



Introducción al control robusto

Tema 01



CA3: Introducción al control robusto

Nota

El material de estas diapositivas está basado en los libros:

- Sanchez-Peña, Ricardo. “Robust Systems: Theory and Applications”. Wiley & Sons, 1998.
- Sanchez-Peña, Ricardo. “Introducción a la Teoría de Control Robusto”. AADECA, 1999.
- John Doyle, Bruce Francis and Allen Tannenbaum. “Feedback control theory”. MacMillan, 1992.



Introducción al control robusto

Índice

- **Introducción – Varios**
- Sistemas bien planteados
- Incertidumbre y estabilidad
- Performance
- Loopshaping
- Ejemplo de aplicación realista

Tema 01

V1 - 2023



CA3: Introducción al control robusto

Introducción

- El objetivo en el control de sistemas es hacer que alguna salida (y) se comporte de una manera determinada manipulando alguna entrada (u).
- Objetivos:
 - problema de regulación: mantener y pequeña (o cerca de algún punto de equilibrio)
 - problema de servomecanismo o servo: mantener $y - r$ pequeña (r referencia o señal de comando) en algún conjunto
- En general existe también la restricción paralela de mantener u pequeña:
 - debido a sus restricciones (ej. flujo a través de una válvula)
 - puede ser muy “caro” utilizar una entrada muy grande
- ¿Qué significa que una señal sea pequeña?
 - Es natural introducir la norma para señales, luego “y chica” significa “ $\|y\|$ pequeña”.
 - La norma más apropiada dependerá de la aplicación en particular.



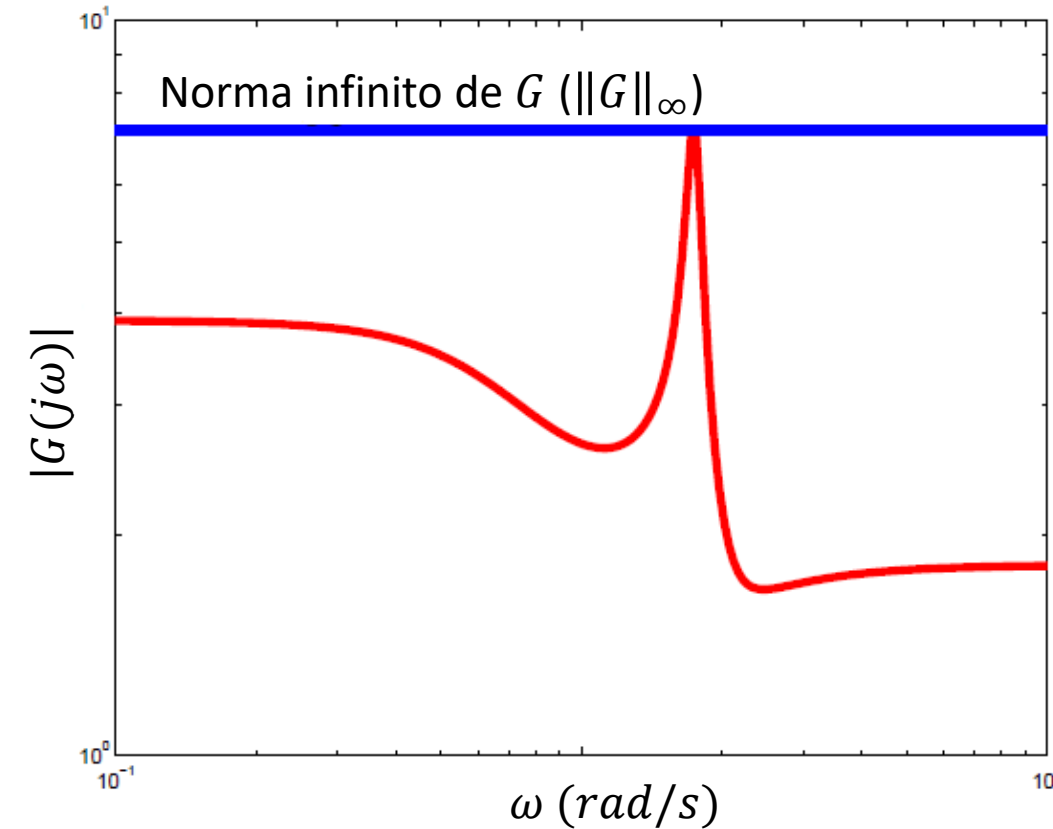
CA3: Introducción al control robusto

Norma infinito - Definición

- La norma infinito de un sistema SISO estable es el mayor factor de amplificación posible en estado estacionario a una excitación sinusoidal.
- Para una función de transferencia escalar $G(s)$ (SISO), $\|G(s)\|_\infty$ es el máximo valor de $|G(s)|$.

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

- Para el caso MIMO, la norma infinito es el máximo valor del máximo valor singular de la matriz de transferencia.





CA3: Introducción al control robusto

Sistema vs. Modelo

- Todo surge del modelado del sistema físico. Es importante distinguir:
 - **Sistema físico real:** el que uno quiere controlar “el que está ahí afuera”.
 - **Modelo físico ideal:** obtenido mediante la descomposición del sistema físico real en bloques constructivos ideales, compuesto de resistores, masas, resortes, medios isotrópicos, fluidos newtoneanos, etc.
 - **Modelo matemático ideal:** obtenido aplicando leyes naturales al modelo físico ideal, generalmente compuesto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.
 - **Modelo matemático reducido:** obtenido del modelo matemático ideal mediante linealización, “concentración”, etc., usualmente una función de transferencia racional.

Ningún modelo matemático puede modelar perfectamente un sistema físico real, siempre existe incertidumbre.

Incertidumbre significa que no podemos predecir exactamente cuál será la salida del sistema físico real incluso conociendo la entrada.

La incertidumbre surge básicamente del desconocimiento: dinámica impredecible o entradas impredecibles o desconocidas (perturbaciones, ruido, etc.).

"All models are wrong, but some are useful"
George Box

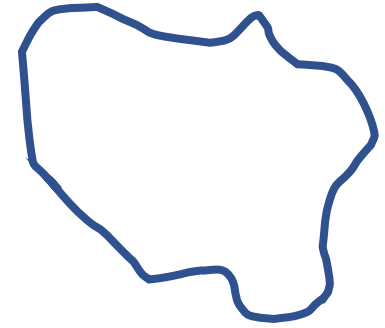


CA3: Introducción al control robusto

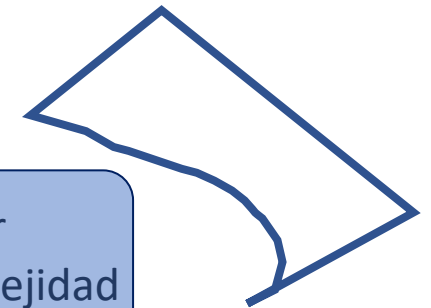
Problema general de control

- **Fase experimental:** es dónde empieza y termina
 - Formulación del problema práctico: Configuración física, especificaciones de performance.
 - Experimento para obtener el modelo: Identificación.
 - Evaluación final del controlador: en el sistema físico.
 - La interacción con la planta es con señales reales: información incompleta, simplificaciones -> incertidumbre (observación del sistema y de su entorno).
 - Ruido, perturbación e incertidumbre.
- **Fase de simulación:** Motivos para tener un modelo computacional
 - Experimentación directa imposible (satélites, LSS).
 - Costo de la experimentación (proceso químico, WT).
 - Vidas en juego (aviones).
 - Software, HIL, RCP, RTS – relación de compromiso.
- **Fase teórica:** se trabaja con modelos simplificados (FD-LTI), de menor a mayor (SISO, MIMO, optimización, etc.)
 - Aún no existen herramientas completamente desarrolladas para el diseño y análisis de sistemas de control descritos por ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas con (posiblemente) parámetros inciertos.

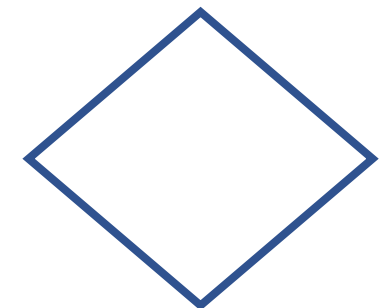
Experimentación



Simulación



Teoría



Descripción más
realista



Mayor
complejidad



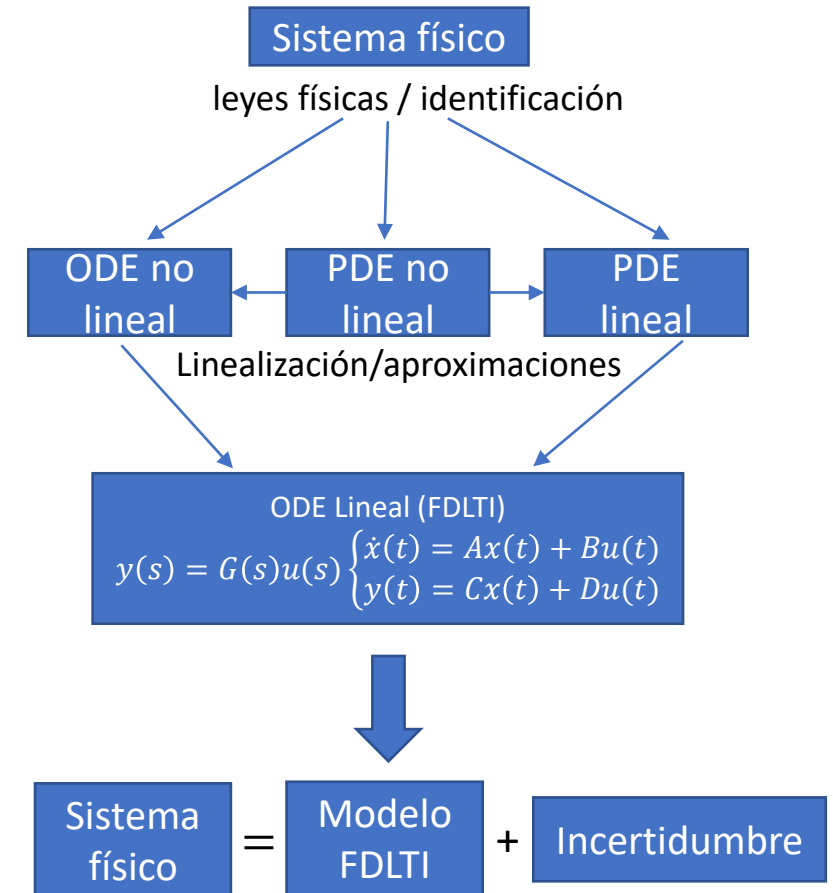
CA3: Introducción al control robusto

¿Qué debe proveer un buen modelo?

- Debería predecir la respuesta entrada-salida en forma tal que lo podamos usar para diseñar el sistema de control, y luego tener confianza de que el diseño resultante funcionará en el sistema real.
- Idealmente debería cubrir toda la información (reproducir todos los experimentos y no sólo los observados).
- Es necesario que el modelo tenga una parte no determinística que cubra razonablemente el rango esperado de variación.
- En general vamos a trabajar con modelos FDLTI (linealización, aproximaciones, simplificaciones, etc.)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

- La razón: marco teórico completamente desarrollado, más simples de tratar y en general sirven para cubrir la gran mayoría de los problemas de control.





CA3: Introducción al control robusto

Modelos

- Hay que buscar una forma de tener en cuenta lo que se está despreciando.



- La forma básica del modelo de la planta es:

$$y = (P + \Delta)u + n$$

y : salida
 u : entrada
 P : transferencia nominal de la planta

- La incertidumbre en el modelo viene con:
 - n : ruido o perturbaciones desconocidas
 - Δ : perturbación en la planta desconocida
- Se asume que tanto n como Δ pertenecen a un conjunto (cierta información a priori).

Cada entrada u es capaz de producir un conjunto de salidas a medida que n y Δ varían a lo largo de su conjunto.

Los modelos capaces de producir un conjunto de salidas para una sola entrada se denominan no determinísticos.



CA3: Introducción al control robusto

Modelos (2)

Dos formas principales
de obtener modelos

Modelos desde la “ciencia”

(Aplicando leyes de la física, química, etc.)

- Puramente matemático una vez que se aplicaron las leyes físicas.
- Versión simplificada del modelo matemático complejo.
- Variables con sentido físico.

Algunos sistemas son difíciles de modelar en esta forma debido a que son muy complejos o porque están gobernados por leyes que no se conocen.

Modelos desde datos experimentales

(black box, black box+info)

- Identificación:
 - Paramétrica, no paramétrica.
 - Identificación robusta

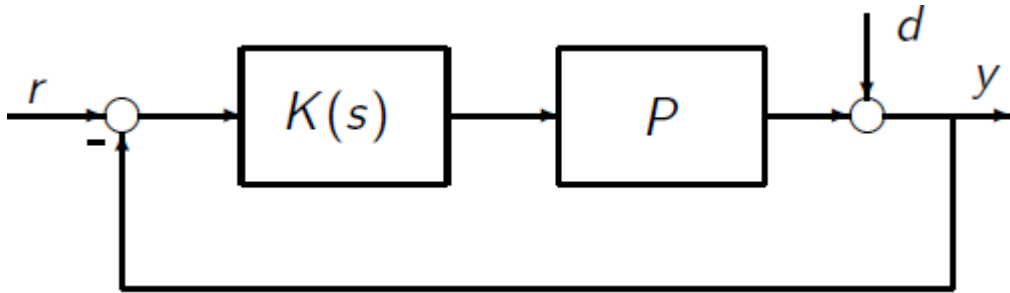
Es esencialmente determinístico, pero hay incertidumbre porque no podemos predecir cuál será la salida.

Linealización, GS, LPV



CA3: Introducción al control robusto

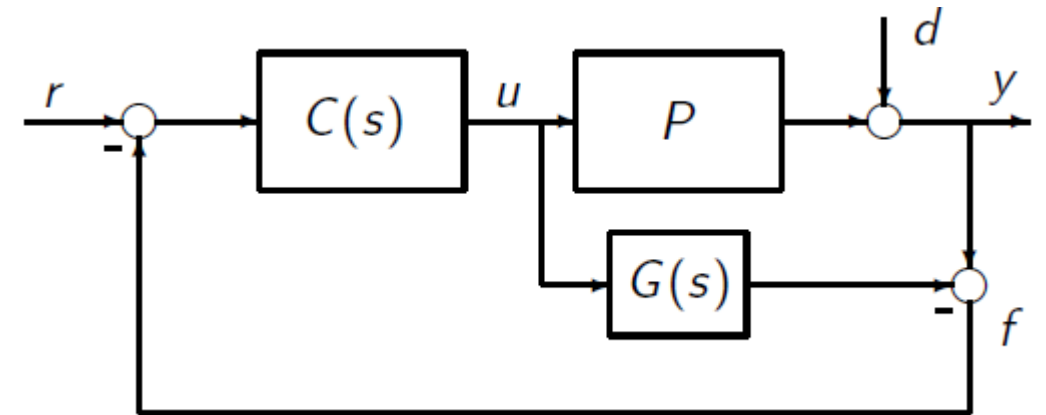
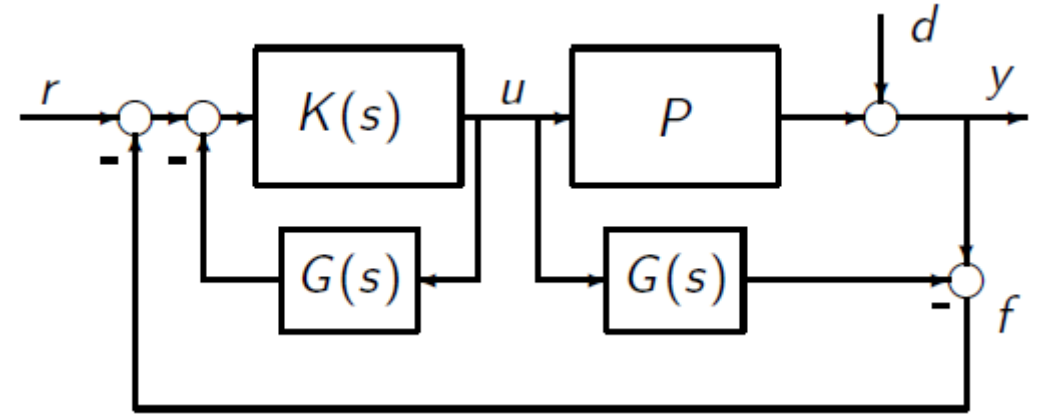
¿Por qué realimentar?



Si además reemplazamos la conexión entre el modelo de la planta y el controlador por

$$C(s) \triangleq K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}$$

IMC



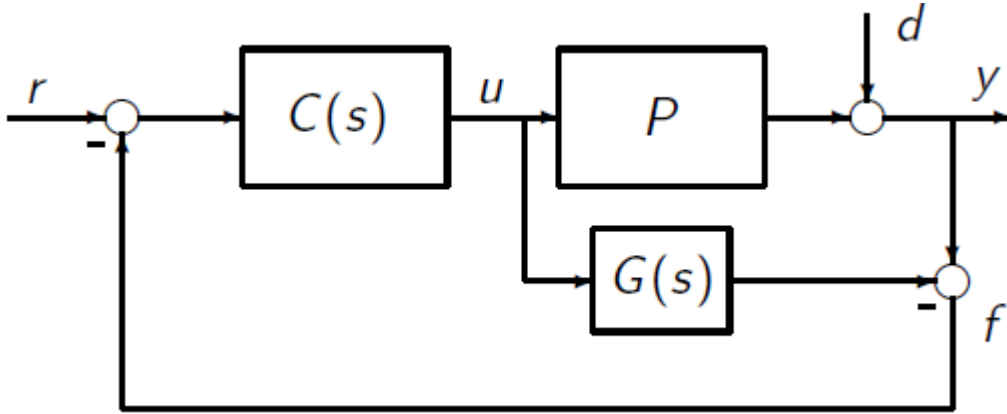
Así la señal de realimentación $f(s)$ es:

$$f(s) = d(s) + [P - G(s)]u(s)$$



CA3: Introducción al control robusto

¿Por qué realimentar? (2)



$$f(s) = d(s) + [P - G(s)]u(s)$$

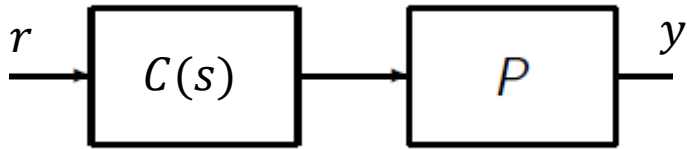
- Si no existen perturbaciones $d(s) = 0$
- Si el modelo matemático del sistema físico es exacto (y/o los parámetros de la planta no varían) $P - G(s) = 0$
 \Rightarrow la señal de realimentación es 0
- Es decir, ante ausencia de perturbaciones y error de modelado no sería necesario realimentar.
- Condición poco realista, siempre van a existir perturbaciones y error de modelado \Rightarrow imprescindible realimentar!



CA3: Introducción al control robusto

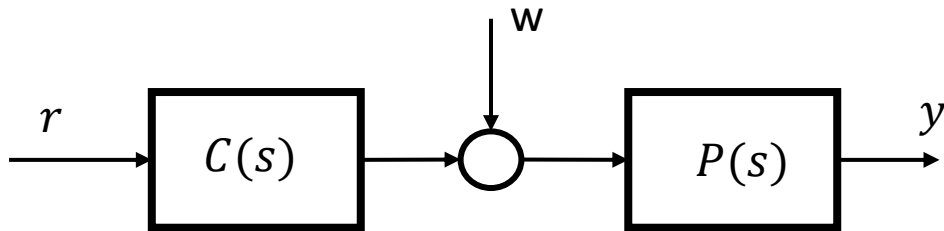
¿Por qué realimentar? (3)

- Incluso en el caso ideal ($f = 0$) no es posible



$$f(s) = d(s) + [P - G(s)]u(s)$$

- A/D, conexiones físicas, etc.
- ¿Qué pasa con las perturbaciones en sistemas inestables o de fase no mínima?



Hace falta trabajar con una descripción de incertidumbre en el modelo y tenerlo en cuenta desde el principio en el proceso de diseño.

Incetidumbre  Realimentación



CA3: Introducción al control robusto

Consideraciones en control clásico y moderno vs robusto

- El primer paso en el diseño de un sistema de control es la obtención de un modelo matemático de una planta física.
- El modelo puede ser:
 - No lineal (mayormente)
 - De parámetros distribuidos
 - De alto orden
 - Se busca obtener modelos simples, que reflejen todas las características intrínsecas del sistema físico.
- Implica error de modelado.
- La teoría de control clásico y moderno consideran perturbaciones conocidas pero suponen desconocido el tiempo de aparición.
- En la teoría de control robusto se supone desconocida la forma pero suponiendo que tienen energía acotada.
- La diferencia fundamental entre la teoría de control clásico y moderno respecto de la teoría de control robusto radica en que esta última incorpora la incertidumbre explícitamente al momento de formular el problema.

La palabra modelo y sistema (sistema físico o planta) no son equivalentes.

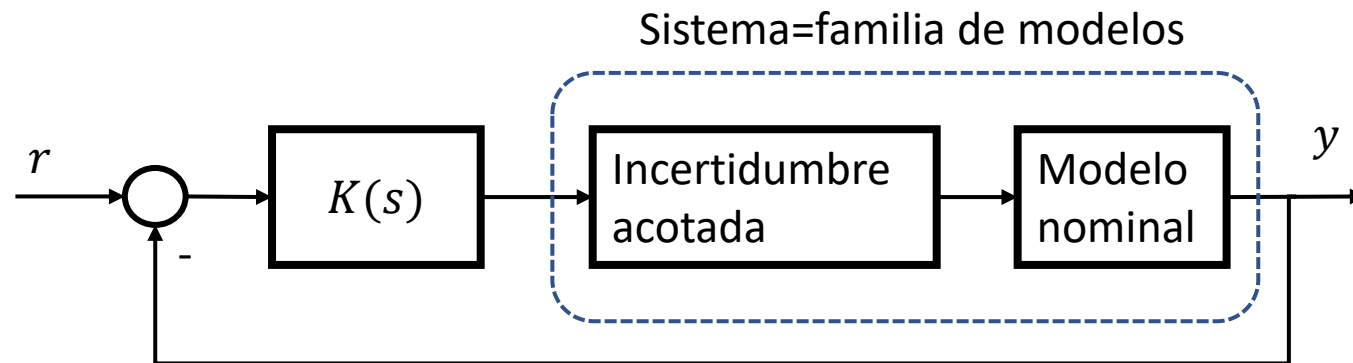


CA3: Introducción al control robusto

Motivación del control robusto

- En la teoría de control robusto el sistema es tratado matemáticamente como un conjunto o una familia de modelos, representada por un modelo nominal $G(s)$ y una incertidumbre acotada.
- Esta incertidumbre puede ser “agregada” al modelo nominal de diferentes formas, llevando a diferentes tratamientos del problema.
- La incertidumbre debe ser siempre acotada. ¿Por qué?

Cuando se controla un sistema se busca que no exista posibilidad de desestabilizarlo. Luego para poder dar garantía de estabilidad, la incertidumbre debe ser acotada.



¿Qué desventaja puede tener?



CA3: Introducción al control robusto

Incertidumbre y perturbaciones

- Perturbaciones

- No sólo se necesitan asumir ciertas propiedades del sistema (NL, TI, etc.) para obtener un modelo lo más simple posible sino que también se tiene que hacer alguna hipótesis de la perturbaciones aplicadas al sistema por el ambiente.
- Mientras menos se asuma de la naturaleza de la perturbación mayor es la posibilidad de producir un control efectivo. Lo único que se asume es que sean de energía acotada (información del espectro).

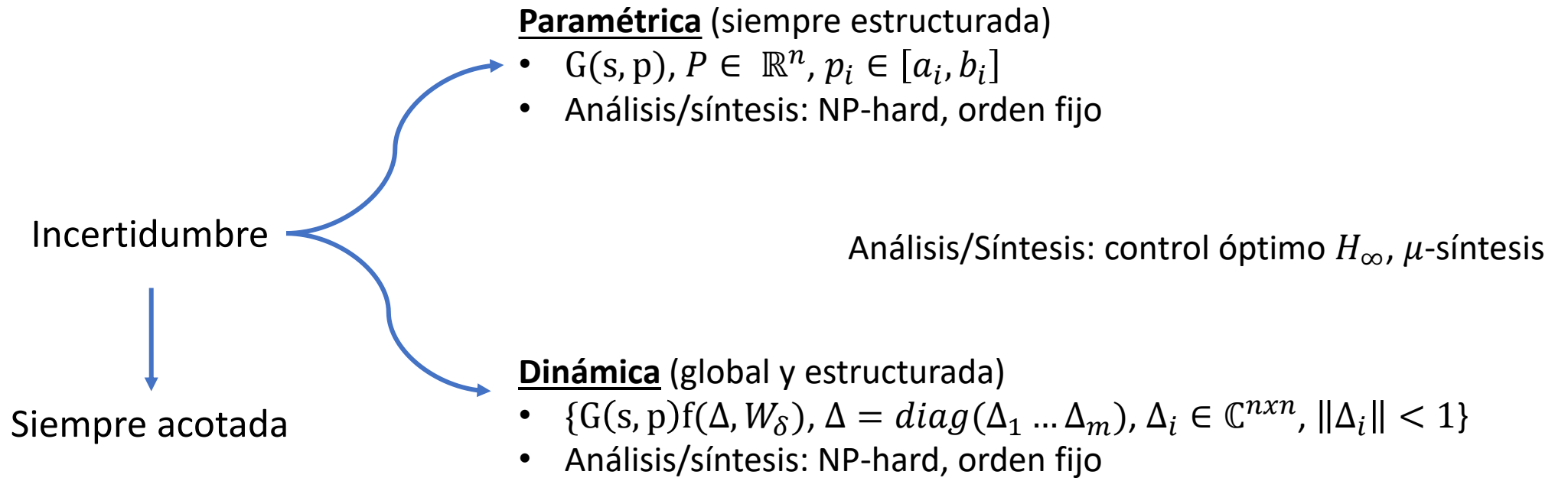
- Incertidumbre

- Debido a las suposiciones realizadas en el sistema y a la perturbaciones aparecerá cierto nivel incertidumbre entre el modelo matemático y los resultados experimentales.
- En la fase de simulación, las simplificaciones son realizadas debido a las restricciones computacionales (tiempo, memoria).
- En la fase teórica, las suposiciones que generan incertidumbre son consecuencia de las herramientas matemáticas utilizadas.

El efecto de la incertidumbre debido a modelado y perturbaciones puede ser evaluado separadamente en un lazo de control.

Las perturbaciones no tienen efecto en la estabilidad del lazo, al menos en sistemas lineales, pero sí pueden degradar la performance del sistema.

La incertidumbre del modelo puede tener un efecto crítico en la estabilidad.

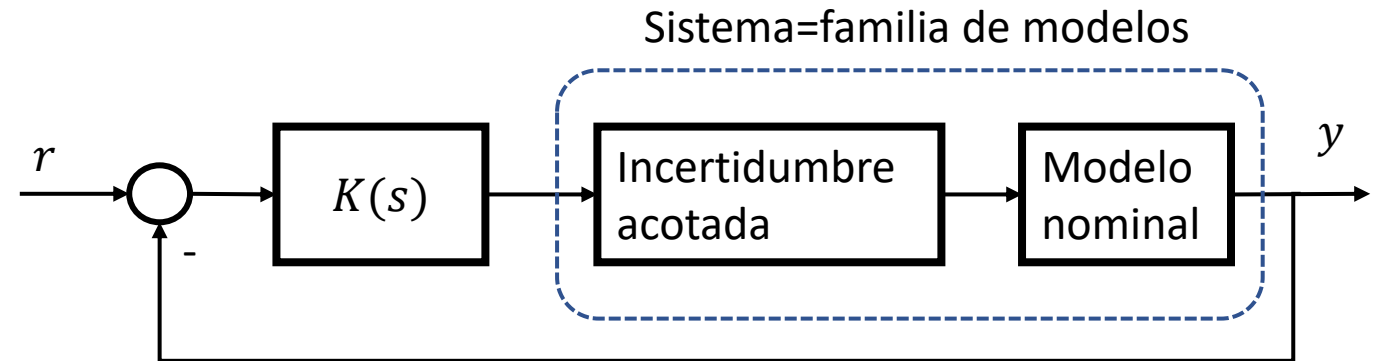




CA3: Introducción al control robusto

Objetivos del control robusto

- El objetivo del control robusto es calcular las condiciones menos conservativas proveyendo certidumbre en la estabilidad y performance de un modelo incierto (familia acotada de modelos) que representa un sistema físico.



Cuando estas propiedades, estabilidad y performance, se refieren al modelo nominal las mismas se denominan nominales.

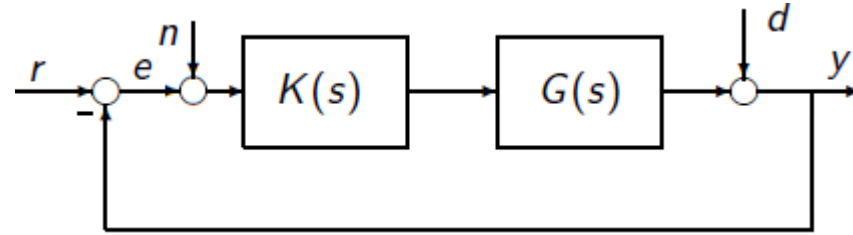
Cuando hacen referencia a la familia completa de modelos o modelo incierto se las conoce como robustas.

Estabilidad nominal y/o robusta
Performance nominal y/o robusta



CA3: Introducción al control robusto

Restricciones del lazo de control



$$y(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}[r(s) + n(s)] + [I + G(s)K(s)]^{-1}d(s)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) = S(s)[r(s) - d(s)] - T(s)n(s)$$

Definición

$$S(s) \triangleq [I + G(s)K(s)]^{-1}: \text{sensibilidad}$$

$$T(s) \triangleq G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}: \text{sensibilidad complementaria}$$

El nombre de complementaria surge de que

$$T(s) + S(s) = 1 \text{ para sistemas SISO}$$

$$T(s) + S(s) = I \text{ para sistemas MIMO}$$



Introducción al control robusto

Índice

- Introducción – Varios
- **Sistemas bien planteados**
- Incertidumbre y estabilidad
- Performance
- Loopshaping
- Ejemplo de aplicación realista

Tema 01

V1 - 2023

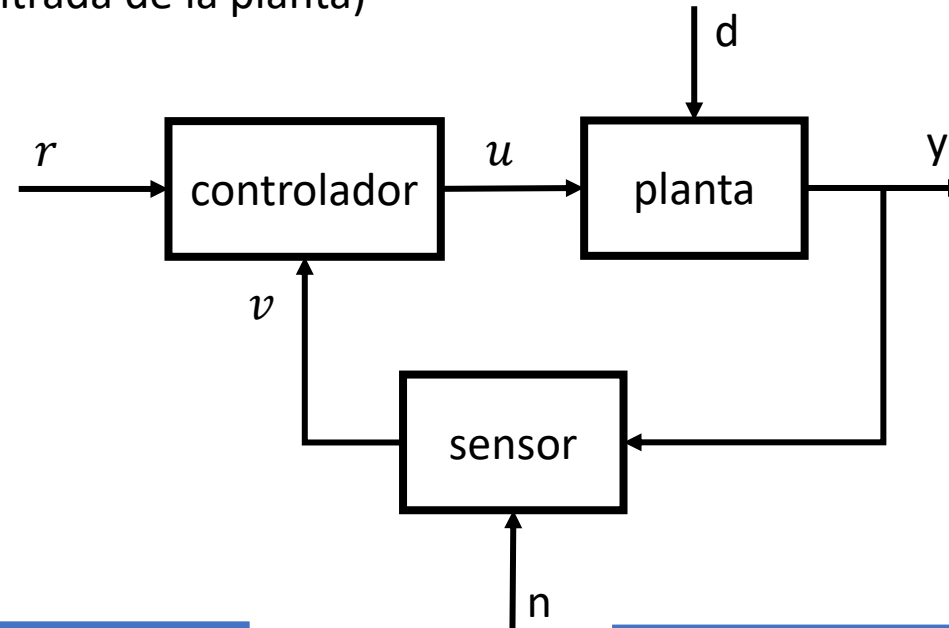


CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados (1)

- El lazo de control más elemental consta de tres componentes:
 - La planta (el objeto a ser controlado)
 - Sensor (para medir la salida de plantas)
 - Controlador (para generar la entrada de la planta)

Usualmente los actuadores se encuentran incorporados en la planta.



r : referencia
 v : salida del sensor
 u : señal de control
 d : perturbación externa
 y : salida
 n : ruido de medición

En general el objetivo es que y aproxime alguna función específica r , bajo la presencia de perturbaciones d , ruido de medición n e incertidumbre en el modelo de la planta. También interesa limitar el “tamaño” u .

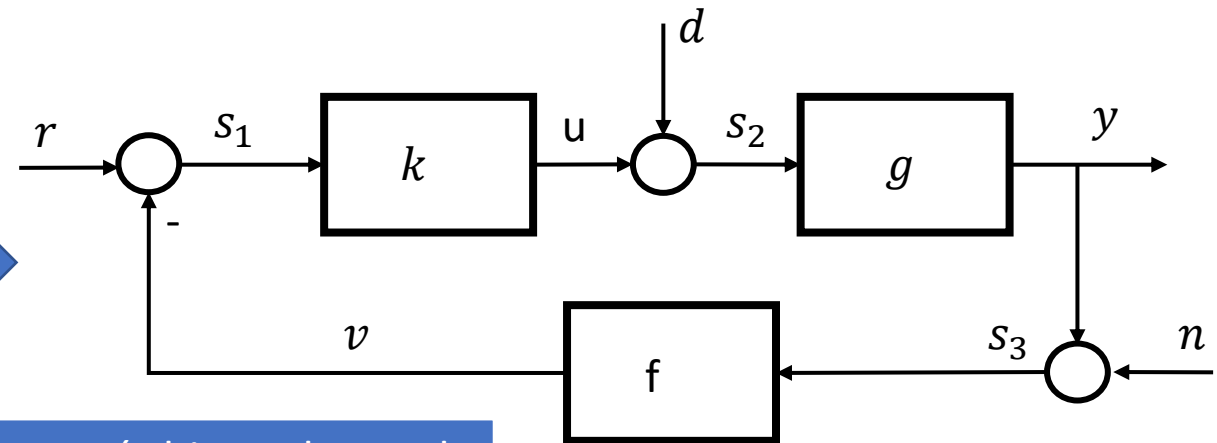
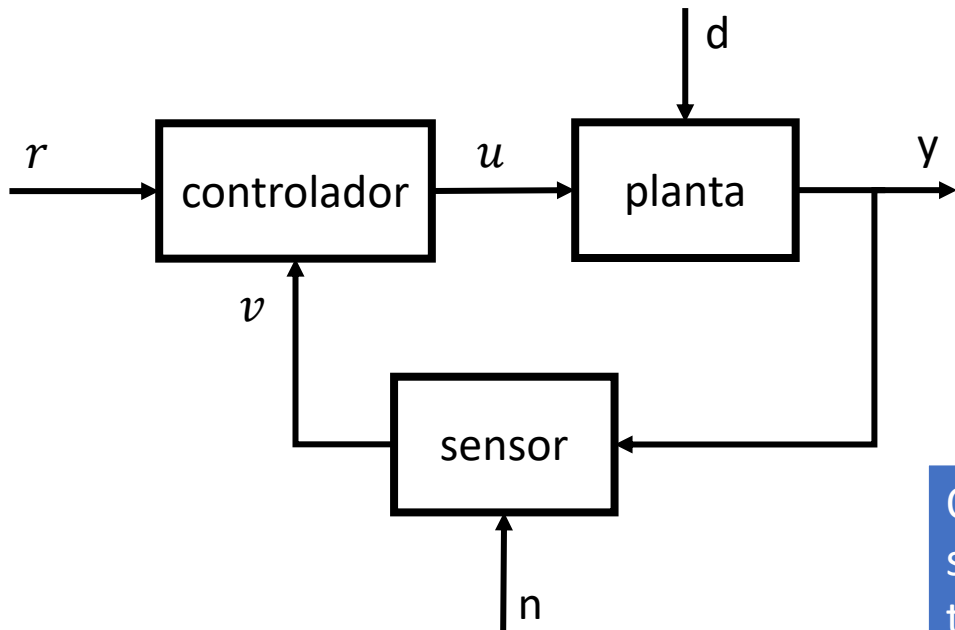
Cada componente tiene dos entradas (una interna al sistema y de la provenientes de afuera) y una salida.



CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados (2)

- Asumiendo que la salida de cada componente son funciones lineales de la suma (o diferencia) de sus entradas



$$\begin{aligned}y &= g(d + u) \\v &= f(y + n) \\u &= k(r - v)\end{aligned}$$

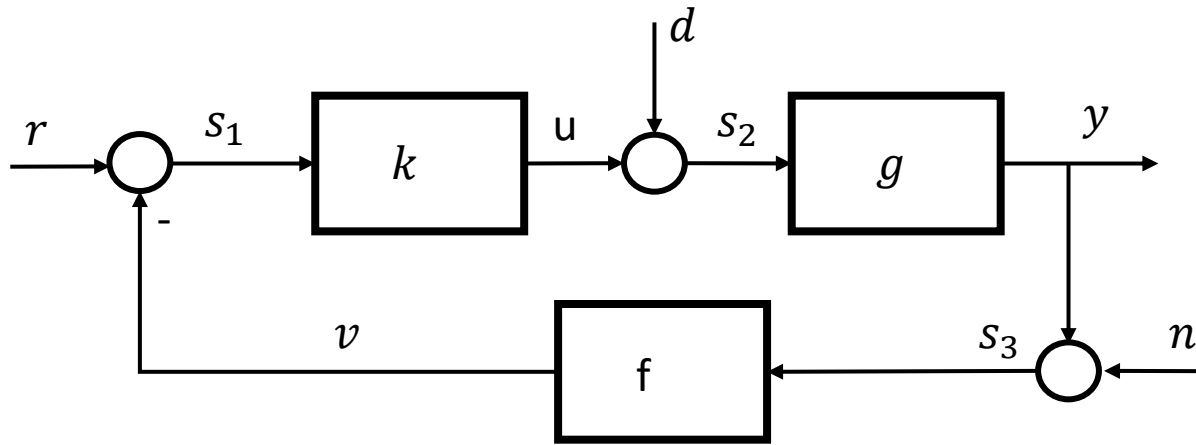
Que el sistema esté bien planteado significa que todas las funciones de transferencia del lazo cerrado existen.

$$\begin{aligned}s_1 &= r - fs_3 \\s_2 &= d + ks_1 \\s_3 &= n + gs_2\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & f \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$



CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados (3)



$$\begin{aligned} s_1 &= r - fs_3 \\ s_2 &= d + ks_1 \\ s_3 &= n + gs_2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & f \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

- El sistema se dice bien planteado si:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & -g & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + gkf} \begin{bmatrix} 1 & -gf & -f \\ gk & 1 & -kf \\ gk & g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

¿Qué condición podemos obtener?

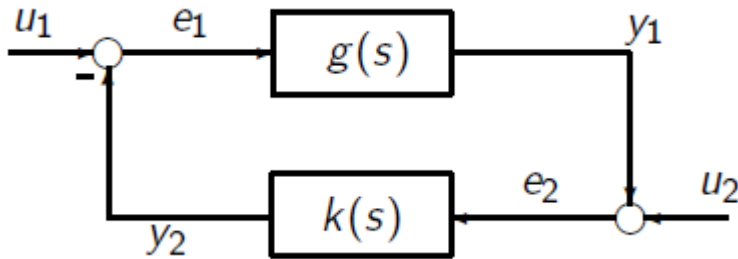
El sistema está automáticamente bien planteado si g , k y f son propias y una de ellas es estrictamente propia. En general g es estrictamente propia.



CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados (4)

- Considerando el sensor integrado en la planta



Existen las siguientes relaciones entre
las entradas $[u_1(s) \ u_2(s)]'$
las salidas $[y_1(s) \ y_2(s)]'$
y los errores $[e_1(s) \ e_2(s)]'$

$$y_1(s) = g(s)e_1(s) \quad e_1(s) = u_1(s) - y_2(s)$$

$$y_2(s) = k(s)e_2(s) \quad e_2(s) = u_2(s) + y_1(s)$$

Definición

El lazo de realimentación de la figura se dice que está bien planteado si y sólo si todas las posibles transferencias entre las entradas u_1 y u_2 y todas las salidas y_1 , y_2 , e_1 y e_2 existen y son propias.

Es suficiente verificar sólo hacia $[e_1(s) e_2(s)]'$ o $[y_1(s) y_2(s)]'$



CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados (5)

$$y_1(s) = g(s)e_1(s) \quad e_1(s) = u_1(s) - y_2(s)$$

$$y_2(s) = k(s)e_2(s) \quad e_2(s) = u_2(s) + y_1(s)$$

Escribiendo de forma compacta la relación entre las entradas u_i y los errores e_i , se define la matriz $P(s)$

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k(s) \\ -g(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} \triangleq P(s) \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}$$

Luego para tener salidas e_1 y e_2 bien definidas, es necesario que la inversa de $P(s)$ exista y sea propia. De otra forma, las salidas no estarán bien definidas o podrían no ser propias.

Lema

$$g(s) = \begin{bmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{bmatrix} \quad k(s) = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

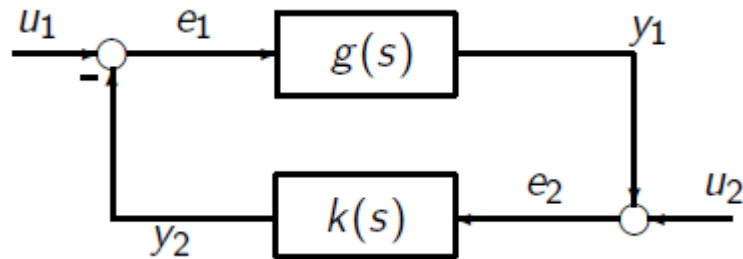
- Las siguientes condiciones son equivalentes:
 1. El sistema está bien planteado
 2. $P(s)$ tiene inversa propia
 3. $1 + g(s)k(s)$ tiene inversa propia
 4. $1 + D_g D_k \neq 0$

Prerrequisito (matemático) para cualquier problema de control donde se quiera definir estabilidad y performance.



CA3: Introducción al control robusto

Sistemas bien planteados – Ejemplo



- Tarea

$$g(s) = \frac{s + a}{s + b} \quad k(s) = \frac{s + c}{s + d}$$

$$g(s) = \frac{1 - s}{s + 2} \quad k(s) = \frac{s + 7}{s + 5}$$

La función de transferencia entre u_2 y e_2 es

$$[1 + g(s)k(s)]^{-1} = \frac{(s + 2)(s + 5)}{(s + 17)}$$



Introducción al control robusto

Índice

- Introducción – Varios
- Sistemas bien planteados
- **Incertidumbre y estabilidad**
- Performance
- Loopshaping
- Ejemplo de aplicación realista

Tema 01

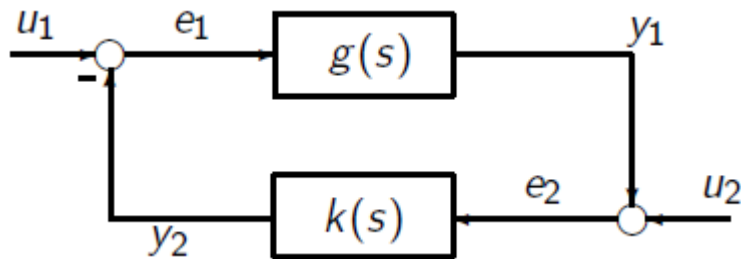
V1 - 2023



CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad interna nominal.

- Trataremos de distinguir estabilidad entrada-salida de estabilidad interna.



- Se puede demostrar que la estabilidad de algún par entrada salida (todos los polos correspondientes a esa función de transferencia pertenecientes al SPI abierto del plano complejo, C_-) no implica que todos los pares entrada salida sean estables.
- Debemos garantizar que todos los posibles pares entrada salida sean estables.



CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad interna nominal - Ejemplo

$$g(s) = \frac{s+3}{(s-2)(s+5)} \quad k(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

- La función de transferencia entre u_1 e y_2 es

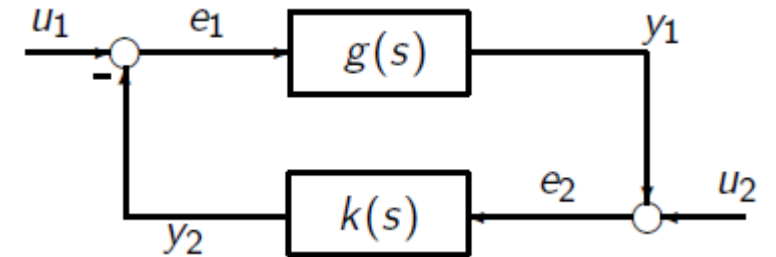
$$\frac{y_2}{u_1} = \frac{g(s)k(s)}{(1 + g(s)k(s))} = \frac{(s+3)}{(s^2 + 7s + 8)} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \approx -5.56 \\ \lambda_2 \approx -1.43 \end{array}$$

Estable

- La función de transferencia entre u_1 e y_1 es

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{g(s)}{(1 + g(s)k(s))} = \frac{(s+3)(s+1)}{(s-2)((s+5)(s+1) + (s+3))}$$

Inestable



Esto se debe a la cancelación entre el polo inestable de la planta y el cero de no mínima fase del controlador.

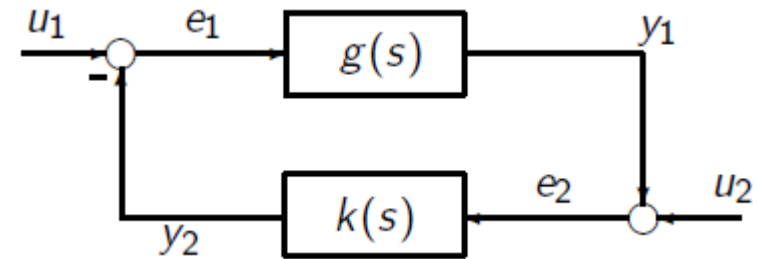


CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad interna nominal - Definición

Definición

El lazo de realimentación de la figura es internamente estable si y sólo si todas las funciones de transferencias obtenidas de todos los pares entrada-salida tienen sus polos en \mathbb{C}_- .



Lema

El lazo de realimentación de la figura es internamente estable si y sólo si $[1 + g(s)k(s)]^{-1}$ es estable y no hay cancelaciones de polos y ceros en el semiplano derecho complejo entre la planta y el controlador.

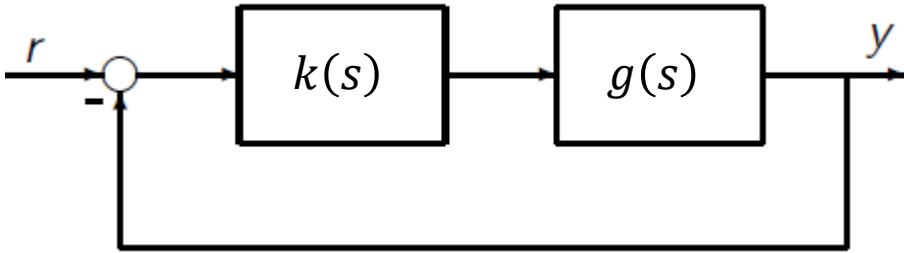
Si bien no explícitamente, el concepto de estabilidad interna ha existido por varios años.

El concepto de no cancelación en el SPD se puede extender al SPI.



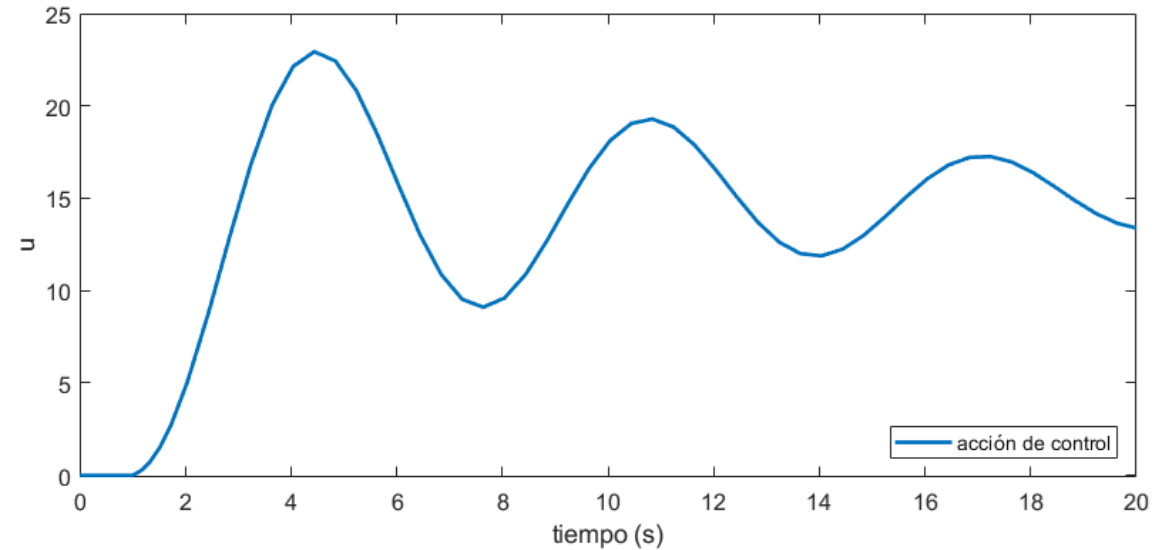
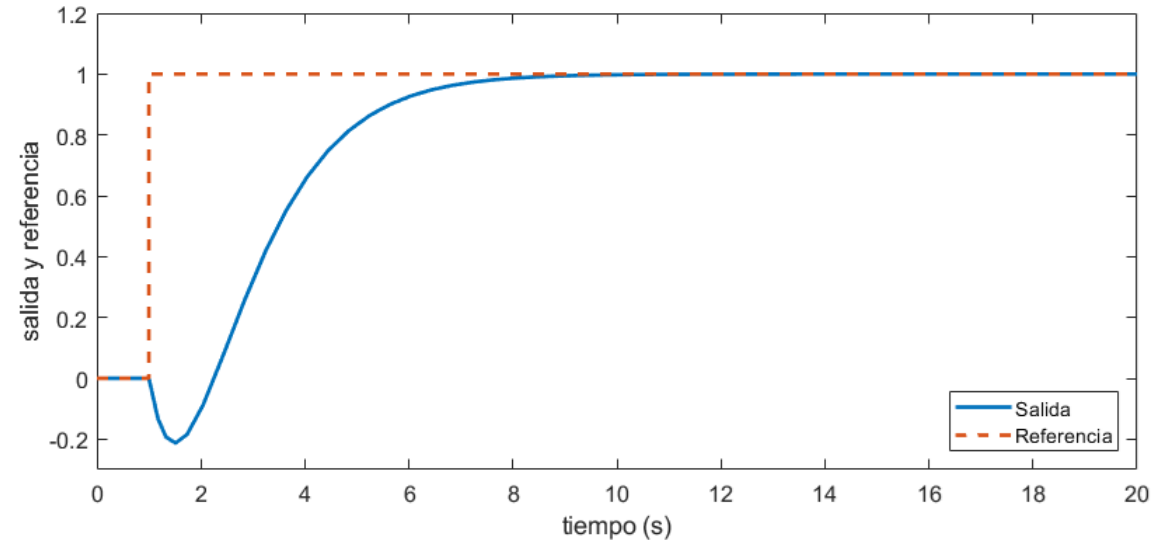
CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad interna nominal – Cancelación polo estable



$$g(s) = \frac{(1-s)(s^2 + 0,2s + 1)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$k(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{s(s^2 + 0,2s + 1)}$$

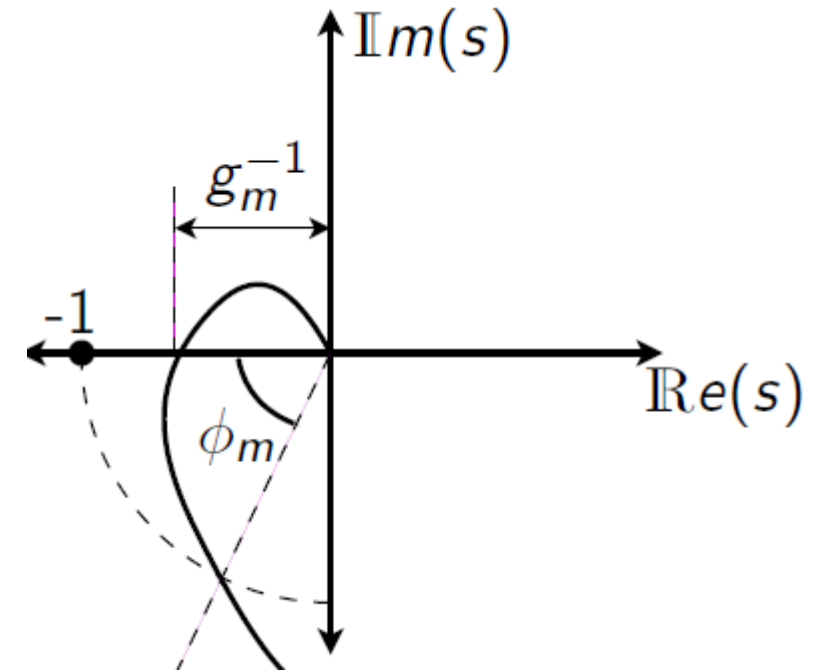




CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Control clásico

- Una medida para evaluar la robustez en el diseño clásico de controladores es el margen de fase φ_m y el margen de ganancia g_m .
- “Robustez” implica la habilidad del sistema para responder adecuadamente, en términos de performance y estabilidad, aún cuando el modelo de lazo abierto $L(s) = g(s)k(s)$ usado en el diseño difiera levemente del sistema físico, debido a la existencia de incertidumbre.



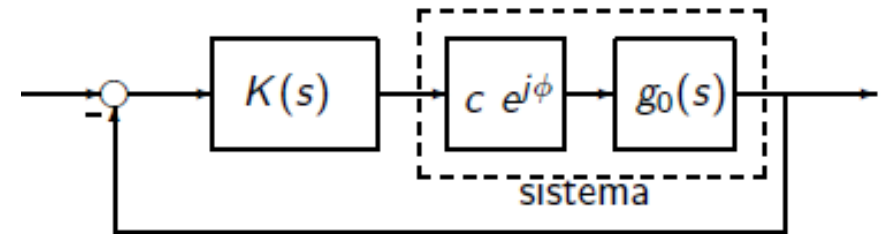
El análisis por separado no garantiza estabilidad robusta.



CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Control robusto

- Para la teoría de control robusto, estabilidad robusta significa estabilidad de todos los posibles modelos que son descriptos por la combinación:
 - del modelo nominal $g_0(s)$
 - y la incertidumbre $\delta = ce^{j\phi}$,
donde $I_c = [c_{min}, c_{max}]$ y $I_\phi = [\phi_{min}, \phi_{max}]$
- Este conjunto de modelos de planta pueden ser escritos como una familia de modelos

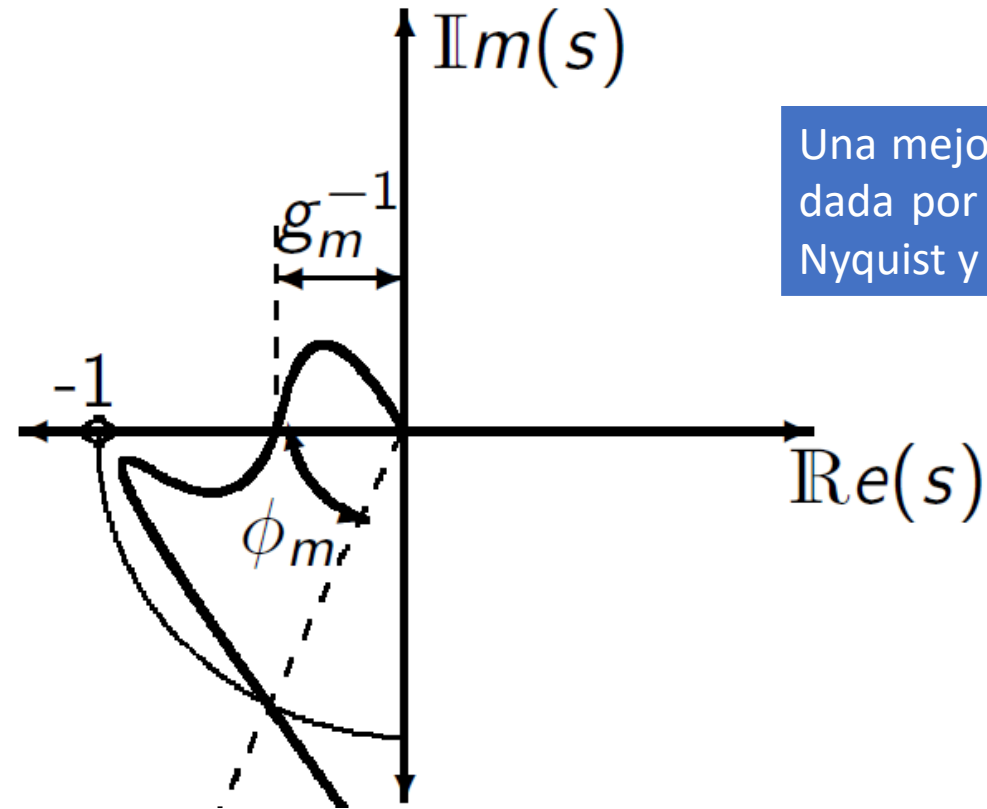


$$\mathcal{G} \triangleq \{g(s) : g(s) = g_0[ce^{j\phi}], c \in I_c, \phi \in I_\phi\}$$



CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Ejemplo 1



Una mejor medida de estabilidad robusta estaría dada por la distancia mínima entre diagrama de Nyquist y el punto crítico -1.

Tanto ϕ_m tiene como g_m tienen valores adecuados, siempre y cuando la perturbación se realice en una variable la vez. Sin embargo, con una pequeña perturbación simultánea en ambas variables se consigue fácilmente que el diagrama de Nyquist encierre el punto crítico -1.

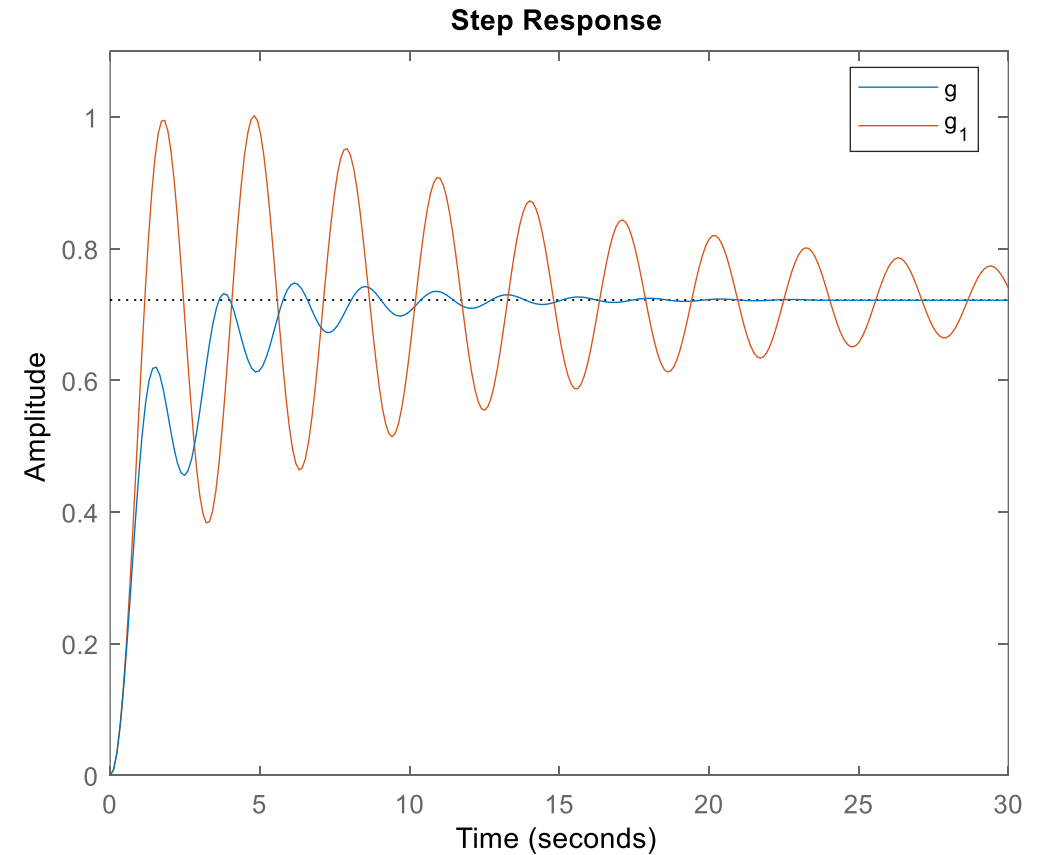
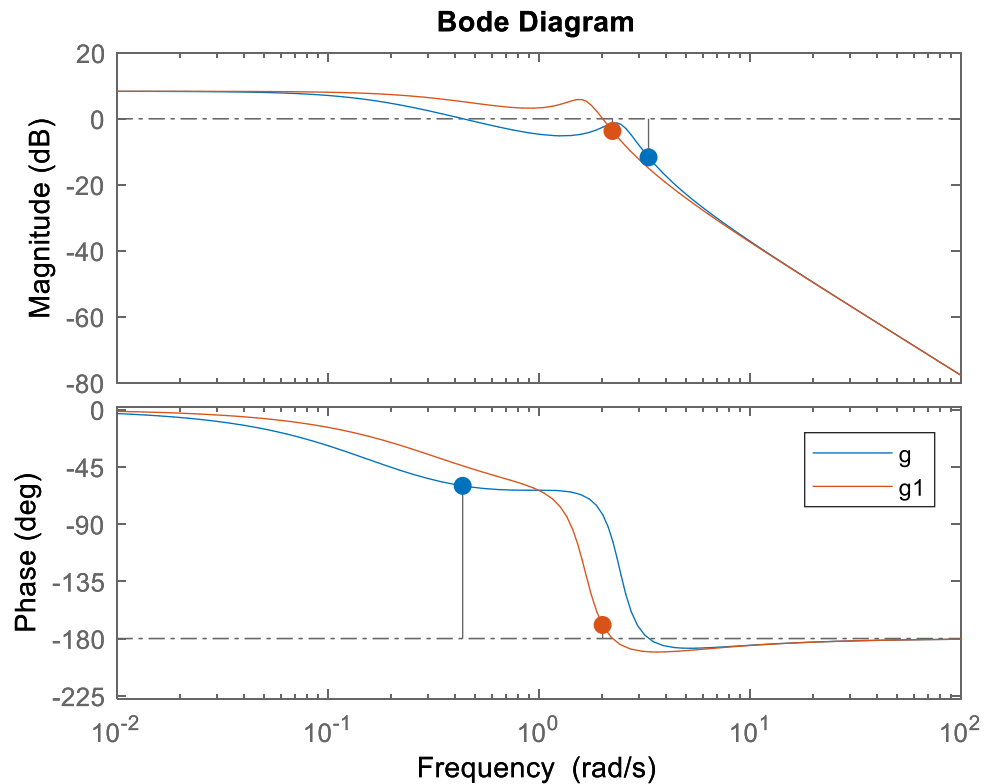


CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Ejemplo 2

$$g = \frac{1.3(s + 2)}{s^3 + s^2 + 6s + 1}$$

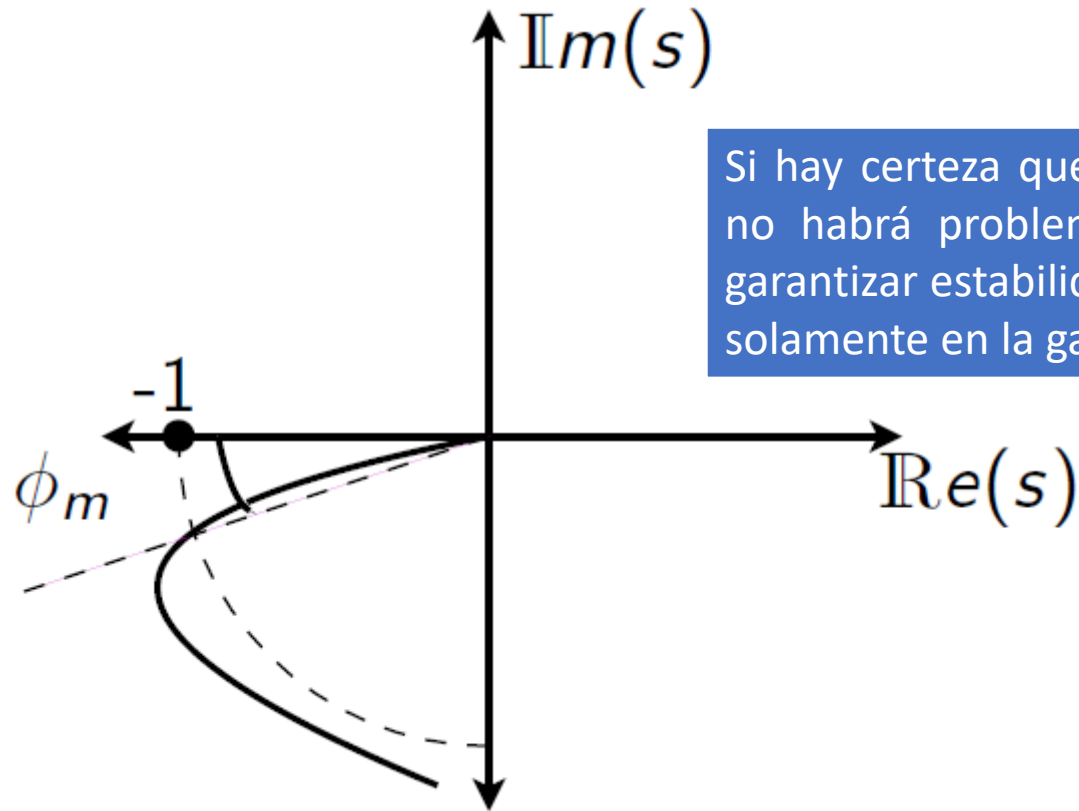
$$g_1 = \frac{1.3(s + 2)}{s^3 + s^2 + 3s + 1}$$





CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Ejemplo 3



Si hay certeza que la incertidumbre sólo estará en la ganancia no habrá problemas de estabilidad. En este caso se puede garantizar estabilidad robusta debido a que la perturbación será solamente en la ganancia.

En este caso el margen de ganancia g_m tiende a infinito y el margen de fase ϕ_m es pequeño. De haber de perturbaciones en la fase, una pequeña puede inestabilizar el lazo de control.



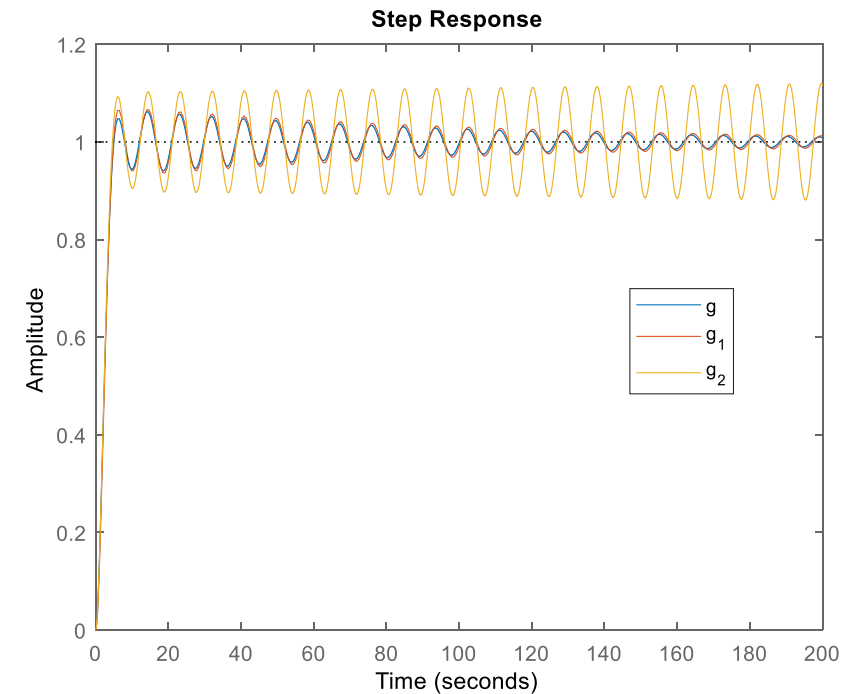
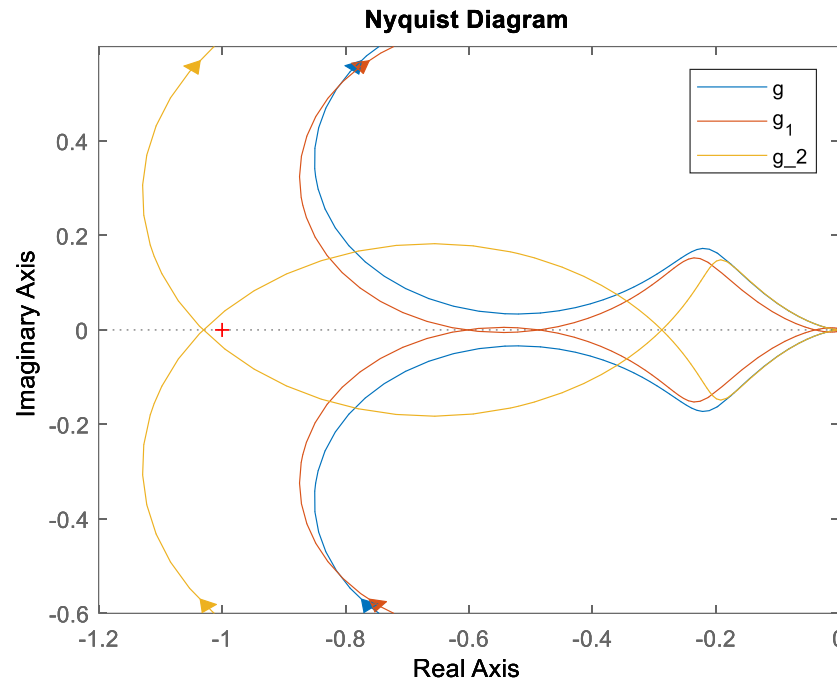
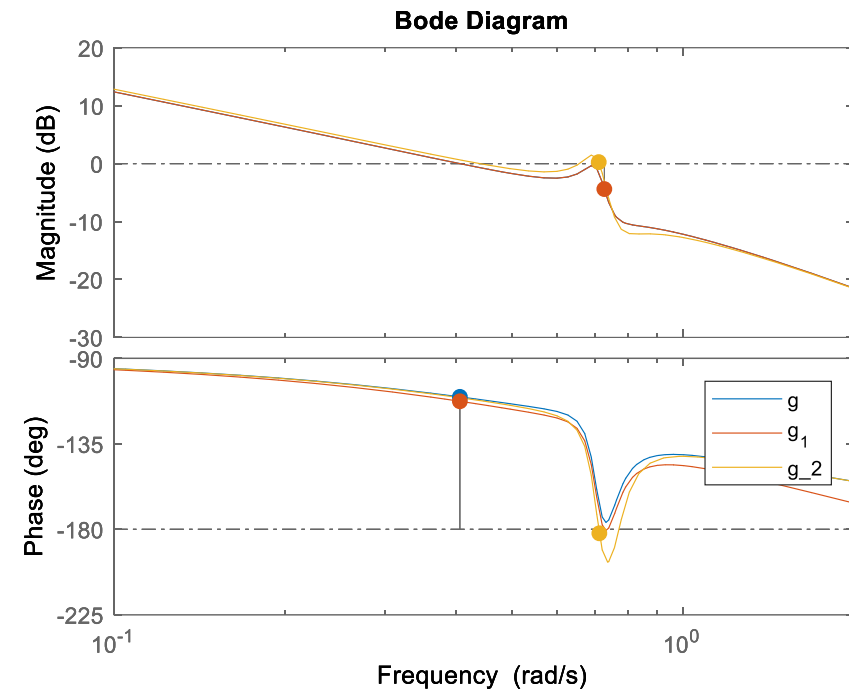
CA3: Introducción al control robusto

Márgenes de fase y de ganancia – Ejemplo 4

$$g = 0.38 \frac{s^2 + 0.1s + 0.55}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}$$

$$g_1 = g e^{-0.1s}$$

$$g_2 = 0.38 \frac{s^2 + 0.1s + 0.58}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}$$





CA3: Introducción al control robusto

Incertidumbre dinámica global

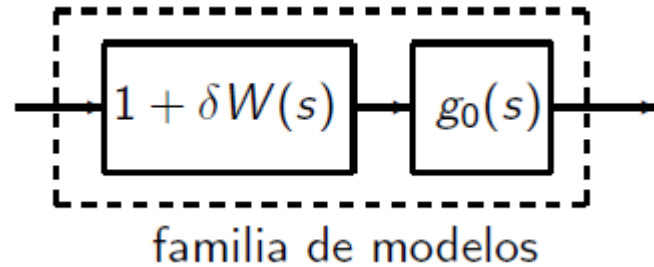
- Incertidumbre dinámica del sistema cubierta globalmente por el modelo. Puede ser utilizada, por ejemplo en:
 - el orden de la ecuación diferencial que describe la planta es desconocido
 - restricciones en el tiempo de cómputo (control de procesos rápidos en tiempo real)
 - describir errores de linealización
 - sistemas de dimensión infinita (descritos por ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones con retardo de tiempo)
- El enfoque adoptado en la teoría de control robusto consiste en describir un sistema físico por medio de un modelo de incertidumbre y diseñar un controlador que garantice ciertas propiedades para toda la familia de modelos.
- En la teoría de control clásico y moderno el controlador es diseñado teniendo en cuenta el modelo nominal de la planta.



CA3: Introducción al control robusto

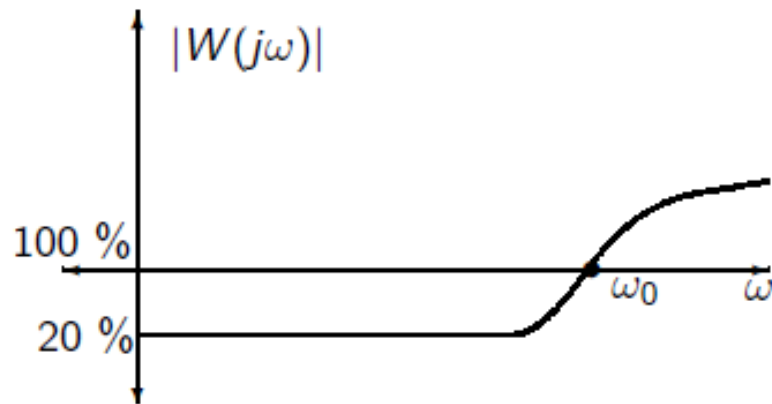
Incertidumbre dinámica global multiplicativa

- Modelo incierto con incertidumbre dinámica global multiplicativa:



$$\mathcal{G} = \{g(s) : g(s) = g_0[1 + \delta W(s)], \delta \in \mathcal{C}, |\delta| < 1\}$$

- La función de peso $W(s)$ representa la “dinámica” de la incertidumbre, o en otras palabras su “distribución en frecuencia”



- La familia de modelos \mathcal{G} está caracterizada por:
 - planta nominal $g_0(s)$
 - función de peso fija $W(s)$
 - incertidumbre δ acotada.
- El modelo nominal corresponde a $\delta = 0$.
- Sin pérdida de generalidad $|\delta| \leq 1$.

Para garantizar la estabilidad del sistema a lazo cerrado, el controlador debe hacer que la función nominal de lazo $g_0(i\omega)k(i\omega)$ sea suficientemente chica a frecuencias por encima de ω_0 para garantizar que el diagrama de Nyquist no encierre el punto crítico independientemente de la fase de $g(i\omega)k(i\omega)$.



CA3: Introducción al control robusto

Incertidumbre dinámica global multiplicativa

- Suponga un modelo nominal g_0 y una familia de modelos \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = g_0(1 + \delta W(s))$$

$W(s)$: función de peso
 δ : incerteza $\|\delta\|_\infty \leq 1$

$$\frac{\mathcal{G}}{g_0} - 1 = \delta W(s) \quad \text{Dado que } \|\delta\|_\infty \leq 1 \quad \left| \frac{\mathcal{G}(j\omega)}{g_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega$$

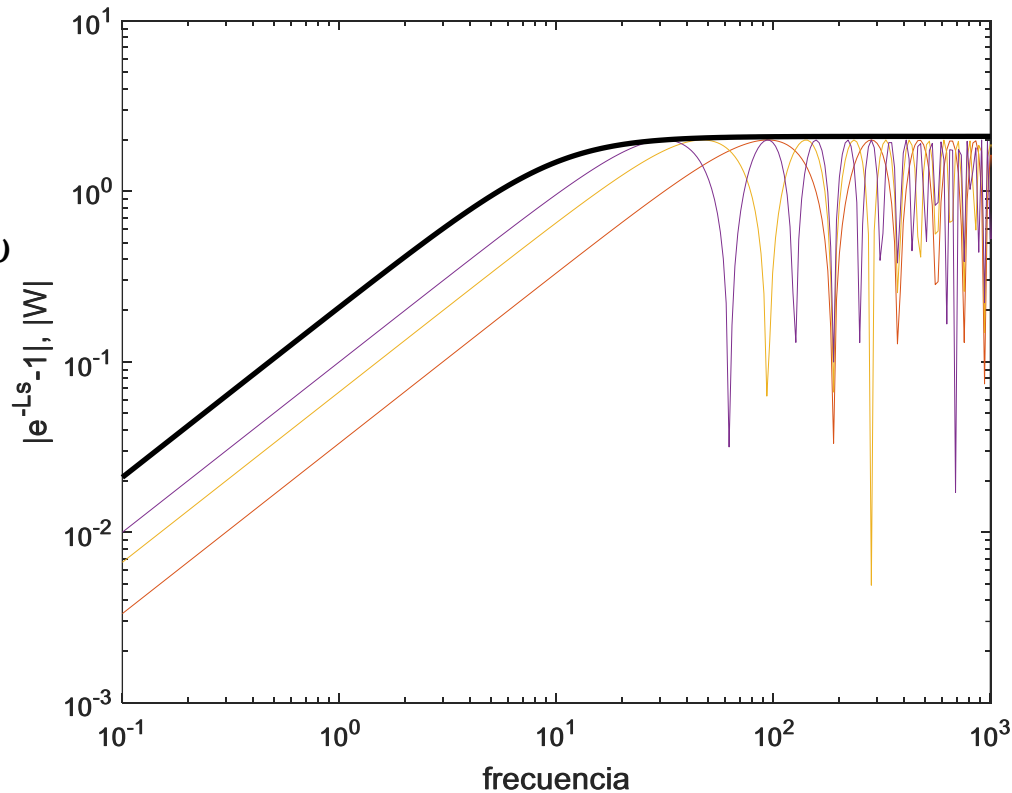
$|W(j\omega)|$ provee el perfil de incertidumbre.

- Ejemplo**

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s^2} e^{-s\tau} \quad 0 \leq \tau \leq 0,1$$

Podemos tratar el retardo como perturbación multiplicativa, así:

$$\left| \frac{\mathcal{G}(j\omega)}{g_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)| \longrightarrow |e^{-s\tau} - 1| \leq |W(j\omega)|$$



$$W(s) = \frac{0,21s}{0,1s + 1} \quad g_0(s) = \frac{1}{s^2}$$



CA3: Introducción al control robusto

Incertidumbre dinámica global multiplicativa - Ejemplo

$$g_0(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} \quad g_1(s) = \frac{300}{(s+1)(s+3)(s+100)}$$

- Esta familia de plantas se pueden describir utilizando la siguiente familia de modelos

$$\mathcal{G} = \{g(s): g(s) = g_0(s)(1 + \delta W(s)), \quad |\delta| \leq 1\}$$

$$W(s) = \frac{s}{s+100}$$

- $g_1(s)$ se corresponde con $\delta = -1$
- \mathcal{G} también incluye

$$g_2(s) = \frac{6(s+50)}{(s+1)(s+3)(s+100)} \quad \delta = 1$$

De este ejemplo podemos ver que esta descripción puede ser conservadora.

¿Qué se sacrifica?



CA3: Introducción al control robusto

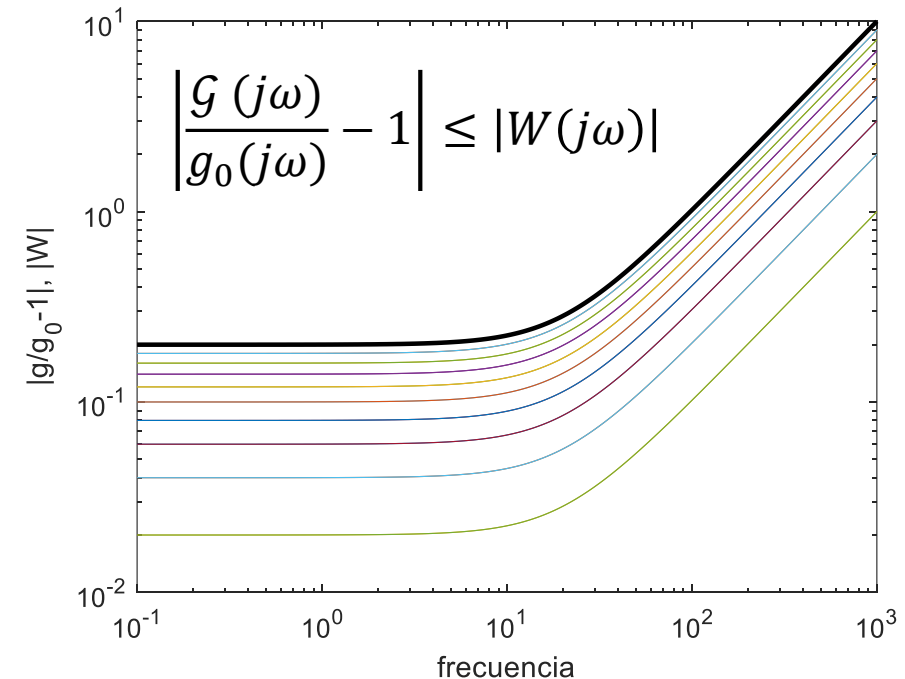
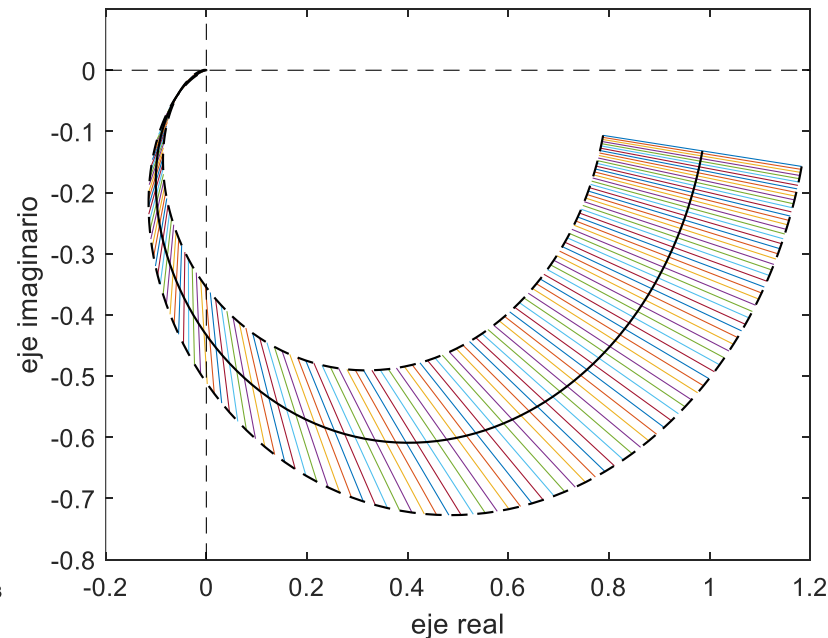
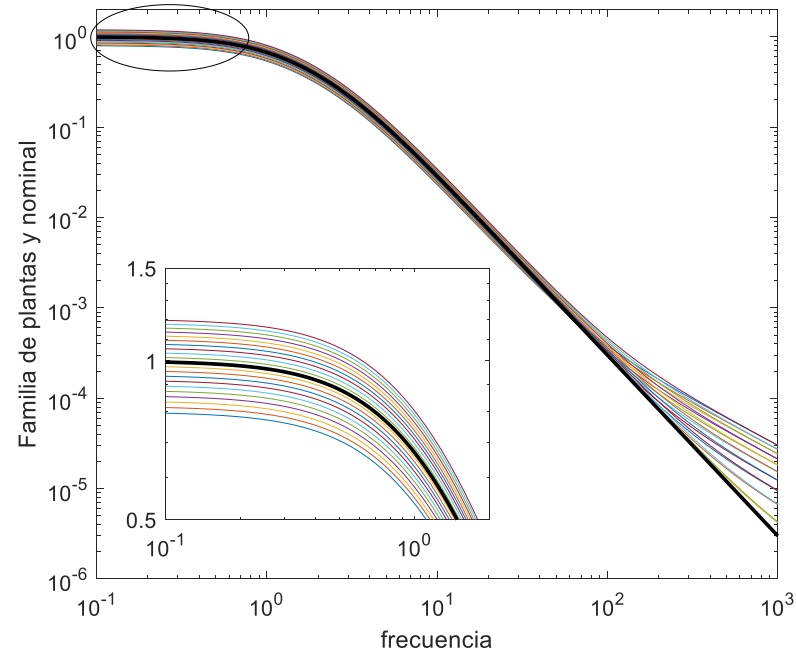
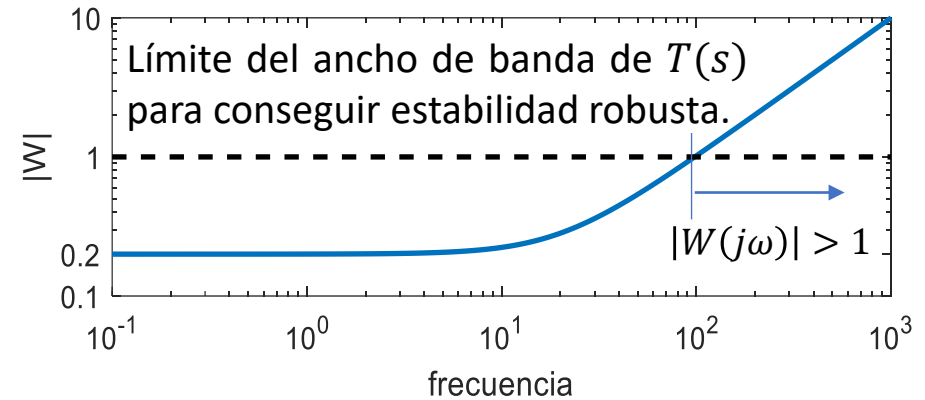
Incertidumbre dinámica global multiplicativa – Ejemplo 2

- Conjunto de modelos con incertidumbre en la dinámica de alta frecuencia en el polinomio numerador

$$G = \frac{3\left(1 + \frac{\delta}{5} + s\left(\frac{\delta}{100}\right)\right)}{(s+1)(s+3)}, \quad |\delta| < 1$$

$$g_0(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

$$W(s) = 0,2(1 + s/20)$$





CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad robusta - Teorema

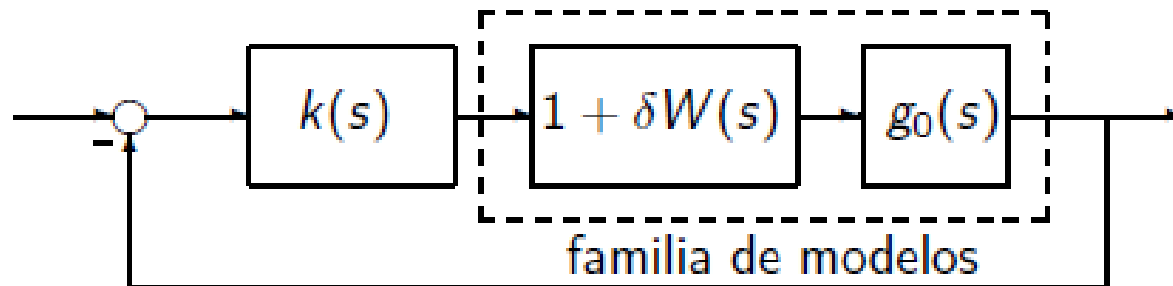
Asumiendo que el modelo $g_0(s)$ es estabilizado internamente por un controlador $k(s)$, todos los miembros de la familia \mathcal{G} serán estabilizados internamente por el mismo controlador si y sólo si se cumple la siguiente condición:

$$\|T(s)W(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{j\omega} |T(j\omega)W(j\omega)| \leq 1$$

con

$$T(s) \triangleq g_0(s)k(s)(1 + g_0(s)k(s))^{-1}$$

La noción de robustez requiere un controlador, un conjunto de plantas y alguna característica del sistema.

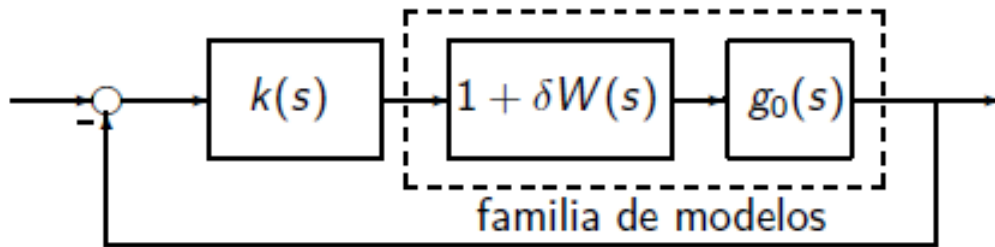




CA3: Introducción al control robusto

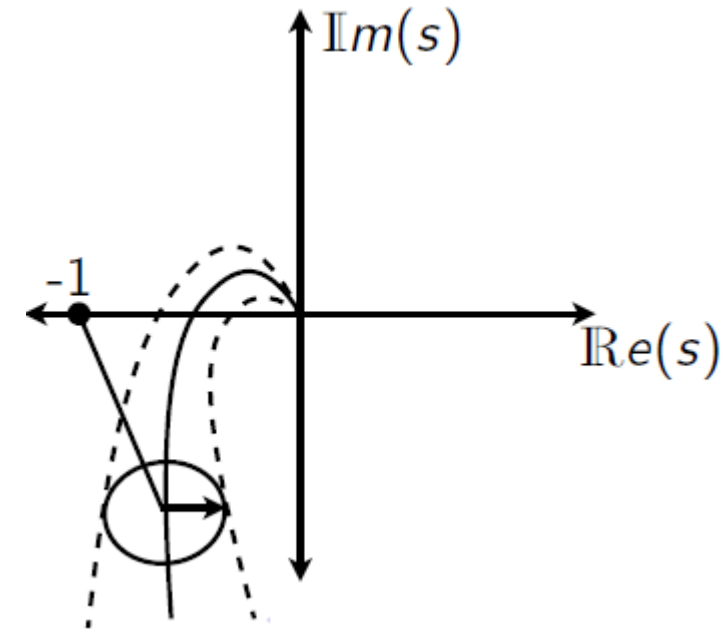
Estabilidad robusta – Interpretación gráfica

$$\|T(s)W(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{j\omega} |T(j\omega)W(j\omega)| \leq 1 \longrightarrow |1 + g_0(s)k(s)| \geq |g_0(s)k(s)W(s)|, \quad \forall s = j\omega$$



$$z(j\omega) = g_0(j\omega)k(j\omega) + g_0(j\omega)k(j\omega)W(j\omega)\delta, \quad \delta \in \mathbb{C}, \quad |\delta| < 1$$

disco, centrado en $g_0(j\omega)k(j\omega)$ con radio $r = |g_0(j\omega)k(j\omega)W(j\omega)|$



La frecuencia a la cual $|W(j\omega_*)| = 1$ corresponde al límite para el cual existe un 100% de incertidumbre en el modelo de la planta. Así, otra interpretación de $\|T(s)W(s)\|_{\infty} \leq 1$ es que la frecuencia ω_* es el límite superior para el ancho de banda de la función de sensibilidad complementaria $T(S)$. A frecuencias por encima de ω_* , la ganancia $|T(S)|$ debe ser menor que 1 para conseguir estabilidad robusta.

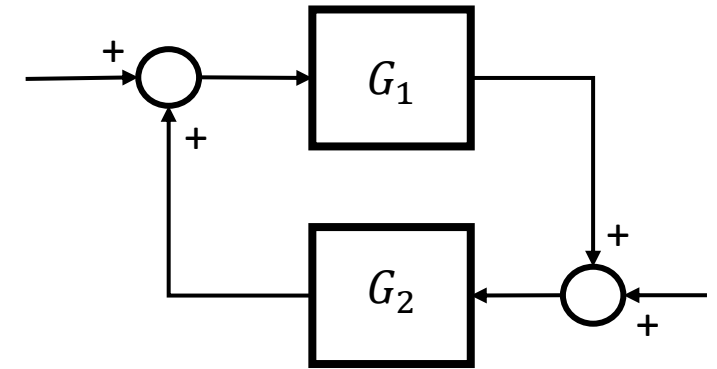
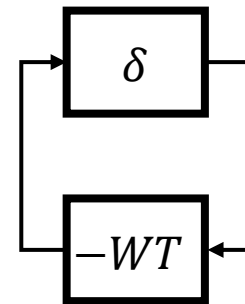
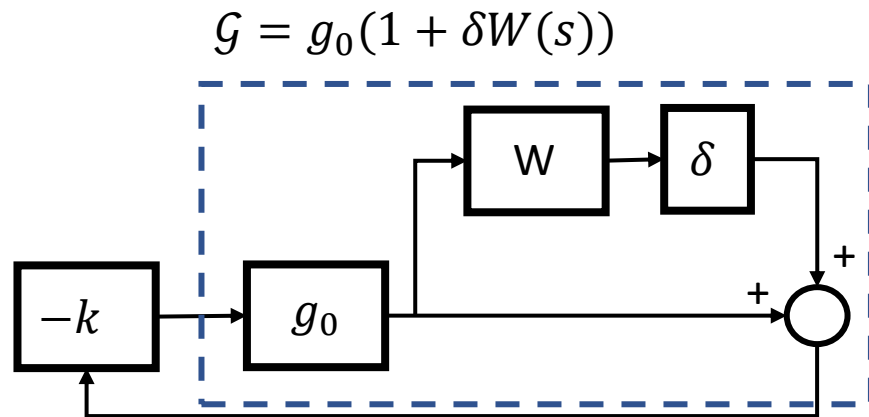


CA3: Introducción al control robusto

Teorema de la pequeña ganancia

- En general provee una condición suficiente de estabilidad y por lo tanto es potencialmente conservador.
- Es aplicable a operadores generales.

Ejemplo



G_1 y G_2 : matrices funciones de transferencia LTI

Si $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son estables, el sistema a lazo cerrado es internamente estable si

$$\|G_1 G_2\|_{\infty} < 1 \quad \text{y} \quad \|G_2 G_1\|_{\infty} < 1$$

$$\|-\delta W T\|_{\infty} < 1 \rightarrow \|W T\|_{\infty} < 1$$

$$\|T(s)W(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{j\omega} |T(j\omega)W(j\omega)| \leq 1$$



CA3: Introducción al control robusto

Otras descripciones de incertidumbre

- Se pueden formular distintos tipos de incertidumbre dinámica:

Aditiva $\mathcal{G}_a = \{g_0 + \delta W_a(s), |\delta| < 1\}$

Cociente $\mathcal{G}_q = \{g_0[1 + \delta W_q(s)]^{-1}, |\delta| < 1\}$

Inversa $\mathcal{G}_i = \{g_0[1 + \delta W_i(s)g_0(s)]^{-1}, |\delta| < 1\}$

El tipo de descripción de incertidumbre que combina información de diferentes porciones de la planta y adopta diferentes descripciones de incertidumbre para cada parte se conoce como incertidumbre dinámica estructurada.

Depende de la aplicación:

- Aditiva: más adecuada cuando se quiere describir un modelo de mayor orden por uno de menor orden.
- Multiplicativa: más adecuada para describir la incertidumbre en la ubicación de los ceros.
- Cociente: es la menos conservadora para describir la incertidumbre en los polos de lazo abierto.



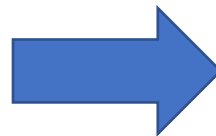
CA3: Introducción al control robusto

Condiciones de estabilidad robusta para los diferentes tipos de descripción

- Las condiciones necesarias y suficientes para estabilidad robusta ante diferentes tipos de descripción de incertidumbre son:

\mathcal{G}	Estabilidad Robusta
$g_0(s)(1 + \delta W_m(s))$	$\ W_m(s)T(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0(s) + \delta W_a(s)$	$\ W_a(s)k(s)S(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0(s) \left(1 + \delta W_q(s)\right)^{-1}$	$\ W_q(s)S(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0(s) \left(1 + \delta W_i(s)g_0(s)\right)^{-1}$	$\ W_i(s)g_0(s)S(s)\ _\infty \leq 1$

Diferentes descripciones de incertidumbre se corresponden con diferentes condiciones de estabilidad.



Los márgenes de estabilidad están relacionados con el tipo específico de descripción de incertidumbre.



CA3: Introducción al control robusto

Estabilidad robusta – Interpretación

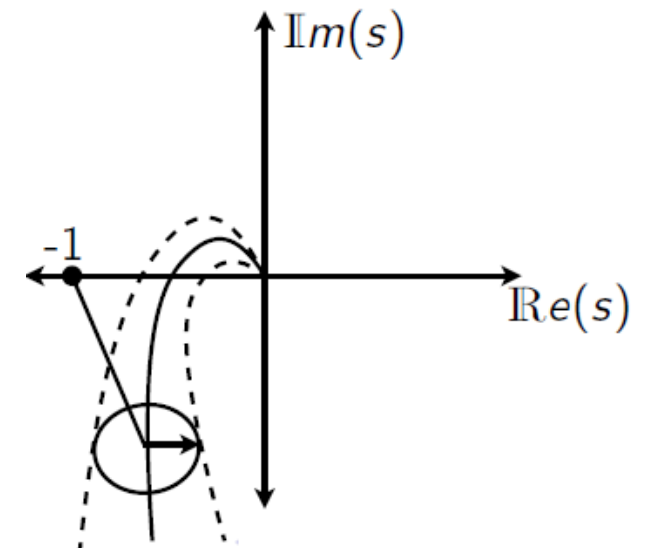
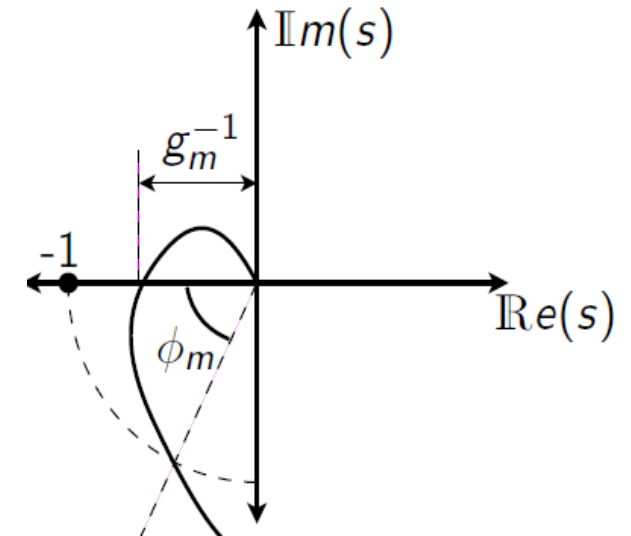
- La condición de estabilidad robusta puede ser interpretada también como un margen de estabilidad.
- En el caso de incertidumbre global multiplicativa y suponiendo que acotamos a $|\delta| < \gamma_m$ (γ_m número real positivo), se puede probar que la condición de estabilidad robusta es equivalente para este nuevo conjunto de modelos es

$$\|T(s)W(s)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\gamma_m}$$

Puede ser interpretado como un margen de estabilidad del conjunto de modelos con incertidumbre multiplicativa del mismo modo que g_m es el margen de estabilidad para un conjunto de modelos con ganancia incierta.

- Luego, el controlador que dará el mayor margen de estabilidad se puede encontrar resolviendo el siguiente problema de optimización

$$\inf_{k(s) \text{ estabilizantes}} \|T(s)W(s)\|_{\infty}$$





Introducción al control robusto

Índice

- Introducción – Varios
- Sistemas bien planteados
- Incertidumbre y estabilidad
- **Performance**
- Loopshaping
- Ejemplo de aplicación realista

Tema 01

V1 - 2023



CA3: Introducción al control robusto

Performance nominal

- En control clásico la medida de performance del sistema a lazo cerrado está basada en la habilidad del mismo en rechazar perturbaciones conocidas (se conoce la forma de la perturbación, no se conoce el tiempo en el que la misma ocurre).
- La medida de performance puede ser puesta en términos de la habilidad del sistema para seguir referencias conocidas con error de estado estacionario nulo.
- En la teoría de control moderno se utiliza el mismo concepto de performance. Adicionalmente en esta teoría, se introduce el concepto de control óptimo.
- Si luego del diseño para una dada perturbación, la misma resulta distinta, la performance del sistema se puede ver degradada.

Conceptualmente, esta es la misma limitación que se encontró para la estabilidad del lazo cerrado. Si estabilizamos el modelo nominal, no hay garantía de que el lazo cerrado permanezca estable si el modelo cambia.



CA3: Introducción al control robusto

Performance nominal (2)

- En la práctica toda esta información generalmente no está disponible. Por este motivo estas condiciones deben ser relajadas. Para el caso de incertidumbre en la descripción del sistema se consideró una familia de modelos en lugar de un solo modelo.
- Para el caso de performance, de la misma forma, se considera una familia de perturbaciones.
- Si bien la teoría de control robusto aborda estos problemas con condiciones más relajadas, esto puede dar lugar a descripciones más conservadoras de las incertidumbres y las perturbaciones y como consecuencia puede dar lugar a diseños más conservadores que con las técnicas clásicas.

Dependiendo de la aplicación puede resultar mejor un enfoque o el otro.

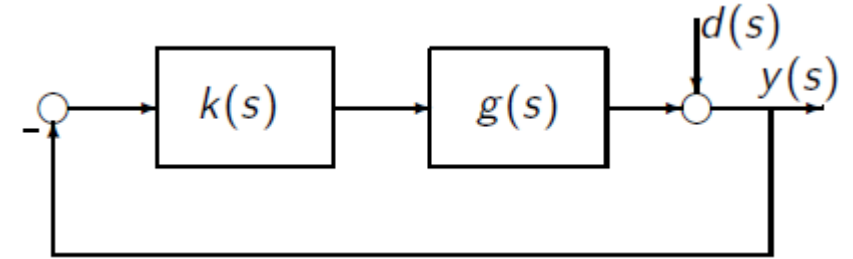


CA3: Introducción al control robusto

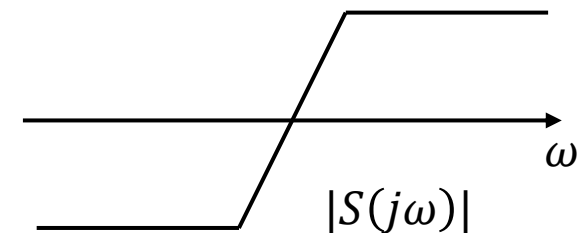
Perturbaciones acotadas a la salida

- Si el objetivo de performance es minimizar el efecto de la perturbación $d(s)$ a la salida $y(s)$, se debe diseñar un controlador que estabilice el sistema y que además haga $S(s)$ tan chica como sea posible.
- La solución trivial es $k(s) \rightarrow \infty$
 - luego $S(s) \rightarrow 0$,
 - no hay garantía de estabilidad nominal
 - implica $T(s) \rightarrow 1$ para todas las frecuencias
 - sólo se puede garantizar estabilidad robusta si la incertidumbre de la planta es menor al 100% para todas las frecuencias.

Como consecuencia, se busca un controlador que haga $S(s)$ chica en un rango de frecuencias de interés para la aplicación que se esté desarrollando.



$$y(s) = S(s)d(s) = [1 + g(s)k(s)]^{-1}d(s)$$

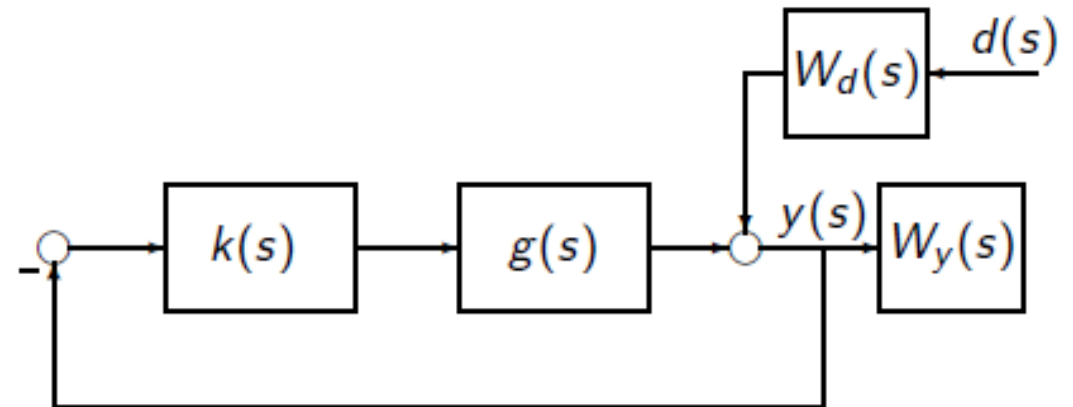




CA3: Introducción al control robusto

Perturbaciones acotadas a la salida (2)

- El rango de frecuencias donde $S(s)$ debe ser “chica” o el contenido de frecuencia de la perturbación puede ser representado por los pesos $W_y(s)$ y $W_d(s)$, respectivamente.
- Estos pesos son sistemas dinámicos, los cuales representan el conocimiento de las bandas de frecuencia de interés para performance y el contenido de frecuencias de la perturbación.





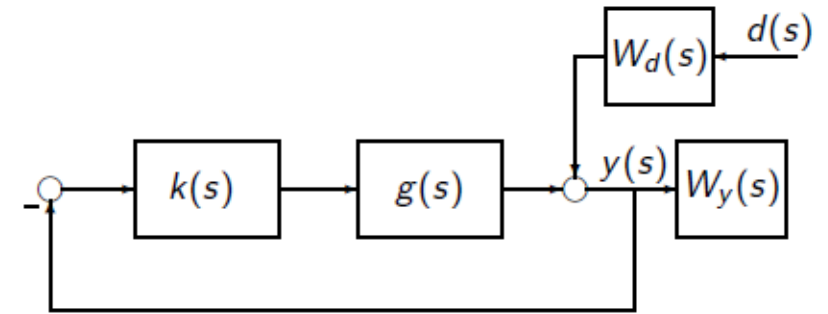
CA3: Introducción al control robusto

Performance nominal - Teorema

El sistema realimentado consigue performance nominal si y sólo si:

$$\|W_y(s)S(s)W_d(s)\|_\infty \triangleq \sup_{j\omega} |W_y(s)S(s)W_d(s)| \leq 1$$

- Notar que esta condición es similar a la de estabilidad robusta sólo que aplicada a una función de transferencia distinta.
- La única suposición hecha sobre las perturbaciones es que las mismas tienen energía acotada.
- Las funciones de peso $W_y(s)$ y $W_d(s)$ sólo proveen un conocimiento previo del contenido de frecuencia de esas señales pero no determinan su forma.



La condición para estabilidad robusta puede ser interpretada cualitativamente. En cambio, la condición de performance nominal puede ser relajada gradualmente.



CA3: Introducción al control robusto

Performance nominal – Interpretación gráfica

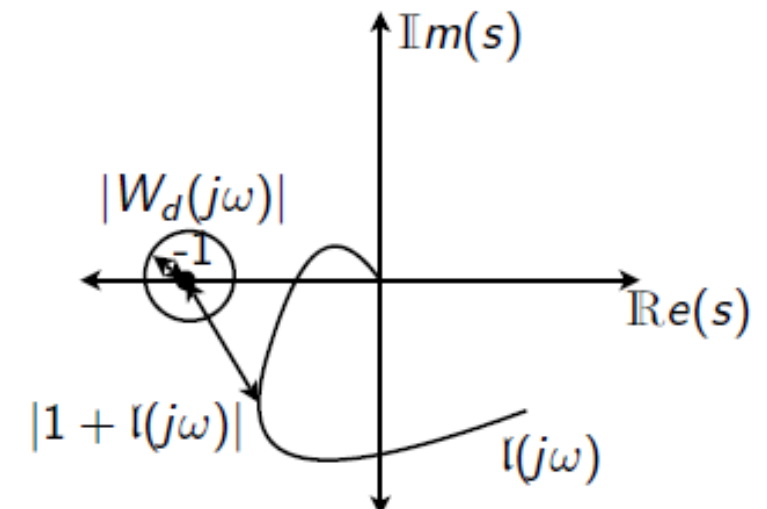
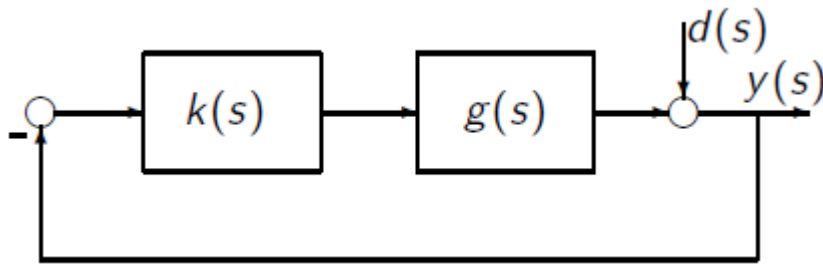
$$\|W_y(s)S(s)W_d(s)\|_\infty \triangleq \sup_{j\omega} |W_y(s)S(s)W_d(s)| \leq 1$$

- Definiendo $W(s) \triangleq W_y(s)W_d(s)$ y teniendo en cuenta que la condición del teorema es equivalente a

$$|W(j\omega)| \leq |1 + g_0(j\omega)k(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

- Considere para cada frecuencia $j\omega$, un disco $D(j\omega)$ centrado en $z = -1$, con radio $r = |W(j\omega)|$

Puede haber tantos criterios de performance como pares de señales de entrada/salida se puedan obtener del lazo.





CA3: Introducción al control robusto

Performance robusta

- El objetivo final del control robusto es conseguir los requerimientos de performance para todos los miembros de la familia de modelos, es decir performance robusta con un solo controlador.
- Estabilidad robusta y performance nominal son prerequisites para poder obtener performance robusta.
- Recordar que las condiciones necesarias y suficientes para performance nominal y estabilidad robusta son:

$$\|W_d(s)S(s)\|_\infty \leq 1$$

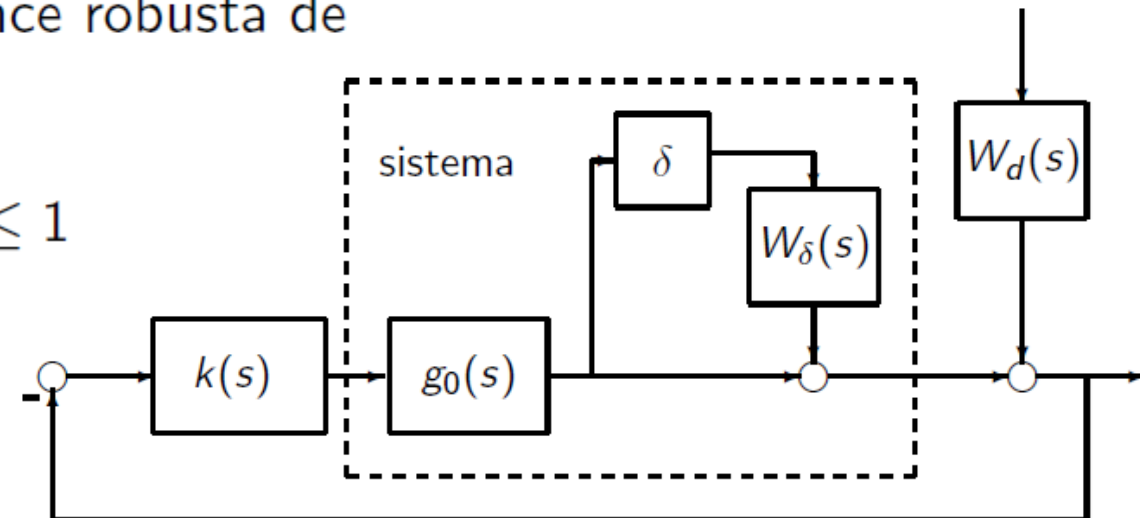
$$\|W_\delta(s)T(s)\|_\infty \leq 1$$

Teorema

Una condición necesaria y suficiente para performance robusta de la familia de modelos es

$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1$$

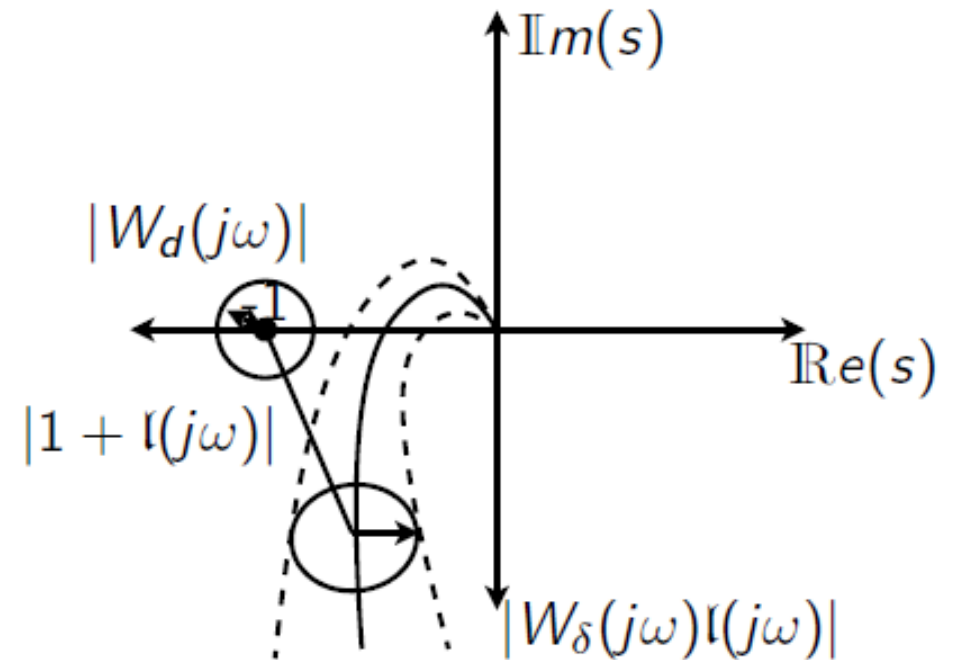
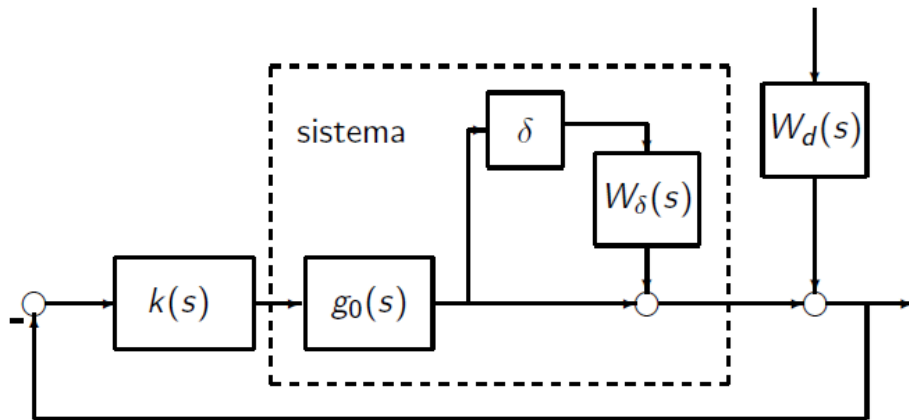
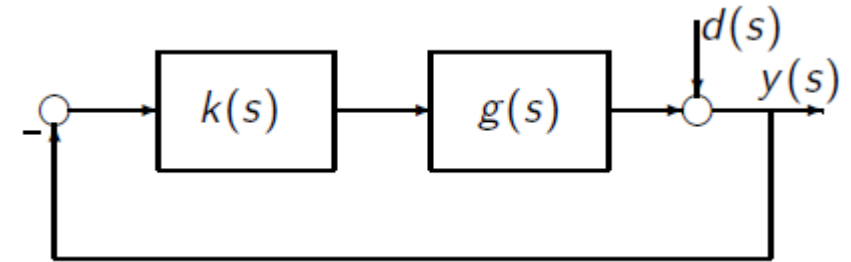
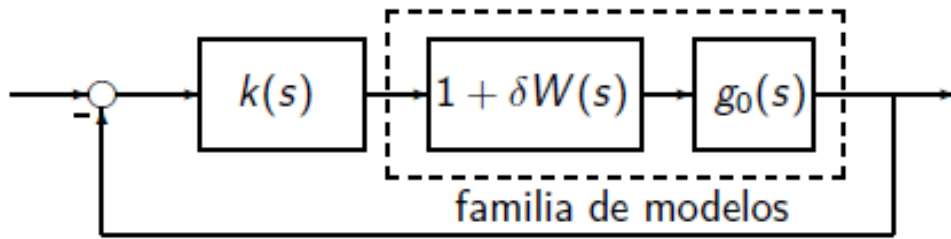
¿Cómo se podrá obtener esta condición?





CA3: Introducción al control robusto

Performance robusta – Interpretación gráfica





CA3: Introducción al control robusto

Relajando la condición de performance

- En sistemas SISO, escalando la condición de performance nominal es posible garantizar performance robusta.
- Usualmente se escala la performance una vez que la condición de estabilidad robusta es alcanzada con el objetivo de conseguir performance robusta (degradada) de la siguiente manera:

$$\|\gamma |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)|\|_\infty \leq 1, \quad \gamma \in [0, 1]$$



CA3: Introducción al control robusto

Diseño de controladores

- Hasta aquí se han presentado las características básicas del planteo del problema de control robusto.
- El diseño del controlador en el marco H_∞ escapa a los alcances del curso.
- Planteo general del diseño del controlador utilizando las definiciones presentadas:

$$\min_{k(s) \text{ estabilizante}} \|T(s)W(s)\|_\infty$$

$$\min_{k(s) \text{ estabilizante}} \|W_y S(s) W_d(s)\|_\infty$$



Introducción al control robusto

Índice

- Introducción – Varios
- Sistemas bien planteados
- Incertidumbre y estabilidad
- Performance
- **Loopshaping**
- Ejemplo de aplicación realista

Tema 01

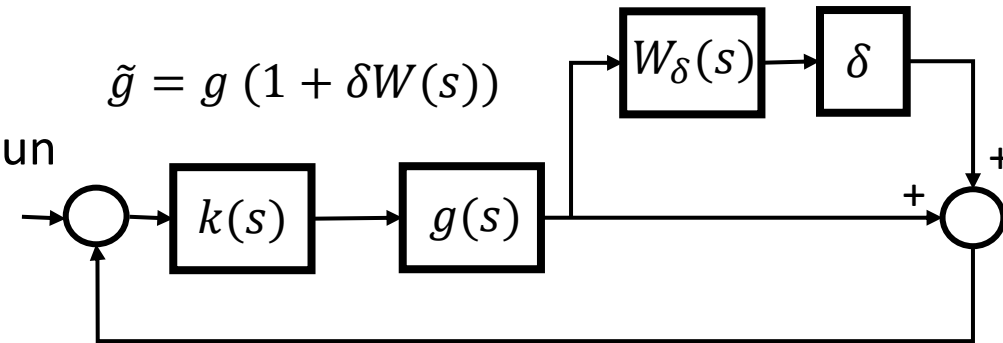
V1 - 2023



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping - Introducción

- Método gráfico que funciona muy bien para plantas SISO de mínima fase estables.
- Asumimos que el lazo cerrado nominal es estable para un controlador k , así $S_0 = (1 + g_0 k)^{-1}$ es estable.
- La solución al problema de performance robusta es un controlador k para el cual se cumple la medida de performance $\|W_d S\|_\infty < 1$ para toda la familia de modelos \tilde{g} (acotada).



- Para sistemas SISO, la condición de performance robusta es

$$\| |W_d S| + |W_\delta T| \|_\infty \leq 1$$

- Asumimos que W_d y W_δ están bien planteadas, es decir, no se da simultáneamente que $|W_d| > 1$ y $|W_\delta| > 1$.

Los datos del problema son g , W_d y W_δ y la solución del problema es un controlador k que consigue performance robusta.

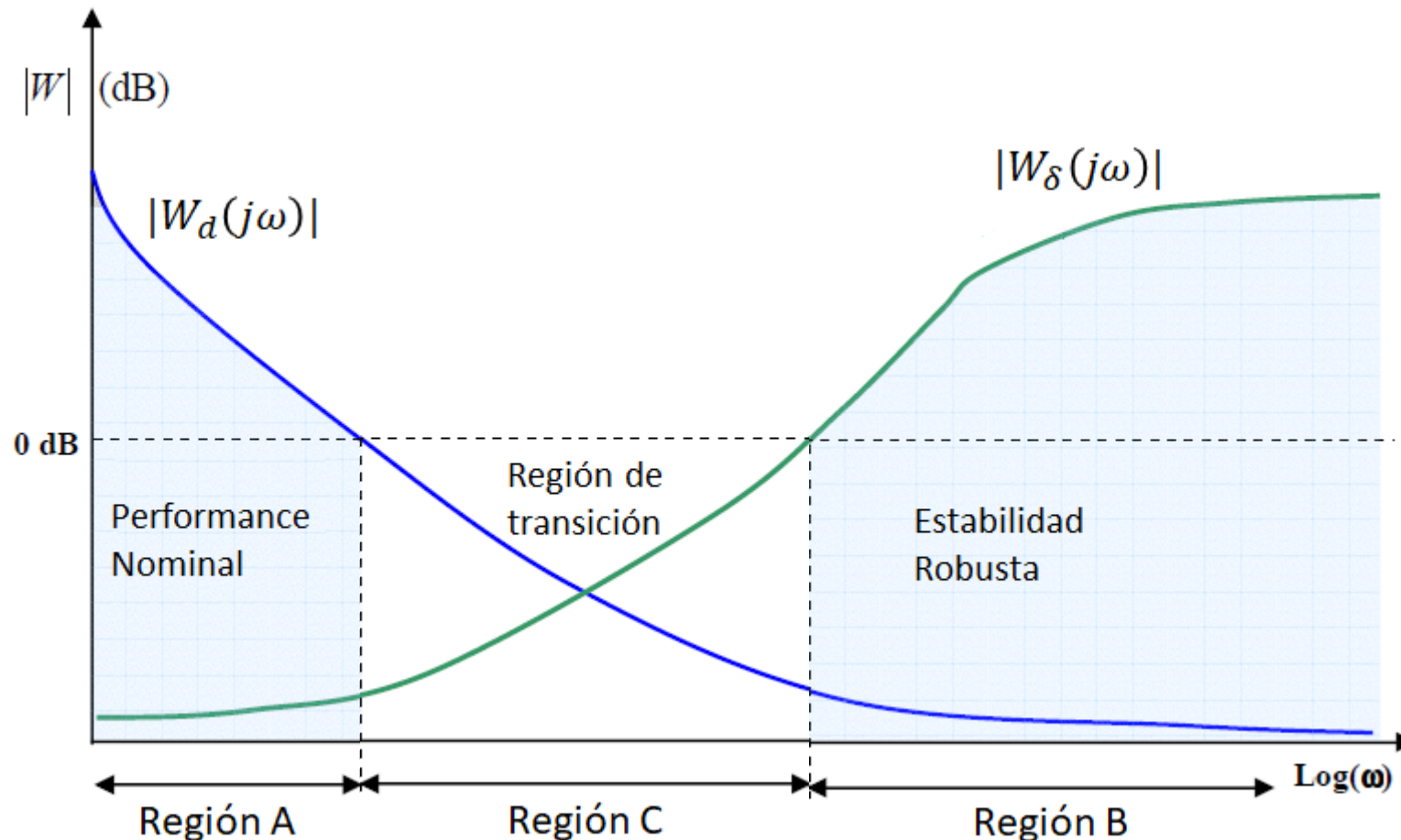


CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Restricciones frecuenciales

- La magnitud relativa de los pesos W_d y W_δ en una configuración bien planteada pueden ser utilizadas para particionar el rango de frecuencia en tres regiones distintas:

- Región A: $|W_d(j\omega)| \gg 1$, $|W_\delta(j\omega)| \ll 1$
- Región B: $|W_d(j\omega)| \ll 1$, $|W_\delta(j\omega)| \gg 1$
- Región C: $|W_d(j\omega)| \approx |W_\delta(j\omega)|$



La idea es construir (“dar forma”) la función de transferencia de lazo L para conseguir $\| |W_d S| + |W_\delta T| \|_\infty \leq 1$ y luego obtener $k = L/g$.



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Idea general

- Construir L para conseguir

$$\| |W_d S| + |W_\delta T| \|_\infty \leq 1$$

Datos: g , W_d y W_δ

Solución: k

y luego $k = L/g$

Condiciones alternativas

- Restricciones:

- Estabilidad interna del lazo nominal
- k propio $\Rightarrow L$ no es libremente asignable
- Cuando g o g^{-1} no son estables, L debe contener los polos y ceros inestables de g (incomodo para el diseño) \Rightarrow trabajamos con g y g^{-1} estables.

$$\bullet \quad |L_0(j\omega)| > \frac{1+|W_d(j\omega)|}{1-|W_\delta(j\omega)|}$$

para ω , $|L_0(j\omega)| > 1$

$$\bullet \quad |L_0(j\omega)| < \frac{1-|W_d(j\omega)|}{1+|W_\delta(j\omega)|}$$

para ω , $|L_0(j\omega)| < 1$

- Performance robusta en términos de W_d , W_δ y L

$$\| |W_d S| + |W_\delta T| \|_\infty \leq 1 \longrightarrow \Gamma(j\omega) := \left| \frac{W_d(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_\delta(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \leq 1, \forall \omega$$



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Condiciones alternativas

- Reescribiendo estas ecuaciones en función de los intervalos de frecuencia definidos por las funciones de peso:

- Región A: $|W_d(j\omega)| > 1, |W_\delta(j\omega)| < 1$

$$1 < \frac{1 + |W_d(j\omega)|}{1 - |W_\delta(j\omega)|} \quad \text{Como se requiere} \quad |L_0(j\omega)| > \frac{1 + |W_d(j\omega)|}{1 - |W_\delta(j\omega)|}$$

se garantiza $|L_0(j\omega)| > 1$ Satisfaciendo la condición de performance robusta en A

- Región B: $|W_d(j\omega)| < 1, |W_\delta(j\omega)| > 1$

$$\text{Asegurando} \quad |L_0(j\omega)| < \frac{1 - |W_d(j\omega)|}{1 + |W_\delta(j\omega)|} \quad \text{se garantiza} \quad |L_0(j\omega)| < 1$$

Satisfaciendo la condición de performance robusta en B

Condiciones alternativas

$$\bullet \quad |L_0(j\omega)| > \frac{1 + |W_d(j\omega)|}{1 - |W_\delta(j\omega)|}$$

para $\omega, |L_0(j\omega)| > 1$

$$\bullet \quad |L_0(j\omega)| < \frac{1 - |W_d(j\omega)|}{1 + |W_\delta(j\omega)|}$$

para $\omega, |L_0(j\omega)| < 1$

$ W_d \gg 1 > W_\delta $	$ L_0 > \frac{ W_d }{1 - W_\delta }$	$\frac{ W_d }{1 - W_\delta } S < 1$
$ W_d < 1 \ll W_\delta $	$ L_0 < \frac{1 - W_d }{ W_\delta }$	$\frac{ W_\delta }{1 - W_d } T < 1$



CA3: Introducción al control robusto

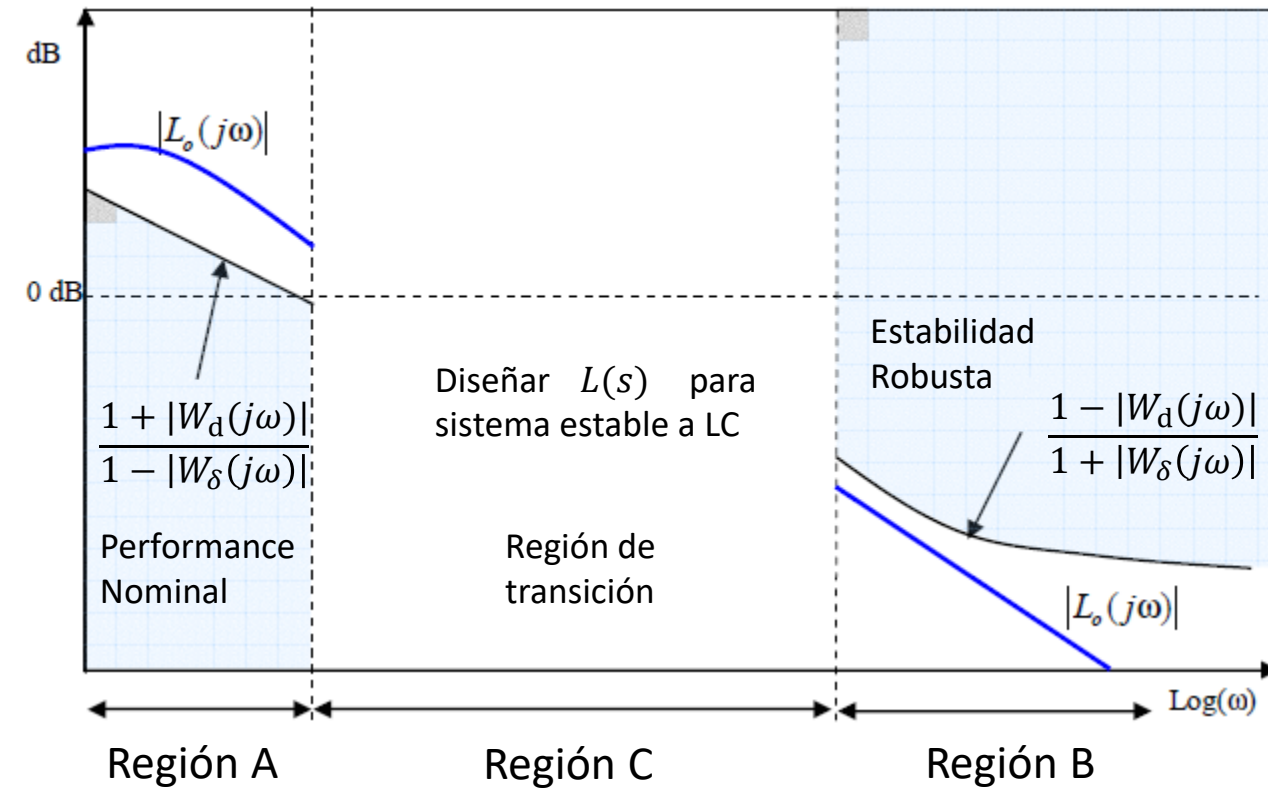
Loopshaping - Resumen

- Si W_d y W_δ están bien planteados y
 - $|L_0(j\omega)| > \frac{1+|W_d(j\omega)|}{1-|W_\delta(j\omega)|}$ para frecuencias en la región A
 - $|L_0(j\omega)| < \frac{1-|W_d(j\omega)|}{1+|W_\delta(j\omega)|}$ para frecuencias en la región B

Se satisface la condición de performance robusta

$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1$$

para frecuencias en la región A y B.



La elección de L en la región C es un proceso de prueba y error. Para un buen margen de fase, cruzar los 0 dB con 20 dB/dec.

→ Cumplir con esto no garantiza $\| |W_d S| + |W_\delta T| \|_\infty \leq 1$ en la región de transición.



CA3: Introducción al control robusto

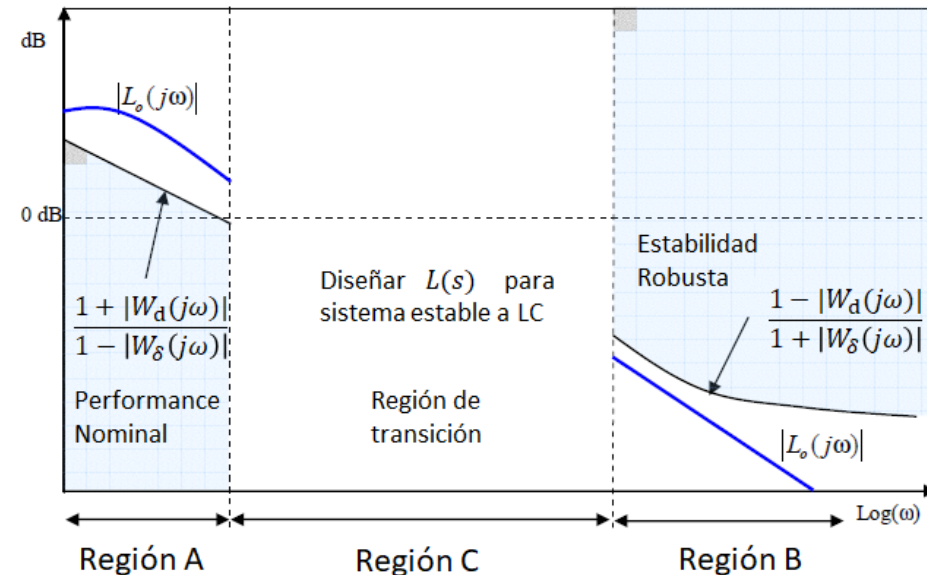
Loopshaping - “Procedimiento”

1. Graficar las funciones “cota” en las regiones A y B

$$\frac{1 + |W_d(j\omega)|}{1 - |W_\delta(j\omega)|} \quad \text{Para frecuencias donde } |W_d(j\omega)| \gg 1 \gg |W_\delta(j\omega)|$$

$$\frac{1 - |W_d(j\omega)|}{1 + |W_\delta(j\omega)|} \quad \text{Para frecuencias donde } |W_\delta(j\omega)| \gg 1 \gg |W_d(j\omega)|$$

2. Ajustar una curva que caiga por encima de la cota en la región A y por debajo de la cota en la región B. En alta frecuencia dejar caer al menos tan rápido como g (así k es propio).
3. Hacer una transición suave, con una L estable y de mínima fase que se ajuste con las curvas del paso 2 y que en torno a los 0 dB decaiga con 20 dB/dec.
4. Obtener una transferencia estable de mínima fase L , cuyo diagrama de bode de módulo (Bode) se aproxime a la curva construida.
5. Graficar $|W_d S| + |W_\delta T|$ para verificar que es menor a 1 $\forall \omega$.
6. Con la función de lazo (L) obtenida determinar k como L/g .



Finalmente chequear estabilidad interna nominal y condición de performance robusta. Si no cumple iterar.



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping - ¿Qué pasa si g_0 no es lineal, de mínima fase y estable?.

- Si g_0 es inestable: estabilizar g_0 y luego usar los resultados obtenidos.
- Si g_0 es no lineal: linealizar la planta y considerar como incertidumbre los términos despreciados.
- Si g_0 es de no mínima fase: extraer un componente pasa todo y considerar esto como incertidumbre.
- Ejemplo

$$g_0 = \frac{s - 2}{s^2 + 2s + 1} \longrightarrow g_0 = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1} \frac{s - 2}{s + 2}$$

$$g_0 = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1} \left(1 + \frac{-4}{s + 2} \right) = \overline{g}_0(s) (1 + W_\delta(s))$$



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 1

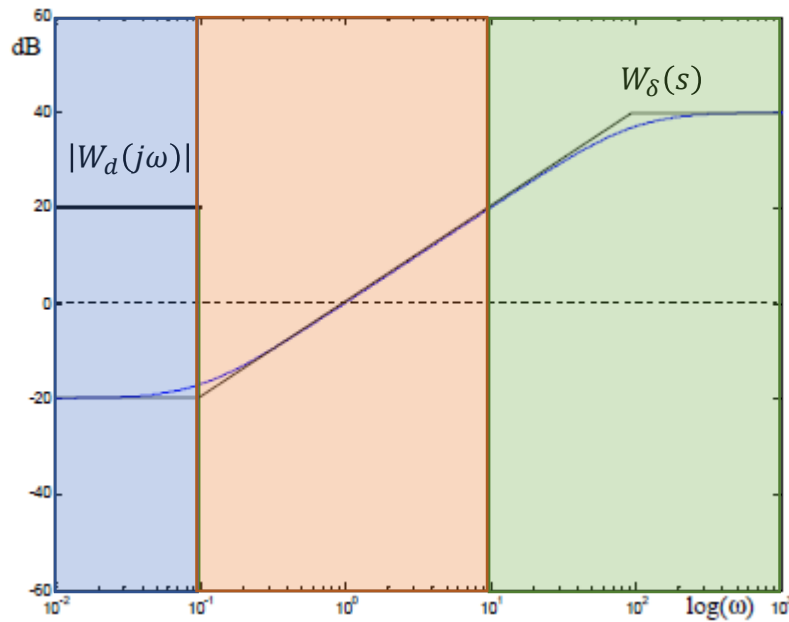
$$g_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$W_\delta(s) = 100 \frac{s+0,1}{s+100}$$

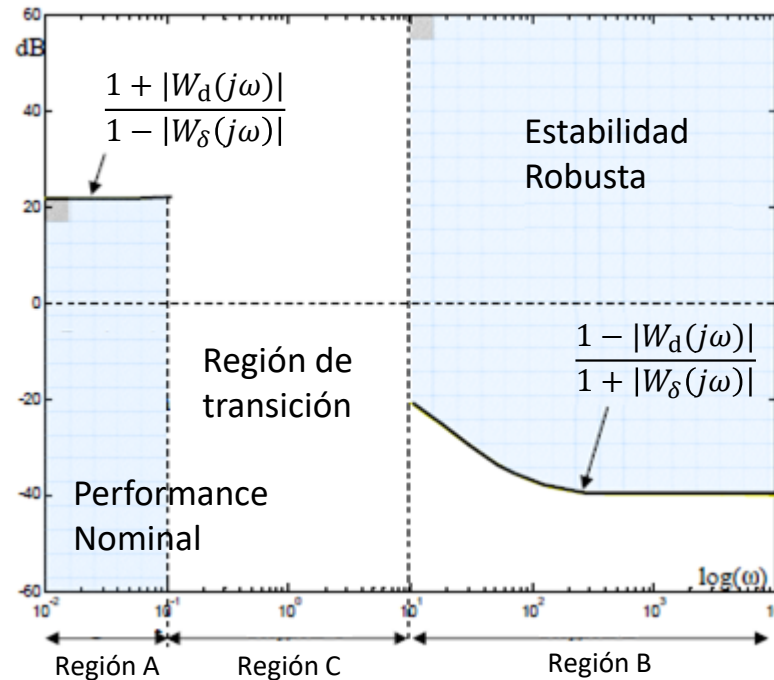
- El requerimiento de seguimiento debe cumplir

$$|S(j\omega)| < 0,1 \quad 0 < \omega < 0,1 \text{ rad/sec}$$

Graficando W_d y W_δ



Graficando las cotas



De la condición de performance

$$|W_d(j\omega)S(j\omega)| < 1$$

$$|W_d(j\omega)| = \begin{cases} 10 & 0 < \omega < 0,1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Región A: $0 < \omega < 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Región B: $\omega > 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Región C: $0,1 < \omega < 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

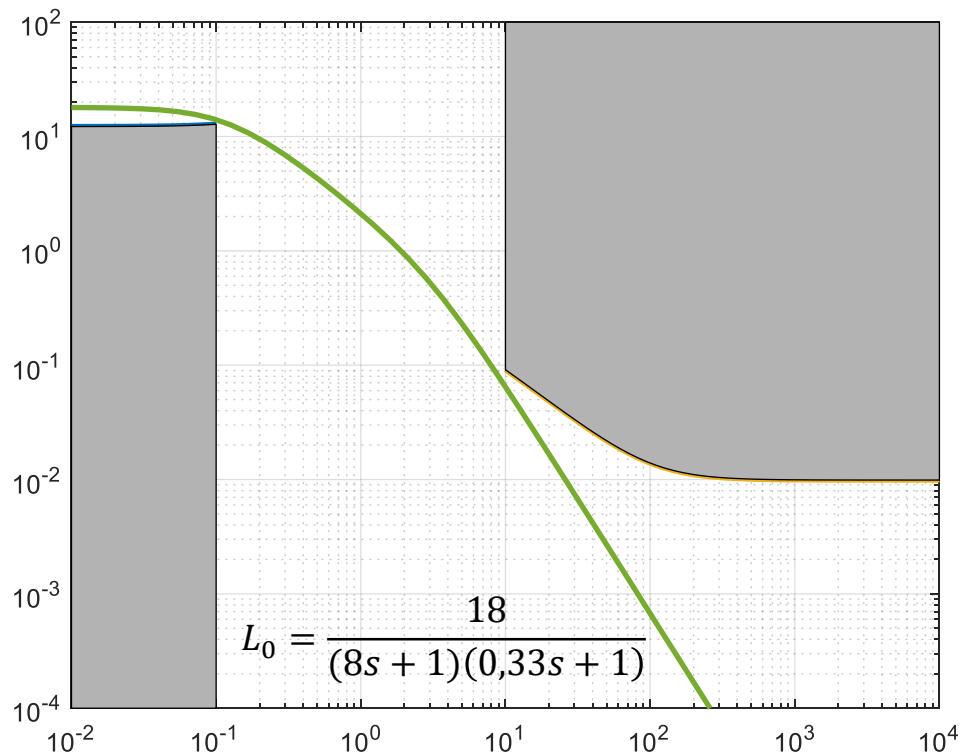


CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 1 (continuación)

$$g_0(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad W_\delta(s) = 100 \frac{s+0,1}{s+100}$$

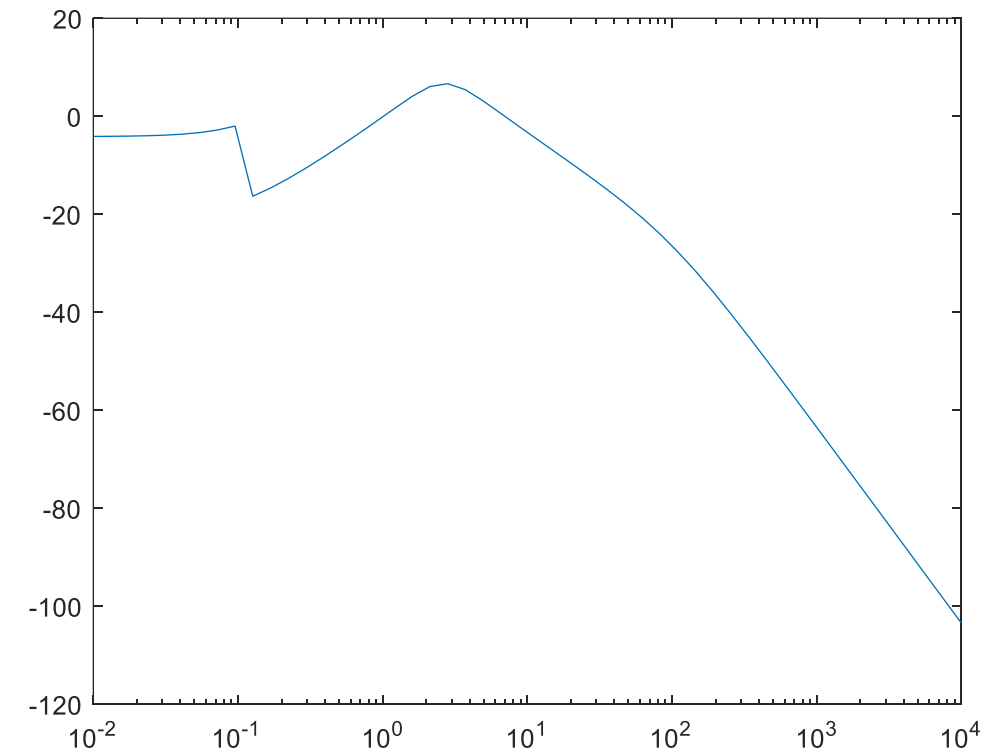
- Ajustando la curva a las cotas



¿listo?

La función de lazo debe ser estable y de fase mínima con una caída de 20 dB/dec en torno a 0 dB.

$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1$$



No cumple condición de performance robusta.



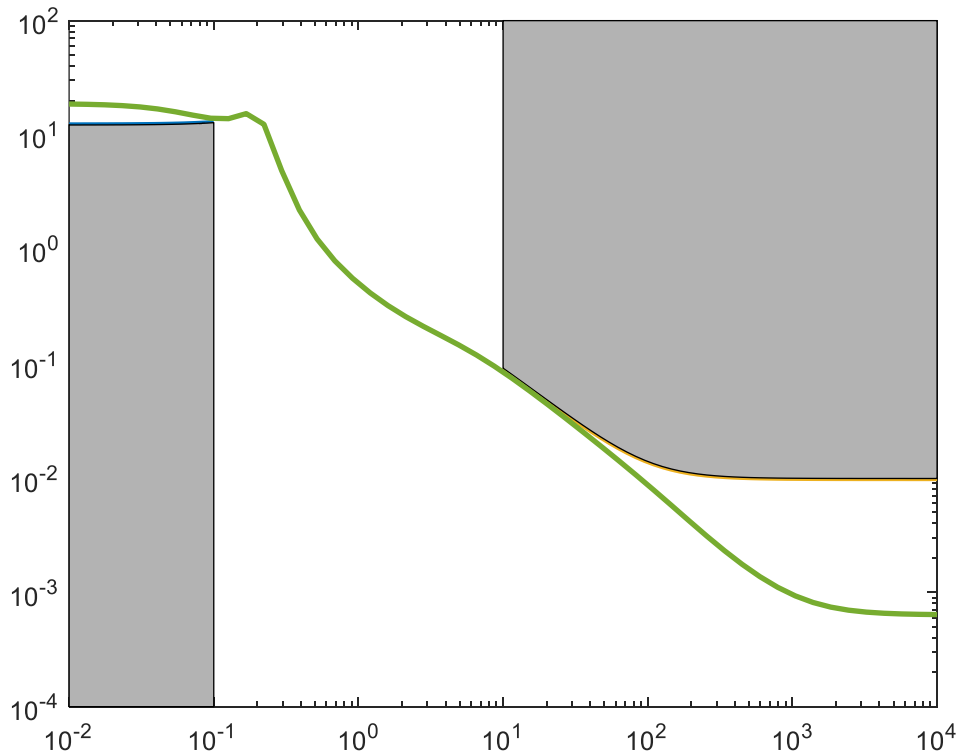
CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 1 (continuación)

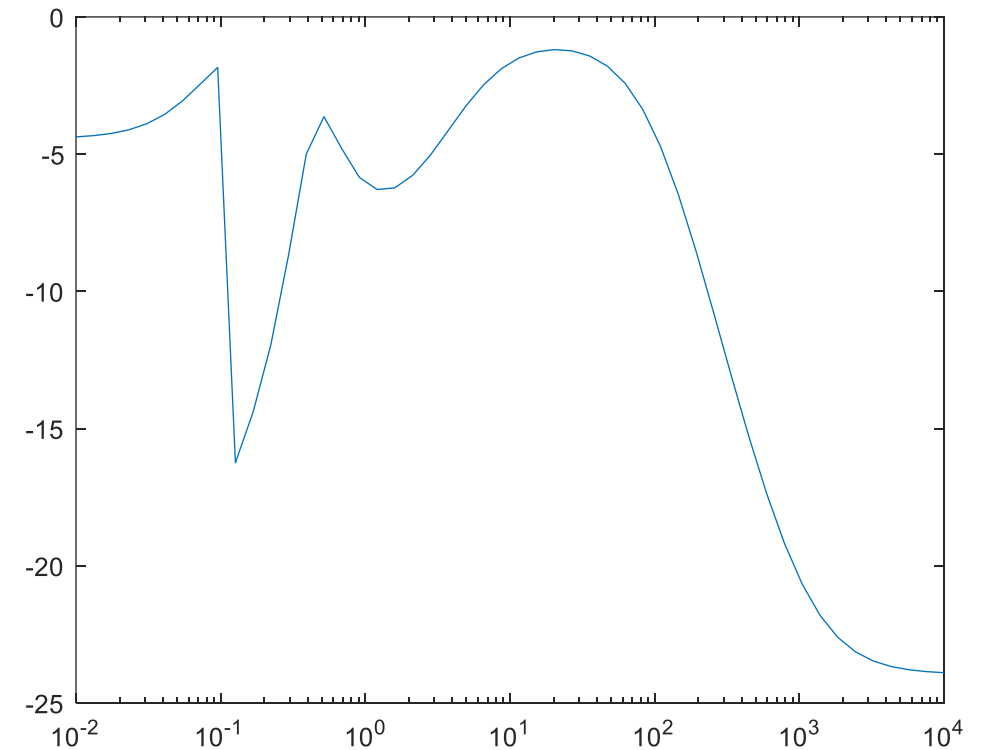
$$g_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$W_\delta(s) = 100 \frac{s+0,1}{s+100}$$

- Ajustando la curva a las cotas



$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1$$



¿listo?

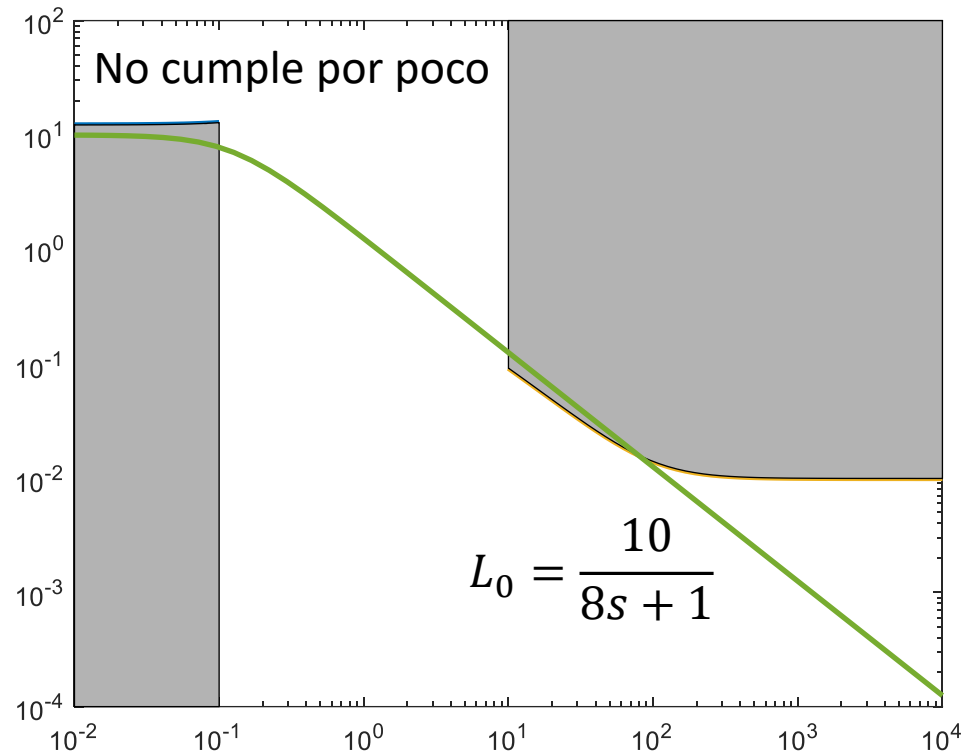
$$L_0 = 6.35e-4 \frac{6.35e-4(s+1103)(s+225)(s+2.3)(s+0.3+0.2i)(s+0.3-0.2i)}{(s+172)(s+4.9)(s+0.07)(s+0.05+0.2i)(s+0.05-0.2i)}$$



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 1 (continuación)

- Ajustando la curva a las cotas



$$k(s) = \frac{L_0(s)}{g_0(s)} = \frac{10/(8s+1)}{1/(s(s+1))} = 10 \frac{s(s+1)}{8s+1}$$

Una opción:
$$k(s) = 10 \frac{s(s+1)}{(8s+1)(10^{-5}s+1)}$$

$$g_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

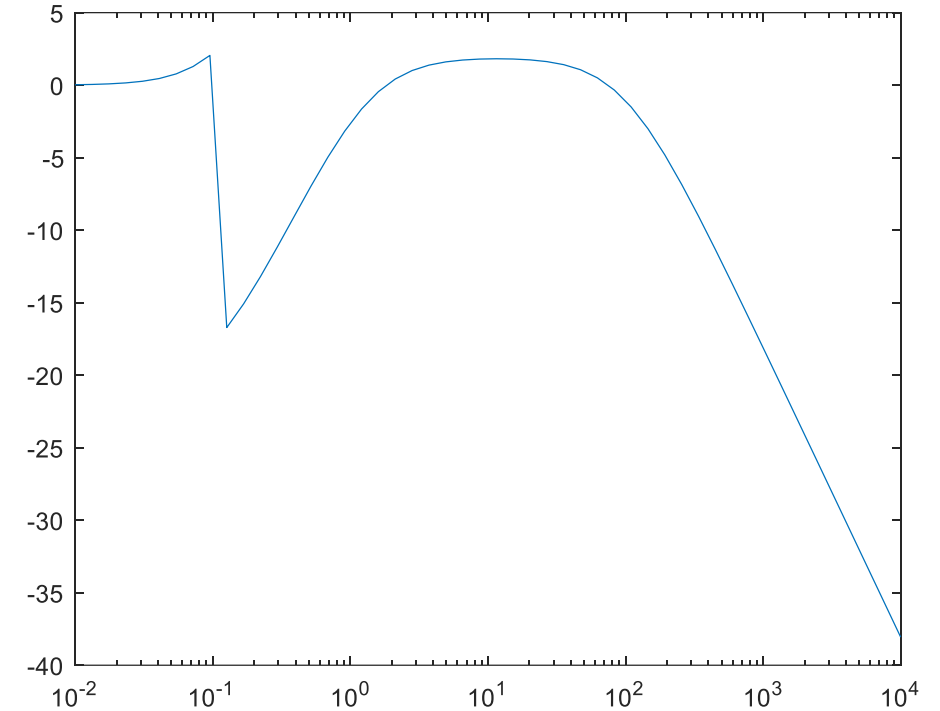
$$W_\delta(s) = 100 \frac{s+0,1}{s+100}$$

¿listo?

(Paso 2)

En alta frecuencia dejar caer al menos tan rápido como g_0 (así k es propio).

$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1$$



$$L_0 = \frac{18}{(8s+1)(0,33s+1)}$$

$$k = \frac{18 s (s+1)}{(8s+1)(0,33s+1)}$$



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Comentarios generales

- En principio, la única información que necesitamos acerca de g_0 es su grado relativo. Esto determina la pendiente en alta frecuencia de L_0 .
- Necesitamos que L_0 tenga al menos el mismo grado relativo g_0 , de lo contrario k no será propio.
- En principio, el modelo real de la planta entra en juego sólo cuando queremos obtener k de L_0 (tener en cuenta condiciones sobre g_0).
- Recordar que W_δ es una cota superior en la magnitud relativa de la perturbación de la planta.
- Fijado el objetivo de performance y teniendo la descripción de la incerteza se procede a ajustar la función L_0 . En principio podríamos no fijar que error máximo toleramos sino ver qué error se obtiene al ajustar la curva (proceso iterativo).
- Empezar con funciones de lazo simples y ajustarlas/modificarlas para lograr los objetivos.
- También se pueden calcular valores máximos de la función a ajustar en función de las cotas establecidas.



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 2

- Supongamos L_0 dada

$$L_0(s) = \frac{k}{s+1} \quad k \text{ es un parámetro (ganancia del controlador)}$$

- La incerteza está descrita por

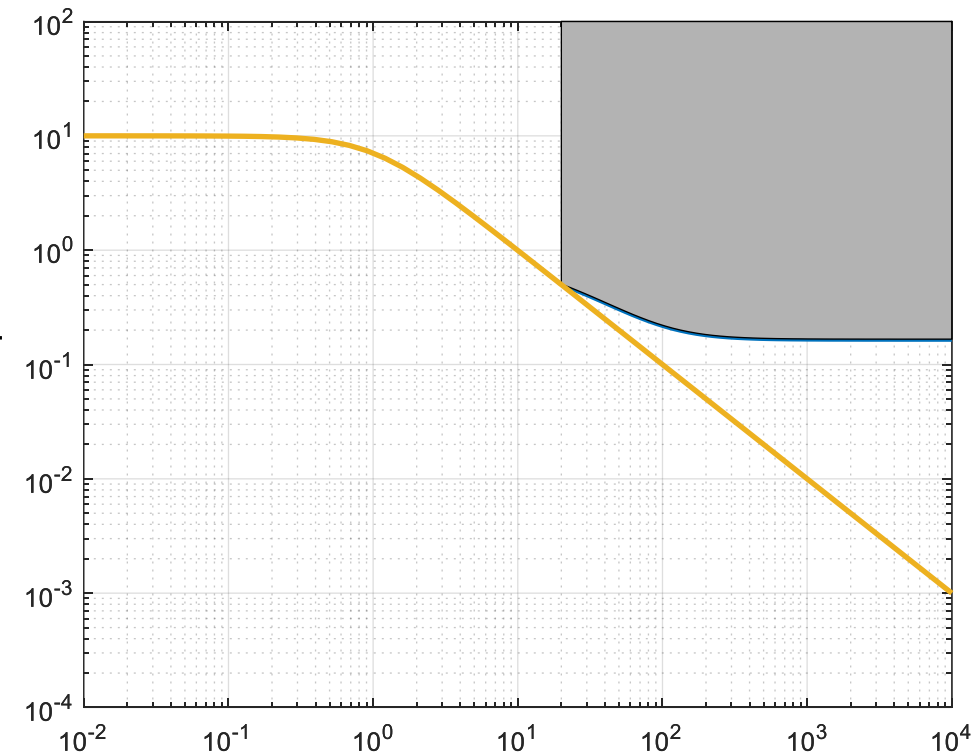
$$W_\delta = \frac{s+1}{20(0,01s+1)}$$

- El objetivo de performance es seguir la senoide $r(t) = \cos(\omega t + \phi)$, $0 < \omega < 1$ lo mejor posible. Este objetivo redunda en

$$|W_d(j\omega)| = \begin{cases} a & 0 < \omega < 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \quad \text{Mayor } a \text{ mejor seguimiento}$$

¿Qué tan grande puede ser a ?

- La elección de W_d y W_δ definen las regiones A, B y C.



k se elige el más grande tal que se cumple la condición en la región B $\rightarrow k = 10$.



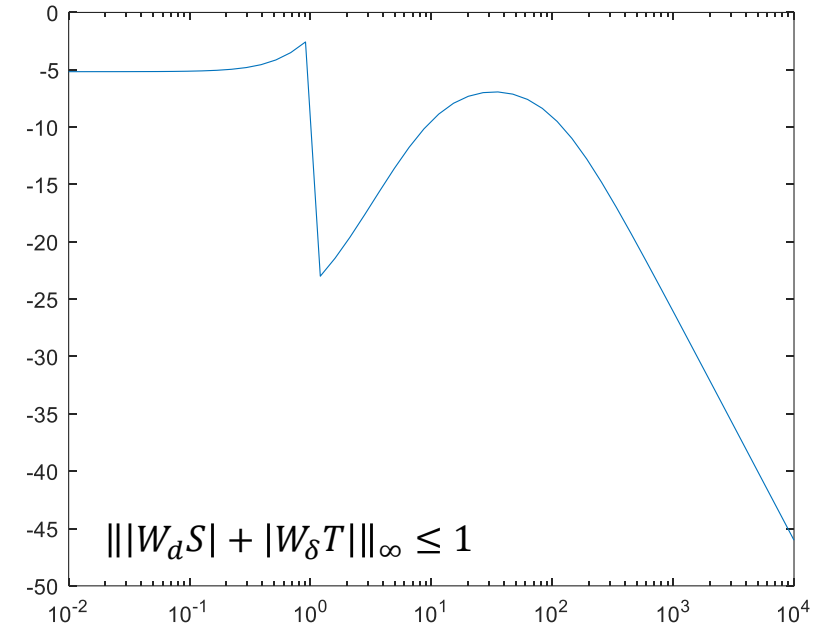
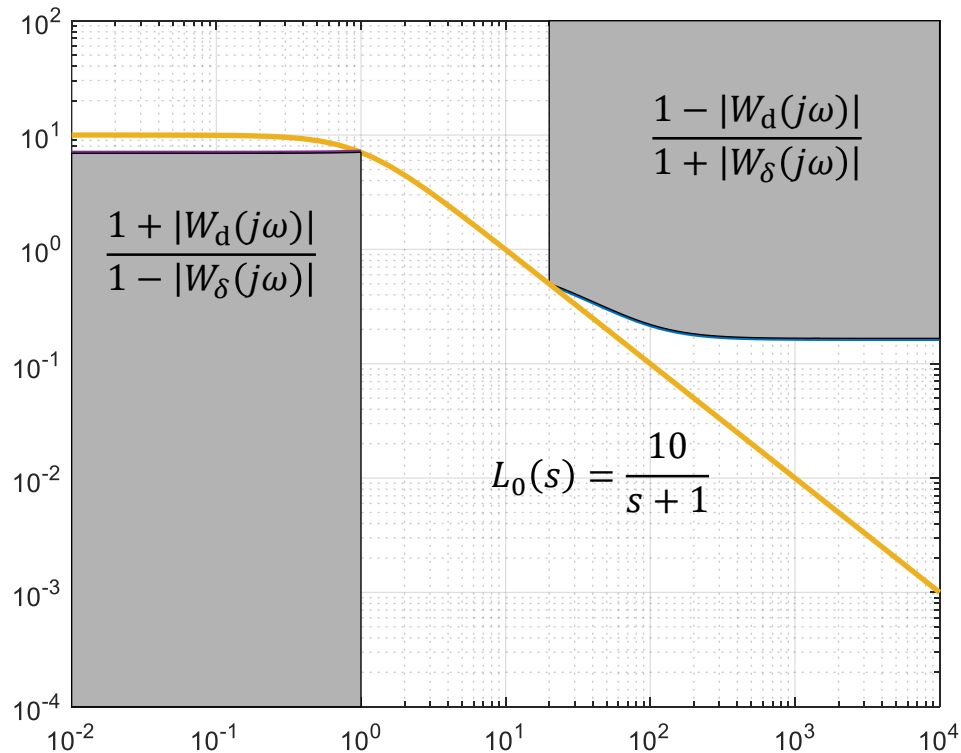
CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Ejemplo 2 (continuación)

- ¿Qué tan grande puede ser a ?

$$|L_0(j\omega)| \geq \frac{1 + |W_p(j\omega)|}{1 - |W_\delta(j\omega)|} = \frac{1 + a}{1 - |W_\delta(j\omega)|} \quad \omega \in [0,1]$$

- Dado que $\frac{1+a}{1-|W_\delta(j\omega)|}$ crece y que L_0 decrece en $\omega \in [0,1]$, el mayor valor de a se obtiene para $\omega = 1$ resultando $a=5.57$.



El error de seguimiento máximo asociado con este valor de a es $1/(1+a)$ que es aproximadamente la ganancia de la función de sensibilidad (S).

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{6.57} \approx 15.2\%$$

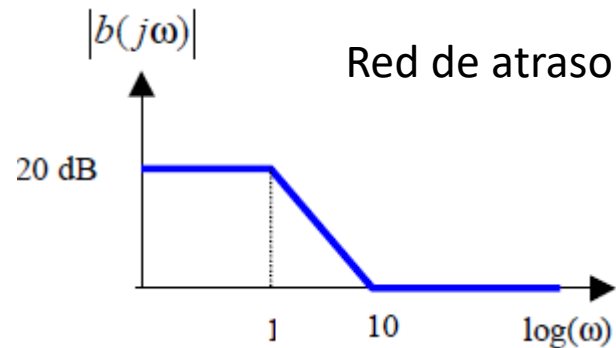


CA3: Introducción al control robusto

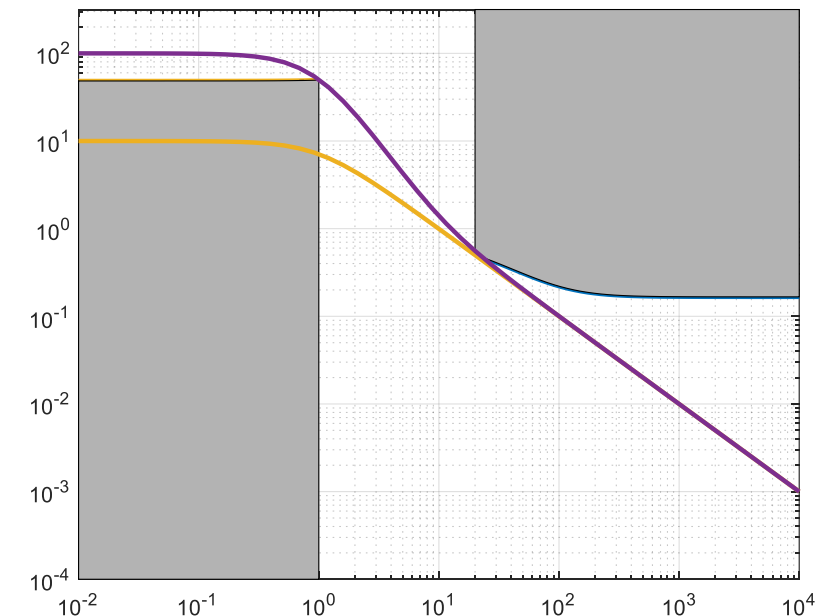
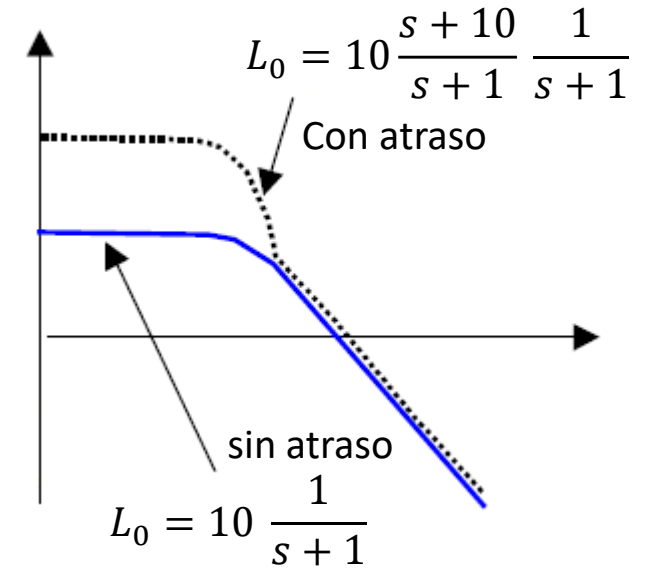
Loopshaping – Ejemplo 2 (continuación)

- Dado $L_0 = \frac{k}{s+1}$ podemos pensar que se corresponde con la planta $g_0(s) = \frac{1}{s+1}$ con un controlador estático k .
- ¿Se podrá conseguir algo mejor haciendo que el controlador sea dinámico?
- La idea es introducir un controlador que eleve la ganancia en baja frecuencia de la función de lazo.
- Consideremos un compensador por atraso

$$k_l(s) = \frac{s + 10}{s + 1}$$



- La mejora en a se corresponde con un error $\frac{1}{1+a} = \frac{1}{46} \approx 2,17\%$





CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Bloques - Ganancia proporcional

- La idea es tomar la planta g_0 y ponerla en serie con bloques “especiales” que le den forma a la función de lazo para cumplir con las cotas de performance robusta.
- El bloque proporcional aumenta la ganancia a todas las frecuencias

$$k(s) = k \quad k \text{ número real}$$

- El efecto de esta acción es:
 - Incrementar el ancho de banda del sistema: sistema más “rápido” y mejor rechazo a perturbaciones.
 - El efecto negativo es el incremento en la sensibilidad del sistema al ruido y errores de modelado.



CA3: Introducción al control robusto

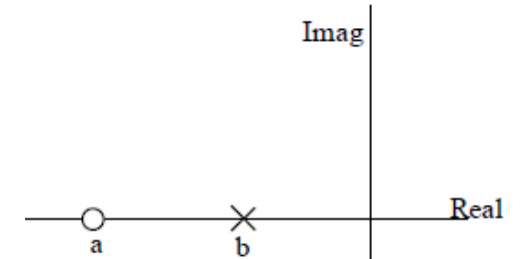
Loopshaping – Bloques – Red de atraso

- La función de transferencia es

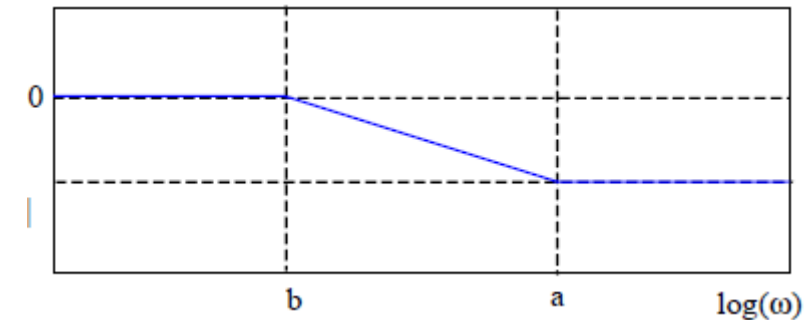
$$k(s) = \frac{b}{a} \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \quad a > b \geq 0$$

- La acción de esta red es aumentar la ganancia del lazo a frecuencias por debajo de b y agregar fase en la región de transición entre b y a .
- El efecto de esta acción es:
 - aumentar la ganancia del lazo a baja frecuencia, lo que implica un mejor rechazo de perturbaciones (performance).
 - el retraso de fase adicional introducido en la región de transición entre las frecuencias b y a puede desestabilizar el sistema si el retraso no se coloca correctamente. Para evitar los efectos de esto, se suele colocar la red muy por debajo (al menos una década) de la frecuencia de cruce de ganancia 0 dB.
- Un controlador PI tiene un efecto similar

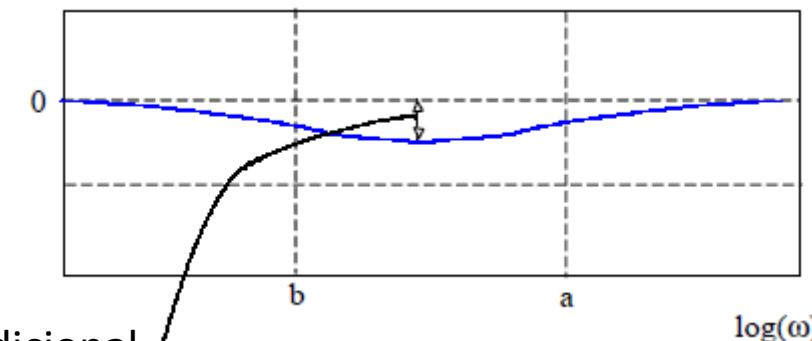
$$k(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{sk_p + k_i}{s}$$



$$20 \log_{10} |k(s)|$$



$$\angle k(s)$$



Retraso adicional



CA3: Introducción al control robusto

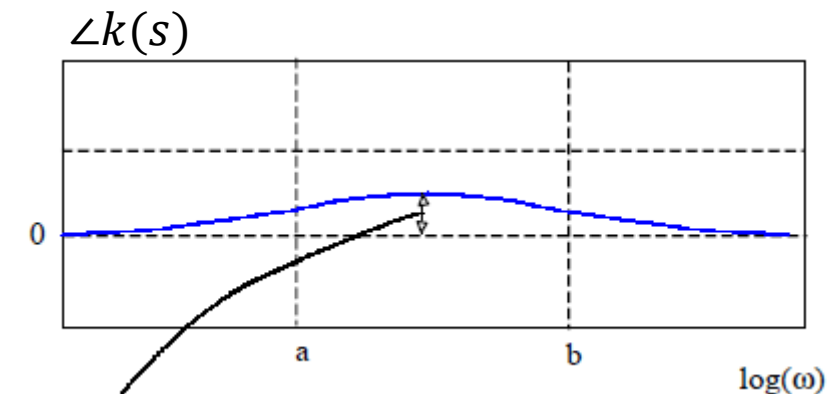
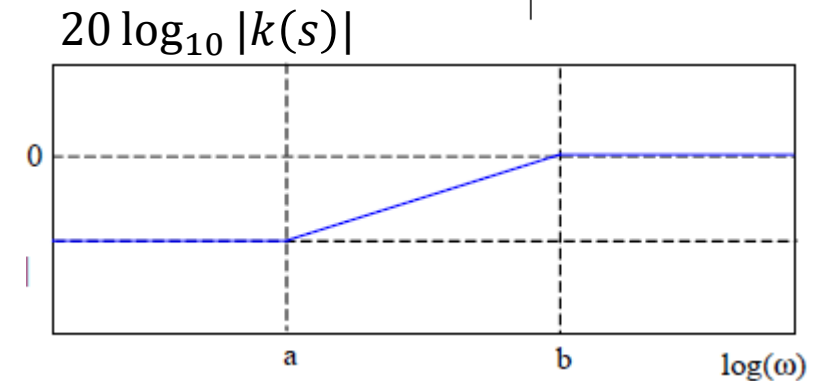
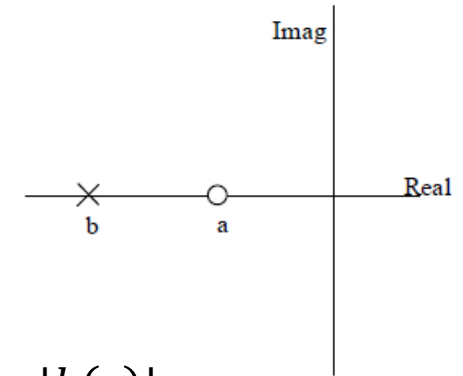
Loopshaping – Bloques – Red de adelanto

- La función de transferencia es

$$k(s) = \frac{b}{a} \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \quad b > a \geq 0$$

- La acción de esta red es aumentar la ganancia del lazo a frecuencias por encima de b y agregar fase por adelanto en la región de transición entre a y b .
- El efecto de esta acción es:
 - aumentar el ancho de banda del sistema, lo que resulta en un sistema “más rápido”. El adelanto de fase en la región de transición puede usarse para mejorar el margen de fase general de un sistema.
 - la mayor ganancia en alta frecuencia también tiene el efecto de hacer que el sistema sea más sensible a los errores de modelado y al ruido.
- El uso más común de las redes de adelanto es introducir un margen de fase adicional en el sistema.
- Un controlador PD tiene un efecto similar

$$k(s) = k_p + \frac{k_D s}{s+1} = \frac{\left(\frac{k_p}{p} + k_D\right)s + k_p}{\frac{s}{p} + 1}$$



“adelanto” adicional



CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Bloques – Red de adelanto-atraso

- La función de transferencia es

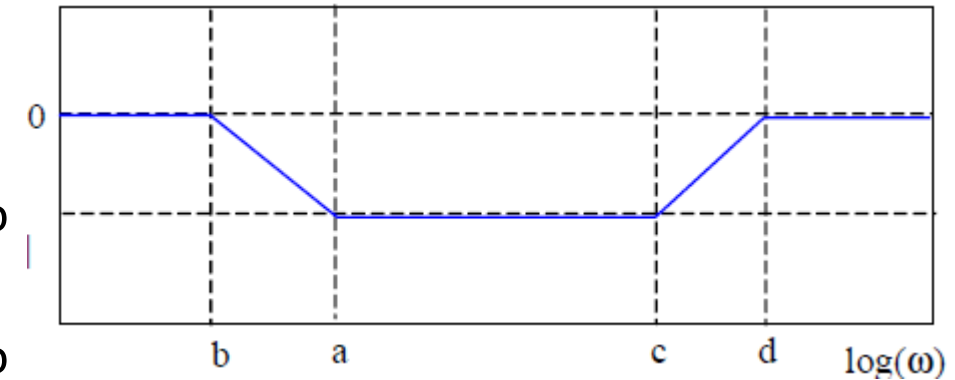
$$k(s) = \frac{b}{a} \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \frac{d}{c} \left(\frac{s+c}{s+d} \right) \quad \begin{array}{l} a > b \geq 0 \\ d > c \geq 0 \end{array}$$

- El efecto de este bloque es reducir la ganancia del lazo en un rango de frecuencia determinado.
- La red agrega el adelanto de fase como en la red de adelanto, pero también introduce un atraso de fase. Debe usarse con cuidado para evitar desestabilizar el sistema a lazo cerrado.

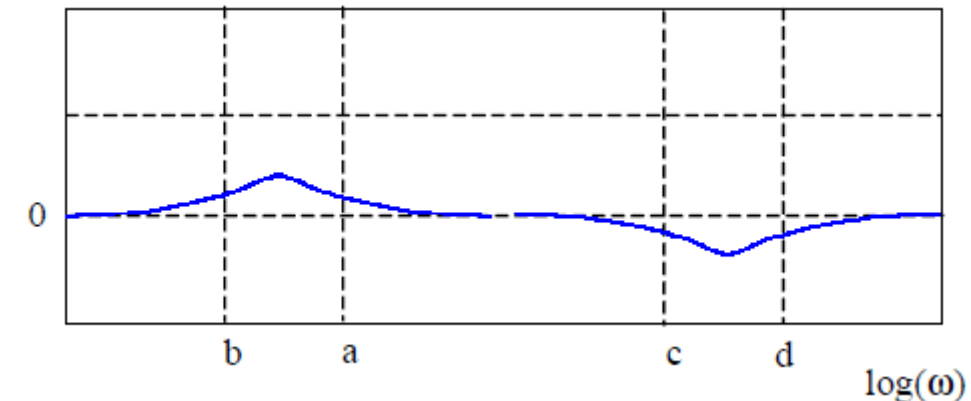
- Un controlador PID tiene un efecto similar

$$k(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D s}{\frac{s}{p} + 1}$$

$20 \log_{10} |k(s)|$



$\angle k(s)$





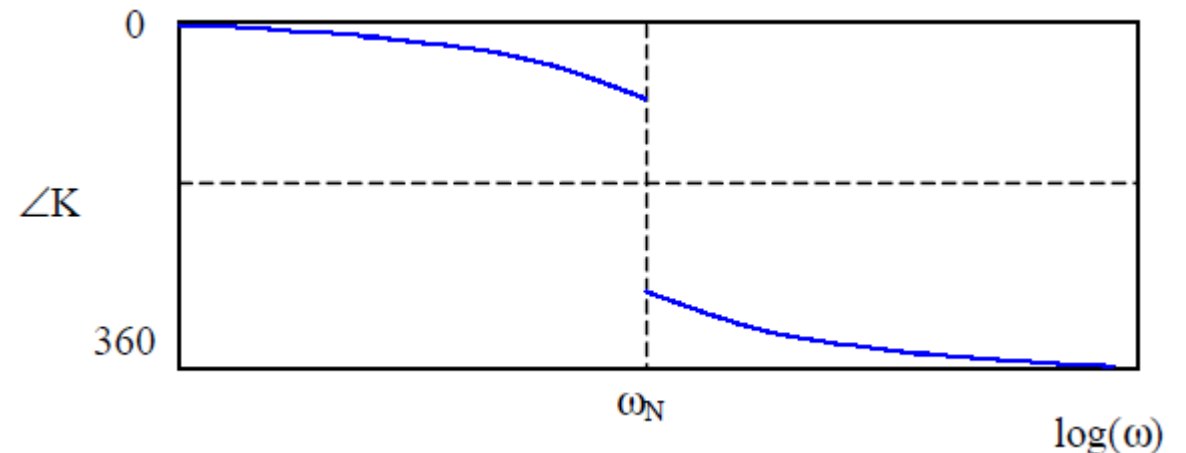
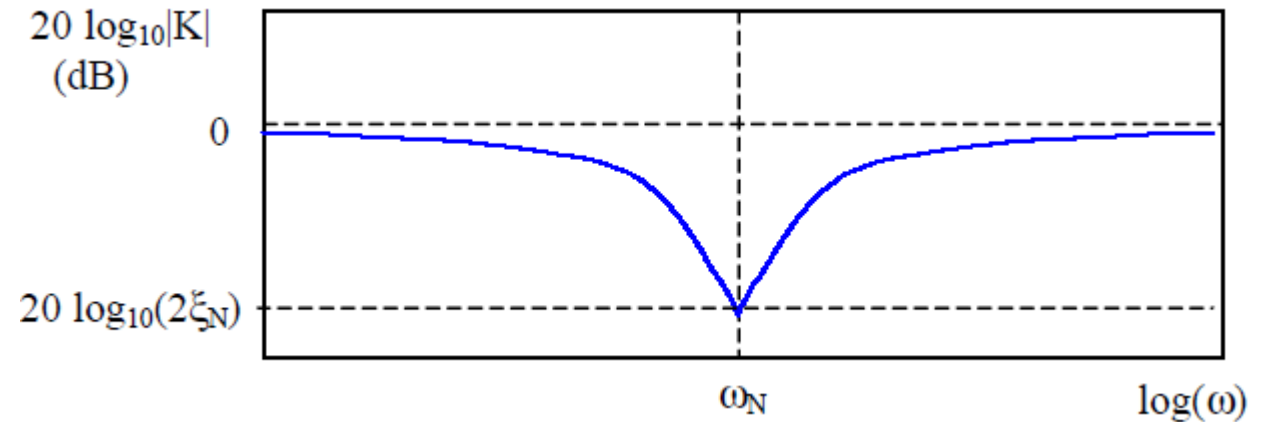
CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Bloques – Red notch

- La función de transferencia es

$$k(s) = \frac{s^2 + 2\xi_N\omega_N s + \omega_N^2}{s^2 + \omega_N s + \omega_N^2}$$

- La profundidad del notch se maneja con ξ_N .
- Los filtros notch se utilizan con frecuencia para atenuar picos resonantes en la función de lazo.





CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Bloques – Bloque High-Gain Roll-off

- La función de transferencia es

$$k(s) = \frac{\omega_r^M}{(s + \omega_r)^M} \quad \text{M y } \omega_r \text{ especificados por el diseñador}$$

- Atenúa en gran medida la magnitud de la ganancia de lazo a frecuencias superiores a ω_r .
- Estos filtros tienen una caída en alta frecuencia de 20M dB/dec. M especifica el número de polos a colocar en ω_r .



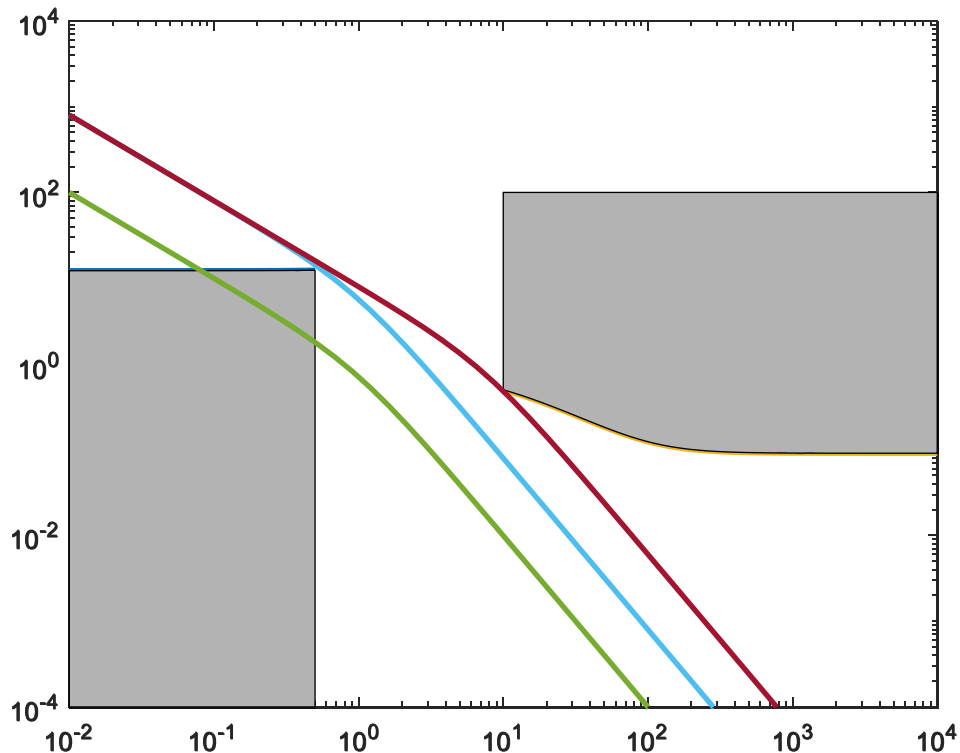
CA3: Introducción al control robusto

Loopshaping – Bloques - Ejemplo red de adelanto

$$g_0(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad W_\delta(s) = 0,1 \frac{s+1}{0,01s+1}$$

- Requerimiento de seguimiento

$$|S(j\omega)| < 0,1 \quad 0 < \omega < 0,5 \text{ rad/sec}$$



1. Problema

2. $K = 8$

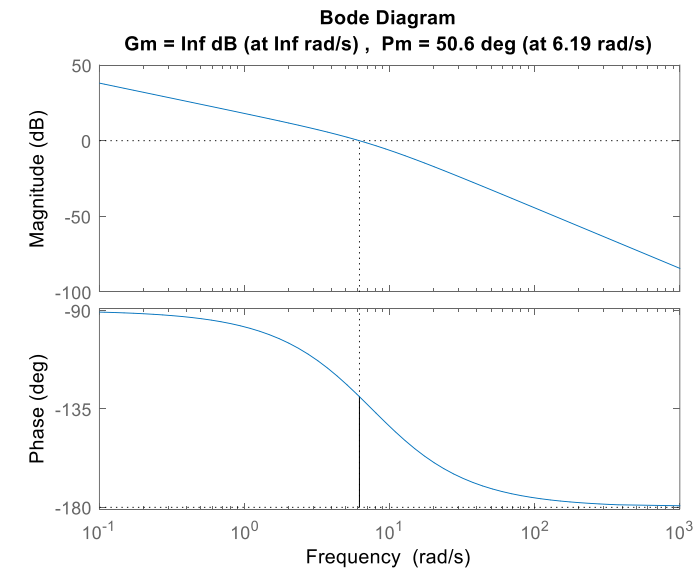
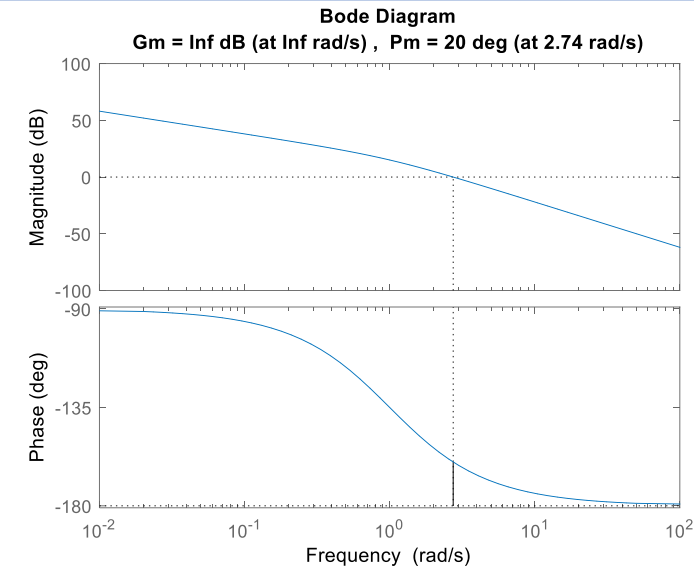
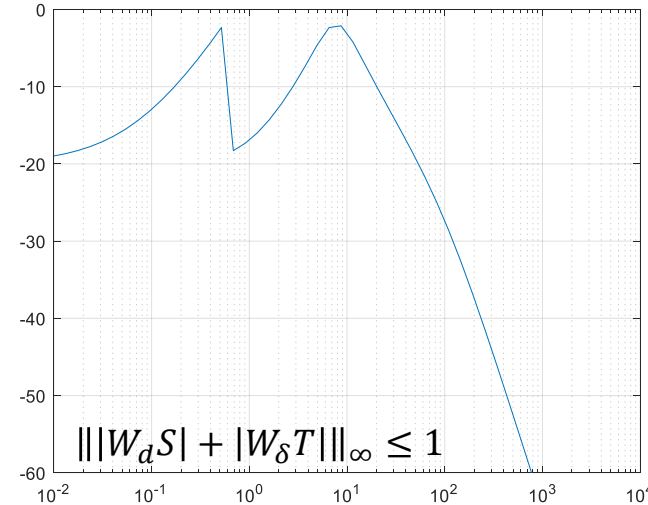
3. $K = 8 \frac{12,14}{1,6} \frac{s+1,6}{s+12,14}$

Agregado de 50° fase a $\omega_l = 2,74 \text{ rad/s}$

$$m = \frac{1 + \sin(50)}{1 - \sin(50)}$$

$$a = \frac{\omega_l}{\sqrt{m}}$$

$$b = \frac{\omega_l^2}{a}$$





Introducción al control robusto

Índice

- Introducción – Varios
- Sistemas bien planteados
- Incertidumbre y estabilidad
- Performance
- Loopshaping
- **Ejemplo de aplicación realista**

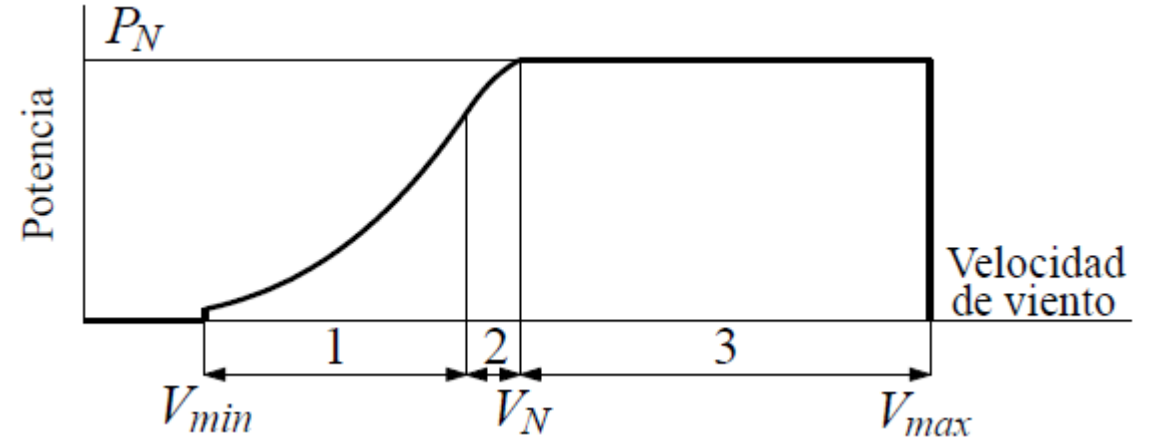
Tema 01

V1 - 2023



CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Introducción

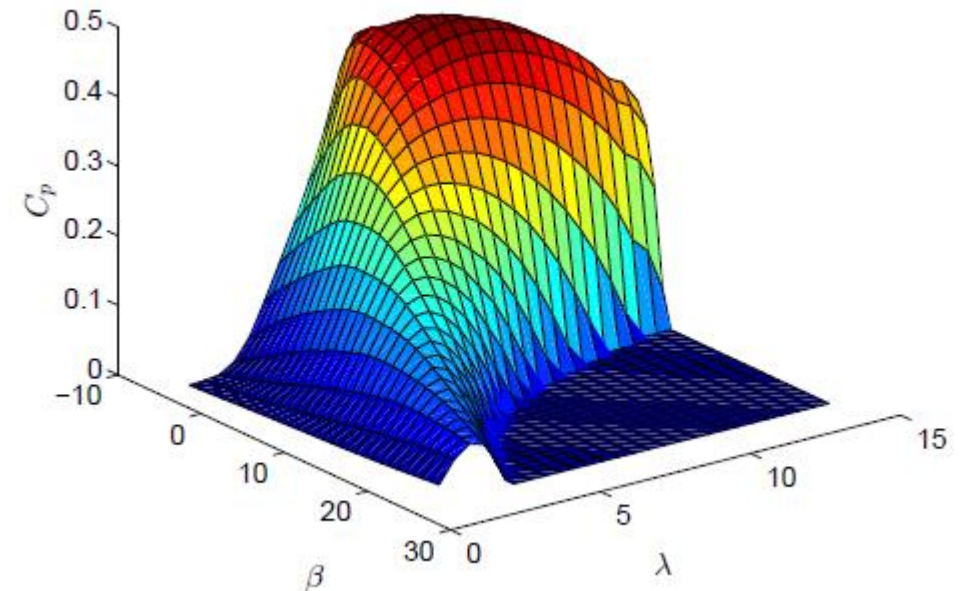


$$P_R(V, \beta, \Omega_r) = \frac{\pi \rho R^2}{2} C_P(\lambda, \beta) V^3$$

$$T_R(V, \beta, \Omega_r) = \frac{P_R(V, \beta, \Omega_r)}{\Omega_r}$$

λ : relación de velocidad de punta de pala

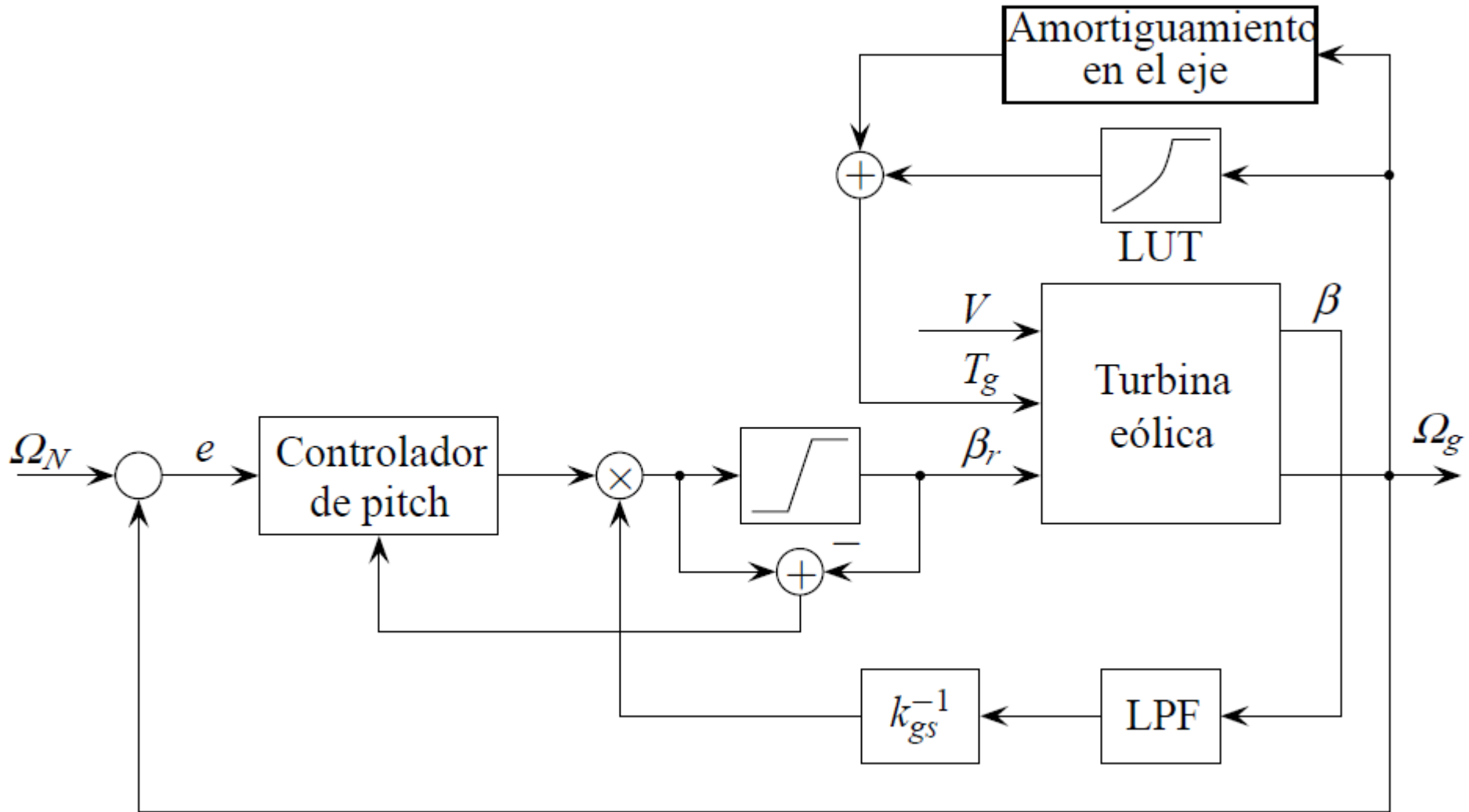
β : ángulo de paso de las palas





CA3: Introducción al control robusto

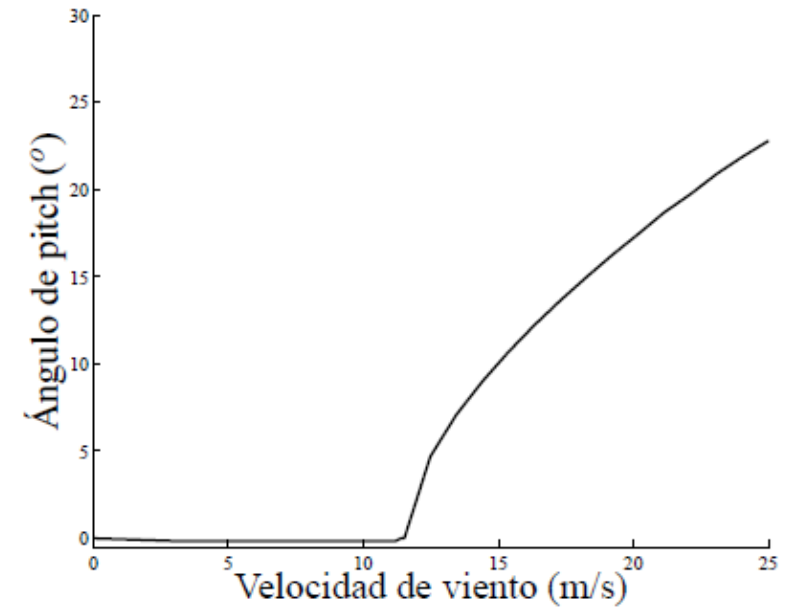
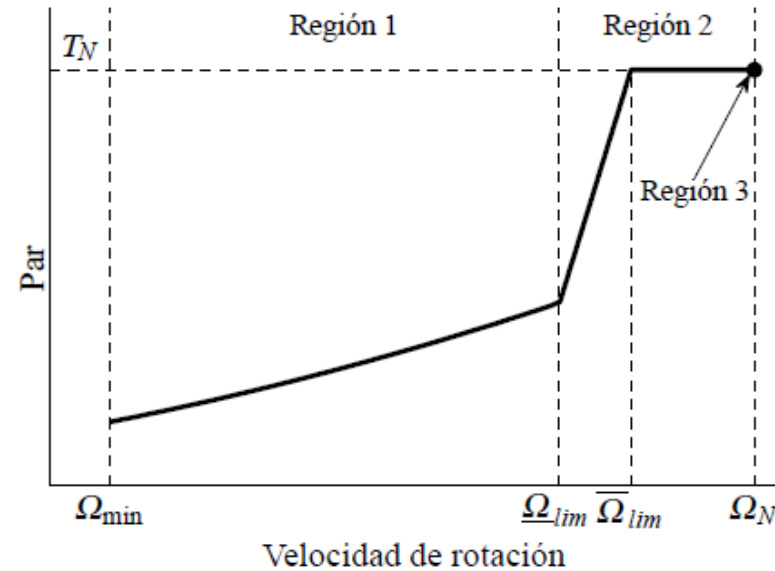
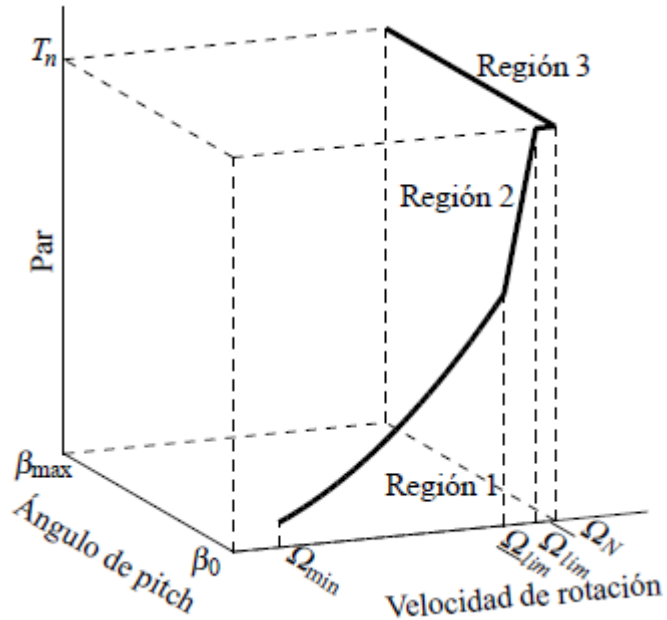
Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Esquema





CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Objetivos



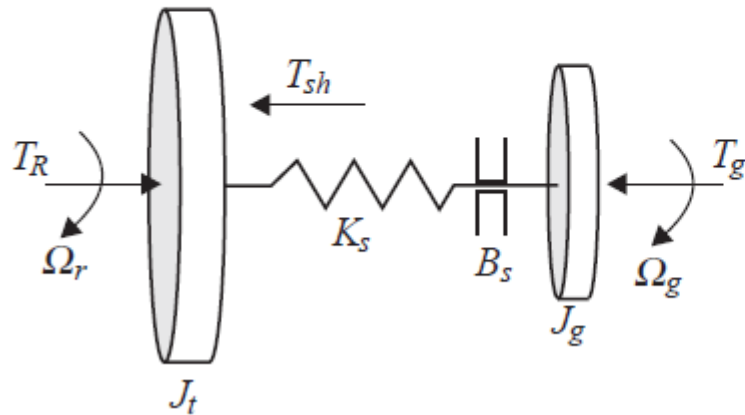
$$T_g = \left(\frac{\pi \rho R^5}{2 \lambda_o^3} C_{P \max} \right) \Omega_g^2 = k_t \cdot \Omega_g^2$$



CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Modelado

Modelo mecánico del tren de transmisión



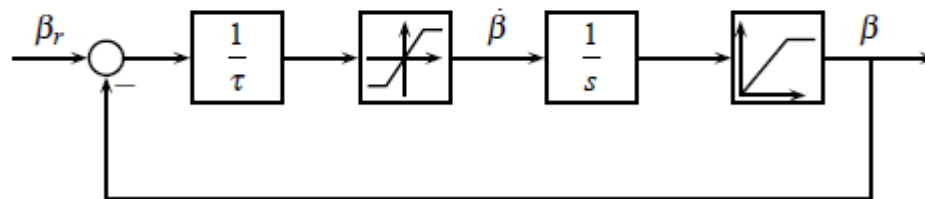
$$\dot{\phi} = \Omega_r - \frac{\Omega_g}{N_g},$$

$$J_t \dot{\Omega}_r = T_R - T_{sh},$$

$$J_g \dot{\Omega}_g = \frac{T_{sh}}{N_g} - T_g,$$

$$T_{sh} = K_s \phi + B_s (\Omega_r - \Omega_g / N_g)$$

Actuador de pitch



$$\dot{\beta} = -\frac{1}{\tau} \beta + \frac{1}{\tau} \beta_r,$$



CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Linealización

Linealización

$$\hat{T}_R(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r) = B_r(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)\hat{\Omega}_r + k_V(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)\hat{V} + k_\beta(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)\hat{\beta},$$

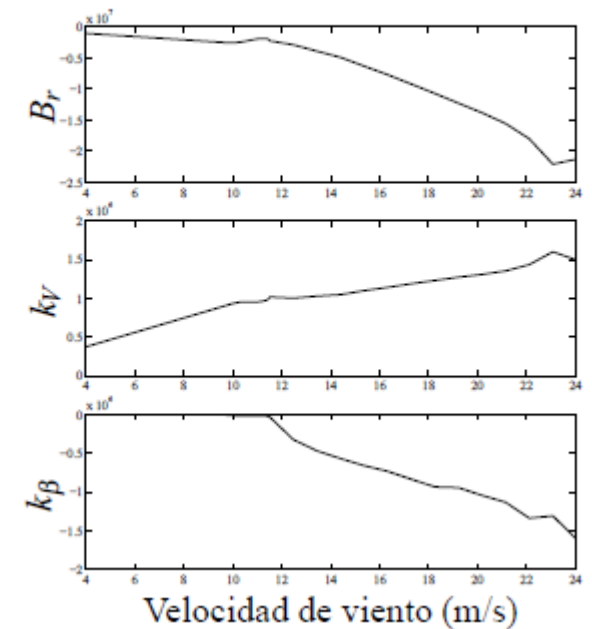
$$B_r(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r) = \left. \frac{\partial T_R}{\partial \Omega_r} \right|_{(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)}, \quad k_V(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r) = \left. \frac{\partial T_R}{\partial V} \right|_{(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)},$$

$$k_\beta(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r) = \left. \frac{\partial T_R}{\partial \beta} \right|_{(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)},$$

Modelo linealizado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/N_g & 0 \\ -K_s/J_r & (B_r(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r) - B_s)/J_r & B_s/J_r N_g & k_\beta(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)/J_r \\ K_s/J_g N_g & B_s/J_g N_g & -B_s/J_g N_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_V(\bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\Omega}_r)/J_r & 0 & 0 \\ 0 & -1/J_g & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{T}_g \\ \hat{\beta}_r \end{bmatrix}$$

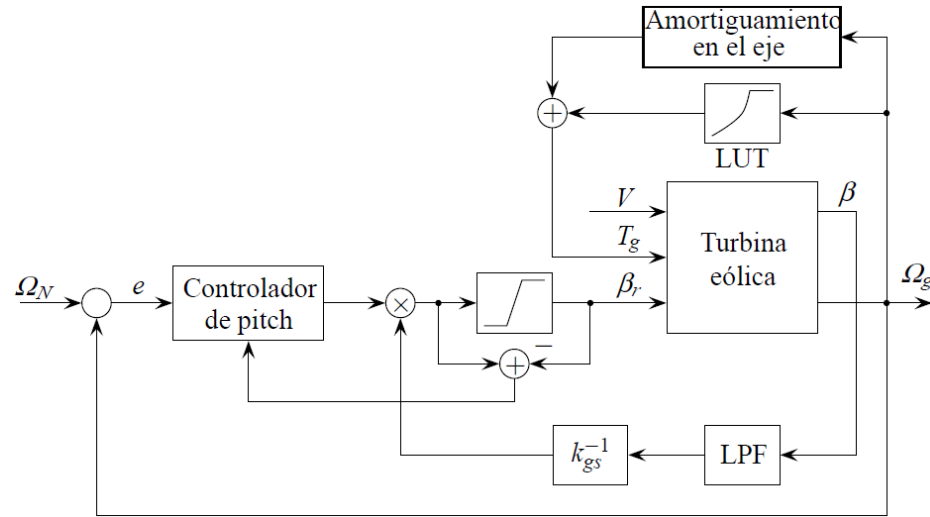
Variación coeficientes de linealización



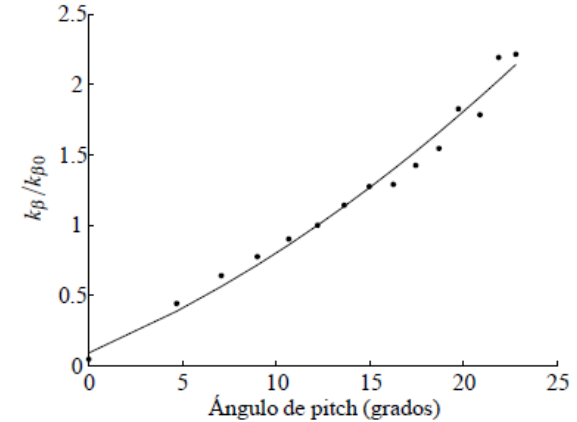


CA3: Introducción al control robusto

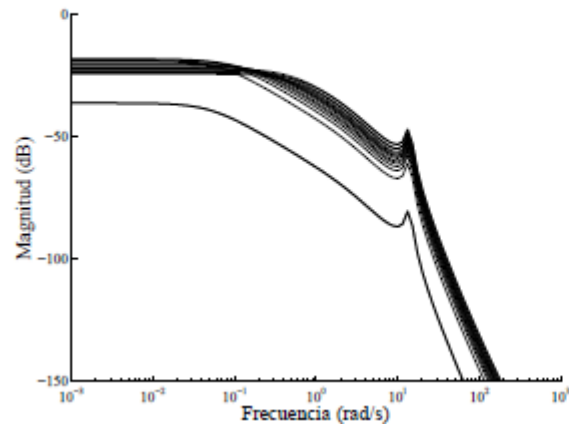
Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Incertidumbre



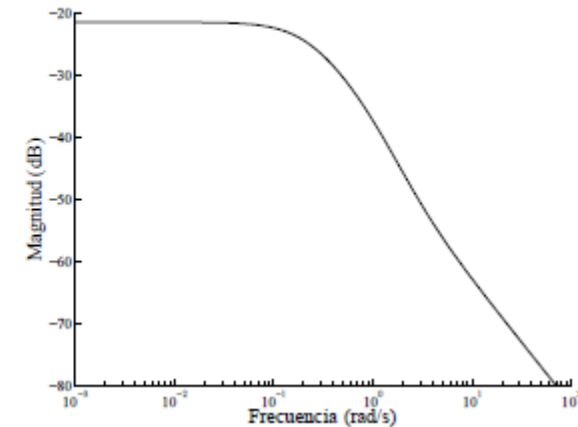
Inversión normalizada de la sensibilidad par-ángulo de pitch $((\frac{dT}{d\beta})^{-1})$



$T_{\Omega_g \beta}(s)$: Transferencia $\beta \rightarrow \Omega_g$



Peso de incerteza aditiva





Diseño Control de Pitch

Block diagram of the closed-loop system. The reference input $w \equiv \Omega_N$ enters a summing junction. The error signal e is fed into the plant $M(s)$. The output y is fed back to the summing junction and also branches to two parallel blocks $W'_e(s)$ and $W'_u(s)$, which produce signals \tilde{e} and $\tilde{\beta}_r$ respectively. The signal y also enters the controller $\tilde{K}(s)$. The output of $\tilde{K}(s)$ is $u \equiv \beta_r$, which is fed into the actuator $G(s)$. The output of $G(s)$ is $\hat{\Omega}_g$, which is fed back to the summing junction with a negative sign.

$$W_u(s) = k_u \frac{s/0.1\omega_u + 1}{s/\omega_u + 1}$$

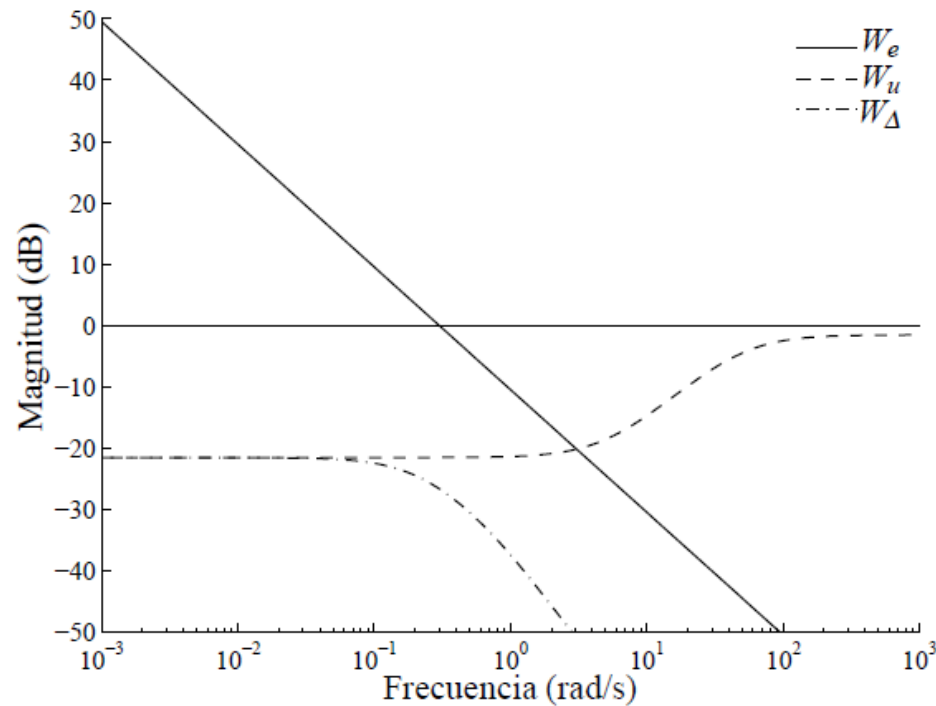


CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Diseño

El controlador fue diseñado de acuerdo con la configuración previa con

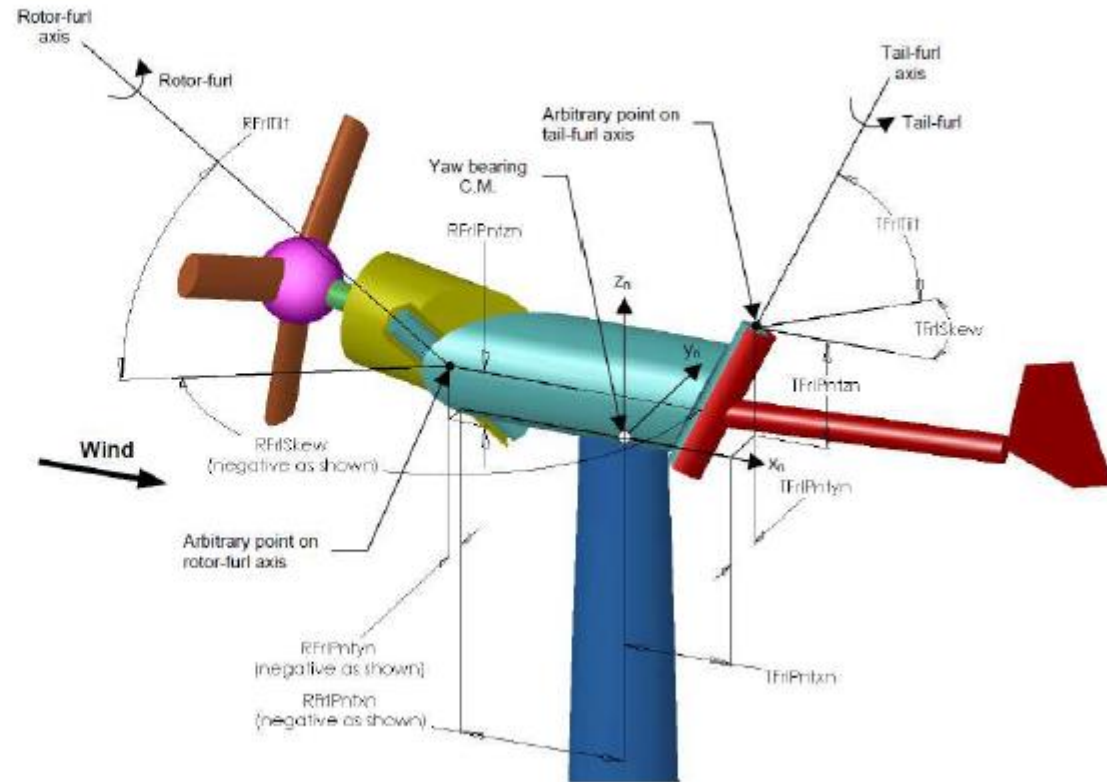
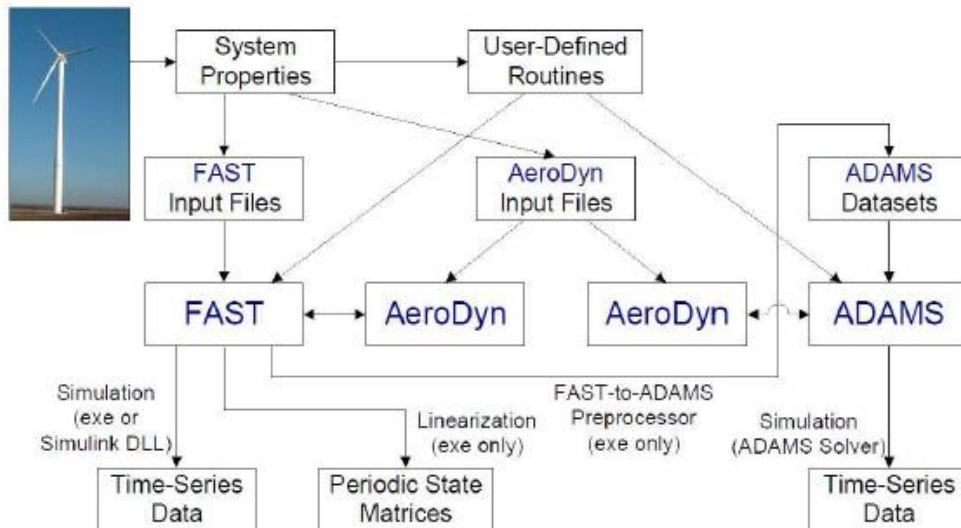
$$W_e'(s) = M(s)W_e(s) = \frac{0.3}{s}, \quad W_u' = W_u = 0.25 \frac{s/5 + 1}{s/50 + 1}$$



- La norma infinito de la función de transferencia de lazo cerrado resultó 0.977.
- La norma de la función de transferencia de Ω_N a $\beta ||K(I + KG)^{-1}||_\infty = 0.972$.

Simulador FAST (Fatigue, Aerodynamics, Structures and Turbulence)

- ▶ 16 DOFs.
- ▶ Simulink/Matlab (S-Function).
- ▶ Programando/Compilando y vinculando programas.

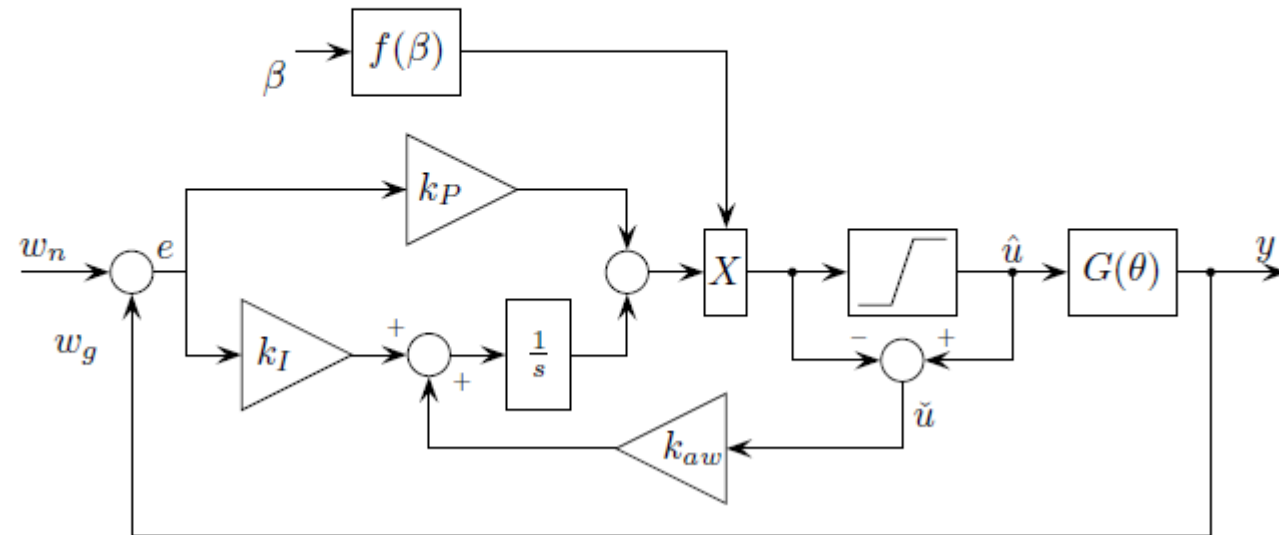




CA3: Introducción al control robusto

Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Benchmark

A modo de referencia, se implementó y simuló un controlador PI clásico de ganancias tabuladas ampliamente utilizado como controlador de test.



Escenarios:

- ▶ Ráfaga de viento (sugerido en el estándar IEC 61400-1).
- ▶ Perfil creciente de viento (sugerido en el estándar IEC 61400-1).
- ▶ Perfil realista de viento (generado con Turbsim).



CA3: Introducción al control robusto

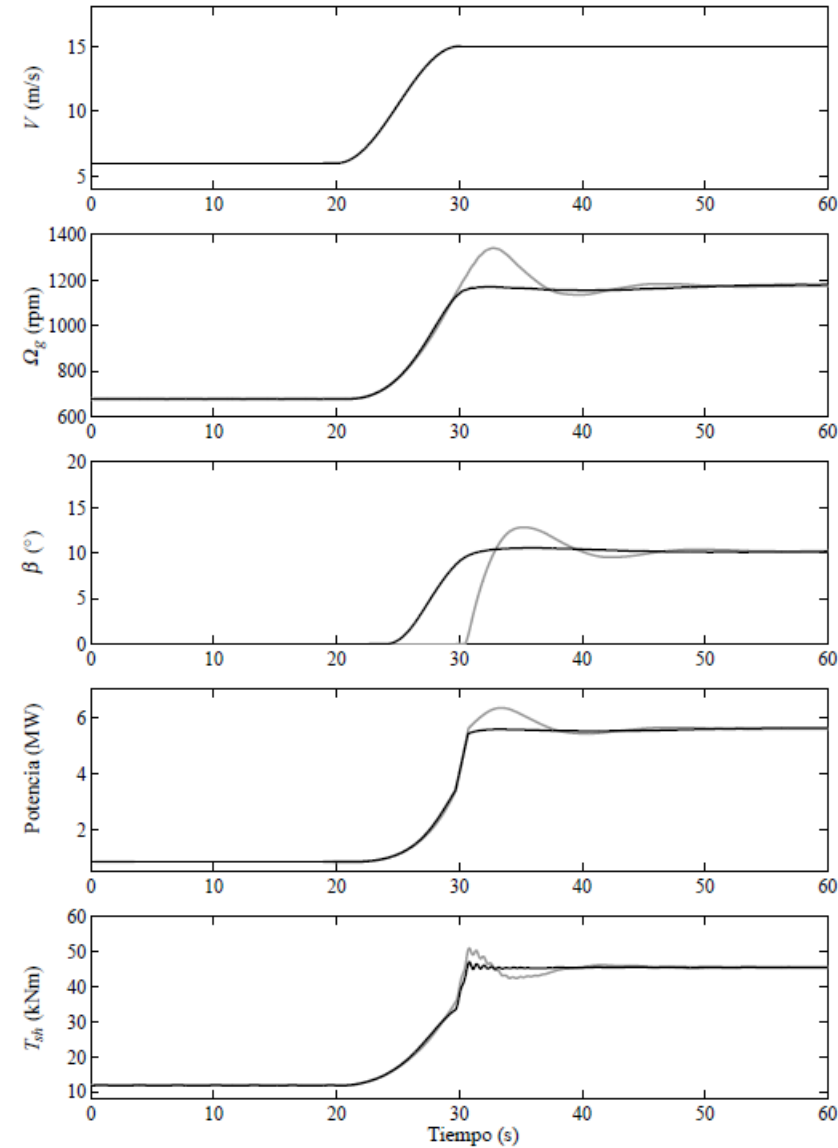
Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Resultados

Comparaciones:

- Se puede observar que el controlador H_∞ consigue mejor regulación de la velocidad de rotación con menor actividad de pitch.
- En el caso del controlador H_∞ no existe sobrepaso de velocidad, mientras que en el caso del controlador PI el sobrepaso es del 13.72 %.
- Al igual que en el primer escenario, el controlador H_∞ consigue respuestas más suaves tanto de la potencia de salida como del par en el eje de transmisión.

Líneas negras: H_∞

Líneas grises: PI





CA3: Introducción al control robusto

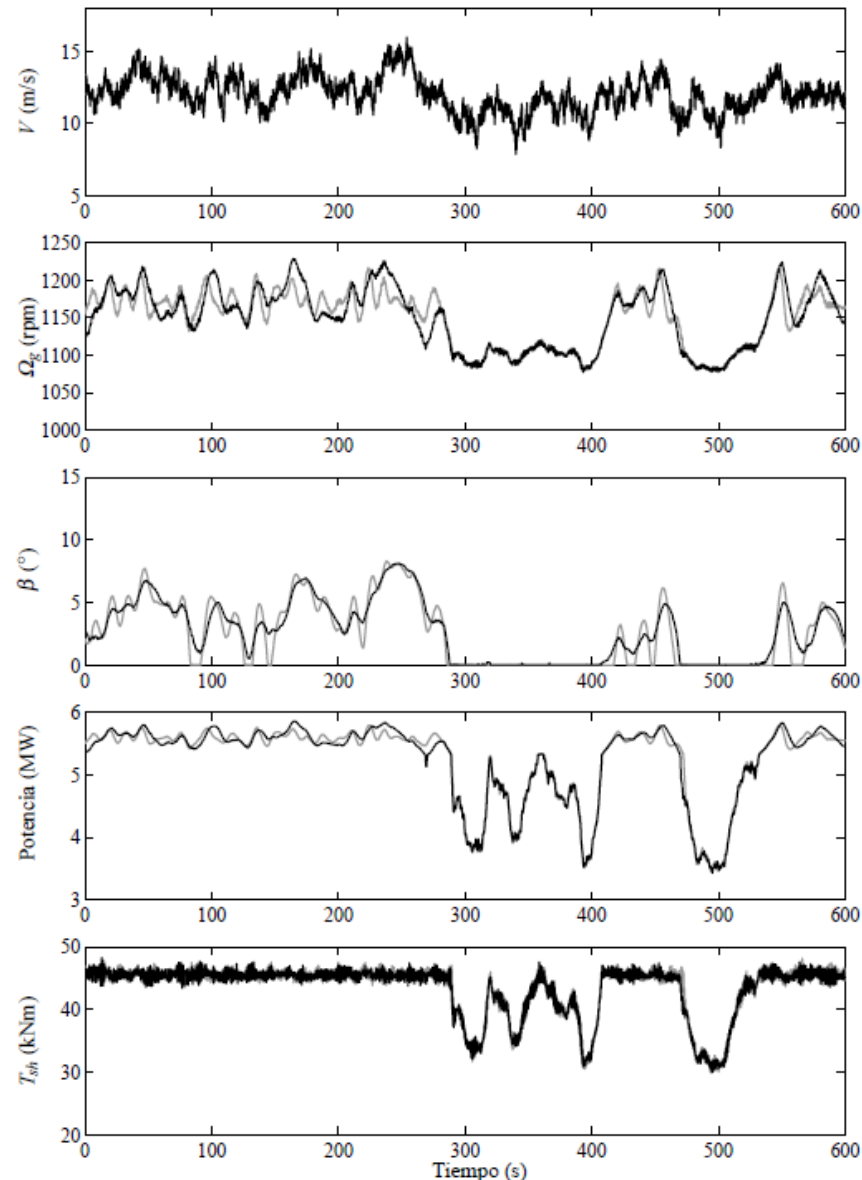
Ejemplo de aplicación – Control de un aerogenerador de alta potencia – Resultados

Comparaciones:

- Se escogió una velocidad media de viento de 12 m/s de forma tal que la turbina opere en las tres regiones de operación, pero mayormente en la zona de transición.
- Se puede observar que el controlador H_∞ consigue mejor regulación con una significativa menor actividad de pitch.

Líneas negras: H_∞

Líneas grises: PI





CA3: Introducción al control robusto

Bibliografía

- Sanchez-Peña, Ricardo. “Robust Systems: Theory and Applications”. Wiley & Sons, 1998.
- Sanchez-Peña, Ricardo. “Introducción a la Teoría de Control Robusto”. AADECA, 1999.
- John Doyle, Bruce Francis and Allen Tannenbaum. “Feedback control theory”. MACMillan, 1992.

Algunas más...

- Zhou, Kemin. Essentials of Robust Control. 1999, Prentice Hall. ISBN 0-13-525833-2.
- Kemin Zhou, John Doyle, Keith Glover. Robust and optimal control. 1996, Prentice Hall.
- Geir E. Dullerud, Fernando G. Paganini. “A Course in Robust Control Theory a convex approach”. Springer, 2005.
- Da-Wei Gu, Petko H. Petkov and Mihail M. Konstantinov. “Robust Control Design with MATLAB”. Springer, 2013,