Método de la Función Descriptiva

Tema 07

V1 - 2024

Nota

El material de estas diapositivas está basado en los libros:

- Katsuhico, Ogata. “Ingeniería de control moderna”. Pearson, 1ra edición, 1998.
- Slotine, Jean-Jacques; Li, Weiping. “Applied nonlinear control”. Prentice Hall, 1991.
- K.J. Aström y T. Hägglund. “Automatic tuning of simple regulators with specifications on pase and amplitud marguns”. Automática, vol. 20, nro. 5, pp. 645-651, 1984.

Método de la Función Descriptiva

Índice

- ***Introducción***
- Función descriptiva
- Análisis de la función descriptiva
- Autosintonía de controladores

Tema 07

V1 - 2024

Introducción

- La respuesta en frecuencia es una herramienta poderosa para el análisis y diseño de sistemas de control lineales.
- Sin embargo, este tipo de análisis no puede ser aplicado directamente a sistemas no lineales porque no es posible definir la respuesta en frecuencia en sistemas no lineales.
- Para algunos tipos de sistemas no lineales, se puede utilizar una versión extendida de la respuesta de frecuencia conocida como método de la función descriptiva.
- Su principal uso es el análisis de ciclos límites.
- Una de las características más importantes de los sistemas no lineales es la dependencia en el comportamiento de la respuesta con la magnitud y tipo de entrada.

Una forma de analizar y diseñar un grupo determinado de sistemas de control no lineales (con alinealidades pequeñas), es usar técnicas de linealización y resolver el problema linealizado resultante.

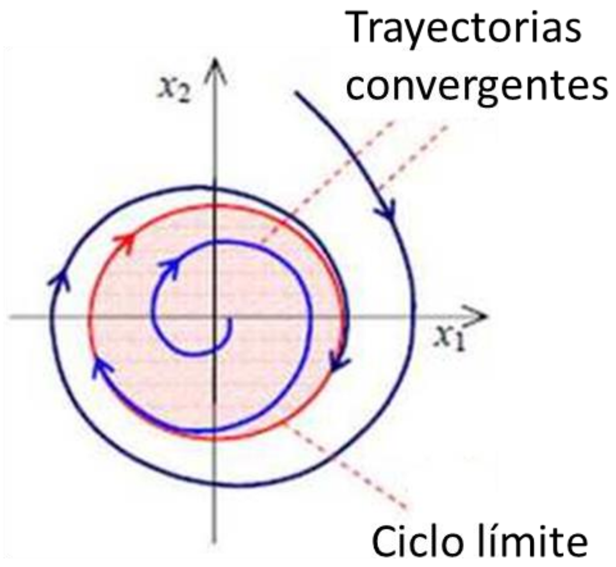
En muchos casos prácticos el interés primario es la estabilidad del sistema sin ser necesarias las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales no lineales.

El método de la función descriptiva permite estudiar (de forma aproximada) la estabilidad de muchos sistemas de control simples, no lineales, en el dominio de la frecuencia.

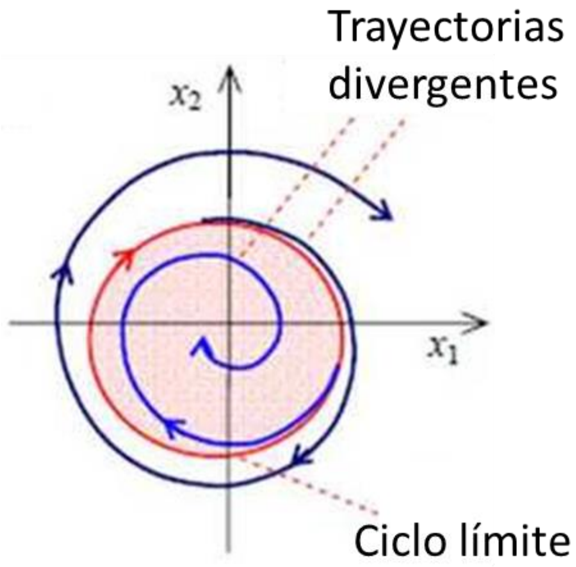
CA3: Método de la Función Descriptiva

Introducción – Ciclos límites

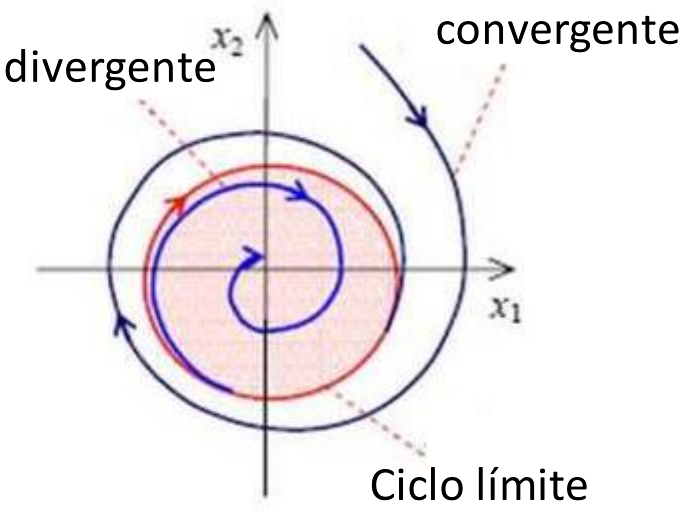
- Este fenómeno corresponde solamente a sistemas no lineales.
- En el plano de fase se define como una curva cerrada asilada.
- La trayectoria cerrada indica la naturaleza periódica del movimiento, y asilada indica la naturaleza límite del ciclo en donde las trayectorias cercanas convergen o divergen de él.
- Se pueden distinguir tres tipos de ciclos límites:



Ciclo límite estable

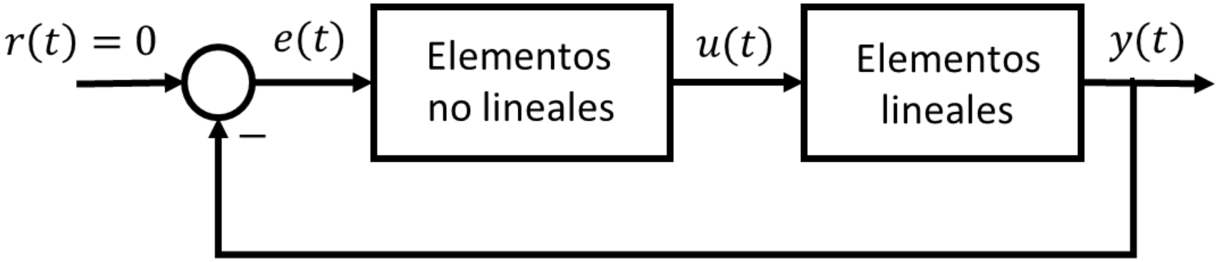


Ciclo límite inestable



Ciclo límite semi estable

- Cualquier sistema que se pueda transformar en la siguiente configuración puede ser estudiado usando el método de la función descriptiva.



- En los sistemas de control reales se encuentran muchos tipos diferentes de no linealidades. Se las puede dividir en dos clases según sean inherentes al sistema o deliberadamente insertadas en el mismo.

Debido a la no linealidad pueden ocurrir ciclos límites. La función descriptiva puede ser utilizada para determinar la estabilidad de los ciclos límites.

- **Sistemas "casi lineales":**
  - **Alinealidades inherentes (inevitables)**

    Saturación, zona muerta, histéresis, juego, fricción estática y otras fricciones no lineales, compresibilidad de fluidos, etc.
  - **Alinealidades intencionales**

    se introducen intencionalmente elementos no lineales en el sistema para mejorar su comportamiento y/o para simplificar su construcción.
- **Sistemas no lineales "genuinos":**

  Sistemas no líneas cuya dinámica se puede reacomodar a la estructura de la figura.

CA3: Método de la Función Descriptiva

Introducción – Suposiciones básicas

- El sistema debe satisfacer las siguientes cuatro condiciones:
  1. Existe un único componente no lineal.
  2. El componente no lineal es de tiempo invariante.
  3. Para una entrada sinusoidal $e = \sin(\omega t)$, sólo la componente fundamental ($u_1(t)$) de la salida del elemento no lineal ($u(t)$) debe ser considerada.
  4. La no linealidad es impar (simétrica respecto al origen).

En el análisis por medio de la función descriptiva se supone que sólo es significativa la componente armónica fundamental de la salida. Esto es frecuentemente válido ya que los armónicos superiores son de menor amplitud que la amplitud de la componente fundamental y además, la mayor parte de los sistemas de control tienen características pasa bajos.

En general, no se requiere un conocimiento preciso de la forma de onda del ciclo límite, sino la existencia de un ciclo límite como así también su amplitud y frecuencia.

Método de la Función Descriptiva

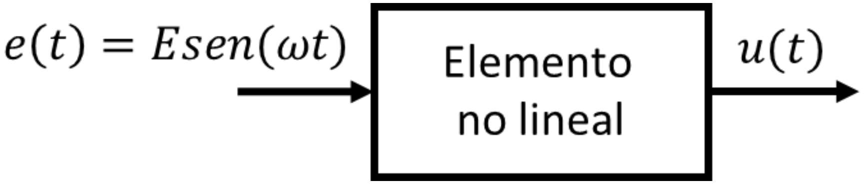
Índice

- Introducción
- ***<u>Función descriptiva</u>***
- Análisis de la función descriptiva
- Autosintonía de controladores

CA3: Método de la Función Descriptiva

Función descriptiva – Representación de un elemento no lineal

- En general, la salida de un elemento no lineal ante una entrada sinusoidal no será sinusoidal y contendrá armónicas superiores además de la componente armónica fundamental.



- Usando series de Fourier, la función periódica $u(t)$ se puede expresar como

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)\big) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n sen(n\omega t + \phi_n)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, cos(n\omega t) d(\omega t) \qquad U_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, sen(n\omega t) d(\omega t) \qquad \phi_n = tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Si la alinealidad es impar $\mathrm{a}_0 = 0$.

Sólo se necesita la componente fundamental $\Rightarrow n = 1$ $(u(t) \approx u_1(t))$.

- Sólo se necesita considerar la primera componente

$$u(t) \approx u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 sen(\omega t)$$

$$u(t) \approx u_1(t) = U_1 sen(\omega t + \phi_1)$$

CA3: Método de la Función Descriptiva

Función descriptiva - Definición

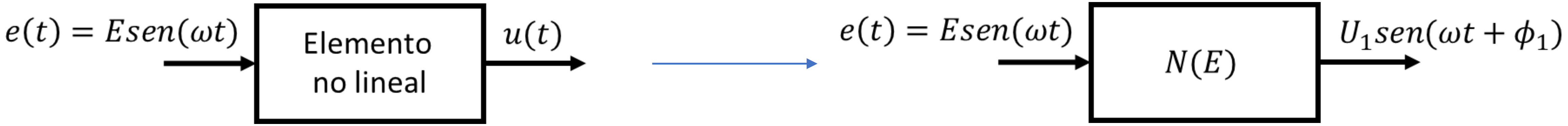
- Se define la función descriptiva o función sinusoidal descriptiva de un elemento no lineal, como la relación compleja entre la componente armónica fundamental de la salida respecto a la entrada (similar al concepto de respuesta en frecuencia).

$$N(E) = \frac{U_1}{E} \angle \phi_1$$

$N(E)$: función descriptiva
E: amplitud de la sinusoide de entrada
U_1: amplitud de la componente armónica fundamental de la salida
ϕ_1: desplazamiento de fase de la componente armónica fundamental de la salida

Si no se incluye ningún elemento de almacenamiento de energía en el elemento no lineal, N es únicamente función de la amplitud de entrada al elemento.

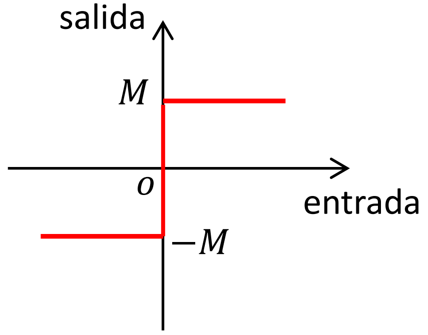
A diferencia de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, la función descriptiva de un elemento no lineal depende de la amplitud entrada.

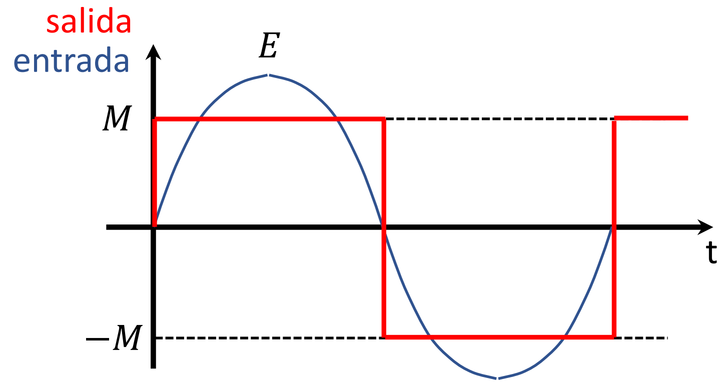


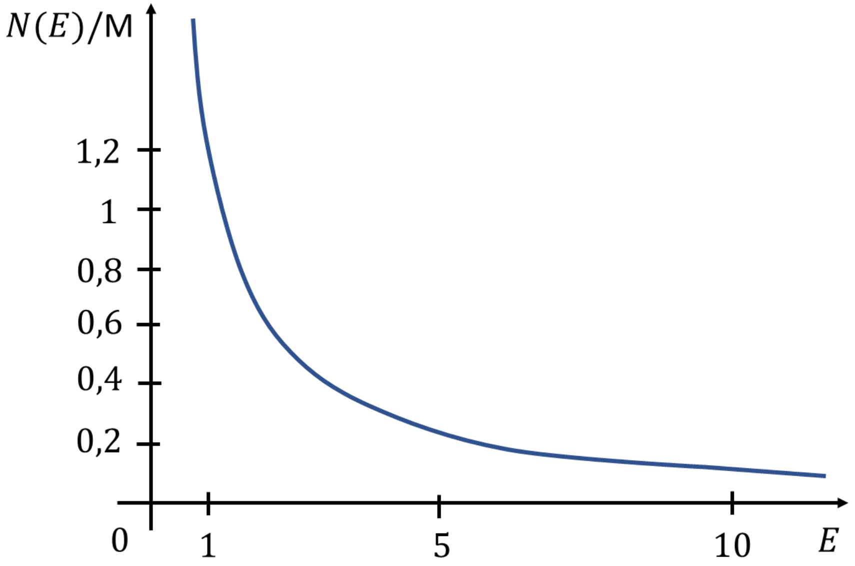
Función descriptiva – Cálculo

- Existen varios métodos para determinar la función descriptiva de un elemento no lineal.
- **Cálculo analítico**
  - Se utiliza cuando la característica no lineal del elemento no lineal se describe mediante una función explícita y se puede resolver fácilmente la integral del desarrollo Fourier. Esta función explícita puede ser la representación ideal de una no linealidad por el ajuste a una relación de entrada-salida del elemento.
- **Integración numérica**
  - Se utiliza con no linealidades cuya relación entrada-salida es dada a través de gráficos o tablas. Básicamente se aproximan las integrales del desarrollo de Fourier mediante sumas discretas.
- **Evaluación experimental**
  - Es particularmente útil para no linealidades complejas o con dinámica. Cuando se puede aislar la no alinealidad y excitarla con entradas sinusoidales de amplitud y frecuencia conocida, se puede realizar una determinación experimental de la función descriptiva utilizando un analizador de espectro a la salida del elemento no lineal. Se debe variar tanto la frecuencia como la amplitud.

Función descriptiva – Cálculo analítico – Relé







- Desarrollo en serie de Fourier de la salida u(t) del elemento no lineal

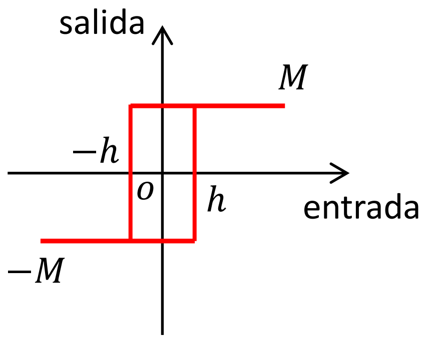
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)\right)$$

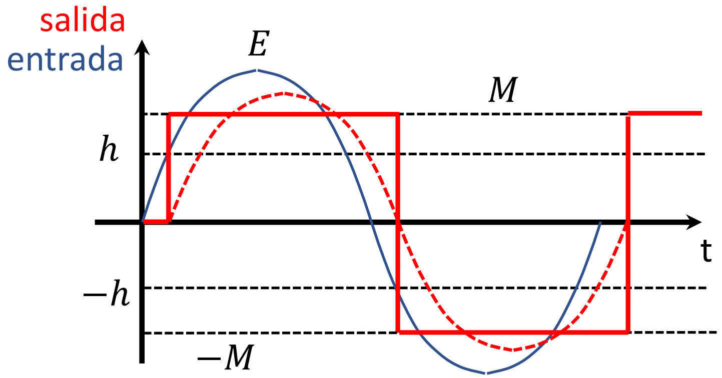
Función impar $\Rightarrow a_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega t) \longrightarrow u_1(t) = b_1 sen(\omega t) = U_1 sen(\omega t) \longrightarrow u_1(t) = \frac{4M}{\pi} sen(\omega t)$$

$$U_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, sen(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\, sen(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi} sen(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{4M}{\pi} \longrightarrow N(E) = \frac{U_1}{E}\angle 0 = \frac{4M}{\pi E}$$

Función descriptiva – Cálculo – Ejemplo: histéresis



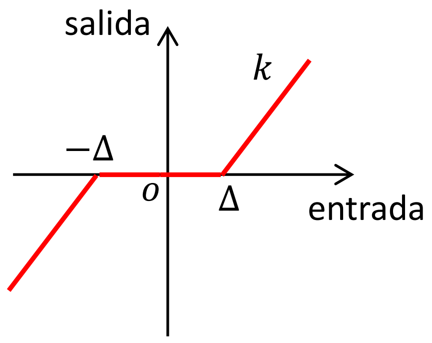


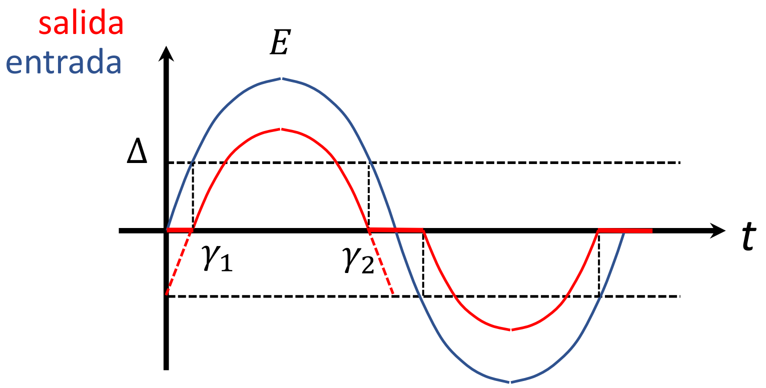
- La salida es una onda cuadrada atrasada respecto a la entrada en $\omega t = sen^{-1}(h/E)$:

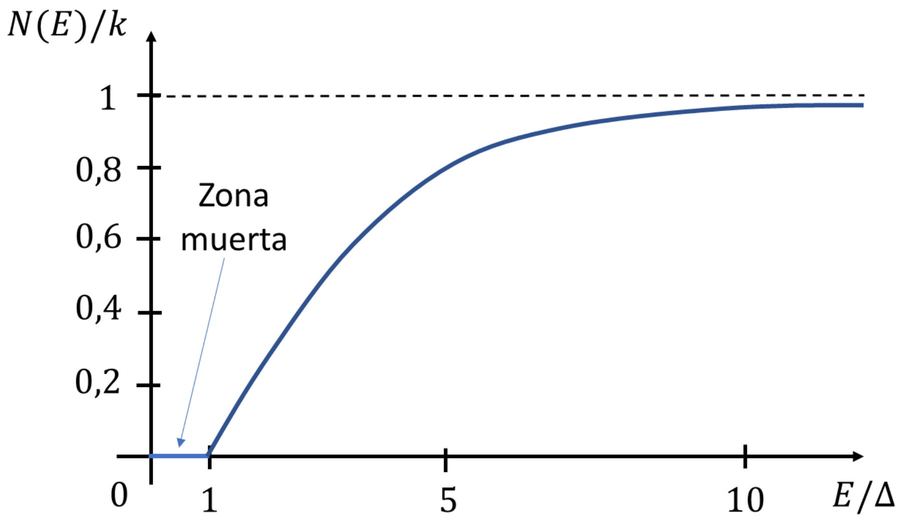
$$N(E) = \frac{4M}{\pi E} \angle - sen^{-1}(h/E)$$

CA3: Método de la Función Descriptiva

Función descriptiva – Cálculo – Ejemplo: zona muerta







- La salida $u(t)$ para $0 \le \omega t \le \pi/2$ está dad por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad \omega t < \gamma_1 \\ k(Esen(\omega t) - \Delta) & si \quad \gamma_1 < \omega t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\gamma_1 = sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{E}\right)$$

$$U_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(t)\,sen(\omega t)d(\omega t) = \frac{4k}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\pi/2} (Esen(\omega t) - \Delta)sen(\omega t)\,d(\omega t)$$

$$= \frac{2Ek}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{E}\right) - \frac{\Delta}{E}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{E}\right)^2}\right)$$

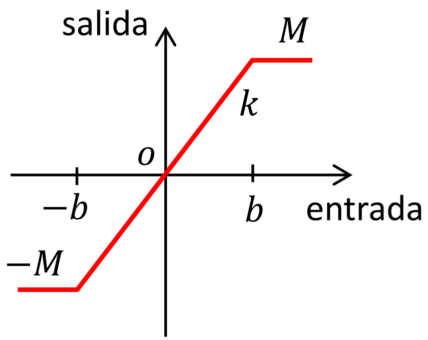
- Función impar $\Rightarrow a_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \dots)$

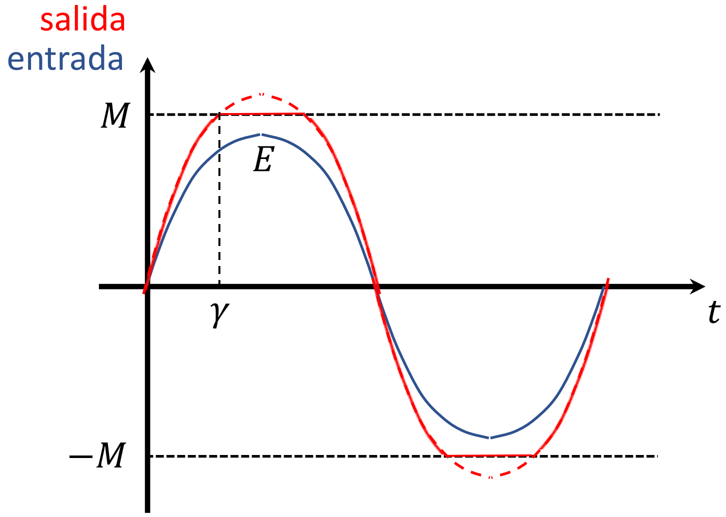
$$u_1(t) = b_1 sen(\omega t) = U_1 sen(\omega t)$$

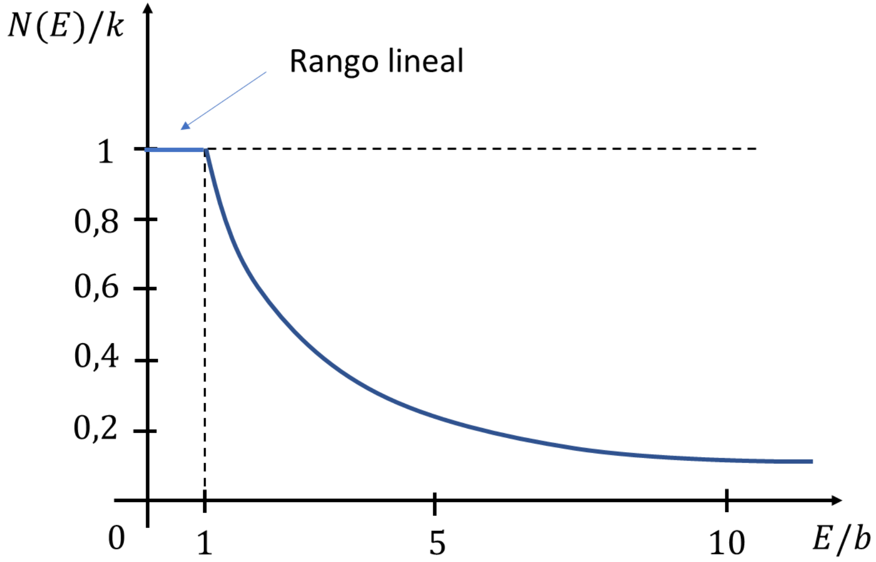
$$N(E) = k - \frac{2k}{\pi}\left(sen^{-1}\left(\frac{\Delta}{E}\right) - \frac{\Delta}{E}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{E}\right)^2}\right)$$

CA3: Método de la Función Descriptiva

Función descriptiva – Cálculo – Ejemplo: saturación







- Entrada: $e(t) = Esen(\omega t)$
  - Si $E \leq b$ la entrada se mantiene en el rango lineal siendo la salida $u(t) = kEsen(\omega t)$. Así,

$$N(E) = \frac{kEsen(\omega t)}{Esen(\omega t)} = k$$

  - Si $E > b$ la salida presenta saturación

$$u(t) = \begin{cases} kEsen(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ M & \gamma < \omega t < \pi/2 \end{cases} \longrightarrow N(E) = \frac{2k}{\pi}\left(sen^{-1}\left(\frac{b}{E}\right) + \frac{b}{E}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{E}\right)^2}\right)$$

$$\gamma = sen^{-1}(b/E)$$

Método de la Función Descriptiva

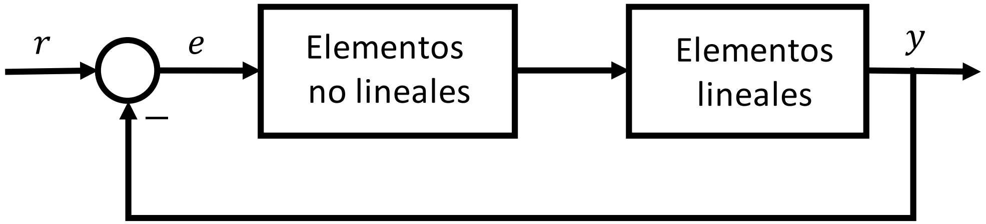
Índice

- Introducción
- Función descriptiva
- ***<u>Análisis de la función descriptiva</u>***
- Autosintonía de controladores

Tema 07

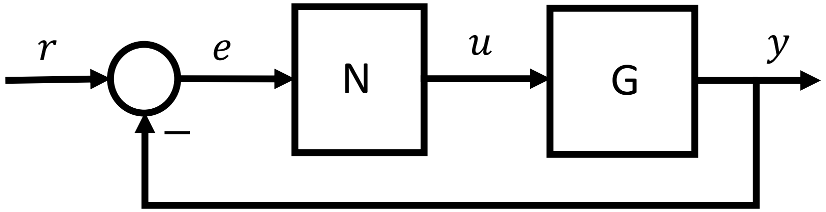
V1 - 2024

Análisis de la función descriptiva



Si las armónicas superiores generadas por el elemento no lineal son atenuadas suficientemente por el modelo lineal (solamente es significativa la componente fundamental a la salida del elemento no lineal), se puede predecir la estabilidad del sistema con el análisis de la función descriptiva.

- Aproximando los elementos no lineales mediante la función descriptiva



$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)} \longrightarrow 1 + NG(j\omega) = 0$$

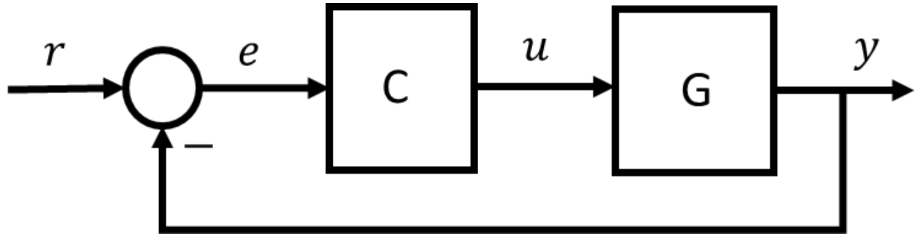
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

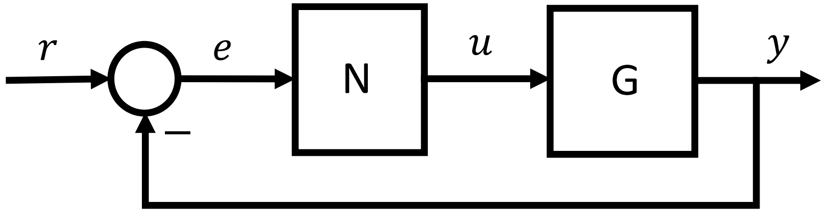
Si se satisface esta condición la salida del sistema presenta un ciclo límite. Esta situación corresponde al caso en el que en lugar de G pasa por el punto crítico.

En el análisis con la función descriptiva se modifica el análisis convencional de respuesta en frecuencia, de manera que todo lugar de $-1/N$ se convierte en un lugar de puntos críticos. Así la ubicación relativa del lugar de $-1/N$ y $G(j\omega)$ dan información respecto a la estabilidad.

CA3: Método de la Función Descriptiva

Análisis de la función descriptiva – Diferencia con el análisis convencional

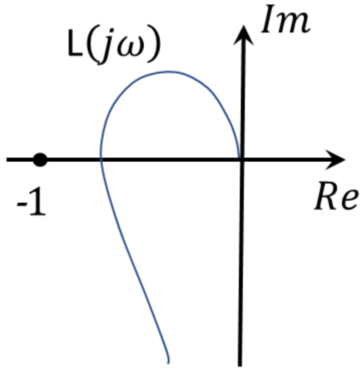




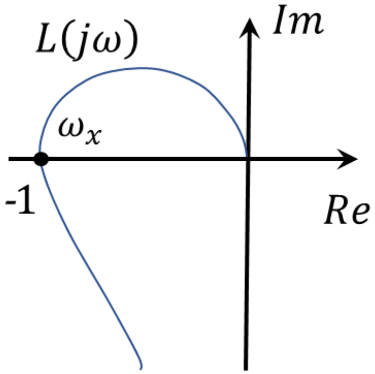
$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)C(j\omega)}{1+G(j\omega)C(j\omega)} \longrightarrow 1 + L(j\omega) = 0$$

$$L(j\omega) = -1$$

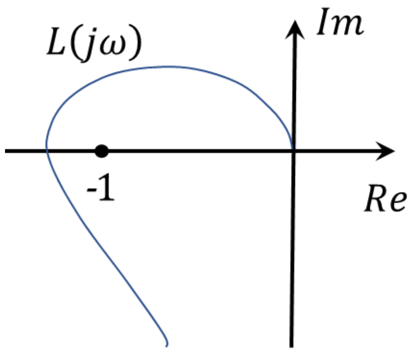
$$\mathrm{L}(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)\,de\ Mínima\ Fase$$



Sistema Estable



Sistema Oscilatorio

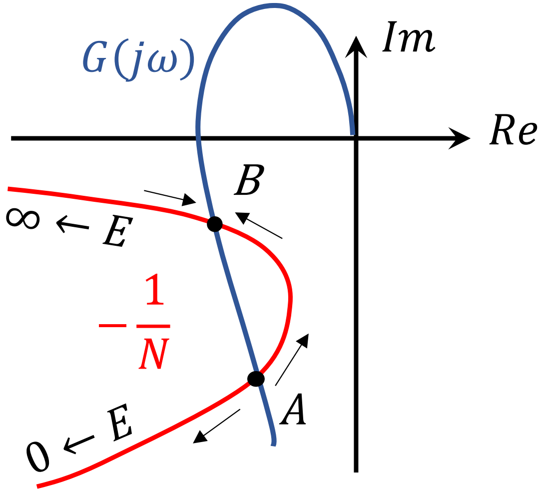


Sistema Inestable

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1+NG(j\omega)} \longrightarrow 1 + NG(j\omega) = 0$$

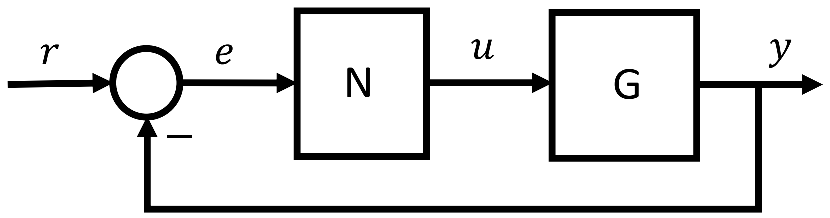
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

$G(j\omega)\ de\ Mínima\ Fase$

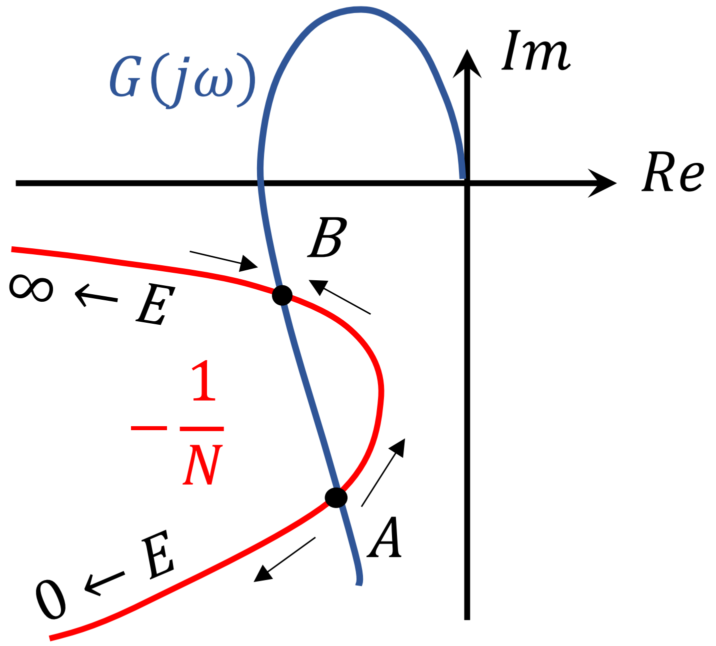


CA3: Método de la Función Descriptiva

Análisis de la función descriptiva – Estabilidad de los ciclos límites



Si hay intersección entre los lugares de $-1/N$ y $G(j\omega)$, la salida del sistema puede presentar oscilaciones mantenidas o un ciclo límite. Una oscilación mantenida así no es sinusoidal, pero se la puede aproximar por una oscilación sinusoidal. La oscilación mantenida se caracteriza por el valor de E en el lugar de $-1/N$ y el valor de ω en el lugar de $G(j\omega)$ en la intersección de ambas.

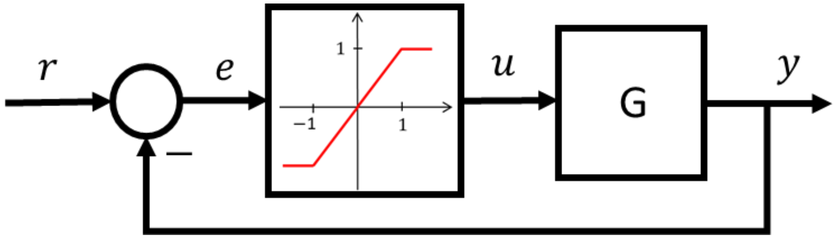


Exactitud del análisis por medio de la función descriptiva

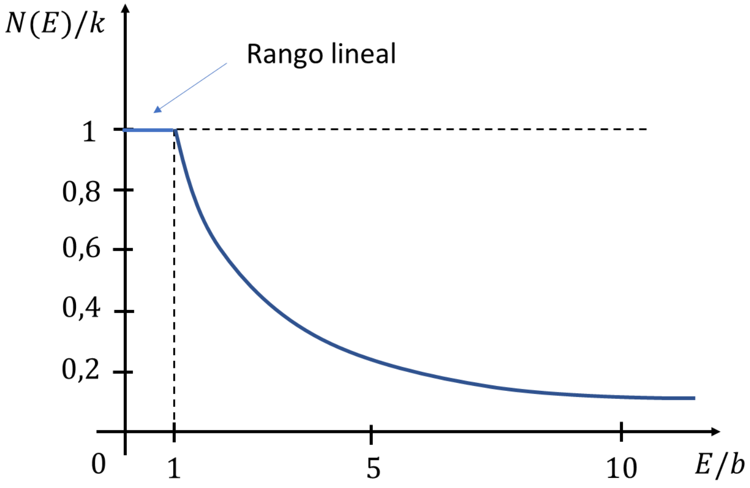
- Los valores de amplitud y frecuencia obtenidos para el ciclo límite son valores aproximados.
- Si los lugares $-1/N$ y $G(j\omega)$ se cortan casi perpendicularmente, la exactitud del análisis es buena. Si se atenúan todas las armónica superiores, la exactitud es excelente.
- Si el lugar de $G(j\omega)$ es tangente o casi tangente al lugar de $-1/N$ la exactitud depende de cuanto atenúa $G(j\omega)$ las armónicas superiores.
- Que haya ciclo límite o no dependerá de la naturaleza de $G(j\omega)$.

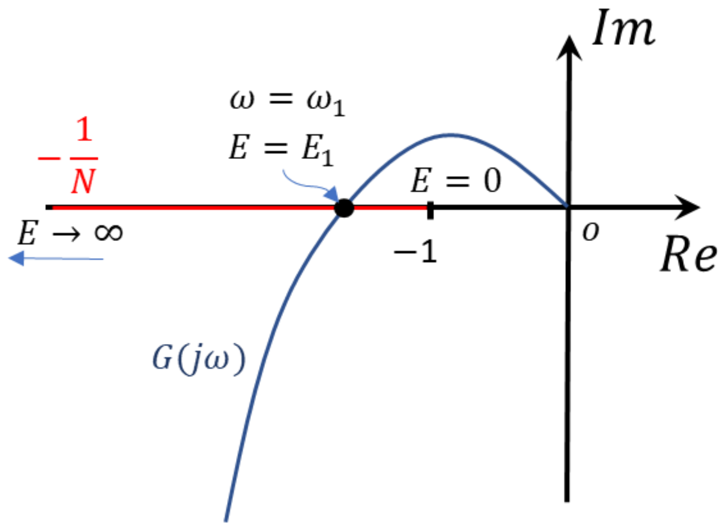
CA3: Método de la Función Descriptiva

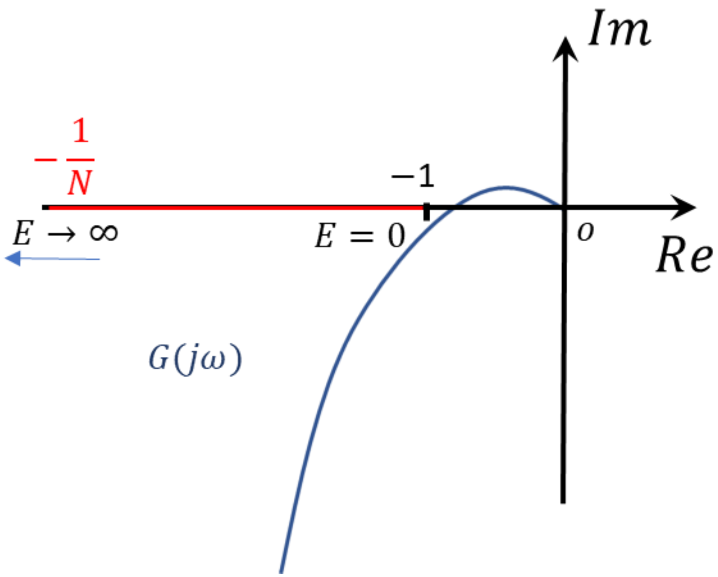
Análisis de la función descriptiva – Ejemplo

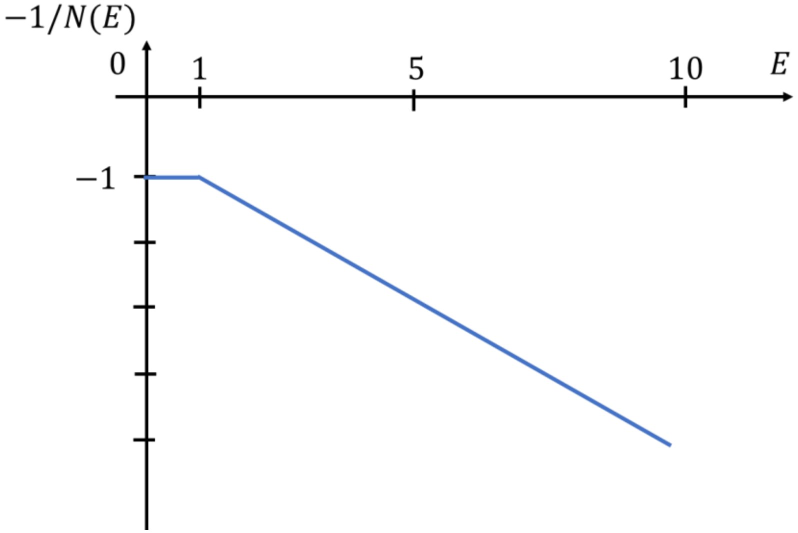


$$N(E) = \frac{2k}{\pi}\left(sen^{-1}\left(\frac{b}{E}\right) + \frac{b}{E}\sqrt{1-\left(\frac{b}{E}\right)^2}\right)$$



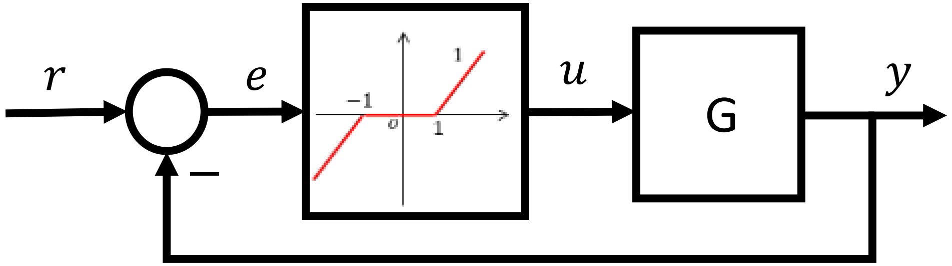


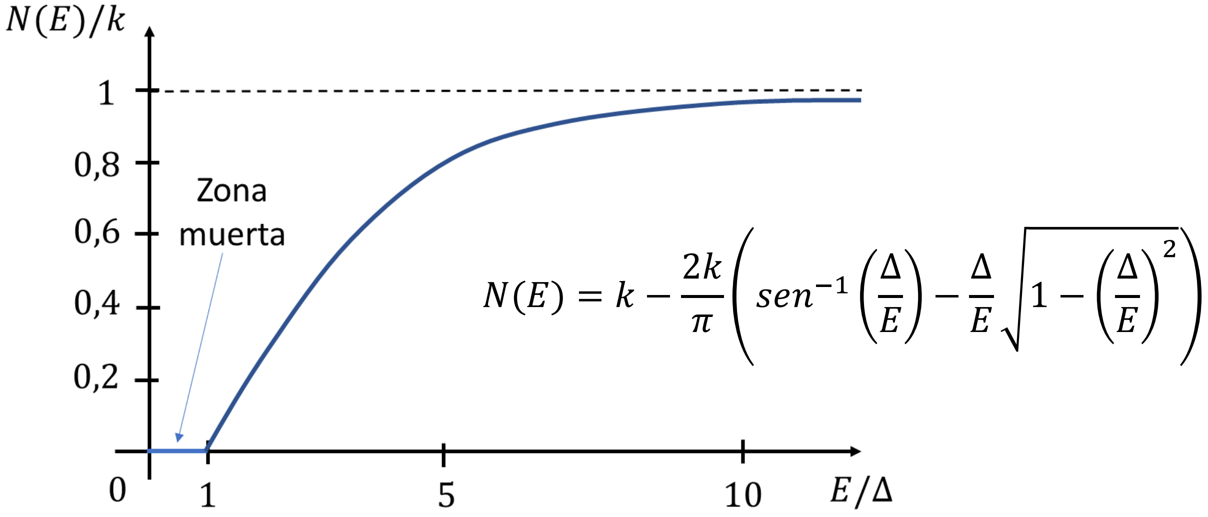


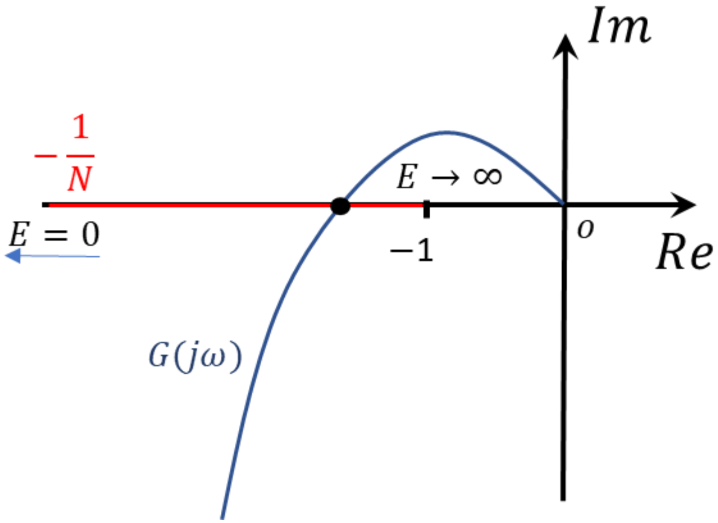


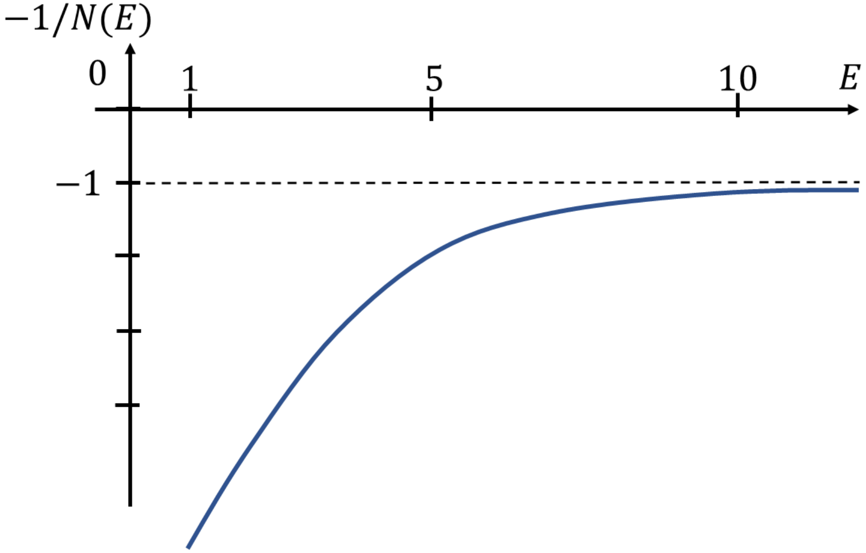
CA3: Método de la Función Descriptiva

Análisis de la función descriptiva – Ejemplo 2



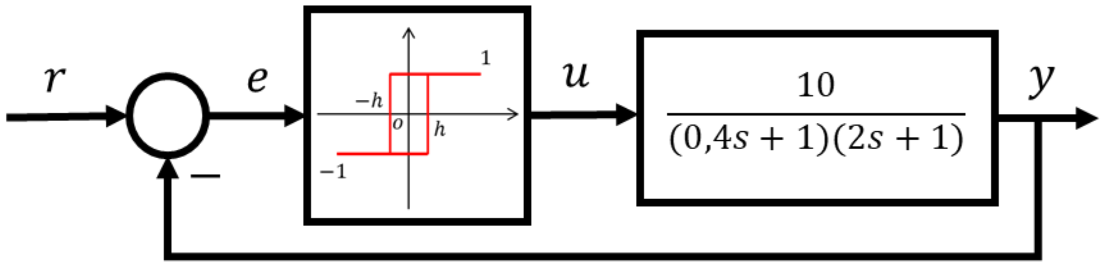






CA3: Método de la Función Descriptiva

Análisis de la función descriptiva – Ejemplo 3

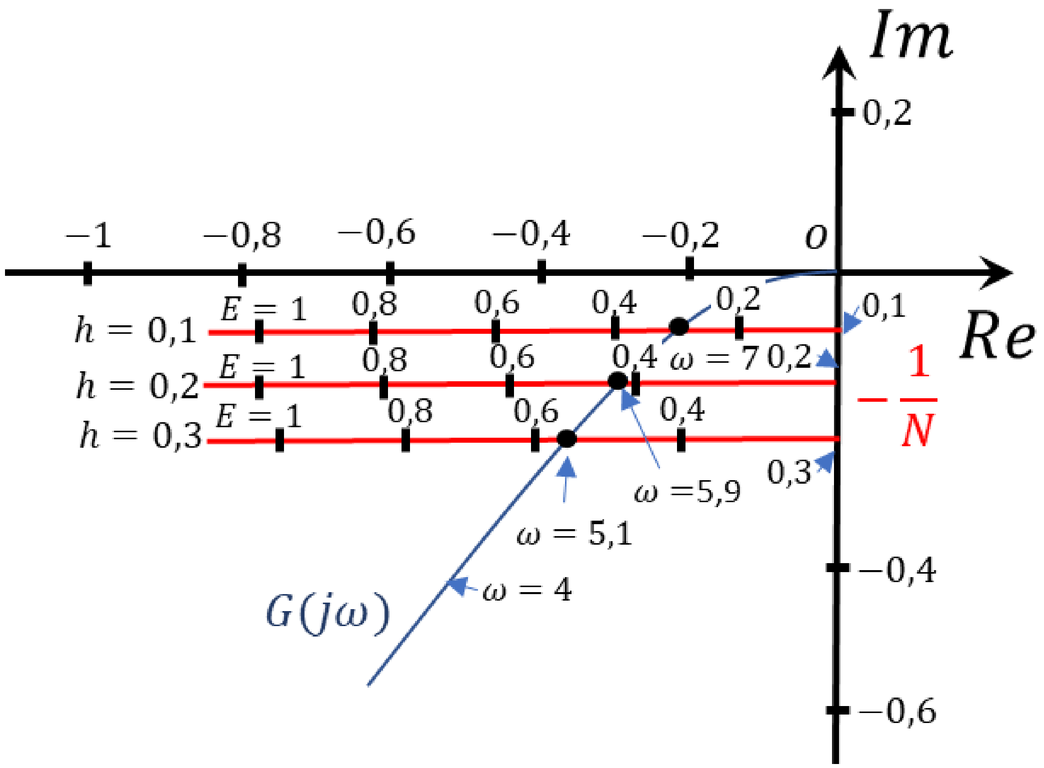


$$N(E)=\frac{4M}{\pi E}\angle -sen^{-1}(h/E)$$

$$-1/N(E)=\frac{\pi E}{4M}e^{jsen^{-1}(h/E)}$$

$$Re\left(-1/N(E)\right)=-\frac{\pi E}{4M}\sqrt{1-\left(\frac{h}{E}\right)^2}$$

$$Im\left(-1/N(E)\right)=-\frac{\pi h}{4M}$$



$$E=0{,}27;\quad \omega=7;\quad si\ h=0{,}1$$

$$E=0{,}42;\quad \omega=5{,}9;\quad si\ h=0{,}2$$

$$E=0{,}57;\quad \omega=5{,}1;\quad si\ h=0{,}3$$

Método de la Función Descriptiva

Índice

- Introducción
- Función descriptiva
- Análisis de la función descriptiva
- ***<u>Autosintonía de controladores</u>***

Tema 07

V1 - 2024

CA3: Método de la Función Descriptiva

Autosintonía de controladores

- Muchas reglas de sintonía de controladores PID, como el método de Ziegler-Nichols, se basan en determinar un punto en el gráfico de Nyquist.

- En particular requieren encontrar el punto crítico que se corresponde con el punto que tiene ganancia 1 y fase -180°, descripto generalmente a través de la ganancia y frecuencia crítica.

- La determinación de este punto de forma lineal puede ser dificultosa e incluso riesgosa.

- El método de la función descriptiva se puede utilizar para determinar este punto (y otros) de forma segura y automática.

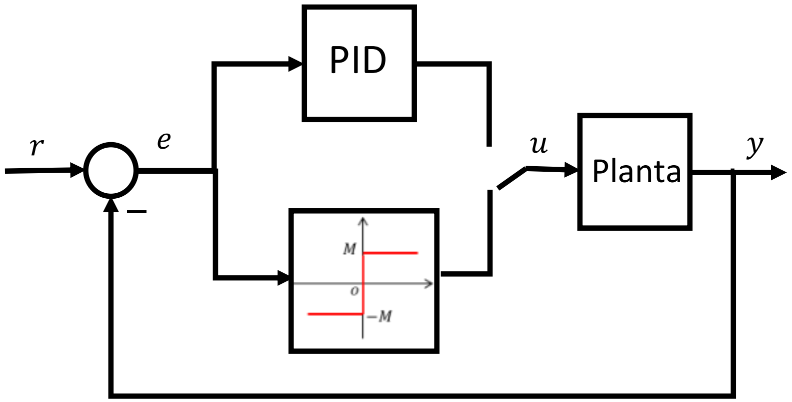
- Aström y Hägglund propusieron métodos de auto sintonía de controladores basados en la función descriptiva. El principio básico radica en que cualquier sistema con retraso mayor a 180° puede oscilar con una amplitud controlada cuando se lo controla mediante una no linealidad.

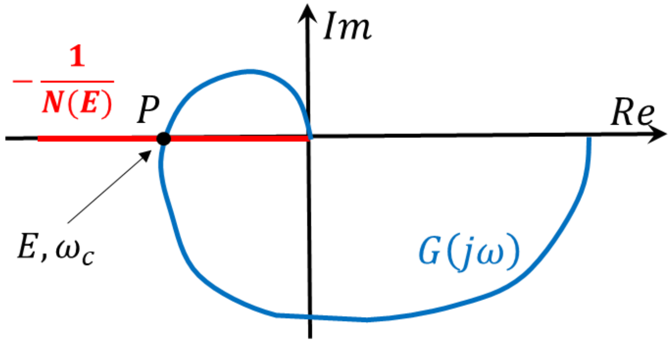
Estos métodos se pueden utilizar para la sintonización de controladores como así también para la inicialización de controladores adaptivos más complejos.

CA3: Método de la Función Descriptiva

Autosintonía de controladores – Determinación de punto crítico

- Para determinar la ganancia y la frecuencia crítica, el sistema se conecta de la siguiente manera:





- Determinación de la amplitud de la oscilación
  - Medición de los valores pico a pico de la salida.
- Determinación del período de oscilación
  - Tiempo entre cruces por cero.

- La señal de error es una señal periódica con período T_0.
- La ganancia crítica resulta $K_c \approx 4M/\pi E$.
- La amplitud de la oscilación se puede controlar con M.

Determinado T_c y ω_o se obtienen los parámetros del PID.

Margen de ganancia

- Cuando se conoce el punto crítico es sencillo encontrar un compensador con un determinado margen de ganancia.

$$k = \frac{K_c}{G_m}$$

K_c: ganancia crítica
G_m: margen de ganancia

- Para un controlador PID

$$C(j\omega) = k\left(1 + \frac{1}{j\omega T_i}(1 - \omega^2 T_i T_d)\right)$$

Con $T_d = 1/(\omega_c^2 T_i)$

También logra el margen de ganancia deseado.

Margen de fase

- Para una función de lazo con un PID

$$G(s)C(s) = k\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)G(s)$$

Conociendo donde el diagrama de Nyquist de G corta al eje real negativo, la condición de fase a ω_c es $\phi_m - \pi$

$$\omega_c \mathrm{T_d} - \frac{1}{\omega_c T_i} = \mathrm{tg}(\phi_m)$$

- Eligiendo $T_i = \alpha T_d$

$$T_d = \frac{tg\phi_m + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \mathrm{tg}^2\,\phi_m}}{2\omega_c}$$

- La ganancia de lazo tiene ganancia unitaria a ω_c si la ganancia del controlador se elige como

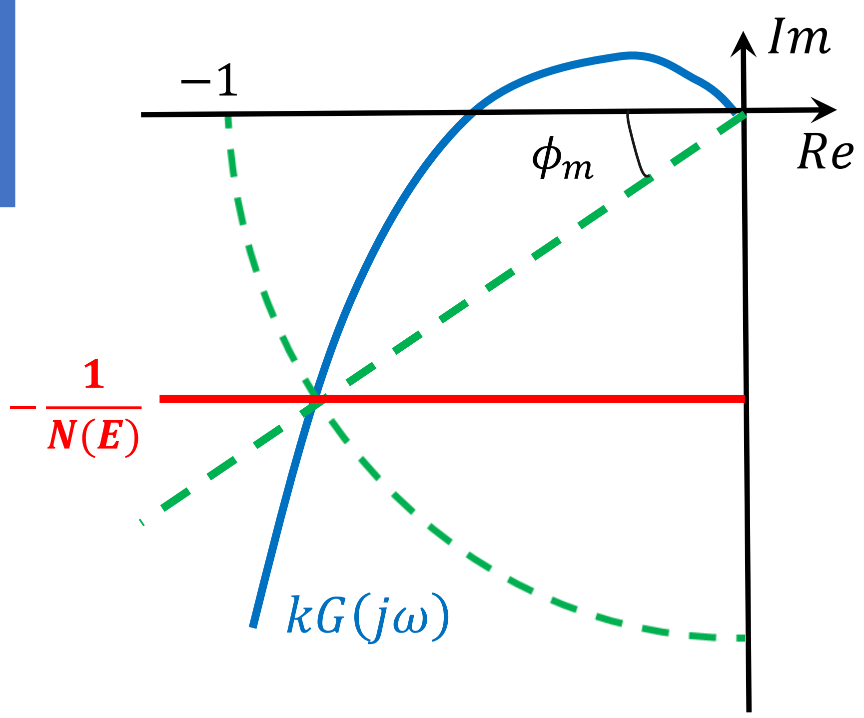
$$k = \frac{cos\phi_m}{|G(j\omega_c)|} = K_c cos\phi_m$$

Autosintonía de controladores – Histéresis - Margen de fase

- Utilizando un relé con histéresis es posible determinar otros puntos en el diagrama de Nyquist.

$$-\frac{1}{N(E)} = -\frac{\pi E}{4M}\sqrt{1-\left(\frac{h}{E}\right)^2} - j\frac{\pi h}{4M}$$

Por ejemplo, ajustando h y M se puede determinar un punto en el gráfico de Nyquist con una determinada parte imaginaria.

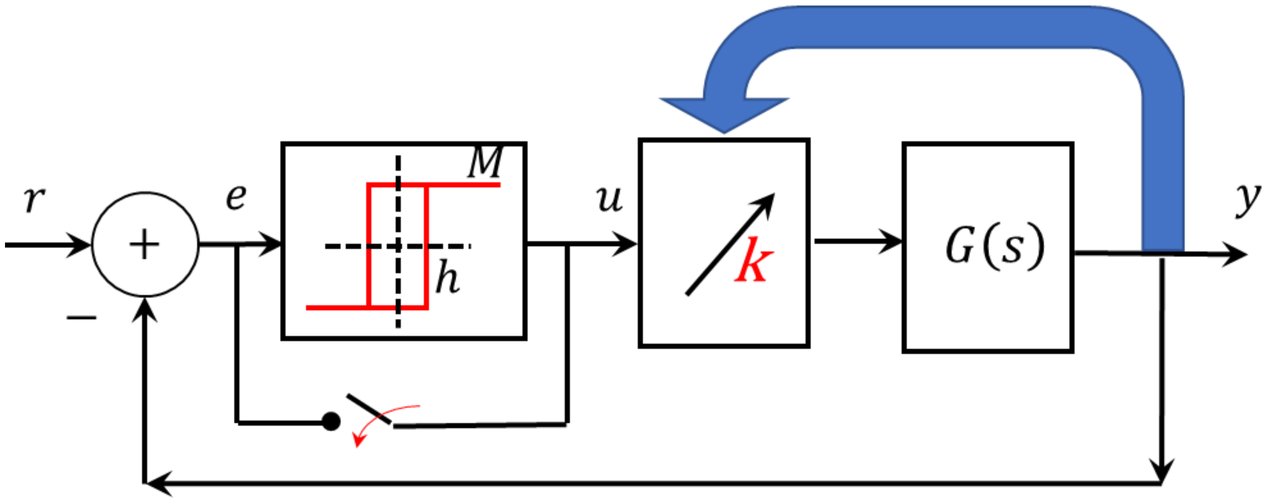


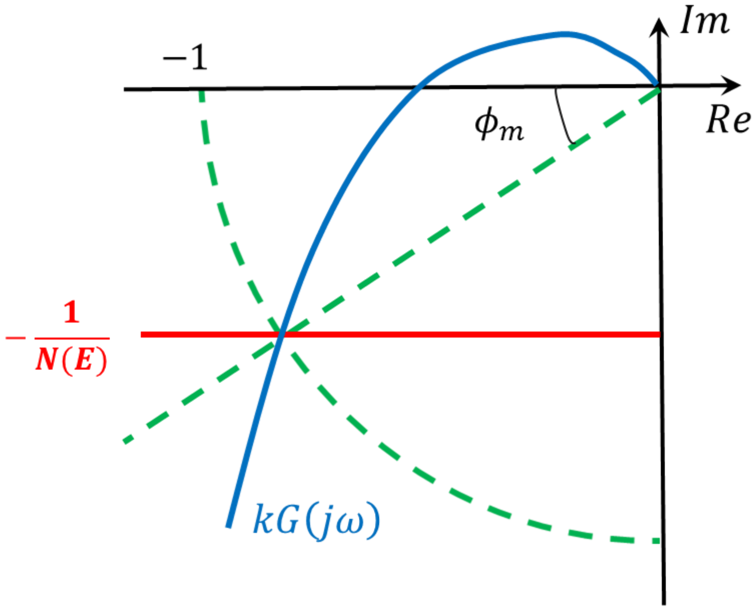
- Consideremos un proceso $G(s)$ controlado por un compensador proporcional, así $L(s) = kG(S)$ y supongamos que se busca un lazo cerrado con un margen de fase ϕ_m.
- Eligiendo una amplitud E_d para la oscilación controlada se pueden determinar las características necesarias del ciclo de histéresis para lograr la condición necesaria:

$$M = \frac{\pi E_d}{4} \qquad h = E_d sen(\phi_m)$$

- El punto deseado se puede alcanzar ajustando iterativamente el valor de k hasta conseguir la amplitud deseada

$$k_{n+1} = k_n - (E_n - E_d)\frac{k_n - k_{n-1}}{E_n - E_{n-1}}$$





El método se puede extender para incluir acción integral y derivativa.

CA3: Método de la Función Descriptiva

Bibliografía

- Katsuhico, Ogata. “Ingeniería de control moderna”. Pearson, 1ra edición, 1998.
- Slotine, Jean-Jacques; Li, Weiping. “Applied nonlinear control”. Prentice Hall, 1991.
- K.J. Aström y T. Hägglund. “Automatic tuning of simple regulators with specifications on pase and amplitud marguns”. Automática, vol. 20, nro. 5, pp. 645-651, 1984.