UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE INGENIERIA

**IITREE -** Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos

## Cátedra de Campos y Ondas

# Notas sobre Ecuaciones de Maxwell, Propagación de Ondas Planas y Vector de Poynting

Por los Ings.

**Roberto H. Frediani**

**Jorge L. Agüero**

**Juan C. Barbero**

**M. Beatriz Barbieri**

C.E.I.L.P.

## TABLA DE CONTENIDO

# PRÓLOGO

En este trabajo se obtendrán las ecuaciones de Maxwell en medios estacionarios, que describen completa y unívocamente, la interrelación existente entre los campos eléctricos y magnéticos, y las fuentes que les dan origen: las cargas y las corrientes en dichos medios.

A partir de la formulación y validación de dichas ecuaciones será posible describir, entre otros fenómenos, la propagación de ondas electromagnéticas planas en distintos medios isotrópicos y no limitados espacialmente.

Del mismo modo se determinará lo que acontece con dichas ondas cuando, al propagarse, alcanzan una superficie límite de separación entre dos medios, en donde serán enfatizadas las condiciones de contorno que tienen lugar en dicha interfaz.

A su vez, se desarrollarán y explicitarán conceptos asociados a ondas que se propagan, tales como la *energía electromagnética* transportada, descrita a través del *vector de Poynting*, la *polarización* de dichas ondas, el establecimiento de *ondas estacionarias*, etc.

Para el ingeniero es importante conocer las ecuaciones que rigen los fenómenos, indicando claramente las limitaciones que surjan en el campo de sus aplicaciones, como consecuencia de las suposiciones en que se basa el modelo físico elaborado. Además es necesario contar con una clara concepción física de lo que indica cada ecuación. Ambos conceptos, modelo y ecuación, están estrechamente vinculados, ya que el conocimiento físico de cada ecuación, indicará su campo de aplicación, y por ende la validez del modelo elaborado.

Algunos tópicos son tratados con mayor profundidad que lo requerido para la materia *Campos y Ondas*. Esto permitirá a aquellos alumnos interesados, profundizar un poco más sus conocimientos sobre el tema.

Los autores, todos ellos integrantes del IITREE-LAT, desean expresar su agradecimiento a las autoridades de dicho Instituto, en particular al Director del Instituto, Ing. Jean Riubrugent, y a sus compañeros de trabajo, por los aportes realizados a través de la discusión de los temas desarrollados aquí, y por su comprensión al permitirnos la utilización de recursos de computación y gráficos, ya que la mayor parte del tiempo estos recursos están afectados a las tareas normales que se desarrollan en el Instituto. Por este medio les pedimos las disculpas del caso por todas las molestias que les hemos causado.

A los destinatarios de este apunte, los alumnos de *Campos y Ondas*, les rogamos que nos acerquen sus críticas y los errores que se hayan deslizado. Esto nos permitirá, en Notas futuras, introducir las mejoras que se estimen convenientes.

# 1. ECUACIONES DE MAXWELL.

## 1.1. INTRODUCCIÓN

Las *ecuaciones de Maxwell* determinan las fuentes de rotacional y de divergencia de los campos eléctricos **E** y **D**, y de los campos magnéticos **H** y **B**.

Como es sabido, para la determinación de un campo vectorial, es condición necesaria y suficiente el conocimiento de sus fuentes de rotacional y de divergencia; por lo tanto las ecuaciones de Maxwell describen de manera completa y unívoca a los campos eléctricos y magnéticos, cualesquiera que sean las condiciones de contorno impuestas al problema.

Maxwell tuvo el ingenio de relacionar todas las leyes del electromagnetismo conocidas hasta ese momento, en un conjunto de ecuaciones, postulando además como fuente de rotacional del campo intensidad magnética **H** a la corriente de desplazamiento, modificando de este modo a la ley de Ampere, y dando cierta simetría en las fuentes de rotacional de los campos **E** y **H**, simetría que es la base del establecimiento de campos electromagnéticos que se propagan.

Para el desarrollo subsiguiente se partirá de los conocimientos adquiridos a través del estudio de la electrostática y la magnetostática, en donde las cargas eléctricas que originan el campo eléctrico están permanentemente fijas en el espacio (electrostática), o si se mueven lo hacen en forma de flujo estacionario (magnetostática), lo que es equivalente a decir que tanto la densidad volumétrica de cargas como la densidad de corriente son constantes en el tiempo.

Cabe mencionar que cuando tratamos las corrientes variables en el tiempo, y estudiamos la redistribución de corrientes en medios conductores (estado cuasi-estacionario), no había carga volumétrica y, por lo tanto, podíamos seguir aplicando las leyes que regían el flujo de corriente para fenómenos estacionarios, con el agregado de la Ley de Faraday, la cual vincula a un campo eléctrico no conservativo con un campo magnético variable en el tiempo.
Es así que considerando sólo los conocimientos adquiridos en el estudio de la electrostática y la magnetostática, las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes resultan ser las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\mathbf{total}}}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre} \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P}^* \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}^*}{\mu_0} \tag{8}$$

siendo:

$\mathbf{J}_m = \nabla \times \dfrac{\mathbf{P}^*}{\mu_0}$ corriente de magnetización.

- **P** vector *polarización eléctrica* por unidad de volumen, o simplemente polarización eléctrica.
- **P*** vector *polarización magnética* o *momento dipolar magnético* por unidad de volumen, o simplemente polarización magnética o momento dipolar magnético.

Los vectores **P** y **P*** tienen en cuenta el comportamiento de los materiales en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

Las ecuaciones anteriores muestran que no existe ninguna relación entre el campo eléctrico y el campo magnético, presupuesto que las densidades volumétricas de carga y de corriente no varíen con el tiempo. Esto hizo posible el estudio por separado de la electrostática y la magnetostática.

Ahora se establecerán las leyes más generales que rigen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético bajo cualquier condición, de las cuales las leyes para los estados electrostático y magnetostático serán casos particulares.

Para ello se partirá de las leyes establecidas para los casos electrostático y magnetostático, debido a su conocimiento previo, y se le introducirán las modificaciones necesarias para tener en cuenta las variaciones temporales en las fuentes de rotacional y de divergencia de los campos, cuando corresponda.

En lo que sigue se desarrollarán cada una de las ecuaciones de Maxwell para medios estacionarios, medios que no varían su posición espacial con el tiempo, a partir de cada ley o hecho del electromagnetismo que le dan origen, y también se justificará la inclusión de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampere, que evita así la contradicción de la misma con el principio de continuidad de la carga, para campos variables en el tiempo.

## 1.2. FUENTES DE ROTACIONAL Y DIVERGENCIA DE LOS CAMPOS ELECTRICO Y MAGNETICO.

### 1.2.1. Fuente de rotacional de campo eléctrico. Ley de Faraday.

En electrostática el campo eléctrico es conservativo, por lo tanto puede ser descripto por el gradiente de un campo escalar denominado *potencial eléctrico*. Esto permite afirmar que el campo electrostático es *irrotacional*, es decir que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{9}$$

ya que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{10}$$

y:

$$\nabla \times \left(\nabla V\right) = 0 \tag{11}$$

Cuando se analizó el flujo de corrientes estacionarias, se encontró que era imposible el establecimiento de una corriente debido a un campo conservativo, ya que dicha corriente provocaría un gasto de energía por unidad de volumen igual a:

$$\frac{Energía}{UnidadVolumen} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{12}$$

Esto permite obtener como conclusión que las corrientes solamente pueden existir cuando existan fuentes de campo eléctrico no conservativo, o en otras palabras, cuando existan *fuerzas electromotrices*, las cuales provocan campos eléctricos *rotacionales*.

Supóngase que existan tales campos producidos por fuentes de fuerza electromotriz, denominados *campos impropios* e identificados como **E'**, en conjunto con campos derivados de un potencial escalar, denominados *campos electrostáticos* e identificados como **E**. Estos campos, como ya ha sido establecido, cumplirán con la siguiente relación:

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}'\right) \tag{13}$$

Si se define a la *fuerza electromotriz* como la integral de línea del campo eléctrico, se cumplirá que:

$$\varepsilon = \oint \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}'\right) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \tag{14}$$

resultado que se obtiene teniendo en cuenta que el campo **E** es *conservativo*.

Faraday descubrió experimentalmente que, cuando un flujo magnético que abraza un circuito cerrado es alterado, sobre el circuito se induce una tensión cuyo valor es proporcional a la variación temporal de dicho flujo. Este efecto puede ser producido a través de un flujo magnético *variable en el tiempo* (principio de funcionamiento de los transformadores), o por el *cambio de posición en el tiempo* del circuito cerrado, abrazado por un campo magnético estable (principio de funcionamiento de algunos generadores eléctricos).

El flujo magnético que atraviesa el circuito está definido por:

$$\Phi_m = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{15}$$

Donde la superficie de integración tiene como contorno el perímetro del circuito cerrado.

Si este flujo cambia con el tiempo, la Ley experimental de Faraday establece que:

$$I\,R - \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{16}$$

Esto significa que la corriente establecida en el circuito cerrado difiere de la predicha por la Ley de Ohm, en una parte que puede atribuirse a una fuerza electromotriz adicional, cuyo valor es igual a la variación temporal del flujo magnético, cambiada de signo.

Maxwell reconoció que la Ley de inducción de Faraday tiene un significado más general que el indicado por la ecuación anterior.

Si la fuerza electromotriz alrededor de cualquier circuito cerrado se define como la integral de línea del campo eléctrico sobre dicho circuito cerrado, es decir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = I\,R - \varepsilon \tag{17}$$

esto indica que debe existir un campo eléctrico a lo largo del circuito, cuyo origen no es electrostático.

Las condiciones de límite entre un conductor y otro medio (por ejemplo aire), imponen que la componente tangencial de campo eléctrico sea continua, lo que implica que dicha componente sea la misma a ambos lados de la superficie límite. Esto trae aparejado que la ecuación anterior es válida en la región inmediatamente adyacente al conductor.

Como las características del conductor, su resistencia y su fuerza electromotriz, no están contenidas en la ecuación siguiente:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{18}$$

resulta que esta relación es independiente de la presencia del conductor transportando una corriente, y es una ley física general que relaciona a un campo eléctrico con la variación temporal de un campo magnético, es decir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{19}$$

Donde se emplea la derivada parcial temporal, para indicar que sólo se consideran variaciones temporales del flujo magnético a través de un *circuito cerrado fijo*, o de una *región fija del espacio*, centrando el interés en *campos variables* en el tiempo (y no en *circuitos cerrados variables* en el tiempo). El signo negativo establece que la ecuación es correcta cuando la integral de línea se efectúa en el sentido positivo de circulación alrededor del contorno de integración (sentido antihorario), con respecto al sentido positivo del flujo a través de la superficie (saliente de la superficie). Las relaciones espaciales anteriores se pueden visualizar por aplicación de la regla de la mano derecha.

Para transformar la ley de Faraday a su forma diferencial se aplica el teorema de Stokes, o sea:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{20}$$

Si esta ecuación es cierta para cualquier superficie, los integrandos deben ser iguales, con lo que se obtiene la ley de Faraday diferencial, también conocida como una de las ecuaciones de Maxwell.

Esta ecuación expresa que el campo electrostático irrotacional ya no es el único tipo de campo eléctrico posible, ya que como consecuencia de la Ley de Faraday aparece un campo eléctrico rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{21}$$

Dado que la integral de línea del campo eléctrico alrededor de un circuito cerrado no es necesariamente cero para campos que varían en el tiempo, se debe desarrollar un trabajo para llevar una carga alrededor de dicho circuito sometido a esos campos variables. El principio de conservación de la energía por supuesto que no es violado, ya que la energía requerida es suministrada por el campo magnético variable.

Esta ecuación ha sido derivada para medios estacionarios. Puede demostrarse su validez para medios no estacionarios, siempre y cuando el movimiento de estos medios sea hecho con una velocidad pequeña respecto a la velocidad de la luz. Esta última demostración se encuentra más allá del objetivo de este trabajo, recomendando al lector interesado remitirse a la bibliografía correspondiente (1) (2).

### 1.2.2. Fuente de Divergencia de Campo Eléctrico. Ley de Gauss.

Para el caso electrostático se determinó que la fuente de divergencia del campo eléctrico **E** es la siguiente:

(1) **W.K.H. Panofsky and M. Phillips**. *Classical Electriciry and Magnetism*. Addison-Wesley Company, Inc. Massachusetts, 1962.

(2) **P. Hammond**. *Electromagnetismo Aplicado*. Editorial Labor. Barcelona, 1976.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{libre+} + \rho_{ligado}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \qquad (22)$$

siendo **P** el vector polarización eléctrica.

Si ahora consideramos el campo eléctrico total **E**, teniendo en cuenta que se está en presencia de campos variables con el tiempo, se observa que el campo **E** está formado por una parte que proviene de cargas estáticas (Ley de Gauss), y otra que proviene de variaciones temporales de campos magnéticos (Ley de Faraday).

De todos modos la ecuación que da la fuente de divergencia de **E** sigue siendo válida (Ley de Gauss), ya que la parte de campo eléctrico producida por variaciones temporales de campo, en este caso campo magnético, es de origen rotacional (Ley de Faraday).

Por lo que para medios estacionarios, la Ley de Gauss sigue siendo válida, aún en presencia de campos variables en el tiempo. Es decir que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \qquad (23)$$

Esta ecuación debe interpretarse ahora, ya que se está en presencia de campos variables en el tiempo, como que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada en un dado instante de tiempo, es igual a la carga eléctrica encerrada por dicha superficie en el mismo instante de tiempo.

### 1.2.3. Fuente de rotacional de campo magnético. Ley de Ampere modificada.

Para el caso magnetostático se determinó que la fuente de rotacional del campo inducción magnética **B** es la siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P}^* = \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mathbf{J}_m\right) \qquad (24)$$

donde:

- **J** es la densidad de *corriente de conducción*.
- $\mathbf{P}^*$ es el vector *polarización magnética* o *momento dipolar magnético* por unidad de volumen.
- $\mathbf{J}_m = \nabla \times \dfrac{\mathbf{P}^*}{\mu_0}$ es la densidad de *corriente de magnetización*.

$\mathbf{J}_m$ es una corriente estacionaria que fluye dentro de regiones inaccesibles a la observación, pero que dan lugar a corrientes netas de límites (superficiales) para el caso de magnetización uniforme, o que dan lugar a corrientes volumétricas para el caso más general de polarización no uniforme, y cuyo origen radica en la imperfecta cancelación de las órbitas a escala atómica (es decir donde exista rotacional del vector polarización **P***). Como ya ha sido establecido esta corriente aparece solamente en medios magnetizados.

Si se considera por un momento que se está en presencia de un medio no magnético para simplificar el análisis, y que dicho medio está estacionario, se tendrá que:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad (25)$$

O su equivalente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (26)$$

Esta última ecuación no es más que la Ley de Ampere puntual, cuya forma integral es la siguiente:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \qquad (27)$$

Esta Ley fue sometida a un cuidadoso análisis por Maxwell quién sugirió que solamente era correcta para los casos en que no hubiera variación temporal de los campos, pero que para el caso más general debía corregirse de la siguiente manera:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \qquad (28)$$

donde el flujo eléctrico **Ψ**, está dado por:

$$\Psi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \qquad (29)$$

A esta corrección se la denominó *Hipótesis de Maxwell*, ya que en su época no pudo someterse a verificación experimental.

Esta hipótesis surgió porque Maxwell observó ciertas contradicciones de la Ley de Ampere con la Ecuación de Continuidad, lo cual se desarrolla en el punto correspondiente.

Por lo tanto la ley de Ampere modificada resulta de la siguiente forma:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \tag{30}$$

donde se ha considerado que:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{31}$$

Ya que se ha supuesto un medio estacionario, y por lo tanto, la derivada total temporal se transforma en parcial al ingresar dentro de la integral.

La ecuación de Ampere modificada establece que la fuerza magnetomotriz a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a la corriente total encerrada por la trayectoria, o sea es igual a la corriente de conducción más otra corriente denominada corriente de desplazamiento, ya que se origina en variaciones temporales del vector desplazamiento eléctrico **D**.

La Ley de Ampere modificada, expresada en su forma puntual aplicando el teorema de Stokes, resulta en:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{32}$$

Es decir que Maxwell postuló la modificación de la ley de Ampere, agregando como fuente del rotacional del campo intensidad magnética **H** a la derivada parcial temporal del vector desplazamiento eléctrico **D**, denominado por este hecho densidad de corriente de desplazamiento, con lo cual se evita la incongruencia de la ley de Ampere con el principio de conservación de la carga para campos variables en el tiempo, expresado por la ecuación de continuidad. Una ecuación más general para las fuentes de rotacional del campo magnético **H**, deberá tener en cuenta a la densidad de corriente de conducción (movimiento de cargas libres en conductores), a la densidad de corriente de desplazamiento (movimiento de cargas ligadas en dieléctricos) y a la densidad de corriente de convección (movimiento de cargas en el espacio libre). Este análisis más detallado escapa al objetivo de este trabajo, recomendando al lector interesado remitirse a la literatura correspondiente [3].

### 1.2.4. Ecuación de Continuidad.

Si se supone que la ley de Ampere es válida para el caso de campos variables con el tiempo se llegaría a una incongruencia con el principio de conservación de la carga expresado por la ecuación de continuidad. Es correcto suponer que la carga total se mantiene inalterable, aunque esta varíe en el espacio o en el tiempo. Si fluye corriente hacia fuera de cualquier volumen, la cantidad de carga dentro del mismo debe disminuir, y si a la inversa, la corriente ingresa al volumen, la cantidad de carga en el interior del mismo debe aumentar.

Considerando un volumen infinitesimal, el flujo de corriente saliente por unidad de volumen (lo que es equivalente a la divergencia de la densidad de corriente por aplicación del teorema de Stokes), es igual a la velocidad de cambio de la densidad volumétrica de carga por unidad de volumen, cambiada de signo, es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{33}$$

Si se supone ahora que es válida la ley de Ampere, que en su forma diferencial establece que el rotor del campo intensidad magnética **H** es igual a la densidad de corriente de conducción, es decir que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{34}$$

Aplicando divergencia a ambos miembros de la anterior ecuación, se obtendrá:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{35}$$

ya que la divergencia de un rotor es nula.

Si se compara la ecuación anterior con la ecuación de continuidad aplicada a campos variables con el tiempo, se observa una evidente contradicción. Maxwell, por razones similares a las expuestas observó que, si bien la ley de Ampere era correcta para el caso de campos estáticos, no era suficiente para describir campos variables con el tiempo, por lo que postuló agregar como fuente del rotacional de **H** el término derivada parcial respecto del tiempo

[3] **W.K.H. Panofsky and M. Phillips**. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley Company, Inc. Massachusetts, 1962.

del vector desplazamiento eléctrico **D**, el cual no es otra cosa más que la densidad de corriente de desplazamiento, como se verá en el siguiente punto. Por lo tanto la ley de Ampere modificada por Maxwell resulta ser:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{36}$$

Si ahora se aplica divergencia a ambos miembros de la anterior ecuación, resulta:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{37}$$

ya que la divergencia de un rotor es nula. Pero de la ecuación anterior resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{38}$$

La ecuación anterior resulta ser igual a la ecuación de continuidad anteriormente descrita.

### 1.2.5. Corriente de Desplazamiento.

La inclusión de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampere, permite explicar ciertos hechos que no tendrían justificación si se aplicara la ley de Ampere tradicional.

El ejemplo típico es la evaluación de la integral de circulación del campo intensidad magnética **H**, a lo largo de una trayectoria cerrada que encierra a uno de los conductores que conecta a una de las placas de un capacitor de placas planas paralelas. Esta situación puede verse en la **Figura 1-1**.

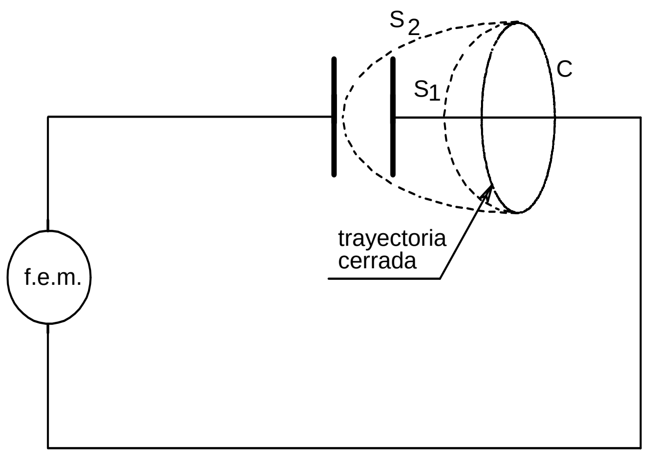


**Figura 1.1.** Evaluación de la integral de circulación del campo **H**, a lo largo de una trayectoria cerrada.

La ley de Ampere modificada establece que:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{39}$$

Si la integral de superficie del miembro derecho de la anterior ecuación se evalúa sobre una superficie que tiene como contorno el camino cerrado C, y dicha superficie intersecta al conductor (superficie $S_1$ del anterior dibujo), el resultado de la integral es igual a la corriente de conducción existente en dicho conductor, que es la que atraviesa la superficie.

Pero si ahora la superficie, teniendo como contorno el mismo camino cerrado C, intersecta el espacio entre las placas del capacitor (superficie $S_2$ del anterior dibujo), el resultado de la integral de superficie es ahora la corriente de desplazamiento existente, la cual circula dentro del dieléctrico del capacitor, pues es ésta corriente la que atraviesa efectivamente la superficie de integración.

Así la corriente de desplazamiento aparece como necesaria para preservar la continuidad de la corriente entre las placas del capacitor, y se iguala a la corriente de conducción en los conductores que conectan las placas del capacitor a la fem externa, la cual da origen a estas corrientes.

La corriente de desplazamiento desaparece para el caso electrostático, ya que no existen variaciones temporales del campo desplazamiento eléctrico **D**, siendo válida la ley de Ampere clásica.

La corriente de desplazamiento no es de gran importancia en muchos problemas de bajas frecuencias, porque su magnitud es despreciable frente a la corriente de conducción. Por supuesto que esta corriente es de gran importancia en medios dieléctricos de bajas pérdidas, en donde prepondera respecto a la corriente de conducción.

Esta corriente de desplazamiento adquiere mayor importancia en muchos problemas, a medida que aumenta la frecuencia. Como será desarrollado en puntos siguientes, es ésta corriente, combinada con la ley de Faraday la que permite predecir los fenómenos de ondas electromagnéticas que se propagan.

### 1.2.6. Fuente de Divergencia de Campo Magnético.

Para el caso magnetostático se determinó que la fuente de divergencia del campo inducción magnético **B** es la siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (40)$$

Esto resulta de la no existencia de cargas magnéticas aisladas o monopolos magnéticos, e implica que el campo **B** es siempre solenoidal, es decir de origen rotacional.

Para medios estacionarios, la expresión (40) sigue siendo válida, aún en presencia de campos variables en el tiempo. Pero en este caso, la interpretación de la misma es que el flujo magnético a través de una superficie cerrada en un dado instante, es igual a la carga magnética *libre* encerrada por dicha superficie en ese mismo instante, la cual siempre es nula (para cualquier instante).

Cabe destacar que la no existencia de carga magnética *libre* aislada es una hipótesis que aún hoy día sigue teniendo validez, ya que a la fecha no ha sido posible aislar experimentalmente tal carga. Por supuesto que si algún día se encuentra dicha carga, no solamente se modificará la divergencia del campo inducción magnética, sino que deberá tenerse en cuenta una *corriente magnética equivalente* en la ecuación del rotacional de **E**. Lo anterior constituye un ejercicio teórico que se traduce en una total simetría en las ecuaciones de Maxwell.

### 1.2.7. Ecuaciones de Maxwell.

El conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de las ondas electromagnéticas se conoce como ecuaciones de Maxwell, ya que fue Maxwell quien contribuyó a su desarrollo.

Estas ecuaciones no deben considerarse como leyes en el sentido de que no pueden derivarse de leyes menos fundamentales. Su justificación radica en el hecho de que, como todas las leyes experimentales, han predicho y siguen prediciendo un amplio rango de fenómenos electromagnéticos, los cuales pueden ser constatados experimentalmente.

La forma más común de presentación de las ecuaciones de Maxwell es en forma puntual, si bien su forma integral es derivada con el empleo del teorema de Stokes y del teorema de la divergencia o de Gauss, según corresponda a expresiones de rotores o divergencias respectivamente.

En resumen, las ecuaciones de Maxwell, tanto en su forma puntual como integral, son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \qquad (41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre} \qquad \iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_{libre}\, dv \qquad (42)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \qquad (43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \iint_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (44)$$

Contenida en las anteriores ecuaciones, y como ya ha sido visto previamente se halla la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \iint_{SC} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad (45)$$

En todos los casos anteriores se ha supuesto que las regiones de integración son estacionarias, como ha sido explicitado en puntos previos.

Las ecuaciones de Maxwell para medios estacionarios, pueden ser enunciadas de la siguiente manera:

La ecuación que establece la fuente de rotacional de **E**, conocida con el nombre de Ley de Faraday, establece que la fuerza electromotriz a lo largo de un circuito cerrado es igual a la derivada parcial temporal del campo inducción magnética **B**, a través de una superficie limitada por el circuito cerrado. También enuncia que una variación temporal del campo inducción magnética **B** genera una variación espacial del campo eléctrico **E**.

La ecuación que establece la fuente de rotacional de **H**, derivada anteriormente como una modificación de la Ley de Ampere, establece que la fuerza magnetomotriz a lo largo de un circuito cerrado es igual a la densidad de corriente de conducción más la derivada parcial temporal del campo desplazamiento eléctrico **D** (densidad de corriente de desplazamiento), a través de una superficie limitada por el circuito cerrado. También enuncia que una variación temporal del campo desplazamiento eléctrico **D** genera una variación espacial del campo intensidad magnética **H**. Esta modificación de la ley de Ampere, en conjunto con la ley de Faraday le permitieron a Maxwell predecir la propagación de ondas electromagnéticas, a la velocidad de la luz, en el espacio vacío y además concluir que la luz era una onda de naturaleza electromagnética, cerca de treinta años antes de que Hertz comprobase experimentalmente la propagación de ondas electromagnéticas.

La ecuación que establece la fuente de divergencia de **D**, conocida como ley de Gauss, establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie que encierra un dado volumen, es igual a la carga libre encerrada por dicho volumen.

La ecuación que establece la fuente de divergencia de **B**, derivada de la ley de Gauss aplicada a campos magnéticos, establece que el flujo magnético total saliente de cualquier superficie cerrada, es siempre nulo. La anterior conclusión presupone que no existen cargas magnéticas aisladas en las que puedan empezar o terminar líneas de flujo magnético o, dicho en otros términos, las líneas de flujo magnético son cerradas.

En conjunto con las ecuaciones de Maxwell, otras relaciones fundamentales deben ser consideradas cuando se tratan problemas electromagnéticos. Entre ellas cabe mencionar a las siguientes:

Ley de Ohm, cuya expresión puntual es:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{46}$$

La Ley de fuerzas de Lorentz, cuya expresión es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{47}$$

La relación constitutiva entre los campos eléctrico **E** y de desplazamiento eléctrico **D**:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{48}$$

Si el medio es lineal, isotrópico y homogéneo existirá un valor de la permitividad tal que:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{49}$$

La relación constitutiva entre los campos intensidad magnética **H** y densidad magnética **B**:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}^* \tag{50}$$

Si el medio es lineal, isotrópico y homogéneo existirá un valor de la permeabilidad tal que:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{51}$$

Si ahora se asume que los campos varían armónicamente en el tiempo, es decir que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{j(\omega t + \varphi_D)} \tag{52}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi_E)} \tag{53}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{j(\omega t + \varphi_B)} \tag{54}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j(\omega t + \varphi_H)} \tag{55}$$

En donde con el subíndice 0 se denotan campos que varían solamente en forma espacial (y no temporal), y con ø se indica la fase relativa dependiente del subíndice correspondiente (**D**, **E**, **B** y **H**).

Las consideraciones anteriores implican que las derivadas temporales adoptan la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\varpi \mathbf{D} \tag{56}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E} \tag{57}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = j\omega \mathbf{B} \tag{58}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j\omega\mathbf{H} \tag{59}$$

Bajo la suposición de que los campos varían armónicamente con el tiempo, las ecuaciones de Maxwell pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{60}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre} \tag{61}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \tag{62}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{63}$$

La suposición de la variación armónica de los campos con el tiempo, permite simplificar los cálculos a realizar para la determinación de los mismos, y no resta generalidad a cualquier análisis que se haga bajo esta premisa, ya que cualquier onda periódica puede ser descompuesta, haciendo un desarrollo en series de Fourier, en una sumatoria de senos y cosenos cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental de la onda original.