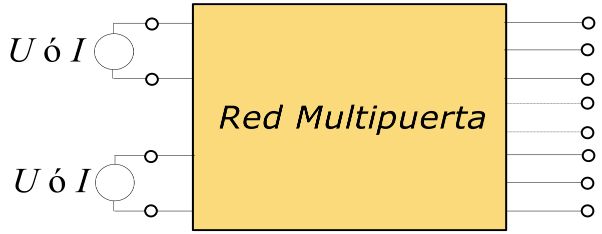
Cuadripolos

MATRIZ DE ADMITANCIA INDEFINIDA

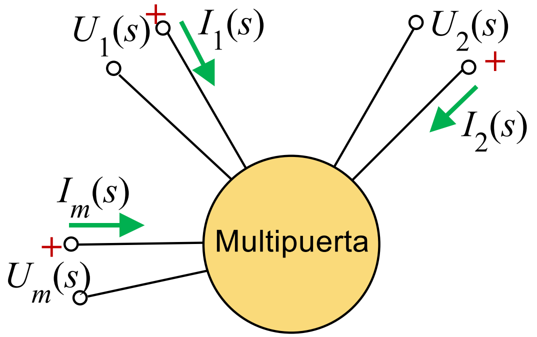
Conceptos generales

- El concepto de red multipuerta puede aplicarse a cualquier red que pueda considerarse como una *caja negra* con *p* pares de terminales de entrada donde se conectan los generadores independientes, y *q* pares de terminales de salida, donde se conectan las cargas (las cuales pueden ser otras redes multipuerta).



- En particular, se han estudiado en detalle las redes bipuerta o cuadripolos, con dos pares de terminales (un par de terminales de entrada y otro de salida); es decir circuitos con cuatro terminales tomados de dos en dos.

- Sin embargo, los resultados podrían generalizarse para circuitos con *m* pares de terminales.



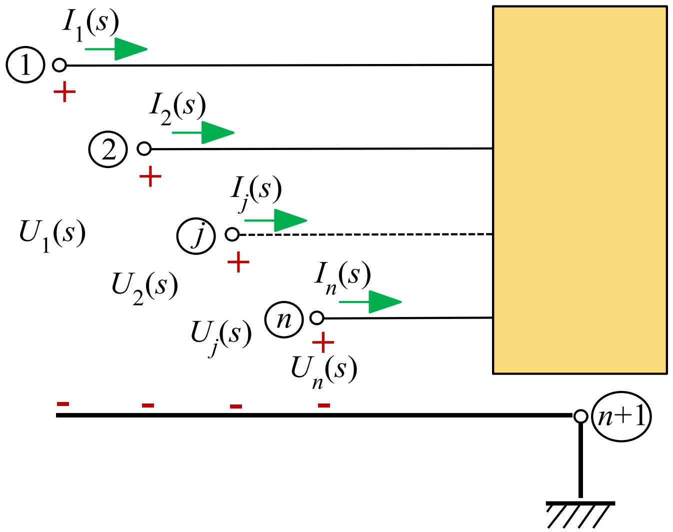
$$z_{jk}(s) = \left.\frac{U_j(s)}{I_k(s)}\right|_{\text{demás corrientes=0}} \qquad y_{jk}(s) = \left.\frac{I_j(s)}{U_k(s)}\right|_{\text{demás tensiones=0}}$$

Matriz de Admitancia Indefinida

- La descripción de las redes mediante puertas (pares de terminales) solo es necesaria cuando hay que realizar conexiones exteriores por terminales tomados de a pares. Sin embargo, esta condición no es estrictamente necesaria.

- Es más práctico entonces una descripción de la red, desde el punto de vista del comportamiento externo, como una red multiterminal en vez de como una red multipuerta.

- La ventaja más importante de tratar a una red o dispositivo atendiendo a sus terminales es que no se adquiere un compromiso previo acerca de cómo se aparean o agrupan los terminales.

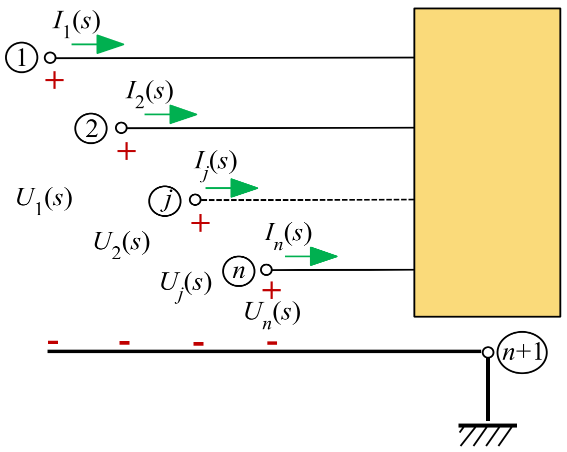


- Una red multiterminal es una generalización de una red multipuerta.

- Una red con *n* puertas, donde la tensión de cada puerta tiene un nodo común, es igual a una red de *n+1* terminales, siendo el terminal *(n+1)* el común.

Matriz de Admitancias Indefinida

- La matriz de admitancias que caracteriza a una red multiterminal se denomina *matriz de admitancias indefinida* (MAI).
- Supongamos tener una red conexa, de *n* terminales que sea lineal y que no contenga ningún generador independiente.
- Apliquemos a la red *n* tensiones exteriores $U_1(s)$, $U_2(s)$, .., $U_j(s)$, .., $U_n(s)$, respecto a un nodo *exterior* adoptado como nodo de referencia (*tierra*).



- Evidentemente para esta red se satisface la primera Ley de Kirchhoff.

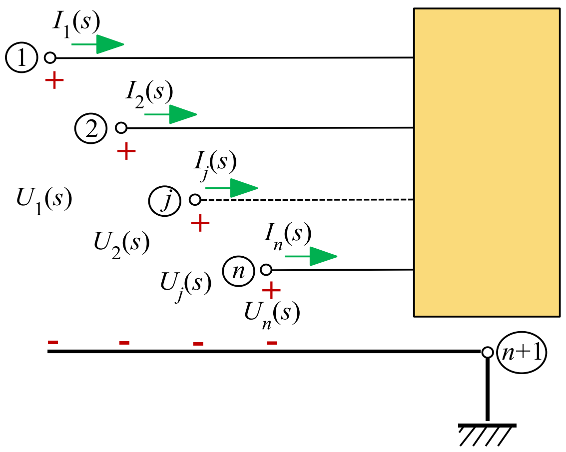
$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0$$

- Es posible expresar las corrientes de cada terminal en función de las tensiones terminales, respecto del nodo común. Los coeficientes de la matriz son admitancias en cortocircuito.

$$\begin{vmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \\ I_n(s) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) & & y_{1n}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) & & y_{2n}(s) \\ & & & \\ y_{n1}(s) & y_{n2}(s) & & y_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \\ U_n(s) \end{vmatrix}$$

$$y_{jk} = \left. \frac{I_j(s)}{U_k(s)} \right|_{\text{demás terminales al nodo de referencia}}$$

Matriz de Admitancias Indefinida



- La matriz resultante se denomina *matriz de admitancias indefinida*.

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y_i} \cdot \mathbf{U}$$

Propiedades

- Si se desarrollan en forma explícita las expresiones de la MAI:

$$I_1(s) = y_{11}\,U_1(s) + y_{12}\,U_2(s) + \dots + y_{1n}\,U_n(s)$$
$$I_2(s) = y_{21}\,U_1(s) + y_{22}\,U_2(s) + \dots + y_{2n}\,U_n(s)$$
$$.$$
$$I_n(s) = y_{n1}\,U_1(s) + y_{n2}\,U_2(s) + \dots + y_{nn}\,U_n(s)$$

- Sumando miembro todas las ecuaciones, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(s) = [y_{11} + y_{21} + \dots + y_{n1}]U_1(s) + [y_{12} + y_{22} + \dots + y_{n2}]U_2(s) + \dots + [y_{1n} + y_{2n} + \dots + y_{nn}]U_n(s)$$

- Aplicando la primera Ley de Kirchhoff, $\sum_{i=1}^{n} I_i(s) = 0$
- Si se suponen cortocircuitados al nodo común todos los terminales menos el k-ésimo, al cual se le aplica un generador de tensión U_k, entonces $U_j(s) = 0$ y $U_k(s) \neq 0$ para $j \neq k$. Por lo tanto:

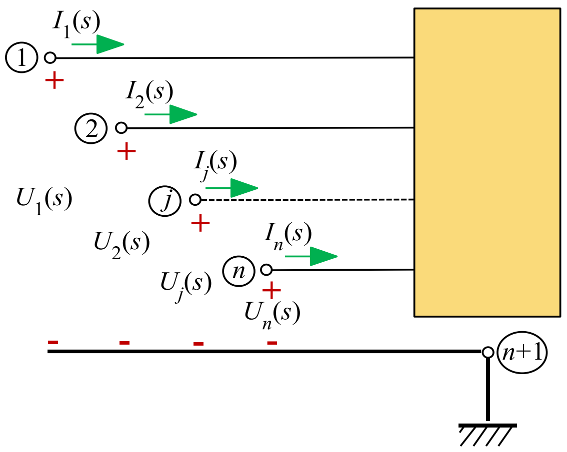
$$[y_{1k} + y_{2k} + \dots + y_{nk}]U_k(s) = 0 \qquad \text{con} \qquad U_k(s) \neq 0$$

La suma de todos los elementos de una columna de la matriz de admitancias indefinida es nula.

Matriz de Admitancias Indefinida

- La matriz resultante se denomina *matriz de admitancias indefinida*.

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y_i} \cdot \mathbf{U}$$



Propiedades

- Si se desarrollan en forma explícita las expresiones de la MAI:

$$I_1(s) = y_{11}\,U_1(s) + y_{12}\,U_2(s) + ... + y_{1n}\,U_n(s)$$
$$I_2(s) = y_{21}\,U_1(s) + y_{22}\,U_2(s) + ... + y_{2n}\,U_n(s)$$
$$.$$
$$I_n(s) = y_{n1}\,U_1(s) + y_{n2}\,U_2(s) + ... + y_{nn}\,U_n(s)$$

- Si ahora se supone que se dejan todos los terminales abiertos, excepto el j-ésimo al cual se le aplica una tensión $U_j(s)$, las corrientes de todos los demás terminales serán nulas por estar abiertos. Es decir, $I_i(s) = 0$ para $i \neq k$.

- Por aplicación de la primera Ley de Kirchhoff, entonces $I_j(s)$ también será nula

- Al ser una red conexa, y ser las corrientes nulas, entonces la tensión de los demás terminales será igual a $U_j(s)$.

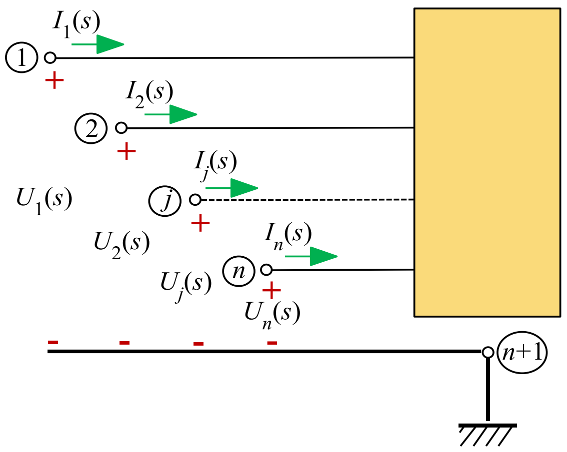
- Tomando una corriente cualquiera,

$$I_j(s) = y_{j1}U_1(s) + y_{j2}U_2(s) + ... + y_{jj}U_j(s) .... + y_{jn}U_n(s) \Rightarrow I_j(s) = \left[y_{j1} + y_{j2} + ... + y_{jk} .... + y_{jn} \right] U_j(s) = 0 \quad con \quad U_j(s) \neq 0$$

La suma de todos los elementos de una fila de la matriz de admitancias indefinida es nula.

MAI y Matriz de admitancias en cortocircuito

- Realizar una red de *n* puertas con un terminal común, a partir de una red de *(n+1)* terminales resulta sencillo, conocida la MAI de esta red.
- Si se toma como terminal de referencia arbitrario el terminal que va a ser el común, por ejemplo, el *n+1*, su tensión será nula. Por lo tanto, su columna (la *n+1*) puede suprimirse.
- A su vez, su corriente (por la 1º Ley de Kirchhoff) es conocida y puede eliminarse su fila correspondiente.



Para hacer que uno de los terminales de una red multiterminales sea el terminal común de una red de n puertas puesta a tierra, basta suprimir la fila y la columna correspondiente a dicho terminal de la matriz de admitancias indefinida.

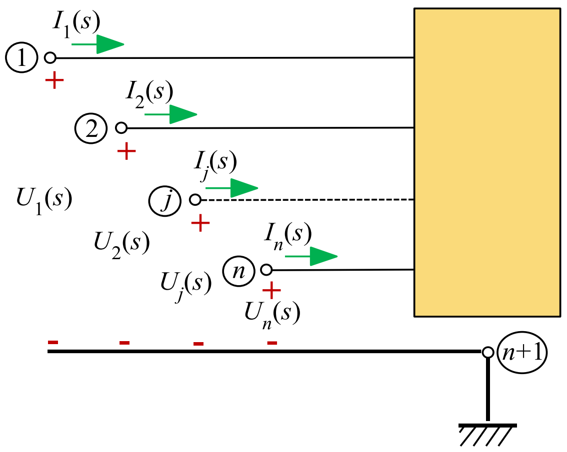
Operación inversa

Dada la matriz de admitancias en cortocircuito de una red de n puertas con terminal común, se le agrega a dicha matriz otra fila, cuyos elementos sean las sumas, cambiadas de signo, de todos los elementos de cada columna. Luego se agrega otra columna, cada uno de cuyos elementos es igual a la suma, cambiada de signo, de todos los elementos de la fila correspondiente

Operaciones con MAI

Redes en paralelo

- La MAI de dos redes conectadas en paralelo, es igual a la suma de las MAI de cada una de las redes, suponiendo que ambas redes tienen el mismo terminal común como referencia para las tensiones.
- No es necesario que las dos redes tengan el mismo número de terminales, ya que a la matriz que posea menor número de terminales se le agregan filas y columnas con elementos nulos.

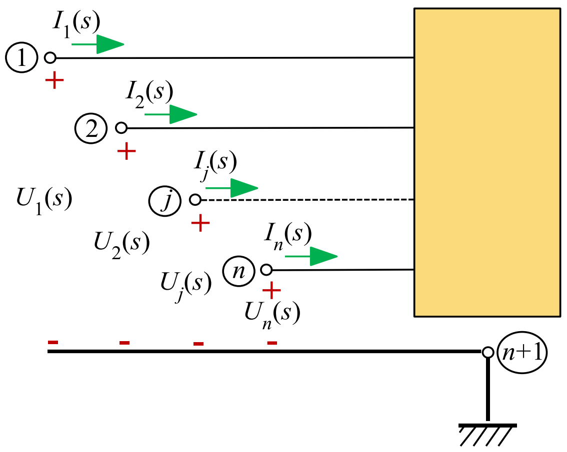


Union de terminales

- Si se unen dos terminales de una red de *n* terminales, las dos corrientes se suman y las tensiones son iguales.
- Por lo tanto, la MAI de la red de *n-1* terminales se obtiene sumando las dos filas y las dos columnas correspondientes de la matriz original.
- La suma sustituye a las dos filas y columnas involucradas.
- Este proceso es extensible a más de dos terminales.

Operaciones con MAI

Supresión de terminales



- Se denomina supresión de un terminal al procedimiento para pasar un nodo terminal a ser un nodo interno de la red.
- Al pasar a ser un nodo interno de la red, sin vinculo exterior, la corriente del mismo será nula.
- Si este nodo es el n-ésimo nodo, es posible obtener la expresión de su tensión a partir de la ecuación *$I_n(s)=0$.*

$$I_n(s)=0=y_{n1}\,U_1(s)+y_{n2}\,U_2(s)+....+y_{nj}\,U_j(s)....+y_{nn}\,U_n(s)$$

$$U_n(s)=\frac{1}{y_{nn}}\left[-y_{n1}\,U_1(s)-y_{n2}\,U_2(s)-....-y_{nj}\,U_j(s)....-y_{n(n-1)}\,U_{n-1}(s)\right]$$

- Generalizando este procedimiento a nivel matricial, si el terminal b es el que se desea suprimir, es posible dividir la MAI original en dos submatrices:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{I_a}\\ \mathbf{I_b}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y_{aa}} & \mathbf{Y_{ab}}\\ \mathbf{Y_{ba}} & \mathbf{Y_{bb}}\end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{U_a}\\ \mathbf{U_b}\end{vmatrix}$$

$\mathbf{I_b}$ y $\mathbf{U_b}$: Corrientes y tensiónes de los terminales a suprimir

Operaciones con MAI

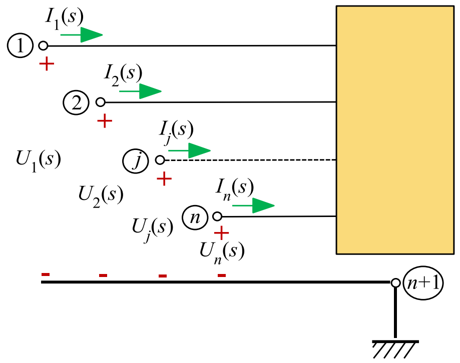
Supresión de terminales

- Por lo expuesto anteriormente respecto a nodos internos, se cumple que

$$\sum \mathbf{I_b} = 0$$

- Por lo tanto, es posible escribir que

$$\begin{cases} \mathbf{I_a} = \mathbf{Y_{aa}} \cdot \mathbf{U_a} + \mathbf{Y_{ab}} \cdot \mathbf{U_b} \\ \mathbf{I_b} = \mathbf{Y_{ba}} \cdot \mathbf{U_a} + \mathbf{Y_{bb}} \cdot \mathbf{U_b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{U_b} = -\mathbf{Y_{bb}^{-1}} \cdot \mathbf{Y_{ba}} \cdot \mathbf{U_a}$$



$$\begin{vmatrix} \mathbf{I_a} \\ \mathbf{I_b} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y_{aa}} & \mathbf{Y_{ab}} \\ \mathbf{Y_{ba}} & \mathbf{Y_{bb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{U_a} \\ \mathbf{U_b} \end{vmatrix}$$

- Reemplazando U_b en la primera ecuación,

$$\mathbf{I_a} = \left(\mathbf{Y_{aa}} - \mathbf{Y_{ab}} \cdot \mathbf{Y_{bb}^{-1}} \cdot \mathbf{Y_{ba}} \right) \cdot \mathbf{U_a}$$

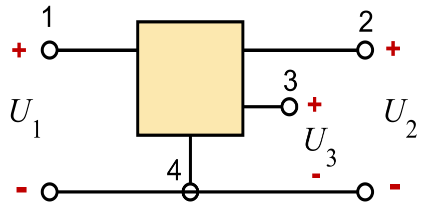
- Por lo tanto, la nueva MAI resulta

$$\boxed{\mathbf{Y}_{indefinida} = \mathbf{Y_{aa}} - \mathbf{Y_{ab}} \cdot \mathbf{Y_{bb}^{-1}} \cdot \mathbf{Y_{ba}}}$$

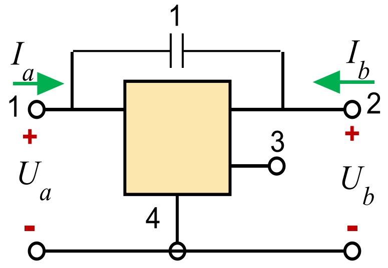
MAI - Ejemplo

En la figura **(a)** se muestra una red de cuatro terminales conectada como de tres puertas con terminal común. Las ecuaciones en cortocircuito de esta red de tres puertas son las que se indican matricialmente.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

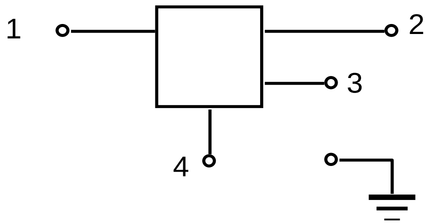
Se desea conectar un condensador unidad entre los terminales 1 y 2, como se indica en la figura **(b)**.

Hallar la matriz de las admitancias en cortocircuito de la red cuando se considera como bipuerta, siendo las puertas las indicadas en la figura **(b)**.

<u>Paso 1</u>

Primero se debe hallar la matriz de admitancia indefinida de la red original, aplicando las propiedades de suma de filas y columnas nulas de la MAI

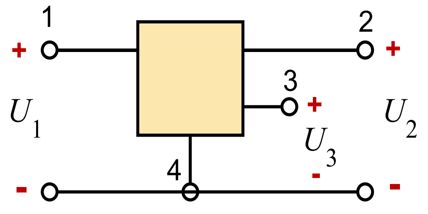
$$[Y_{IND}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



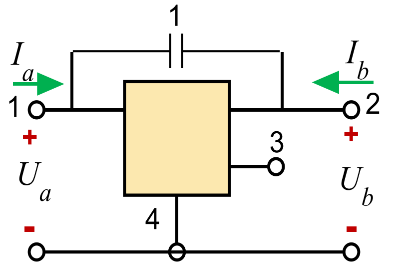
MAI - Ejemplo

<u>Paso 2: Supresión del terminal 3</u>

El terminal 3 pasa a ser un nodo interno de la red, es decir, la corriente del terminal 3 será nula, pudiendo despejarse la tensión U_3 en función de las tensiones de los otros nodos y sustituir el resultado en las restantes ecuaciones, quedando entonces n-1 ecuaciones



(a)



(b)

$$MAI = [Y_{aa}] - [Y_{ab}] \cdot [Y_{bb}]^{-1} \cdot [Y_{ba}]$$

$$[Y_{aa}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad [Y_{ab}] = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad [Y_{ba}] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad [Y_{bb}] = [4]$$

La MAI de la red de *n-1* terminales resultante será

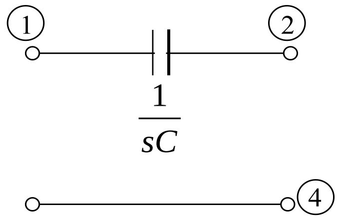
$$[Y_{IND}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

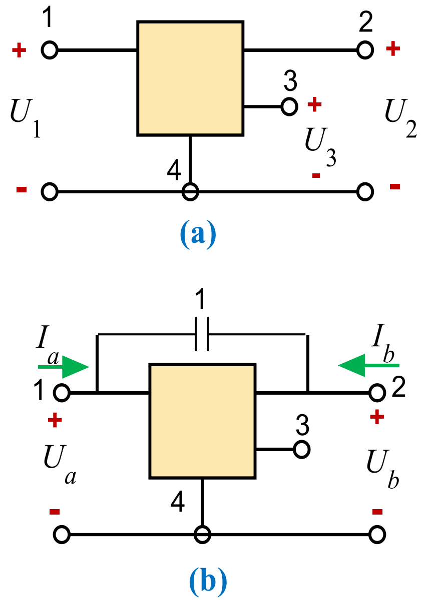
$$[Y_{IND}] = [Y_{aa}] - [Y_{ab}] \cdot [Y_{bb}]^{-1} \cdot [Y_{ba}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix}$$

MAI - Ejemplo

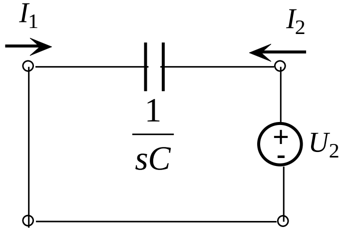
Paso 3: Matriz de Y del cuadripolo C

El capacitor de valor C=1 entre los terminales 1 y 2 puede verse como un dipolo:





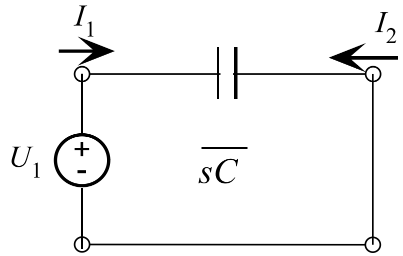
Parámetros para U_1=0



$$I_1 = \frac{-U_2}{\frac{1}{sC}} = -sC\,U_2 \quad \therefore \quad y_{12} = -s$$

$$I_2 = \frac{U_2}{\frac{1}{sC}} = sC\,U_2 \quad \therefore \quad y_{22} = s$$

Parámetros para U_2=0



$$I_2 = \frac{-U_1}{\frac{1}{sC}} = -sC\,U_1 \quad \therefore \quad y_{21} = -s$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\frac{1}{sC}} = sC\,U_1 \quad \therefore \quad y_{11} = s$$

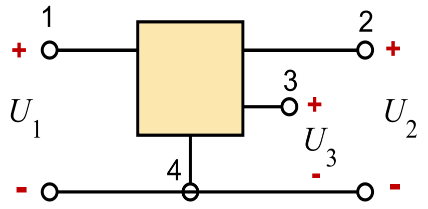
$$\left[Y_{INDcapacitor}\right] = \begin{bmatrix} s & -s & 0 \\ -s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MAI - Ejemplo

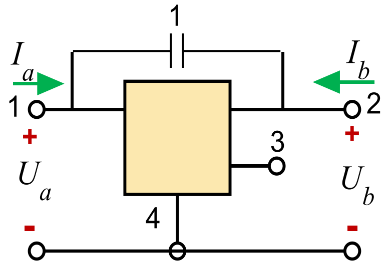
Paso 4: Matriz equivalente

La matriz de admitancias indefinida al conectar el capacitor entre los terminales 1 y 2, resulta sumando las respectivas matrices de admitancias

$$\left[Y_{INDequiv}\right]=\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} s & -s & 0 \\ -s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+4 & -s-\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -s-\frac{7}{2} & s+\frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

Paso 5: Matriz de Y de cortocircuito con terminal 4 en nodo común

La matriz de admitancias en cortocircuito para el Terminal 4 conectado como Terminal común resulta de eliminar la fila y columna correspondiente.

$$\left[Y_{CC4}\right]=\begin{bmatrix} s+4 & -s-\frac{3}{2} \\ -s-\frac{7}{2} & s+\frac{23}{4} \end{bmatrix}$$