Procesos biotecnológicos

Control de sistemas biológicos

Estimación de estados

Observadores exponenciales

Estimación de estados: definición general

$$\dot{\xi} = Kr(\xi) - D\xi - Q + F \qquad\qquad F = D\xi_{in} + F$$

Asumimos que conocemos:

- Estructura del modelo cinético ($r(\xi)$)
- Parámetros del modelo cinético ($r(\xi)$)
- Rendimientos (K)

Asumimos que medimos *on-line*:

- Tasa de dilución (D)
- Tasas de alimentación (F)
- Tasa de salida gaseosa (Q)
- Un subconjunto de los estados ($\xi_1 \mid dim(\xi_1) = q$)

$$\xi_1 = L\xi$$

L es una matriz de $q \times N$

ξ_2 estados no medidos

Un observador de estados es un algoritmo para reconstruir los estados no medidos a partir de los medidos.

Estimación de estados: definición general

$$\dot{\xi} = Kr(\xi) - D\xi - Q + F$$

Definición de clase general de observadores de estados:

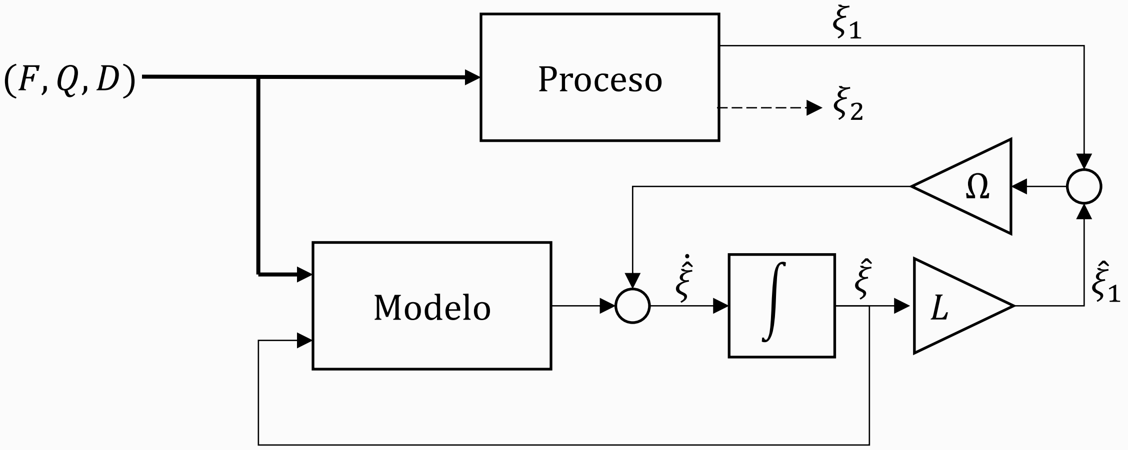
$$\dot{\hat{\xi}} = \underbrace{Kr(\hat{\xi}) - D\hat{\xi} - Q + F}_{\text{copia del modelo}} + \underbrace{\Omega(\hat{\xi})(\xi_1 - \hat{\xi}_1)}_{\text{corrección (afín al error)}}$$

$\hat{\xi}$ estados estimados

$\Omega(\hat{\xi})$ matriz de ganancias de $N \times q$

$\hat{\xi}_1 = L\hat{\xi}$

$$\hat{\xi} = \int_0^t \dot{\hat{\xi}}\, dt$$



Estimación de estados: definición general

Recordar

$\xi_1 = L\xi$

$\hat{\xi}_1 = L\hat{\xi}$

Como elegir Ω:

$$e = \xi - \hat{\xi} \longrightarrow \xi = e + \hat{\xi}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = \dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}} = K\left[r\left(\hat{\xi} + e\right) - r\left(\hat{\xi}\right)\right] - De - \Omega\left(\hat{\xi}\right)Le$$

$e = 0$ es punto de equilibrio.

Analicemos su aproximación lineal en ese punto ($e = 0$, o bien, $\hat{\xi} = \xi$):

$$\dot{e} = \left[A\left(\hat{\xi}\right) - \Omega\left(\hat{\xi}\right)L\right]e \qquad A\left(\hat{\xi}\right) = K\left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi=\hat{\xi}} - DI_N$$

El problema radica en elegir $\Omega\left(\hat{\xi}\right)$

Estimación de estados: observabilidad exponencial

$$\dot{e} = \left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]e$$

El sistema es exponencialmente observable si mediante la elección de $\Omega(\hat{\xi})$

- Podemos asignar los autovalores de $\left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]$.
- Podemos asignar una tasa de convergencia para el error.

$$\Rightarrow \dot{\hat{\xi}} = Kr(\hat{\xi}) - D\hat{\xi} - Q + F + \Omega(\hat{\xi})(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

es un *observador exponencial*

Condición necesaria:

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} L \\ LA(\xi) \\ LA(\xi)^2 \\ \vdots \\ LA(\xi)^{N-1} \end{bmatrix}$$ sea de rango completo

Ejemplo 1

$S \longrightarrow X$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\xi) = K \left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial \xi} \right] - D I_N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial r_S = \dfrac{\partial r}{\partial s} \\ \\ \partial r_X = \dfrac{\partial r}{\partial x} \end{array} \right. \longrightarrow [\partial r_s \quad \partial r_x]$$

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} -k_1 \partial r_S - D & -k_1 \partial r_X \\ \partial r_S & \partial r_X - D \end{bmatrix}$$

Suponiendo que se mide s:

$L = [1 \quad 0]$ $\qquad$ $\xi_1 = L\xi$

$\xi_1 = s \qquad \xi_2 = x$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 \partial r_S - D & -k_1 \partial r_X \end{bmatrix}$$

$rango(\boldsymbol{O}) = 2$ si $\partial r_X \neq 0$:

Si $r = \mu(s)x \Rightarrow \partial r_X = \mu(s) + \frac{\partial \mu}{\partial x} x \neq 0$

aunque μ no dependa de x (y siempre que $\mu \neq 0$)

<u>Cumple condición necesaria</u>

Ejemplo 1 (continuado)

$S \longrightarrow X$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\xi) = K \left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial \xi} \right] - D I_N$$

$$\begin{cases} \partial r_S = \dfrac{\partial r}{\partial s} \\ \partial r_X = \dfrac{\partial r}{\partial x} \end{cases} \longrightarrow [\partial r_s \quad \partial r_x]$$

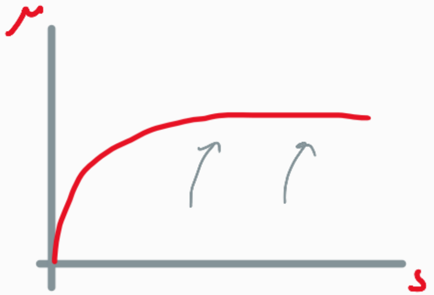
$$A(\xi) = \begin{bmatrix} -k_1 \partial r_S - D & -k_1 \partial r_X \\ \partial r_S & \partial r_X - D \end{bmatrix}$$

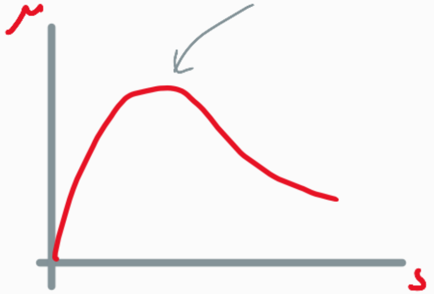
Suponiendo que se mide x:

$$L = [0 \quad 1]$$

$$\xi_1 = x \qquad \xi_2 = s$$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial r_S & \partial r_X - D \end{bmatrix}$$





$rango(\boldsymbol{O}) = 2$ si $\partial r_S \neq 0$:

Si $r = \mu x \Rightarrow \partial r_S = \frac{\partial \mu}{\partial s} x \neq 0$

ojo donde se anula $\frac{\partial \mu}{\partial s}$!

Ejemplo 2

$$S \longrightarrow X + P$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} -k_1 \partial r_S - D & -k_1 \partial r_X & -k_1 \partial r_P \\ \partial r_S & \partial r_X - D & \partial r_P \\ k_2 \partial r_S & k_2 \partial r_X & k_2 \partial r_P - D \end{bmatrix}$$

Suponiendo que se mide p:

$$L = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\xi_1 = p \qquad \xi_2 = [s \quad x]^T$$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k_2 \partial r_S & k_2 \partial r_X & k_2 \partial r_P - D \\ k_2 \partial r_S \bar{r} & k_2 \partial r_X \bar{r} & k_2 \partial r_P \bar{r} + D^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r} = \partial r_X - k_1 \partial r_S + k_2 \partial r_P - 2D$$

$rango(\boldsymbol{O}) < 3$ porque $det(\boldsymbol{O}) = 0$:

<u>No cumple condición necesaria</u>

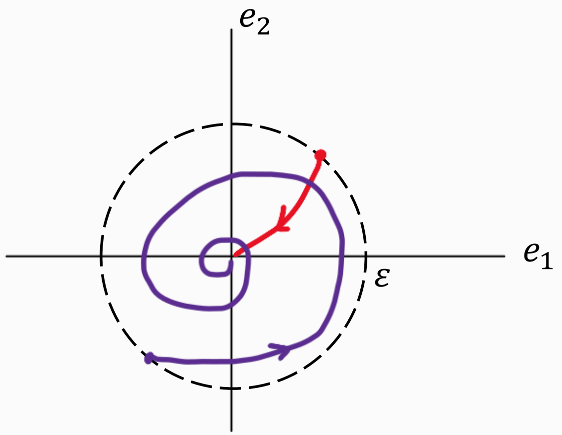
No se pueden estimar x y s a partir de p a una tasa de convergencia impuesta por diseño.

Estabilidad asintótica

Estabilidad asintótica

El punto de equilibrio e $= 0$ es asintóticamente estable si existe una constante positiva $\varepsilon > 0$ tal que, si $\|e(0)\| \leq \varepsilon$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \|e\| = 0$$

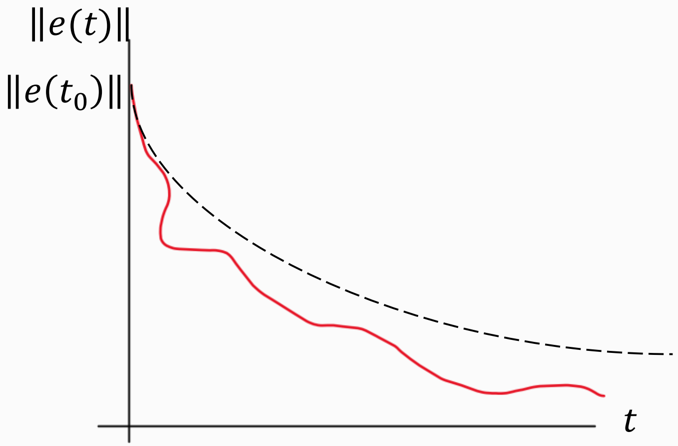


Estabilidad asintótica uniforme

El punto de equilibrio $e = 0$ es asintótica uniformemente estable si existen constantes positivas $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$, independientes de t_0 y $e(t_0)$, tal que $e(t)$ está acotado por

$$\|e(t)\| \leq \left[C_1\, e^{-C_2(t-t_0)}\right]\|e(t_0)\| \forall t > t_0$$

Independientemente del t_0 y e(t_0)



Estimación de estados: definición general

Recordar

$\xi_1 = L\xi$

$\hat{\xi}_1 = L\hat{\xi}$

Como elegir Ω:

$$e = \xi - \hat{\xi} \longrightarrow \xi = e + \hat{\xi}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = \dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}} = K\left[r(\hat{\xi} + e) - r(\hat{\xi})\right] - De - \Omega(\hat{\xi})Le$$

$e = 0$ es punto de equilibrio.

Analicemos su aproximación lineal en ese punto ($\hat{\xi} = \xi$):

$$\dot{e} = \left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]e$$

$$A(\hat{\xi}) = K\left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi=\hat{\xi}} - DI_N$$

El problema radica en elegir $\Omega(\hat{\xi})$

Observador de Luenberger extendido

El criterio es elegir $\Omega(\hat{\xi})$ tal que $e = 0$ se un punto de equilibrio asintóticamente estable del modelo linealizado.

Para esto se hace que:

1. $\left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]$ y su derivada son acotadas:

$$\left\|A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right\| \leq C_1 \qquad \forall\, \hat{\xi}$$

$$\left\|\frac{d}{dt}\left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]\right\| \leq C_2 \qquad \forall\, \hat{\xi}$$

2. $\left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]$ tiene autovalores con parte real negativa:

$$Re\left\{\lambda_i\left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]\right\} \leq C_3 < 0 \quad \forall \hat{\xi} \quad i = 1 \dots N$$

$$\dot{e} = \left[A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L\right]e$$

Si se cumplen 1 y 2, el observador además presenta estabilidad exponencial (uniforme asintótica).

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} = \sigma_{\max}(A)$$

Observador de Kalman extendido

El criterio es elegir $\Omega(\hat{\xi})$ tal se minimiza el error cuadrático medio de la estimación (optimización cuadrática):

$$E = \int_0^t \left\|\xi - \hat{\xi}\right\|^2 d\tau = \int_0^t \|e(\tau)\|^2 d\tau$$

bajo la restricción del modelo linealizado.

Solución:

$$\Omega\left(\hat{\xi}\right) = R\left(\hat{\xi}\right) L^T$$

Donde $R(\hat{\xi})$ es una matriz de $N \times N$ obtenida de la ecuación de Riccati:

$$\dot{R} = -RL^T LR + RA^T\left(\hat{\xi}\right) + A\left(\hat{\xi}\right)R$$

Ejemplo 1

$$S \xrightarrow{r} X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \mu x = \frac{\mu_m s}{K_s + s} x$$

Suponiendo que se mide s:

$$N = 2 \quad q = 1$$

$$L = [1 \quad 0]$$

$$\xi_1 = s \qquad \xi_2 = x$$

$$A(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} -k_1 \widehat{\partial r}_S - D & -k_1 \widehat{\partial r}_X \\ \widehat{\partial r}_S & \widehat{\partial r}_X - D \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \widehat{\partial r}_S = \left.\dfrac{\partial r}{\partial s}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \dfrac{\mu_m K_s}{(K_s + \hat{s})^2} \hat{x} \\[2ex] \widehat{\partial r}_X = \left.\dfrac{\partial r}{\partial x}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \end{cases}$$

$$\Omega(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} \omega_1(\hat{x}, \hat{s}) \\ \omega_2(\hat{x}, \hat{s}) \end{bmatrix}$$

Quedando el observador:

$$\dot{\hat{\xi}} = Kr(\hat{\xi}) - D\hat{\xi} - Q + F + \Omega(\hat{\xi})(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1 \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{x} - D\hat{s} + Ds_{in} + \omega_1(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \\[2ex] \dot{\hat{x}} = \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{x} - D\hat{x} + \omega_2(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \end{cases}$$

Ejemplo 1: Luenberger

$$\widehat{\partial r_S} = \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right|_{\xi=\hat{\xi}} = \frac{\mu_m K_s}{(K_s+\hat{s})^2}\hat{x}$$

$$\widehat{\partial r_X} = \left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{\xi=\hat{\xi}} = \frac{\mu_m \hat{s}}{K_s+\hat{s}}$$

Queremos asignar autovalores $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ a :

$$M = A(\hat{\xi}) - \Omega(\hat{\xi})L = \begin{bmatrix} -k_1\widehat{\partial r_S} - D & -k_1\widehat{\partial r_X} \\ \widehat{\partial r_S} & \widehat{\partial r_X} - D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_1(\hat{x},\hat{s}) \\ \omega_2(\hat{x},\hat{s}) \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

$$M = \begin{bmatrix} -k_1\widehat{\partial r_S} - D - \omega_1(\hat{x},\hat{s}) & -k_1\widehat{\partial r_X} \\ \widehat{\partial r_S} - \omega_2(\hat{x},\hat{s}) & \widehat{\partial r_X} - D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(m_{11}+m_{22}) + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Queremos:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} m_{11} + m_{22} &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} &= \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Luenberger

$$\widehat{\partial r_S} = \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right|_{\xi=\hat{\xi}} = \frac{\mu_m K_s}{(K_s+\hat{s})^2}\hat{x}$$

$$\widehat{\partial r_X} = \left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{\xi=\hat{\xi}} = \frac{\mu_m \hat{s}}{K_s+\hat{s}}$$

$$M = \begin{bmatrix} -k_1\widehat{\partial r_S} - D - \omega_1(\hat{x},\hat{s}) & -k_1\widehat{\partial r_X} \\ \widehat{\partial r_S} - \omega_2(\hat{x},\hat{s}) & \widehat{\partial r_X} - D \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m_{11} + m_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_1\widehat{\partial r_S} - D - \omega_1(\hat{x},\hat{s}) + \widehat{\partial r_X} - D = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \left[-k_1\widehat{\partial r_S} - D - \omega_1(\hat{x},\hat{s})\right]\left(\widehat{\partial r_X} - D\right) + k_1\widehat{\partial r_X}\left(\widehat{\partial r_S} - \omega_2(\hat{x},\hat{s})\right) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1(\hat{x},\hat{s}) = -\lambda_1 - \lambda_2 - k_1\widehat{\partial r_S} + \widehat{\partial r_X} - 2D \\ \omega_2(\hat{x},\hat{s}) = \dfrac{-\lambda_1\lambda_2 + \left[\lambda_1 + \lambda_2 + D - \widehat{\partial r_X}\right]\left(\widehat{\partial r_X} - D\right)}{k_1\widehat{\partial r_X}} + \partial r_S \end{cases}$$

ojo! Si $s = 0$

Ejemplo 1: Luenberger

Quedando el observador:

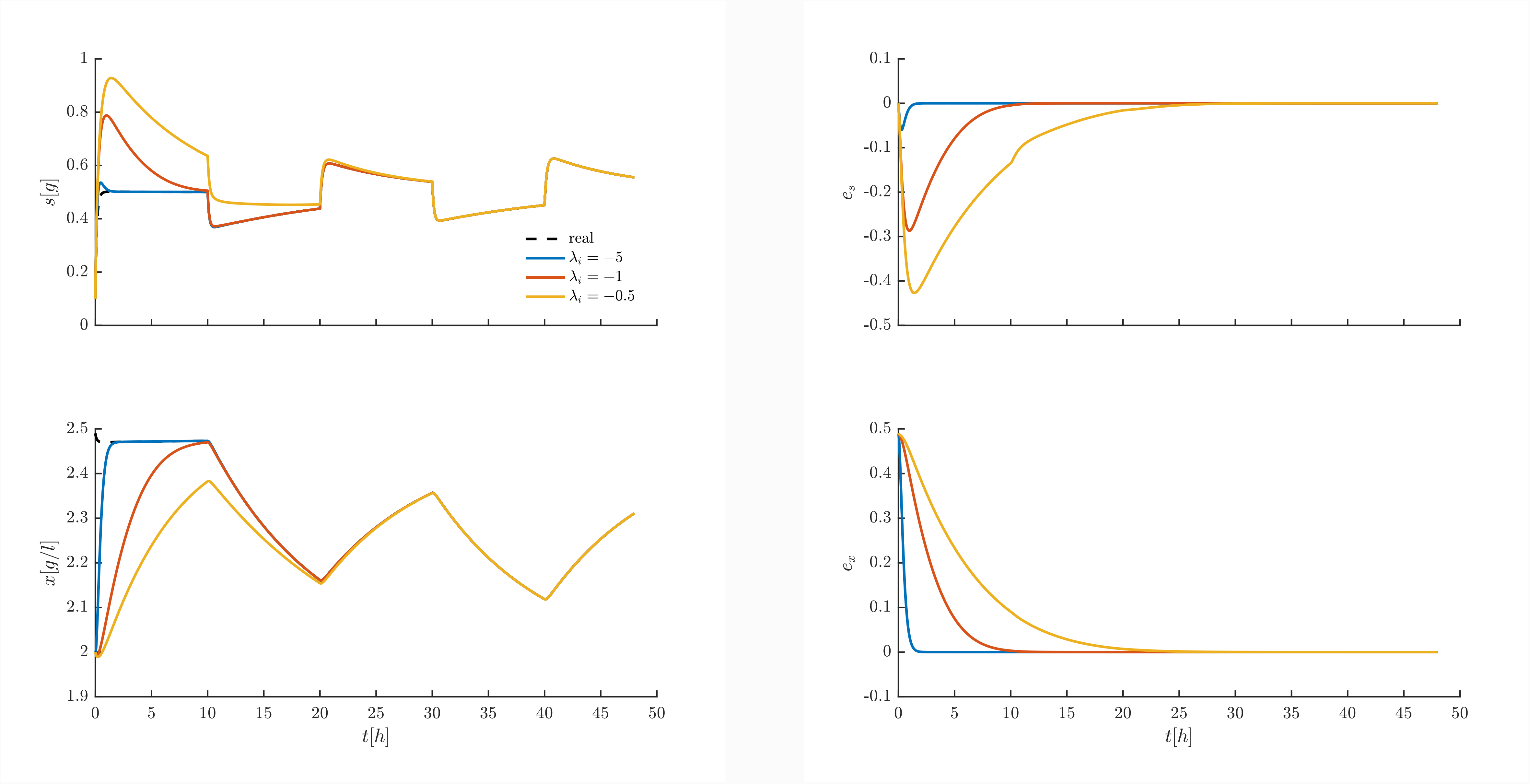
$$\dot{\hat{\xi}} = Kr(\hat{\xi}) - D\hat{\xi} - Q + F + \Omega(\hat{\xi})(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

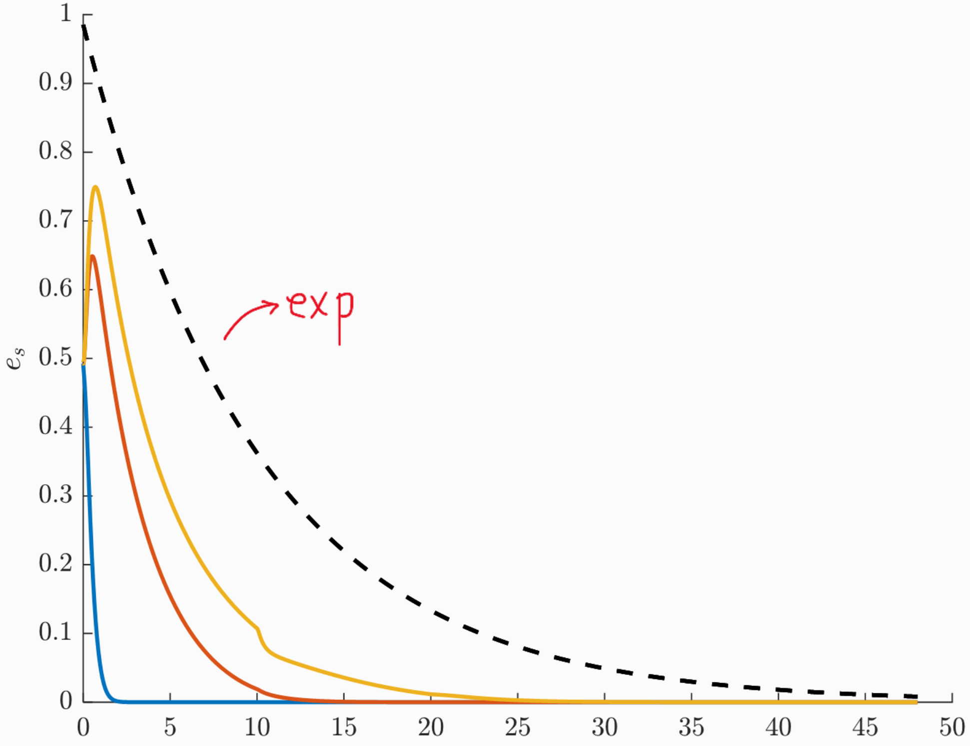
$$\Omega(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} \omega_1(\hat{x}, \hat{s}) \\ \omega_2(\hat{x}, \hat{s}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1 \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{\mathrm{x}} - D\hat{s} + Ds_{in} + \omega_1(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}} = \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{\mathrm{x}} - D\hat{x} + \omega_2(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1(\hat{x}, \hat{s}) = -\lambda_1 - \lambda_2 - k_1 \widehat{\partial r}_S + \widehat{\partial r}_X - 2D \\ \omega_2(\hat{x}, \hat{s}) = \dfrac{-\lambda_1\lambda_2 + \left[\lambda_1 + \lambda_2 + D - \widehat{\partial r}_X\right]\left(\widehat{\partial r}_X - D\right)}{k_1 \widehat{\partial r}_X} + \partial r_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{\partial r}_S = \left.\dfrac{\partial r}{\partial s}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \dfrac{\mu_m K_s}{(K_s + \hat{s})^2} \hat{x} \\ \widehat{\partial r}_X = \left.\dfrac{\partial r}{\partial x}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \end{cases}$$


real
$\lambda_i = -5$
$\lambda_i = -1$
$\lambda_i = -0.5$
$s[g]$
$x[g/l]$
e_s
e_x
$t[h]$
$t[h]$



Norma del error, se puede acotar en este caso por:

$$||e(t)|| < C_1 e^{-C_2 \cdot t} ||e(0)||$$

Con $C_1 = 2$ y $C_2 = 0.1$

Ejemplo 1

$$S \xrightarrow{r} X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \mu x = \frac{\mu_m s}{K_s + s} x$$

Suponiendo que se mide s:

$$N = 2 \quad q = 1$$

$$L = [1 \quad 0]$$

$$\xi_1 = s \qquad \xi_2 = x$$

$$A(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} -k_1 \widehat{\partial r_S} - D & -k_1 \widehat{\partial r_X} \\ \widehat{\partial r_S} & \widehat{\partial r_X} - D \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\partial r_S} = \left. \frac{\partial r}{\partial s} \right|_{\xi = \hat{\xi}} = \frac{\mu_m K_s}{(K_s + \hat{s})^2} \hat{x}$$

$$\widehat{\partial r_X} = \left. \frac{\partial r}{\partial x} \right|_{\xi = \hat{\xi}} = \frac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}}$$

Quedando el observador:

$$\dot{\hat{\xi}} = K r(\hat{\xi}) - D\hat{\xi} - Q + F + \Omega(\hat{\xi})(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1 \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{x} - D\hat{s} + D s_{in} + \omega_1(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}} = \dfrac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}} \hat{x} - D\hat{x} + \omega_2(\hat{x}, \hat{s})(s - \hat{s}) \end{cases}$$

Ejemplo 1: Kalman

$$\Omega(\hat{\xi}) = R(\hat{\xi})L^T$$

$$\dot{R} = -RL^T LR + RA^T(\hat{\xi}) + A(\hat{\xi})R$$

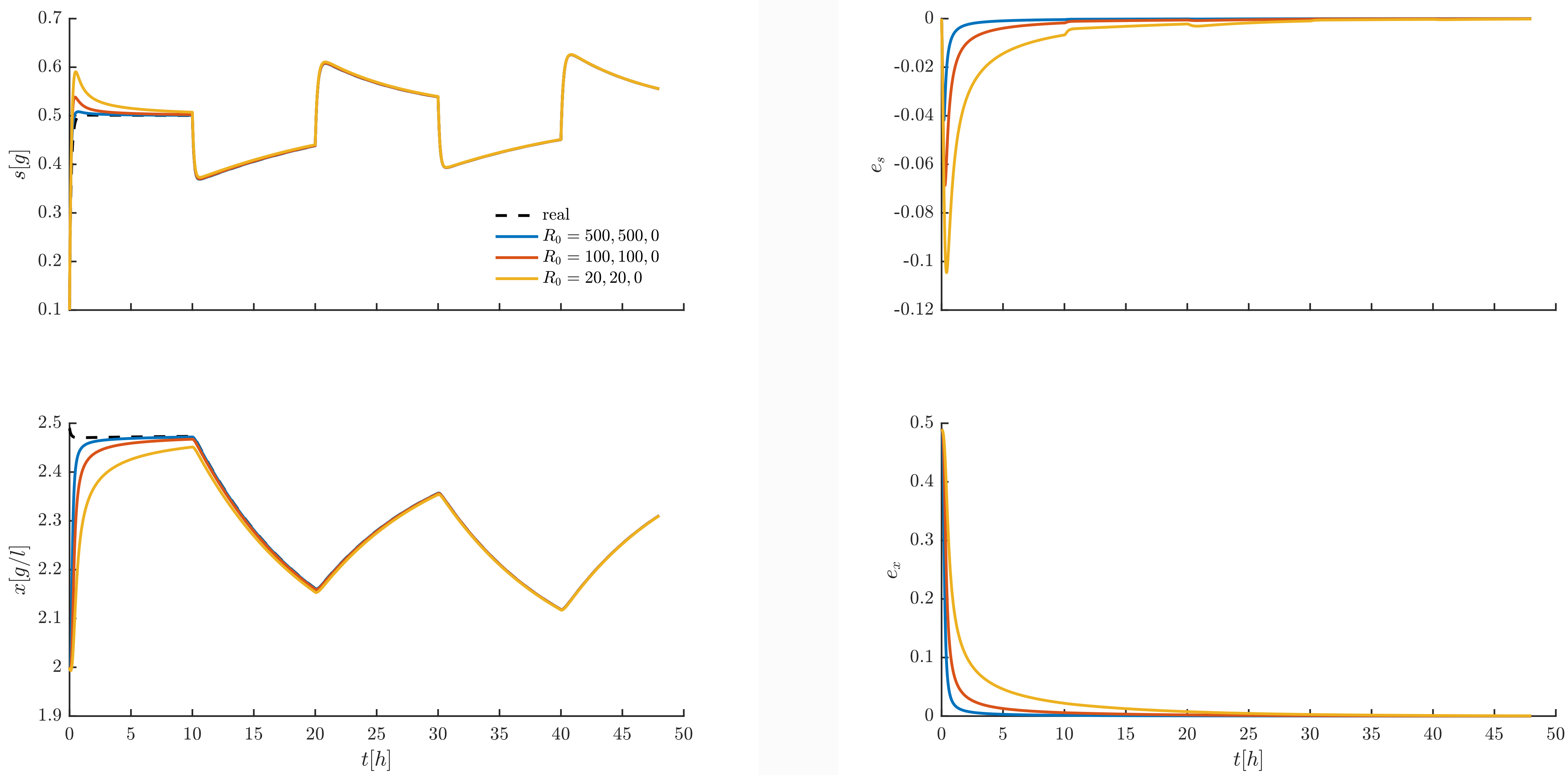
$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_3 \\ R_3 & R_2 \end{bmatrix} \qquad \Omega(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = -R_1^2 + 2\left[\left(-k_1\widehat{\partial r}_S - D\right)R_1 - k_1\widehat{\partial r}_X R_3\right] \\ \dot{R}_2 = -R_3^2 + 2\left[\left(\widehat{\partial r}_X - D\right)R_2 + \widehat{\partial r}_S R_3\right] \\ \dot{R}_3 = -R_1 R_3 + \left(-k_1\widehat{\partial r}_S - D\right)R_1 - k_1\widehat{\partial r}_X R_2 + \widehat{\partial r}_S R_1 + \left(\widehat{\partial r}_X - D\right)R_3 \end{cases}$$

$$\widehat{\partial r}_S = \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \frac{\mu_m K_s}{(K_s + \hat{s})^2}\hat{x}$$

$$\widehat{\partial r}_X = \left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{\xi = \hat{\xi}} = \frac{\mu_m \hat{s}}{K_s + \hat{s}}$$

$$A(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} -k_1\widehat{\partial r}_S - D & -k_1\widehat{\partial r}_X \\ \widehat{\partial r}_S & \widehat{\partial r}_X - D \end{bmatrix}$$

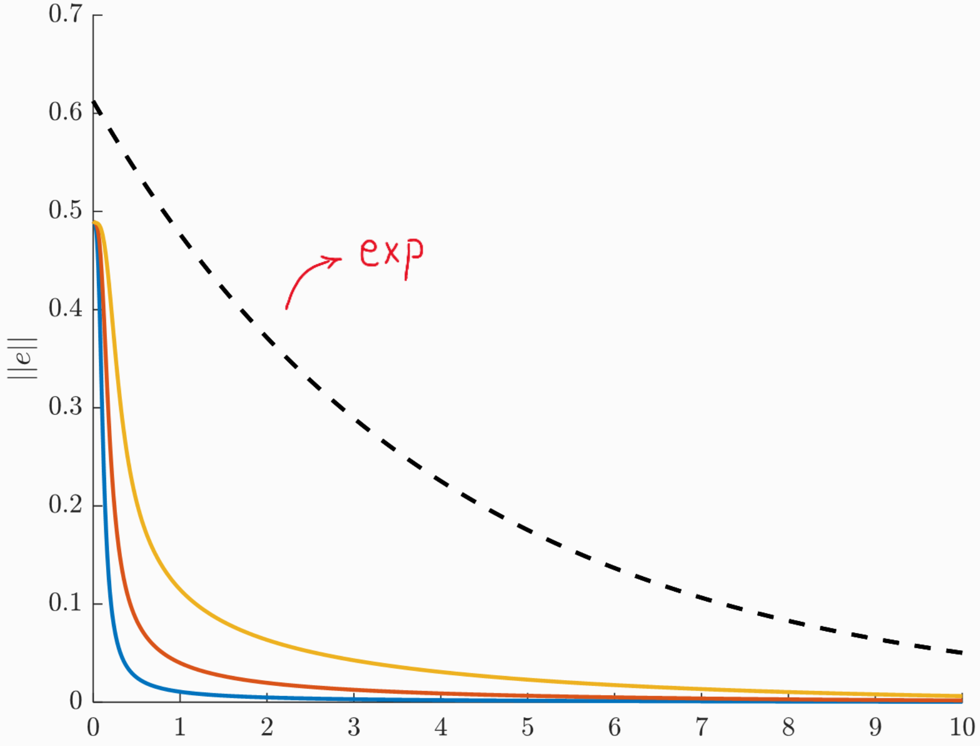


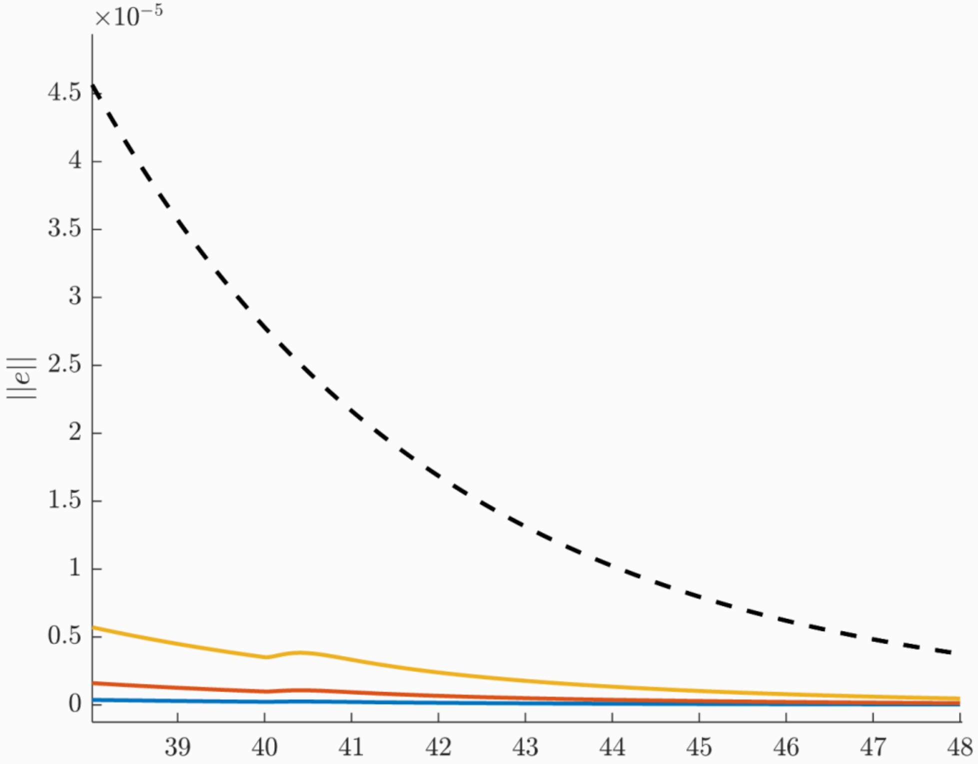
real
$R_0 = 500, 500, 0$
$R_0 = 100, 100, 0$
$R_0 = 20, 20, 0$
$s[g]$
$x[g/l]$
e_s
e_x
$t[h]$
$t[h]$

Norma del error, se puede acotar en este caso por:

$$\left|\left|e(t)\right|\right| < C_1 e^{-C_2 \cdot t}\left|\left|e(0)\right|\right|$$

Con $C_1 = 1.25$ y $C_2 = 0.25$





Estimación de estados

Observadores asintóticos

Ejemplo

$$S \xrightarrow{r} X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu x - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_a = 1 \qquad K_b = -k_1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - Dx \\ \dot{s} = -k_1 \mu x - Ds + Ds_{in} \end{cases}$$

Propongo un cambio de variables:

$$Z = k_1 x + s$$

Z representa una cantidad equivalente en forma de s dentro del reactor.
Luego:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - Dx \\ \dot{Z} = -DZ + Ds_{in} \end{cases}$$

Propiedad

Dado el sistema:

$$\dot{\xi} = Kr(\xi) - D\xi - Q + F$$

$$\begin{cases} \xi, F, Q = N \times 1 \\ r = M \times 1 \\ K = N \times M \\ rango(K) = p \end{cases}$$

Se puede particionar como:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_a = K_a r(\xi) - D\xi_a - Q_a + F_a \\ \dot{\xi}_b = K_b r(\xi) - D\xi_b - Q_b + F_b \end{cases}$$

- K_a es submatriz de K de $p \times M$
- K_b submatriz restante
- $\xi_a, \xi_b, F_a, F_b, Q_a, Q_b$ quedan definidas por K_a

Propiedad

$\xi, F, Q = N \times 1$

$r = M \times 1$

$K = N \times M$

$rango(K) = p$

$K_a = p \times M$

Existe una transformación:

$$Z = A_0 \xi_a + \xi_b \longrightarrow A_0 = (N - p) \times p$$

Donde A_0 es la solución de

$$A_0 K_a + K_b = 0$$

Tal que el modelo en variables de estado es equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_a = K_a r(\xi) - D\xi_a - Q_a + F_a \\ \dot{Z} = -DZ + A_0(F_a - Q_a) + (F_b - Q_b) \end{cases}$$

Ejemplo

$$S \xrightarrow{r} X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu x - D \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_a = x \qquad \xi_b = s$$

$$K_a = 1 \qquad K_b = -k_1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \cdot r - Dx \\ \dot{s} = -k_1 r - Ds + Ds_{in} \end{cases}$$

$$\underline{Z = A_0 x + s}$$

$$A_0 K_a + K_b = 0$$

$$A_0 \cdot 1 - k_1 = 0$$

$$\boxed{A_0 = k_1}$$

$$\underline{Z = k_1 x + s}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \cdot r - Dx \\ \dot{Z} = -DZ + Ds_{in} \end{cases}$$

Ejemplo

$$S \xrightarrow{r} X$$

$$\begin{bmatrix}\dot{s}\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k_1\\ 1\end{bmatrix}\mu x - D\begin{bmatrix}s\\ x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}Ds_{in}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\xi_a = s \qquad \xi_b = x$$

$$K_a = -k_1 \qquad K_b = 1$$

$$\begin{cases}\dot{s} = -k_1 r - Ds + Ds_{in}\\ \dot{x} = 1 \cdot r - Dx\end{cases}$$

$$\underline{Z = A_0 s + x}$$

$$A_0 K_a + K_b = 0$$

$$A_0(-k_1) + 1 = 0$$

$$\boxed{A_0 = 1/k_1}$$

$$\underline{Z = s/k_1 + x}$$

$$\begin{cases}\dot{s} = -k_1 r - Ds + Ds_{in}\\ \dot{Z} = -DZ + \dfrac{1}{k_1} Ds_{in}\end{cases}$$

Ejemplo

$$S \longrightarrow X + P$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_a = x \qquad \xi_b = \begin{bmatrix} s \\ p \end{bmatrix}$$

$$K_a = 1 \qquad K_b = \begin{bmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z = A_0 \xi_a + \xi_b}$$

$$A_0 K_a + K_b = 0$$

$$A_0 \cdot 1 + \begin{bmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{A_0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix}}$$

$$Z = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} s \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x + s \\ -k_2 x + p \end{bmatrix}$$

$$\dot{Z} = -DZ + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observadores asintóticos

Para implementar alguno de los observadores exponenciales, se requiere:

- Modelo observable.
- Conocer totalmente la estructura y parámetros del modelo.

Los observadores asintóticos permiten estimar los estados cuando:

- Los modelos cinéticos no se conocen ($\mathrm{r}(\xi)$).
- Los rendimientos se conocen (K).
- El número de estados medidos q es mayor o igual al rango de la matriz K:

$$q = dim(\xi_1) \geq p = rango\ (K)$$

Observadores asintóticos

Existe al menos:

- … una partición (ξ_a, ξ_b) de los estados
- … una matriz A_0 de dimension $(N-p) \times p$
- … y un vector Z de dimensión $N-p$ definido como

$$Z \ = \ A_0 \xi_a + \ \xi_b$$

cuya dinámica es independiente de las tasas de reacción r:

$$\dot{Z} = -DZ + A_0(F_a - Q_a) + (F_b - Q_b)$$

Por otra parte se puede escribir a Z como una combinación lineal de estados medidos y no medidos:

$$Z = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2$$

Mediante matrices adecuadas

- A_1 de $(N-p) \times q$
- A_2 de $(N-p) \times (N-q)$

Observadores asintóticos

Si A_2 tiene inversa izquierda se puede definer el observador asintótico:

$$\dot{\hat{Z}} = -D\hat{Z} + A_0(F_a - Q_a) + (F_b - Q_b)$$

$$\hat{\xi}_2 = A_2^{+}(\hat{Z} - A_1\xi_1)$$

Inversa izquierda:

$$Z = A_1\xi_1 + A_2\xi_2$$

$$A_2\xi_2 = Z - A_1\xi_1$$

$$A_2^T A_2\xi_2 = A_2^T(Z - A_1\xi_1)$$

$$(A_2^T A_2)^{-1}A_2^T A_2\xi_2 = (A_2^T A_2)^{-1}A_2^T(Z - A_1\xi_1)$$

$$\xi_2 = \underbrace{(A_2^T A_2)^{-1}A_2^T}_{A^{+}}(Z - A_1\xi_1)$$

Condición necesaria:

El número de estados medidos debe ser mayor o igual al rango de la matriz de rendimientos:

$$rango(K) = q \geq p$$

Observadores asintóticos

¿Cómo son los errores?

$$\tilde{Z} = Z - \hat{Z}$$

$$\dot{\tilde{Z}} = \dot{Z} - \dot{\hat{Z}} = -DZ + D\hat{Z} = \boxed{-D\tilde{Z}}$$

$$\tilde{Z} = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 - A_1\xi_1 + A_2\hat{\xi}_2 = A_2\tilde{\xi}$$

$$A_2\dot{\tilde{\xi}} = -DA_2\tilde{\xi}$$

$$\boxed{\dot{\tilde{\xi}} = -D\tilde{\xi}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \xi_2(t) - \hat{\xi}_2(t) \right\| = 0$$

Siempre que D tenga persistencia de excitación:

Existen δ y β_1 positivas tal que:

$$\int_t^{t+\delta} D(\tau)d\tau > \beta_1 > 0 \qquad \forall t$$

Ejemplo 2

$$S \longrightarrow X + P$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D s_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} -k_1 \partial r_S - D & -k_1 \partial r_X & -k_1 \partial r_P \\ \partial r_S & \partial r_X - D & \partial r_P \\ k_2 \partial r_S & k_2 \partial r_X & k_2 \partial r_P - D \end{bmatrix}$$

Suponiendo que se mide p:

$$L = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\xi_1 = p \qquad \xi_2 = [s \quad x]^T$$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k_2 \partial r_S & k_2 \partial r_X & k_2 \partial r_P - D \\ k_2 \partial r_S \bar{r} & k_2 \partial r_X \bar{r} & k_2 \partial r_P \bar{r} + D^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r} = \partial r_X - k_1 \partial r_S + k_2 \partial r_P - 2D$$

$rango(\boldsymbol{O}) < 3$ porque $det(\boldsymbol{O}) = 0$:

<u>No cumple condición necesaria</u>

No se pueden estimar x y s a partir de p a una tasa de convergencia impuesta por diseño.

Ejemplo 2

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} s \\ x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_a = x$$

$$\xi_b = \begin{bmatrix} s \\ p \end{bmatrix}$$

$$Z = A_0 \xi_a + \xi_b$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} s \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x + s \\ -k_2 x + p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = k_1(r - Dx) - k_1 r - Ds + Ds_{in} \\ \dot{Z}_2 = -k_2(r - Dx) + k_2 r - Dp \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = -DZ_1 + Ds_{in} \\ \dot{Z}_2 = -DZ_2 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$\begin{bmatrix}\dot{s}\\\dot{x}\\\dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k_1\\1\\k_2\end{bmatrix} r - D\begin{bmatrix}s\\x\\p\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}Ds_{in}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\dot{Z}_1 = -DZ_1 + Ds_{in}$$

$$\dot{Z}_2 = -DZ_2$$

$$\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1x + s\\-k_2x + p\end{bmatrix}$$

Supongamos que medimos el producto:

$$\xi_1 = p$$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}k_1x + s\\-k_2x + p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} p + \begin{bmatrix}1 & k_1\\0 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\x\end{bmatrix}$$

$$Z = A_1\xi_1 + A_2\xi_2$$

- A_1 de $(N-p)\times q = 2\times 1$

$$A_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

- A_2 de $(N-p)\times(N-q) = 2\times 2$

$$A_2 = \begin{bmatrix}1 & k_1\\0 & -k_2\end{bmatrix} \qquad A_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & k_1/k_2\\0 & -1/k_2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$\dot{\hat{Z}} = -D\hat{Z} + A_0(F_a - Q_a) + (F_b - Q_b)$$

$$\hat{\xi}_2 = A_2^{+}(\hat{Z} - A_1\xi_1)$$

Finalmente el observador queda:

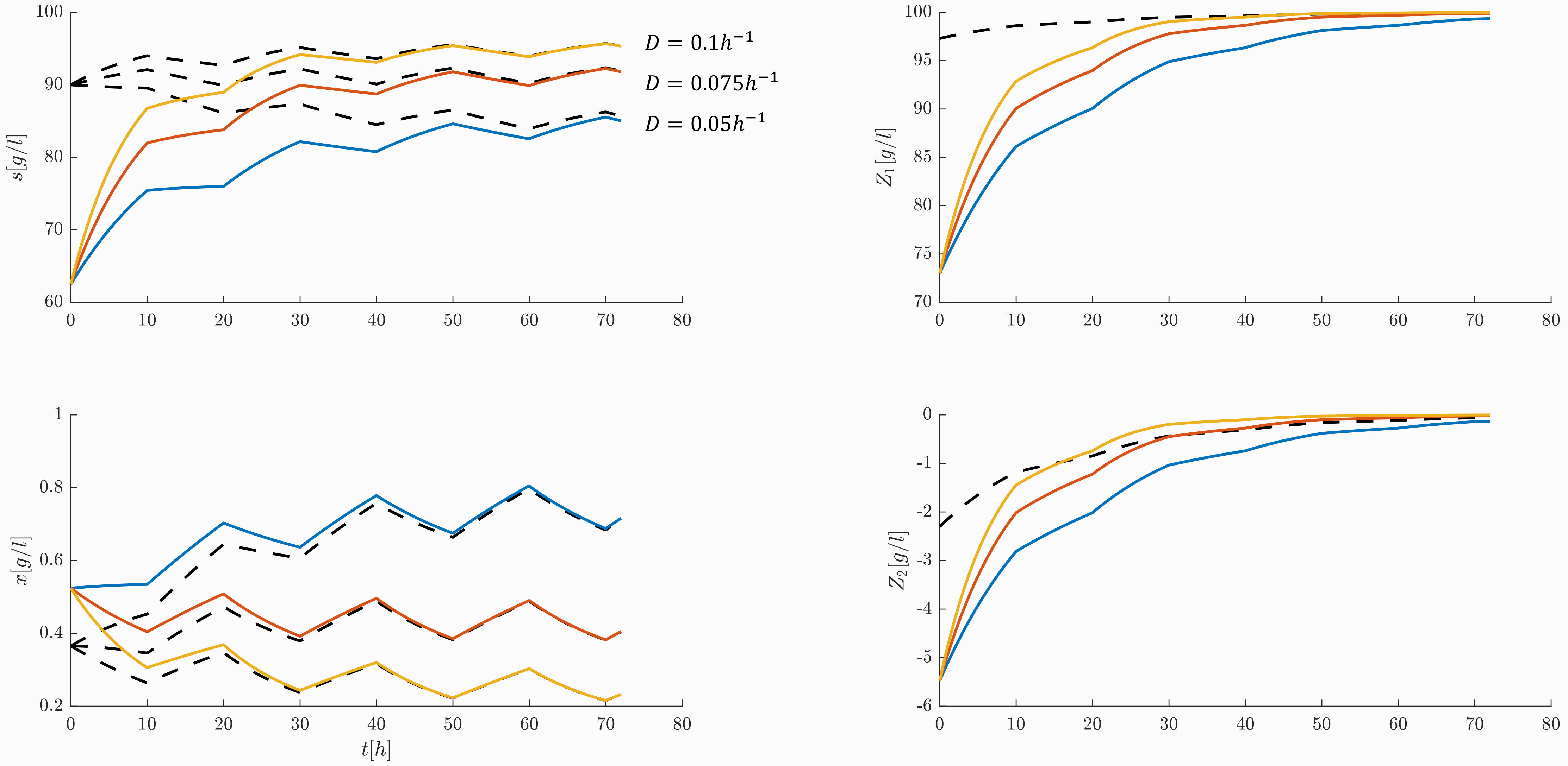
$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1 = -D\hat{Z}_1 + Ds_{in} \\ \dot{\hat{Z}}_2 = -D\hat{Z}_2 \\ \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_1}{k_2} \\ 0 & -\frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p \right) \end{cases}$$

Modelo de simulación

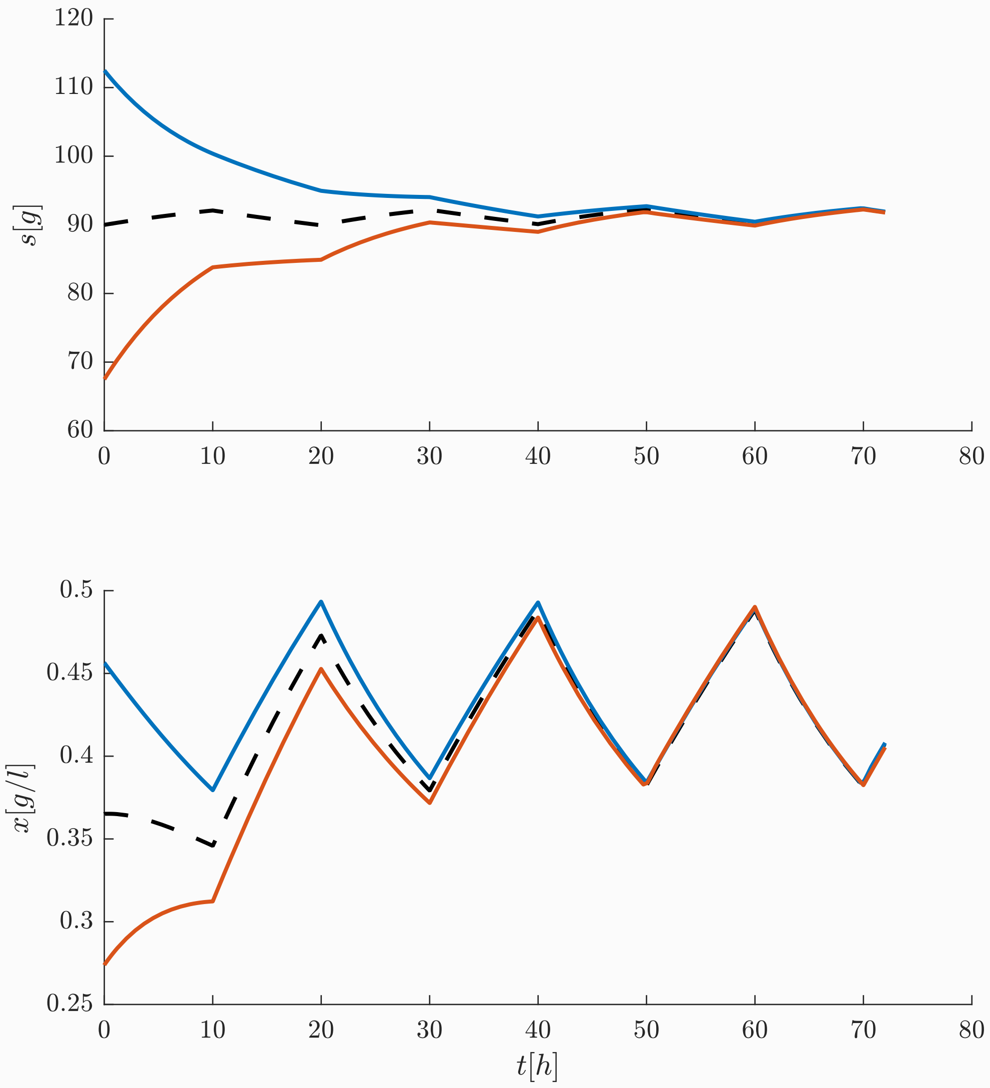
$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{bmatrix} \mu x - D \begin{bmatrix} s \\ x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ds_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \mu_m \cdot \frac{s}{k_s + s + \frac{s^2}{k_i}} \cdot \frac{k_p}{kp + p} \cdot \left(1 - \frac{p}{p_L}\right)$$

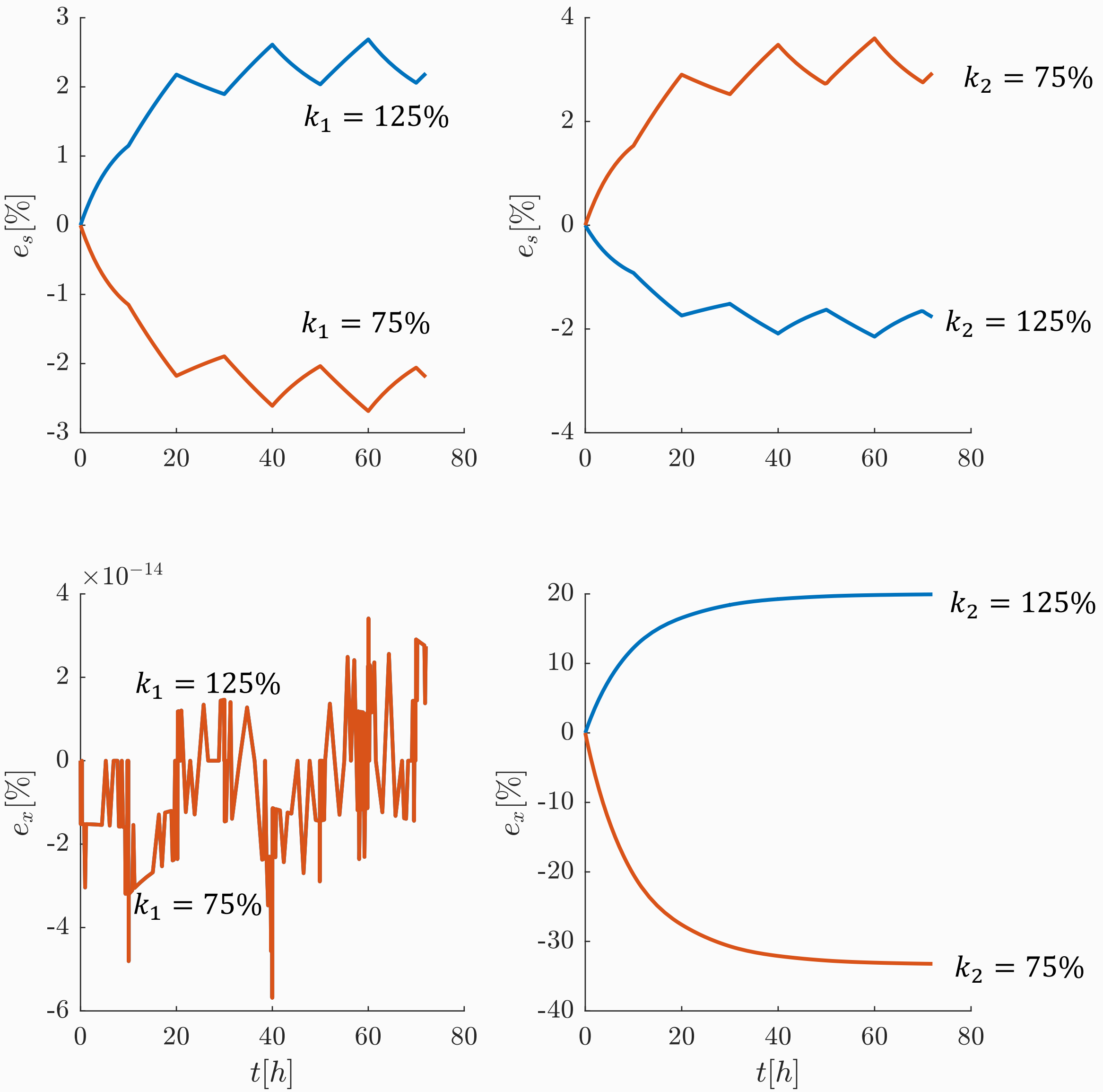
D es una onda cuadrada alrededor de los valores indicados



Distintas condiciones iniciales



Incertidumbre en los parámetros



Estimación de parámetros

Observadores exponenciales

Ejemplo

Tengo:

$$\dot{x} = \mu(\cdot) \cdot x - Dx$$

y quiero estimar μ en base a medir x

Propongo el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mu} \cdot x - Dx + \omega \cdot (x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma \cdot x \cdot (x - \hat{x})$$

Donde el error de estimación es:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \tilde{\mu} \cdot x - \omega\, \tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{\mu}} = \dot{\mu} - \dot{\hat{\mu}} = \dot{\mu} - \gamma \cdot x \cdot \tilde{x}$$

En el equilibrio:

$$0 = \tilde{\mu} \cdot x - \omega\, \tilde{x}$$

$$0 = \dot{\mu} - \gamma \cdot x \cdot \tilde{x}$$

$$\tilde{\mu} = \omega \frac{\tilde{x}}{x}$$

$$\tilde{x} = \frac{\dot{\mu}}{\gamma x}$$

Cómo es la dinámica del error?

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\omega & x \\ -x\gamma & 0 \end{bmatrix} e + \nu$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma x^2$$

Estimación de tasas: definición general

$$\dot{\xi} = Kr(\xi) - D\xi - Q + F$$

Asumimos que conocemos:

- Rendimientos (K)
- Parte del modelo cinético $(r(\xi))$

$$r(\xi) = H(\xi)\rho(\xi)$$

Conocido $(M \times r)$ Desconocido $(r \times 1)$

Ej: $r = \mu \cdot x$

Asumimos que medimos *on-line*:

- Dilución (D)
- Tasas de alimentación (F)
- Tasa de salida gaseosa (Q)
- Todo el vector de estados (ξ)

(Por observador asintótico o exponencial)

Estimación de tasas: definición general

El objetivo es estimar la parte no conocida de las tasas (ρ):

$$\dot{\hat{\xi}} = KH(\xi)\,\hat{\rho} - D\xi - Q + F + \Omega\left(\xi - \hat{\xi}\right)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = [KH(\xi)]^T\Gamma(\xi - \hat{\xi})$$

$\hat{\xi}$ estados estimados

Ω matriz de ganancias de $N \times N$

Γ matriz de ganancias $N \times N$

$\hat{\rho}$ tasa estimada $r \times 1$

Estimación de tasas: definición general

Definimos los errores:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\xi} &= \xi - \hat{\xi} \\ \tilde{\rho} &= \rho - \hat{\rho}\end{aligned}\right\} \quad e = \begin{bmatrix}\tilde{\xi} \\ \tilde{\rho}\end{bmatrix}$$

Luego:

$$\dot{\tilde{\xi}} = KH\rho - D\xi - Q + F - \left(KH\hat{\rho} - D\xi - Q + F + \Omega\left(\xi - \hat{\xi}\right)\right)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = \dot{\rho} - [KH]^T\Gamma(\xi - \hat{\xi})$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\tilde{\xi}} &= KH\tilde{\rho} - \Omega\tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\rho}} &= \dot{\rho} - H^TK^T\Gamma\tilde{\xi}\end{aligned}\right\} \quad \dot{e} = \begin{bmatrix}-\Omega & KH \\ -H^TK^T\Gamma & 0\end{bmatrix} e + \nu$$

$$\nu = \begin{bmatrix}0 \\ \dot{\rho}\end{bmatrix}$$

<u>Teorema</u>:

Se debe cumplir que

$$\Omega^T\Gamma + \Gamma\Omega < 0$$

Ej:

$$\Omega = diag\{-\omega_i\} \quad \Gamma = diag\{\gamma_j\} \quad \omega_i, \gamma_j \in \mathbb{R}^+$$

Y persistencia de excitación en KH

Ejemplo

$$S \longrightarrow X + P$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{s}\\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -k_1\\ k_2\end{bmatrix} r - D\begin{bmatrix}x\\ s\\ p\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ Ds_{in}\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 0\\ Q\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\xi}} = KH(\xi)\,\hat{\rho} - D\xi - Q + F + \Omega\left(\xi - \hat{\xi}\right)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = [KH(\xi)]^T\Gamma(\xi - \hat{\xi})$$

$$r = \mu(x,s,p)\cdot x$$

$$H(\xi) = x \qquad \rho(\xi) = \mu(x,s,p)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}\\ \dot{\hat{s}}\\ \dot{\hat{p}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -k_1\\ k_2\end{bmatrix} \hat{\mu}x - D\begin{bmatrix}x\\ s\\ p\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ Ds_{in}\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 0\\ Q\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_1(x-\hat{x})\\ \omega_2(s-\hat{s})\\ \omega_3(p-\hat{p})\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma_1 x(x-\hat{x}) - \gamma_2 k_1 x(s-\hat{s}) + \gamma_3 k_2 x(p-\hat{p})$$

Ejemplo

$$S \longrightarrow X + P$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} r - D \begin{bmatrix} x \\ s \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D s_{in} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\xi}} = KH(\xi)\,\hat{\rho} - D\xi - Q + F + \Omega\left(\xi - \hat{\xi}\right)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = [KH(\xi)]^T \Gamma(\xi - \hat{\xi})$$

$$r = \mu(x, s, p) \cdot x$$

$$H(\xi) = x \qquad\qquad \rho(\xi) = \mu(x, s, p)$$

Si puedo reducir el sistema:

$$\dot{x} = \mu \cdot x - Dx$$

$$H(\xi) = x \qquad \rho(\xi) = \mu \qquad K = 1$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mu} \cdot x - Dx + \omega(x)(x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma(x) x (x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\omega(x) & x \\ x\gamma(x) & 0 \end{bmatrix} e + \nu$$

Ejemplo

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mu} \cdot x - Dx + \omega(x)(x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma(x)x(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\omega(x) & x \\ -x\gamma(x) & 0 \end{bmatrix} e + \nu$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega(x)$$

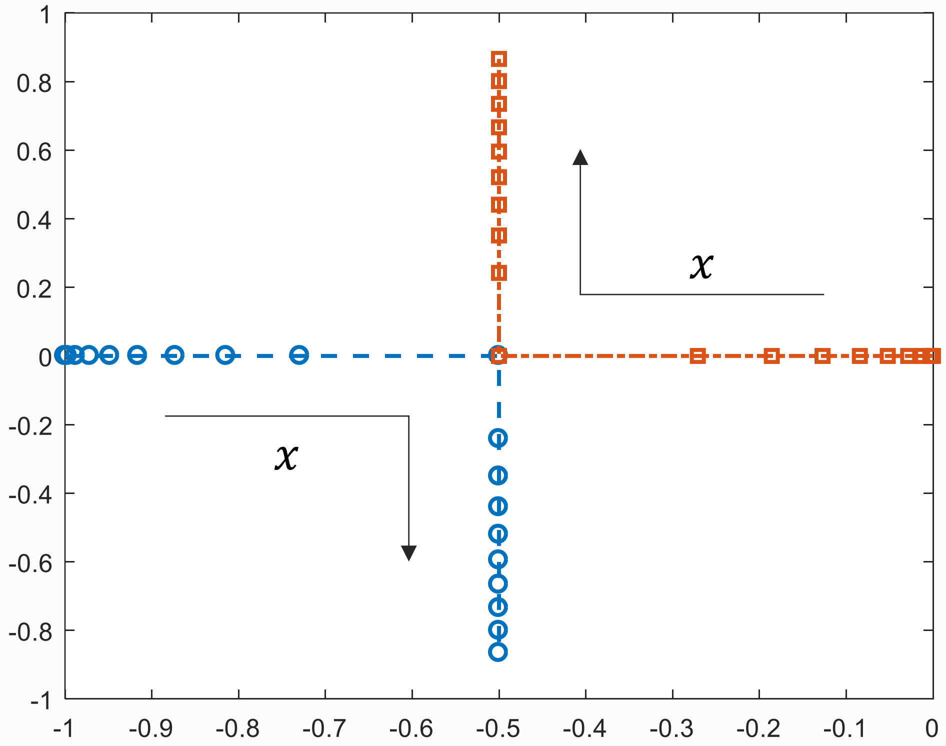
$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma(x)x^2$$

<u>ω y γ constantes</u>

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega_1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma_1 x^2$$

Puede volverse muy oscilatorio



Ejemplo

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mu} \cdot x - Dx + \omega(x)(x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma(x)x(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\omega(x) & x \\ -x\gamma(x) & 0 \end{bmatrix} e + \nu$$

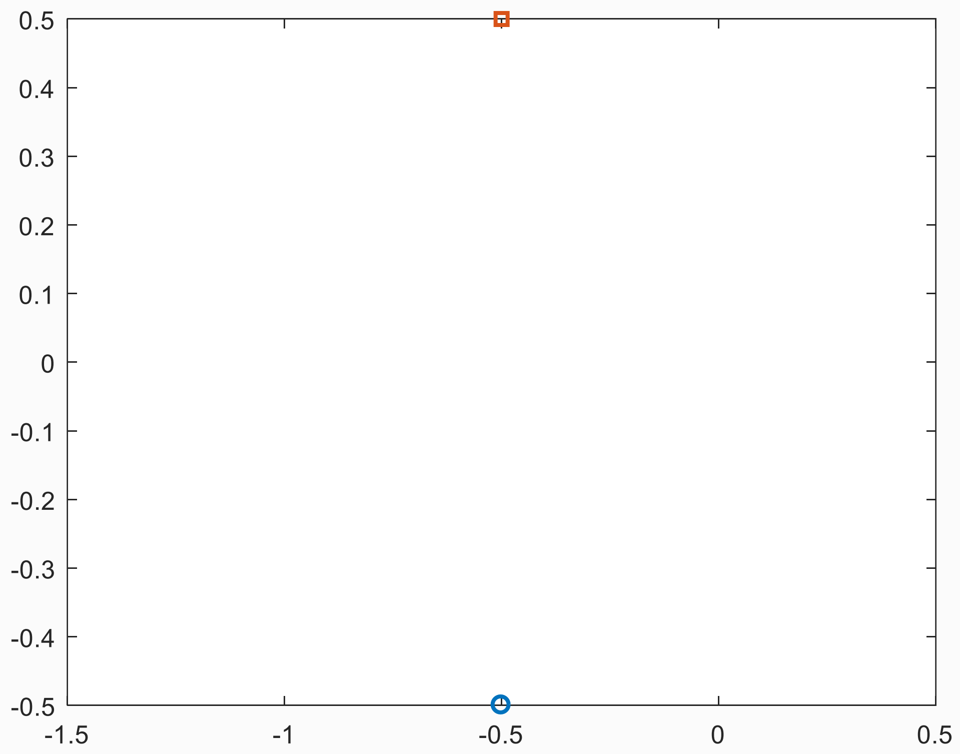
$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega(x)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma(x)x^2$$

<u>γ inverso a x^2</u>

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega_1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\gamma_1}{x^2} x^2$$



Ejemplo

$$\dot{\hat{x}} = \hat{\mu} \cdot x - Dx + \omega(x)(x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \gamma(x)x(x - \hat{x})$$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\omega(x) & x \\ -x\gamma(x) & 0 \end{bmatrix} e + \nu$$

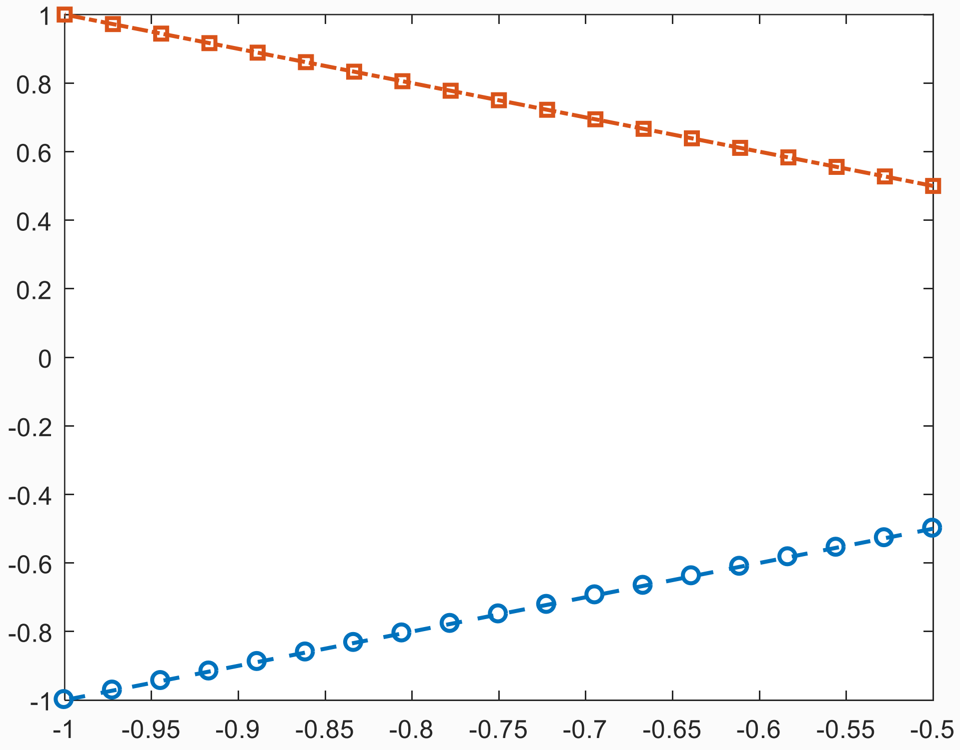
$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega(x)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma(x)x^2$$

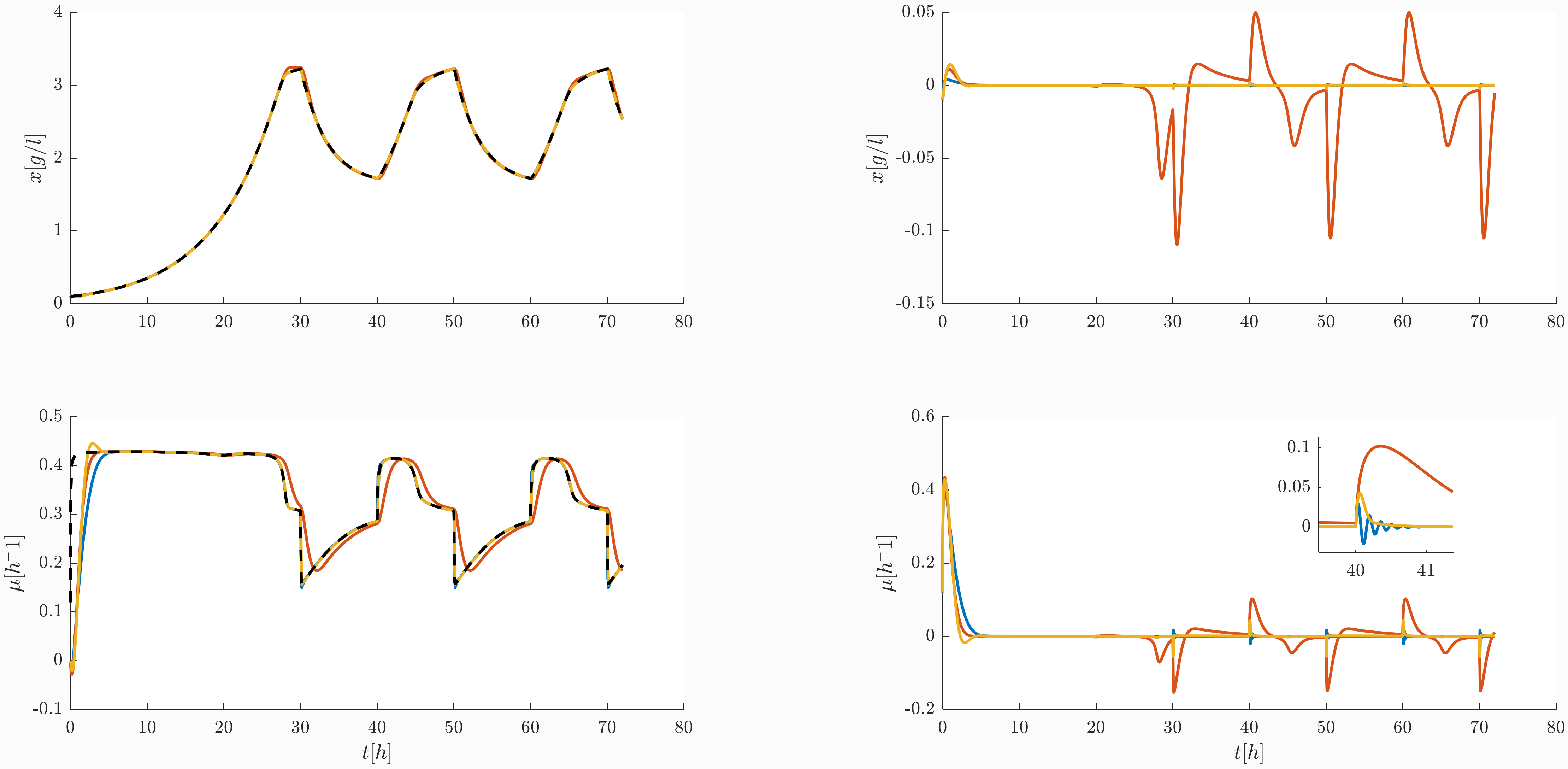
<u>ω proporcional a x</u>

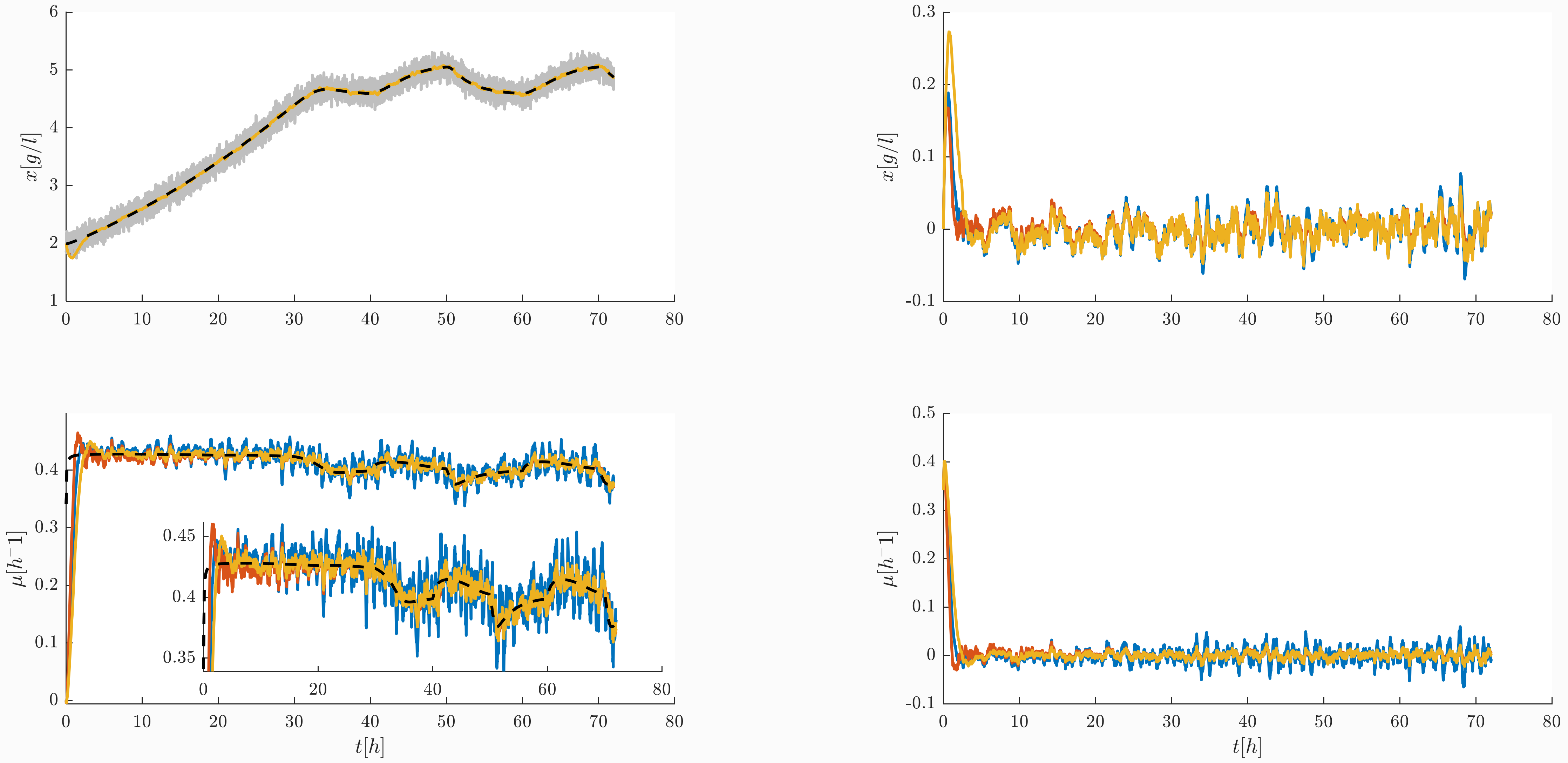
$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\omega_1 x$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \gamma_1 x^2$$



Ejemplo




x[g/l]
x[g/l]
μ[h−1]
μ[h−1]
t[h]
t[h]