se busca una transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{e^{-Ls}}{1 + sL}$$

- Controlador

$$C_{S-IMC} = \frac{k_c(1 + sT_I)(1 + sT_u)}{T_I s\ (1 + 0{,}1T_u s)}$$

$$T_I = \min(T, 8L) \qquad k_c = \frac{T}{2LK_p}$$

- Para procesos integradores $T \to \infty$ y $K_v = K_p/T$.

Debido al ajuste conservador $T_0 = L$, este controlador PID ofrece respuestas suaves en lazo cerrado pero un buen índice de robustez.

CA3: Control PID de sistemas con retardo

Otros métodos de sintonía - Ejemplo comparativo

$$P(s) = \frac{2e^{-5s}}{s(s+1)(0{,}5s+1)(0{,}1s+1)}$$

- IPDT con $K_v = 2$ y $L = 6{,}7$ $\qquad P_m = \frac{K_v e^{-Ls}}{s} = \frac{a e^{-Ls}}{Ls}$

- ZN

  $$K_c = \frac{1{,}2}{a} \quad T_i = 2L \quad T_d = L/2 \qquad \alpha = 0{,}1$$

- Basado en predictor

  $$\gamma = 0{,}5 \;\; b = c = 0{,}4$$

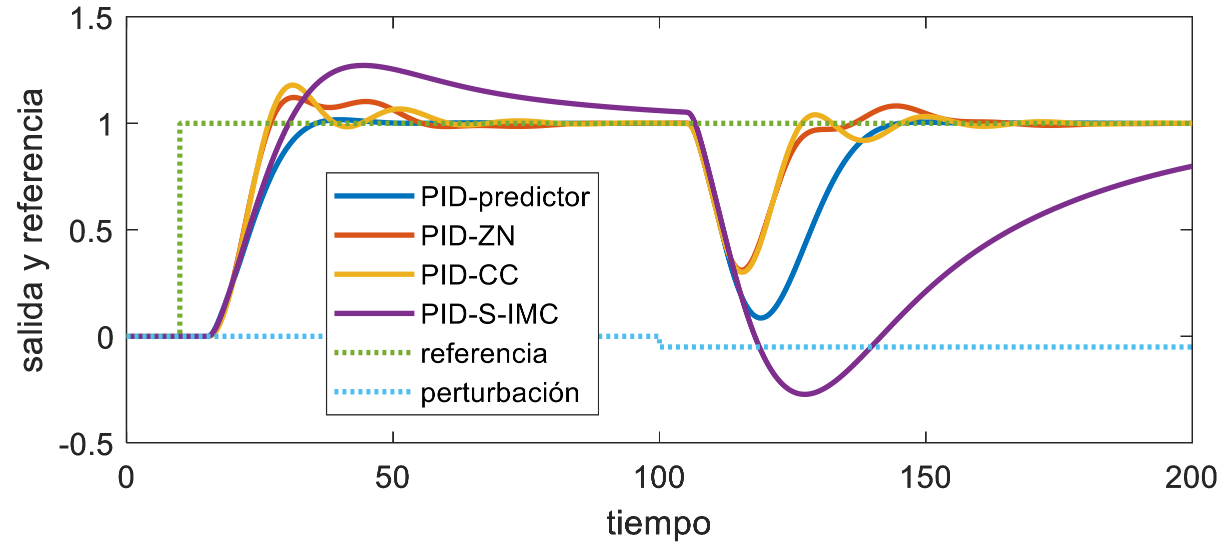
- $\mathrm{S-IMC}$

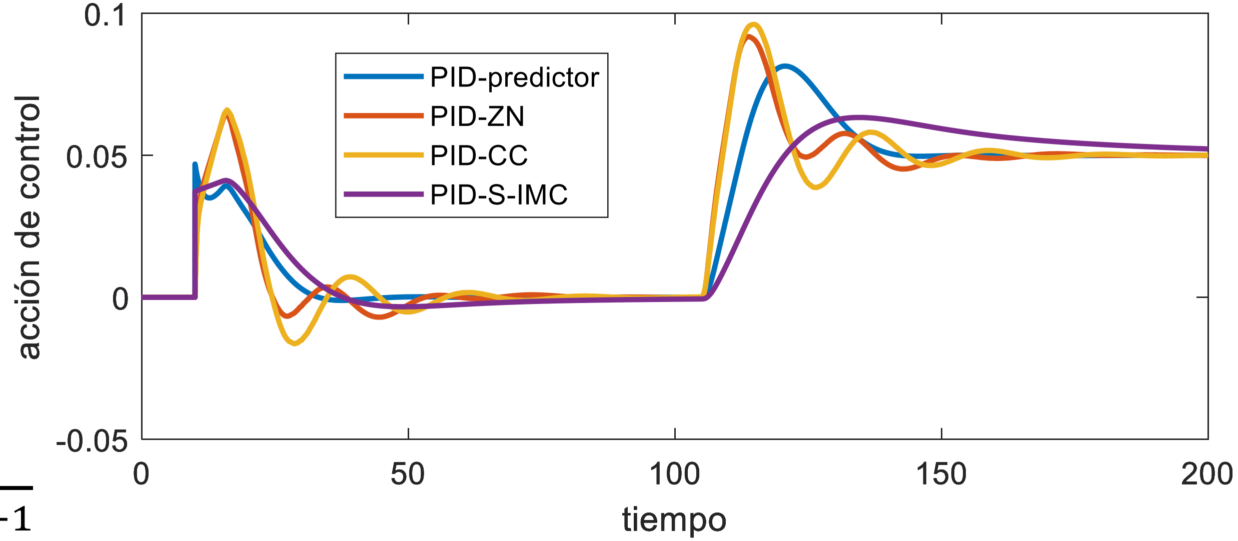
  $$T = 1000 \quad K_p = 2000 \quad K_c = \frac{0{,}5T}{K_p L} \quad T_i = \min(T, 8L)$$

- CC

  $$\tau = 0 \;\; \alpha = 0{,}1$$

- Para CC y ZN se utiliza un filtro de referencia: $F(s) = \frac{1}{10s+1}$



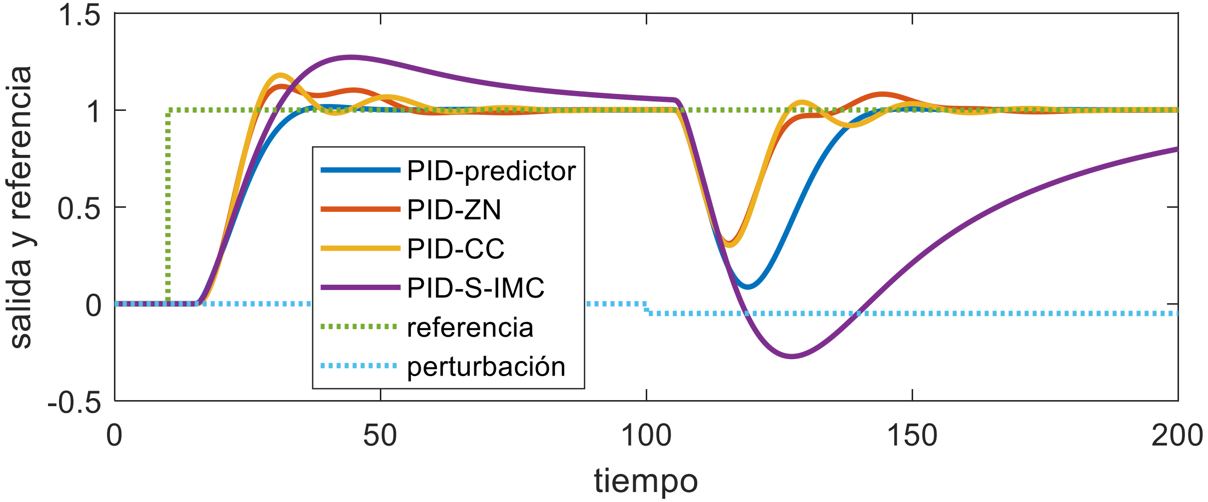


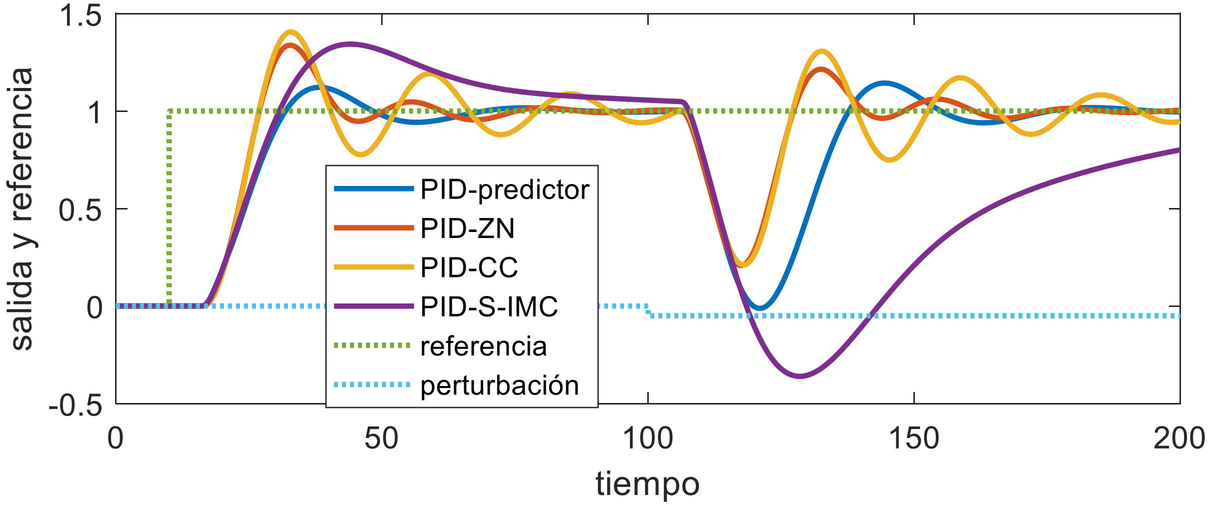
CA3: Control PID de sistemas con retardo

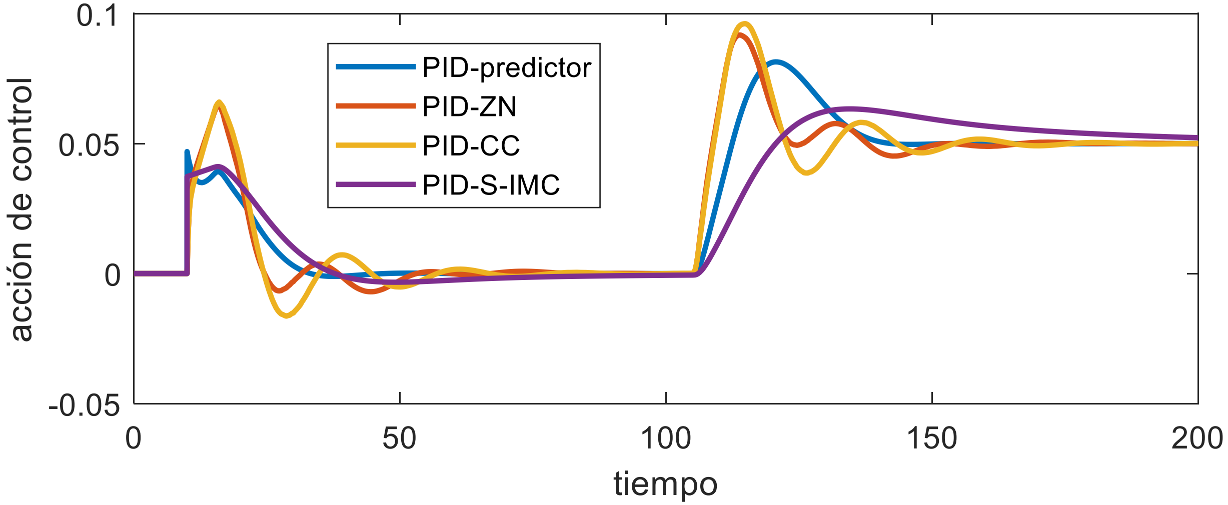
Otros métodos de sintonía - Ejemplo comparativo

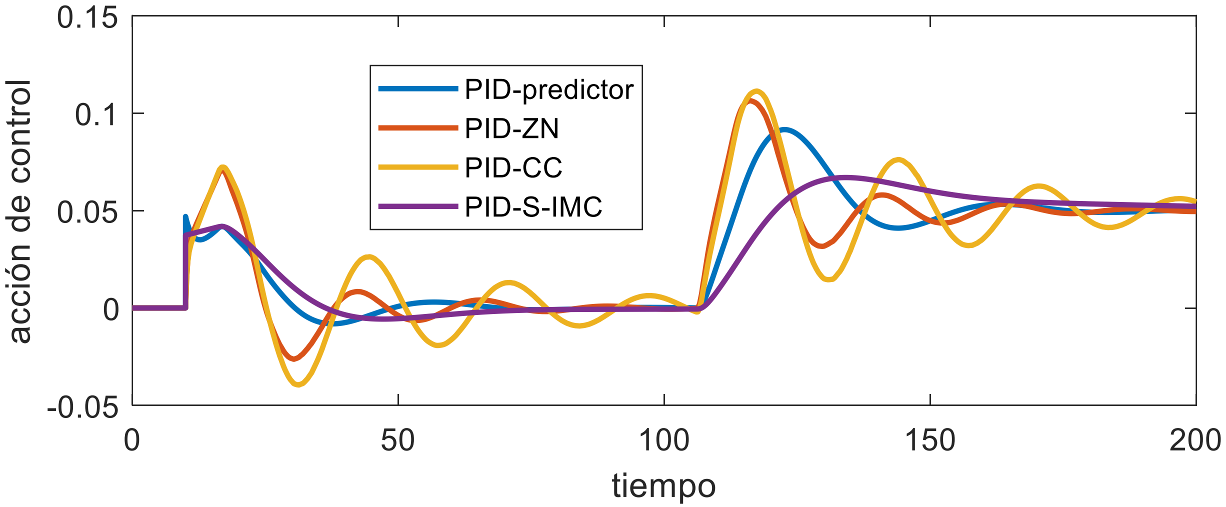
Misma sintonización de los controladores pero con:

$$P(s) = \frac{2e^{-6s}}{s(s+1)(0{,}5s+1)(0{,}1s+1)}$$









CA3: Control PID de sistemas con retardo

Bibliografía

- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. “Control of Dead-time Processes”. Springer, 2007.
- Karl J. Åström Tore Hägglund. “Control PID Avanzado”. PEARSON, 2009.