

Trabajo Práctico N° 3

Tomás Vidal

Control de sistemas biológicos

Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.

17 de Junio, 2025.



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

I. INTRODUCCIÓN

Este informe analiza diferentes estrategias de control aplicadas a un sistema biológico, con el objetivo de regular la tasa de crecimiento microbiano ($\mu(s)$) y la concentración de sustrato (s). Se comparan métodos como el control proporcional-integral (PI), linealizante y adaptivo, evaluando su desempeño, robustez y adaptabilidad frente a perturbaciones e incertidumbres en los parámetros del modelo. Las simulaciones, realizadas en Simulink, permiten validar teóricamente cada enfoque y ofrecer recomendaciones prácticas para su implementación en biorreactores.

II. MODELO

El modelo a simular es el siguiente:

$$\begin{cases} k_{S1}S + k_N N \xrightarrow{r_x} X + k_{P1}P \\ k_{S2}S \xrightarrow{r_p} P \end{cases}$$

Que se puede llevar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = r_x \\ \dot{s} = -K_{s1}r_x + D(s_{in} - s) \\ \dot{p} = -K_{s2}r_p + D(s_{in} - s) \\ \dot{n} = -K_N r_x + D(n_{in} - n) \\ \dot{p} = K_{p1}r_p \end{cases}$$

Y representándolo en su forma vectorial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \\ \dot{n} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -K_{s1} & -K_{s2} \\ -K_N & 0 \\ K_{p1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ s_{in} - s \\ n_{in} - n \\ -p \end{bmatrix} \cdot D \quad (1)$$

Y si se considera que el nitrógeno se encuentra en saturación, y que en la etapa de producción de biomasa no hay producción de plástico, se puede reducir al siguiente modelo, el cual se emplea en el diseño de los controladores para el resto del informe (*excepto al final que se habla del modelo completo*):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -K_{s1} \end{bmatrix} \cdot r_x + \begin{bmatrix} -x \\ s_{in} - s \end{bmatrix} \cdot D \quad (2)$$

Los modelos cinéticos empleados son:

$$\mu(s, n) = \mu_{\max} \frac{s}{K_S + s + \frac{s^2}{K_{is}}} \cdot \frac{n}{K_n + n}$$

$$q_p(s, n) = q_{p\max} \frac{s}{K_{ps} + s + \frac{s^2}{K_{ips}}} \cdot \frac{K_{ipn}}{K_{ipn} + n}$$

Que si se considera el caso reducido, donde el nitrógeno está en saturación y no hay producción de plástico, se tiene:

$$\mu(s) = \mu_{\max} \frac{s}{K_S + s + \frac{s^2}{K_{is}}}$$

III. SISTEMA SIN CONTROL

Se simula el sistema sin ningún control a forma de referencia.

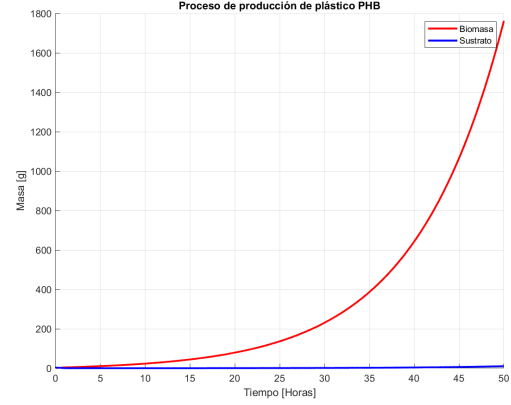


Fig. 1. Sistema sin control

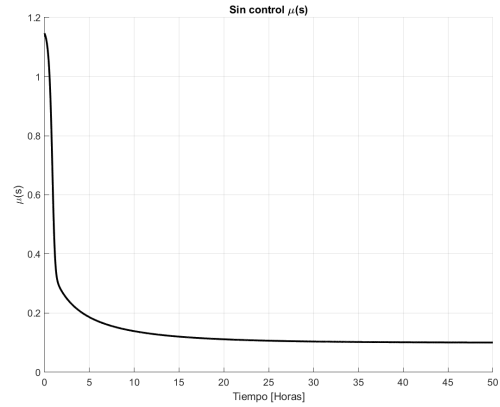


Fig. 2. Sistema sin control (μ)

Como se puede ver la biomasa tiene un comportamiento exponencial con respecto al tiempo, y el $\mu(s)$ se establece a un valor, que no es el deseado, por lo que se diseña un controlador para corregirlo.

IV. CONTROL EXPONENCIAL

Se implementa un controlador que regula $\mu(s)$ (a $\mu(s_r) = \mu_r$) mediante una alimentación exponencial de sustrato ($F_{in} = \lambda X = \lambda x V$), el mismo se obtuvo de considerar que se anula la dinámica del sustrato, además se agregan términos proporcionales e integrales al error:

$$\dot{s} = 0 = -k_{s1}\mu(s_r)x + \lambda x(s_{in} - s)$$

$$\lambda = \frac{k_{s1}\mu(s)}{(s_{in} - s)}$$

$$u(t) = D(t) = \frac{F_{in}}{V} = \frac{k_{s1}\mu(s_r)x}{(s_{in} - s)}$$

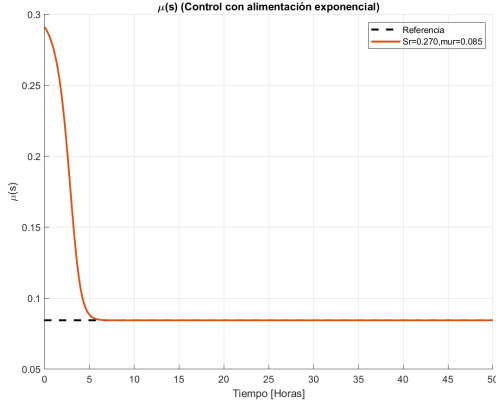


Fig. 3. Control con alimentación exponencial

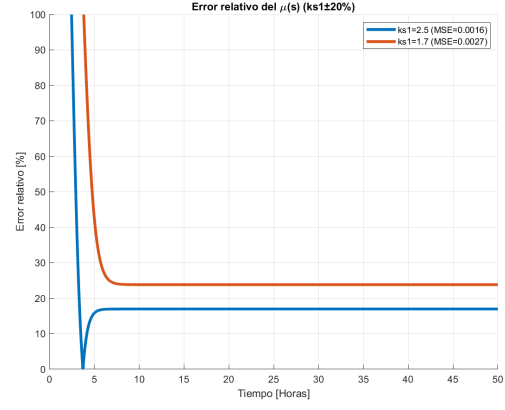


Fig. 6. Error control con alimentación exponencial (se varía k_{s1})

Como se puede observar, ahora con el lazo cerrado de realimentación exponencial logra hacer que $\mu(s)$ converga a μ_r , pero al variar los parámetros del modelo se producen errores de convergencia. Para lo cual se agrega un término que es integrativo del error:

$$u(t) = D(t) = \frac{k_{s1}\mu(s_r)x + k_p(\mu(s) - \mu(s_r))}{(s_{in} - s)}$$

- $\mu(s)$ converge a un valor distinto al deseado ($\mu_r(s)$), con error inicial alto y dinámica lenta.
- **Robustez:** Al variar x_0 y k_{s1} en $\pm 20\%$, el error cambia significativamente, indicando baja robustez.

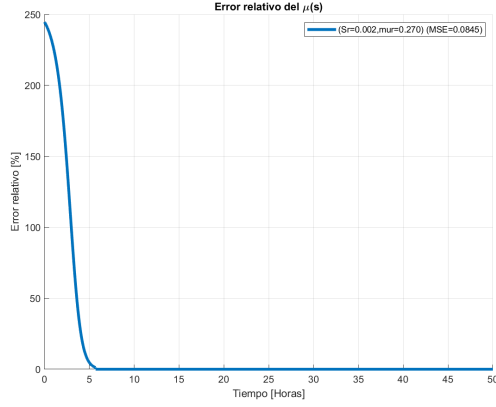


Fig. 4. Error control con alimentación exponencial

IV-A. Controlador con acción proporcional (P)

Al control anterior se le agrega un término proporcional (k_p) al error:

$$D = \frac{\mu_r X_0 k_{s1} e^{\mu_r t}}{(s_{in} - s_r)V} + \frac{k_p(\mu_r - \mu_s)}{(s_{in} - s_r)} \quad (3)$$

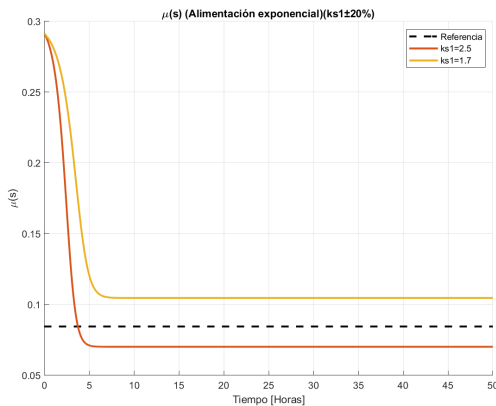


Fig. 5. Control con alimentación exponencial (se varía k_{s1})

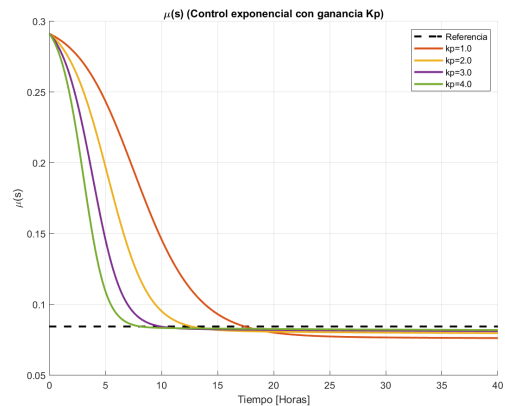


Fig. 7. Control con alimentación exponencial con término k_p

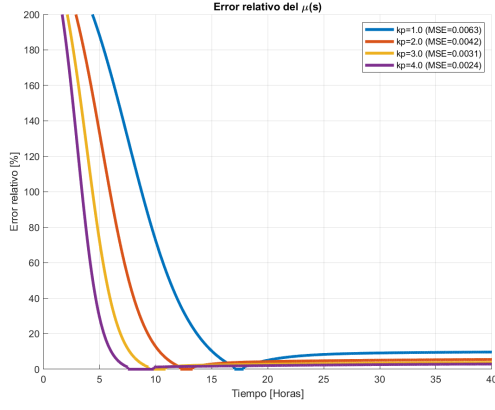


Fig. 8. Error control con alimentación exponencial con término kp

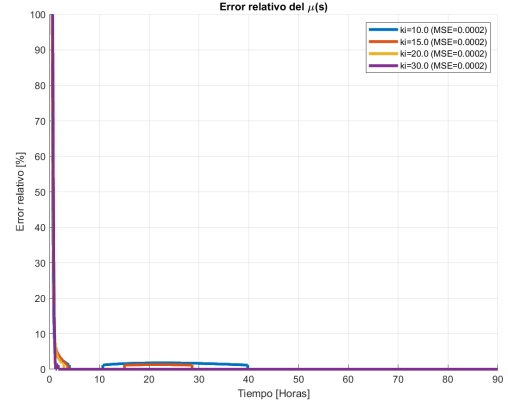


Fig. 10. Error control con alimentación exponencial con términos kp y ki

- El error disminuye notablemente.
- La convergencia hacia $\mu_r(s)$ es más rápida y con menor error estacionario.

IV-B. Controlador con acción proporcional-integral (PI)

Al controlador anterior se le incluye otro término que es integral (k_i):

$$D = \frac{\mu_r X_0 k_{s1} e^{\mu_r t}}{(s_{in} - s_r)V} + \frac{k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_p e(t)}{(s_{in} - s_r)} \quad (4)$$

Se probó este controlador con variación de los parámetros x_0 y k_{s1} en un 20%, además se hizo una perturbación a la acción de control en un 20%

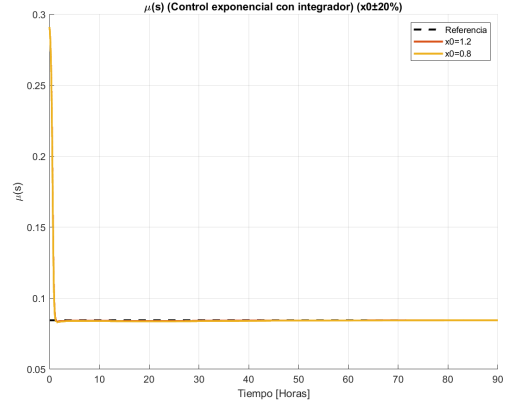


Fig. 11. Alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en x_0

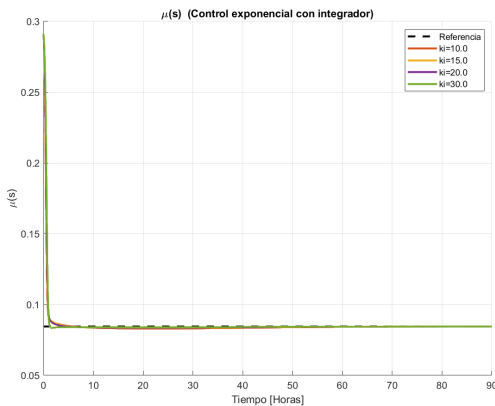


Fig. 9. Control con alimentación exponencial con términos kp y ki

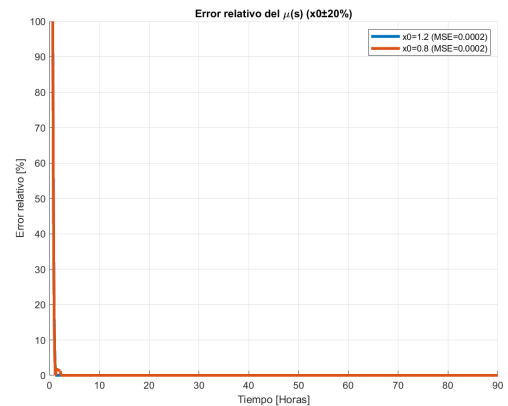


Fig. 12. Error alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en x_0

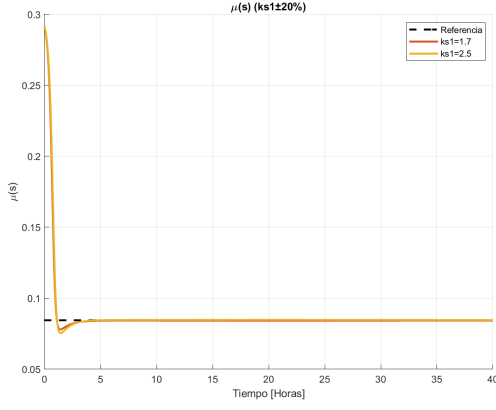


Fig. 13. Alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en k_{s1}

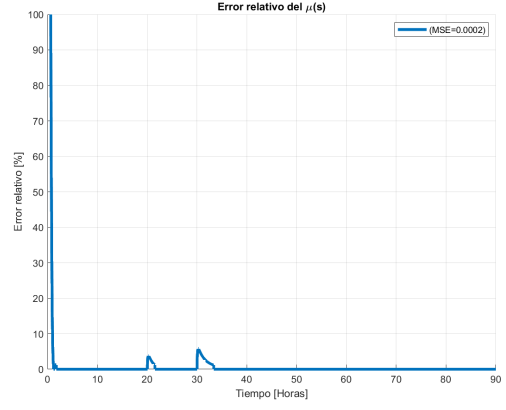


Fig. 16. Error alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en D

- **Precisión:** $\mu(s)$ alcanza $\mu_r(s)$ en menos de 5 horas, con error nulo.
- **Robustez:** Las variaciones en x_0 , k_{s1} , o la acción de control ($\pm 20\%$) no afectan el error, demostrando alta robustez.

V. CONTROL LINEALIZANTE DEL SUSTRATO

Se diseña un controlador que cancela la dinámica natural del sustrato, dependiendo únicamente del parámetro k_{s1} (eliminando la dependencia con x_0).

V-A. Controlador básico (cancelación de dinámica)

$$D = \frac{\mu_s x k_{s1}}{s_{in} - s} \quad (5)$$

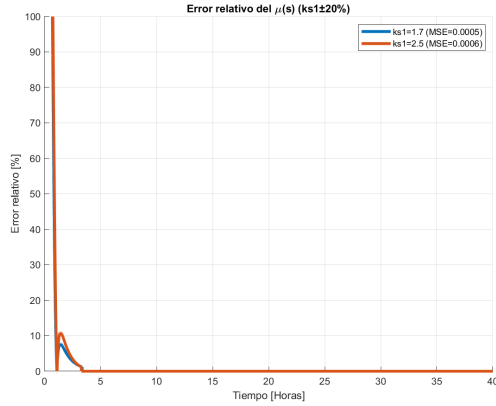


Fig. 14. Error alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en k_{s1}

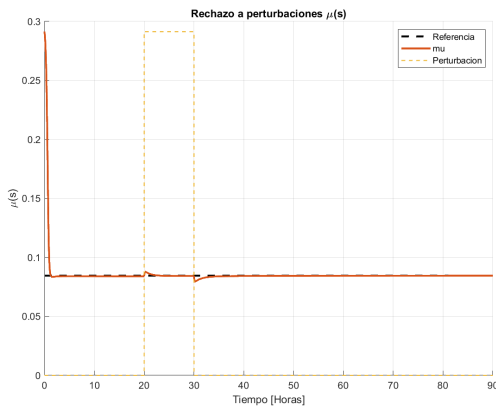


Fig. 15. Alimentación exponencial (kp y ki) con variaciones en D

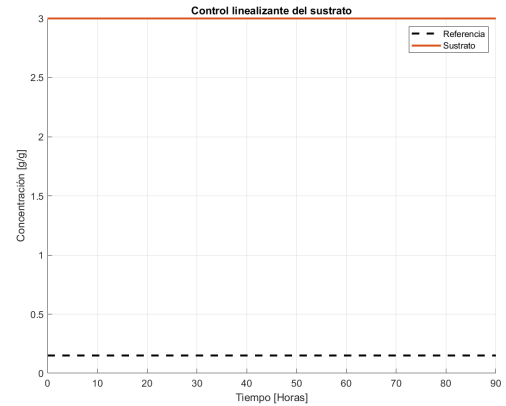


Fig. 17. Control linealizante

- La dinámica del sustrato es cancelada, pero el error respecto al valor de referencia es significativo, como es de esperar.
- **Sensibilidad al modelo:** Al variar k_{s1} en $\pm 20\%$, el sistema muestra comportamientos inestables (incluso divergencia), evidenciando alta dependencia del modelo exacto.

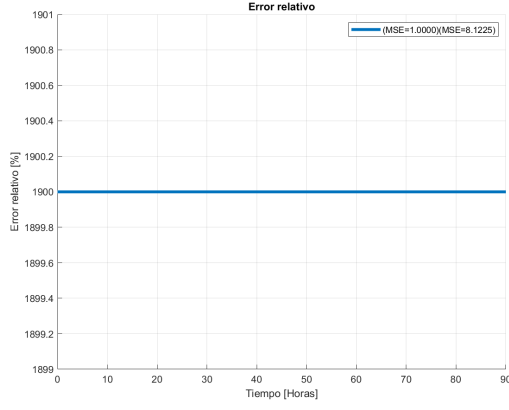


Fig. 18. Error control linealizante

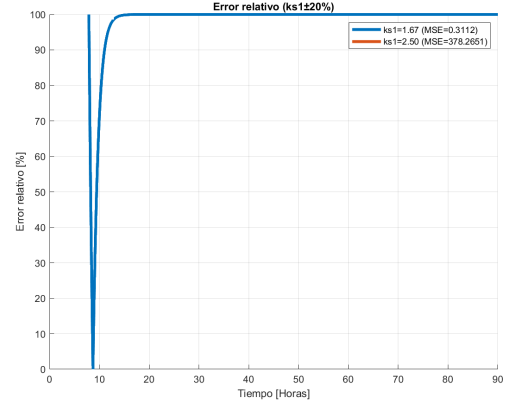


Fig. 20. Error control linealizante con variaciones en k_{s1}

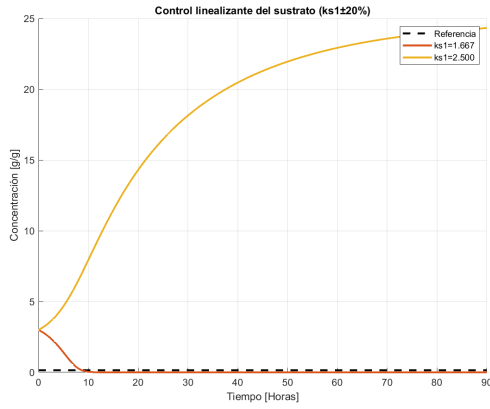


Fig. 19. Control linealizante con variaciones en k_{s1}

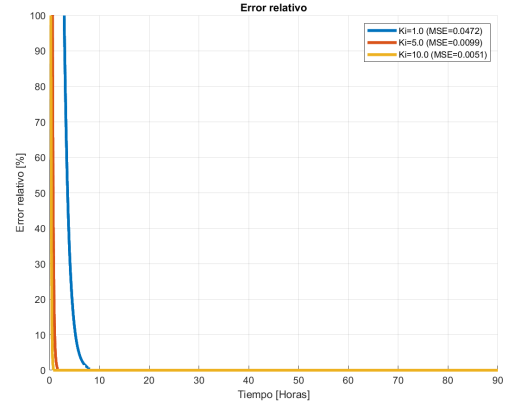


Fig. 22. Error control linealizante con término proporcional

V-B. Inclusión de acción proporcional (P)

Para solucionar todos los problemas anteriores se añade un término proporcional al error (ganancia k_p):

$$D = \frac{\mu_s(t)x(t)k_{s1} + k_p[s_r - s(t)]}{s_{in} - s_r} \quad (6)$$

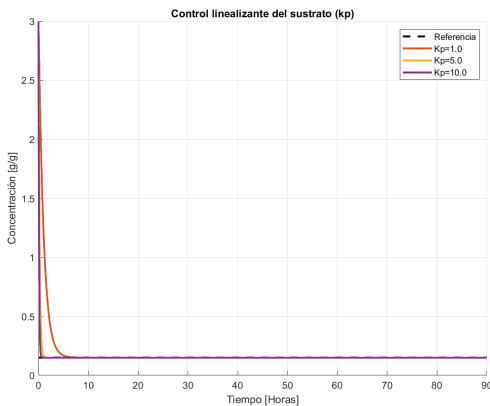


Fig. 21. Control linealizante con término proporcional

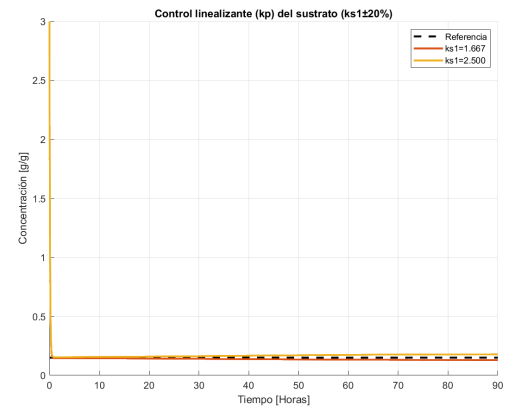


Fig. 23. Control linealizante con término proporcional y variaciones en k_{s1}

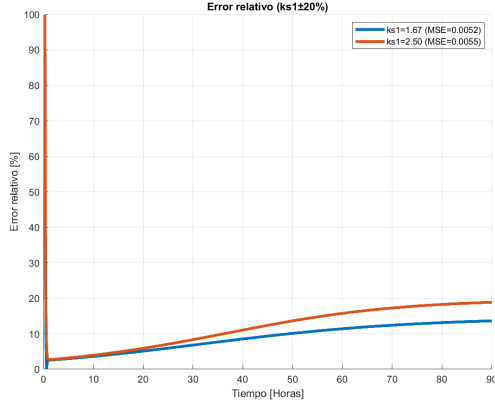


Fig. 24. Error control linealizante con término proporcional y variaciones en k_{s1}

- **Precisión:** El sistema alcanza la referencia en menos de 3 horas, sin error en estado estacionario.
- **Simplicidad:** No se requiere acción integrativa para eliminar el error.
- **Robustez limitada:** Variaciones del 20 % en k_{s1} generan error estacionario.

V-C. Inclusión de acción integral (PI)

Se añade un término integral (ganancia k_i), para disminuir la ganancia k_p sin perder los beneficios, y además eliminar el error al estado estacionario.

$$D = \frac{\mu_s x k_{s1}}{s_{in} - s_r} + \frac{k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau}{s_{in} - s_r} \quad (7)$$

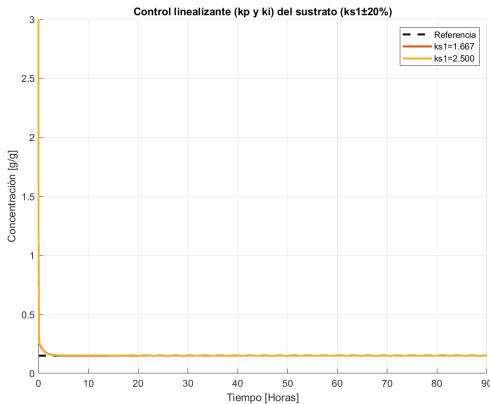


Fig. 25. Control linealizante proporcional e integrativo

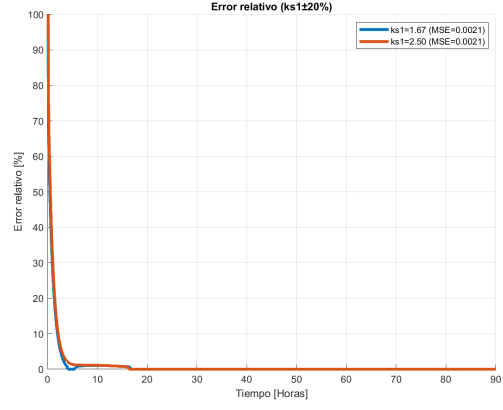


Fig. 26. Error control linealizante proporcional e integrativo

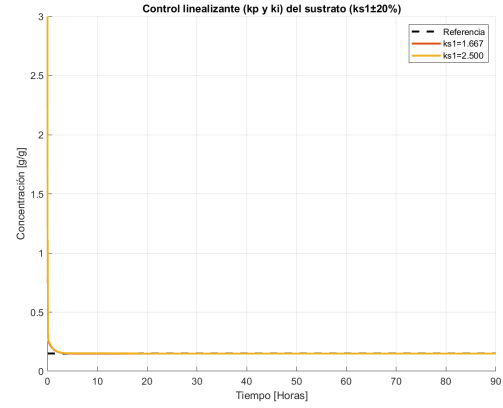


Fig. 27. Control linealizante proporcional e integrativo con variaciones en k_{s1}

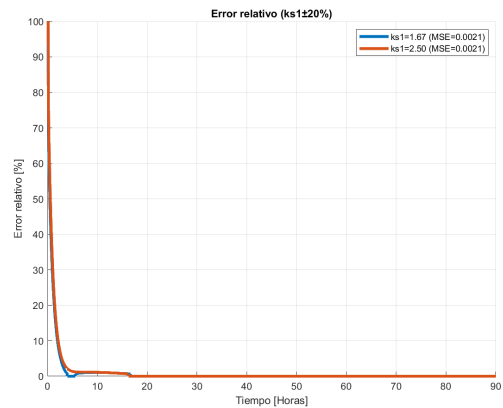


Fig. 28. Error control linealizante proporcional e integrativo con variaciones en k_{s1}

- **Error nulo:** Aun con variaciones en k_{s1} , el error en estado estacionario es eliminado.
- **Dinámica rápida:** Convergencia en menos de 20 horas (ajustable mediante k_p y k_i).

- *Estabilidad*: Ganancias altas mejoran la velocidad pero pueden desestabilizar el sistema, requiriendo sintonización cuidadosa.

VI. CONTROL ADAPTIVO

Se implementó un control adaptivo basado en la metodología vista en clase, el cual resulta similar en estructura a los controladores previos con término integrativo, pero con ventajas significativas en términos sistematicidad para su diseño.

$$D(t) = \frac{k_{s1}x(t)\hat{\mu}(t) + \gamma_1[s_r - s(t)]}{s_{in} - s_r}$$

$$\frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} = \gamma_1 k_{s1}x(t)[s_r - s(t)]$$

VI-A. Comportamiento del Controlador

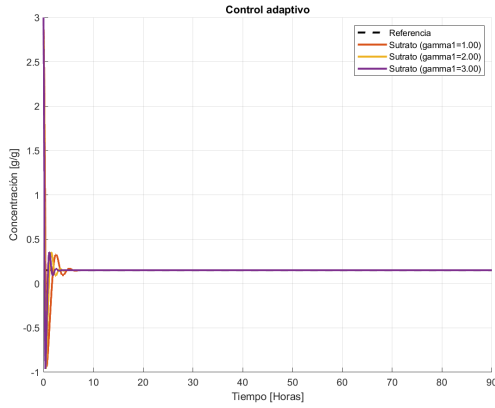


Fig. 29. Control adaptivo para diferentes valores de γ

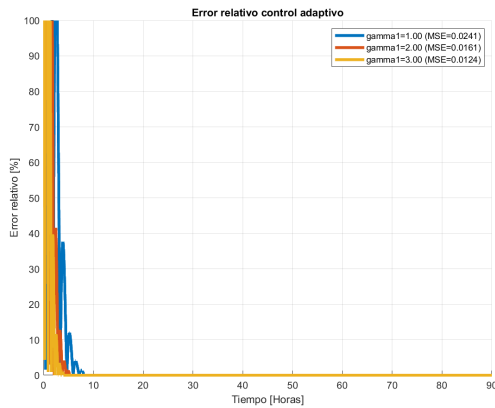


Fig. 30. Error control adaptivo para diferentes valores de γ

- *Dinámica inicial*: Presenta mayores oscilaciones al inicio comparado con los controladores anteriores, pero logra converger a error de estado estacionario nulo.
- *Tiempo de estabilización*: Las oscilaciones se atenúan antes de las 10 horas (5 horas para $\gamma = 3$), demostrando

que el parámetro γ permite ajustar la velocidad de convergencia y la amplitud de las oscilaciones iniciales.

- *Ventaja clave*: A diferencia de los controladores PI convencionales, este método no requiere conocimiento detallado del modelo del sistema y sigue un enfoque más sistemático.

VI-B. Análisis de Robustez

Se prueba la robustez del controlador variando k_{s1} en un 20 %, también introduciendo una perturbación en la acción de control D, variandola en un 20 %; y finalmente se verifica el correcto funcionamiento considerando el modelo completo y los modelos cinéticos completos también.

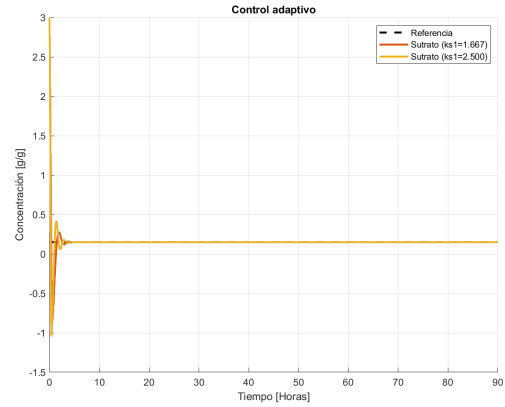


Fig. 31. Control adaptivo con variaciones en k_{s1}

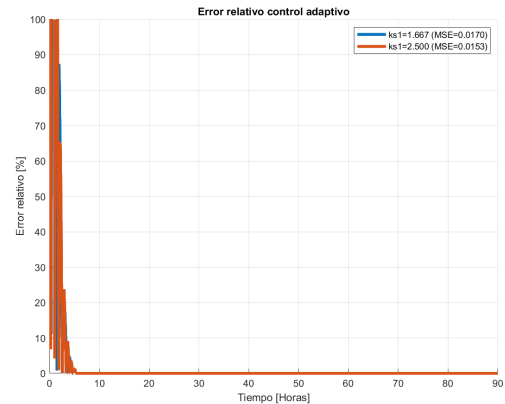


Fig. 32. Error control adaptivo con variaciones en k_{s1}

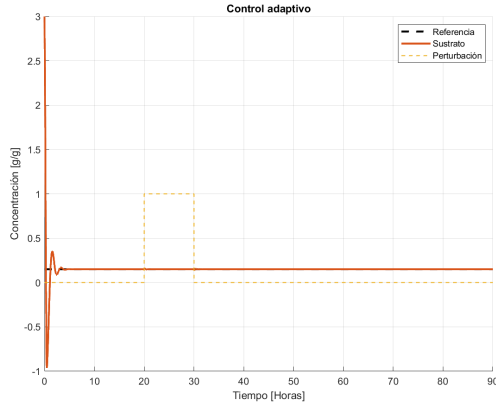


Fig. 33. Control adaptivo con variaciones en D

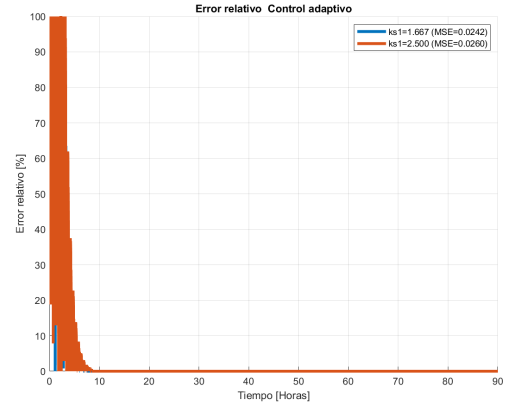


Fig. 36. Error control adaptivo con variaciones en k_{s1} modelo completo

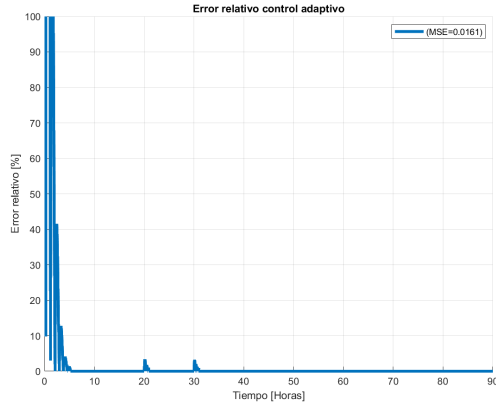


Fig. 34. Error control adaptivo con variaciones en D

- *Variación de k_{s1} ($\pm 20\%$):* El controlador mantiene error de estado estacionario nulo y una dinámica de convergencia similar, demostrando alta robustez frente a incertidumbres en este parámetro.
- *Variación de D ($\pm 20\%$):* El sistema muestra rechazo efectivo a esta perturbación, con una respuesta prácticamente invariante.
- *Modelo completo:* Al simular con el modelo completo y variar k_{s1} en $\pm 20\%$, se confirma que el controlador preserva su desempeño, consolidándose como una solución robusta y confiable.

VI-C. Conclusiones

- Garantiza error nulo en estado estacionario incluso ante incertidumbres en los parámetros.
- Ofrece un balance ajustable entre velocidad de convergencia y oscilaciones iniciales mediante γ .
- Demuestra superioridad frente a los controladores tradicionales al no depender críticamente del modelo exacto del sistema.

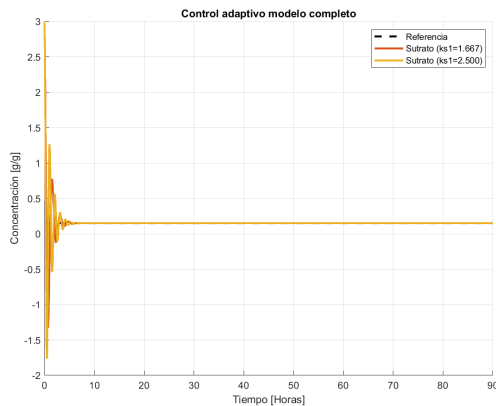


Fig. 35. Control adaptivo con variaciones en k_{s1} modelo completo