Energía del Campo Magnético cuasiestacionario

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

La Energía de campo magnético en función de **H** y **B**

Al producirse el flujo de corriente eléctrica en un determinado circuito se ha consumido energía, parte de ella podrá recuperarse y por lo tanto podemos pensar que estaba almacenada en el **Campo Magnético asociado a la corriente**

La energía magnética es energía cinética

En mecánica expresamos :

$$Uc = \frac{1}{2} m v^2 \qquad\qquad Uc = \frac{1}{2} J \omega^2$$

En el lenguaje de circuitos en vez velocidad será corriente y en vez de inercia o masa será la “ **Inducción” o Inductancia asociada a la energía cinéticas de las cargas móviles.**

$$Uc = \frac{1}{2} L I^2$$

- La energía magnética está afectada por los materiales magnéticos, que funcionan como cargas adicionales móviles

- Se puede considerar la energía que se consume en agrupar Imanes o bien espiras con corrientes , como trabajo de "Agrupamiento" contra las fuerzas de interacción entre corrientes y/o cargas magnéticas de imanes.

- En electrostática encontramos a partir del trabajo de agrupamiento la expresión de la energía en función de la carga y el potencial, y luego la expresión de la energía en función del campo

$$Uc = \frac{1}{2} C V^2 \qquad Ue / vol = \frac{1}{2} D.E$$

•Ahora aceptamos que la energía puede concebirse como acumulada en el campo

- **Definimos Tubo de flujo:**
  - **Contiene una cantidad constante de flujo Φ, de sección recta variable, la magnitud de la densidad de flujo B es inversamente proporcional a la sección**

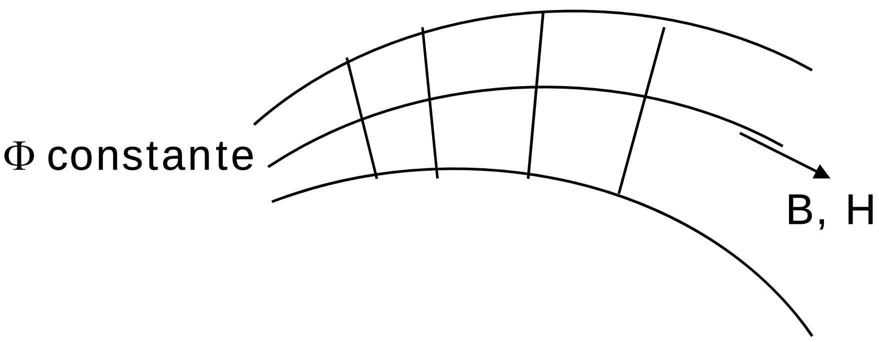
–Cada tubo de flujo se sustituye por un cierto número de pequeños solenoides colocados uno al lado del otro

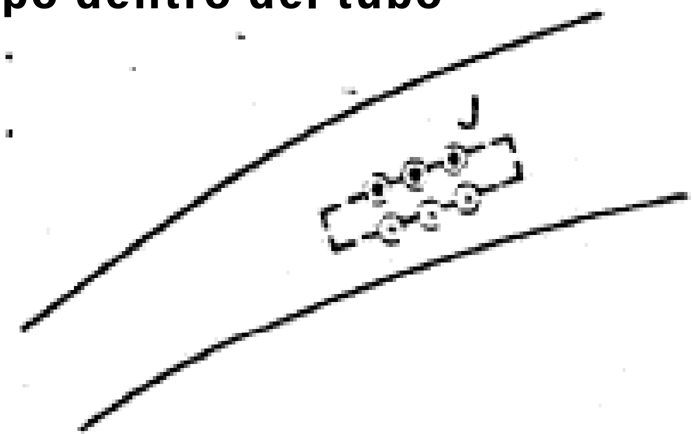
–Dentro de cada solenoide el campo es aproximadamente constante

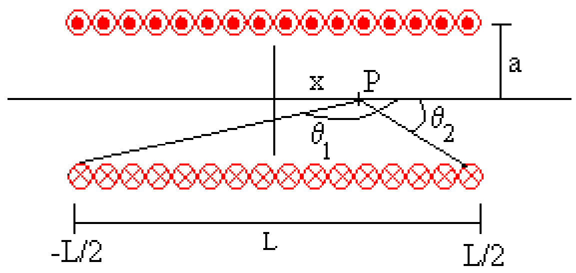
–Estos solenoidse producirán el campo dentro del tubo

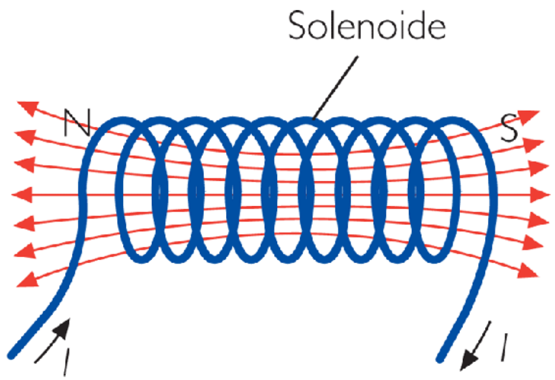
–Cada solenoide con J_l=A / m

–Esto da el valor de $H=J_l$???









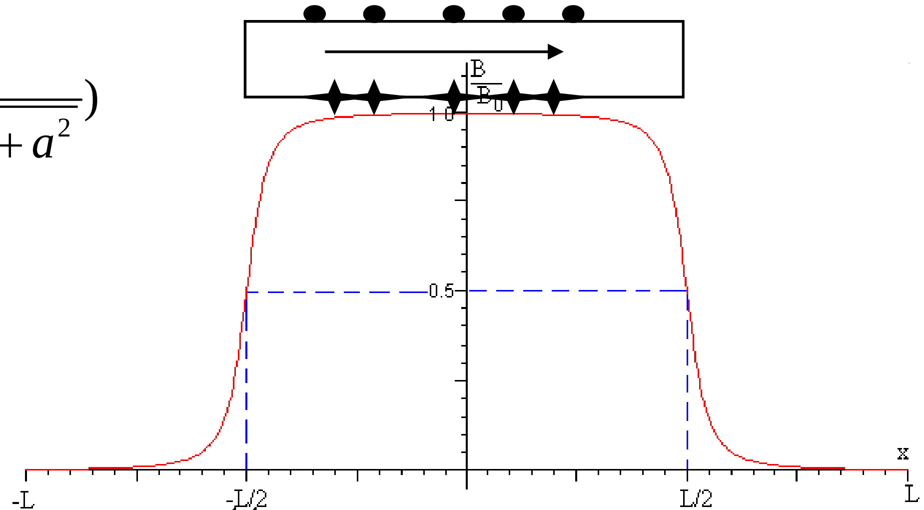
$$H = \frac{NI}{2L}\left[\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\right]$$

$$H = \frac{NI}{2L}\left(\frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + a^2}}\right)$$

Si el solenoide es muy largo comparado con su radio *a* y si el punto P está situado en el centro, tendremos que *los ángulos son cero y el* campo *H* vale entonces

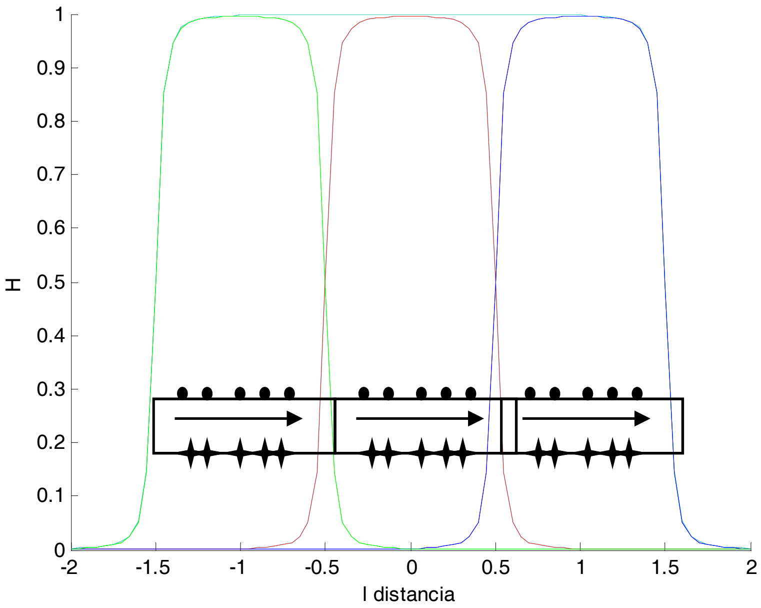
$$H = \frac{NI}{L} = J_l [A/m]$$

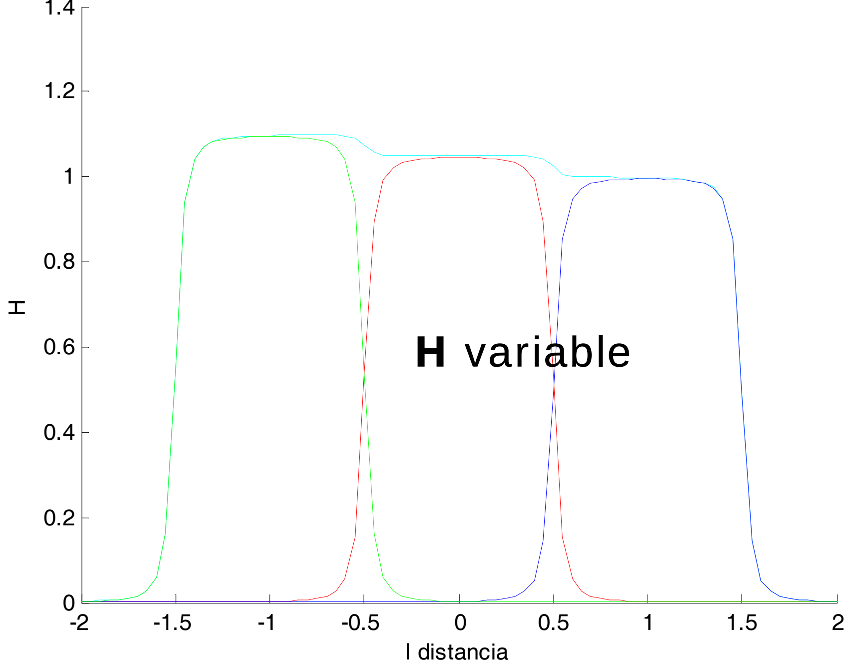
$$H = \frac{NI}{2L}\left(\frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2-x)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2+x)^2 + a^2}}\right)$$

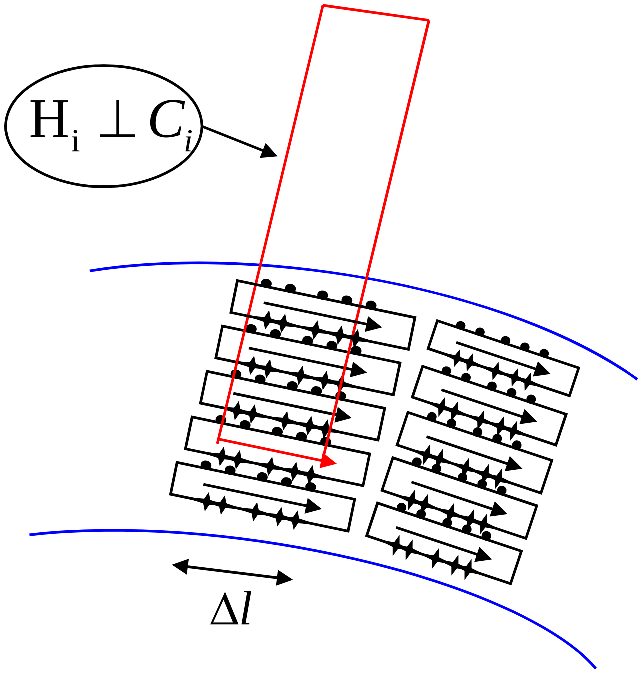


a = L / 20

N.I / L = 1 = J_l





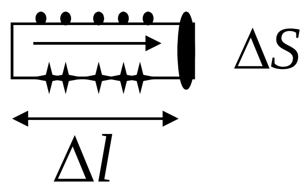


Si suponemos que el solenoide es muy largo comparado con el radio de sus espiras, el campo es aproximadamente uniforme y paralelo al eje en el interior del solenoide y es nulo fuera del solenoide. En esta aproximación es aplicable la ley de Ampère

$$\oint_{Ci} \mathrm{H.dl} = Hi.\Delta l = J_l \Delta l$$

$$H_i = J_l$$

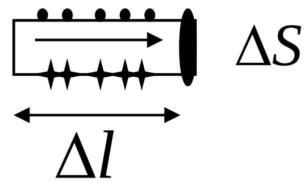
- **Si el solenoide tiene una sección recta y longitud**



- **La Energía por unidad de volumen en el volumen del pequeño solenoide es**

$$\delta U^* = \int I.V.dt$$

$$\delta U^* = \int I.V.dt \qquad NI = J_l.\Delta l$$



$$V = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t}\Delta S \qquad \delta U^* = \int J_l \frac{\partial B}{\partial t}\Delta l.\Delta S.dt$$

$$\frac{\delta U^*}{\Delta l.\Delta S} = \int_0^{Bfinal} J_l.dB = \int_0^{Bfinal} \mathrm{H}.d\mathrm{B}$$

Energía por unidad de volumen

$$U^* = \iiint \left[\int_0^{Bfinal} \mathrm{H}.d\mathrm{B} \right] dv$$

Energía del Campo

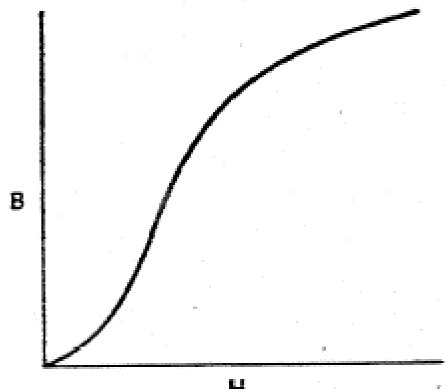
- **Si B es proporcional a H, como sucede en los medios líneales**

$$U^* = \frac{1}{2}\iiint \mathrm{H.B.}dv$$

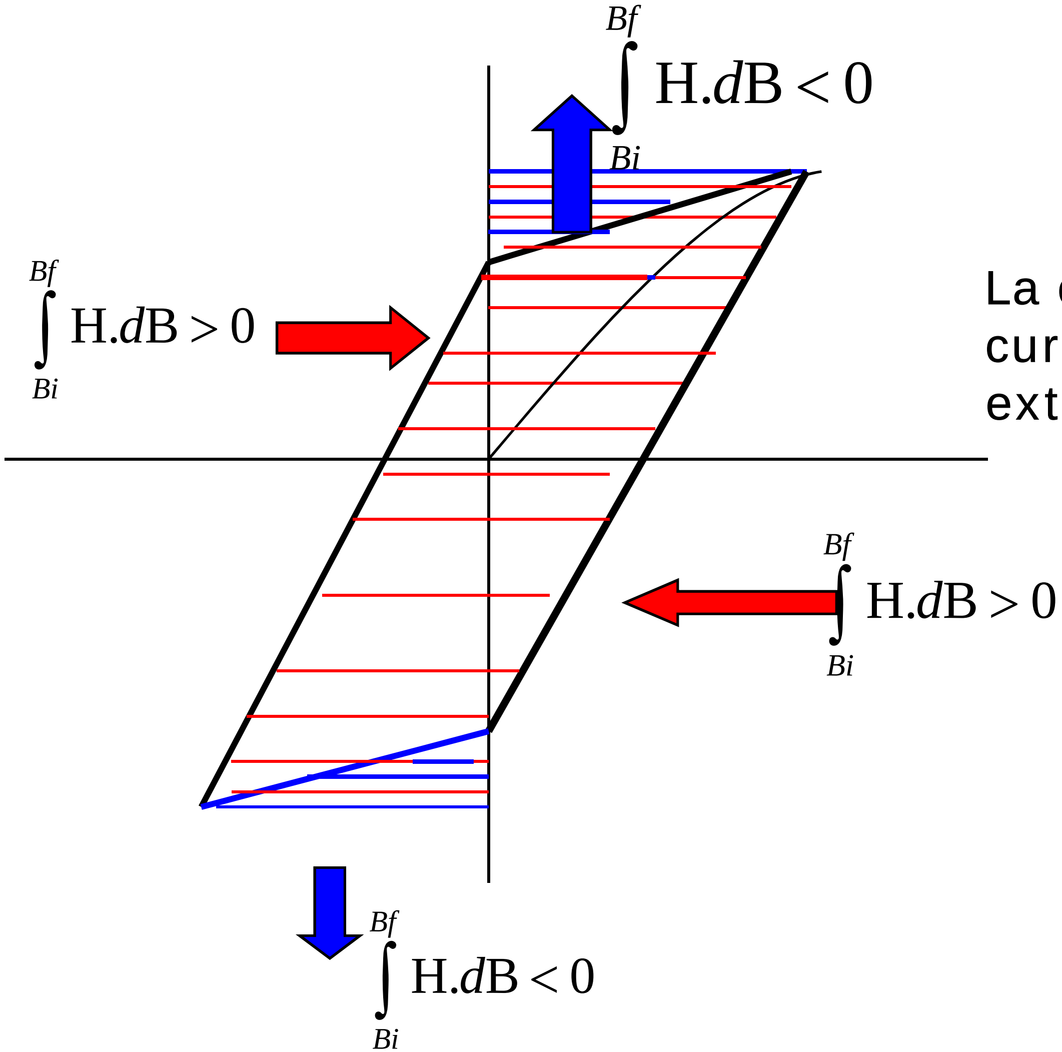
- **En esta ecuación H y B son los valores finales alcanzados en un punto**

Si B no es proporcional a H pero
la función es unívoca la
integral da una solución única

$$\int_{0}^{Bf} \mathrm{H.}d\mathrm{B}$$

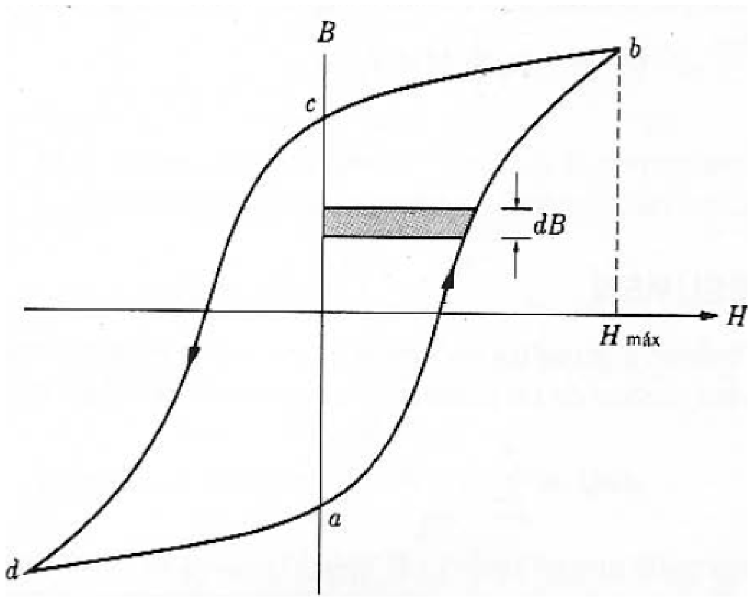


- **Si hay histéresis el valor de la integral depende del estado previo**
- **La pérdida por histéresis es un proceso cíclico viene dada por:**



$$\Delta U^* = \iiint \left[\oint \mathrm{H}.d\mathrm{B} \right] dv$$

La cual es igual al área de la curva de histéresis con la integral extendida a todo el volumen



Energía de campo Magnético en función de la corriente y el flujo, en sistemas lineales.

- Cuando tratamos con circuitos eléctricos es conveniente conocer la energía en función de la corriente.
- Suponemos que estos circuitos se ubican en una región del espacio sin llegar al infinito
- Partimos

$$U^* = \frac{1}{2}\iiint \mathrm{H.B.}dv$$

$$\mathrm{B} = \nabla \times \mathrm{A}$$

$$U^* = \frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{H.}(\nabla \times \mathrm{A}).dv$$

$$div(\mathrm{AxH}) = \mathrm{H.\nabla xA - A.\nabla xH}$$

$$\frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{H.\nabla xA.}dv = \frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{A.}\boxed{\mathrm{\nabla xH}}.dv + \frac{1}{2}\iiint_v div(\mathrm{AxH}).dv$$

$1/r.1/r^2 = 1/r^3$

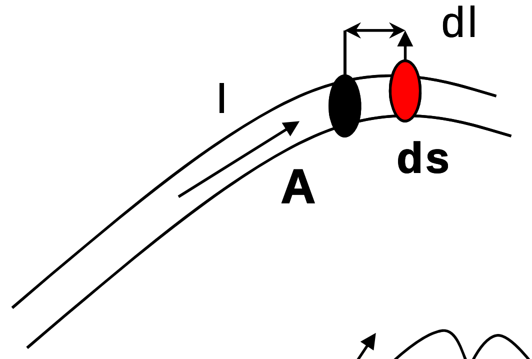
$$U^* = \frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{A.}\boxed{\mathrm{J}}.dv + \cancel{\frac{1}{2}\iint_{s,r\to\infty} \mathrm{AxH.}ds}$$

r^2

0

$$U^* = \frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{A.J.}dv$$

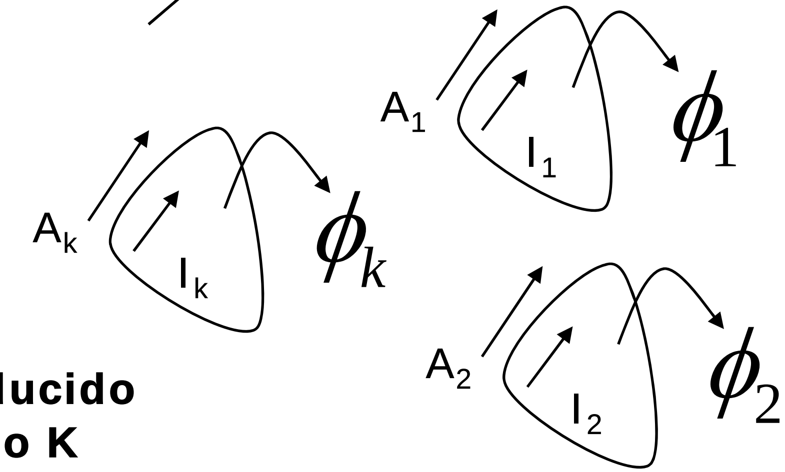
- **En esta ecuación la energía del campo se describe en función de las fuentes de corriente del campo en vez del campo mismo.**
- **En Un Circuito …**



$$U^* = \frac{1}{2}\iiint_v \mathrm{A.J.}ds.dl = \frac{I}{2}\oint \mathrm{A.}dl$$

$$\oint \mathrm{A.}dl = \iint_s \nabla\times\mathrm{A.ds} = \iint_s \mathrm{B.ds} = \phi$$

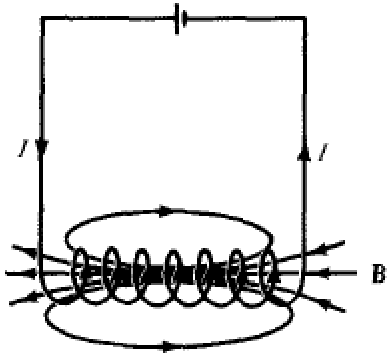
$$U^* = \frac{1}{2}I.\phi$$



- **A_k vector potencial magnético producido por todas las corrientes en el circuito K**
- **Φ_k: es el flujo magnético que abraza a la espira K producido por todas las corrientes no solo por la I_k**

$$\boxed{U^* = \frac{1}{2}\sum_1^n I_k.\phi_k}$$

Ejemplo de Energía almacenada en un Inductor



- **La bobina tiene N vueltas y el flujo total que concatena todas las bobinas es** $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Este flujo es generado por la corriente I

Por lo tanto se suele llamar flujo concatenado a $\lambda = N\Psi$

En medios lineales $\begin{cases} \lambda \propto I \\ \lambda = LI \end{cases}$

L es la constante de proporcionalidad llamada inductancia del *<u>Circuito,</u>*

EL CIRCUITO o parte de este que tenga inductancia se llama INDUCTOR

La Inductancia propia o autoinductancia :

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}}$$

Ante un cambio en la corriente en bornes del Inductor aparece una tensión proporcional a L y a la **derivada de la corriente**

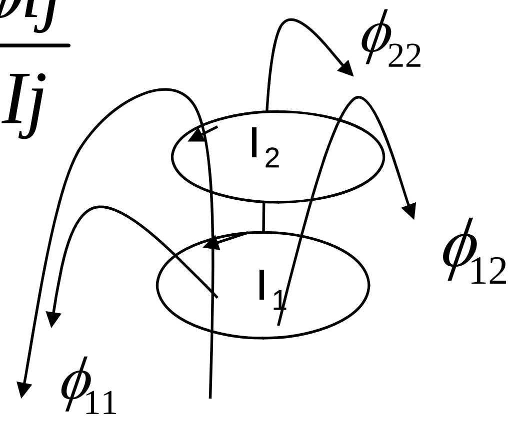
$$U^* = Wm = \frac{1}{2} I.N\psi = \frac{1}{2} I\lambda = \frac{1}{2} LI^2$$

Energía almacenada en el Inductor

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}}$$

Habíamos definido la Inductancias propias y mutuas, cuando hay más de un circuito

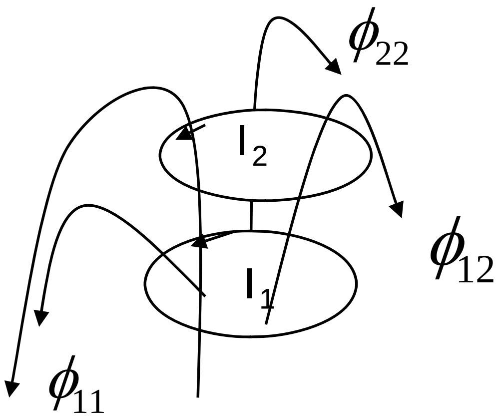
$$L_{ii} = \frac{\phi_{ii}}{I_i} \qquad Lij = Lji = Mij = Mji = \frac{\phi ij}{Ij}$$

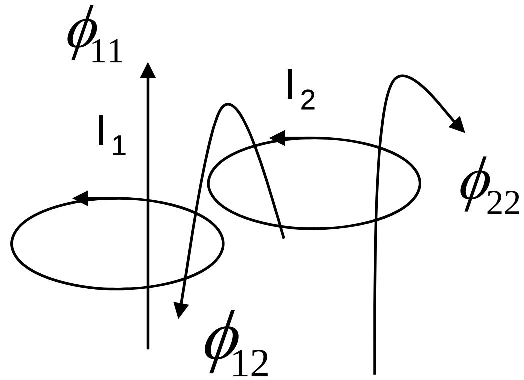


ϕ_{ii} Flujo del circuito ***i*** producido por su propia corriente

ϕ_{ij} Flujo del circuito i producido por la corriente del circuito ***j***

Energía, Acoplamiento mutuo





$$L_{12} > 0$$

$$L_{11} > 0$$
$$L_{22} > 0$$

$$L_{12} < 0$$

El signo de las Inductancias propias <u>SIEMPRE es positivo</u>

El signo de las Inductancias mutuas depende de la ubicación relativa de los circuitos o espiras que se acoplan magnéticamente

Sistema lineal de relación entre flujos de circuitos y corrientes

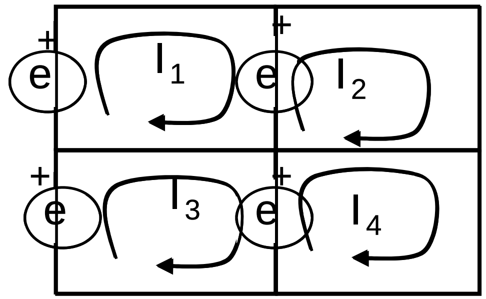
$$\begin{cases} \phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}.I_2 + \ldots L_{1i}.I_i .. + L_{1n}.I_n \\ \phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}.I_2 + \ldots L_{2i}.I_i .. + L_{2n}.I_n \\ \phi_i = L_{i1}I_1 + L_{2i}.I_2 + \ldots L_{ii}.I_i .. + L_{in}.I_n \\ \phi_n = L_{n1}I_1 + L_{n2}.I_2 + \ldots L_{ni}.I_i .. + L_{nn}.I_n \end{cases}$$

En forma MATRICIAL

$$[\phi] = [L]\ .[I]$$

Sistema lineal de relación entre corrientes de malla y tensiones (fem) aplicadas. Si d*espreciamos las resistencia de los circuitos po*demos escribir

$$[e] = \frac{d\phi}{dt} \qquad [e] = [L]\frac{d[I]}{dt}$$



La energía para circuitos lineales y rígidos se puede expresar

$$\frac{1}{2}I_1\phi_1 = \frac{1}{2}I_1(L_{11}I_1 + L_{12}.I_2 + \ldots L_{1i}.I_i\ldots + L_{1n}.I_n)$$

$$\frac{1}{2}I_2\phi_2 = \frac{1}{2}I_2(L_{21}I_1 + L_{22}.I_2 + \ldots L_{2i}.I_i\ldots + L_{2n}.I_n)$$

$$+\quad \frac{1}{2}\phi_i I_i = \frac{1}{2}\ I_i(L_{i1}I_1 + L_{2i}.I_2 + \ldots L_{ii}.I_i\ldots + L_{in}.I_n)$$

$$\frac{1}{2}\phi_n I_n = \frac{1}{2}I_n(L_{n1}I_1 + L_{n2}.I_2 + \ldots L_{ni}.I_i\ldots + L_{nn}.I_n)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} I_i.\phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_i.I_j L_{ij}$$

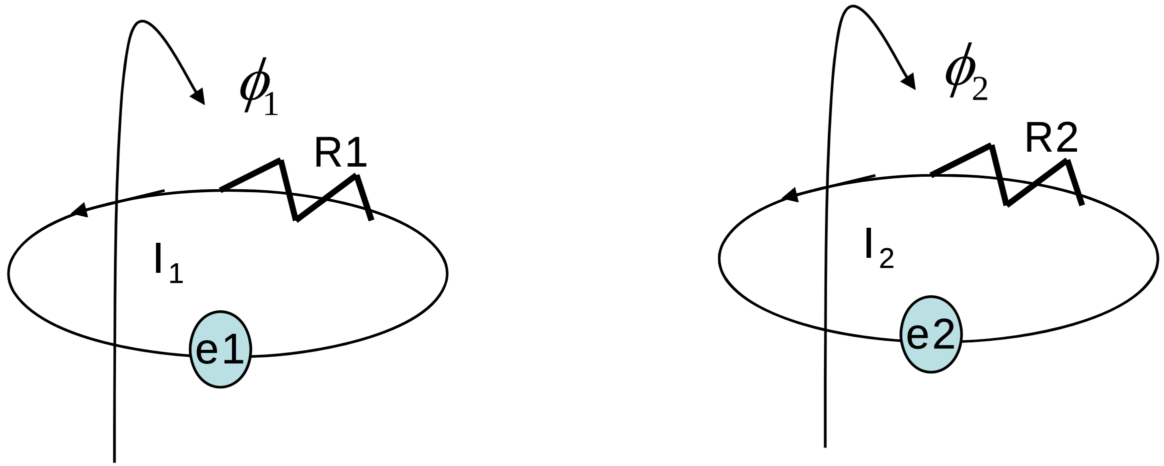
Para un solo circuito

$$\Phi = LI$$

$$U = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$$

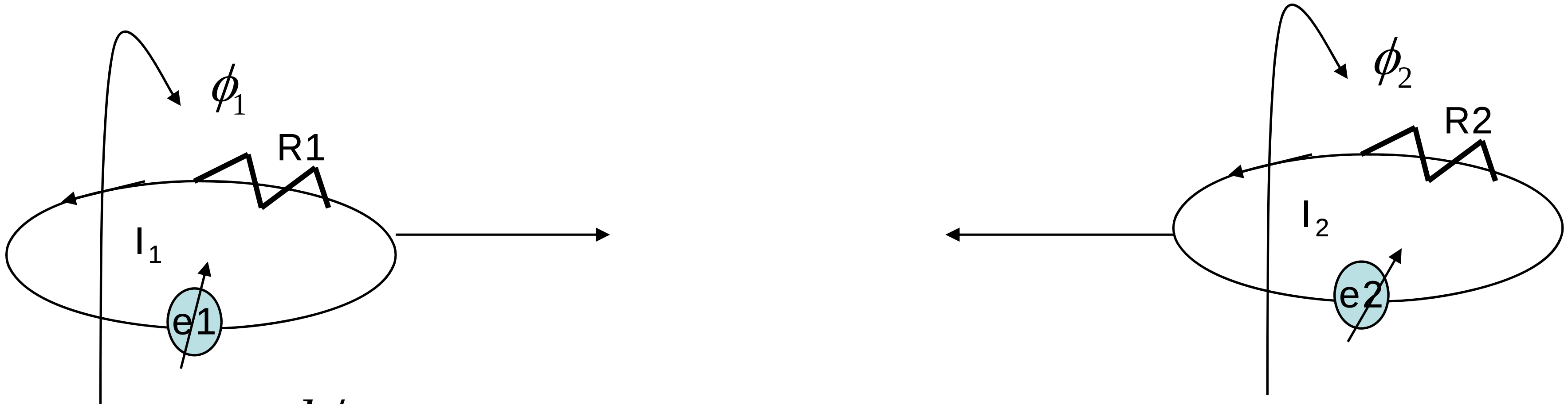
- Cuando los circuitos con corrientes se mueven o las corrientes cambian de valor se inducen ”FEM”
- En este proceso se puede suministrar energía al sistema o tomarla de él
- Estos son los procesos que impulsan las máquinas eléctricas

  - Consideremos 2 bobinas (circuitos) recorridas por corrientes I_1 e $I_{2,}$.
  - Cada bobina se provee de una FEM e1 y e2
  - Estas Fuentes e1 y e2 entregan o absorben ENERGÍA de modo de mantener las corrientes I_1 e I_2 constantes.
  - Φ1 y Φ2 son los flujos totales abarcados por cada bobina
  - R1 y R2 las resistencias de cada bobina



Agrupamiento de circuitos con corrientes

1. **Las dos bobinas están muy alejadas, no hay acoplamiento de flujo entre si.**
2. **Se aproximan**
3. **Las fuentes deben entregar energía para que las corrientes permanezcan constantes**



$$e_1 = \frac{d\phi_1}{dt} + I_1.R_1$$

$$e_2 = \frac{d\phi_2}{dt} + I_2.R_2$$

- **La energía que suministra las Fuentes para mantener I1 e I2 constante es:**

$$\int_o^t e_1.I_1dt + e_2.I_2dt = I_1\int_0^t e_1.dt + I_2\int_0^t e_2.dt =$$

$$= \int_o^t R_1.I^2{}_1dt + R_2.I^2{}_2dt + \int_0^t I_1\frac{d\phi_1}{dt}.dt + \int_0^t I_2\frac{d\phi_2}{dt}.dt =$$

$$R_1.I^2{}_1.t + R_2.I^2{}_2t + I_1.(\phi_1 - \phi_{10}) + I_2.(\phi_2 - \phi_{2o})$$

Flujo inicial

$\phi_{10} = \phi_{11}$ → FLUJO PROPIO DE LA BOBINA 1

$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$ → FLUJO PROPIO + MUTUO DE LA BOBINA 1

$\phi_{20} = \phi_{22}$ → FLUJO PROPIO DE LA BOBINA 2

$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$ → FLUJO PROPIO + MUTUO DE LA BOBINA 1

Agrupamiento de circuitos con corrientes

$$Wfuente = \underbrace{R_1.I^2{}_1.t + R_2.I^2{}_2 t}_{\text{Pérdidas Ohmicas}} + \overbrace{\underbrace{I_1.(\phi_1 - \phi_{10}) + I_2.(\phi_2 - \phi_{2o})}_{\text{Energía de campo + mecánica } (\mathbf{F}_{\text{campo}})}}^{2U^* - 2U_0{}^*}$$

$$U^* = Wcampo = \frac{1}{2} I_1.\phi_1 + \frac{1}{2} I_2.\phi_2$$ **Energía de Campo en estado final**

$$U_0{}^* = \frac{1}{2} I_1.\phi_{10} + \frac{1}{2} I_2.\phi_{20}$$ **Energía de Campo en estado Inicial**

$$I_1.(\phi_1 - \phi_{10}) + I_2.(\phi_2 - \phi_{2o}) = 2U^* - 2U_0{}^*$$ **Energía que entrega La Fuente Despreciando las pérdidas**

Agrupamiento de circuitos con corrientes

- **La energía que suministra las Fuentes se transforma en mitad para incrementar el campo y mitad en trabajo mecánico.**

$$2U^* - 2U_0^* = (U^* - U_0^*) + W_{mecanico}$$

$$U^* - U_0^* = W_{mecanico}$$

$$\phi_{10} = \phi_{11} \longrightarrow L_{11}I_1$$

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \longrightarrow L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$\phi_{20} = \phi_{22} \longrightarrow L_{22}I_2$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} \longrightarrow L_{22}I_2 + L_{21}I_1$$

- **El cambio en la energía del campo expresado en función de las corrientes e inductancias resulta:**

$$U^* - U_0^* = \left(\frac{1}{2}L_{11}I^2{}_1 + \frac{1}{2}L_{12}I_2I_1 + \frac{1}{2}L_{22}I^2{}_2 + \frac{1}{2}L_{21}I_1I_2\right) - \left(\frac{1}{2}L_{11}I^2{}_1 + \frac{1}{2}L_{22}I^2{}_2\right) = \boxed{L_{12}I_2I_1}$$

- La Fuerza o momento de rotación sobre circuitos **rígidos** puede calcularse a partir de la energía magnética
- Supongamos que permitimos que una parte del sistema efectúe un desplazamiento **dr,** bajo la influencia de las fuerzas magnéticas que actúan sobre él, permaneciendo constantes todas las corrientes.
- El trabajo mecánico efectuado por la fuerza **F** que actúa sobre sistema

Ecuación de Balance

$$dW_f = dW_c + dW_{mec} \qquad dW_{mec} = dW_f - dW_c$$

- **dWc** es el cambio de energía de campo magnético del sistema y **dWf** es el trabajo efectuado por las fuentes de energía externas contra la fem inducida para mantener la corriente constante

$$dWc = \frac{1}{2}\sum_i I_i.d\phi_i \;\rightarrow\; \boxed{dWf = 2.dWc} \;\leftarrow\; dW_f = \sum_i I_i.d\phi_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dW_{mec} = dWc} \qquad dW_{mec} = \mathbf{F_c.dr}$$

$$dW_{mec} = dWc$$

$$dW_{mec} = \mathbf{F.dr} = \frac{1}{2}\sum_i I_i . d\phi_i$$

$$\boxed{dWc = \boxed{F_x} .dx + F_y .dy + F_z .dz = \boxed{\frac{\partial W_c}{\partial x}} dx + \frac{\partial W_c}{\partial y} dy + \frac{\partial W_c}{\partial z} dz}$$

- **La fuerza sobre el circuito es el gradiente de la energía magnética cuando I se mantiene constante**

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla W_c}$$

- **En algún caso se puede mantener constante el flujo en vez de la corriente, con lo cual el sistema puede ser considerado aislado, sin conexión a una fuente**

$$dW_f = \sum_i I_i . d\phi_i = 0 \qquad dW_f = dW_c + dW_{mec} \qquad 0 = dW_c + dW_{mec}$$

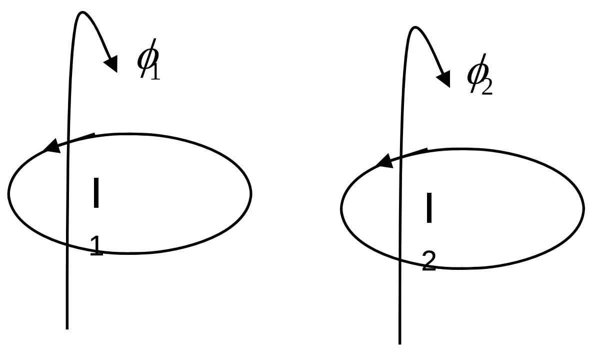
$$dW_{mec} = -dW_c \qquad F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz = -\frac{\partial W_c}{\partial x}dx - \frac{\partial W_c}{\partial y}dy - \frac{\partial W_c}{\partial z}dz$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla W_c}$$

- **Este caso es ideal, donde no se necesita una fuente para mantener la disipación de potencia ($I^2.R$), es como si el alambre fuera superconductor R=0**

$$0 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d(L_{11}.I_1)}{dt} + \frac{d(L_{12}I_2)}{dt}$$

$$0 = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d(L_{21}I_1)}{dt} + \frac{d(L_{22}I_2)}{dt}$$



$$\phi_1 = L_{11}.I_1 + L_{12}I_2 = K1$$

$$\phi_2 = L_{21}.I_1 + L_{22}I_2 = K2$$

- Igual que en el caso electrostático, es necesario expresar en forma analítica la energía del CAMPO, dependiendo de las coordenadas espaciales Wc(x, y, z) o en función de Wc (θ1,θ2,θ3), para obtener la Fuerza o Momento

I constante

$$Wc = \frac{1}{2}\phi I = \frac{1}{2} I.I.L = \frac{1}{2} I^2 L$$

$$W_c = \frac{1}{2} L_{11} I^2{}_1 + \frac{1}{2} L_{12} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_{22} I^2{}_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2$$

Flujo constante

$$Wc = \frac{1}{2}\phi I = \frac{1}{2}\phi \frac{\phi}{L} = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$$

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{\phi_{11}{}^2}{L_{11}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{12}{}^2}{L_{12}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{22}{}^2}{L_{22}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{21}{}^2}{L_{12}}$$

$$dW_{fuente} = dW_{campo} + dW_{mecánica}$$

>0 entrega **>0 aumenta** **>0 F campo trabajo +**

$$\vec{F}.\vec{dl} = dW_{campo}$$

A corriente constante

$$Fx = \frac{\partial W_c}{\partial x} \qquad Fy = \frac{\partial W_c}{\partial y} \qquad Fz = \frac{\partial W_c}{\partial z}$$

Fuerza

$$\tau_1 = \frac{\partial W_c}{\partial \theta_1} \qquad \tau_2 = \frac{\partial W_c}{\partial \theta_2} \qquad \tau_3 = \frac{\partial W_c}{\partial \theta_3}$$

Cupla

$$W_c = \frac{1}{2} L_{11} I^2{}_1 + \frac{1}{2} L_{12} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_{22} I^2{}_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2$$

Energía del Campo

$$\frac{dWc}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{dL_{11}}{d\theta} I^2{}_1 + \frac{1}{2}\frac{dL_{12}}{d\theta} I_2 I_1 + \frac{1}{2}\frac{dL_{22}}{d\theta} I^2{}_2 + \frac{1}{2}\frac{dL_{21}}{d\theta} I_1 I_2$$

Derivada corriente constante

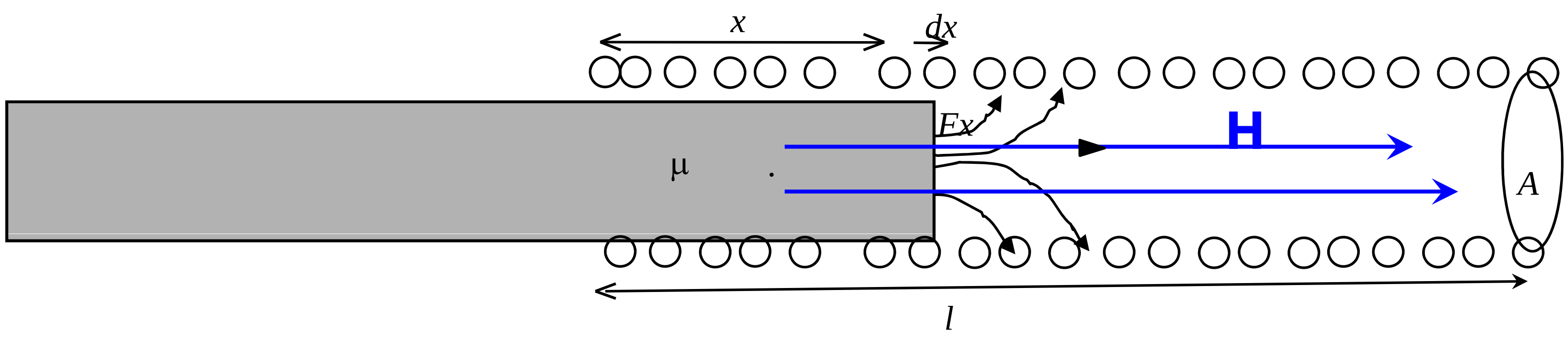
$$\frac{dW_c}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{dL_{11}}{d\theta} I^2{}_1 + \frac{1}{2}\frac{dL_{22}}{d\theta} I^2{}_2 + \frac{dL_{21}}{d\theta} I_1 I_2$$

- La expresión puede usarse aún en el caso de sistemas NO LINEALES (que contienen núcleos ferromagnéticos), suponiendo que en presencia de las corrientes consideradas , los valores **dL / dx, o $dL_{11} / d\theta$, $dL_{12} / d\theta$** puedan ser determinadas por las pendientes de las curvas de variación de flujo y de sus concatenamientos correspondientes (incrementales)

- **Las fuerzas mecánicas del campo (a corriente constante) siempre actúan de tal modo que tienden a aumentar los concatenamientos de flujos y por lo tanto la energía magnética**.

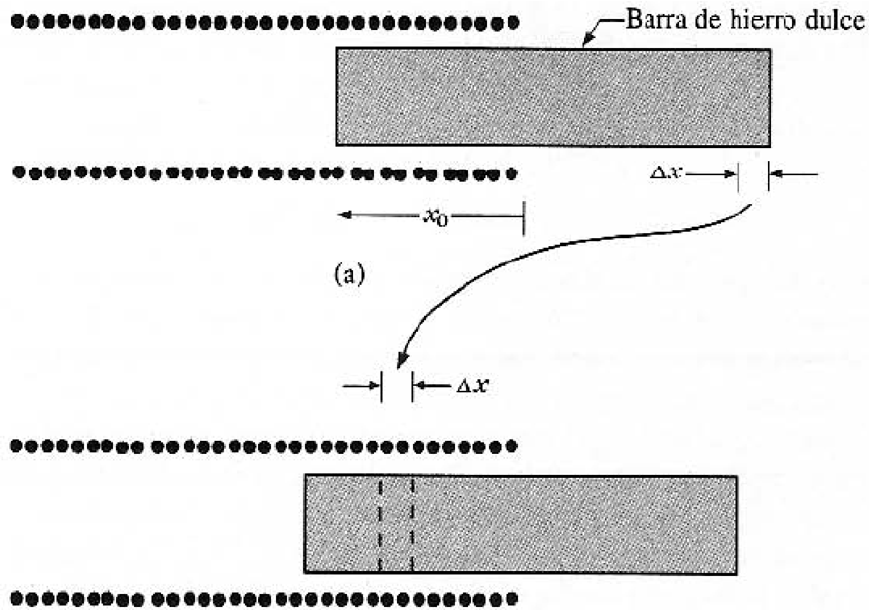
- Las Fuerzas a corriente constante es equivalente al caso de Tensión constante en campos electrostáticos.
- Las Fuerzas a Flujo constante es equivalente al caso de Carga constante en campos electrostáticos.

- **Un solenoide largo de *N* vueltas y longitud *l*, por el que circula una *I* constante.**
- **Una barra de permeabilidad μ y área A se introduce a lo largo del eje del solenoide.**
- **Si la barra se saca hasta la mitad de su longitud**
  - **Calcule la fuerza que tiende a hacerla volver a su posición.**
- **En la posición inicial y final el efecto de borde es el mismo**
- **Una parte incremental que estaba ocupada por aire con campo uniforme pasa a estar ocupada por material magnético en campo uniforme**



- La estructura del campo es relativamente uniforme lejos del extremo de la barra y del solenoide
- Una longitud Δ**x**, del extremo derecho de la barra, fuera de la región del campo, **se traslada** efectivamente **a la región de campo uniforme dentro del solenoide, en un lugar sin la influencia desmagnetizante del polo** magnético de la barra
- H aprox. longitudinal en la región Δ**x, constante, fuera y dentro de la barra puesto que I es constante**

Fuerza sobre una barra de hierro dulce introducida en un solenoide (por el método de la energía).



$$U = \frac{1}{2}\int \mu H^2\,dv$$

$$H = \frac{NI}{l}\hat{x}$$

$$U(x_0 + \Delta x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}\int_{A\,\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2\,dv$$

$$= U(x_0) + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2}{l^2} A\,\Delta x$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I \qquad F_x \approx \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2}\chi_m \mu_0 H^2 A$$