



Introducción al MPC

Tema 06



CA3: Introducción al MPC

Nota

El material de estas diapositivas está basado en los libros:

- J.A. Rossiter. “Model-Based Predictive Control. A practical approach”. CRC Press, 2005.
- Liuping Wang. “Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab”. Springer, 2009.
- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. “Control of Dead-time Processes”. Springer, 2007.

Toolbox

- Yalmip (<https://yalmip.github.io/>)

Imágenes

- MathWorks®



Introducción al MPC

Índice

- **Introducción**
- Elementos del MPC
- MPC dentro de una ventana de optimización
- Horizonte deslizante
- Restricciones
- Sistemas MIMO
- Consideraciones

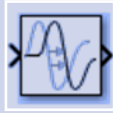


CA3: Introducción al MPC

Introducción - Generalidades



Es la técnica de control avanzada más utilizada en la industria.



Capacidad para compensar los tiempos muertos.



Los conceptos son muy intuitivos.



Es una metodología totalmente abierta basada en unos principios básicos que permiten futuras ampliaciones.



Se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos (fase no mínima e inestables).



Es muy útil cuando se conocen referencias futuras.

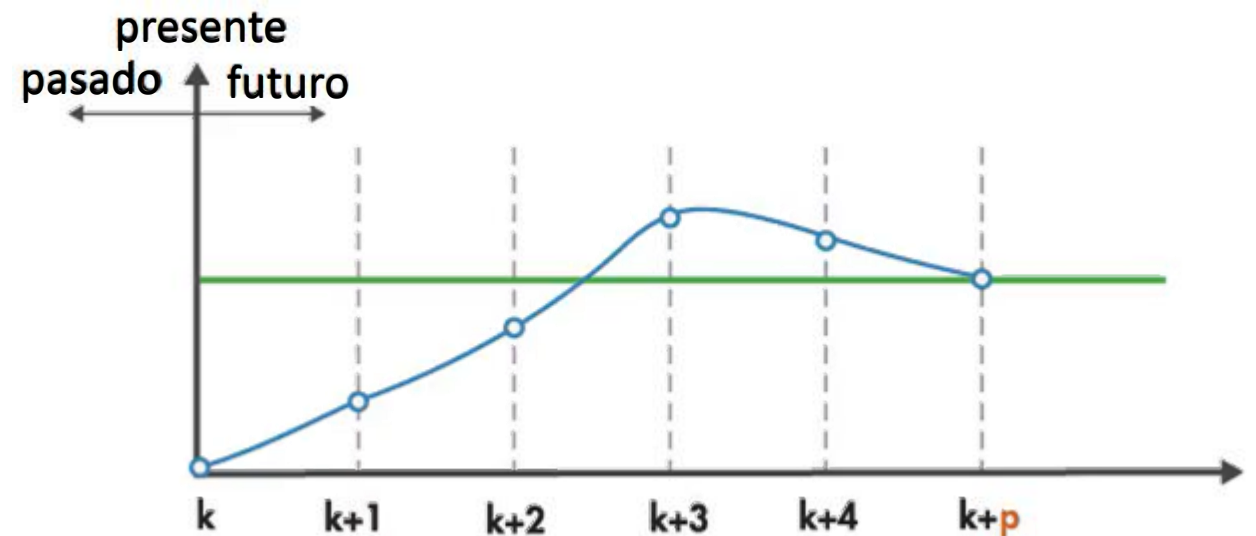
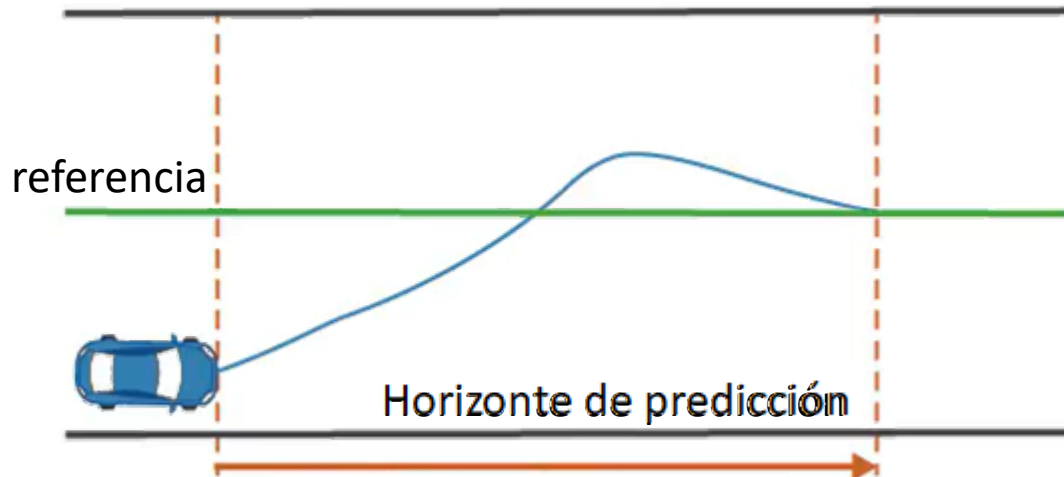
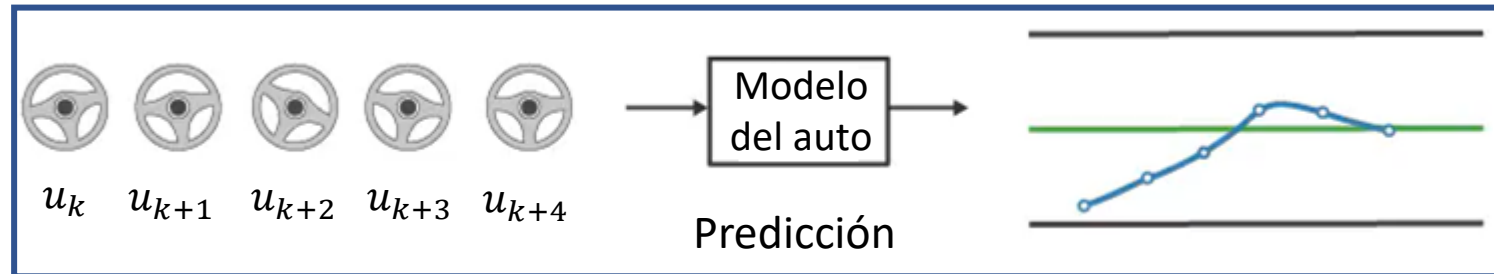
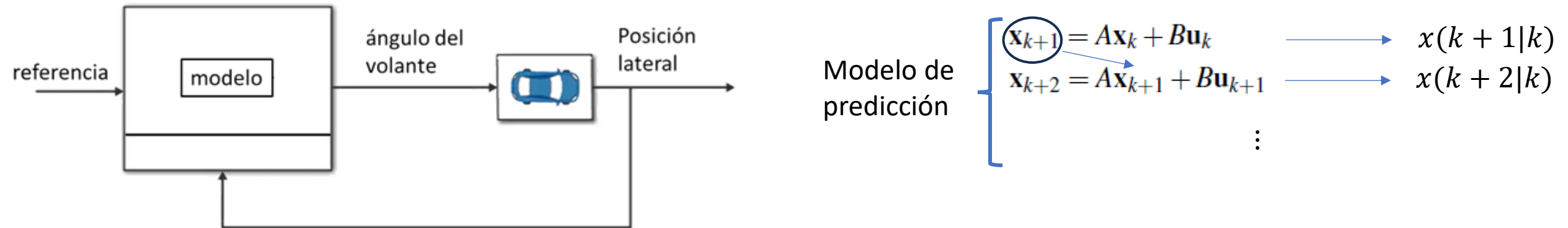
El término control predictivo basado en modelo no designa una estrategia de control específica sino una gama muy amplia de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo.

- Todos los algoritmos MPC poseen elementos comunes. Diferentes opciones dentro de éstos dan lugar a diferentes algoritmos.
 - el modelo de predicción
 - la función objetivo
 - procedimiento para obtener la ley de control



CA3: Introducción al MPC

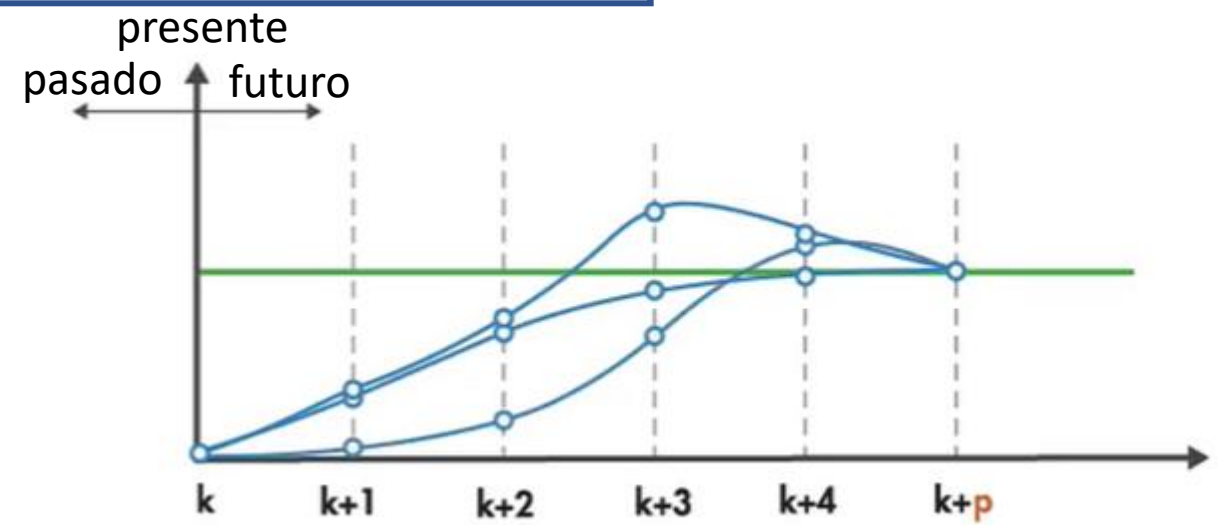
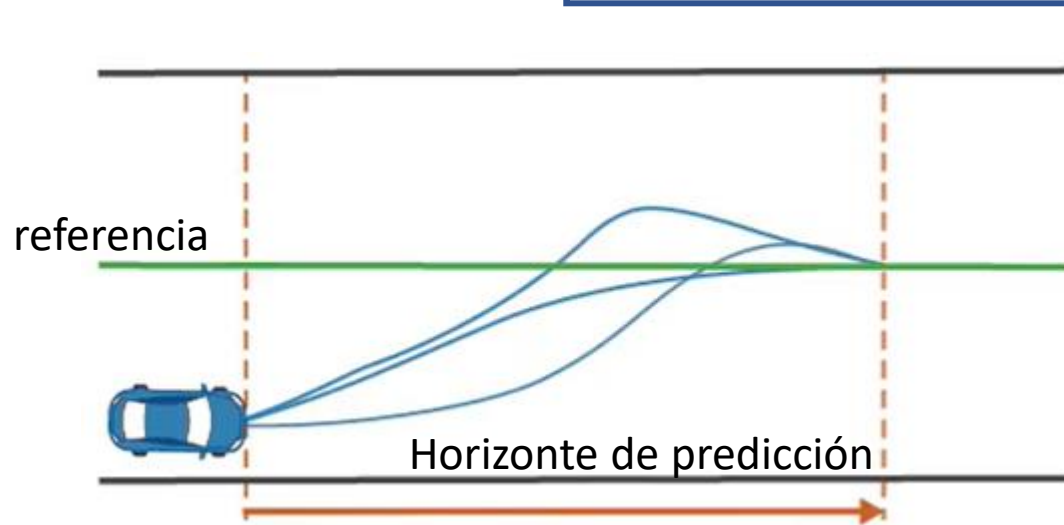
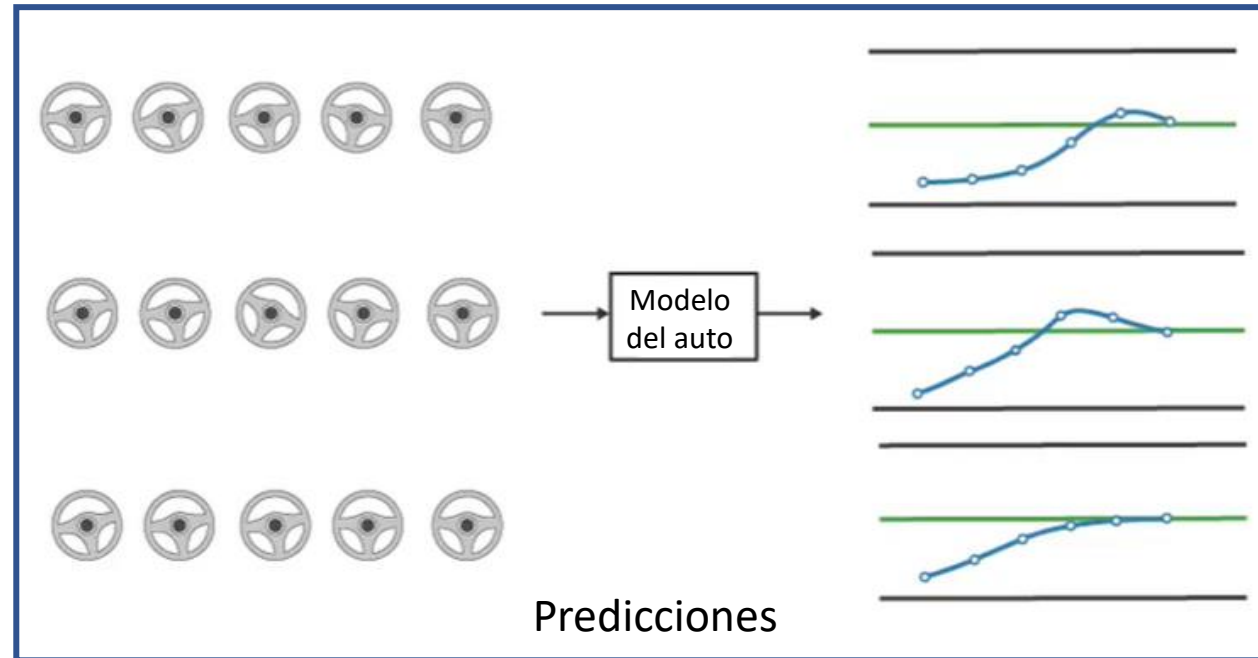
Introducción – Ejemplo introductorio e idea general





CA3: Introducción al MPC

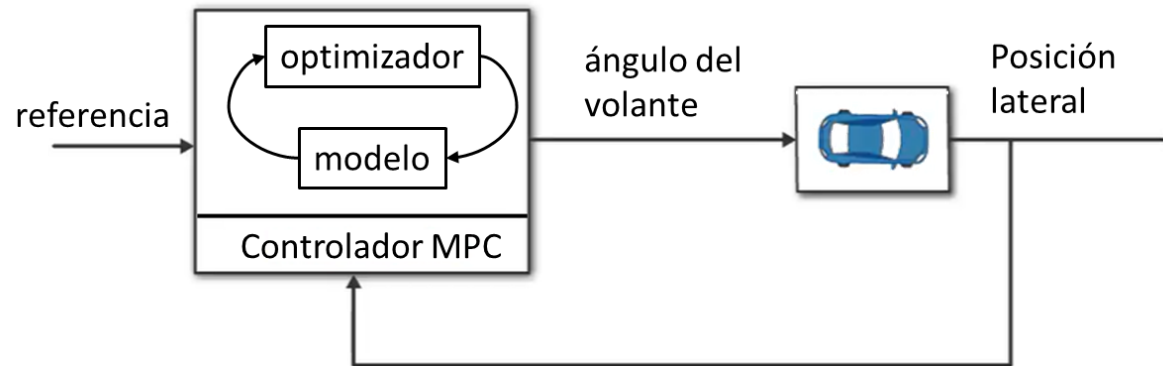
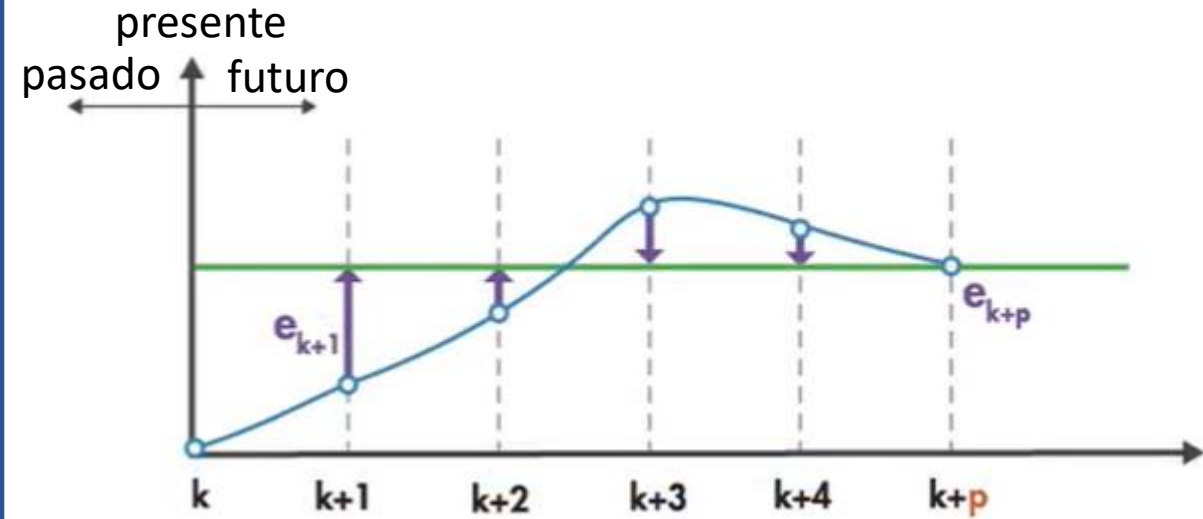
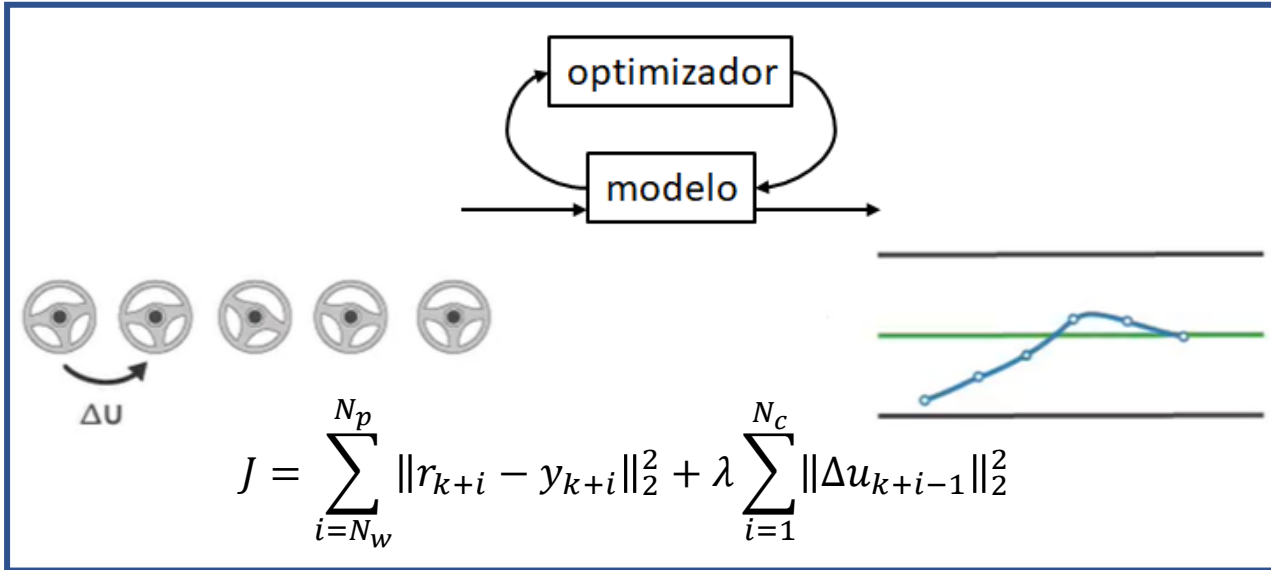
Introducción – Ejemplo introductorio e idea general (cont.)





CA3: Introducción al MPC

Introducción – Ejemplo introductorio e idea general (cont.)

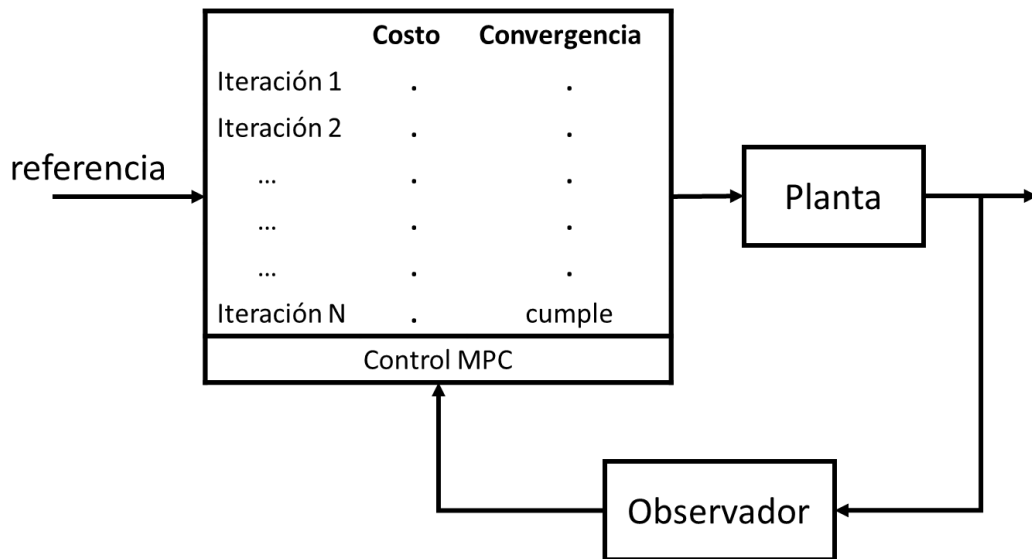




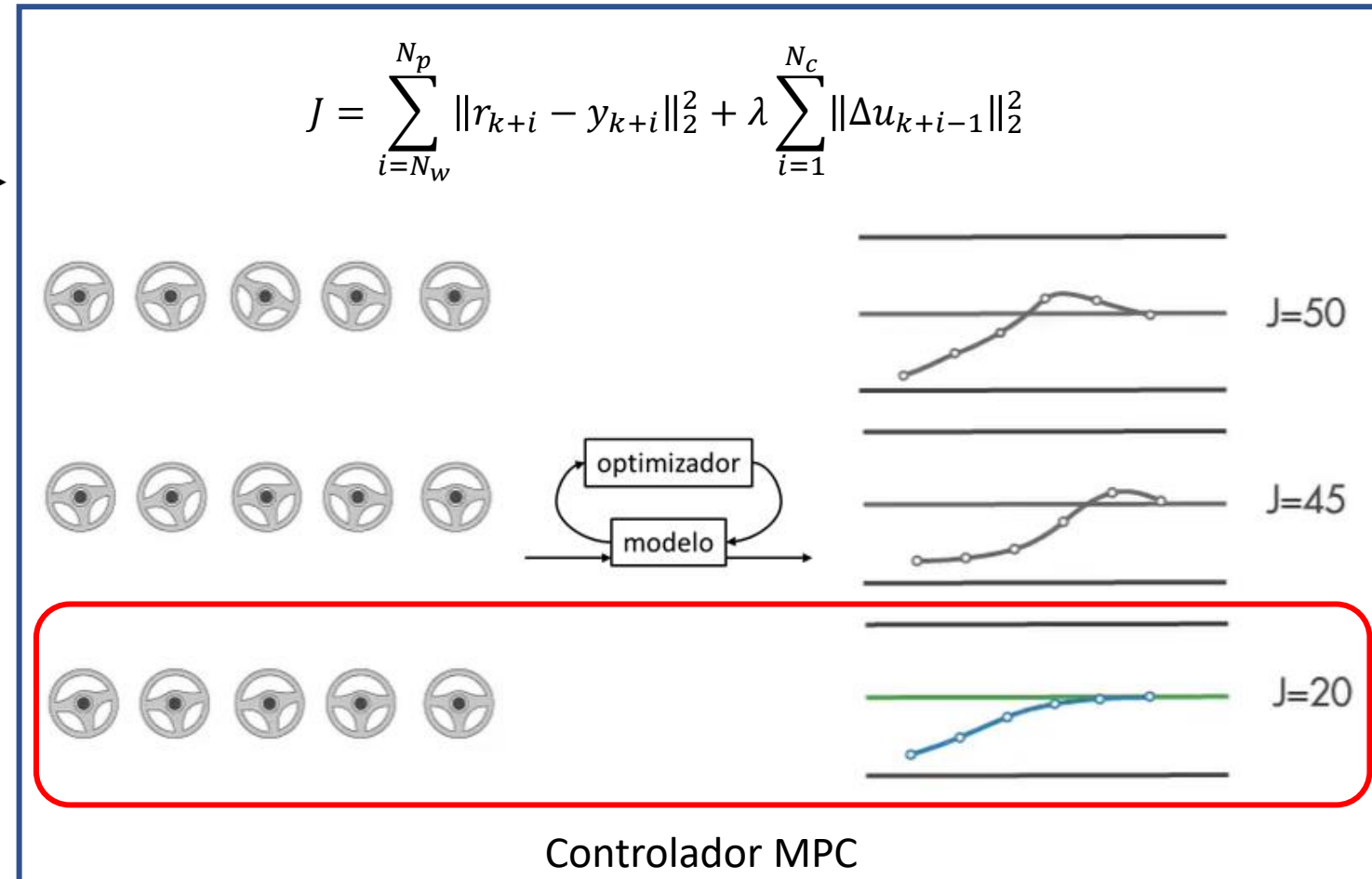
CA3: Introducción al MPC

Introducción – Ejemplo introductorio e idea general (cont.)

- Utiliza un modelo para hacer predicciones (contempla restricciones, etc.) y resuelve un problema de optimización en cada paso de muestreo para determinar la acción de control óptima.



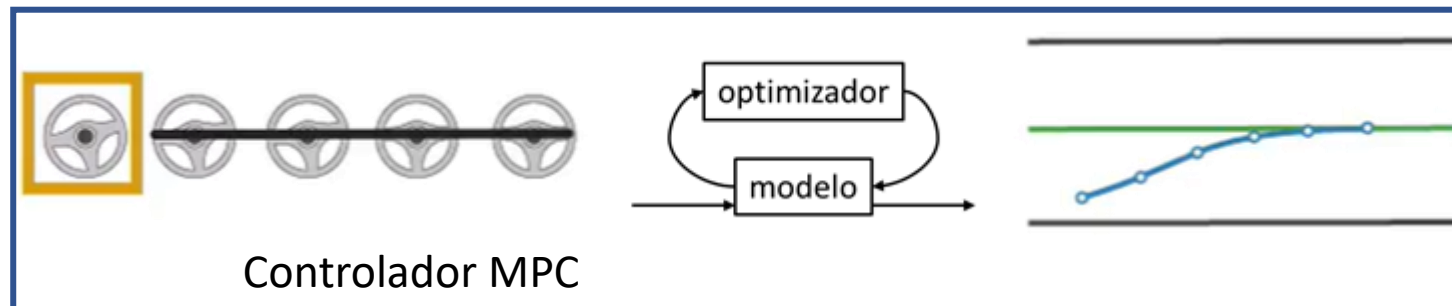
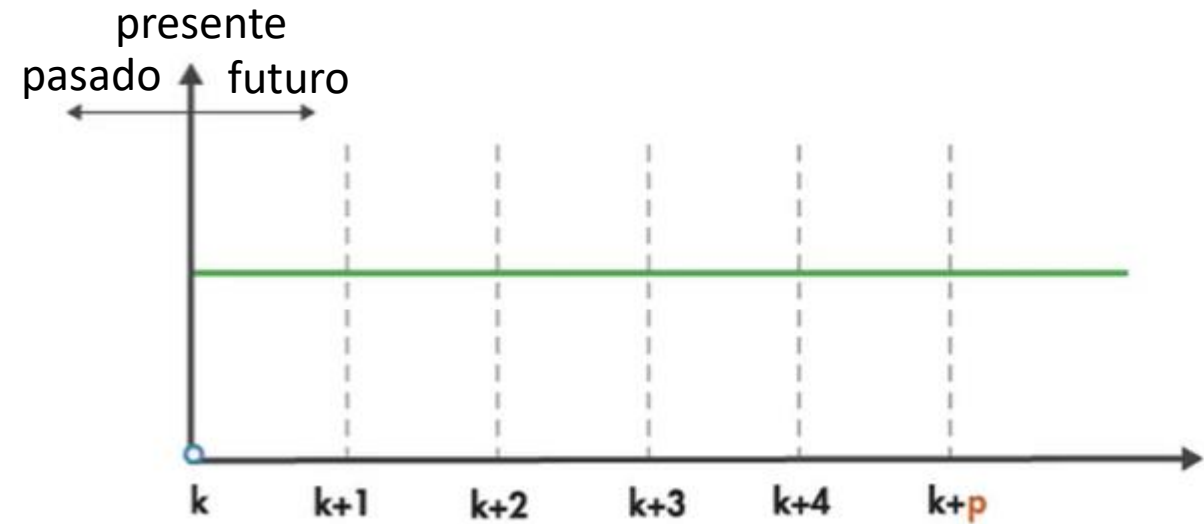
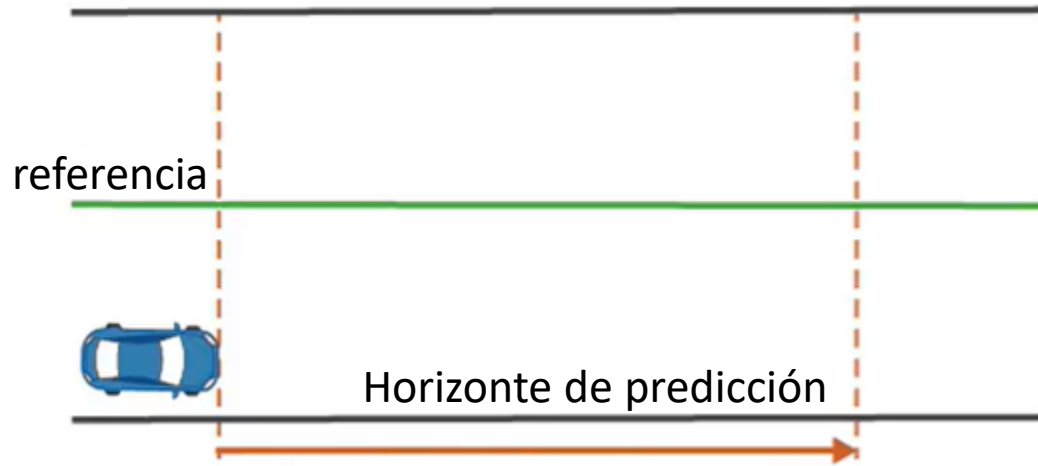
Computacionalmente demandante.





CA3: Introducción al MPC

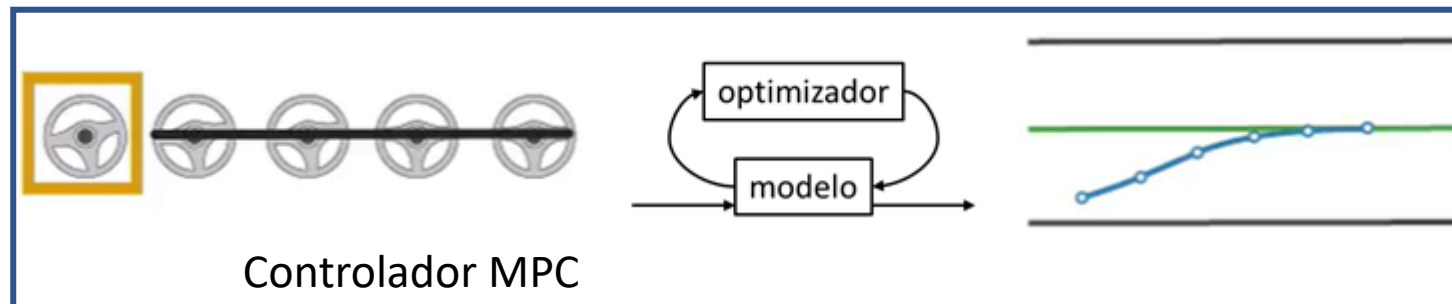
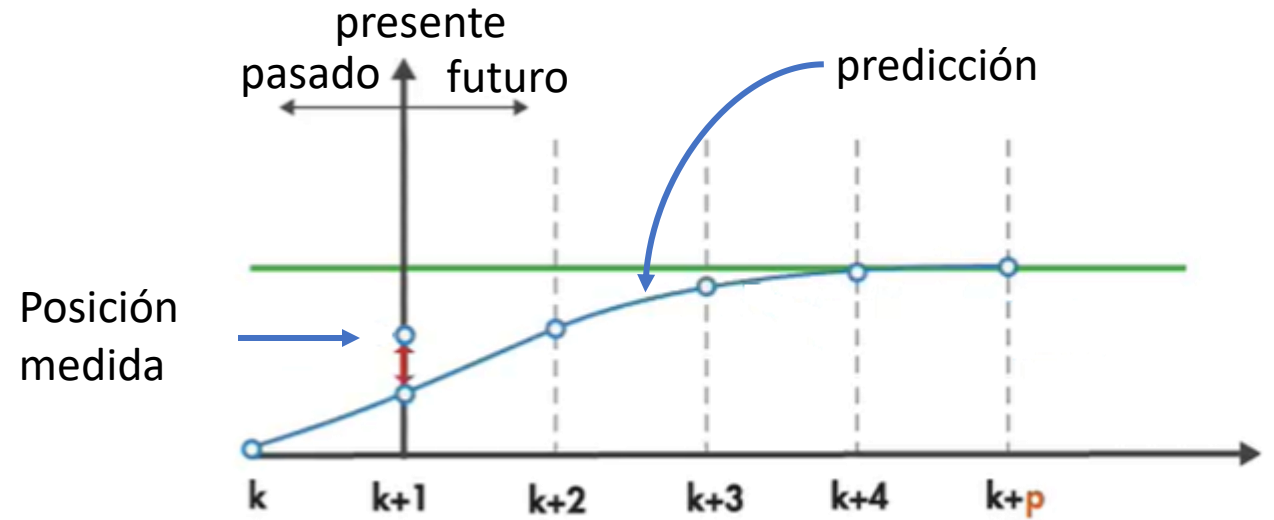
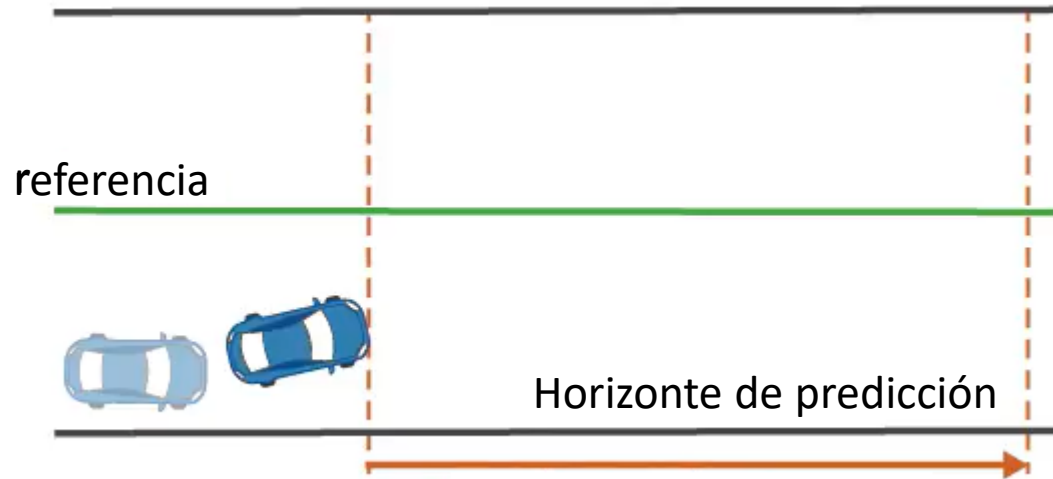
Introducción – Ejemplo introductorio e idea general – Ventana deslizante





CA3: Introducción al MPC

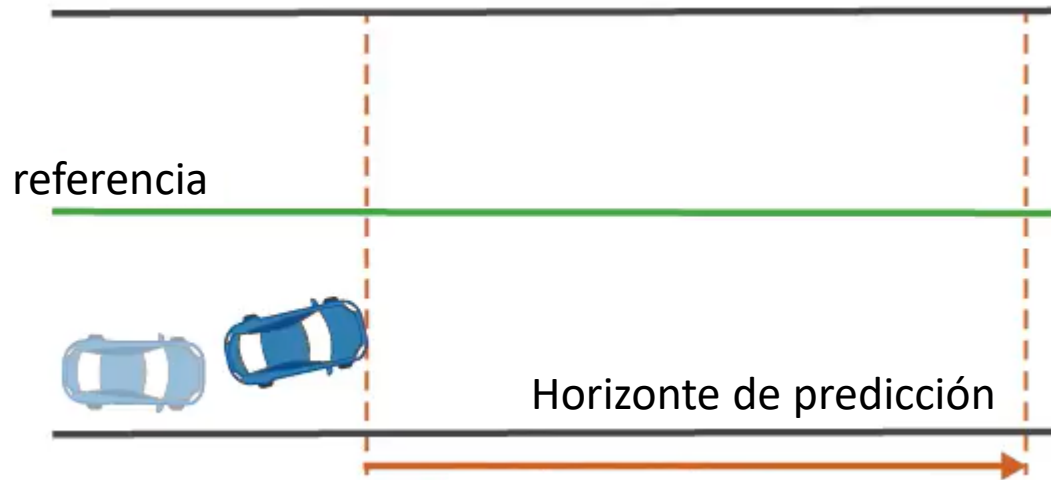
Introducción – Ejemplo introductorio e idea general – Ventana deslizante (cont.)



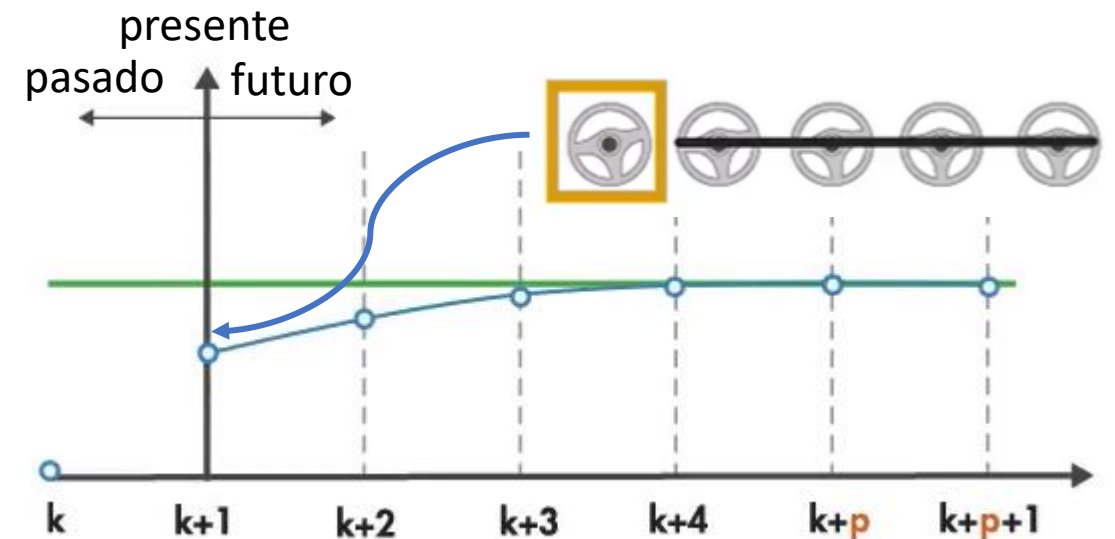
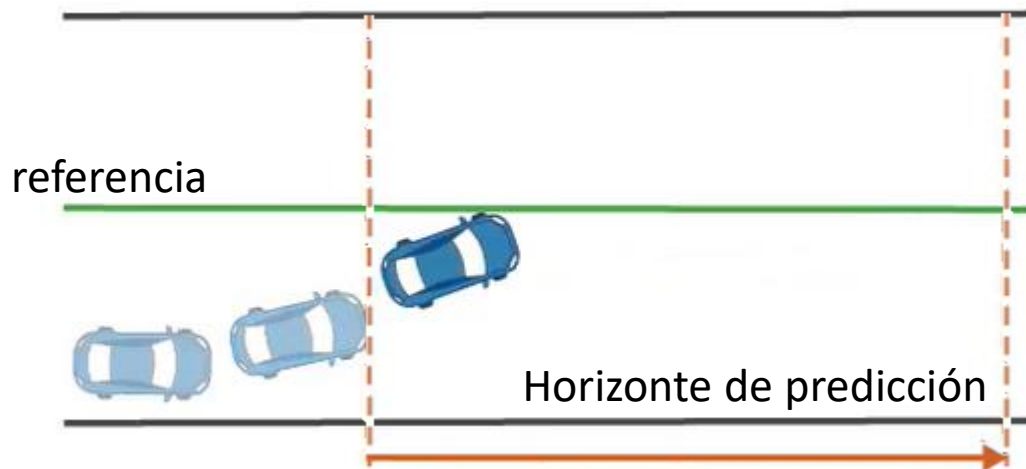
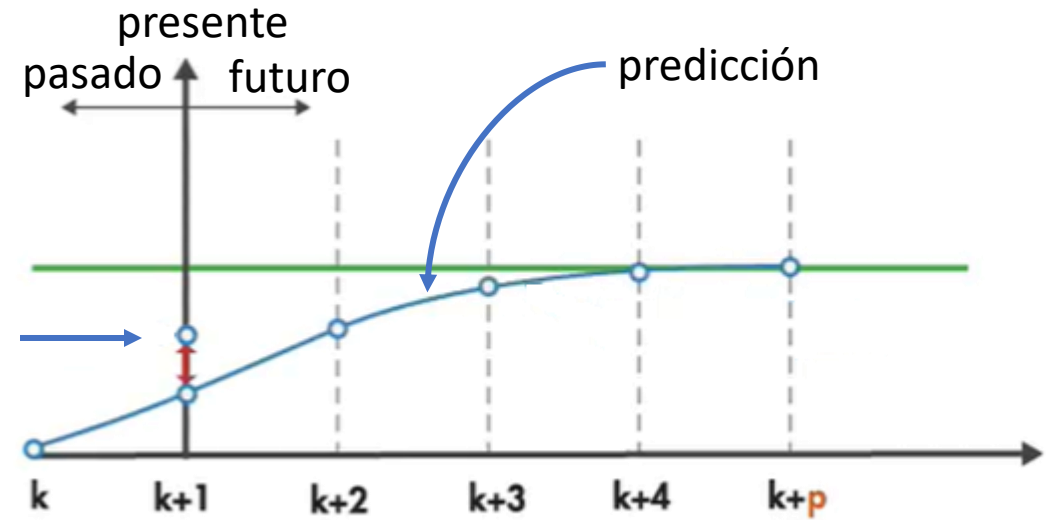


CA3: Introducción al MPC

Introducción – Ejemplo introductorio e idea general – Ventana deslizante (cont.)



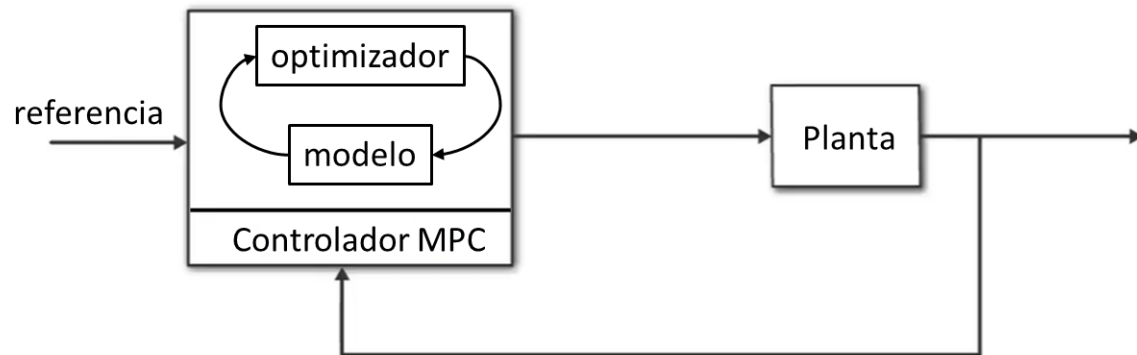
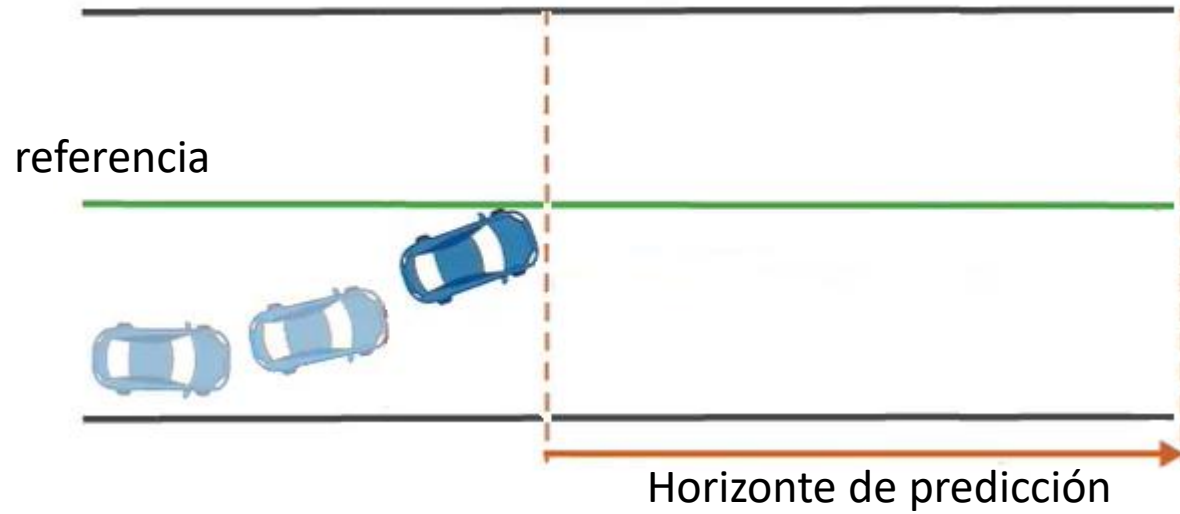
Posición
medida



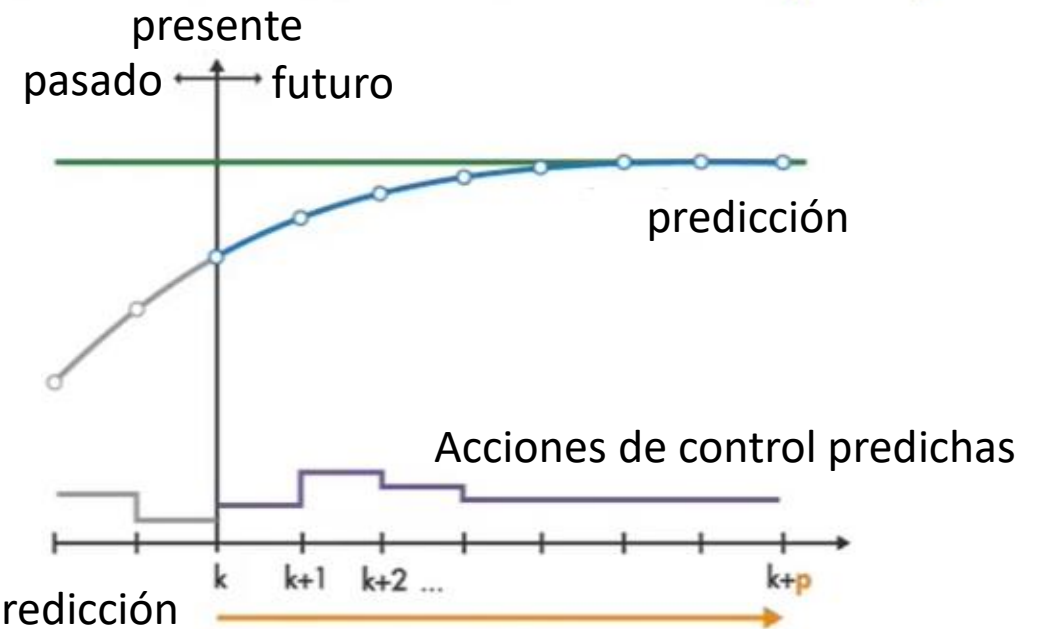
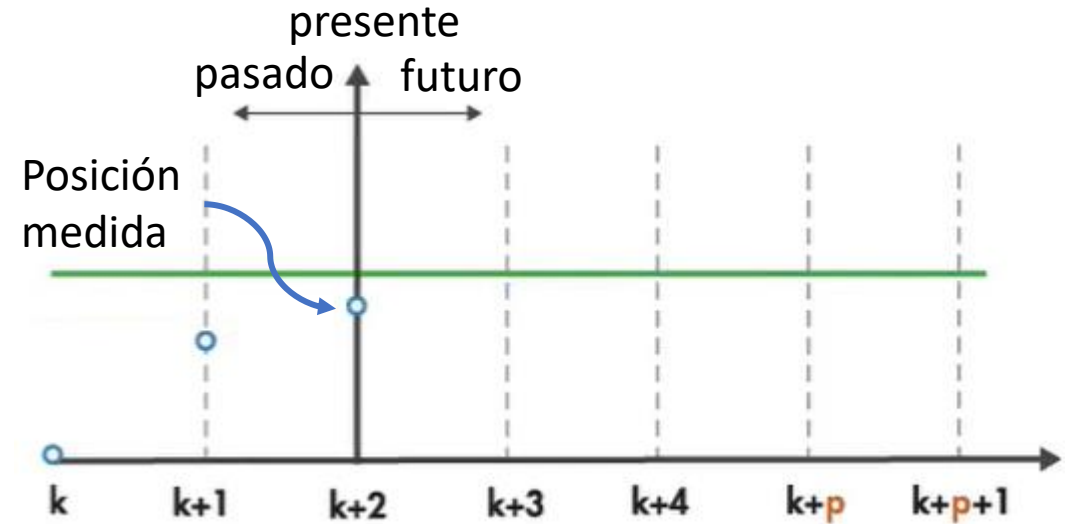


CA3: Introducción al MPC

Introducción – Ejemplo introductorio e idea general – Ventana deslizante (cont.)



$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$



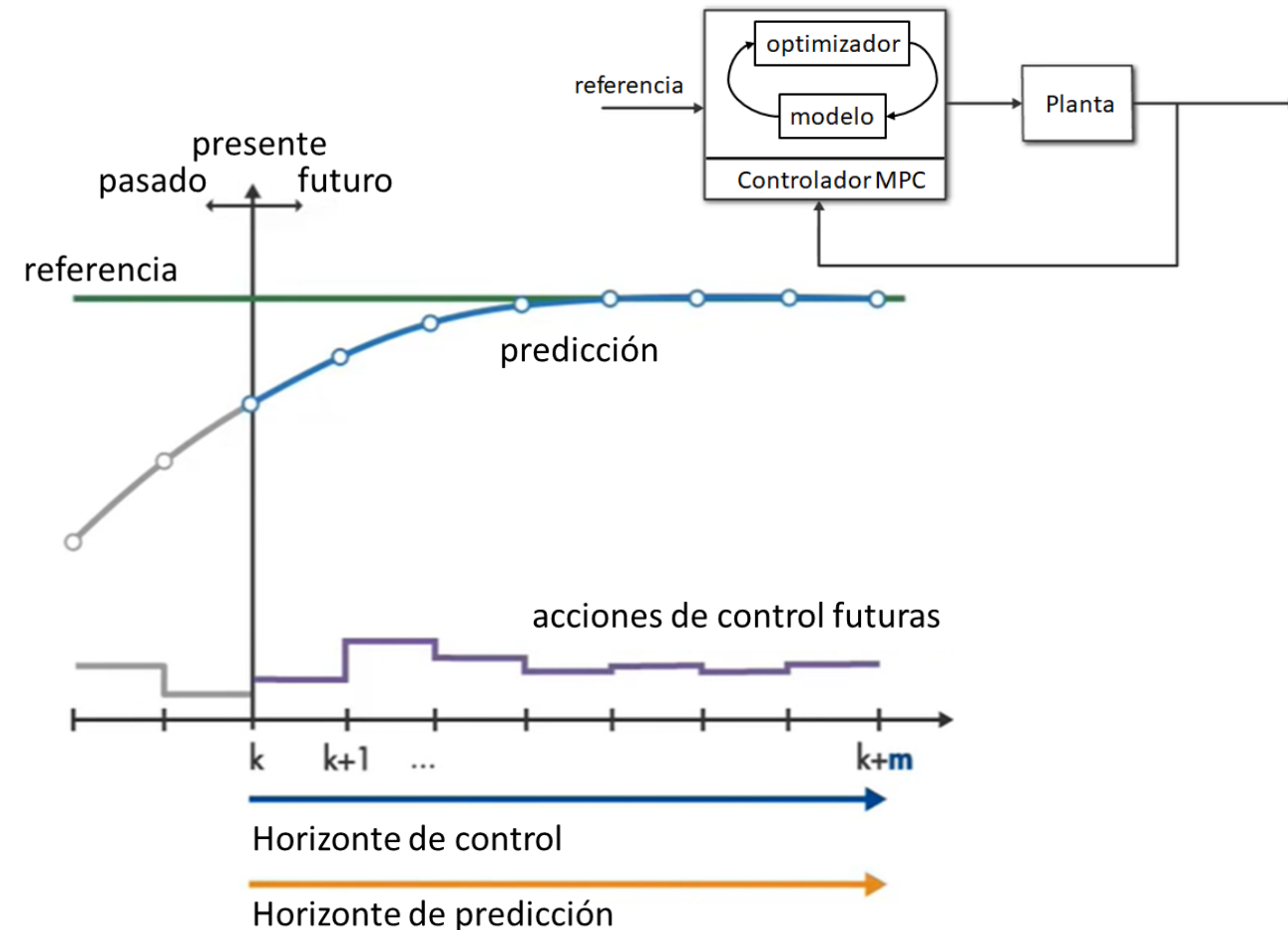
Horizonte de predicción



CA3: Introducción al MPC

Introducción – Principales componentes del MPC

- Filosóficamente, MPC refleja el comportamiento humano mediante el cual seleccionamos acciones de control que creemos que conducirán al mejor resultado predicho en un horizonte limitado.
- Una ley de control predictivo tiene las siguientes características/componentes:



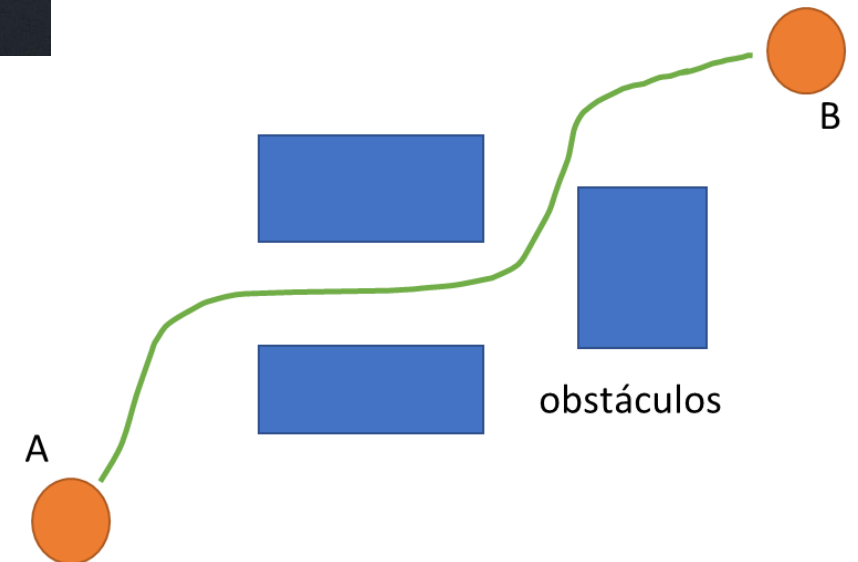
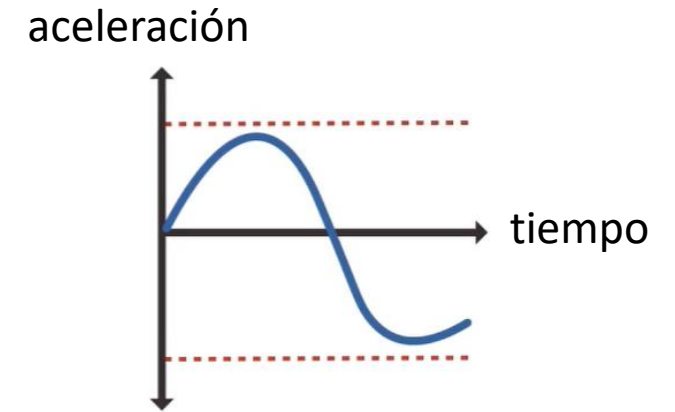
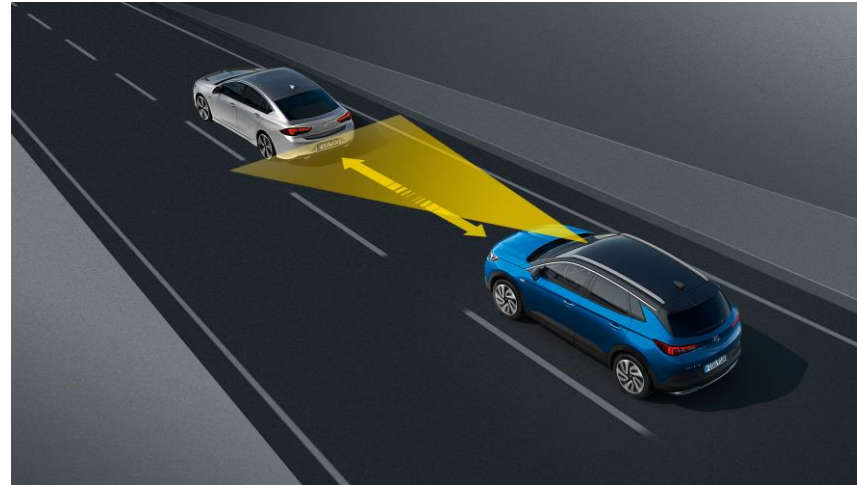
- Considera explícitamente el efecto futuro de las acciones de control.
- Las predicciones están basadas en un modelo (adecuado para el propósito).
- Criterio para juzgar cuál es la mejor acción de control -> función de costo.
- Horizonte deslizante (performance óptima o “segura”, considerar “dinámicas” significativas).
- Sintonización: elección de una función de costo bien planteada, balance en la performance de los diferentes lazos (normalización).
- Uso sistemático de las “demandas” (acción feedforward).



CA3: Introducción al MPC

Introducción – Componentes del MPC – Manejo sistemático de restricciones

- Las restricciones pueden incluirse sistemáticamente durante el proceso de diseño.

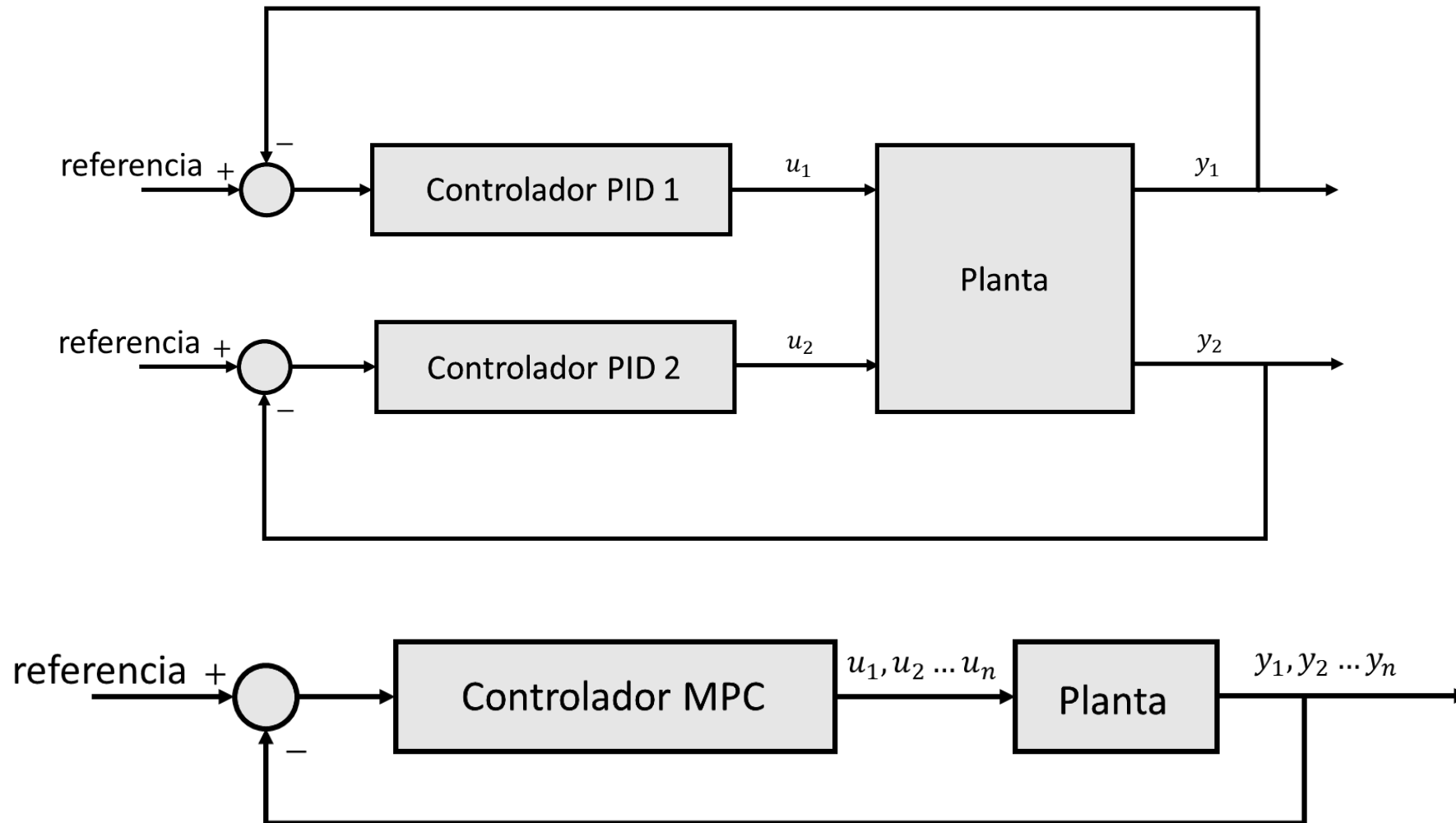




CA3: Introducción al MPC

Introducción – Componentes del MPC – Sistemas SISO o MIMO

- Diseño sistemático para sistemas multivariables (MIMO).





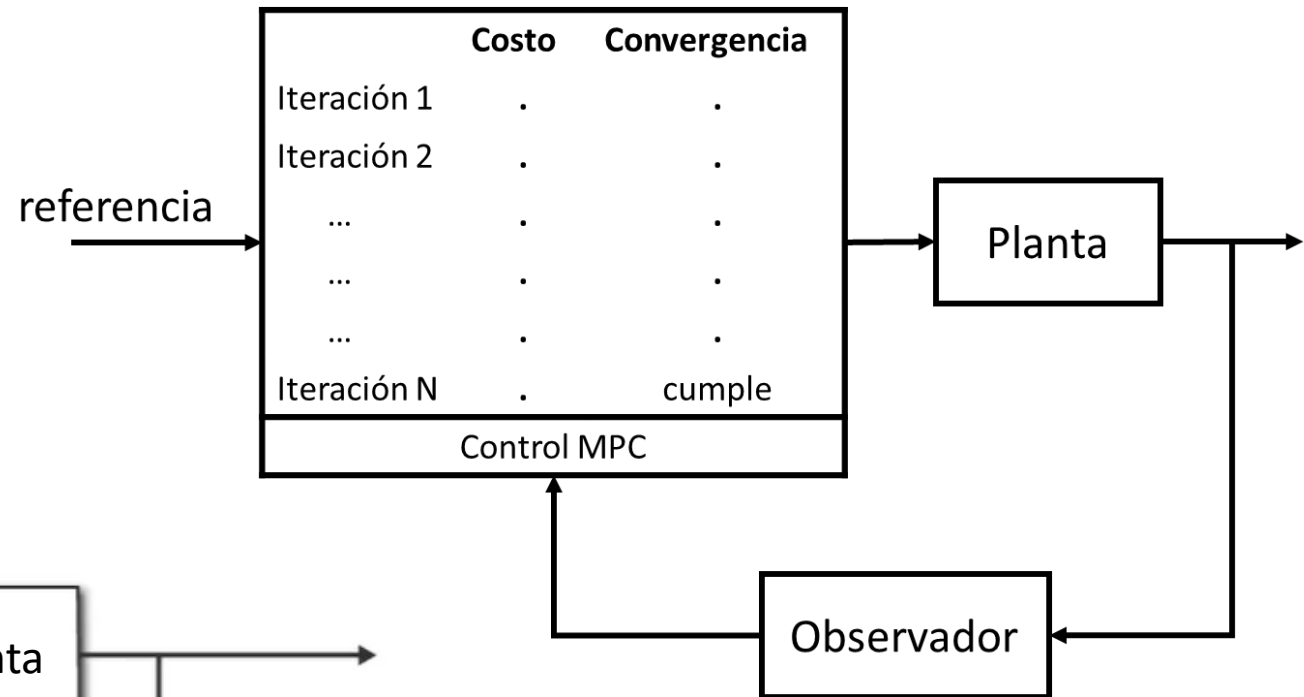
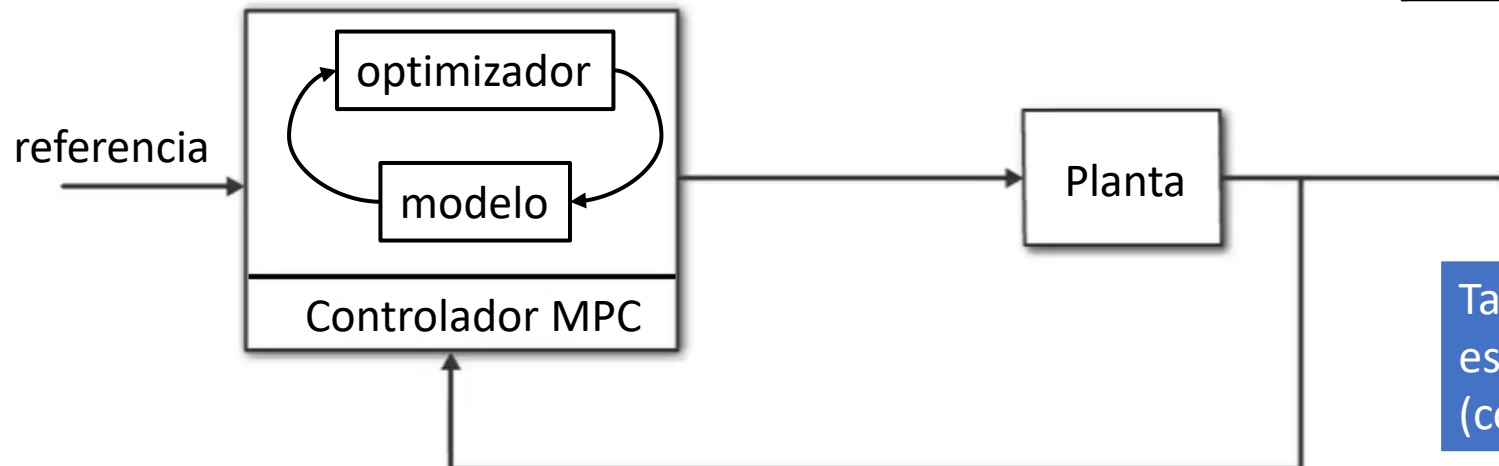
CA3: Introducción al MPC

Introducción – Características

- Utiliza un modelo para hacer predicciones (contempla restricciones, etc.) y resuelve un problema de optimización en cada paso de muestreo para determinar la acción de control óptima.

Puede requerir alta capacidad de cómputo.

Se puede obtener una solución explícita si el criterio es cuadrático, el modelo es lineal y no hay restricciones. De lo contrario, se debe utilizar un método de optimización iterativo.



También se hacen algunos supuestos sobre la estructura de la futura ley de control (constante a partir de un instante dado).



Introducción al MPC

Índice

- Introducción
- **Elementos del MPC**
- MPC dentro de una ventana de optimización
- Horizonte deslizante
- Restricciones
- Sistemas MIMO
- Consideraciones



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo del proceso – Función de transferencia

- Europa ha hecho un uso extensivo de modelos de funciones de transferencia y métodos polinomiales.
- Características:

- El modelo está dado por la función de transferencia $G = N_g/D_g$.

$$D_g(z^{-1})y(t) = N_g(z^{-1})u(t)$$

- Se considera que el proceso no puede tener una respuesta instantánea, luego:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$$

- El predictor resulta:

$$\hat{y}(t+k | t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t+k-1 | t), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

- Estrecha relación con las técnicas populares de identificación de caja negra (histórico) y no se requiere de observador.
- Uso en el caso MIMO puede ser algo engorroso.
- Esta representación también es válida para procesos inestables y tiene la ventaja de que solo necesita unos pocos parámetros.
- El conocimiento a priori del proceso es fundamental en el caso de identificación de modelos, especialmente del orden de los polinomios A y B.



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo del proceso – Modelos FIR

- En la industria (está cambiando) se han utilizado modelos FIR.
 - Ejemplo: respuesta al escalón.
- Considera la relación entre las entradas y las salidas para un sistema estable utilizando una respuesta truncada (utilizado por DMC y sus variantes).

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) = y_0 + G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(t)$$

g_i : valores muestreados de la salida

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$$

- El valor de y_0 se puede considerar 0 sin perder generalidad, el predictor es:

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-i | t)$$

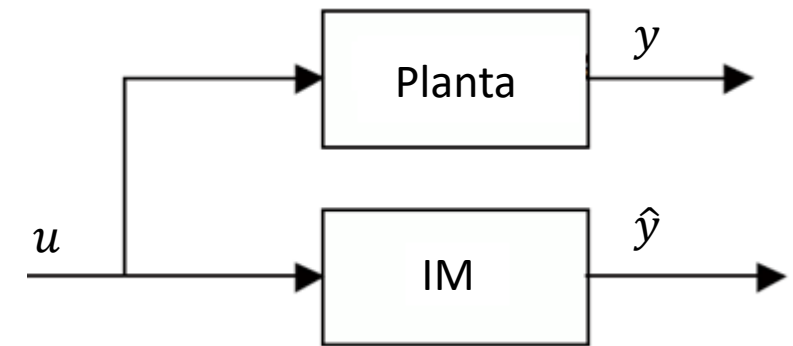
- Características:
 - Ampliamente aceptado en la práctica industrial: muy intuitivo y refleja claramente la influencia de cada variable manipulada en la salida.
 - Menor sensibilidad al ruido de medición, sin observadores.
 - No se necesita información previa sobre el proceso: simplifica el proceso de identificación y permite describir con facilidad dinámicas complejas como fases no mínimas o retardos.
 - Se necesitan muchos más datos que para la identificación que con EE y FT, problemas de cuándo truncar la FIR y la necesidad de gran almacenamiento de datos.



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo de predicción – Modelo interno (IM)

- Los modelos internos (modelos independientes) no son una forma diferente de modelado.
- La diferencia en el uso es particularmente relevante en el contexto de MPC, ya que puede producir cambios sustanciales en la sensibilidad de lazo cerrado, aunque no en el rendimiento nominal.
- Tiene conexiones con las ideas de predictores de Smith y el control de modelo interno (IMC).
- El enfoque de IM no está restringido a ningún tipo de modelo dado.
- No se requiere un observador incluso cuando el IM es un modelo de espacio de estados.
- El IM es un modelo del proceso que se simula en paralelo con el proceso utilizando las mismas entradas.





CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo de predicción – Modelo en espacio de estados

- La academia y los EE.UU. han puesto mucho más énfasis en los modelos de espacio de estados.
- Características

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{cases} \quad \text{Normalmente } \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_k}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_l(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l,1} & c_{l,2} & \dots & c_{l,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,m} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l,1} & d_{l,2} & \dots & d_{l,m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_k}$$

- Se extienden fácilmente al caso MIMO y hay una gran cantidad de resultados teóricos.
- Uso de observadores.

Por ahora omitiremos el modelo de las perturbaciones.

De ahora en más $(\cdot)(k+1)$ es equivalente a $(\cdot)_{k+1}$ y se utilizarán de forma indistinta.



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC - Índice de performance

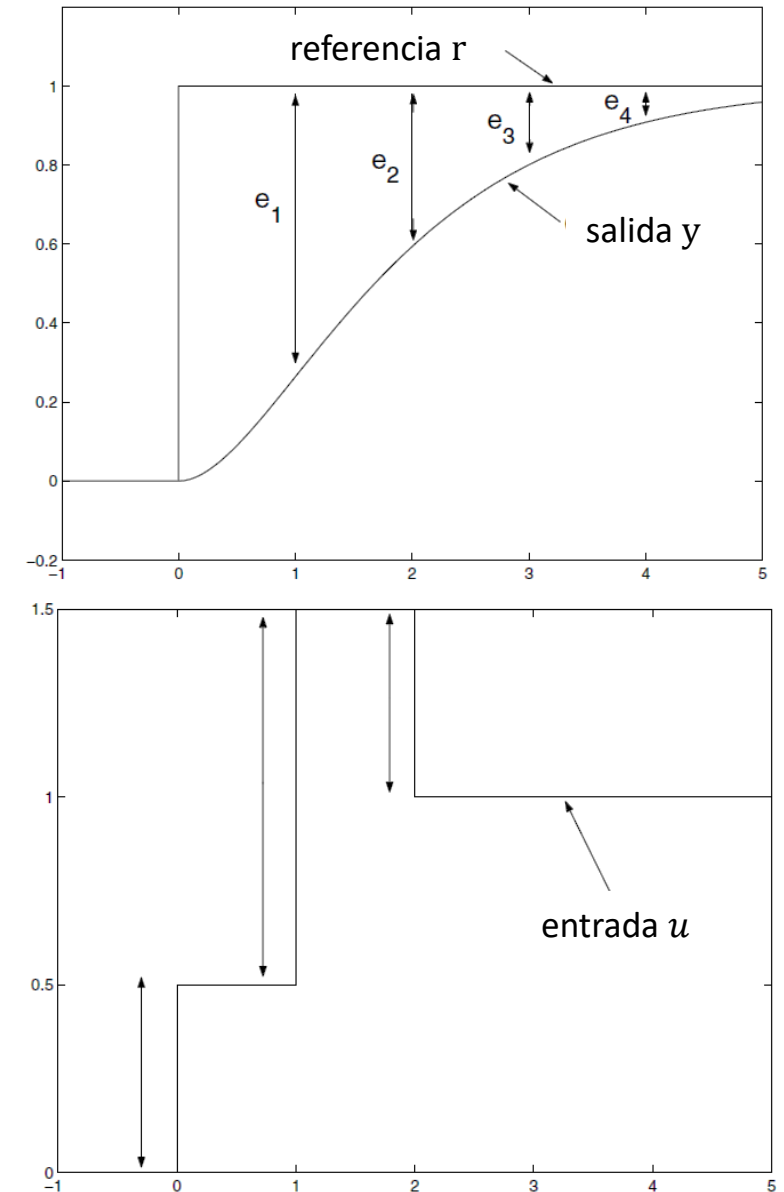
- La ley de control surge de la minimización de un índice de performance, típicamente:

$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2 = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|e_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$

- El objetivo general es que la salida futura (y) en el horizonte considerado siga una señal de referencia determinada (r) y, al mismo tiempo, se penalice el esfuerzo de control (u) necesario para ello.
- El índice de performance mínimo ($J = 0$), es consistente con el seguimiento libre de error, ya que implica que tanto $\vec{e} = 0$ y que el control no cambia.

- Notación compacta:

$$J = \|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{y}}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \underline{\mathbf{u}}\|_2^2 = \|\underline{\mathbf{e}}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \underline{\mathbf{u}}\|_2^2$$





CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC - Índice de performance - Optimización

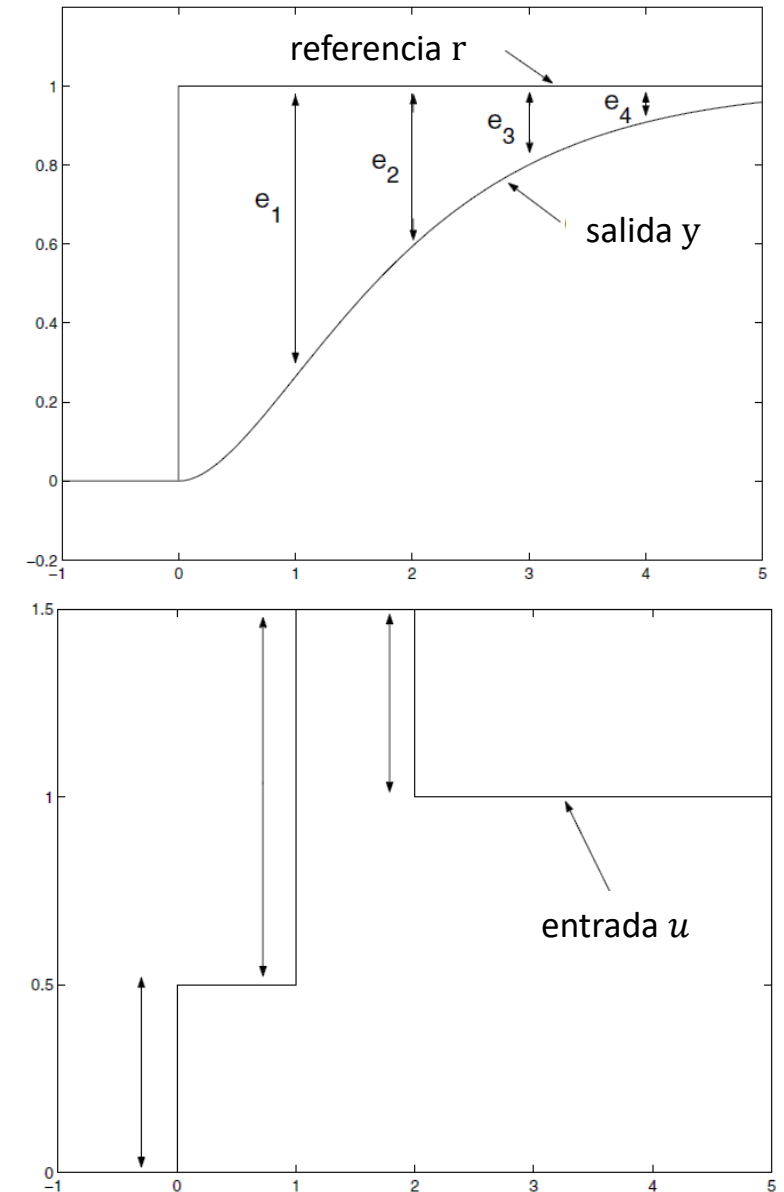
$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2 = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|e_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$

- Optimización

- Los grados de libertad (d.o.f.) que se pueden usar para minimizar J son los movimientos de control futuros.
- Generalmente los primeros movimientos de control N_c .

$$\min_{\vec{\Delta u}} J = \|\vec{e}\|_2^2 + \lambda \|\vec{\Delta u}\|_2^2$$

- De la optimización $\vec{\Delta u}$, solo el primer elemento (Δu_k) , se implementa ya que la optimización se repite (actualiza) en cada instante de muestreo.





CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC - Índice de performance bien planteado

$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|u_{k+i-1}\|_2^2$$

- No estaría bien planteado en general, ya que $r_{k+i} = y_{k+i}$ y $u_{k+i-1} = 0$ serán inconsistentes la mayor parte del tiempo. Minimizar J no puede dar un seguimiento libre de error.
- El mínimo en el estado estacionario será un compromiso entre las normas de $r - y$ y $u \Rightarrow r - y \neq 0$.
- Si se quiere evitar el uso de incrementos, una alternativa es incluir la distancia de la entrada a su valor de estados estacionario u_{ee} .

Una excepción se puede dar si el proceso tiene acción integral de forma que $u = 0$ en estado estacionario.

$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|u_{k+i-1} - u_{ee}\|_2^2$$

Se requiere de un modelo que de predicciones sin error de estado estacionario del par y_{ee}, u_{ee} .



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC - El uso de incrementos de entrada y obtención de acción integral

- Para obtener seguimiento sin error de estado estacionario:
 - En estado estable, el mínimo de J debe ser consistente con error de seguimiento cero.
 - Si la planta está en estado estable con error de seguimiento cero, el movimiento de control previsto para mantener el error de seguimiento en cero debe ser cero.
- Lo anterior implica:
 - usar un índice de desempeño bien planteado

$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|r_{k+i} - y_{k+i}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|\Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$

- tener predicciones insesgadas en estado estacionario.
 1. Se busca que con $\Delta u = 0$ el modelo de predicción de $r = y$, independientemente de las diferencias entre el modelo y el proceso debido a la incertidumbre y las perturbaciones.
 2. Esto se puede lograr mediante el uso del modelo incremental, ya que se define solo para predecir cambios sobre los valores actuales y no utiliza ninguna información sobre el valor absoluto actual de la entrada. No es susceptible de desajuste entre las ganancias del modelo y del proceso.



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo de predicción – Modelo con integrador (1)

- Partiendo de un sistema SISO en espacio de estados

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k)\end{aligned}$$

Tiene $u(k)$ como entrada. Debemos cambiar el modelo para que tenga un integrador.

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ u(k) &= \underbrace{u(k-1)}_{\text{Nuevo estado "extra"} \ x^u(k) = u(k-1)} + \underbrace{\Delta u(k)}_{\text{Nuevo entrada de control}}\end{aligned} \longrightarrow x(k) = \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x^u(k) \end{bmatrix}$$

- Sistema aumentado:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} x_m(k+1) \\ x^u(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_m & B_m \\ 0 & I \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_m(k) \\ x^u(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ I \end{bmatrix}}_B \Delta u(k) \\ y(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_m & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x^u(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Modelo de predicción – Modelo con integrador (2)

- Asumimos un sistema SISO:

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k), \\ y(k) &= C_m x_m(k),\end{aligned}$$

Tiene $u(k)$ como entrada. Debemos cambiar el modelo para que tenga un integrador.

$D_m = 0$ (planta real y horizonte deslizante)

- Realizando la operación de diferencias a ambos lados

$$x_m(k+1) - x_m(k) = A_m(x_m(k) - x_m(k-1)) + B_m(u(k) - u(k-1))$$

- Definiendo

$$\begin{aligned}\Delta x_m(k+1) &= x_m(k+1) - x_m(k) \\ \Delta x_m(k) &= x_m(k) - x_m(k-1), \\ \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1)\end{aligned}$$

- Resulta $\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k)$

- Resta conectar $\Delta x_m(k)$ con $y(k)$. Definimos un nuevo vector de estados: $x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)]^T$

$$\begin{aligned}y(k+1) - y(k) &= C_m(x_m(k+1) - x_m(k)) = C_m \Delta x_m(k+1) \\ &= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}^{x(k+1)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k) \\ y(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$



CA3: Introducción al MPC

Elementos del MPC – Horizonte deslizante

- La terminología horizonte deslizante se aplica a menudo al MPC.
- El horizonte se aleja constantemente, aunque a la misma velocidad a la que el instante de muestreo.

Instante de muestreo	Ventana deslizante								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	→								
1		→							
2			→						
3				→					
⋮					⋮				



Introducción al MPC

Índice

- Introducción
- Elementos del MPC
- **MPC dentro de una ventana de optimización**
- Horizonte deslizante
- Restricciones
- Sistemas MIMO
- Consideraciones



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización

- Obtenido el modelo matemático, el siguiente paso es calcular la salida prevista de la planta con las señales de control futuras como variables. Esta predicción se realiza dentro de un horizonte de optimización.
- Dado $x(k)$ (estado actual de la planta), las variables de estado futuro se predicen para N_p número de muestras (N_p horizonte de predicción). N_p también es la longitud de la ventana de optimización.

$$x(k+1|k), x(k+2|k), \dots, x(k+i|k), \dots, x(k+N_p|k)$$

$x(k+i|k)$: variable de estado predicha en $k+i$ con la información actual de la planta dada $x(k)$.

- El horizonte de control N_c se elige para que sea menor (o igual) que el horizonte de predicción N_p .

- Las acciones de control futuro se denotan por

$$\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_c-1)$$

N_c : horizonte de control

- Supondremos que en el instante de muestreo k ($k > 0$) se conoce el vector de estados $x(k)$, de lo contrario será necesario un observador.



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización - Predicciones

- El modelo de estados discretos se puede ver como una predicción de un paso hacia adelante

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \longrightarrow x(k+1|k)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = C\mathbf{x}_{k+1} \longrightarrow y(k+1|k)$$

- Esta relación se puede usar recursivamente para obtener:

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+2} = A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+2} = C\mathbf{x}_{k+2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+2} = A^2\mathbf{x}_k + AB\mathbf{u}_k + B\mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+2} = C\mathbf{x}_{k+2} \end{array}$$

- Siguiendo de la misma forma:

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+3} = A^2\mathbf{x}_{k+1} + AB\mathbf{u}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+2} \\ \mathbf{y}_{k+3} = C\mathbf{x}_{k+3} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+3} = A^2[A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k] + AB\mathbf{u}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+2} \\ \mathbf{y}_{k+3} = C\mathbf{x}_{k+3} \end{array}$$

- De forma general para el paso n

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+n} = A^n\mathbf{x}_k + A^{n-1}B\mathbf{u}_k + A^{n-2}B\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + B\mathbf{u}_{k+n-1} \\ \mathbf{y}_{k+n} = C[A^n\mathbf{x}_k + A^{n-1}B\mathbf{u}_k + A^{n-2}B\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + B\mathbf{u}_{k+n-1}] \end{array}$$



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización - Predicciones

- Modelo de predicción en el espacio de estados

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ x_{k+3} \\ \vdots \\ x_{k+N_p} \end{bmatrix}}_{\vec{x}_{\rightarrow k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^{N_p} \end{bmatrix}}_{F_x} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots \\ AB & B & 0 & \dots \\ A^2B & AB & B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{N_p-1}B & A^{N_p-2}B & A^{N_p-3}B & \dots \end{bmatrix}}_{\phi_x} \underbrace{\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+N_p-1} \end{bmatrix}}_{\vec{u}_{\rightarrow k-1}} \longrightarrow \vec{x}_{\rightarrow k} = F_x x_k + \phi_x \vec{u}_{\rightarrow k-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \\ \vdots \\ y_{k+N_p} \end{bmatrix}}_{\vec{y}_{\rightarrow k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}}_F x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots \\ CAB & CB & 0 & \dots \\ CA^2B & CAB & CB & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots \end{bmatrix}}_{\phi} \vec{u}_{\rightarrow k-1} \longrightarrow \vec{y}_{\rightarrow k} = F x_k + \phi \vec{u}_{\rightarrow k-1}$$

- Notación:

$$\vec{\mathbf{x}}_{\rightarrow k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{x}}_{\leftarrow k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Restricciones en el horizonte de control

- Normalmente el horizonte de control es menor al horizonte de predicción. ¿Por qué?

$$\Delta u_{k+i|k} = 0, \quad i \geq N_c$$

$$\begin{aligned} x_{\rightarrow k} &= F_x x_k + \phi_x u_{\rightarrow k-1} \\ y_{\rightarrow k} &= F y_k + \phi u_{\rightarrow k-1} \end{aligned}$$

- Esto tiene repercusiones significativas en la estructura de las ecuaciones de predicción.

$$\phi \Delta u_{\rightarrow}^u = \begin{bmatrix} \phi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1 & \phi_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N_p-1} & \phi_{N_p-2} & \phi_{N_p-3} & \cdots & \phi_{N_p-N_c} & \cdots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{k|k} \\ \Delta u_{k+1|k} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N_c-1|k} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N_p-1|k} \end{bmatrix}$$

ϕ_{N_c} N_c columnas

$$\phi \Delta u_{\rightarrow}^u = \begin{bmatrix} \phi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1 & \phi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N_p-1} & \phi_{N_p-2} & \phi_{N_p-3} & \cdots & \phi_{N_p-N_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{k|k} \\ \Delta u_{k+1|k} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N_c-1|k} \end{bmatrix}$$

En adelante asumiremos que trabajamos con $\phi = \phi_{N_c}$.



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Modelo de predicción

- Modelo de predicción en variables de estado sin restricciones para una ventana de optimización con un horizonte de predicción N_p y un horizonte de control N_c .

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\rightarrow k} &= F_x x_k + \phi_x \vec{u}_{\rightarrow k-1} & \vec{y}_{\rightarrow k} &= Y = [y(k+1|k) \quad y(k+2|k) \quad y(k+3|k) \quad \dots \quad y(k+N_p|k)]^T \\ \vec{y}_{\rightarrow k} &= F x_k + \phi \vec{u}_{\rightarrow k-1} & \vec{u}_{\rightarrow k-1} &= \Delta U = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \Delta u(k+2) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_c-1)]^T \end{aligned}$$

$$Y = F x_k + \phi \Delta U$$

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Cálculo de la acción de control

- Dada una señal de referencia $r(k)$, el objetivo del MPC, dentro de un horizonte de predicción, es acercar la salida predicha lo más cerca posible a la señal de referencia.
- Se asume que la referencia permanece constante en la ventana de optimización.

$$R_s^T = \overbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}^{N_p} r(k) = \bar{R}_s r(k)$$

- Modelo y predicciones

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\Delta u_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

$$Y = Fx_k + \Phi\Delta U$$

- Índice a optimizar

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U$$

$$\bar{R} = r_w I_{n_u} \quad r_w \geq 0$$

$(\Phi^T \Phi + \bar{R})$ Se conoce como matriz Hessiana

El objetivo se traduce en un diseño para encontrar el "mejor" vector de parámetro de control ΔU de manera que se minimice una función de error entre la referencia y la salida predicha.

$$\frac{\partial a'x}{\partial x} = \frac{\partial x'a}{\partial x} = a \quad \frac{\partial x'Ax}{\partial x} = (A + A')x$$

$$J = (R_s - Fx_k)^T (R_s - Fx_k) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx_k) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\Phi^T (R_s - Fx(k)) + 2(\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k))$$

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx(k))$$



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Cálculo de la acción de control - Ejemplo

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= ax_m(k) + bu(k) & a &= 0.8 & N_p &= 10 \\ y(k) &= x_m(k), & b &= 0.1 & N_c &= 4 \end{aligned}$$

- En $k = 10$, $r(10) = 1$ y $x(10) = [0.1 \ 0.2]^T$, encontrar la solución óptima ΔU para $r_w = 0$ y $r_w = 10$.

Sistema
aumentado

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y(k) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}.$$

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \\ CA^9 \\ CA^{10} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB \\ CA^5B & CA^4B & CA^3B & CA^2B \\ CA^6B & CA^5B & CA^4B & CA^3B \\ CA^7B & CA^6B & CA^5B & CA^4B \\ CA^8B & CA^7B & CA^6B & CA^5B \\ CA^9B & CA^8B & CA^7B & CA^6B \end{bmatrix}$$

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx(k))$$

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} 1.1541 & 1.0407 & 0.9116 & 0.7726 \\ 1.0407 & 0.9549 & 0.8475 & 0.7259 \\ 0.9116 & 0.8475 & 0.7675 & 0.6674 \\ 0.7726 & 0.7259 & 0.6674 & 0.5943 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T F = \begin{bmatrix} 9.2325 & 3.2147 \\ 8.3259 & 2.7684 \\ 7.2927 & 2.3355 \\ 6.1811 & 1.9194 \end{bmatrix} \quad \Phi^T \bar{R}_s = \begin{bmatrix} 3.2147 \\ 2.7684 \\ 2.3355 \\ 1.9194 \end{bmatrix}$$

El horizonte de predicción modifica el número de condición de la matriz Hessiana $(\phi^T \phi + \bar{R})$.

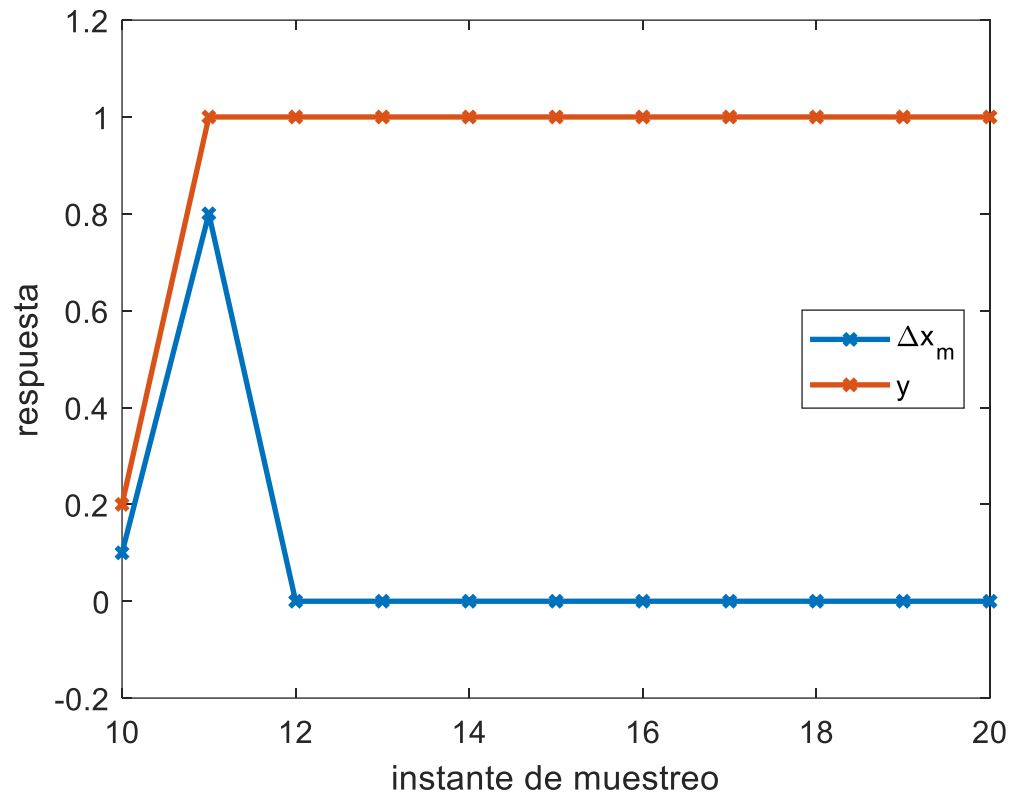


CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Cálculo de la acción de control - Ejemplo

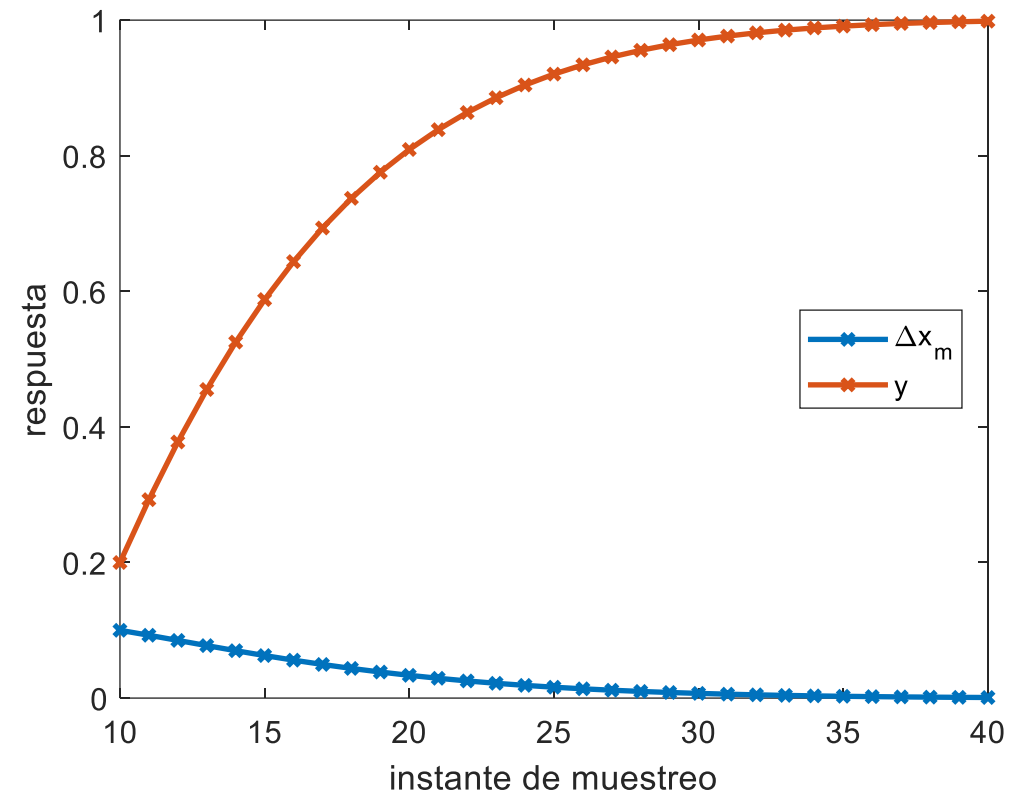
- Con $r_w = 0$

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi^T R_s - \Phi^T F x(k)) = [7.2 \ -6.4 \ 0 \ 0]^T$$



- Con $r_w = 10$

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + 10 \times I)^{-1} (\Phi^T R_s - \Phi^T F x(k)) = [0.1269 \ 0.1034 \ 0.0829 \ 0.065]^T$$



- Con $r_w = 10$ y $N_c = 9$ $\Delta U^T = [0.1227 \ 0.0993 \ 0.0790 \ 0.0614 \ 0.0463 \ 0.0334 \ 0.0227 \ 0.0139 \ 0.0072]$



CA3: Introducción al MPC

MPC dentro de una ventana de optimización – Yalmip

```
% Modelo
A = [0.8 0; 0.8 1];
B = [0.1; 0.1];
C = [0 1];
nx = 2; % # de estados
nu = 1; % # de entradas

% Datos MPC
rw=0;
R = rw.*eye(nu);
Np = 10;
Nc = 4;
r=ones(Np,1);

% Condición inicial
x0 = [0.1; 0.2];

% Variables
u = sdpvar(Nc, nu);

% Inicialización
constraints = [];
objective = 0;
x = x0;

for k = 1:Nc
    x = A*x + B*u(k);
    y = C*x;
    objective = objective + (r(k)-y)'*(r(k)-y) + u(k)'*R*u(k);
end
for k = Nc+1:Np
    x = A*x;
    y = C*x;
    objective = objective + (r(k)-y)'*(r(k)-y);
end

optimize(constraints, objective);
U=double(u)
```

U =

7.2000
-6.4000
0.0000
-0.0000



Introducción al MPC

Índice

- Introducción
- Elementos del MPC
- MPC dentro de una ventana de optimización
- **Horizonte deslizante**
- Restricciones
- Sistemas MIMO
- Consideraciones



CA3: Introducción al MPC

Horizonte deslizante

- El vector ΔU contiene los controles $\Delta u(k), \Delta u(k + 1), \Delta u(k + 2), \dots, \Delta u(k + N_c - 1)$.
- Con el principio de control de horizonte deslizante, sólo se implementa la primera muestra de esta secuencia $\Delta u(k)$, ignorando el resto de la secuencia.

$$\Delta u(k) = \overbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}^{N_c} (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx(k))$$

- Cuando llega el siguiente período de muestreo, se toma la medición más reciente para formar el vector de estado $x(k + 1)$ para el cálculo de la nueva secuencia de la señal de control.
- Este procedimiento se repite en tiempo real para dar la ley de control con horizonte deslizante.



CA3: Introducción al MPC

Horizonte deslizante – Ejemplo continuación

- $r_w = 0$, $x(10) = [0.1 \ 0.2]^T$, $u(9) = 1.2$

$$x_m(k+1) = 0.8x_m(k) + 0.1u(k)$$

$$k_i = 10 \quad \Delta u(10) = 7.2 \quad (\Delta U = [7.2 \ -6.4 \ 0 \ 0]^T)$$

$$u(10) = u(9) + \Delta u(10) = 8.4$$

$$x_m(10) = y(10) = 0.2$$

$$x_m(11) = 0.8x_m(10) + 0.1u(10) = 1$$

$$k_i = 11 \quad \Delta x_m(11) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$y(11) = 1$$

$$x(11) = [0.8 \ 1]^T$$

$$\Delta U(k) = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(11) - Fx(11)) = [-6.4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$u(11) = u(10) + \Delta u(11) = 2$$

$$x_m(12) = 0.8x_m(11) + 0.1u(11) = 1$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \Delta u(k)$$
$$y(k) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

$$k_i = 12 \quad \Delta x_m(12) = 1 - 1 = 0$$

$$y(12) = 1$$

$$x(12) = [0 \ 1]^T$$

$$\Delta U(k) = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(12) - Fx(12)) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$u(12) = u(11) + \Delta u(12) = 2$$

$$x_m(13) = ax_m(12) + bu(12) = 1$$



CA3: Introducción al MPC

Horizonte deslizante – Yalmip

% Modelo

```
A = [0.8 0; 0.8 1];
```

```
B = [0.1; 0.1];
```

```
C = [0 1];
```

```
nx = 2; % # de estados
```

```
nu = 1; % # de entradas
```

% Datos MPC

```
rw=0;
```

```
R = rw.*eye(nu);
```

```
Np = 10;
```

```
Nc = 4;
```

```
r=ones(Np,1);
```

% Condición inicial

```
x0 = sdpvar(2,1);
```

% Variables

```
u = sdpvar(nu,Nc);
```

% Inicialización

```
constraints = [];
```

```
objective = 0;
```

```
x = x0;
```

```
for k = 1:Nc
```

```
    x = A*x + B*u(k);
```

```
    y = C*x;
```

```
    objective = objective + (r(k)-y)'*(r(k)-y) + u(k)'*R*u(k);
```

```
end
```

```
for k = Nc+1:Np
```

```
    x = A*x;
```

```
    y = C*x;
```

```
    objective = objective + (r(k)-y)'*(r(k)-y);
```

```
end
```

```
ops = sdpsettings('verbose',2);
```

```
controller = optimizer(constraints,objective,ops,x0,u(:));
```

% Simulación

```
x = [0.1; 0.2];
```

```
sim_i=10;
```

```
sim_f=40;
```

```
for ii=sim_i:sim_f
```

```
    xs(:,ii-sim_i+1)=x;
```

```
    U=controller(x);
```

```
    ua(ii)=U(1);
```

```
    x = A*x + B*U(1);
```

```
end
```



CA3: Introducción al MPC

Horizonte deslizante - Ecuaciones de lazo cerrado

- Para un dado k el vector óptimo ΔU se calcula como

$$\Delta U = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx(k))$$

$(\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T \bar{R}_s$: se corresponde con un cambio en la referencia

$(\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T F$: se corresponde con una realimentación de estados

Dependen sólo de los parámetros del sistema



Constantes para sistemas invariantes en el tiempo

- Debido al horizonte deslizante, sólo se toma el primer componente de ΔU en el instante k

$$\Delta u(k) = \overbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}^{N_c} (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx(k))$$

$$\Delta u(k) = K_y r(k) - K_{mpc} x(k)$$

Con:

$$K_y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T \bar{R}_s$$

$$K_{mpc} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T F$$

Forma estándar de una
realimentación de estados LTI

Ecuaciones de lazo cerrado

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) - BK_{mpc}x(k) + BK_y r(k) \\ &= (A - BK_{mpc})x(k) + BK_y r(k) \end{aligned}$$

Autovalores de LC

$$\det[\lambda I - (A - BK_{mpc})] = 0$$



CA3: Introducción al MPC

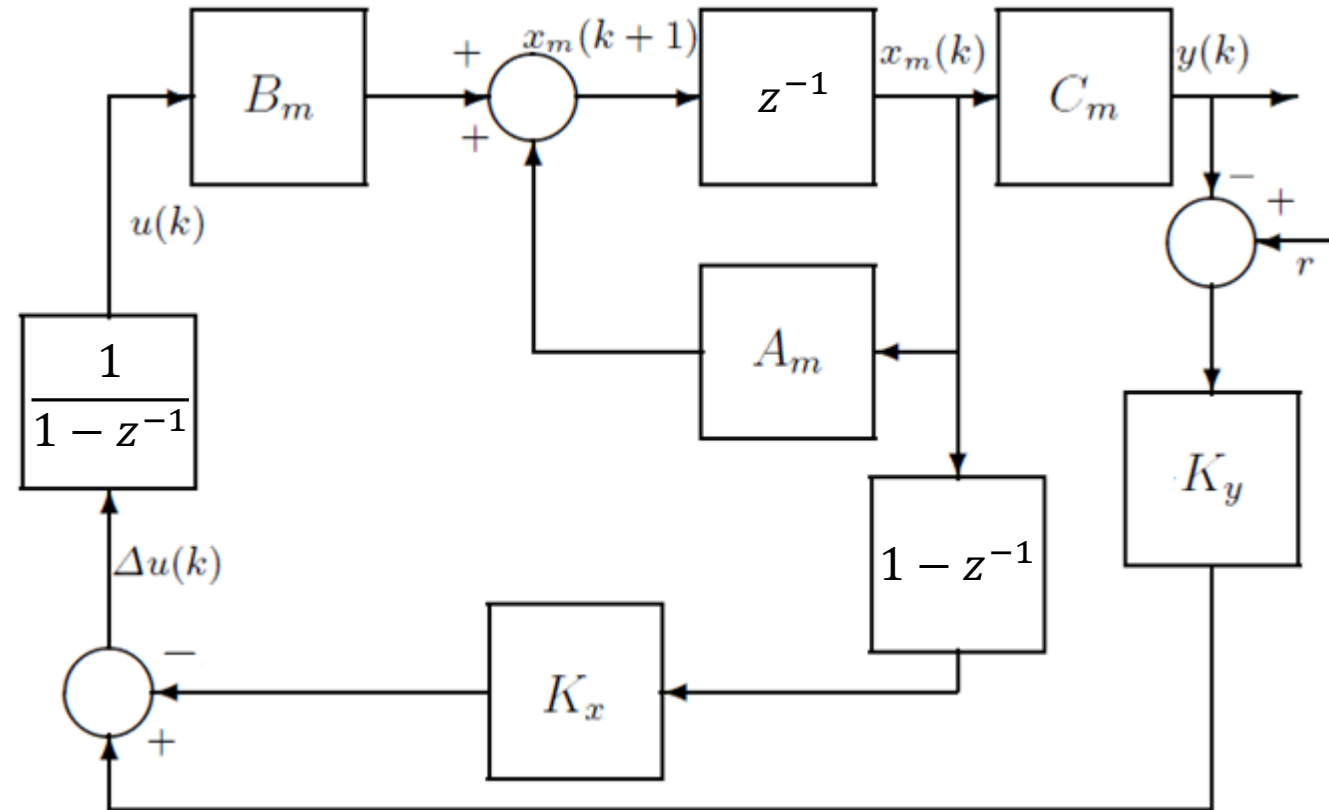
Horizonte deslizante – Sistema a lazo cerrado

$$\Delta u(k) = K_y r(k) - K_{mpc} x(k)$$

$$K_y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T \bar{R}_s$$

$$K_{mpc} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T F$$

- Dada la estructura de las matrices A y C , la última columna de F es igual a \bar{R}_s que es igual a $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, así K_y es igual al último elemento de K_{mpc} .
- Como $x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)]^T$, se puede escribir $K_{mpc} = [K_x \ K_y]$, donde K_x corresponde a la realimentación relacionada con $\Delta x_m(k)$ y K_y con $y(k)$.





Introducción al MPC

Índice

- Introducción
- Elementos del MPC
- MPC dentro de una ventana de optimización
- Horizonte deslizante
- **Restricciones**
- Sistemas MIMO
- Consideraciones



CA3: Introducción al MPC

Restricciones

- En la práctica, todos los procesos están sujetos a restricciones.
 - Los actuadores tienen un campo de acción limitado, así como una velocidad de respuesta determinada.
 - Razones constructivas, de seguridad, medioambientales o incluso el propio rango de los sensores pueden provocar límites en las variables del proceso.
- Todo esto hace necesario introducir restricciones en la función a minimizar.

Las restricciones dependerán del proceso, pero en general se supone que son lineales en el d.o.f. Δu_{\rightarrow} .

Con el agregado de estas restricciones a la función objetivo, la minimización se vuelve más compleja de modo que la solución no se puede obtener explícitamente a diferencia del caso sin restricciones.

$$\begin{aligned}\underline{u}_i &\leq u_i \leq \overline{u}_i \\ \underline{\Delta u}_i &\leq \Delta u_i \leq \overline{\Delta u}_i \\ \underline{y}_i &\leq y_i \leq \overline{y}_i \\ \underline{x}_i &\leq x_i \leq \overline{x}_i \\ y_1 + y_2 &\leq \overline{y_{1,2}}\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \min_{\Delta U} J \quad \text{s.a.} \quad \text{restricciones}$$

El problema estándar es QP, ya que el índice de performance es cuadrático en el d.o.f. y las restricciones son lineales en el d.o.f.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones – Ejemplo (sin restricciones aún)

- Sistema

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0,1s + 3}$$

↓
tf2ss

$$x_c = \begin{bmatrix} -0,1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 10] x_c$$

$T_s = 0.01$

$$K_{mpc} = [45,5973 \quad 660,8307 \quad 6,1083]$$

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} 0,1760 & 0,1553 & 0,1361 \\ 0,1553 & 0,1373 & 0,1204 \\ 0,1361 & 0,1204 & 0,1057 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9989 & -0,02998 \\ 0,009995 & 0,9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00995 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y = [0 \quad 10] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Modelo incremental

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}^{x(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k)$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

$N_p = 20$

$N_c = 3$

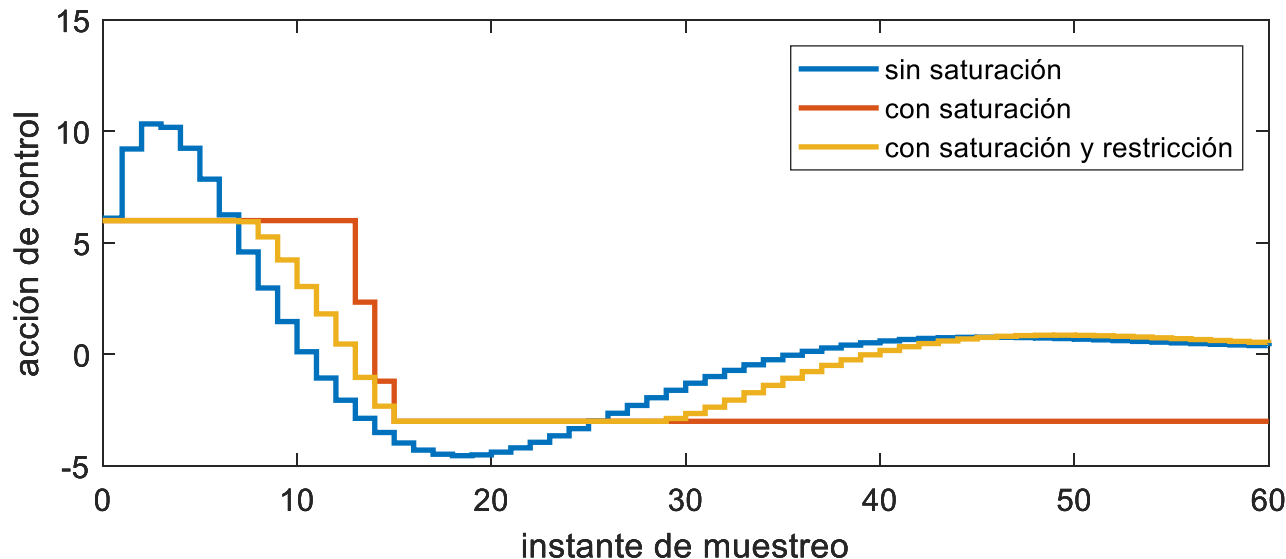
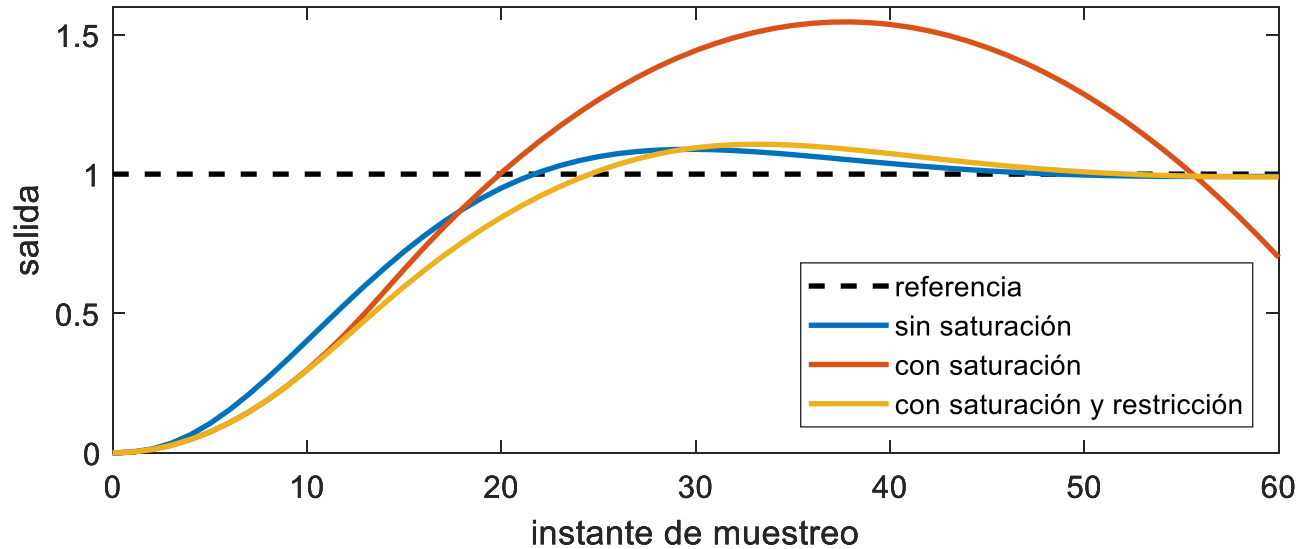
$\bar{R} = 0,01$

$$\phi^T F = \begin{bmatrix} 18,6619 & 214,4914 & 1,4187 \\ 16,4664 & 187,7435 & 1,2220 \\ 14,4161 & 162,9844 & 1,0443 \end{bmatrix} \quad \phi^T \bar{R}_s = \begin{bmatrix} 1,4187 \\ 1,2220 \\ 1,0443 \end{bmatrix}$$



CA3: Introducción al MPC

Restricciones – Ejemplo (2)



- Restricción en la acción de control

$$-3 \leq u(k) \leq 6$$

Una opción para sobrellevar la restricción es calcular el valor $\Delta u(k)$ cuando se alcanza la saturación y utilizar esta información para modificar las variables de estado predichas. SISO vs. MIMO.

Con MPC se puede realizar un manejo sistemático de las restricciones.

Si la ley de control no ofrece un buen desempeño y robustez en el caso sin restricciones, entonces no se puede esperar un buen desempeño en el caso con restricciones. Lo contrario no es cierto.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Tipos

- Las restricciones pueden ocurrir en cualquier variable del lazo.
- Hay tres tipos principales de restricciones que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones.
 - Los dos primeros tipos tratan de las restricciones impuestas a las variables de control $u(k)$.
 - El tercer tipo de restricción se ocupa de las restricciones de salida $y(k)$ o de la variable de estado $x(k)$.
- El procedimiento normal es comparar las predicciones con las restricciones sobre los horizontes N_p , N_c en el índice de J.
- Las ecuaciones de las restricciones deben expresarse en términos del d.o.f. ($\Delta \underline{u}$ ó ΔU). Luego se selecciona el d.o.f. para asegurar que se satisfagan las restricciones.

Para el caso libre de restricciones surge una ley de control fija y, por lo tanto, se puede hacer un análisis de estabilidad y sensibilidad.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones – Variaciones incrementales en la acción de control

- Restricciones duras sobre el tamaño de los movimientos de la señal de control, es decir, sobre la tasa de cambio de las variables de control ($\Delta u(k)$).

$$\underline{\Delta u} \leq \Delta u \leq \overline{\Delta u}$$

- Las restricciones en la tasa de cambio se pueden usar para imponer restricciones de movimiento direccional en las variables de control

- ejemplo, si $u(k)$ solo puede aumentar, se podría seleccionar

$$0 \leq \Delta u(k) \leq \overline{\Delta u}.$$

- Como $\Delta u = 0$ más allá del horizonte N_c , las restricciones se pueden verificar hasta ahí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\Delta u} \\ \underline{\Delta u} \\ \vdots \\ \underline{\Delta u} \end{bmatrix}}_{\underline{\Delta U}} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N_c-1} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\Delta u} \\ \overline{\Delta u} \\ \vdots \\ \overline{\Delta u} \end{bmatrix}}_{\overline{\Delta U}}$$

- Una representación más convencional es en términos de un sólo conjunto de desigualdades lineales

$$\underline{\Delta U} \leq \Delta U \leq \overline{\Delta U}$$

$$-\Delta U \leq -\underline{\Delta U}$$

$$\Delta U \leq \overline{\Delta U}$$

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\underline{\Delta U} \\ \overline{\Delta U} \end{bmatrix}$$



- Son las más comunes entre todos los tipos de restricciones.
 - Por ejemplo, no podemos esperar que una válvula se abra más del 100%.
- Limitaciones físicas estrictas del sistema.

$$\underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u} \leq \overline{\mathbf{u}}$$

- En función de ΔU

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) = u(k-1) + [1 \ 0 \ 0 \ 0] \Delta U$$

$$u(k+1) = u(k) + \Delta u(k+1) = u(k-1) + \Delta u(k) + \Delta u(k+1)$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+N_c-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ I & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1) \end{bmatrix}$$

- Se puede probar en el horizonte N_c (automáticamente se satisface a partir de ahí, $u_{k+N_c+i} = u_{k+N_c-1}, \forall i \geq 0$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{u}} \end{bmatrix}}_{\underline{U}} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N_c-1} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{u}} \end{bmatrix}}_{\overline{U}}$$



- Suponiendo que la salida $y(k)$ tiene un límite superior \bar{y} y un límite inferior \underline{y} , entonces las restricciones de salida se especifican como

$$\underline{y} \leq y(k) \leq \bar{y}$$

$$\underline{Y} \leq Fx(k) + \phi\Delta U \leq \bar{Y}$$

- Las restricciones de salida a menudo se implementan como restricciones "suaves" agregando una variable $s_v > 0$ a las restricciones, formando

$$\underline{y} - s_v \leq y(k) \leq \bar{y} + s_v$$

- Dado que en general las restricciones sobre las variables de control son más importantes para la operación de la planta, las restricciones de salida a menudo se relajan para evitar un problema mayor.

De manera similar, se pueden imponer restricciones a las variables de estado si son medibles (o a las variables de estado del observador).



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Restricciones como parte de la solución óptima

- Una vez formuladas las restricciones como parte de los requisitos de diseño es necesario traducirlas en desigualdades lineales y relacionarlas con el problema de control a resolver.
- La clave es parametrizar las variables restringidas usando el mismo vector de parámetros ΔU utilizado en el diseño del MPC.
- Así, las restricciones se expresan en un conjunto de ecuaciones lineales basadas en el vector de parámetros ΔU .
- Las restricciones se tienen en cuenta para cada ventana del horizonte deslizante. Esto permite variar las restricciones al comienzo de cada ventana de optimización.

Las restricciones se expresan en un conjunto de ecuaciones lineales basadas en el vector de parámetros ΔU .

Para reducir la carga computacional, a veces se elige un conjunto más pequeño de instantes de muestreo en los que imponer las restricciones, en lugar de todas las muestras futuras.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Restricciones como parte de la solución óptima (2)

- Tradicionalmente, las restricciones se imponen para todos los instantes de muestreo futuros y expresadas en términos de ΔU .
- En el caso de una restricción de variable manipulada:

$$\begin{bmatrix} u(k_i) \\ u(k_i + 1) \\ u(k_i + 2) \\ \vdots \\ u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} u(k_i - 1) + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ I & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i + 1) \\ \Delta u(k_i + 2) \\ \vdots \\ \Delta u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -(C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) &\leq -\underline{U} \\ (C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) &\leq \bar{U} \end{aligned} \quad \underline{Y} \leq Fx(k) + \phi \Delta U \leq \bar{Y}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -\underline{U} + C_1 u(k-1) \\ \bar{U} - C_1 u(k-1) \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -\underline{\Delta U} \\ \bar{\Delta U} \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} -\Phi \\ \Phi \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} -\underline{Y} + Fx(k_i) \\ \bar{Y} - Fx(k_i) \end{bmatrix}$$

- Finalmente, encontrar el vector de parámetros ΔU que minimiza

$$J = (R_s - Fx(k))^T (R_s - Fx(k)) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx(k)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U$$

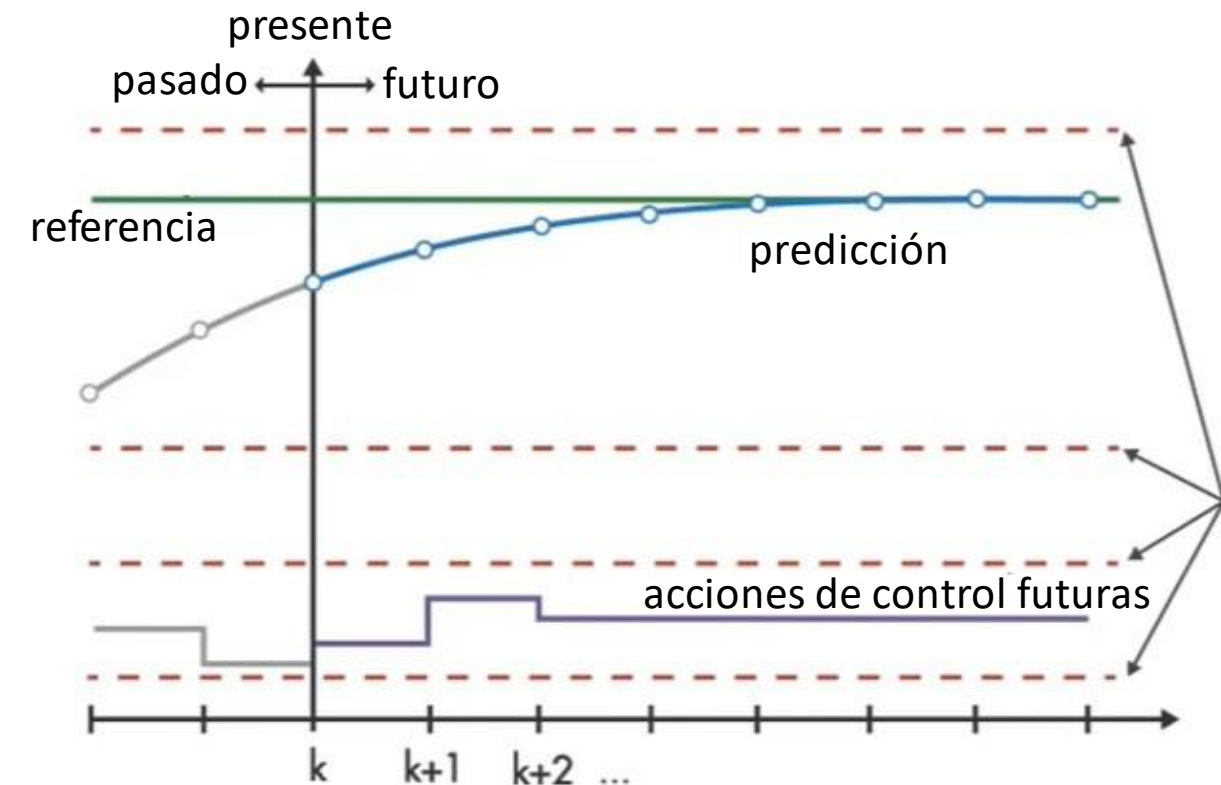
$$\text{Sujeto a} \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \longrightarrow M \Delta U \leq \gamma$$

Con la función de costo J cuadrática y las restricciones desigualdades lineales, el problema de encontrar un control predictivo óptimo se convierte en uno de encontrar una solución óptima a un problema de programación cuadrática estándar.

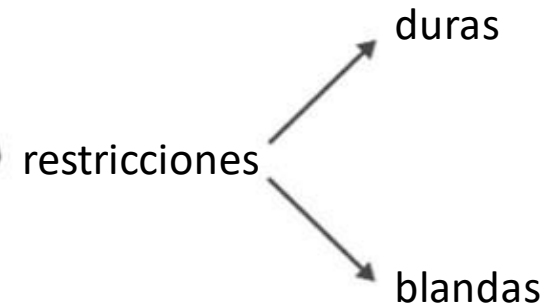


CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Restricciones duras y blandas



- En problemas prácticos, es común encontrar que las restricciones deseables son inconsistentes.
- En el caso de que las restricciones no admitan una solución, la optimización MPC está mal planteada y no tiene solución.
- Esto no puede permitirse que suceda en un proceso real, ya que el resultado sería arbitrario.
- Cada proceso construirá sus propias “salidas seguras” para tal caso, pero existe un procedimiento más genérico.





CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Restricciones duras y blandas (2)

- Las restricciones deben dividirse en dos categorías:
 - Límites duros, válvulas no pueden ir más allá de estar completamente abiertas o completamente cerradas.
 - Límites blandos: estos pueden violarse, aunque con alguna penalización, como la pérdida de la calidad del producto y los valores de seguridad excedidos.
- El enfoque más simple es elegir el control que proporcione la menor violación ponderada sobre todas las restricciones suaves

En el caso de que las restricciones sean inviables, las restricciones suaves deben relajarse para garantizar que el algoritmo MPC tenga una optimización bien planteada. Este procedimiento no es genérico y, a menudo, puede tratarse en un nivel superior (supervisor) en lugar del algoritmo MPC.

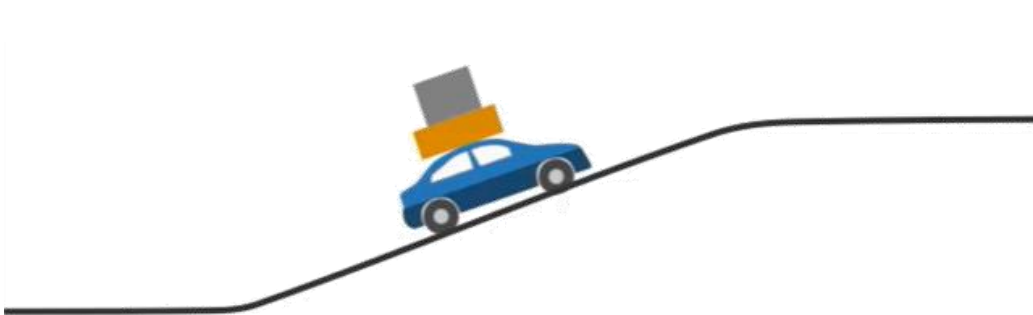
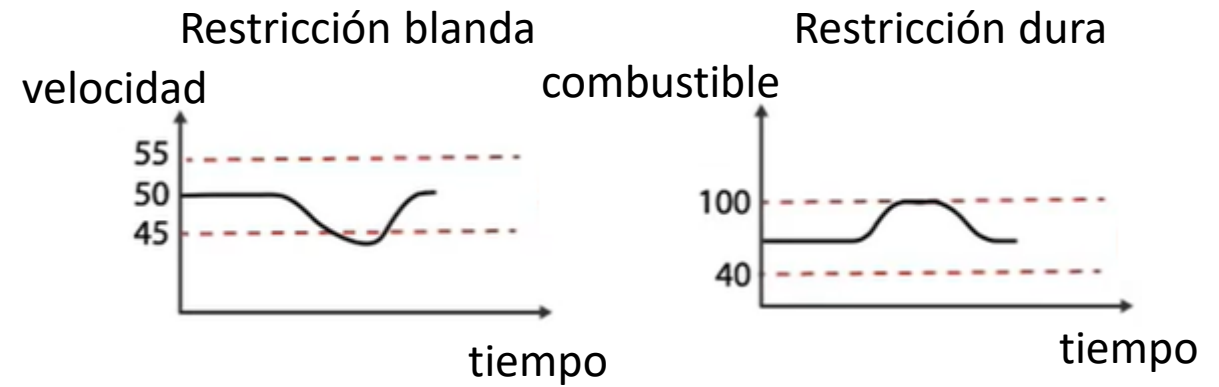
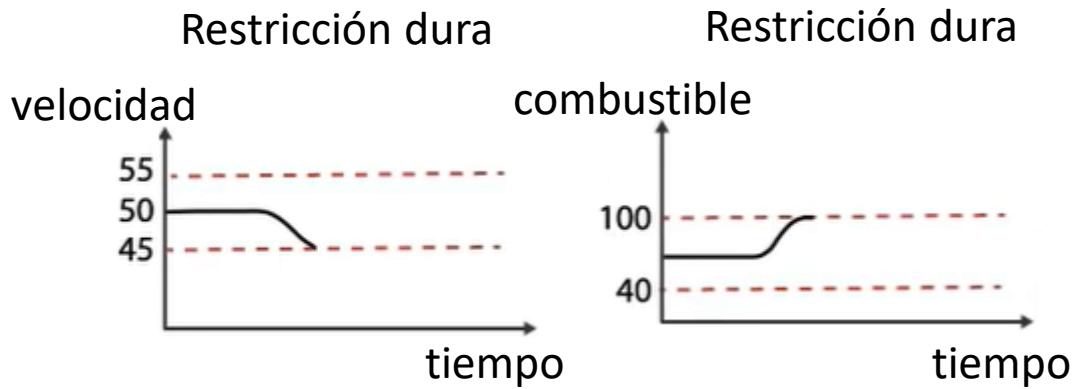
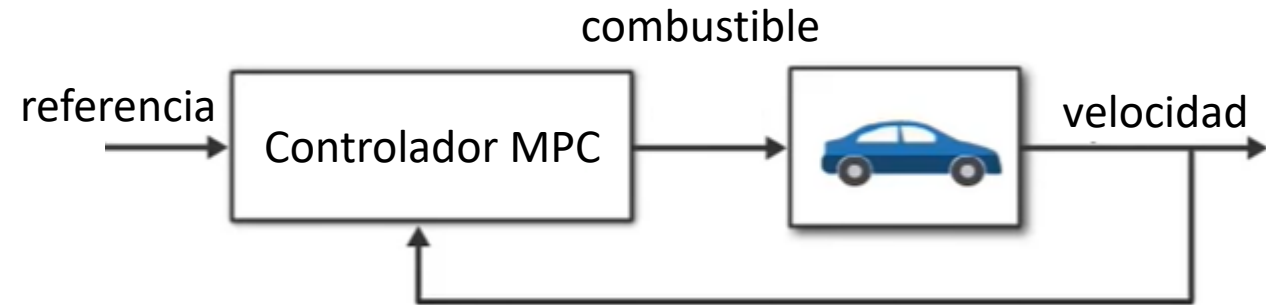
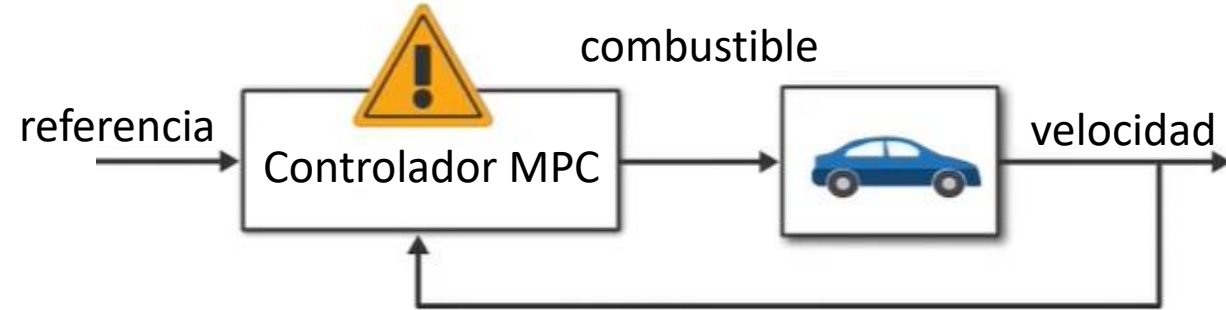
$$\min_{\Delta U} W \|M\Delta U - \gamma\|_{\infty}$$

Las restricciones suaves deben priorizarse en una clasificación de importancia.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Restricciones duras y blandas - Ejemplo





CA3: Introducción al MPC

Restricciones - Estabilidad con restricciones

- Aunque se puede definir un algoritmo MPC que maneje restricciones, no es sencillo establecer si ese algoritmo será estabilizante.
- La estabilidad del controlador lineal subyacente no garantiza la estabilidad del controlador restringido, al menos en el caso de horizonte finito que es típico en la práctica.
- No hay una respuesta fácil a esto; sin embargo, la falta de garantía de estabilidad no implica inestabilidad.
- En la práctica, si se siguen pautas razonables (horizonte de restricción y salida lo suficientemente grande) y se evita la inviabilidad (bien planteado), entonces el lazo con restricciones tendrá un rendimiento similar al del lazo sin restricciones.



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $u(k)$ – Ejemplo Yalmip (continuación) – Modelo y datos MPC

- Sistema

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.1s + 3}$$

$$T_s = 0.01$$

$$N_p = 20$$

$$N_c = 3$$

$$\bar{R} = 0.01$$

$$-3 \leq u(k) \leq 6$$

`% Modelo`

```
numG=[10];
```

```
denG=[1 0.1 3];
```

```
[Ac,Bc,Cc,Dc]=tf2ss(numG,denG);
```

```
plantac=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
```

`% Planta discreta`

```
ts=0.01;
```

```
plantad=c2d(plantac,ts);
```

```
Am=plantad.A;
```

```
Bm=plantad.B;
```

```
Cm=plantad.C;
```

```
Dm=plantad.D;
```

`% Modelo incremental`

```
A=[Am [0 0]';Cm*Am 1];
```

```
B=[Bm;Cm*Bm];
```

```
C=[[0 0] 1];
```

```
D=0;
```

```
nx = 3; % Número de estados
```

```
nu = 1; % Número de entradas
```

```
ny = 1; % Número de salidas
```

`% Datos MPC`

```
Np = 20;
```

```
Nc = 3;
```

```
rw=0.01;
```

```
R = rw.*eye(nu);
```



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $u(k)$ – Ejemplo Yalmip (continuación) - Controlador

```
% Variables
```

```
u = sdpvar(Nc,nu);
```

```
uant = sdpvar(1,1);
```

```
x = sdpvar(nx,Np+1);
```

```
r = sdpvar(Np,ny);
```

```
% Inicialización
```

```
constraints = [];
```

```
objective = 0;
```

```
for k = 1:Nc
```

```
constraints = [constraints, x(:,k+1) == A*x(:,k) + B*u(k)];
```

```
constraints = [constraints, -3<=uant+sum(u(1:k))<=6];
```

```
objective = objective + (r(k)-C*x(:,k+1))'*(r(k)-C*x(:,k+1)) + u(k)'*R*u(k);
```

```
end
```

```
for k = Nc+1:Np
```

```
constraints = [constraints, x(:,k+1) == A*x(:,k)];
```

```
objective = objective + (r(k)-C*x(:,k+1))'*(r(k)-C*x(:,k+1));
```

```
end
```

```
ops = sdpsettings('verbose',2);
```

```
controller = optimizer(constraints,objective,ops,{x(:,1),uant,r(:)},u(:));
```




CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $u(k)$ – Ejemplo Yalmip (continuación) - Simulación

`% Inicialización y parámetros`

```
xm=[0 0]';  
ym=Cm*xm;  
u=0;  
dui=0;  
sim_i=1;  
sim_f=61;  
xf=zeros(nx,1);  
ref=[ones(Np,1)];  
usup=6;  
uinf=-3;  
ua=0;
```

```
for ii=sim_i:sim_f  
    deltaU=controller(xf,u,ref);  
    deltaUs(ii,:)=deltaU;  
    dua=deltaU(1);  
  
    dui(ii)=dua;  
    u=u+dua;  
    ua=u;  
  
    if (ua>usup)  
        ua=usup;  
    end  
    if (ua<uinf)  
        ua=uinf;  
    end  
  
    us(ii)=ua;  
    ys(ii)=ym;  
    xs(:,ii)=xm;  
    xant=xm;  
    xm=Am*xm+Bm*ua;  
    ym=Cm*xm;  
    xf=[xm-xant;ym];  
end
```





CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $u(k)$ – Ejemplo Yalmip (continuación) – Gráficos

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0,1s + 3}$$

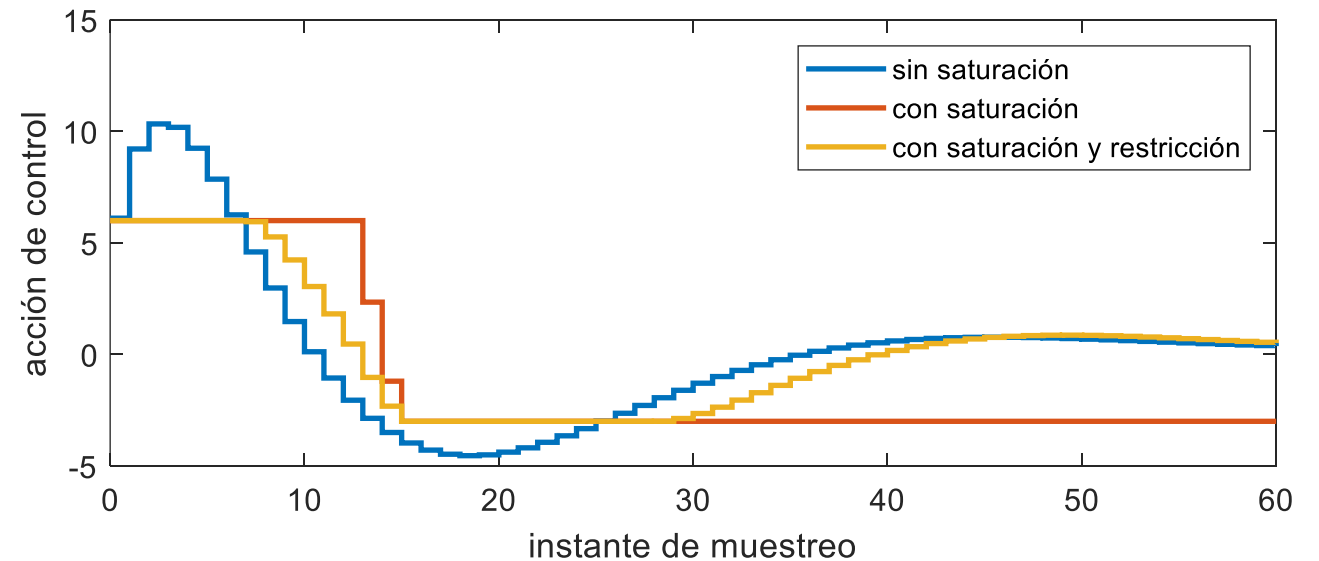
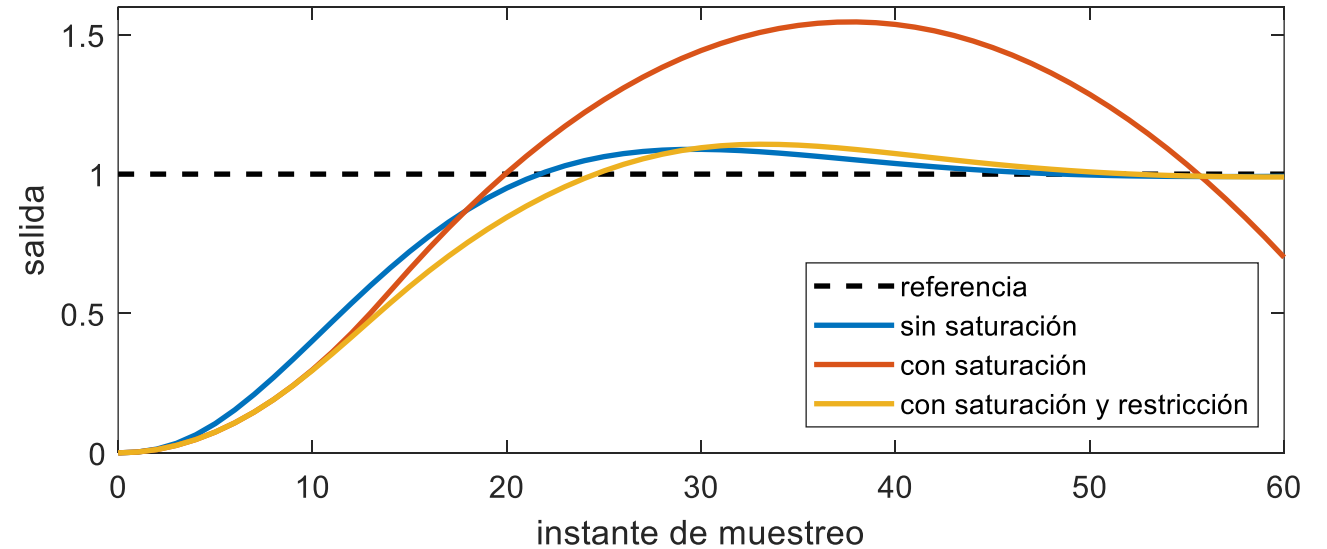
$$T_s = 0.01$$

$$N_p = 20$$

$$N_c = 3$$

$$\bar{R} = 0,01$$

$$-3 \leq u(k) \leq 6$$





CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $\Delta u(k)$ – Ejemplo Yalmip – Modelo y datos MPC

- Sistema

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0,1s + 3}$$

$$T_s = 0.01$$

$$N_p = 20$$

$$N_c = 3$$

$$\bar{R} = 0,01$$

$$-1,5 \leq \Delta u(k) \leq 3$$

% Modelo

```
numG=[10];
```

```
denG=[1 0.1 3];
```

```
[Ac,Bc,Cc,Dc]=tf2ss(numG,denG);
```

```
plantac=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
```

% Planta discreta

```
ts=0.01;
```

```
plantad=c2d(plantac,ts);
```

```
Am=plantad.A;
```

```
Bm=plantad.B;
```

```
Cm=plantad.C;
```

```
Dm=plantad.D;
```

% Modelo incremental

```
A=[Am [0 0]';Cm*Am 1];
```

```
B=[Bm;Cm*Bm];
```

```
C=[[0 0] 1];
```

```
D=0;
```

```
nx = 3; % Número de estados
```

```
nu = 1; % Número de entradas
```

```
ny = 1; % Número de salidas
```

% Datos MPC

```
Np = 20;
```

```
Nc = 3;
```

```
rw=0.01;
```

```
R = rw.*eye(nu);
```



CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $\Delta u(k)$ – Ejemplo Yalmip – Controlador

```
% Variables
```

```
u = sdpvar(Nc,nu);
```

```
x = sdpvar(nx,Np+1);
```

```
r = sdpvar(Np,ny);
```

```
% Inicialización
```

```
constraints = [];
```

```
objective = 0;
```

```
for k = 1:Nc
```

```
constraints = [constraints, x(:,k+1) == A*x(:,k) + B*u(k)];
```

```
constraints = [constraints, -1.5<=u(k)<=3];
```

```
objective = objective + (r(k)-C*x(:,k+1))'*(r(k)-C*x(:,k+1)) + u(k)'*R*u(k);
```

```
end
```

```
for k = Nc+1:Np
```

```
constraints = [constraints, x(:,k+1) == A*x(:,k)];
```

```
objective = objective + (r(k)-C*x(:,k+1))'*(r(k)-C*x(:,k+1));
```

```
end
```

```
ops = sdpsettings('verbose',2);
```

```
controller = optimizer(constraints,objective,ops,{x(:,1),r(:)},u(:));
```




CA3: Introducción al MPC

Restricciones - $\Delta u(k)$ – Ejemplo Yalmip — Gráficos

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0,1s + 3}$$

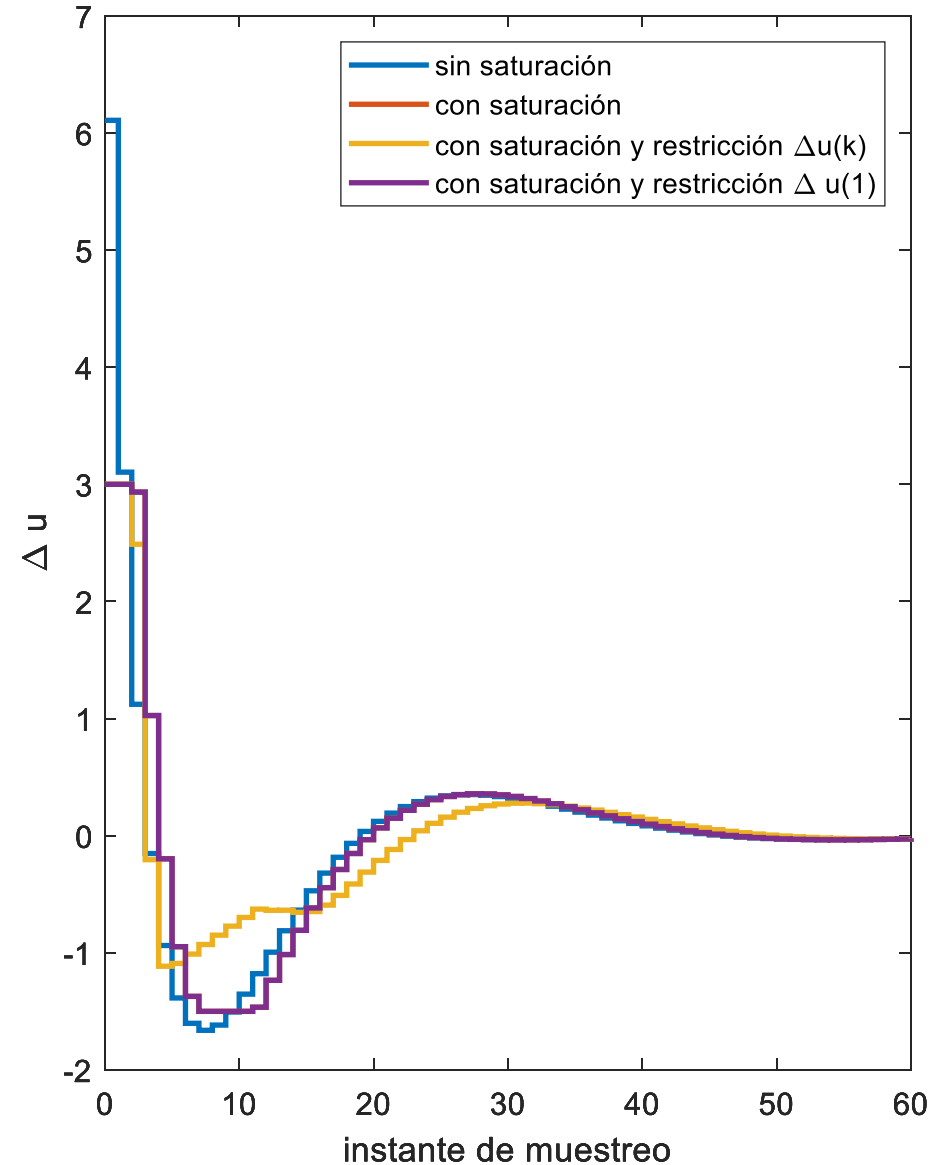
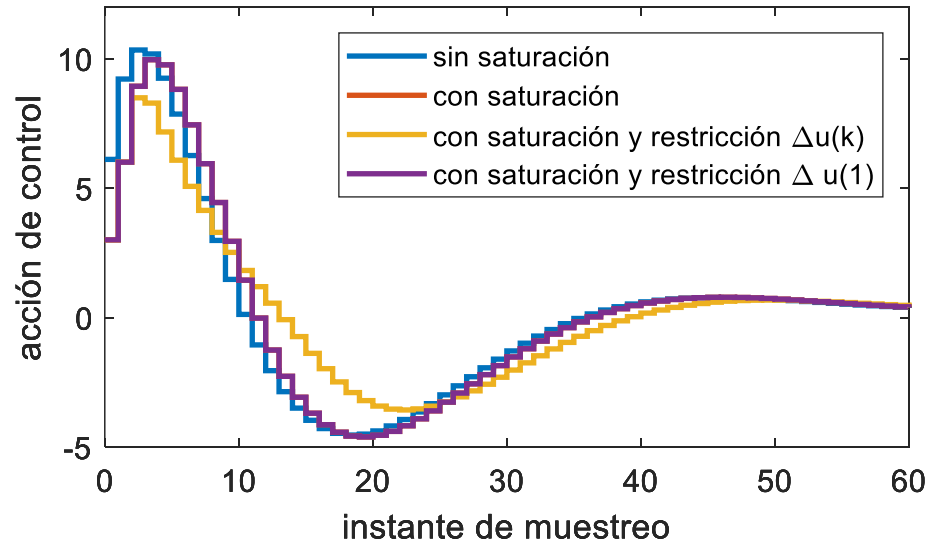
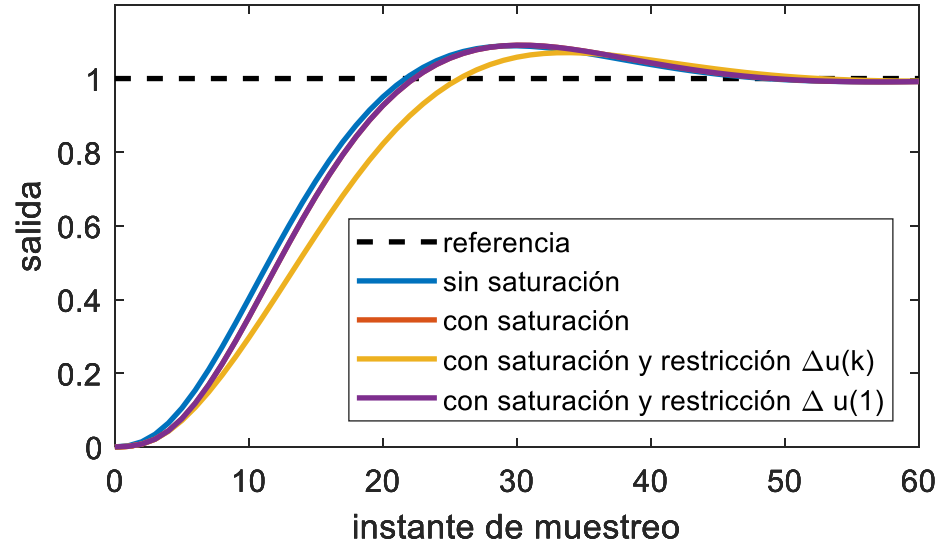
$$T_s = 0.01$$

$$N_p = 20$$


$$N_c = 3$$

$$\bar{R} = 0,01$$

$$-1,5 \leq \Delta u(k) \leq 3$$





Block Parameters: MPC

Interpreted MATLAB Function

Pass the input values to a MATLAB function for evaluation. The function must return a single value having the dimensions specified by 'Output dimensions' and 'Collapse 2-D results to 1-D'.
Examples: `sin, sin(u), foo(u(1), u(2))`

Parameters

MATLAB function:

`MPCController(u(1:2),u(3),u(4))`

Output dimensions:

-1


Output signal type:

auto

☒ Collapse 2-D results to 1-D

Sample time: ⓘ *Not recommended for this block. Set to -1 to remove.* [Why?](#)

Ts

OKCancelHelpApply



Introducción al MPC

Índice

- Introducción
- Elementos del MPC
- MPC dentro de una ventana de optimización
- Horizonte deslizante
- Restricciones
- **Sistemas MIMO**
- Consideraciones



CA3: Introducción al MPC

Sistemas MIMO - Modelo

- La metodología de diseño se puede extender fácilmente a sistemas MIMO sin mucho esfuerzo adicional, debido a la formulación del espacio de estados.

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k)\end{aligned}$$

↓ Sistema
Incremental
aumentado

$$\begin{aligned}\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}^{x(k+1)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k) \\ y(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} o_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$



CA3: Introducción al MPC

Sistemas MIMO – Índice de performance

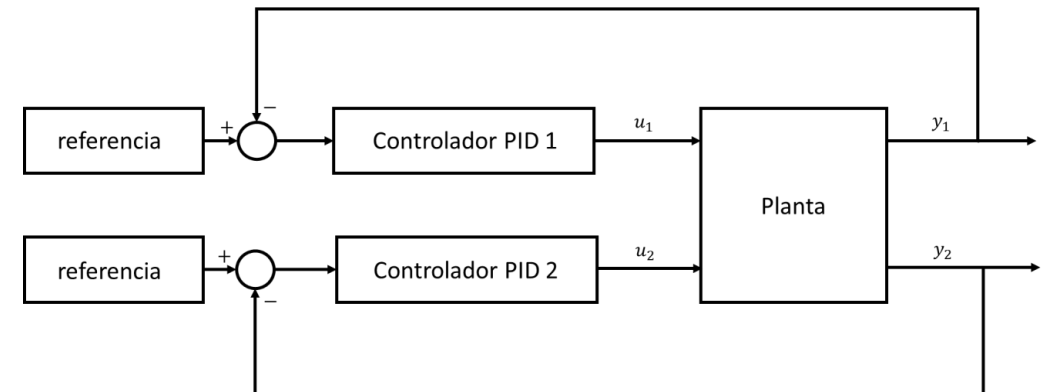
- El índice de performance J está escrito de tal manera que permite automáticamente sistemas multivariables.
- En sistemas MIMO en general siempre hay interacción. Puede haber un lazo “más rápido” o mejor controlado que otro.
- Para considerar distintos “objetivos” para cada uno de los lazos se aumenta J con matrices de peso específicas.

$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|W_y (r_{k+i} - y_{k+i})\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|W_u \Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$

W_y, W_u matrices de peso definidas positivas y diagonales.

- Estos pesos pueden incluso variar en cada ventana de optimización.

La sensibilidad resultante de los parámetros del controlador a los pesos puede ser bastante pequeña. Puede ser necesario cambiar los pesos en un orden de magnitud para ver un efecto significativo.





- Predicciones

$$Y = Fx(k_i) + \Phi \Delta U$$
$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

- Solución (sin restricciones)

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} (\Phi^T \bar{R}_s r(k) - \Phi^T F x(k))$$

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} I_m & o_m & \dots & o_m \end{bmatrix}}^{N_c} (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} (\Phi^T \bar{R}_s r(k) - \Phi^T F x(k)) \\ &= K_y r(k) - K_{mpc} x(k) \end{aligned}$$



CA3: Introducción al MPC

Sistemas MIMO – Restricciones

- Si hay más de una entrada, las restricciones se especifican para cada entrada de forma independiente.
- Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1^{max} & \Delta u_2^{max} & \dots & \Delta u_m^{max} \\ \Delta u_1^{min} & \Delta u_2^{min} & \dots & \Delta u_m^{min} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta u_1^{min} \leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{max} \\ \Delta u_2^{min} \leq \Delta u_2(k) \leq \Delta u_2^{max} \\ \vdots \\ \Delta u_m^{min} \leq \Delta u_m(k) \leq \Delta u_m^{max} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{max} & u_2^{max} & \dots & u_m^{max} \\ u_1^{min} & u_2^{min} & \dots & u_m^{min} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1^{min} \leq u_1(k) \leq u_1^{max} \\ u_2^{min} \leq u_2(k) \leq u_2^{max} \\ \vdots \\ u_m^{min} \leq u_m(k) \leq u_m^{max} \end{matrix}$$

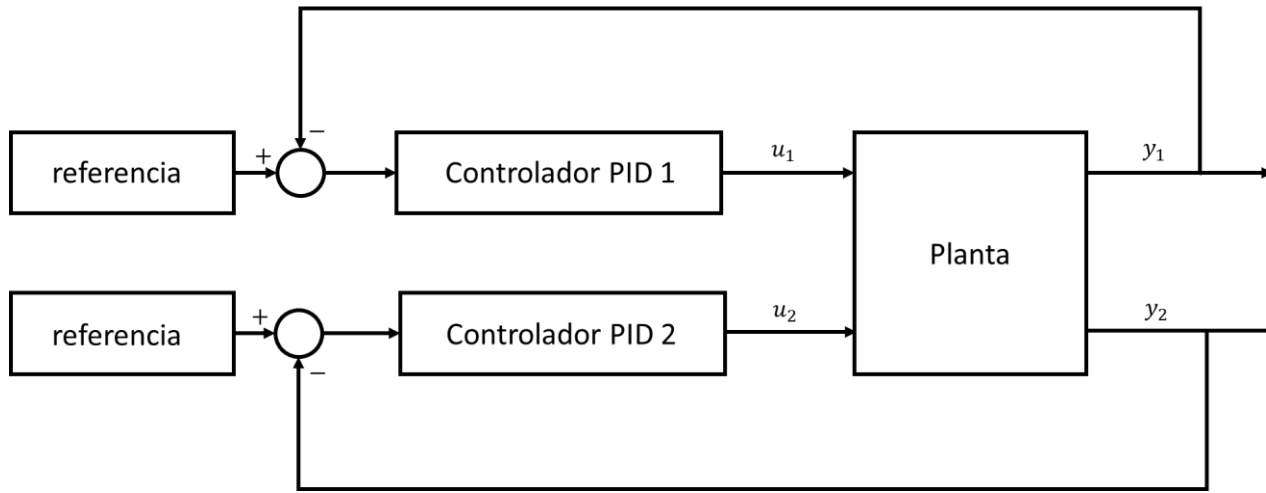
- De manera similar, las restricciones se especifican para cada salida y variable de estado si son necesarias.

Las restricciones para un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas se especifican para cada entrada y salida de forma independiente.



CA3: Introducción al MPC

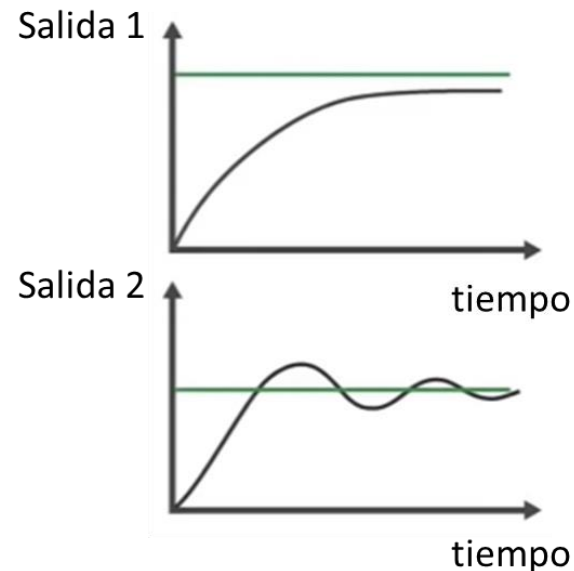
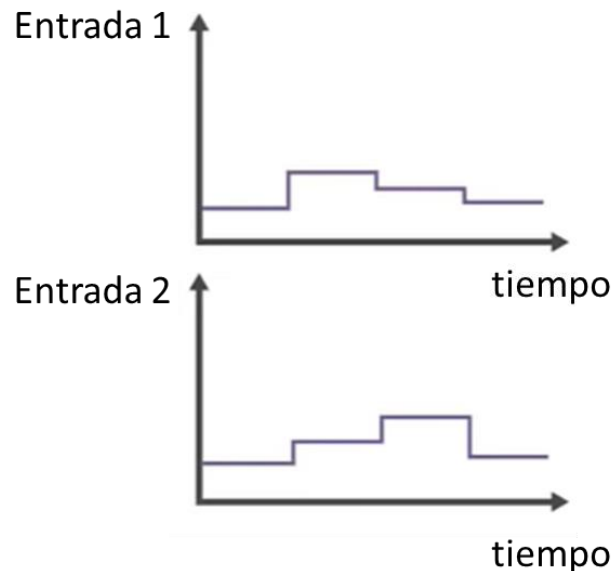
Sistemas MIMO – Ajuste de los pesos



$$J = \sum_{i=N_w}^{N_p} \|W_y (r_{k+i} - y_{k+i})\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_c} \|W_u \Delta u_{k+i-1}\|_2^2$$

Para un buen punto de partida, puede ser conveniente normalizar primero todas las señales en J de modo que el movimiento de cero a uno sea equivalente en cada lazo y luego inicializar con $W_y = I$, $W_u = I$.

El diseño/ajuste de los pesos W_y , W_u para obtener un equilibrio en el rendimiento y la actividad de la acción de control de cada lazo puede resultar tedioso.





Introducción al MPC

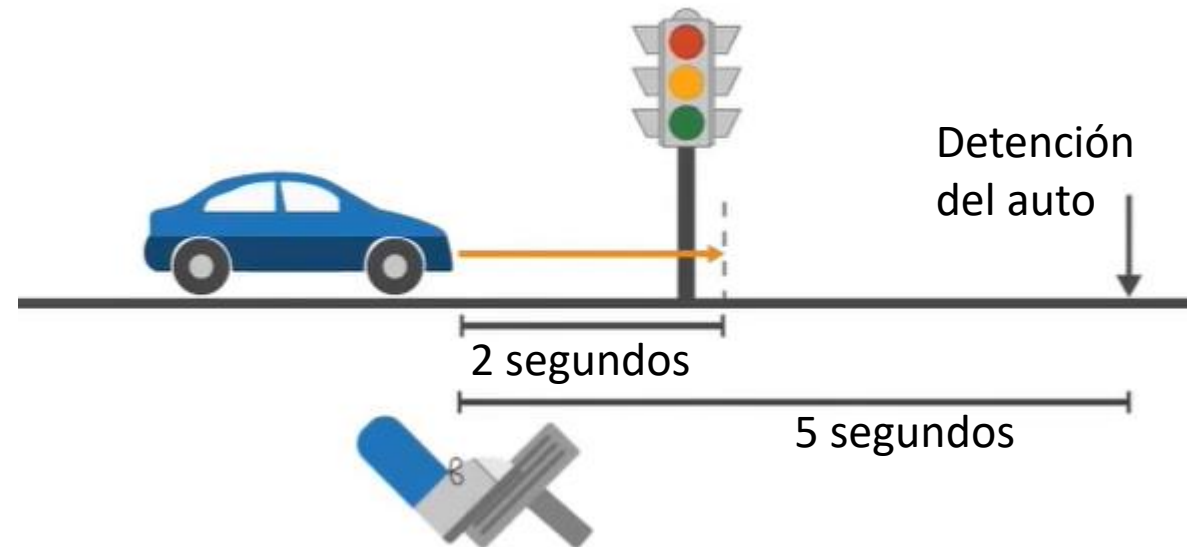
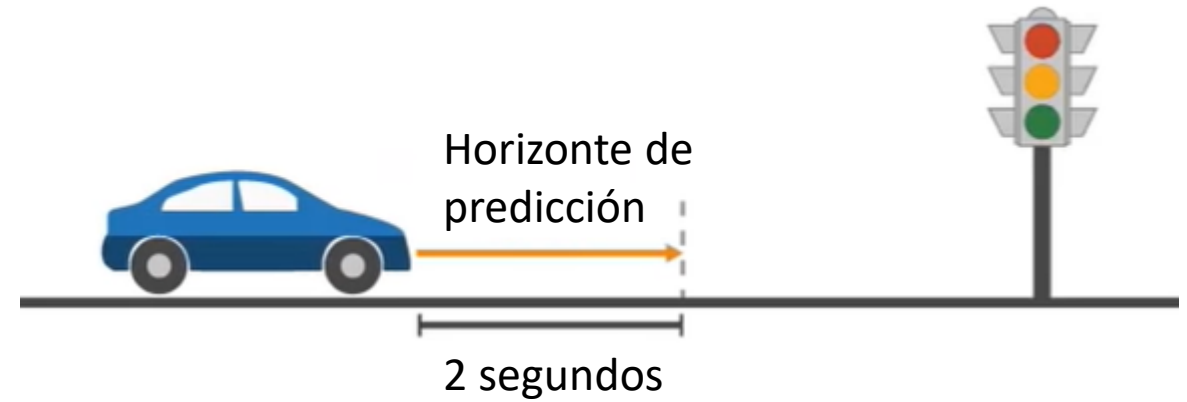
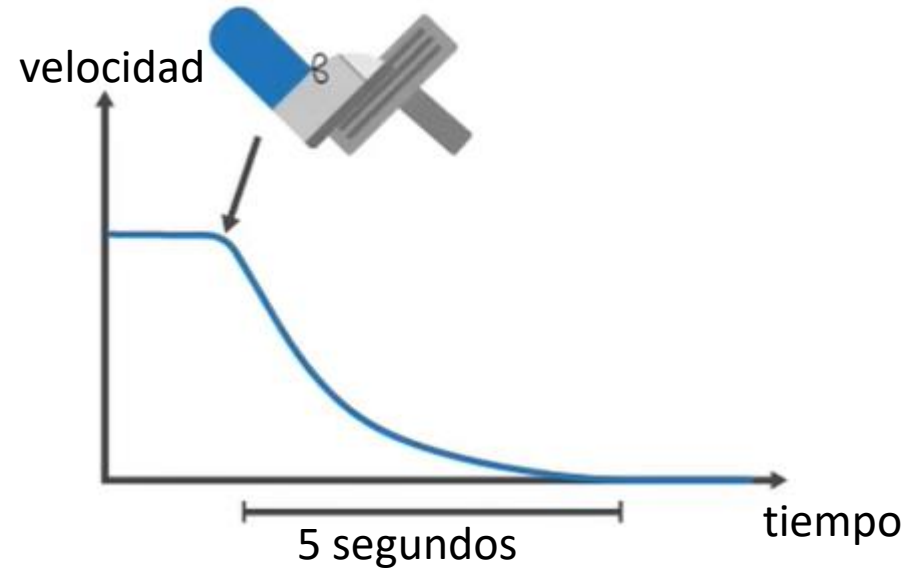
Índice

- Introducción
- Elementos del MPC
- MPC dentro de una ventana de optimización
- Horizonte deslizante
- Restricciones
- Sistemas MIMO
- **Consideraciones**



CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – Horizonte de predicción

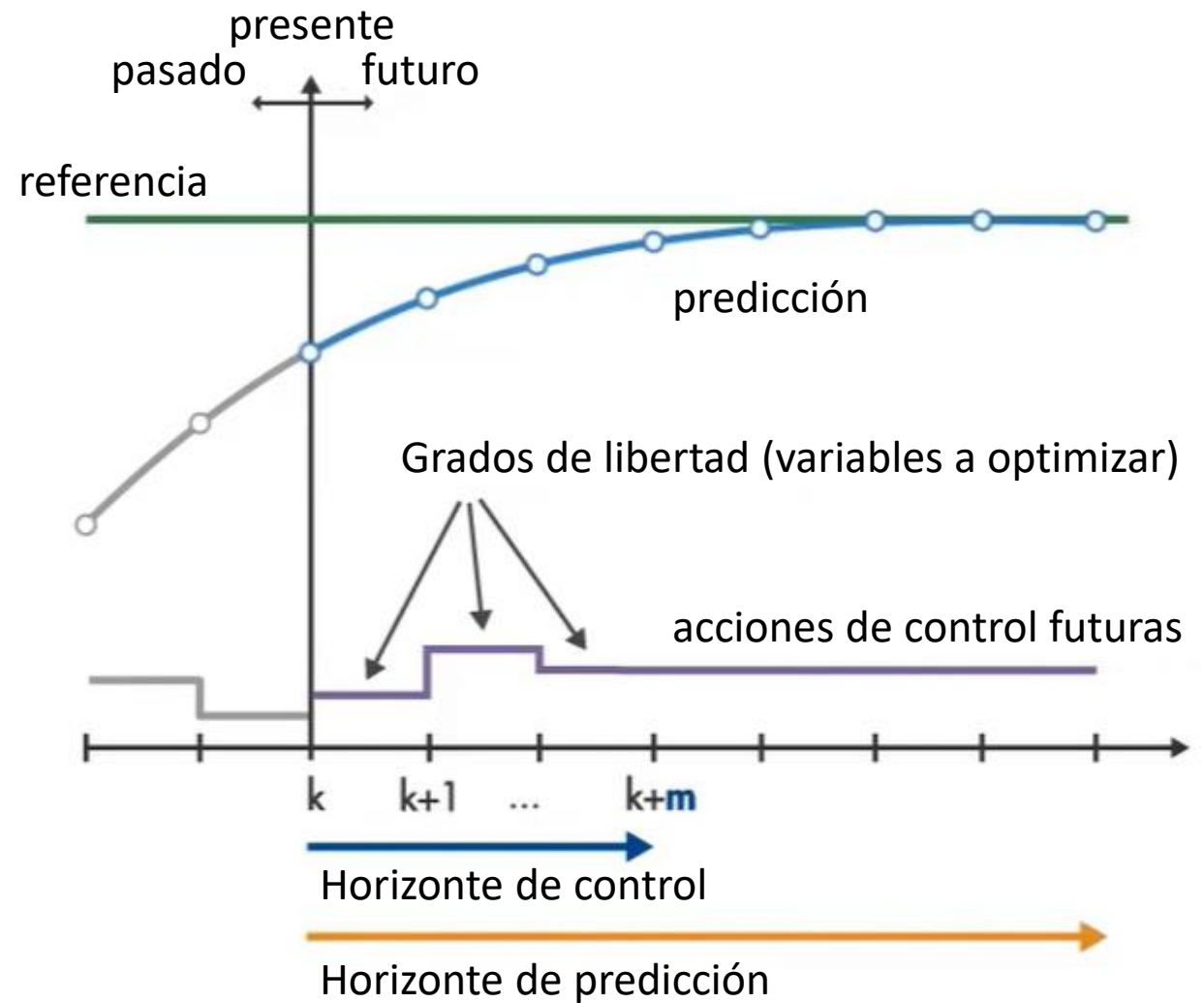
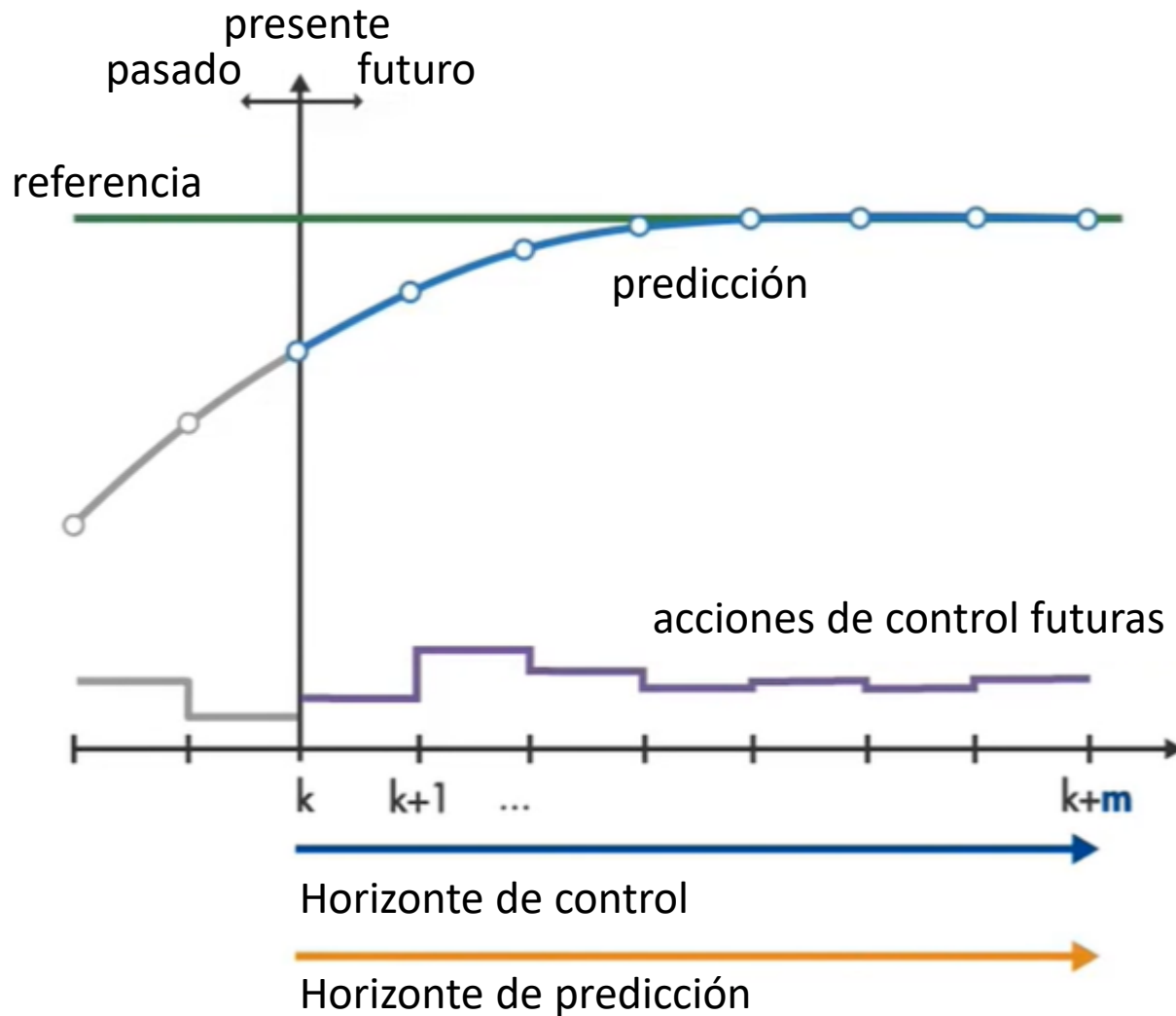


Es importante que el horizonte de predicción capture la dinámica del sistema.



CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – Horizonte de control





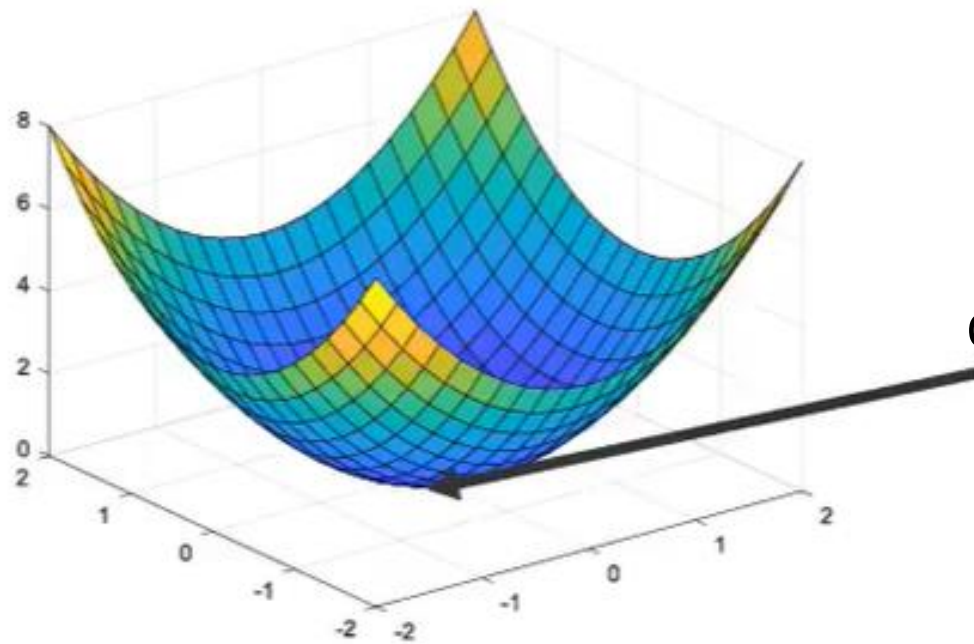
CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – MPC lineal

- Sistema lineal
- ~~Restricciones lineales~~
- Función de costo cuadrática

Problema de optimización convexo

Solución explícita





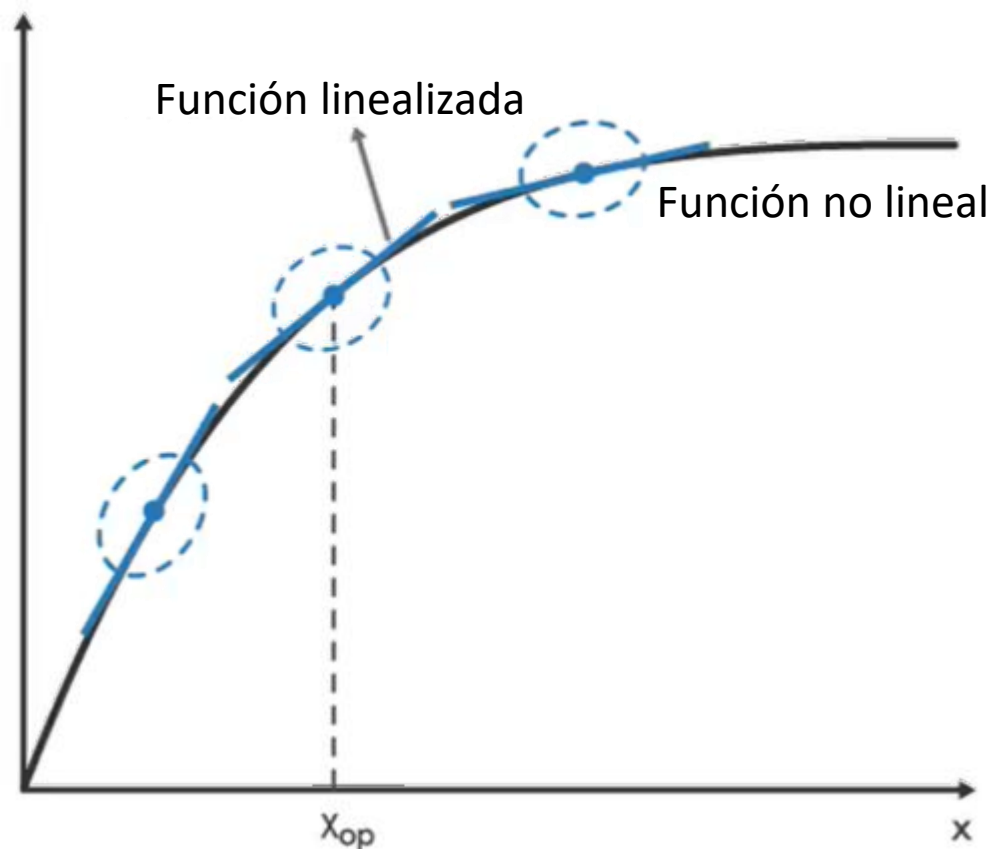
CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – MPC lineal

- Sistema no lineal
- Restricciones lineales
- Función de costo cuadrática

Todavía se puede utilizar MPC lineal
(basados en linealización)

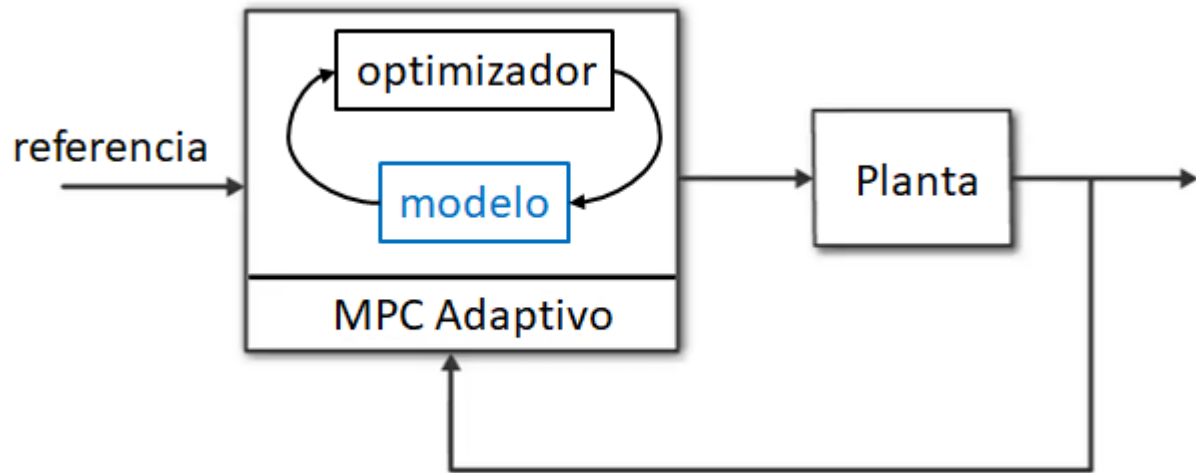
- MPC adaptivo
- MPC gain-scheduled





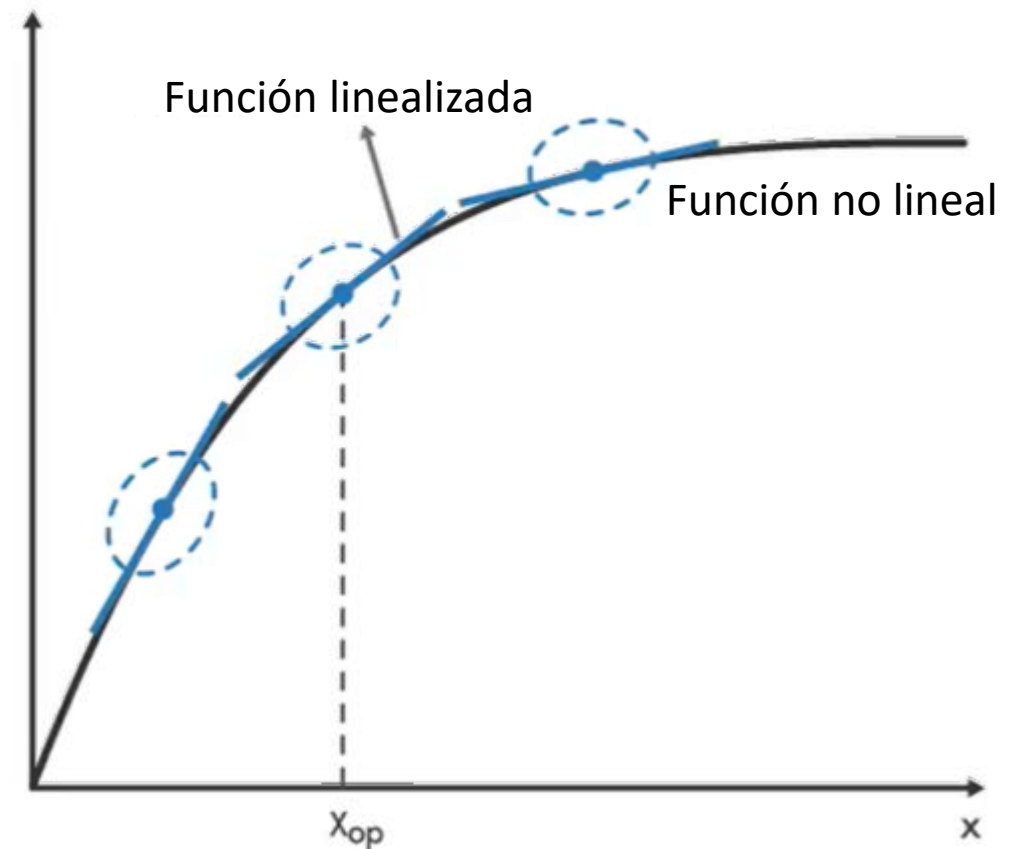
CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – MPC adaptivo



El modelo se modifica para cada punto de operación.

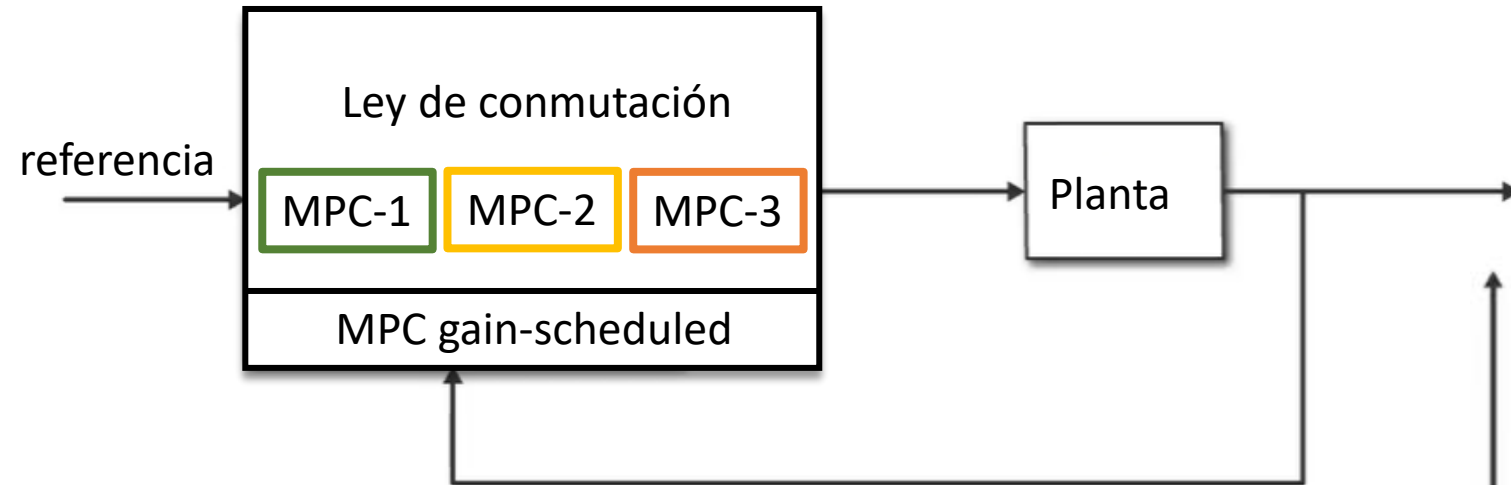
Se mantiene la estructura del problema de optimización (número de estados y restricciones) para los diferentes puntos de operación.



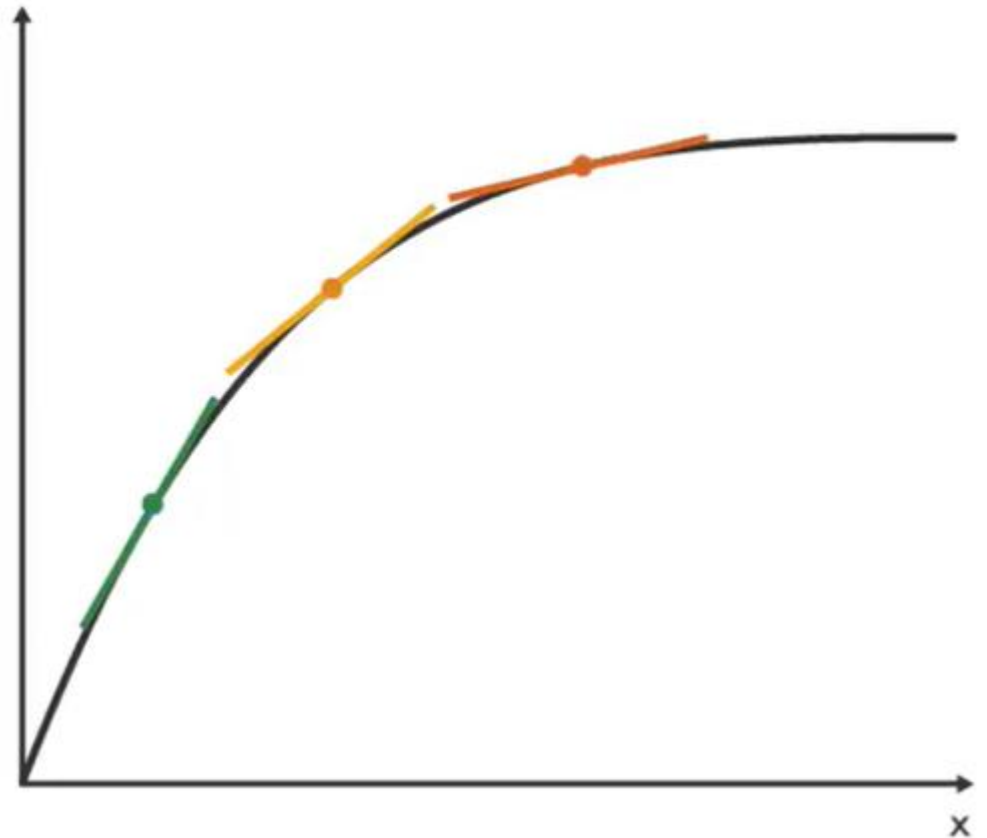


CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – MPC gain-scheduled



Puede tener un número diferente de estados y restricciones para los diferentes puntos de operación.



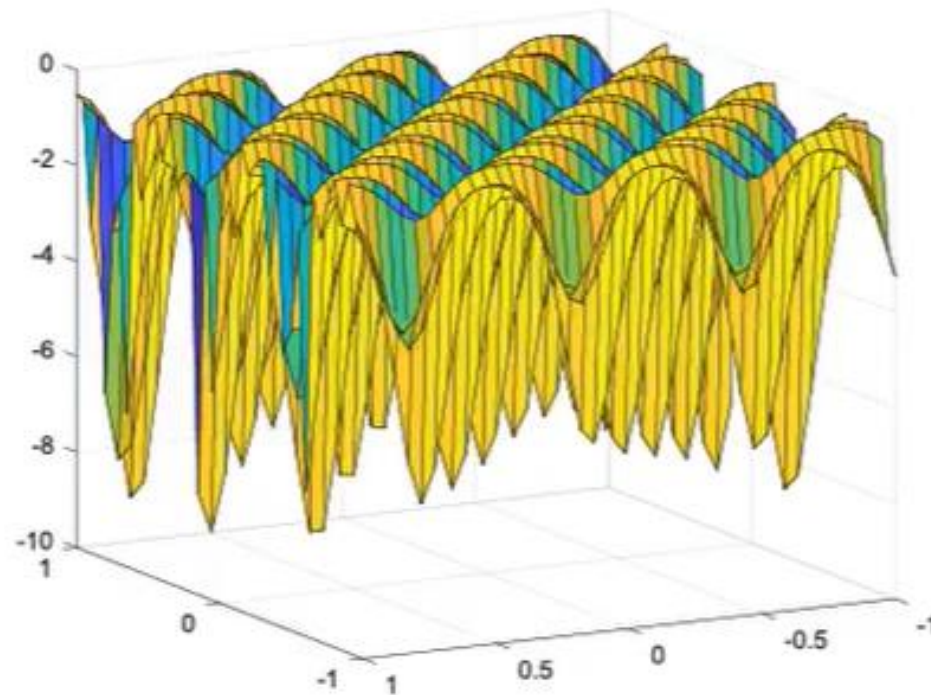


CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – MPC no lineal

- Sistema no lineal
- Restricciones no lineales
- Función de costo no lineal

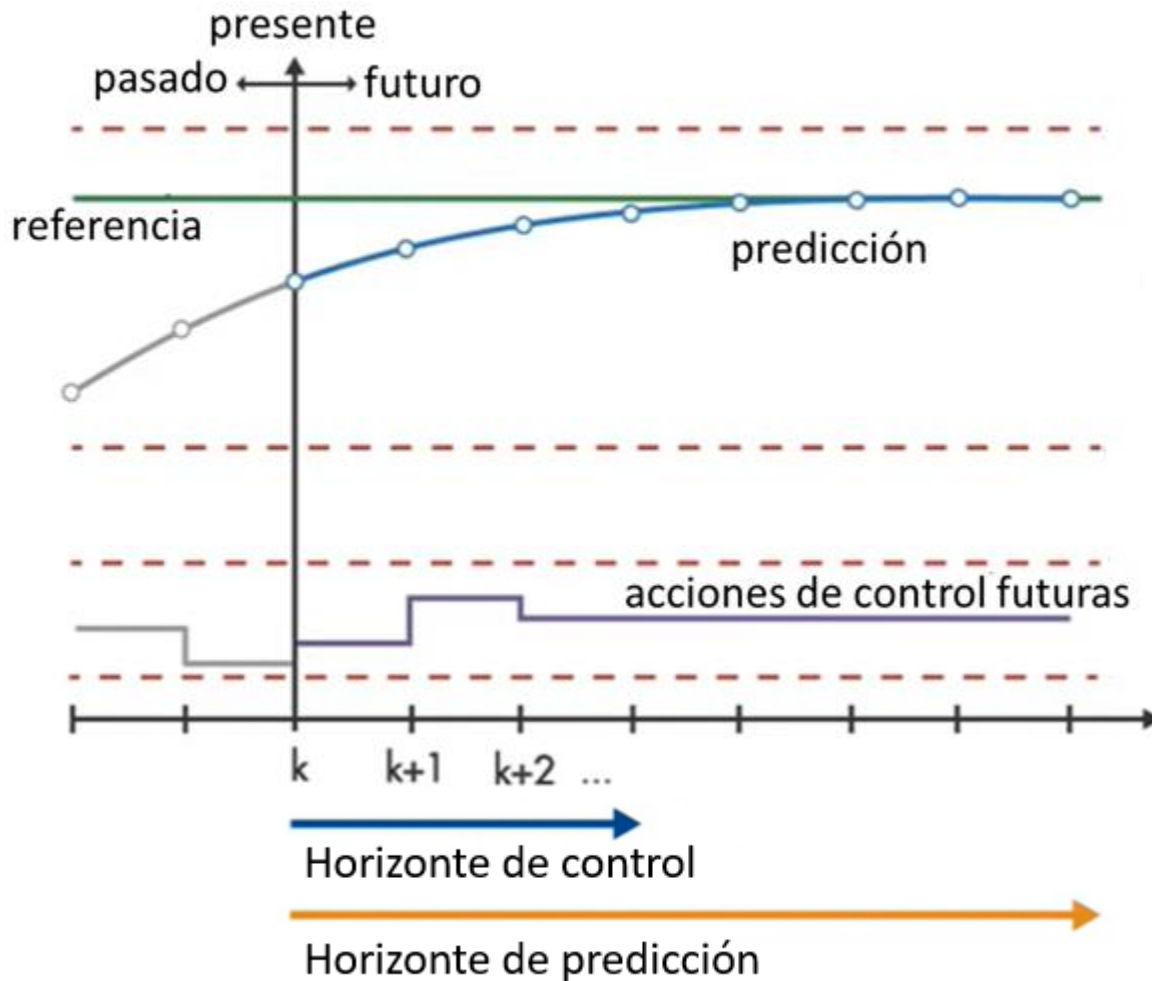
} Problema de optimización no convexo





CA3: Introducción al MPC

Consideraciones – Problema QP



Problema QP

$$\min_x \left(\frac{1}{2} x^T H x + f^T x \right)$$

$$Ax \leq b$$

Complejidad del problema:

- Reducción orden del modelo
- Longitud horizontes de predicción y control
- Cantidad de restricciones
- Precisión de las representaciones



CA3: Introducción al MPC

Bibliografía

- J.A. Rossiter. "Model-Based Predictive Control. A practical approach". CRC Press, 2005.
- Liuping Wang. "Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab". Springer, 2009.
- J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. "Control of Dead-time Processes". Springer, 2007.