



E1214 Fundamentos de las Comunicaciones

E0214 Comunicaciones

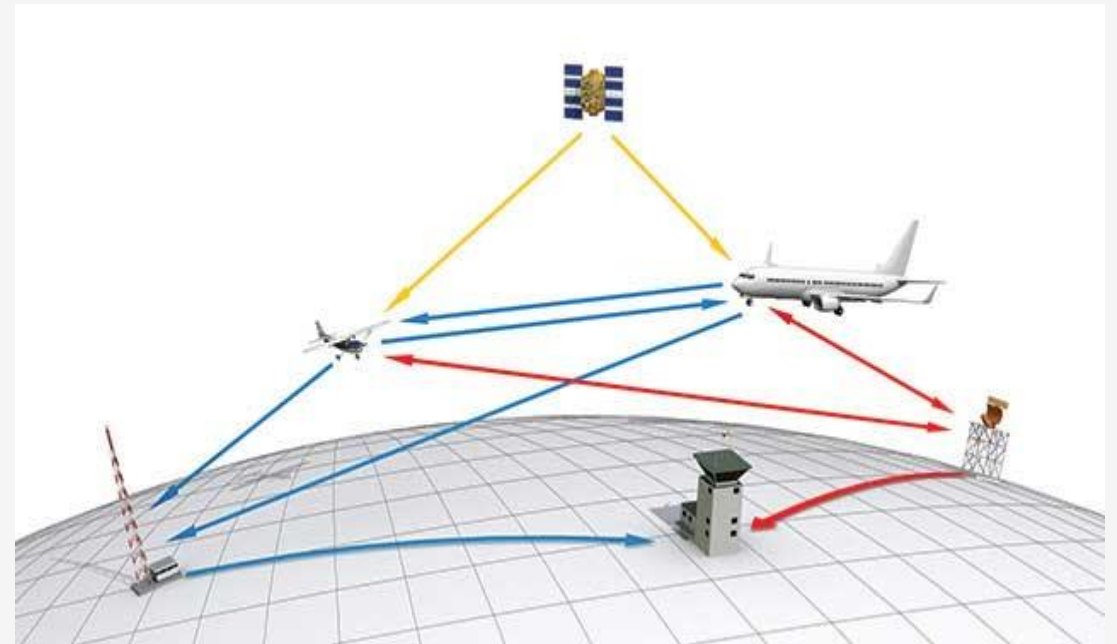
E0311/E1311 Comunicaciones

Curso 2024

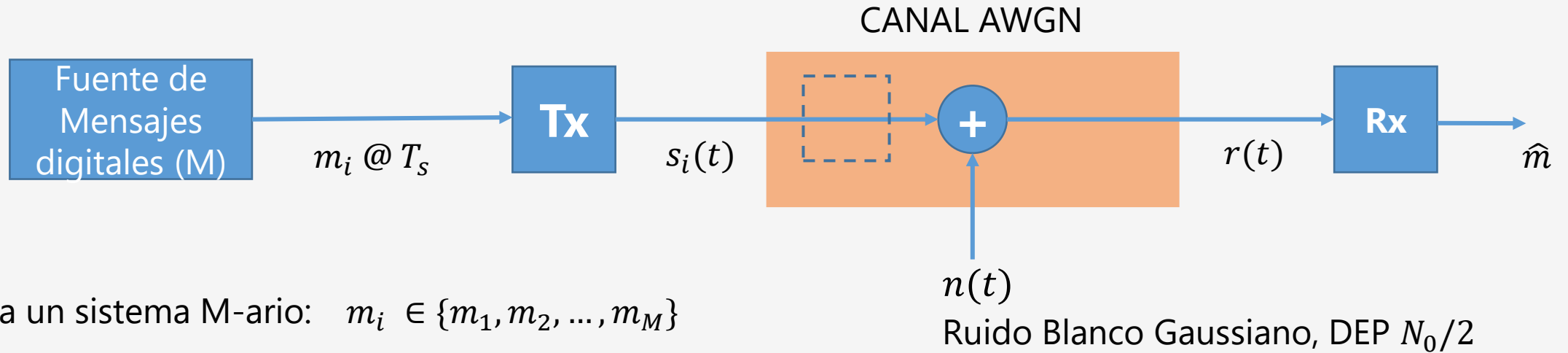
Temas a tratar

- Sistemas de Modulación digital binarios

Sistema ADS-B



Sistemas de Modulación Digital



T_s : Tiempo de símbolo [s] ; T_b : Tiempo de bit [s]

R_s : Tasa de símbolos ; $R_s = 1/T_s$ [Baudios]

Si $M = 2^n$ esto es que cada símbolo se compone de n bits

$$T_s = n T_b \text{ [s]} \quad ; \quad R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{n}{T_s} = n R_s \text{ [bps]}$$

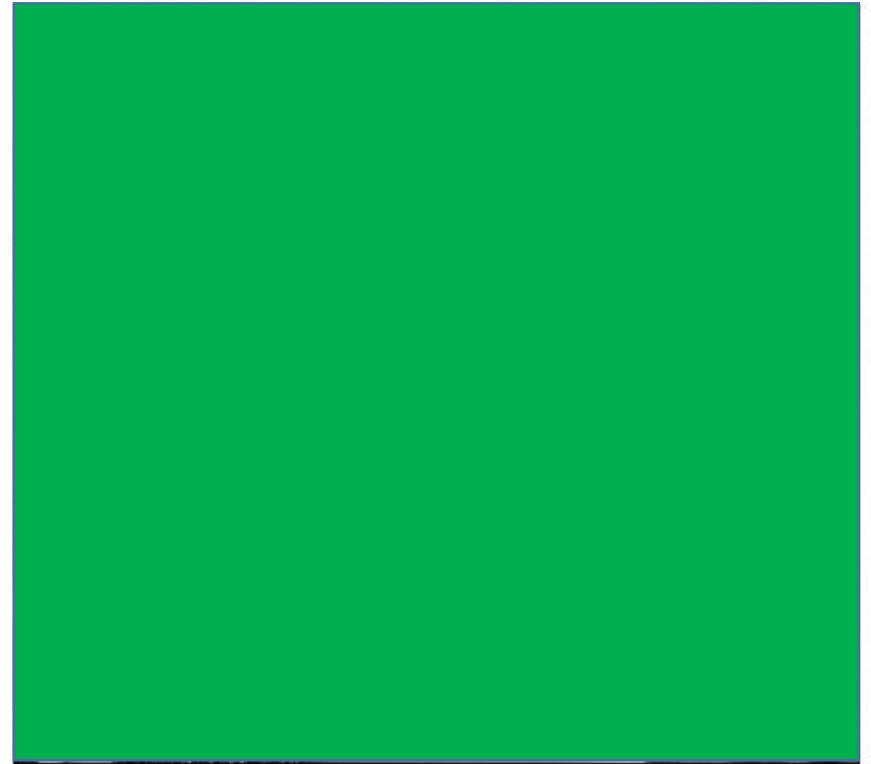
Sistemas de modulación digital

Símbolo correspondiente a '0'



s_0

Símbolo correspondiente a '1'



s_1

Sistemas de modulación digital



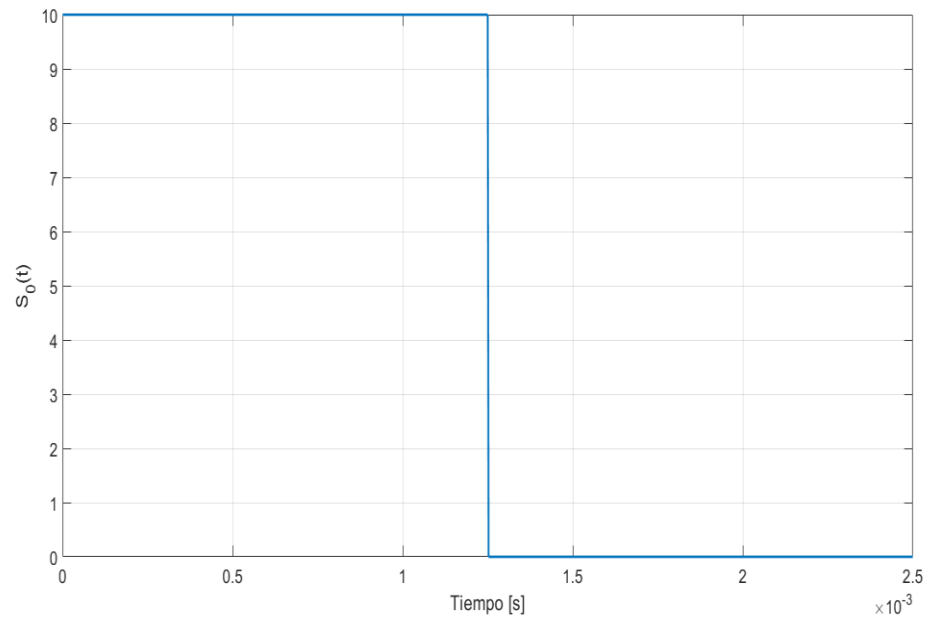
señal recibida

Sistemas de modulación digital

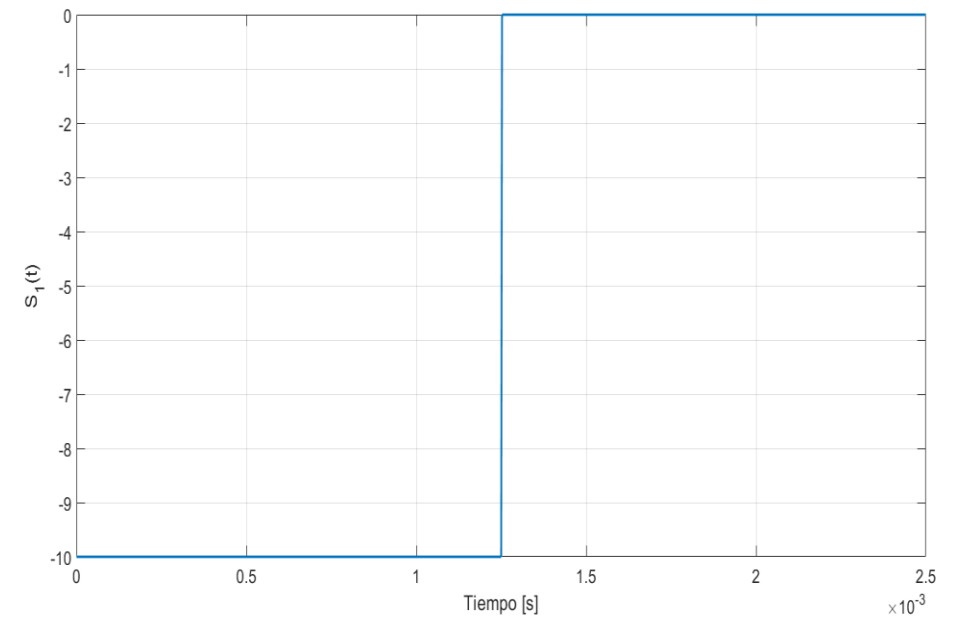


Sistemas de modulación digital

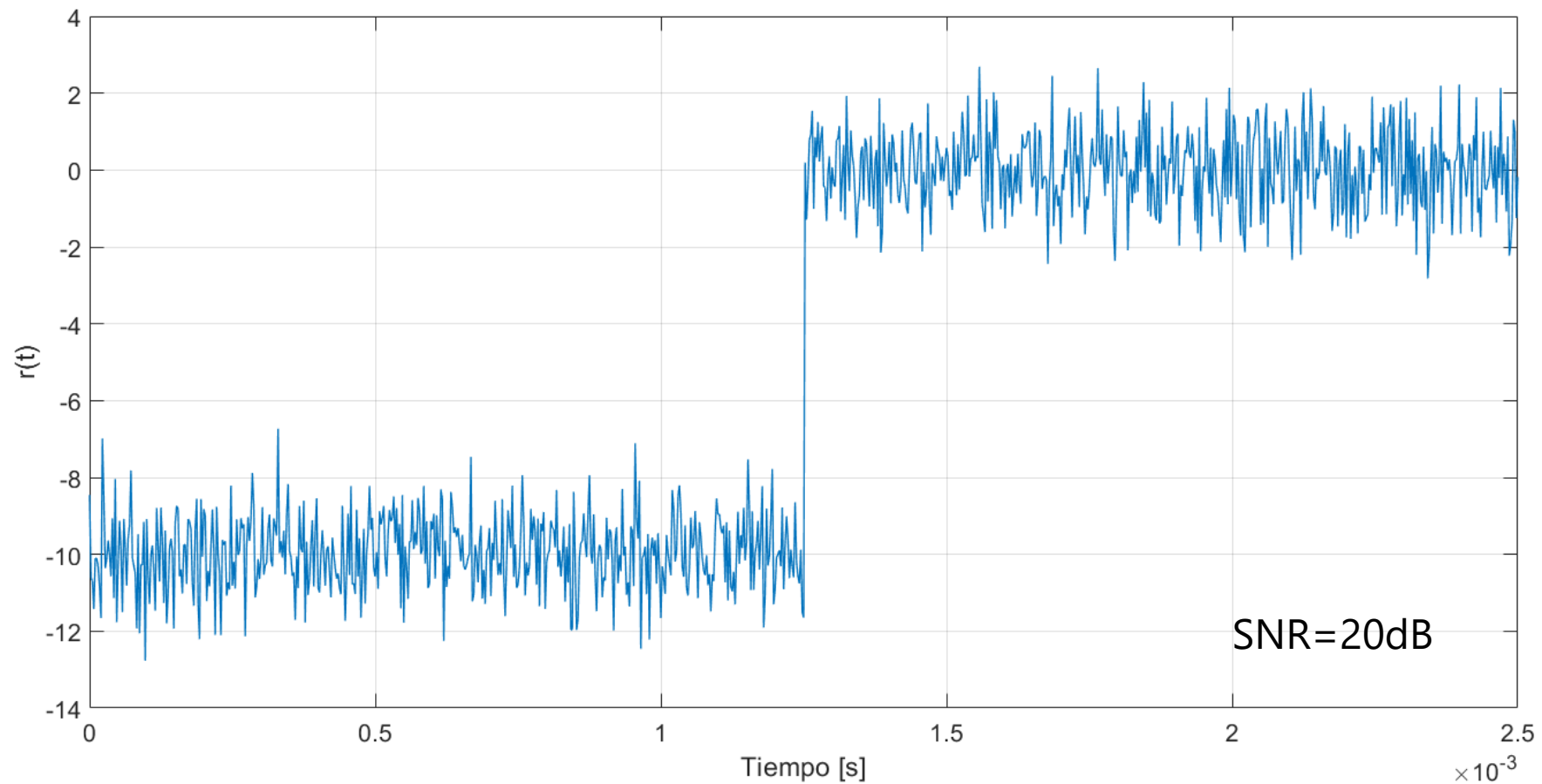
Símbolo correspondiente a '0'



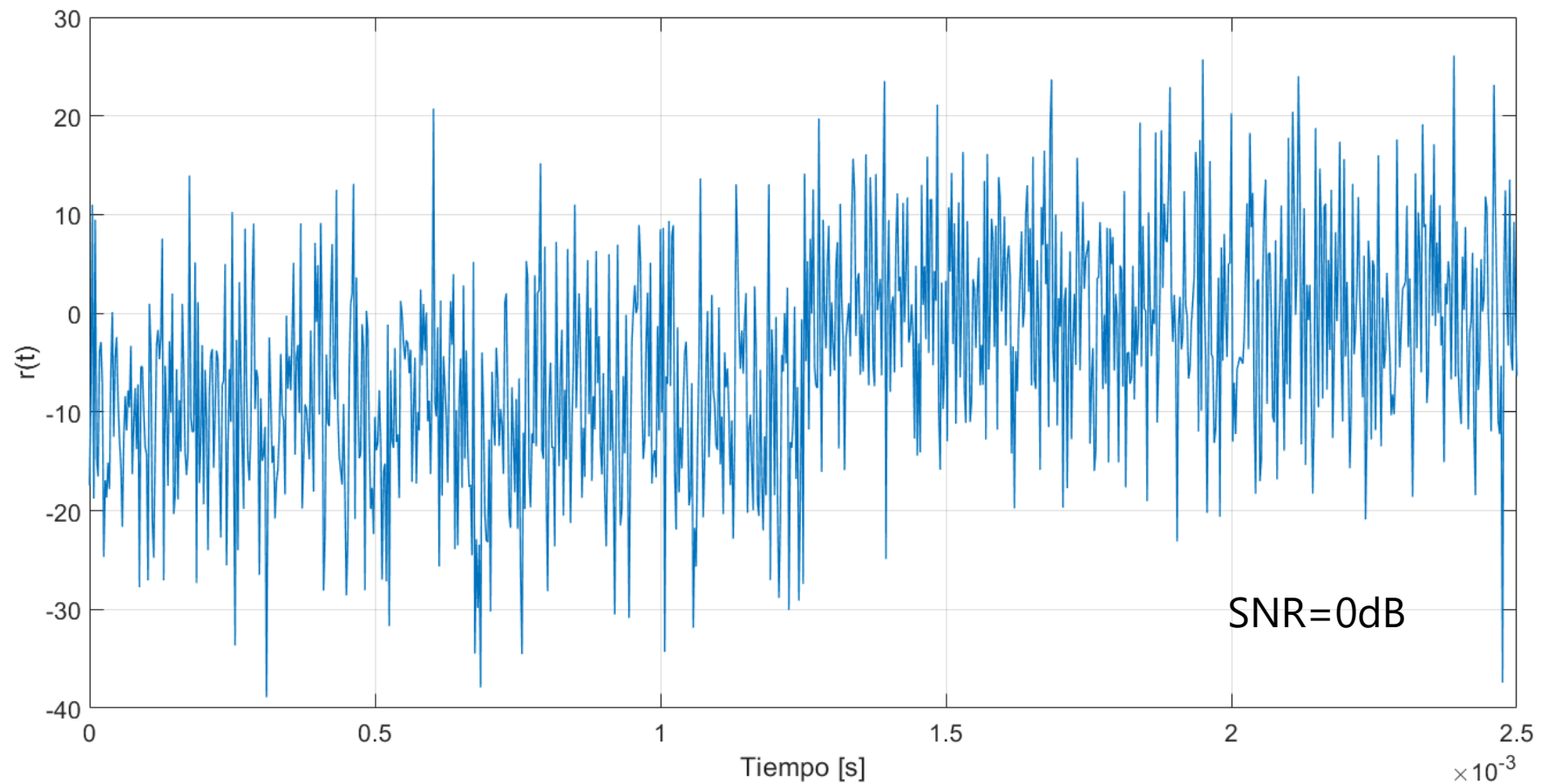
Símbolo correspondiente a '1'



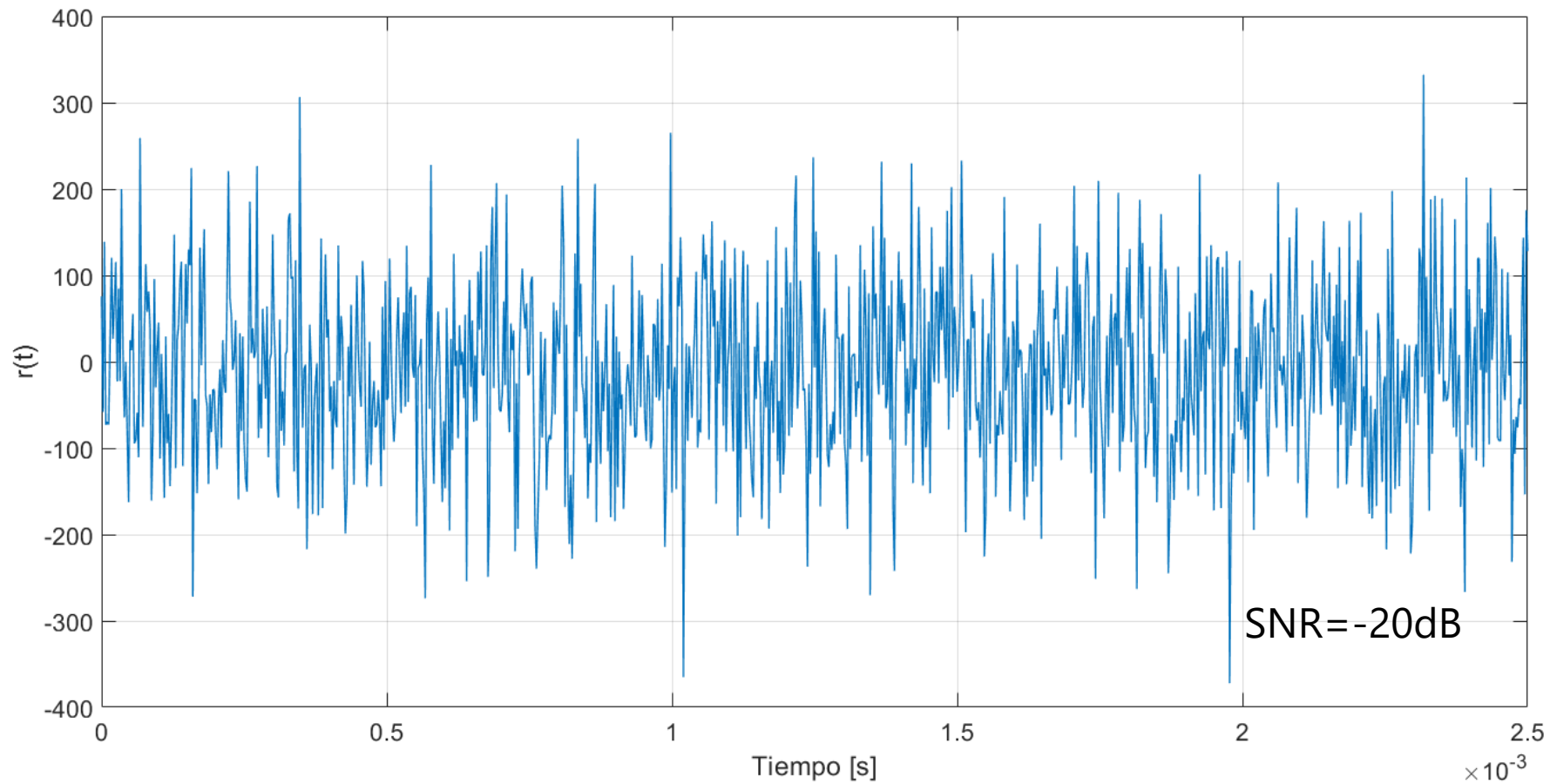
Sistemas de modulación digital



Sistemas de modulación digital

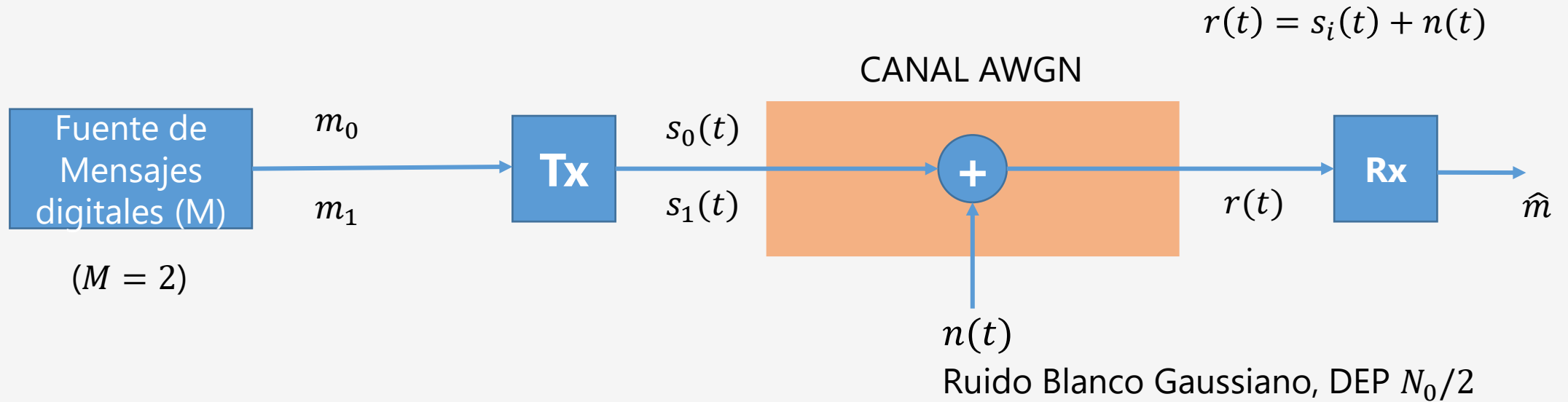


Sistemas de modulación digital



Promedio muestras: -10.5221

Sistemas de modulación digital (binarios y sincrónicos)



Medida de performance: P_{e_b}

sensibilidad es la menor potencia en entrada Rx (p. ej. antena) / cumpla con P_{e_b}

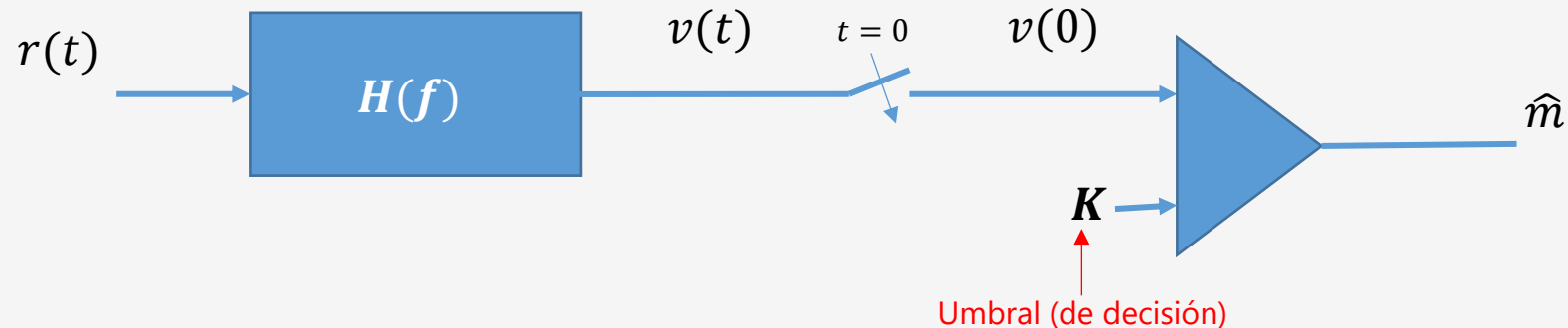
$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \\ E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt \end{aligned} \right\}$$

$$E_b = E_0 P\{m_0\} + E_1 P\{m_1\} = \frac{E_0 + E_1}{2}$$

↑
Símbolos (bits) equiprobables

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

Receptor óptimo:



$$v(t) = s_{i_f}(t) + n_f(t) \quad i \in \{0,1\}$$

En $t = 0$:

$$v(0) = \begin{cases} s_{0_f}(0) + n_f(0) & \text{si se transmitió } s_0(t) \\ s_{1_f}(0) + n_f(0) & \text{si se transmitió } s_1(t) \end{cases}$$

↑
valor
determinado
↑
variable
aleatoria

$n_f(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

\longrightarrow

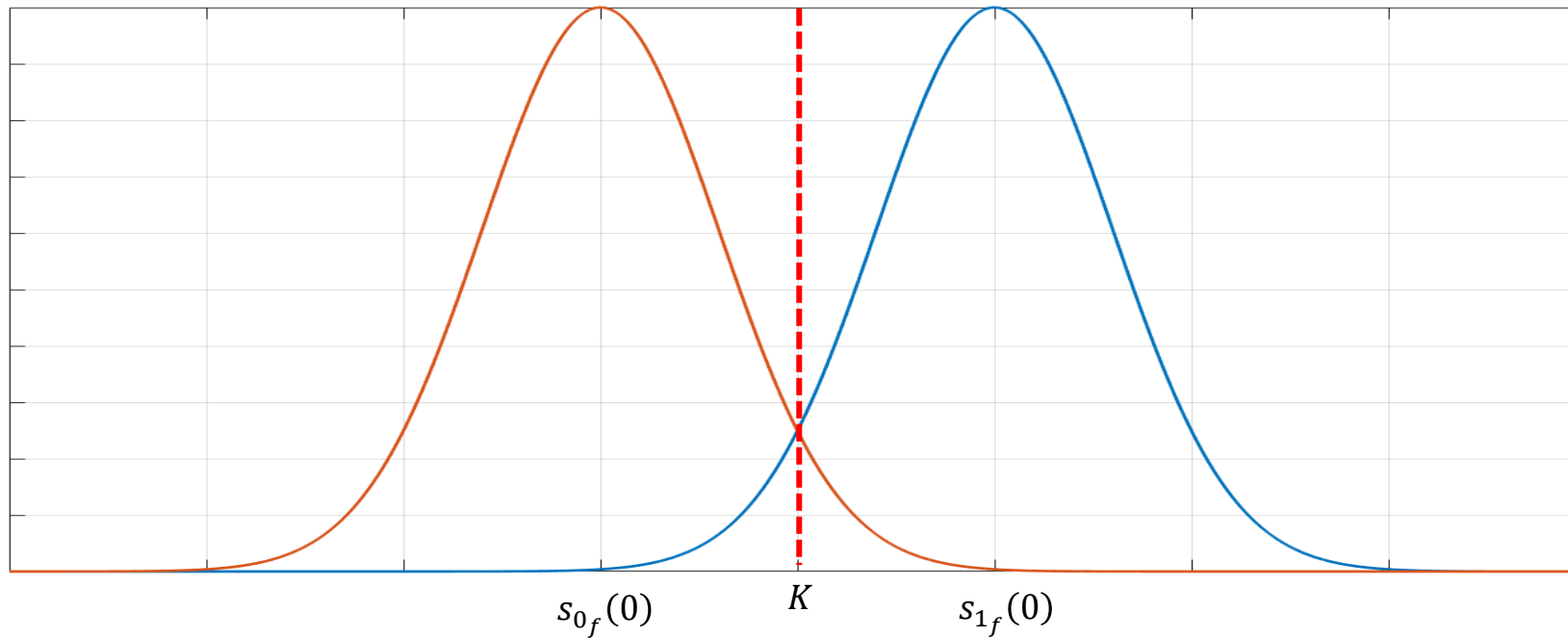
$v(0) \sim \mathcal{N}(s_{0_f}(0), \sigma_n^2)$

\longrightarrow

$v(0) \sim \mathcal{N}(s_{1_f}(0), \sigma_n^2)$

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_f n_f}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)



Eventos de error:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_{0f}(0) + n_f(0) > K & \text{si se transmitió } s_0(t) \\ s_{1f}(0) + n_f(0) < K & \text{si se transmitió } s_1(t) \end{array} \right.$$

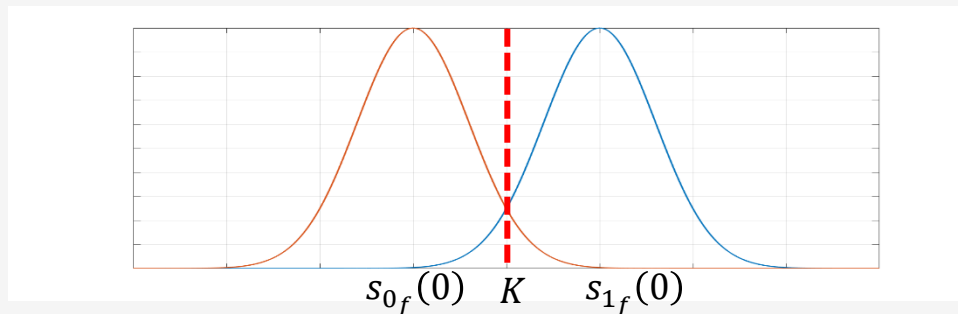
Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

$$P\{\text{error/transmití } s_0\} = P\{s_{0f}(0) + n_f(0) > K\} = P\{n_f(0) > K - s_{0f}(0)\} = P\left\{\frac{n_f(0)}{\sigma_n} > \frac{K - s_{0f}(0)}{\sigma_n}\right\} = Q\left(\frac{K - s_{0f}(0)}{\sigma_n}\right)$$

$$\begin{aligned} P\{\text{error/transmití } s_1\} &= P\{s_{1f}(0) + n_f(0) < K\} = 1 - P\{s_{1f}(0) + n_f(0) > K\} = 1 - P\{n_f(0) > K - s_{1f}(0)\} = \\ &= 1 - P\left\{\frac{n_f(0)}{\sigma_n} > \frac{K - s_{1f}(0)}{\sigma_n}\right\} = 1 - Q\left(\frac{K - s_{1f}(0)}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{s_{1f}(0) - K}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

$$P\{\text{error}\} = P\{\text{error/transmití } s_0\} P\{\text{transmitir } s_0\} + P\{\text{error/transmití } s_1\} P\{\text{transmitir } s_1\}$$

$$P\{\text{error}\} = P_{e_b} = Q\left(\frac{K - s_{0f}(0)}{\sigma_n}\right) \frac{1}{2} + Q\left(\frac{s_{1f}(0) - K}{\sigma_n}\right) \frac{1}{2}$$



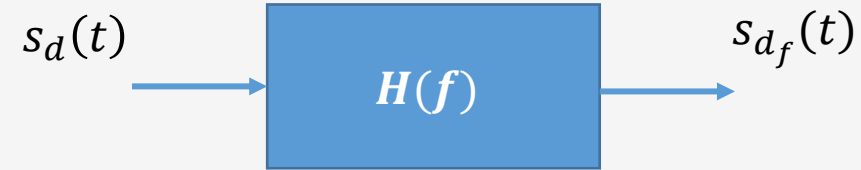
$$K_{opt} = \frac{s_{0f}(0) + s_{1f}(0)}{2}$$

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

$$P_{eb} = Q\left(\frac{s_{1f}(0) - s_{0f}(0)}{2\sigma_n}\right) \longrightarrow P_{eb} \text{ mínima} \Rightarrow \left(\frac{s_{1f}(0) - s_{0f}(0)}{2\sigma_n}\right) \text{ máximo}$$

$$s_d(t) \triangleq s_1(t) - s_0(t)$$

$$s_{df}(t) \triangleq s_{1f}(t) - s_{0f}(t)$$



$$s_{df}(t) = \{s_d * h\}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_d(f) H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_d(f) H(f) e^{j2\pi ft} df$$

Tenemos que maximizar $\frac{s_{df}(0)}{2\sigma_n}$ que es lo mismo que hacer máximo $SNR(0) \triangleq \frac{|s_{df}(0)|^2}{\sigma_n^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} S_d(f) H(f) df|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$SNR(0) \leq \frac{2}{N_0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_d(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

$$SNR(0) \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S_d(f)|^2 df \quad \text{la igualdad (máximo) se logra cuando } H(f) = \alpha S_d^*(f)$$

FILTRO ADAPTADO

(matched filter / filtro casado)

$$H(f) = \alpha S_d^*(f)$$

$$h(t) = \alpha s_d^*(-t) = \alpha [s_1^*(-t) - s_0^*(-t)]$$

$$\text{Causal: } h(t) = \alpha s_d(T_b - t)$$

$$P_{eb} = Q\left(\frac{s_{1f}(0) - s_{0f}(0)}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\text{máx}\{SNR(0)\}}}{2}\right)$$

$$\text{máx}\{SNR(0)\} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S_d(f)|^2 df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |s_d(t)|^2 dt = \frac{2}{N_0} E_{sd}$$

$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{\frac{E_{sd}}{2 N_0}}\right)$$

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

$$P_{eb} = Q \left(\sqrt{\frac{E_{sd}}{2 N_0}} \right)$$

$$r_{s_0 s_1}(0) = r_{s_1 s_0}^*(0)$$

$$E_{sd} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_d(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(t) s_d^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) - s_0(t)] [s_1^*(t) - s_0^*(t)] dt = E_1 + E_0 - 2 \operatorname{Re}\{r_{s_1 s_0}(0)\}$$

Señalización antipodal: $s_1(t) = -s_0(t)$ (para una P_{eb} requerida y DEP de ruido dada, minimiza la E_b)

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = E_0 = E_1$$

$$r_{s_1 s_0}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_0^*(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt = -E_0 = -E_1$$

$$E_{sd} = 4 E_b$$

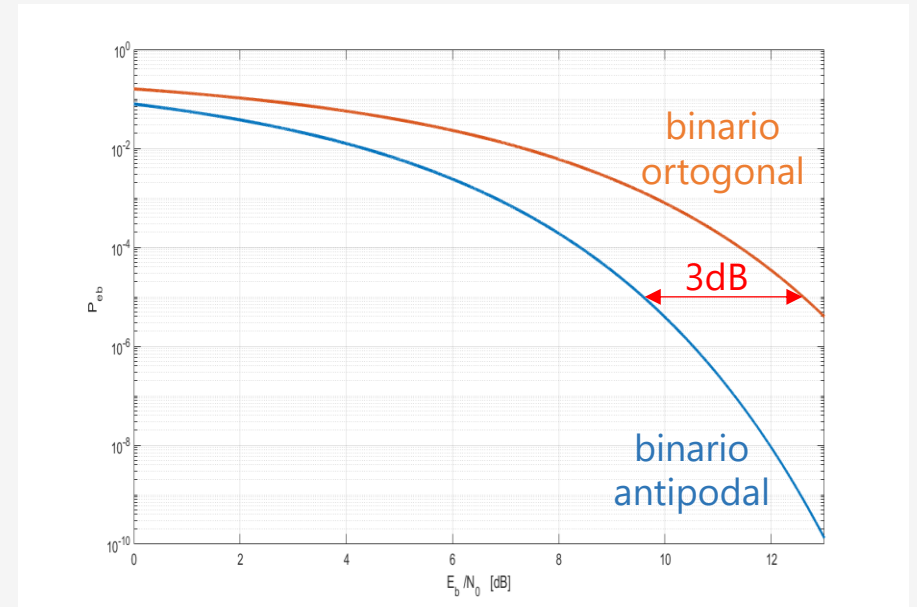
$$P_{eb} = Q \left(\sqrt{\frac{2 E_b}{N_0}} \right)$$

Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

Señalización ortogonal: $r_{s_1 s_0}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (utilizamos la misma energía de bit que en el caso anterior)
(implica fijar la potencia media de señal recibida)

$$\left. \begin{aligned} E_b &= \frac{E_0 + E_1}{2} \\ r_{s_1 s_0}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad E_{sd} = 2 E_b \quad P_{eb} = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

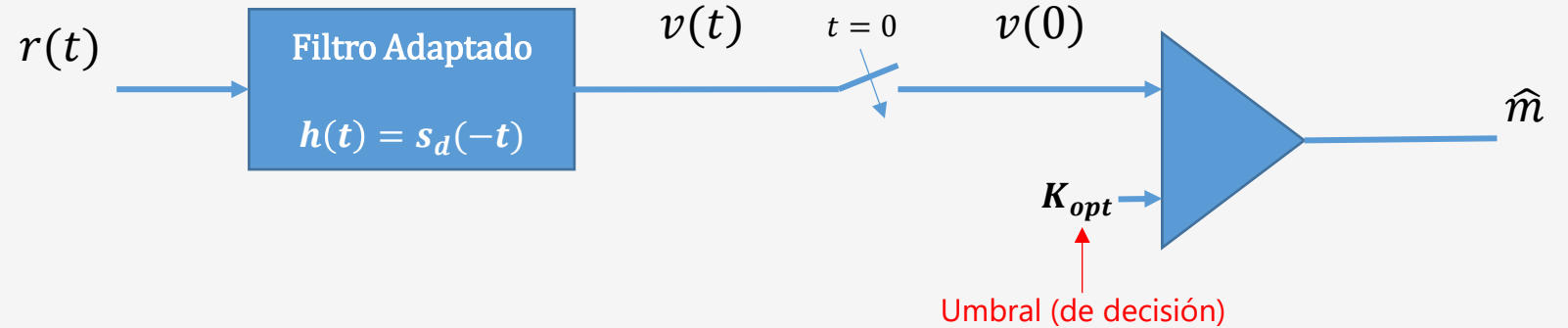
$$P_{eb} = 10^{-5} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,6 \text{ dB} \quad (\text{antipodal}) \\ &\rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 12,6 \text{ dB} \quad (\text{ortogonal}) \end{aligned}$$



Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

Receptor óptimo:

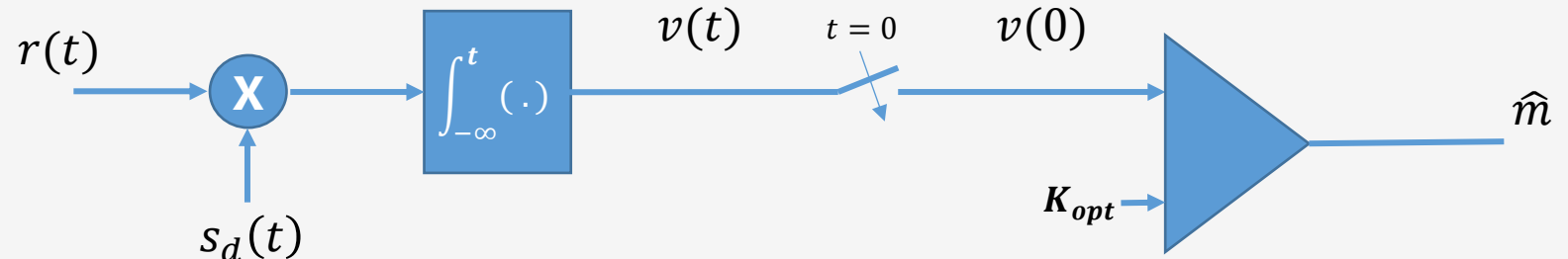
Implementación con Filtro Adaptado



$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) r(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(-\tau) r(t - \tau) d\tau$$
$$v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(-\tau) r(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(\tau) r(\tau) d\tau = r_{s_d} r(0)$$

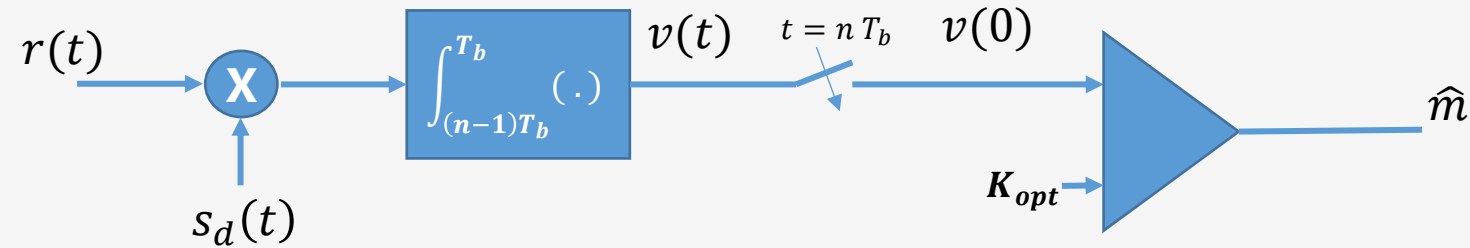
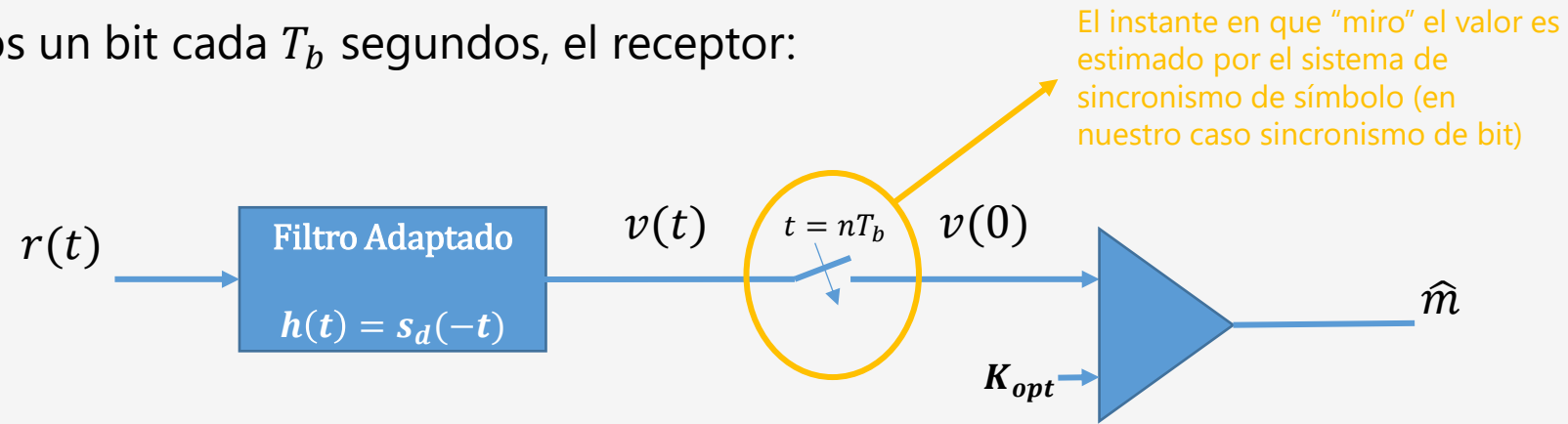
↑
real

Implementación con Correlador



Sistema de modulación digital (binario y sincrónico)

Si ahora transmitimos un bit cada T_b segundos, el receptor:



Señal PAM

A la entrada del canal, el Tx envía la señal $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b)$ ← Señal PAM

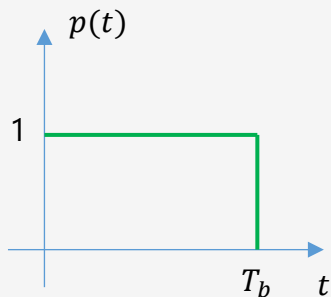
↑
Forma de pulso (señal de energía)
↑
Secuencia de amplitudes

Por ejemplo:

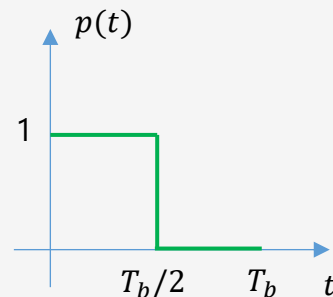
$A_n \in \{-A, A\}$ (bipolar)

$A_n \in \{0, A\}$ (unipolar)

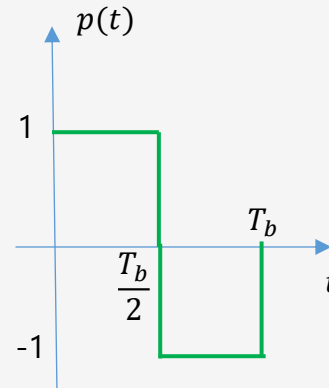
PULSO NRZ



PULSO RZ



PULSO Manchester
(Biphase-L)



← Algunos formas de
pulsos en banda base
de duración finita

Espectro de señales PAM

la señal PAM $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_s)$

A_n es una secuencia ESA: $E\{A_n\} = a$ y $R_{AA}[k]$

$p(t)$ es una señal de energía por lo que el proceso $X(t)$ es de potencia

El tiempo de símbolo T_s en nuestro caso coincide con T_b

$$\begin{aligned} R_{XX}(t + \tau, t) &= E\{X(t + \tau)X^*(t)\} = E\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t + \tau - nT_s) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^* p^*(t - mT_s)\} = \\ &= \sum_n \sum_m \underbrace{E\{A_n A_m^*\}}_{R_{AA}[n-m]} p(t + \tau - nT_s) p^*(t - mT_s) = \sum_k R_{AA}[k] \sum_n p(t + \tau - nT_s) p^*(t - nT_s + kT_s) \end{aligned}$$

\uparrow
 $k = n - m$

$R_{XX}(t + \tau, t)$ resulta periódica de período T_s por lo tanto $X(t)$ no es ESA. Para calcular el espectro deberemos también promediar en el tiempo.

$$\langle R_{XX}(t + \tau, t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{XX}(t + \tau, t) dt$$

$$\begin{aligned} \langle R_{XX}(t + \tau, t) \rangle &= \sum_k R_{AA}[k] \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} [\sum_n p(t + \tau - nT_s) p^*(t - nT_s + kT_s)] dt = \\ &= \sum_k R_{AA}[k] \frac{1}{T_s} \sum_n \int_0^{T_s} p(t + \tau - nT_s) p^*(t - nT_s + kT_s) dt = \\ &= \sum_k R_{AA}[k] \frac{1}{T_s} \sum_n \int_{-nT_s}^{(-n+1)T_s} p(\lambda + \tau) p^*(\lambda + kT_s) d\lambda \end{aligned}$$

$\lambda = t - nT_s$
 $d\lambda = dt$

Espectro de señales PAM

$$\langle R_{XX}(t + \tau, t) \rangle = \frac{1}{T_s} \sum_k R_{AA}[k] \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda + \tau) p^*(\lambda + kT_s) d\lambda = \frac{1}{T_s} \sum_k R_{AA}[k] r_{pp}(\tau - kT_s)$$

$$S_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\langle R_{XX}(t + \tau, t) \rangle\} = \frac{1}{T_s} \sum_k R_{AA}[k] |P(f)|^2 e^{-j2\pi f k T_s} = \frac{|P(f)|^2}{T_s} S_{AA}(e^{j2\pi f T_s})$$

En caso de una secuencia de amplitudes no correlacionada:

$$R_{AA}[k] = \sigma_A^2 \delta[k] + a^2$$

$$S_{AA}(e^{j2\pi f T_s}) = \sigma_A^2 + \frac{a^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

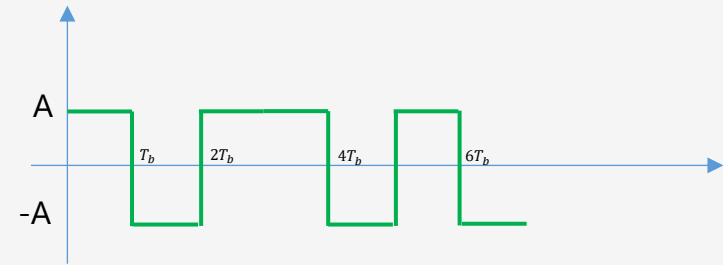
$$S_{XX}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left[\sigma_A^2 + \frac{a^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \right]$$

Espectro señales PAM

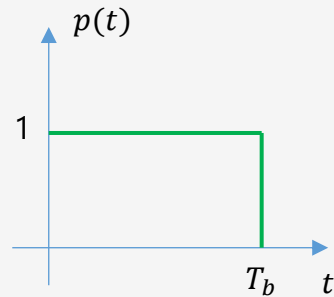
Ejemplo: Señal PAM. Forma de pulso NRZ, sistema binario antipodal $A_n \in \{-A, A\}$ (NRZ bipolar), símbolos equiprobables y no correlacionados entre sí.

$$a = E\{A_n\} = -A P\{A_n = -A\} + A P\{A_n = A\} = -\frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 0$$

$$\text{Var}\{A_n\} = \sigma_A^2 = E\{A_n^2\} = A^2$$



PULSO NRZ



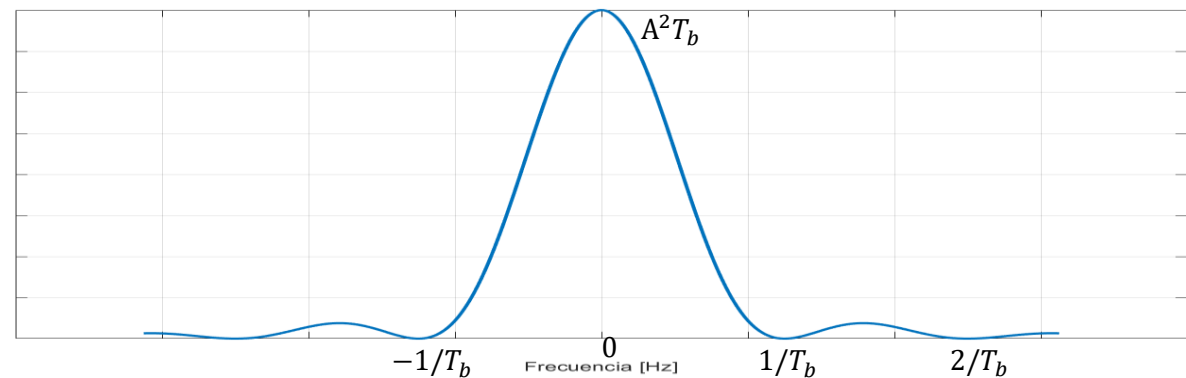
$$p(t) = \Pi\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right)$$

$$P(f) = T_b \text{sinc}(T_b f) e^{-j\pi f T_b}$$

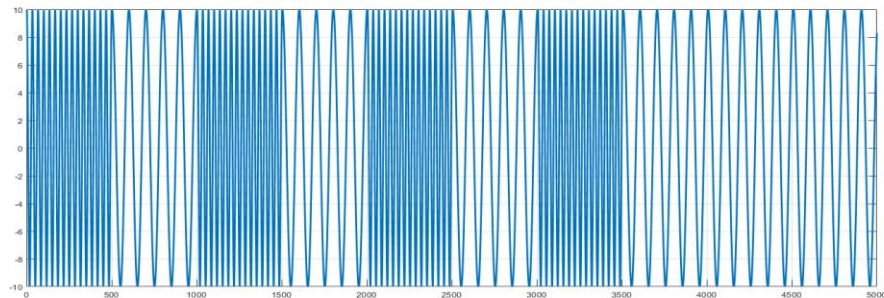
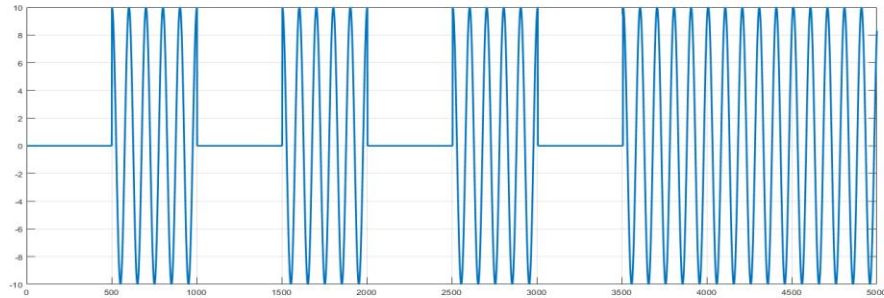
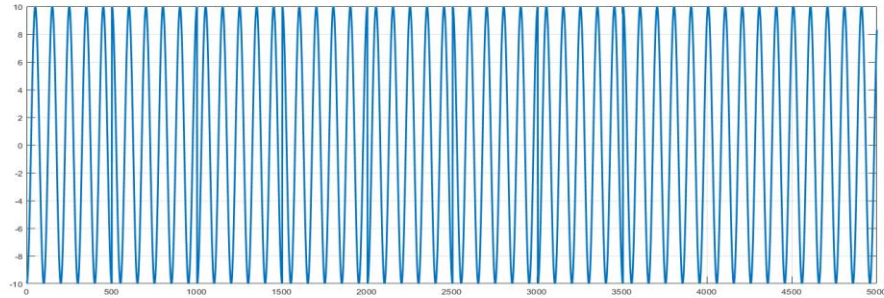
$$|P(f)|^2 = T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f)$$

$$S_{XX}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left[\sigma_A^2 + \frac{a^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \right] \quad T_s = T_b$$

$$S_{XX}(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(T_b f)$$



Señales Pasabanda en sistemas binarios



0 1 0 1 0 1 0 1 1 1

BPSK

Puede analizarse como NRZ bipolar modulado por $\cos(2\pi f_p t)$

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b) \cos(2\pi f_p t) \quad A_n \in \{-A, A\}$$

ASK (caso particular OOK)

Puede analizarse como NRZ unipolar modulado por $\cos(2\pi f_p t)$

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b) \cos(2\pi f_p t) \quad A_n \in \{0, A\}$$

FSK

Puede analizarse como una señal NRZ bipolar modulada en FM

BPSK, ASK: DEP

Sea el proceso $Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_p t + \theta)$

$$S_{YY}(f) = \mathcal{F}\{< R_{YY}(t + \tau, t) >\}$$

$$S_{YY}(f) = \frac{1}{4} [S_{XX}(-(f + f_p)) + S_{XX}(f - f_p)]$$

Ejemplo: BPSK

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b) \cos(2\pi f_p t)$$

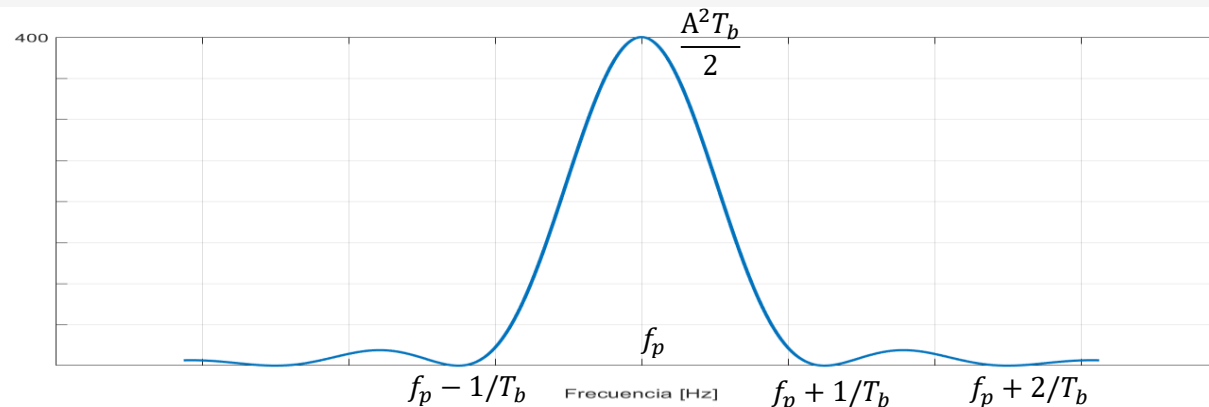
$$A_n \in \{-A, A\}$$

$p(t)$ es NRZ

$$S_{XX}(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(T_b f)$$

Calculado anteriormente (NRZ bipolar o binario antipodal con forma de pulso NRZ)

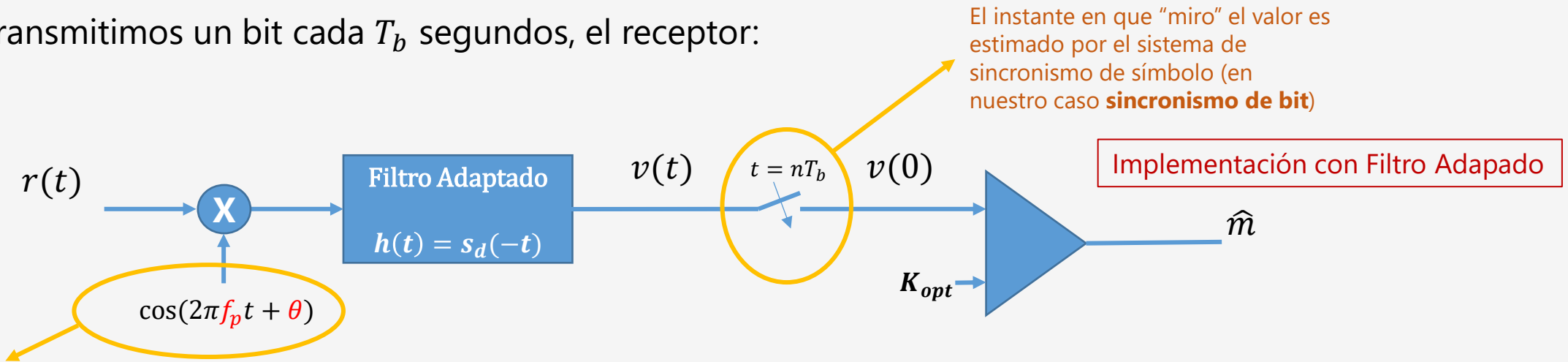
$$S_{YY}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \operatorname{sinc}^2(-T_b(f + f_p)) + \frac{A^2 T_b}{4} \operatorname{sinc}^2(T_b(f - f_p))$$



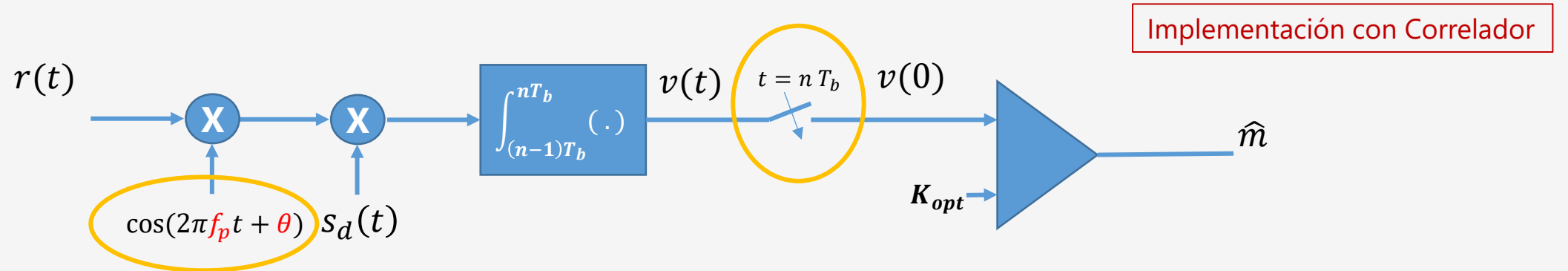
DEP unilateral

Receptor

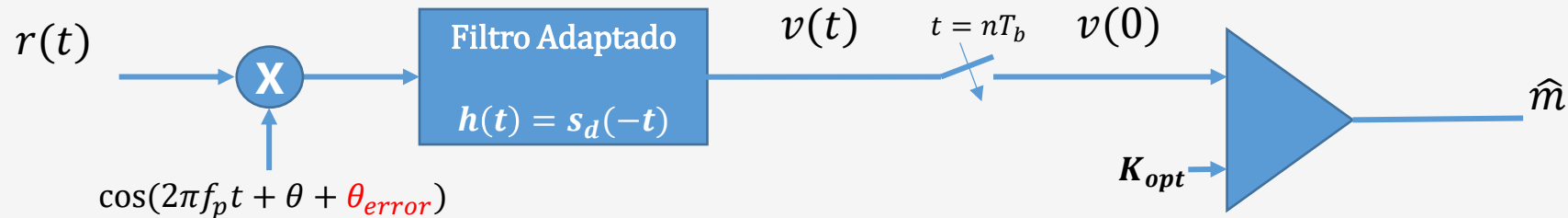
Si ahora transmitimos un bit cada T_b segundos, el receptor:



El sistema de **sincronismo de portadora** se encarga de estimar la frecuencia y la fase de la portadora



Sincronismo de portadora: error de fase



Sabemos que si cometemos un error en la fase de la portadora de θ_{error} , la amplitud de la señal demodulada se modifica por $\cos(\theta_{error})$ por lo que ahora la E_b con error de fase en el sincronismo de portadora será:

$$E_b' = E_b \cos^2(\theta_{error})$$

Cómo se modifica la P_{e_b} por ejemplo para BPSK (pasabanda)

$$P_{e_b} = Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b'}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b \cos^2(\theta_{error})}{N_0}}\right)$$

La degradación debida al error de fase, respecto a no tener error es:

$$D = -10 \log(\cos^2(\theta_{error})) = -20 \log(\cos(\theta_{error}))$$

Diagrama de $\odot\text{J}\odot$

Se realiza con la señal a la salida del Filtro Adaptado en el receptor (en banda base, luego de la demodulación). Mientras el Rx recibe un bit tras otro, todas las posibles salidas posibles observadas en un rango de $2T_b$ componen al diagrama. Veamos un ejemplo: señalización NRZ bipolar

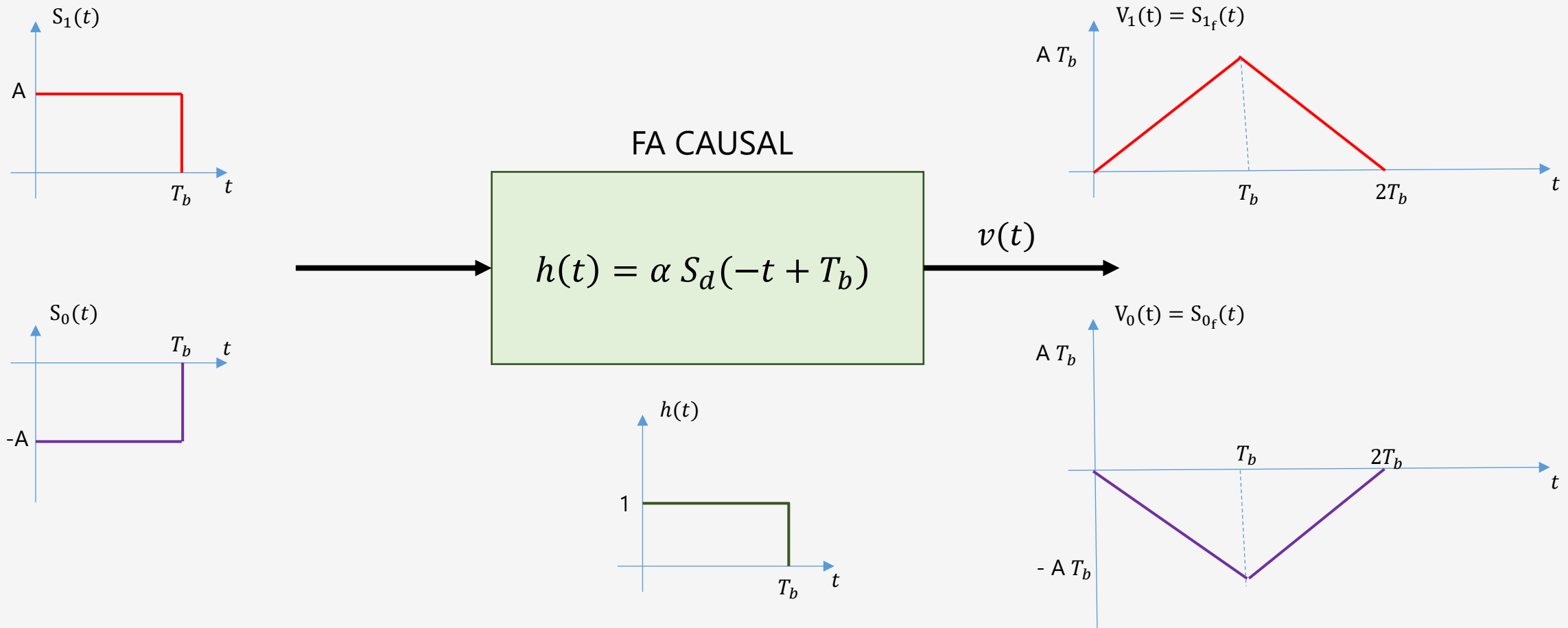
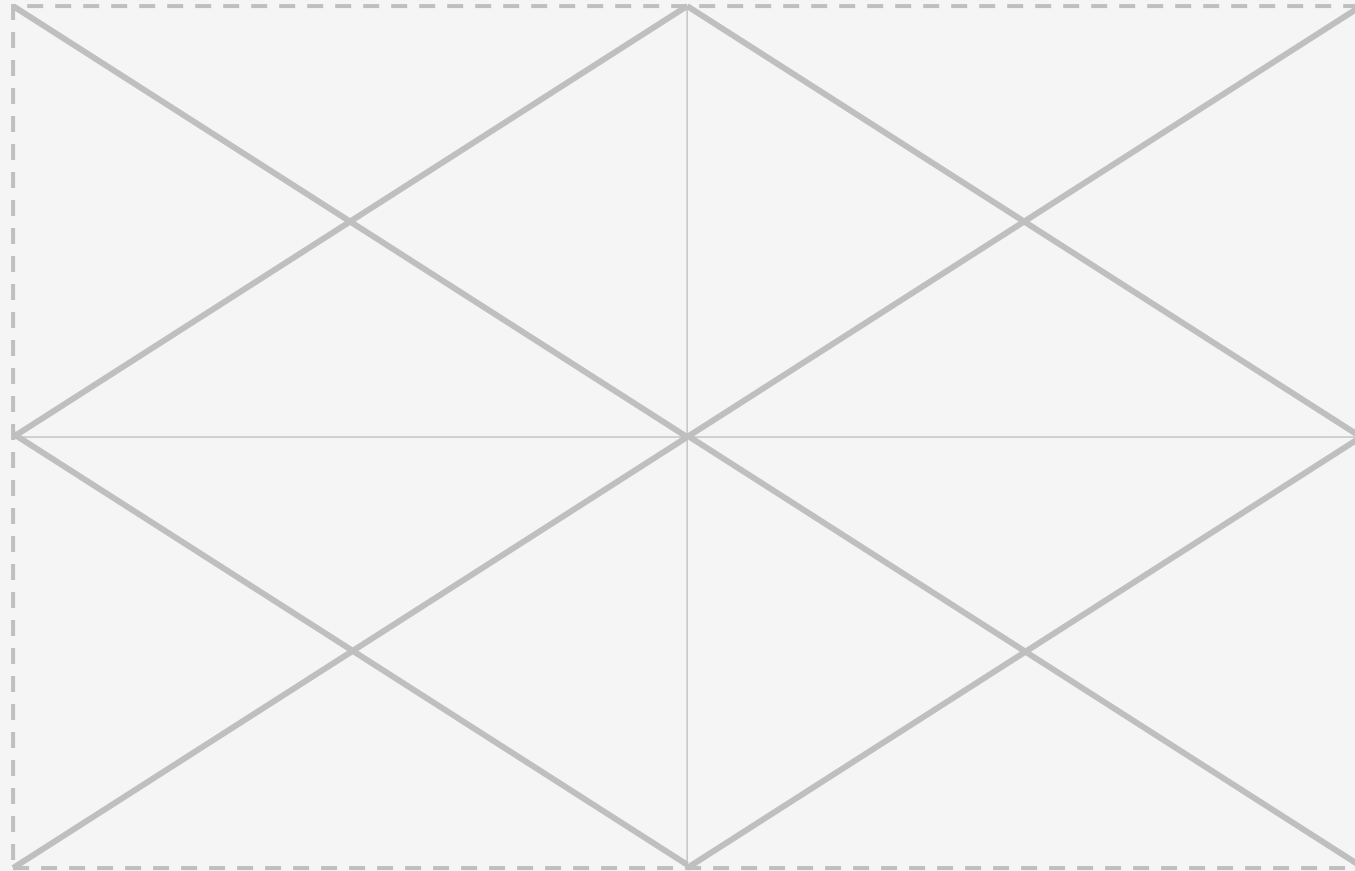


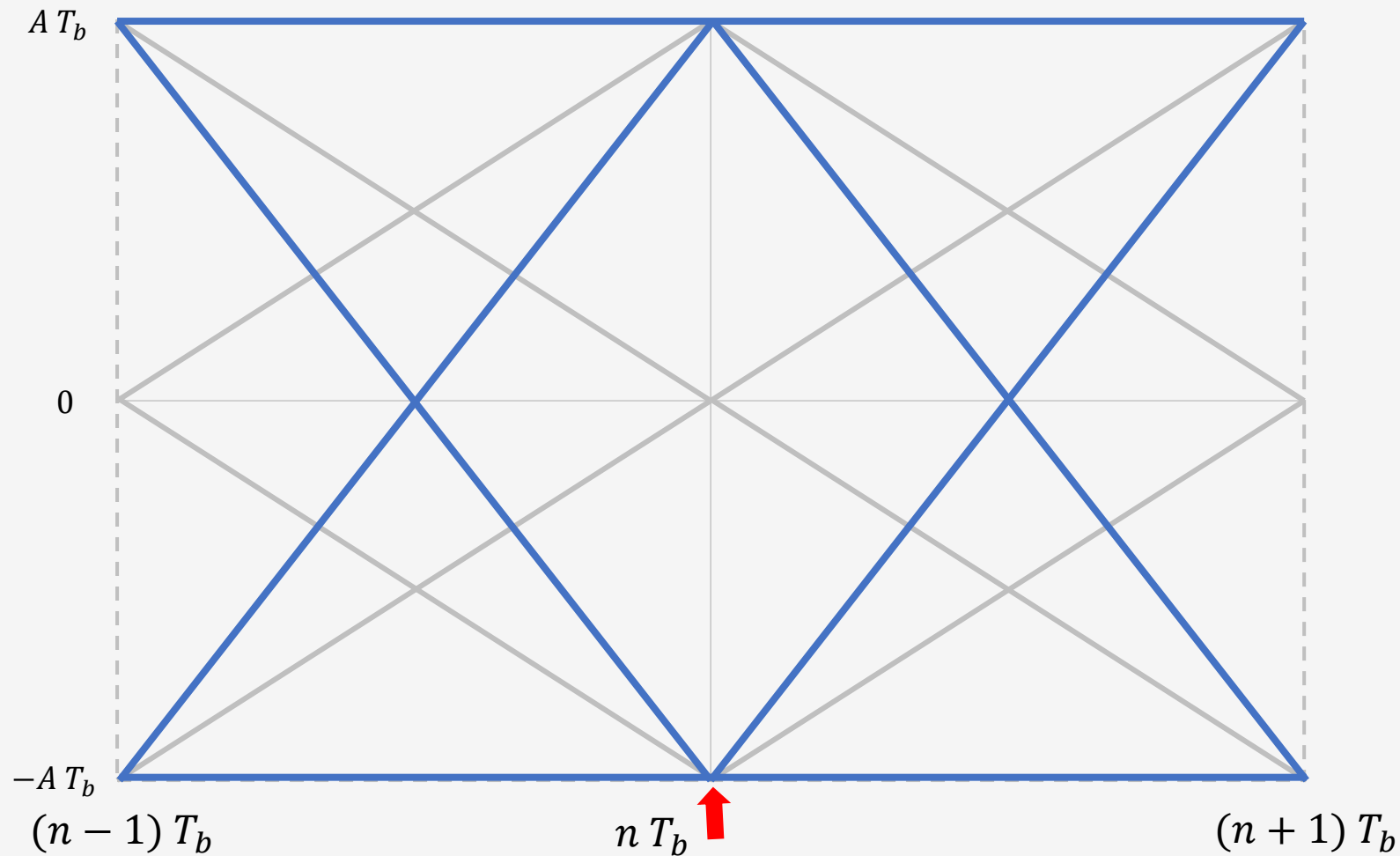
Diagrama de $\odot\text{JO}$



000
001
010
...
111

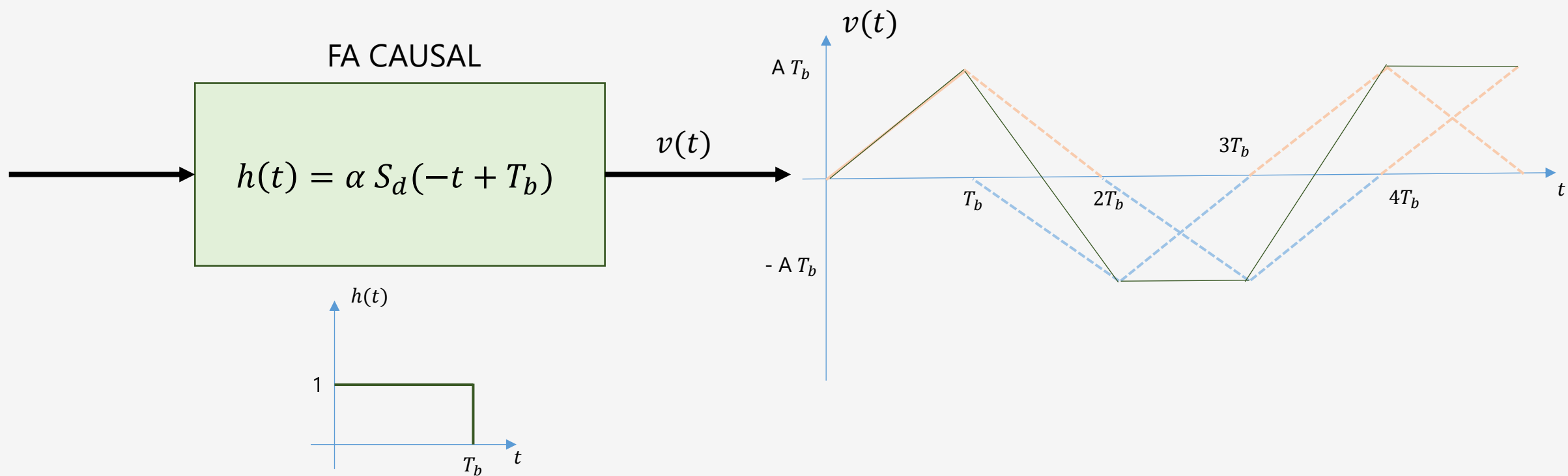
Con un osciloscopio: observo la señal de salida del Filtro Adaptado durante dos tiempos de bit y la base de tiempo se sincroniza con la señal del sincronismo de bit (Ck de bit).

Diagrama de $\odot\text{JO}$

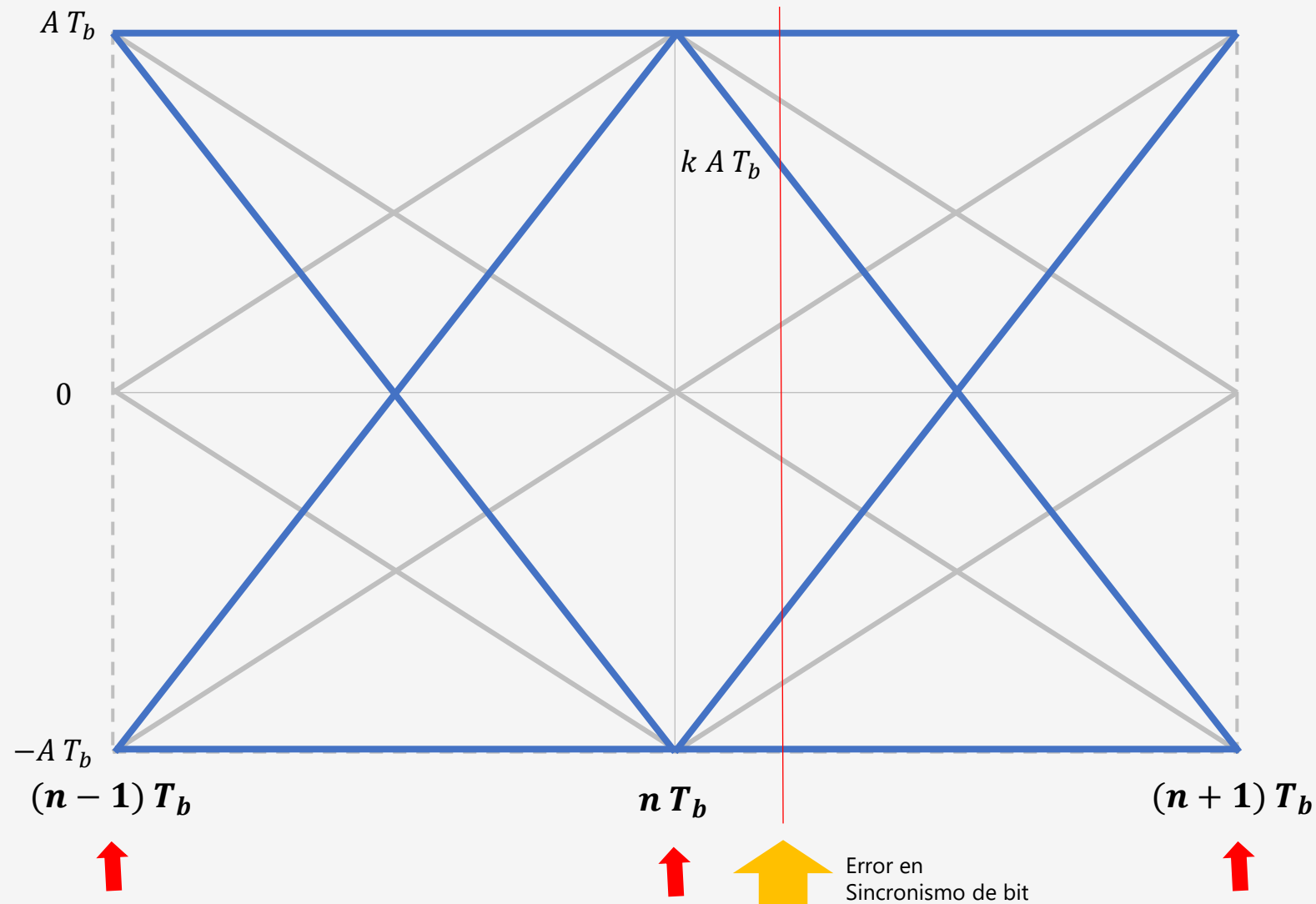


Con un osciloscopio: observo la señal de salida del Filtro Adaptado durante dos tiempos de bit y la base de tiempo se sincroniza con la señal del sincronismo de bit (Ck de bit).

Diagrama de $\odot\text{JO}$



Error en sincronismo de Bit



$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{\frac{k^2 2E_b}{N_0}}\right) \quad k < 1$$

La degradación respecto al receptor óptimo es:

$$D = -10 \log(k^2) \text{ [dB]}$$

Diagrama de OJO

Sin Ruido

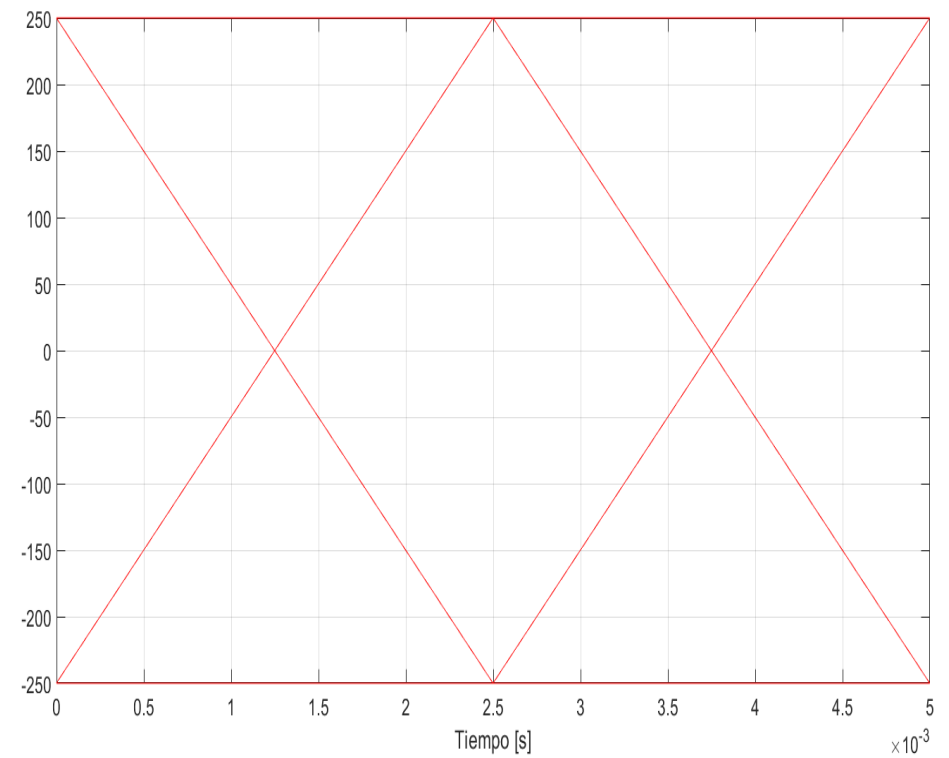
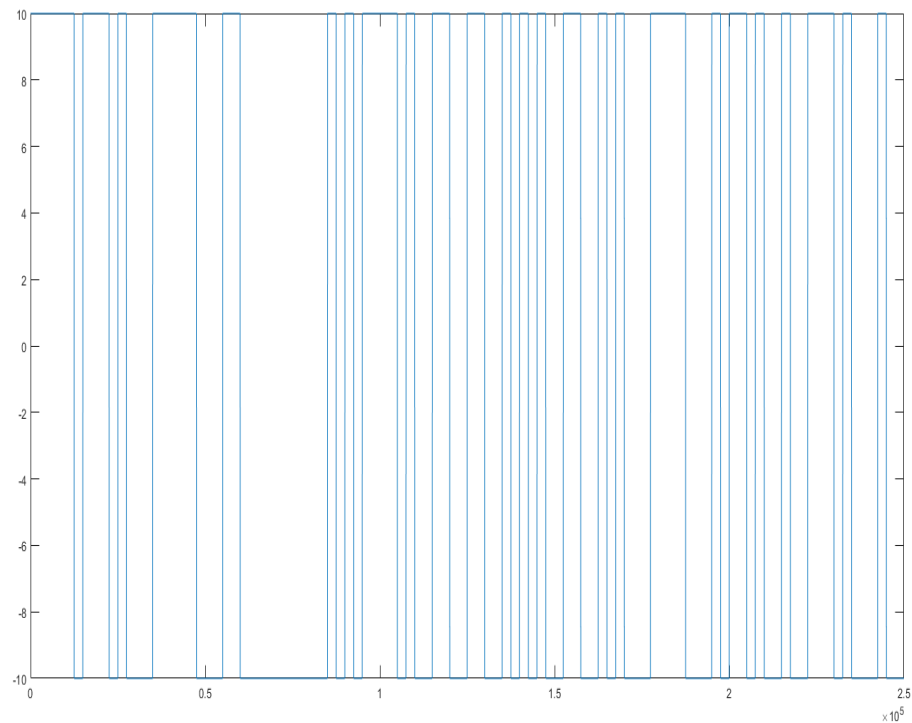


Diagrama de ojo con ruido

$SNR = 0\text{dB}$

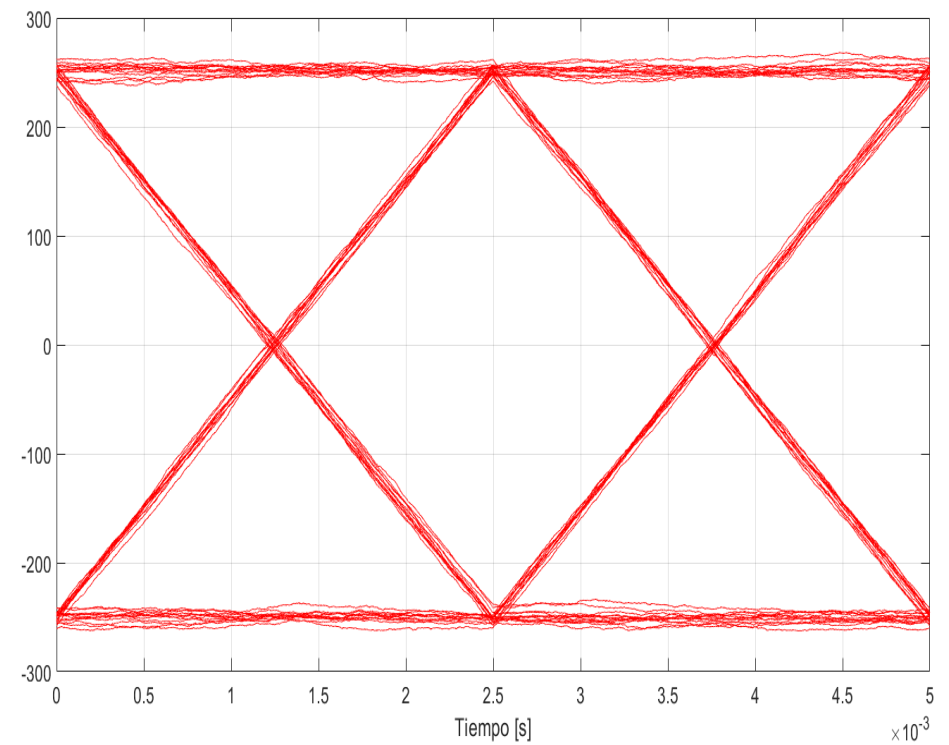
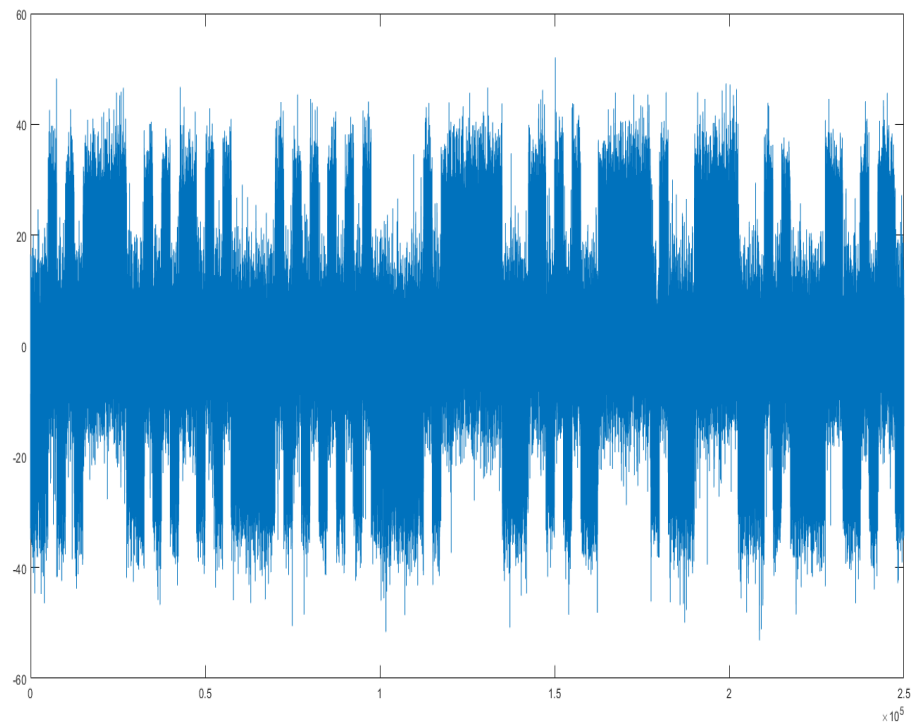
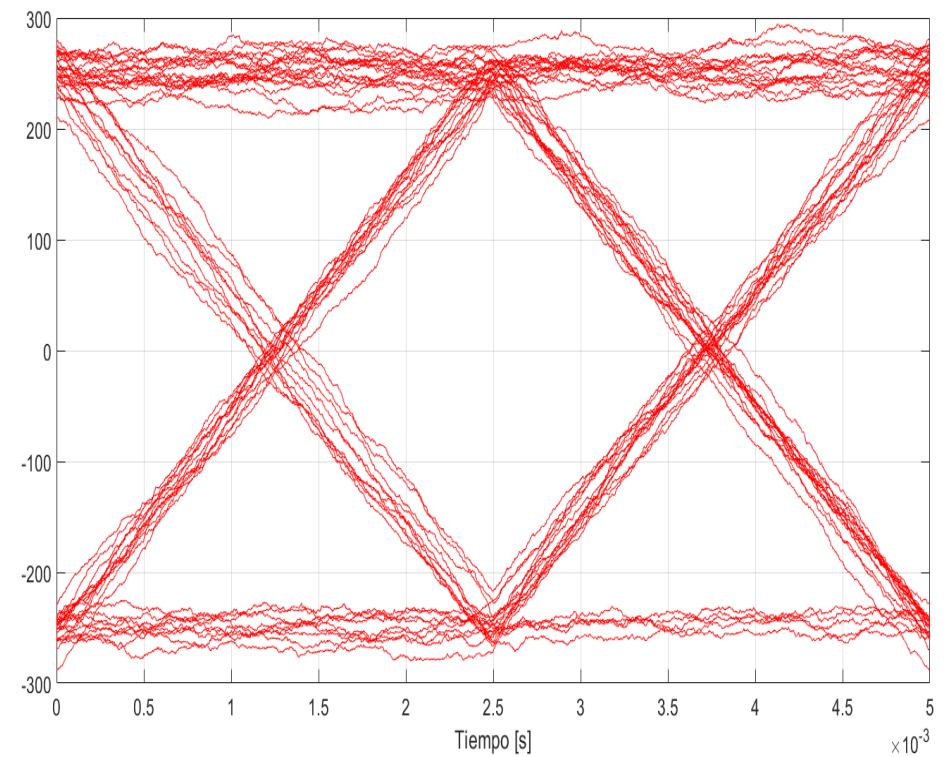
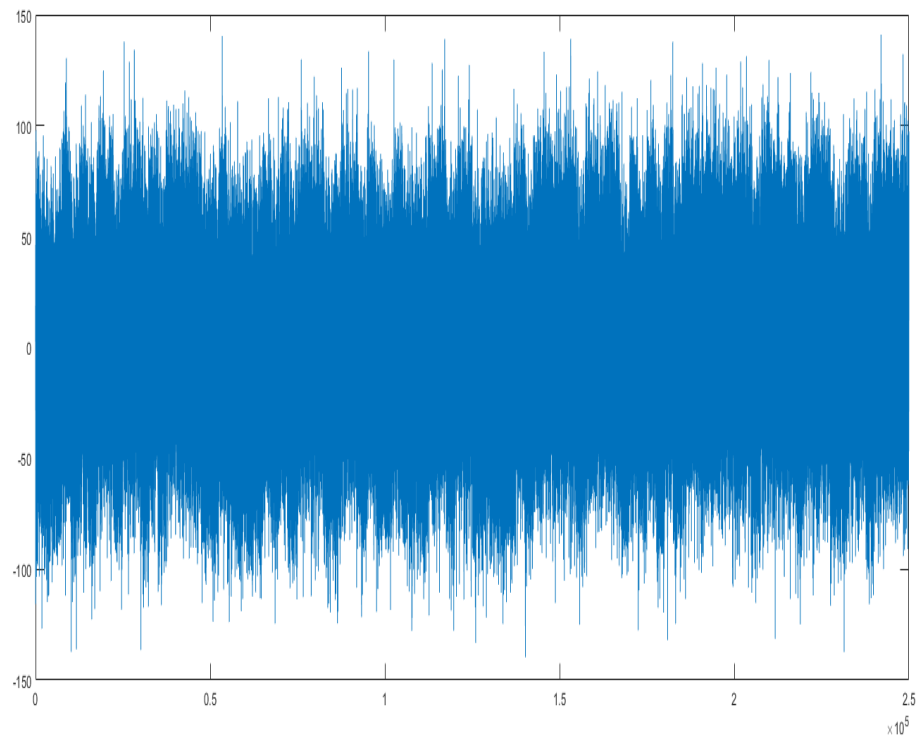
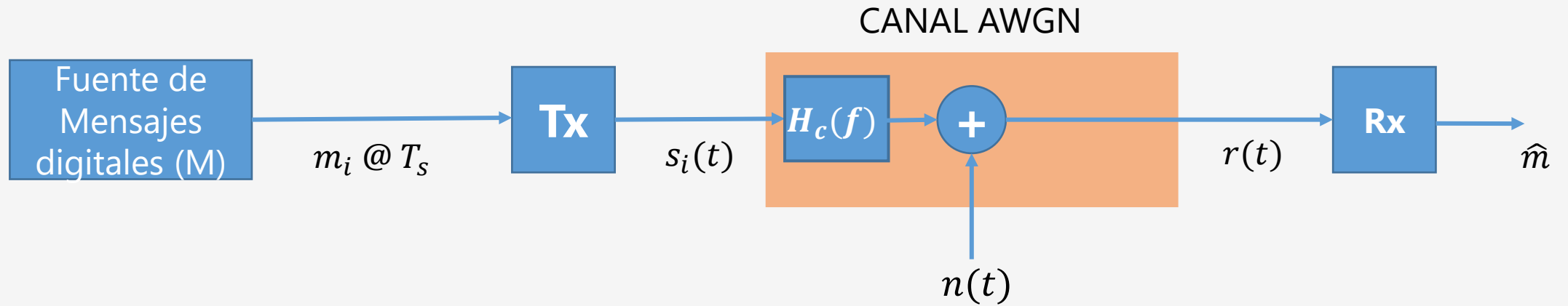


Diagrama de ojo con ruido

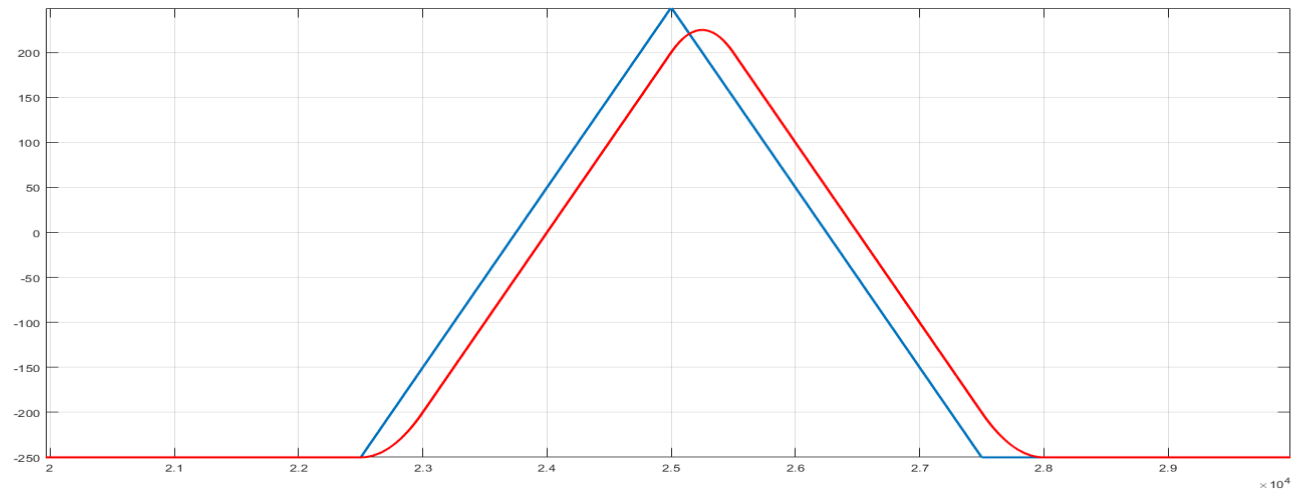
$SNR = -20\text{dB}$

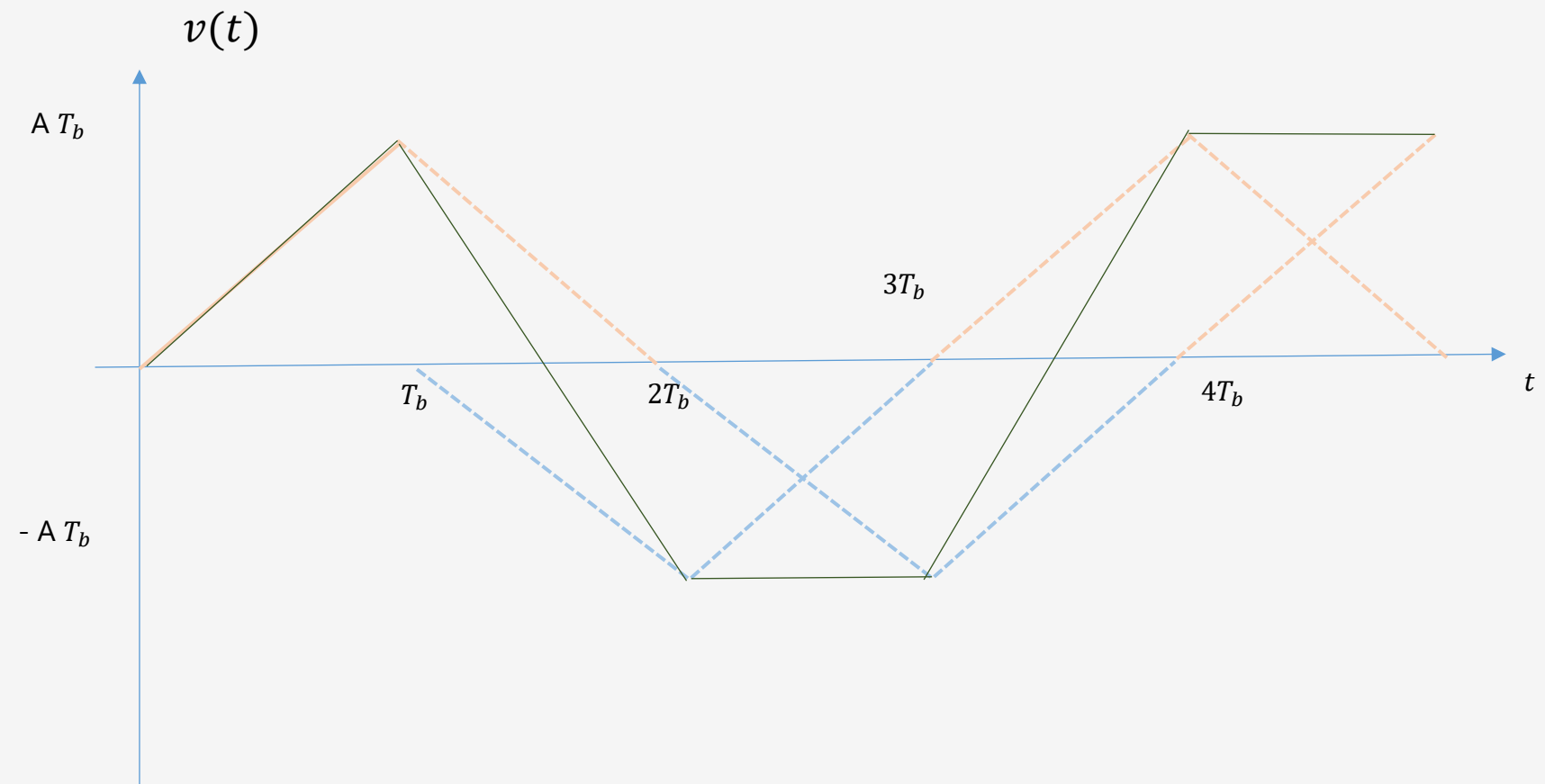


Comunicaciones digitales: Canales con BW limitado

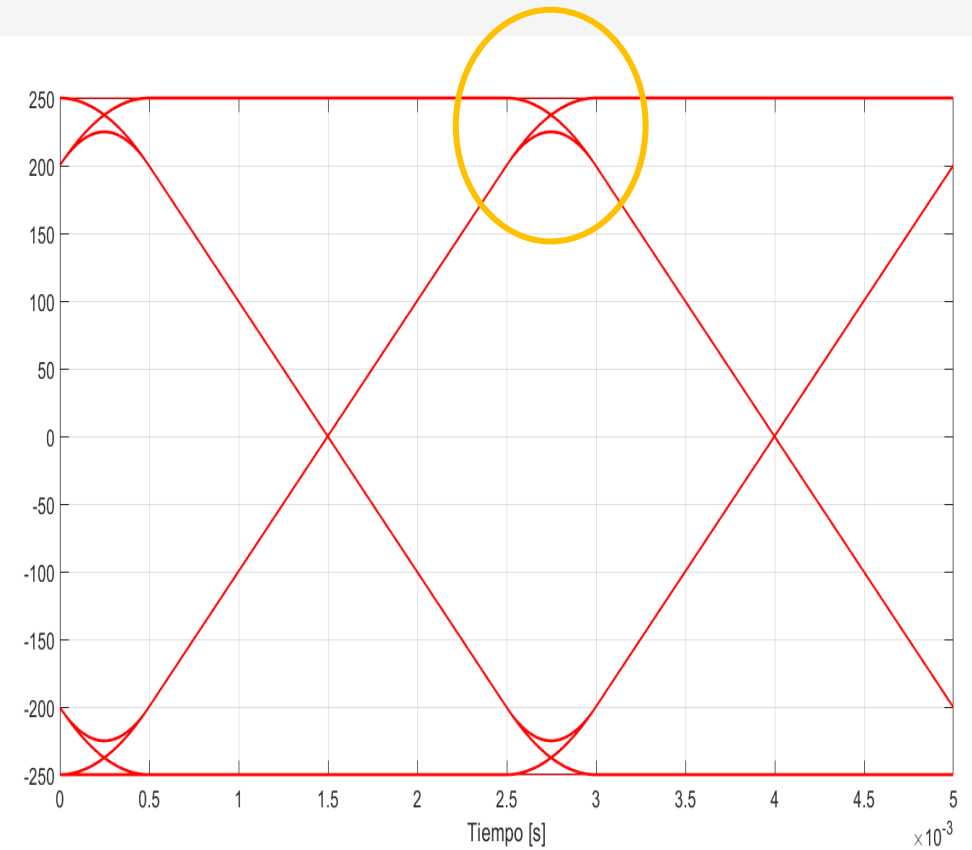
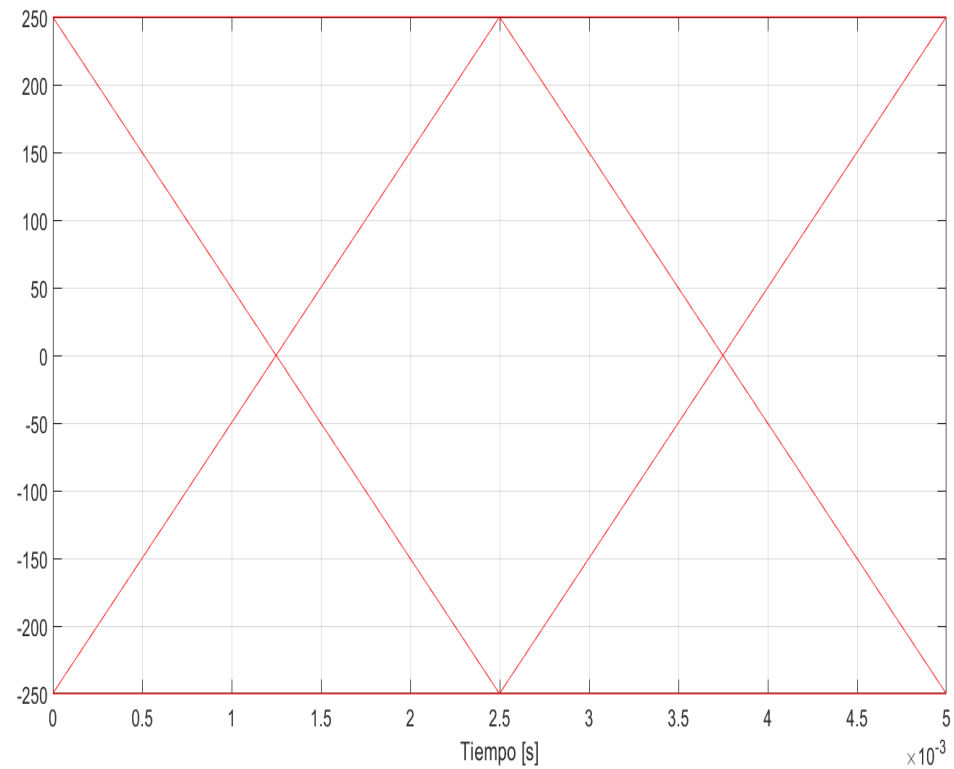


Salida FA

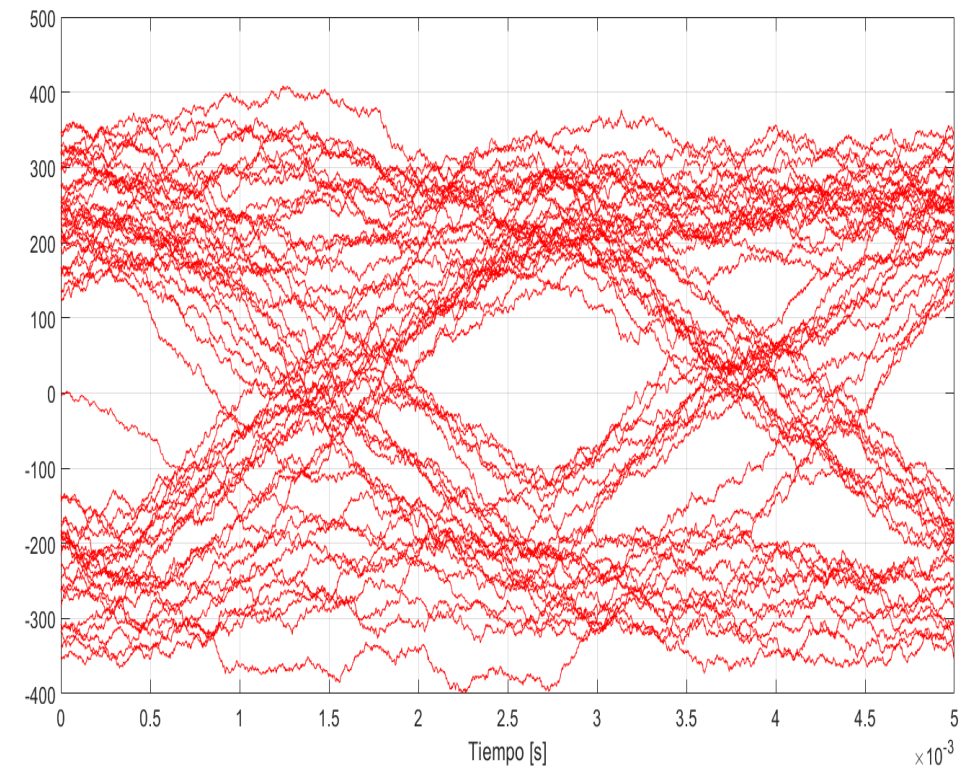
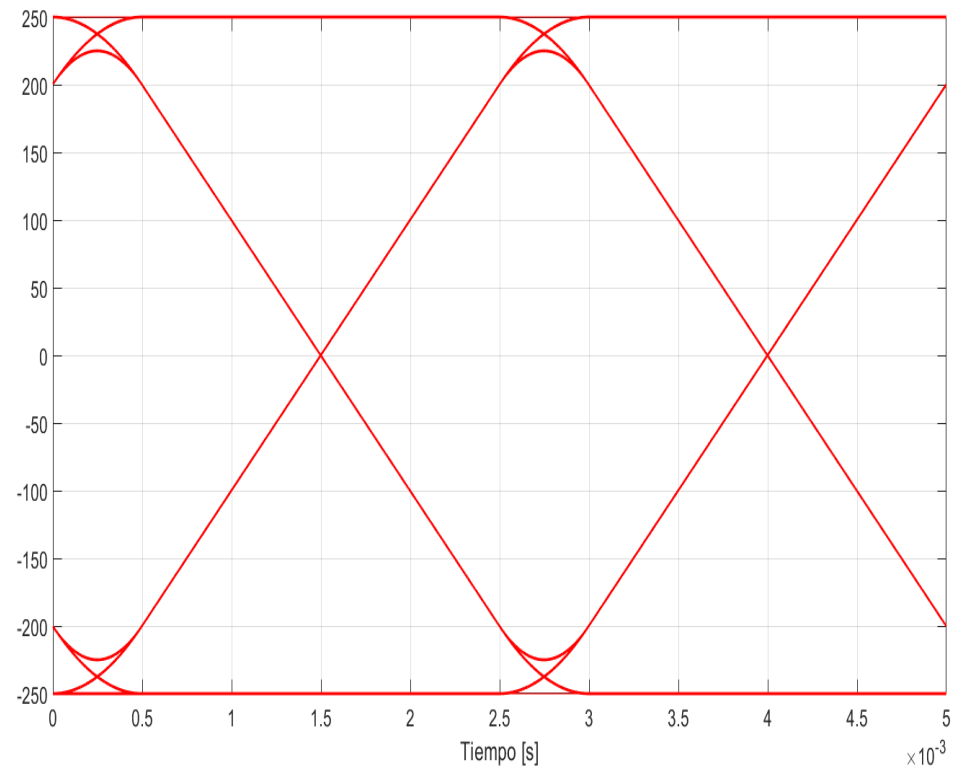




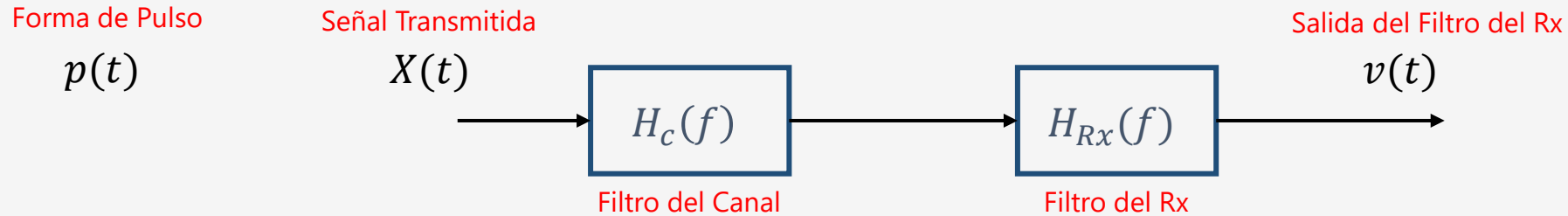
Interferencia intersímbolo (ISI)



Interferencia intersímbolo (ISI)



Criterios de Nyquist



Criterios de Nyquist

I $v(nT_b) = v[n] = \beta \delta[n] \quad \beta \text{ cte}$



II $V(e^{j2\pi f T_b}) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\left(f - \frac{k}{T_b}\right) = \beta$

Las formas de pulso a la salida del filtro del receptor y de banda limitada que cumplan con los criterios de Nyquist, no producirán Interferencia Intersímbolo (ISI)

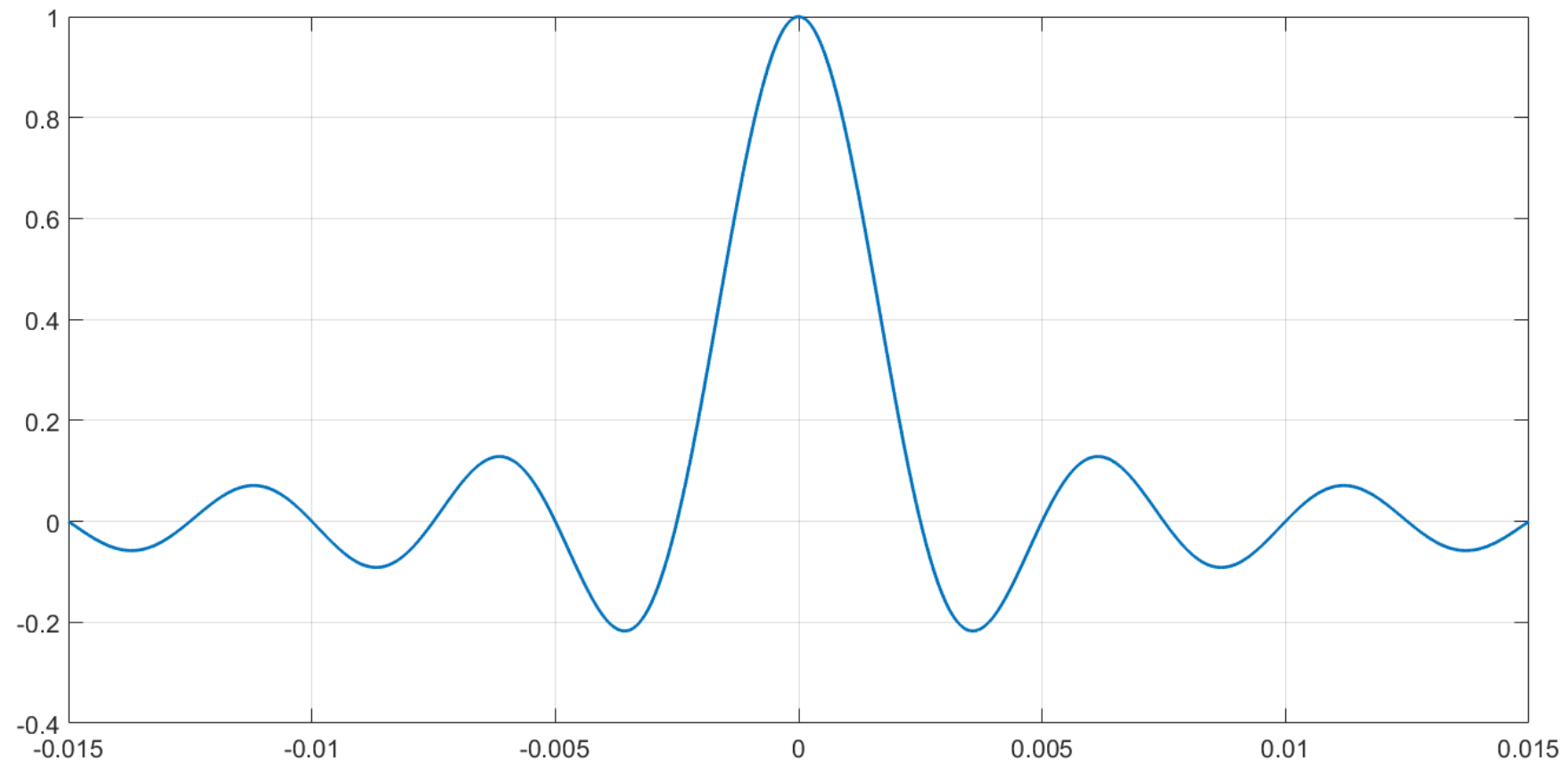
Ejemplo:

$$v(t) = \text{sinc}(t/T_b)$$

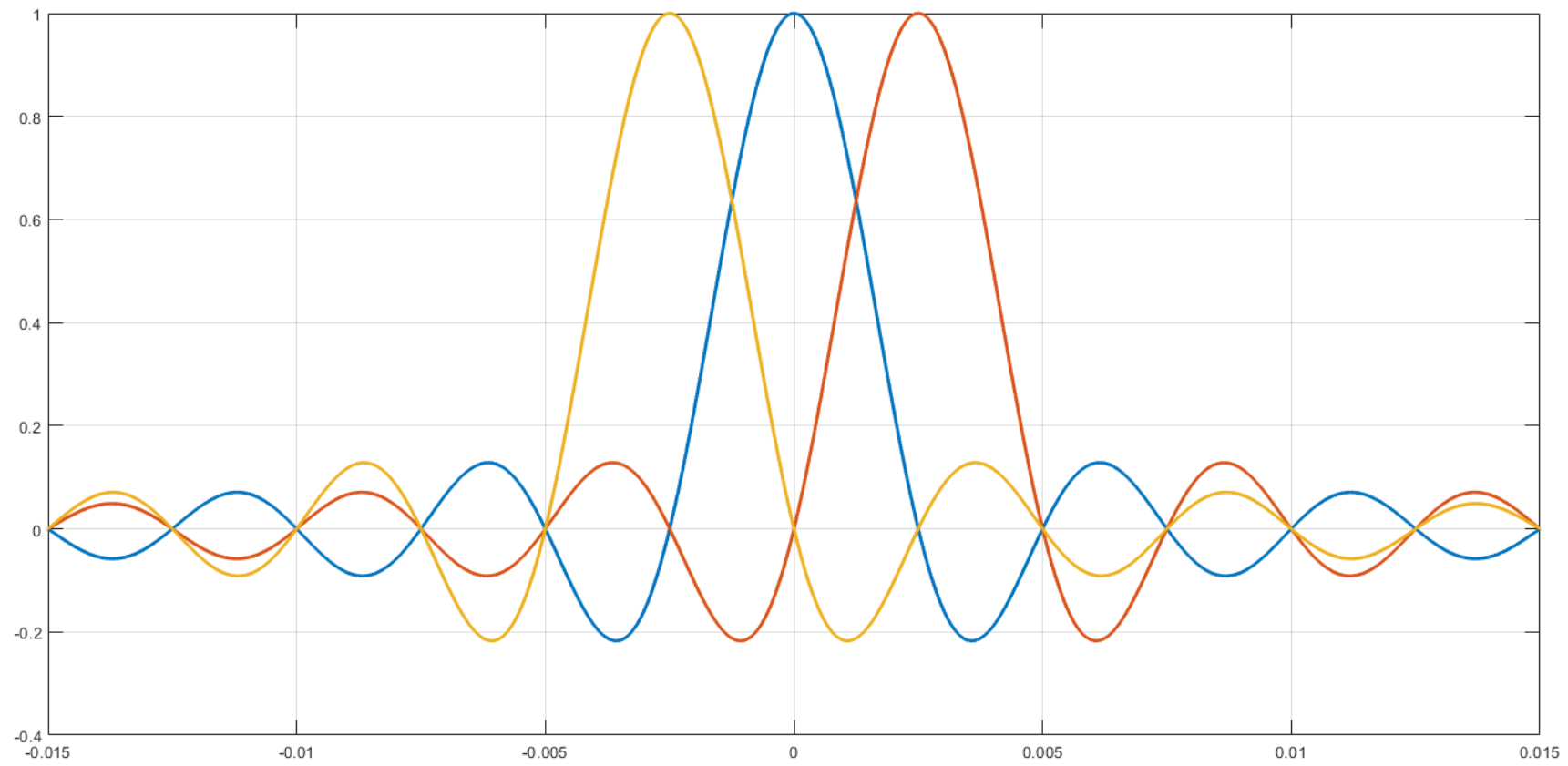
$$V(f) = T_b \Pi(T_b f)$$

$$V(e^{j2\pi f T_b}) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\left(f - \frac{k}{T_b}\right) = 1$$

ISI



ISI



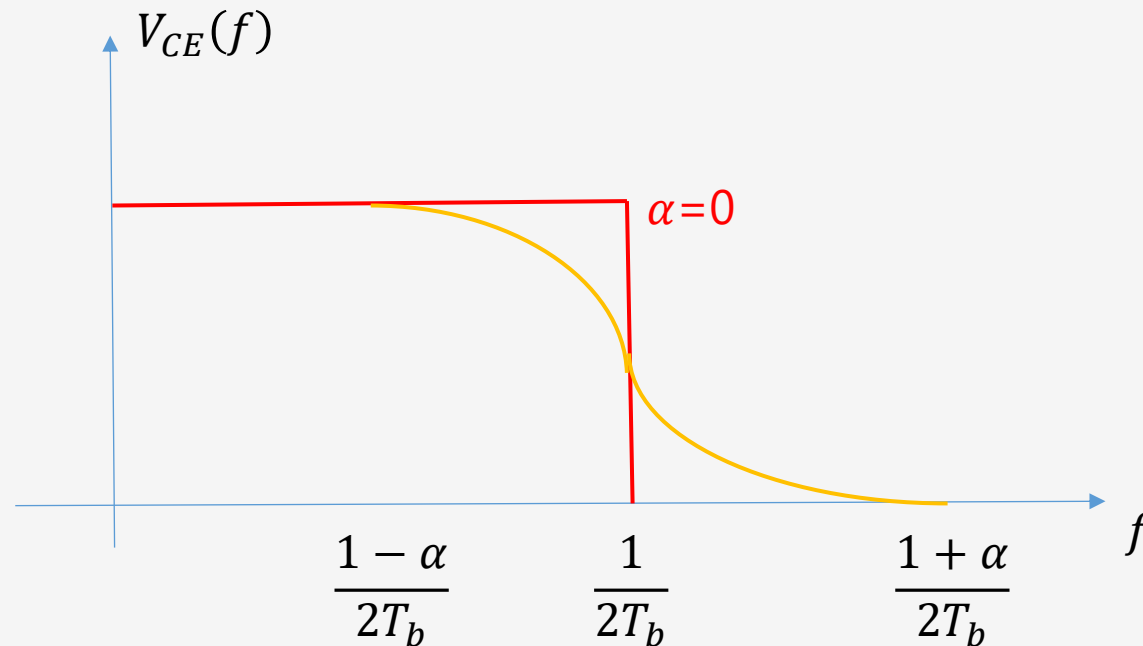
Coseno elevado (raised-cosine)

$$v_{CE}(t) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{T_b}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T_b}\right)^2} \text{sinc}(t/T_b)$$

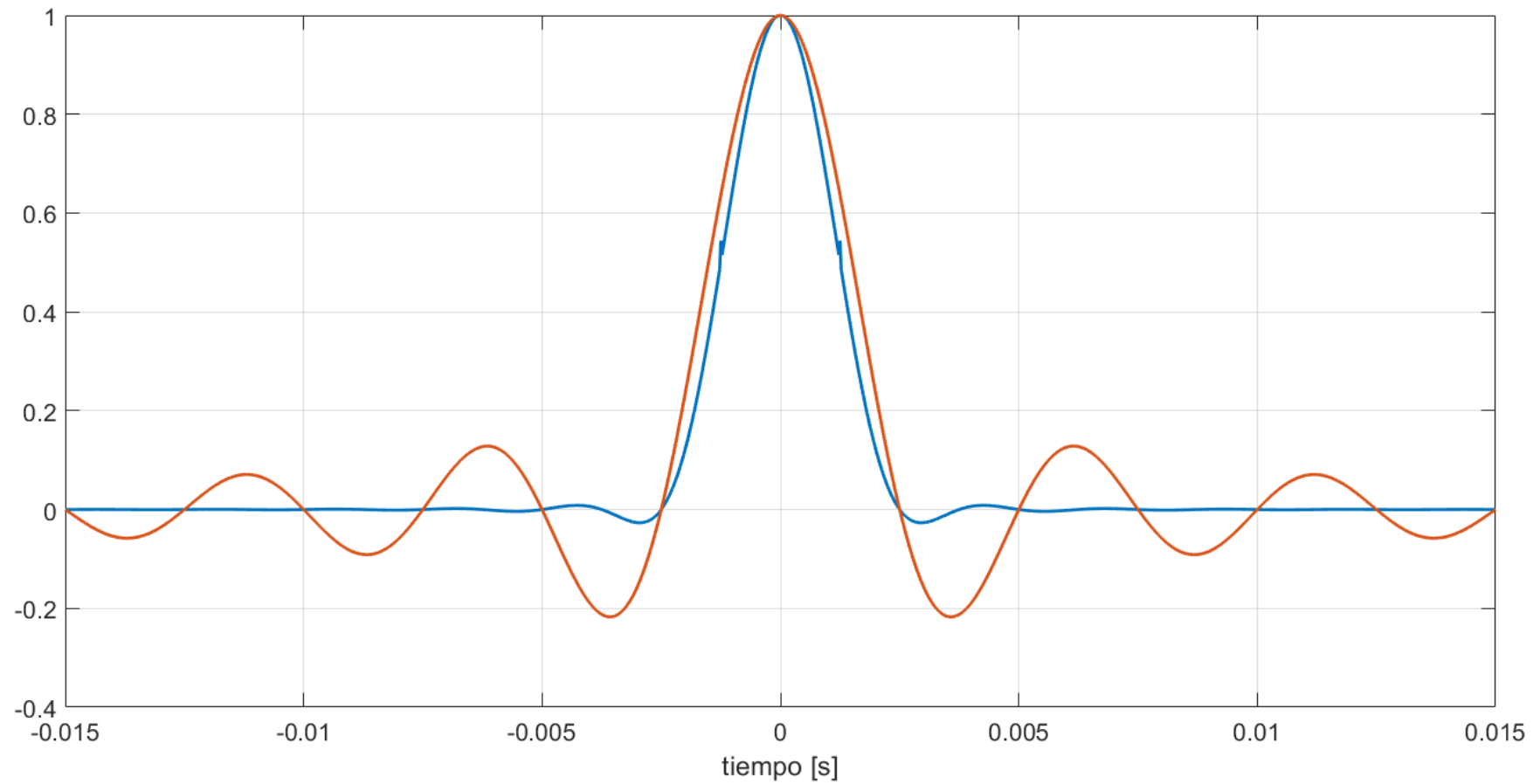
$$V_{CE}(f) = \begin{cases} T_b & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_b} \\ \frac{T_b}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi T_b}{\alpha} (|f|) - \frac{1-\alpha}{2T_b} \right] \right\} & \frac{1-\alpha}{2T_b} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_b} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T_b} \end{cases}$$

α : factor de roll-off

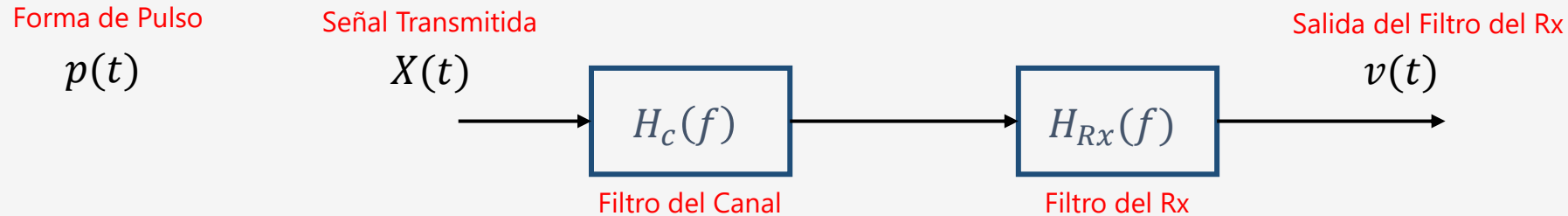
$$0 \leq \alpha \leq 1$$



Coseno elevado (raised-cosine)



Coseno elevado (raised-cosine)



$$V(f) = P(f) H_c(f) H_{Rx}(f)$$

Si utilizamos el canal en la banda de paso, suponemos ganancia unitaria y no consideramos el retardo que produce $\Rightarrow H_c(f) = 1$. Además, si diseñamos el Rx óptimo con el filtro adaptado al pulso Tx tenemos que $H_{Rx}(f) = P^*(f)$ entonces:

$$V(f) = P(f) P^*(f) = |P(f)|^2 \quad \leftarrow \text{Si queremos que } v(t) \text{ sea coseno elevado, entonces el pulso } p(t) \text{ deberá ser raíz de coseno elevado (root rised cosine).}$$

Fuentes:

- Principles of Communications, 5/E by Rodger Ziemer and William Tranter, John Wiley & Sons. Inc.
- Apuntes de E-0214 y de E-0223

