

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**IITREE - Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos**

**Cátedra de Campos y Ondas**

**Notas sobre Corrientes y Campos variables con el  
tiempo en los conductores**

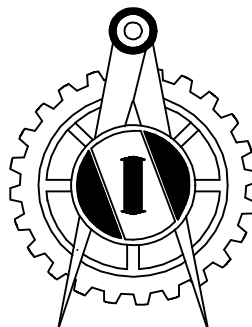
Por los Ings.

**Roberto H. Frediani**

**Jorge L. Agüero**

**Juan C. Barbero**

**M. Beatriz Barbieri**



**C.E.I.L.P.**

## Introducción

La distribución de corrientes y campos en el seno de materiales conductores no sólo resulta de interés desde un punto de vista teórico, sino que fundamentalmente reviste una gran importancia en la práctica de la Ingeniería.

En efecto, los conductores normalmente son materiales costosos, y proporcionar conductores innecesariamente gruesos, si la corriente circula sólo a través de una sección reducida, vecina a la superficie del conductor, constituye un mal diseño de ingeniería.

Debido a la importancia de este tema, este capítulo estará dedicado a la discusión de la distribución de corrientes y campos variables con el tiempo, en el seno de materiales conductores.

## 1. Carga y corriente en un conductor

La ley de Ohm experimental, es un punto de partida útil para desarrollar esta discusión. Esta ley establece que la corriente está determinada por la conductividad del material y la geometría del conductor.

Sea un conductor de sección recta constante  $s$  y de longitud  $l$  *uniforme* (es decir, medida a través de puntos homólogos en las secciones normales, no depende del punto elegido en cada sección), y conductividad  $\mathbf{s}$ .

Si se aplica una diferencia de potencial  $V$  entre los extremos de dicho conductor, resulta:

$$V = R I \quad (1)$$

siendo

$$R = \frac{l}{\mathbf{s} s} \quad (2)$$

El hecho de que la longitud del conductor sea uniforme, como se acaba de postular, determina que la corriente se distribuya con densidad uniforme en toda la sección.

En efecto, si consideramos al conductor como un manojo de filamentos de la misma sección recta y longitud, la diferencia de potencial y la resistencia serán las mismas para cada filamento, y de aquí, por la ley de Ohm, la corriente ha de ser la misma. Por lo tanto, la densidad de corriente será uniforme.

De manera que en un conductor de *longitud uniforme*, en el que circula una *corriente estacionaria*, la densidad de corriente es uniforme, y de acuerdo a la ley de Ohm puntual:

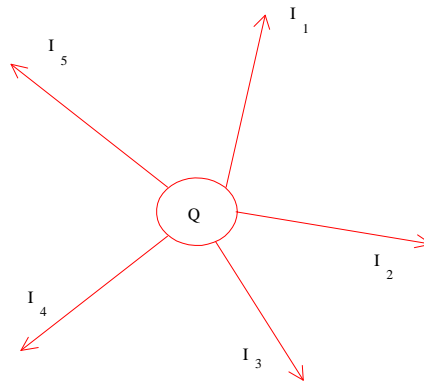
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{s}} \quad (4)$$

se puede hacer una precisión aún mayor, diciendo que en un conductor de *longitud uniforme*, en el que circula una *corriente estacionaria*, la densidad de corriente es uniforme, y la intensidad de campo eléctrico también es uniforme a través de la sección del conductor.

En ausencia de cualquier f.e.m. en el conductor, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es un campo irrotacional (que por lo tanto, puede ser expresado por el gradiente de un potencial escalar  $V$ ), que sólo puede tener fuentes de divergencia. Tal campo puede proceder únicamente de cargas eléctricas, y surge la cuestión: ¿Dónde se encuentran las cargas que originan el flujo de corriente? Deben estar o bien en el material conductor, o en su superficie, o en ambos lugares. En lo que sigue se responderá a este interrogante. La ecuación de continuidad de la carga y corriente está ilustrada en la **Figura 1**, y puede escribirse:

$$\sum I_{\text{Salida}} = -\frac{1}{t} \frac{Q}{t} \quad (5)$$

De acuerdo a la convención empleada, el signo menos en la expresión anterior, indica que un aumento de la corriente que sale del volumen encerrado por la superficie, corresponde a una disminución de la cantidad de carga positiva acumulada en dicho volumen.



**Figura 1.** Continuidad de corriente y carga.

En función de la corriente y densidad de carga:

$$\oint \mathbf{J} \, ds = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \quad (6)$$

y por el teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Además, la relación entre carga y campo eléctrico en ausencia de polarización es:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad (8)$$

sustituyendo (4) y (8) en (7) se obtiene:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

cuya solución resulta:

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon_0)t} \quad (10)$$

De manera que, si dentro del conductor aislado existe una densidad de carga  $\rho_0$  la misma disminuye exponencialmente (se *relaja*), con una constante de tiempo característica o *tiempo de relajación*  $\tau = \epsilon_0/\sigma$ . Pero dado que la cantidad de carga en el conductor debe conservarse, porque se encuentra aislado, dicha carga debe *difundirse* hacia la superficie del conductor.

El *tiempo de relajación* es una característica propia de cada medio, y da una indicación del tiempo en el cual se alcanzarán las condiciones esencialmente estacionarias, después de la iniciación de un determinado flujo de carga.

Para un buen conductor, los valores de conductividad son del orden de  $10^7 \, \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  (siemens), y siendo  $\epsilon_0$  del orden de  $10^{-11} \, \text{F/m}$ , la constante de tiempo  $\tau$  resulta del orden de  $10^{-18}$  segundos.

Esto significa que la carga se difundirá a la superficie del conductor con extrema rapidez, y no quedará carga en el interior del conductor, y en lugar de la ecuación (7) se podrá escribir:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (11)$$

En función de los campos eléctrico y magnético, el conocimiento de que dentro del conductor virtualmente no hay carga, *incluso en condiciones de variación con el tiempo*, nos permite hacer una importante simplificación.

En efecto, la ecuación completa para la f.m.m., de acuerdo a la ley de Ampere modificada resulta:

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (12)$$

donde  $\Psi$  es el flujo eléctrico concatenado por la trayectoria cerrada:

$$\Psi = \int \mathbf{D} \, ds \quad (13)$$

y aplicando el teorema de Stokes, resulta:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14)$$

Si se considera una variación temporal sinusoidal, con una pulsación angular  $\omega = 2\pi f$  (de la forma  $e^{j\omega t}$ ) el término *densidad de corriente de desplazamiento* de la expresión (14) resulta:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{I}_t} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} = j\frac{\omega\epsilon_0}{s} \mathbf{J} = j\omega t \mathbf{J} \quad (15)$$

de manera que dicha expresión puede escribirse, para un buen conductor ( $t = \epsilon_0/s \cong 10^{-18}$  segundos):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}(1 + j\omega t) \cong \mathbf{J} \quad (16)$$

y aplicando divergencia miembro a miembro, y teniendo en cuenta que la divergencia de un rotacional es nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (17)$$

lo cual concuerda con la expresión (11), aún cuando se esté considerando el caso de corrientes y campos variables en el tiempo, incluso a muy altas frecuencias.

Por consiguiente este resultado nos habilita a emplear dentro de un conductor con corriente *variable con el tiempo* las expresiones para el campo magnético deducidas bajo la hipótesis de corriente *constante*.

Ahora estamos en condiciones de deducir la ecuación general para la distribución de corriente variable con el tiempo, en el seno de un material conductor. Para ello partiremos de las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{I}_t} \quad (19)$$

$$\mathbf{J} = s\mathbf{E} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (21)$$

Aplicando rotor miembro a miembro en (20), y reemplazando con (19) y (21) resulta:

$$\nabla \times \mathbf{J} = -s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{I}_t}$$

y aplicando nuevamente rotor miembro a miembro y reemplazando con (18) se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = -s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I}(\nabla \times \mathbf{H})}{\mathcal{I}_t} = -s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I} \mathbf{J}}{\mathcal{I}_t}$$

Ahora, teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J}$$

y teniendo en cuenta que la densidad de corriente tiene divergencia nula (ecuación 17):

$$\nabla^2 \mathbf{J} = s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I} \mathbf{J}}{\mathcal{I}_t} \quad (22)$$

De manera similar, puede demostrarse que los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  también quedan descritos por una ecuación de la misma forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I} \mathbf{E}}{\mathcal{I}_t} \quad (23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I} \mathbf{B}}{\mathcal{I}_t} \quad (24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = s \mu_0 \mu_r \frac{\mathcal{I} \mathbf{H}}{\mathcal{I}_t} \quad (25)$$

que se conoce con el nombre de *ecuación de difusión*.

Estas ecuaciones dan las relaciones entre las derivadas espaciales y temporales de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  y del campo magnético  $\mathbf{H}$ , en cualquier punto en el interior de un buen conductor.

Resta por resolver estas ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta las condiciones de frontera impuestas por ciertas formas físicas de los conductores, de interés en la práctica de la ingeniería.

## 2. Discusión de la ecuación de difusión

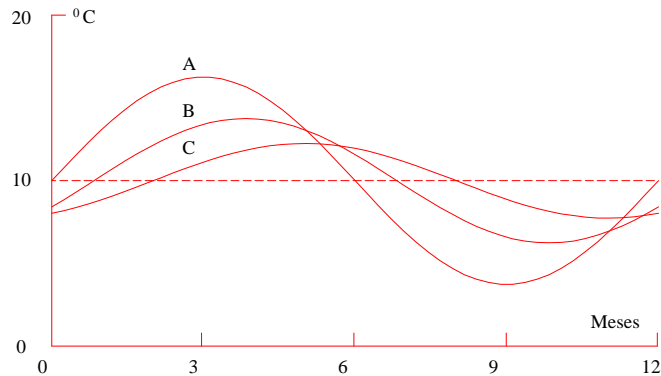
Existen muchos fenómenos descritos por ecuaciones de la forma de la *ecuación de difusión*. Tal vez el ejemplo más importante del fenómeno de difusión sea el flujo de calor a través de la materia, el cual puede describirse mediante:

$$\nabla^2 q = \frac{k}{cd} \frac{\mathcal{I} q}{\mathcal{I}_t} \quad (26)$$

donde  $q$  es la temperatura,  $k$  la conductividad térmica,  $c$  el calor específico y  $d$  la densidad de la materia.

La variación de la temperatura debajo de la superficie, descrita por la ecuación (26) puede ser analizada cualitativamente, en base a nuestra experiencia.

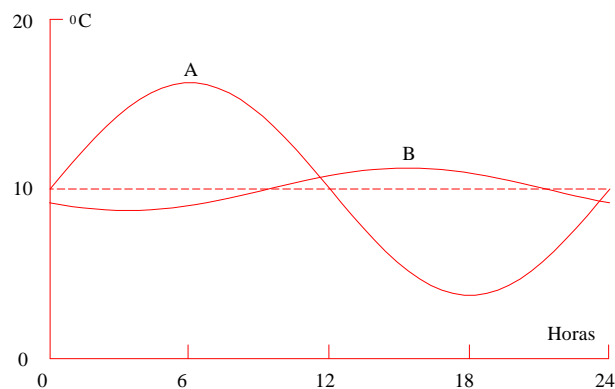
Supongamos que la temperatura en la superficie de la tierra varía durante el año en forma senoidal, como se muestra en la *curva A* de la **Figura 2**.



**Figura 2.** Variación anual de la temperatura del suelo en la superficie y a profundidades de 1 m y 2 m debajo de la superficie.

Es razonable suponer que a medida que aumenta la profundidad en la tierra, dicha variación anual, será de *menor amplitud*. También debe producirse cierto *retardo* en el tiempo al difundirse el calor hacia adentro, de manera que existirá un *desfasaje* que variará al aumentar la profundidad. Esto se muestra en las *curvas B y C* de la **Figura 2**.

Si ahora la frecuencia de la variación de temperatura en la superficie aumenta, como se muestra en la *curva A* de la **Figura 3** (la cual corresponde a la variación diaria), es de esperar que la atenuación y el ángulo de fase aumenten más pronunciadamente a medida que aumenta la profundidad. Esto queda confirmado en la *curva B* de la **Figura 3**, que ha sido obtenida mediante la ecuación (26).

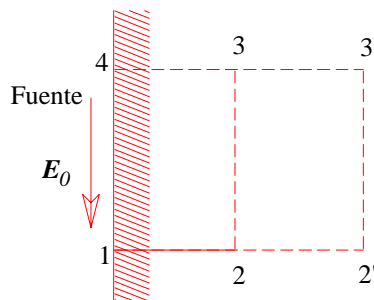


**Figura 3.** Variación diaria de la temperatura del suelo en la superficie y a una profundidad de 25 cm debajo de la superficie.

## 2.1. Análisis cualitativo de la distribución de corriente y campos

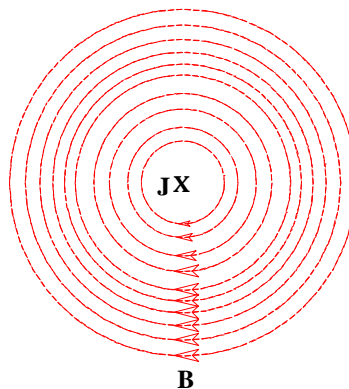
Resulta interesante anticipar cualitativamente los resultados que arrojará la resolución de las ecuaciones (22) y (23), manejando conceptos fundamentales, y haciendo uso intuitivo de la ley de Faraday.

Para determinar la distribución del campo eléctrico en el interior de un conductor, imagínese una fuente de alta frecuencia como la mostrada en la **Figura 4**, que produce un campo eléctrico aplicado  $E_0$  en la superficie del conductor. Este campo debe causar que fluya una corriente, la cual producirá un campo magnético normal a  $E_0$ . Este campo magnético variante producirá un campo eléctrico inducido  $E'$  opuesto a  $E_0$ . Si efectuamos un estudio de las dos integrales de línea 1-2-3-4-1 y 1-2'-3'-4-1, se encuentra que esta última concatena más líneas de flujo, y por lo tanto la tensión inducida a lo largo de este trayecto será mayor, pudiendo deducirse que el campo inducido a lo largo de 2'-3' es mayor que el inducido sobre 2-3. Por lo tanto, a medida que se penetra en el conductor, resulta cada vez menor el campo neto  $E_0 + E'$  que produce el flujo de corriente.



**Figura 4.** Explicación física del decrecimiento de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  con la profundidad descrito por la ecuación de difusión.

Para determinar la distribución de la corriente variable con el tiempo en el interior de un conductor aislado, en la **Figura 5** se muestran esquemáticamente las líneas de inducción magnética en el plano de una sección transversal del conductor, por el cual circula la corriente. Consideremos ese conductor como un manojito de filamentos paralelos al eje del conductor. Cuanto más próximo al eje del conductor sea el filamento considerado, tanto mayor será el número de líneas de flujo que lo concatan.



**Figura 5.** Explicación física del decrecimiento de  $\mathbf{J}$  con la profundidad descrito por la ecuación de difusión.

Al variar periódicamente la corriente, varía el campo magnético, y en los filamentos del conductor se inducen f.e.m. que se oponen a la variación de la intensidad. Esa oposición será tanto más apreciable cuanto mayor sea la f.e.m. (cuanto mayor sea el número de líneas de flujo concatenadas con el filamento), es decir cuanto más cerca se halle el filamento del eje del conductor. Como consecuencia, la densidad de corriente en los distintos puntos de la sección transversal resulta desigual. Alcanza su valor máximo en la periferia del conductor, y el mínimo en el eje.

### 3. Impedancia interna de un conductor

En esta sección se estudiará la *impedancia interna* entre los extremos de una trayectoria a lo largo de un conductor.

Tal como se ha visto hasta aquí, para corrientes variables con el tiempo, la distribución de la corriente no es uniforme en la sección transversal del conductor, de modo que la densidad de corriente no puede determinarse de una forma simple como lo era para el caso de corriente constante.

Si se adopta como trayectoria de integración una que se encuentre sobre la superficie del conductor, el término  $\mathbf{J}_s/\mathbf{s}$  da el campo eléctrico  $\mathbf{E}_s$  en la superficie y si se define la impedancia interna *por unidad de longitud* para dicho conductor como la relación entre el campo eléctrico *en la superficie* (diferencia de potencial por unidad de longitud) y la corriente *total* en el conductor:

$$Z_i = \frac{E_s}{I} \quad (27)$$

la caída de potencial  $U_{AB}$  entre los extremos A-B del conductor, a través de su impedancia interna resulta:

$$U_{AB} = \int_A^B \frac{\mathbf{J}_s}{\mathbf{s}} d\mathbf{l} = I \int_A^B \frac{\mathbf{E}_s}{I} d\mathbf{l} = I \int_A^B Z_i d\mathbf{l} = IZ \quad (28)$$

Es decir que la impedancia interna total es la integral sobre el circuito de la impedancia interna *por unidad de longitud*.

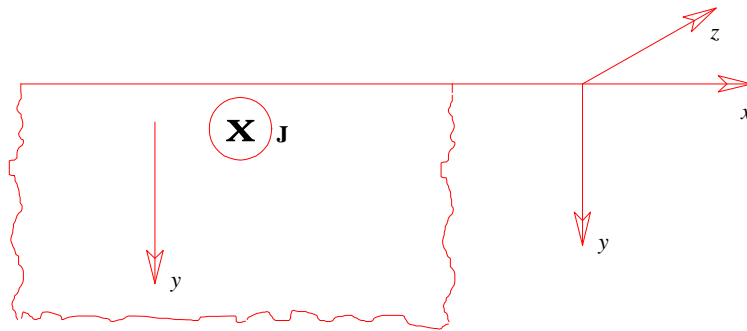
La impedancia tiene tanto una parte real como una parte imaginaria, ya que el campo eléctrico en la superficie no se encuentra en fase con la corriente total en el conductor debido a la velocidad de cambio del flujo magnético dentro del conductor.

La parte real da la resistencia en corriente alterna del conductor; y la parte imaginaria da la reactancia interna, que es la parte de la reactancia debida al flujo magnético *interior* al conductor (para configuraciones geométricas simples, en las cuales el flujo magnético puede subdividirse en *interior* y *exterior*).

Cabe destacar que la elección de una trayectoria a lo largo de la superficie del conductor fue arbitraria, y que podría haberse adoptado una a lo largo del centro del conductor o a otra profundidad. Lo importante es que la misma debe tomarse en el mismo lugar para el tratamiento de cada uno de los términos de la ecuación del circuito. La elección a lo largo de la superficie es conveniente porque la misma marca la separación entre la *inductancia interna* y la *inductancia externa* para la mayoría de las formas geométricas simples.

#### 4. Conductor plano semi-infinito

El caso más simple de resolver, aunque posiblemente no sea el más simple de visualizar, es el de un conductor *plano* de profundidad infinita (en el sentido del eje de coordenadas  $y$ ), en el cual no existen variaciones del campo eléctrico en toda la extensión de sus otras dos dimensiones *ancho* (eje de coordenadas  $x$ ) y *largo* (eje de coordenadas  $z$ ), también infinitas (**Figura 6**).



**Figura 6.** Sistema de coordenadas para la solución de la ecuación de difusión en una placa semi-infinita.

Es decir, se trata de un conductor que llena el semi-espacio  $y > 0$  en un sistema de coordenadas rectangulares, con el plano  $x$ - $z$  coincidente con la superficie del conductor (también conocido como sólido semi-infinito, o placa semi-infinita).

A pesar del requisito de la *profundidad infinita*, el análisis de este caso es de gran importancia en la práctica. En efecto, es importante para muchos conductores de dimensiones finitas y aún con superficies curvadas, dado que en frecuencias elevadas la profundidad sobre la cual los campos se encuentran concentrados, es muy pequeña, de manera que tanto el radio de curvatura como el espesor del conductor pueden considerarse comparativamente infinitos. Además, cualquier variación de los campos en la extensión de las dimensiones *largo* o *ancho*, debidas ya sea, a la curvatura o efectos de borde, son por lo general despreciables frente a las variaciones en la profundidad del conductor.

Es decir, por debajo de cierto espesor, habrá variación despreciable y por lo tanto es razonable considerar a un material grueso, como una placa semi-infinita, con una superficie libre solamente.

##### 4.1. Densidad de corriente en un conductor semi-infinito

Obtengamos una solución matemática para la densidad de corriente cerca de la superficie de un conductor muy grueso, para el sistema de coordenadas indicado en la **Figura 6**.

La ecuación (22):

$$\nabla^2 \mathbf{J} = s \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}_t} \quad (22)$$

dado que no hay variación en la dirección  $x$  ni en la dirección  $z$ , ésta se reduce a:

$$\frac{\mathbf{J}^2 \mathbf{J}}{\mathbf{J}_y^2} = s \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}_t} \quad (29)$$

Si la variación temporal es del tipo  $e^{j\omega t}$ , siendo  $\omega = 2\pi f$  la pulsación angular, la variación espacial involucrada por (29) deberá satisfacer:

$$\frac{\nabla^2 \dot{J}_z}{\nabla^2 y^2} = j\omega \mu_0 \dot{J}_z = t^2 \dot{J}_z \quad (30)$$

siendo:

$$\dot{J}_z = J_z e^{j\omega t}$$

Una solución completa de (30) resulta en términos de exponenciales, expresada por:

$$\dot{J}_z = C_1 e^{-t y} + C_2 e^{+t y} \quad (31)$$

La densidad de corriente aumentaría hasta el valor imposible de infinito cuando  $y \rightarrow \infty$ , a no ser que  $C_2$  sea cero. El coeficiente  $C_1$  puede escribirse como la densidad de corriente en la superficie, si definimos  $J_z = J_{z0}$  cuando  $y=0$ . Entonces:

$$J_z = J_{z0} e^{-t y} e^{j\omega t} \quad (32)$$

y habiéndose definido:

$$t^2 \equiv j\omega \mu_0 \quad (33)$$

y dado que:

$$\sqrt{j} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$$

(adoptando la raíz con signo positivo), resulta:

$$t = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{j\omega \mu_0} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2}} = \frac{(1+j)}{d} \quad (34)$$

donde:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2}}} \text{ [m]} \quad (35)$$

también se puede escribir, en función de la magnitud  $d$  definida por (35):

$$J_z = J_{z0} e^{-y/d} e^{j(\omega t - y/d)} \quad (36)$$

#### 4.2. Campos E, B y H en un conductor semi-infinito

Dado que los campos **E**, **B** y **H** están gobernados por las mismas ecuaciones diferenciales, se obtienen resultados de la misma forma que (36):

$$E_z = E_{z0} e^{-y/d} e^{j(\omega t - y/d)} \quad (37a)$$

$$B_x = B_{x0} e^{-y/d} e^{j(\omega t - y/d)} \quad (37b)$$

$$H_x = H_{x0} e^{-y/d} e^{j(\omega t - y/d)} \quad (37c)$$

donde  $E_{z0}$ ,  $B_{x0}$  y  $H_{x0}$  son las magnitudes de los respectivos campos en la superficie del conductor.

A la luz de las ecuaciones (36) y (37) es evidente que las magnitudes de los campos y de la densidad de corriente, decrecen exponencialmente con la penetración en el conductor, y  $d$  tiene el significado de ser la profundidad a la cual dichas magnitudes han decrecido a  $1/e$  (alrededor de 36,9%) de sus respectivos valores en la superficie. Por ello a la magnitud  $d$  se la denomina *profundidad de penetración* o *profundidad pelicular* o simplemente (aunque menos apropiadamente) *penetración*.

Además, también puede observarse el retraso que va teniendo lugar en la fase, cuyo valor ( $y/d$ , en radianes) depende de la profundidad  $y$  y de  $d$ , tanto para la densidad de corriente **J** como para los campos **E**, **B** y **H**.

#### 4.3. Impedancia interna de un conductor plano semi-infinito

Tal como se definió en el apartado 3, la impedancia interna por unidad de longitud es el cociente entre el campo eléctrico en la superficie y la corriente total. En el caso del conductor plano semi-infinito, resulta conveniente definir la impedancia interna por unidad de longitud y unidad de ancho. Sea  $i_z$  la densidad de corriente por unidad de ancho, desde la superficie del conductor, hasta una profundidad infinita:

$$i_z = \int_0^\infty \dot{J}_z dy = \int_0^\infty J_{z0} e^{-(1+j)(y/d)} dy = \frac{J_{z0} d}{(1+j)} \quad (38)$$



El campo eléctrico en la superficie estará determinado por la densidad de corriente en la superficie:

$$\dot{E}_{z0} = \frac{J_{z0}}{s} \quad (39)$$

y la impedancia interna por *unidad de longitud y unidad de ancho*, resulta:

$$\dot{Z}_s = \frac{\dot{E}_{z0}}{\dot{i}_z} = \frac{(1+j)}{sd} \quad (40)$$

que es de la forma:

$$\dot{Z}_s = R_s + j\omega L_i \quad (41)$$

Resultando entonces:

$$R_s = \frac{1}{sd} = \sqrt{\frac{p f m}{s}} \quad (42)$$

$$\omega L_i = R_s = \frac{1}{sd} = \sqrt{\frac{p f m}{s}} \quad (43)$$

$$L_i = \sqrt{\frac{m}{4p f s}} \quad (44)$$

Por consiguiente, la resistencia y la reactancia interna de un conductor plano semi-infinito resultan iguales *a cualquier frecuencia*. La impedancia interna  $Z_s$  tiene un ángulo de fase de  $45^\circ$ .

La ecuación (42) brinda otra interpretación de la profundidad de penetración  $d$ . En efecto, se observa que la resistencia debida al efecto pelicular de un conductor plano semi-infinito es exactamente la misma que la resistencia en corriente continua de un plano conductor de profundidad  $d$ . Esto es, la resistencia de este conductor, con decrecimiento exponencial de la densidad de corriente, es exactamente la misma que si la corriente estuviera *uniformemente* distribuida sobre una profundidad  $d$ .

La resistencia  $R_s$  de un conductor plano, por unidad de longitud y unidad de ancho, se denomina *resistividad de superficie*. Para un conductor de área finita, la resistencia se obtiene multiplicando  $R_s$  por la longitud, y dividiéndola por el ancho (ya que los elementos del ancho se encuentran esencialmente en paralelo). De manera que dimensionalmente  $R_s$  se expresa en ohms.

Tal como ocurre con  $d$ ,  $R_s$  definida por (42) también puede resultar un parámetro útil en el estudio de conductores aunque no sean de forma plana, y puede tomarse como una constante del material, a una dada frecuencia  $f$ .

#### 4.4. Potencia disipada en un conductor plano semi-infinito

La corriente total por unidad de ancho para el conductor plano semi-infinito, resultaba dada por la expresión (38), que puede volver a escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{i}_z = \frac{d}{(1+j)} \dot{J}_{z0} = \frac{d}{(1+j)} J_{z0} e^{j\omega t} = \frac{J_{z0} d (1-j)}{2} e^{j\omega t} \quad (45)$$

La parte real de esta expresión es:

$$\dot{i}_z = \frac{J_{z0} d}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t) = \frac{J_{z0} d}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{p}{4} \right) \quad (46)$$

De manera que la corriente total se retrasa en  $p/4$  con respecto a la densidad de corriente en la superficie.

La pérdida óhmica o potencia disipada  $P$  por unidad de ancho  $x$  y de longitud  $z$ , es decir, por unidad de área es:

$$P = \int_0^\infty \frac{|\dot{J}_z|^2}{2s} dy = \int_0^\infty J_{z0}^2 e^{-2y/d} dy = \frac{J_{z0}^2 d}{4s} = \frac{I_{eficaz}^2}{sd} \quad (47)$$

ya que de la ecuación (46) el valor eficaz de la corriente resulta:

$$I_{eficaz} = \frac{J_{z0} d}{2} \quad (48)$$

De donde la resistencia óhmica también resulta como en (42):

$$R = \frac{P}{I_{eficaz}^2} = \frac{1}{sd} \quad (49)$$

De aquí que la energía disipada es la misma que si circulase una corriente distribuida uniformemente en una capa superficial de profundidad  $d$ .

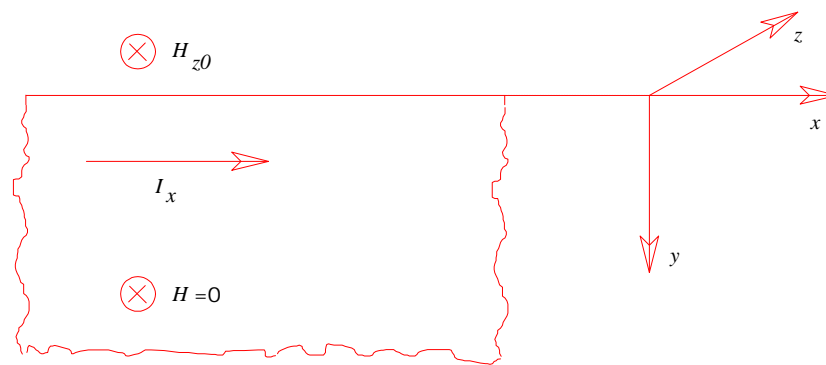
El lector debe observar que existe corriente por debajo de la profundidad de penetración  $d$ , aunque disminuye rápidamente. Por ejemplo, a una profundidad  $4d$  la densidad de corriente ha caído a menos del 2% del valor en la superficie.

#### 4.5. Placa magnética semi-infinita

Hasta aquí se ha resuelto el problema de la difusión en función del flujo de corriente a través de un conductor grueso. Exactamente los mismos resultados pueden aplicarse igualmente al problema de la distribución de flujo en una placa magnética (es decir una placa de material con  $\mathbf{s}$  muy elevado y  $\mathbf{m}_r$  muy grande).

Consideremos la placa magnética semi-infinita, representada en la **Figura 7**. La ecuación de difusión para la densidad de flujo magnético que se había obtenido para el conductor plano semi-infinito es:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{s} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (24)$$



**Figura 7.** Intensidad de campo magnético en una placa semi-infinita.

Dado que no hay variación en la dirección  $x$  ni en la dirección  $z$ , ésta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = \mathbf{s} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (50)$$

El flujo total puede obtenerse usando la ecuación (46):

$$\mathbf{F} = \frac{B_{z0} d}{2} (\cos \mathbf{w} t + \sin \mathbf{w} t) = \frac{B_{z0} d}{\sqrt{2}} \cos \left( \mathbf{w} t - \frac{\mathbf{p}}{4} \right) \quad (51)$$

Así que, como ocurría antes con la corriente, el flujo magnético está muy confinado a una capa superficial de la placa magnética. Para un espesor mayor que  $4d$  la densidad de flujo habrá descendido a menos del 2% del valor en la superficie. Si el propósito del material es conducir el flujo, claramente sería un derroche usar un bloque mucho mayor que la profundidad de penetración.

La densidad de corriente en la placa magnética puede obtenerse a partir de:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (50)$$

Si  $\mathbf{B}$  se encuentra en la dirección  $z$ , se simplifica a:

$$j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{1}{\mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r} \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad (51)$$

recordando que:

$$\dot{B}_z = B_{z0} e^{-y/d} e^{j(\mathbf{w} t - y/d)} \quad (37b)$$

resulta:

$$J_x = \frac{B_{z0}}{\mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r} \frac{(1+j)}{d} e^{-y/d} e^{j(\mathbf{w} t - y/d)} \quad (52)$$

Las pérdidas de potencia óhmicas por unidad de área superficial, resultan expresadas por:

$$P = \int_0^\infty \frac{|j_z|^2}{2s} dy = \frac{B_{z0}^2}{s m_0 m_r} \frac{1}{2d} = \frac{H_{z0}^2}{2s d} \quad (53)$$

El flujo de corriente total, puede obtenerse por integración de la ecuación (52), o más simplemente aplicando:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I \quad (54)$$

como en la **Figura 7**, que da la corriente por unidad de longitud en la dirección  $z$  como:

$$\dot{I} = -\dot{H}_{z0} \quad (55)$$

de donde:

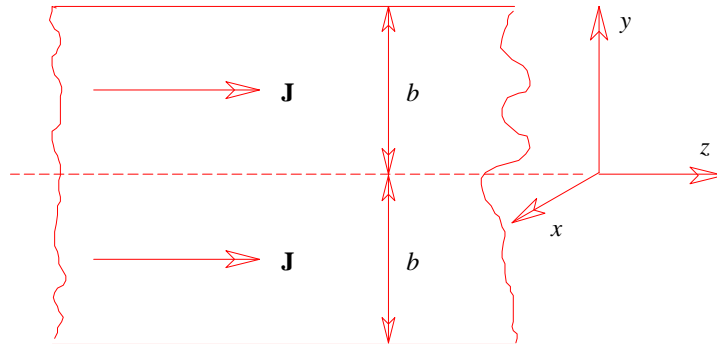
$$P = \frac{I_{eficaz}^2}{s d} \quad (56)$$

Así, como en las ecuaciones (47) y (49), la potencia disipada es la misma que si la corriente total estuviese uniformemente distribuida en una profundidad igual a la profundidad de penetración  $d$ .

## 5. Lámina conductora de doble cara

La lámina conductora de doble cara, también conocida como lámina plana, es un conductor cuyas dimensiones son longitud infinita (en el sentido del eje  $z$ ), ancho infinito (en el sentido del eje  $x$ ), y espesor finito  $e$  igual a  $2b$  (en el sentido del eje  $y$ ), tal como se indica en la **Figura 8**.

Para efectuar el estudio de esta geometría, resulta conveniente adoptar el sistema de coordenadas mostrado en dicha figura, destacándose la adopción, por simetría, del eje  $y=0$  en la línea central de la lámina.



**Figura 8.** Flujo de corriente en una lámina de doble cara.

### 5.1. Densidad de corriente en una lámina de doble cara

Obtengamos una solución matemática para la densidad de corriente para el sistema de coordenadas indicado en la **Figura 8**.

La ecuación (22):

$$\nabla^2 \mathbf{J} = s m_0 m_r \frac{\mathbf{J}}{\mathcal{J}_t} \quad (22)$$

dado que no hay variación en la dirección  $x$  ni en la dirección  $z$ , ésta se reduce a:

$$\frac{\mathcal{J}_y^2 \mathbf{J}}{\mathcal{J}_y^2} = s m_0 m_r \frac{\mathbf{J}}{\mathcal{J}_t} \quad (57)$$

Si la variación temporal es del tipo  $e^{j\omega t}$ , siendo  $\omega=2\pi f$  la pulsación angular, la variación espacial involucrada por (57) deberá satisfacer:

$$\frac{\mathcal{J}_y^2 \dot{J}_z}{\mathcal{J}_y^2} = j\omega s m_0 m_r \dot{J}_z = t^2 \dot{J}_z \quad (58)$$

siendo:

$$\dot{J}_z = J_z e^{j\omega t}$$

Una solución completa de (58) resulta en términos de exponenciales, expresada por:

$$\dot{J}_z = C_1 e^{-ty} + C_2 e^{+ty} \quad (59)$$

Obsérvese que, hasta aquí, se han seguido los mismos pasos que en el caso de un conductor plano semi-infinito. Pero ahora no se puede hacer que  $C_2$  sea cero, por cuanto han cambiado las condiciones de contorno.

En efecto, antes cuando  $y \rightarrow \infty$  (introduciéndonos en el conductor) de no haber sido  $C_2$  igual cero, la densidad de corriente sería infinita. Ahora, y sólo puede tomar valores entre  $[+b, -b]$ , y por razones de simetría, la densidad de corriente en  $y=+b$  debe ser igual al valor en  $y=-b$ .

Es decir que por simetría debe cumplirse:

$$C_1 = C_2 \quad (60)$$

y además, de las expresiones (59) y (60) resulta, para  $y=0$ :

$$\dot{J}_{z0} = C_1 + C_2 \quad (61)$$

es decir:

$$C_1 = C_2 = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} \quad (62)$$

debiendo notarse que ahora  $\dot{J}_{z0}$  no corresponde al valor de  $\mathbf{J}$  en la superficie de la lámina.

$$\dot{J}_z = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} (e^{ty} + e^{-ty}) = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} \cosh(ty) \quad (63)$$

Es decir, recordando (34):

$$t = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{wms} = (1+j) \sqrt{p fms} = \frac{(1+j)}{d} \quad (34)$$

$$\dot{J}_z = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} \left( e^{(1+j)y/d} + e^{-(1+j)y/d} \right) = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} \cosh \left( (1+j) \frac{y}{d} \right) \quad (64)$$

En la superficie,  $y = b$  y  $\dot{J}_z = \dot{J}_{zs}$ , resultando:

$$\dot{J}_{zs} = \dot{J}_{z0} \cosh \left( (1+j) \frac{b}{d} \right) \quad (65)$$

y  $\dot{J}_z$  en función de  $\dot{J}_{zs}$  resulta:

$$\dot{J}_z = \dot{J}_{zs} \frac{\cosh \left( (1+j) y/d \right)}{\cosh \left( (1+j) b/d \right)} \quad (66)$$

## 5.2. Campos E, B y H en una lámina de doble cara

Dado que los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  están gobernados por las mismas ecuaciones diferenciales, se obtienen resultados de la misma forma que (66):

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{zs} \frac{\cosh \left( (1+j) y/d \right)}{\cosh \left( (1+j) b/d \right)} \quad (67a)$$

$$\dot{B}_x = \dot{B}_{xs} \frac{\cosh \left( (1+j) y/d \right)}{\cosh \left( (1+j) b/d \right)} \quad (67b)$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{xs} \frac{\cosh \left( (1+j) y/d \right)}{\cosh \left( (1+j) b/d \right)} \quad (67c)$$

donde  $E_{zs}$ ,  $B_{xs}$  y  $H_{xs}$  son las magnitudes de los respectivos campos en la superficie de la lámina.

## 5.3. Impedancia interna de una lámina de doble cara

Tal como se definió en el apartado 3, la impedancia interna por unidad de longitud es el cociente entre el campo eléctrico en la superficie y la corriente total. Tal como se hizo con el conductor plano semi-infinito, en este caso también resulta conveniente definir la impedancia interna por unidad de longitud y unidad de ancho. Sea  $i_z$  la densidad de corriente por unidad de ancho, desde la superficie del conductor:

$$i_z = \int_{-b}^{+b} \dot{J}_z dy = \int_{-b}^{+b} \dot{J}_{zs} \frac{\cosh \left( (1+j) y/d \right)}{\cosh \left( (1+j) b/d \right)} dy = \frac{2 \dot{J}_{zs} d}{(1+j)} \tanh \left( (1+j) \frac{b}{d} \right) \quad (68)$$

Si  $b/d$  es grande,  $\tanh((1+j)b/d) \rightarrow 1$ . Esto es cierto dentro del 1% si  $b/d > 2,64$ . Es decir, en una lámina de este espesor, resulta:

$$i_z = \frac{2 \dot{J}_{zs} d}{(1+j)} \quad (69)$$

Comparando esta expresión con la (45) puede observarse que éste es el valor que podría obtenerse, imaginando la lámina de dos caras como dos placas infinitas colocadas juntas. Es decir, para relaciones  $b/d > 2,64$ , ambas caras de la lámina se comportan como sendos conductores planos semi-infinitos.

El campo eléctrico en la superficie estará determinado por la densidad de corriente en la superficie:

$$\dot{E}_{zs} = \frac{\dot{J}_{zs}}{s} \quad (70)$$

y la impedancia interna por *unidad de longitud y unidad de ancho*, es decir, por unidad de área  $x$ - $z$ , resulta:

$$\dot{Z}_s = \frac{\dot{E}_{zs}}{\dot{i}_z} = \frac{(1+j)}{2sd} \coth\left((1+j)\frac{b}{d}\right) \quad (71)$$

que es de la forma:

$$\dot{Z}_s = R_s + j\omega L_i \quad (72)$$

Separando partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\dot{Z}_s = \frac{(1+j)}{2sd} \frac{\cosh(b/d) \cos(b/d) + j \sinh(b/d) \sin(b/d)}{\sinh(b/d) \cos(b/d) - j \cosh(b/d) \sin(b/d)} \quad (73)$$

Resultando luego de algunas reducciones:

$$\dot{Z}_s = R_{ca} + j X_i = \frac{1}{2sd} \frac{\sinh(2b/d) + \sin(2b/d)}{\cosh(2b/d) - \cos(2b/d)} + \frac{j}{2sd} \frac{\sinh(2b/d) - \sin(2b/d)}{\cosh(2b/d) - \cos(2b/d)} \quad (74)$$

Por consiguiente, la resistencia a la corriente alterna  $R_{ca}$  y la reactancia interna  $X_i$  de una lámina plana de dos caras resultan iguales a *cualquier frecuencia*. La impedancia interna  $Z_s$  tiene un ángulo de fase de  $45^\circ$ .

La resistencia a la corriente continua  $R_{cc}$  resulta:

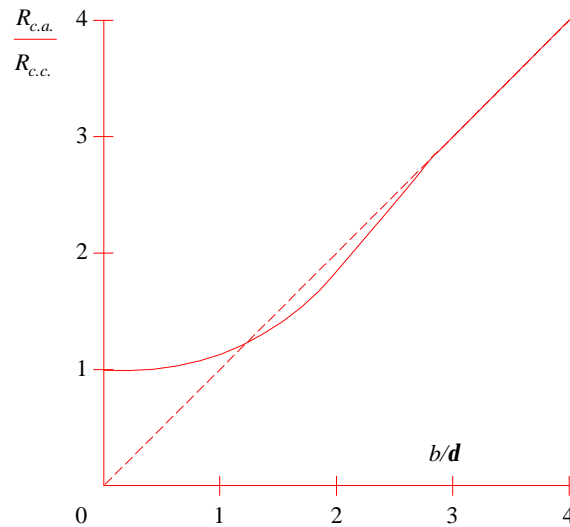
$$R_{cc} = \frac{1}{2sb} \quad (75)$$

De donde resulta la siguiente relación entre las resistencia de corriente alterna y de corriente continua:

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{b}{d} \frac{\sinh(2b/d) + \sin(2b/d)}{\cosh(2b/d) - \cos(2b/d)} \quad (76)$$

Esta relación se representa en la **Figura 9**. Para valores grandes de  $b/d$ , tiende a  $b/d$ , debido a que las pérdidas son como si la corriente estuviera concentrada en dos capas superficiales de profundidad  $d$ . Para valores bajos de  $b/d$  se puede efectuar un desarrollo en serie de potencias crecientes de  $b/d$ :

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} \cong 1 + \frac{4}{45} \left(\frac{b}{d}\right)^4 \quad (77)$$



**Figura 9.** Resistencia en corriente alterna de una lámina de doble cara.

Recordando que  $d$  es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia, se nota que a altas frecuencias la resistencia  $R_{ca}$  varía con  $\sqrt{f}$ , y a bajas frecuencias, con  $(1 + k f^2)$ . La **Figura 9** muestra que el criterio de espesor entre los dos tipos de comportamiento en aproximadamente  $b > d$  o  $b < d$ .

## 6. Conductores cilíndricos

La mayoría de los conductores empleados en los circuitos eléctricos son alambres de sección circular. Si un alambre de este tipo constituye una trayectoria conductora sin curvaturas agudas, como en la mayoría de las aplicaciones circuitales, cualquier porción pequeña puede tratarse como un cilindro circular recto.

Se supondrá aquí que se las condiciones externas son tales que la corriente circula en la dirección axial solamente, y además que las variaciones en la dirección axial (dirección  $z$ ) y circunferencial (dirección  $\phi$ ), son despreciables comparadas con las variaciones en la dirección radial del conductor (dirección  $r$ ).

### 6.1. Densidad de corriente en conductores cilíndricos

La ecuación de difusión que describe la distribución de la corriente, escrita en coordenadas cilíndricas, para el caso de no existir variaciones ni en la dirección  $z$ , ni en la dirección  $\phi$  resulta:

$$\frac{d^2 \dot{J}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{J}_z}{dr} = j\omega \mu_s \dot{J}_z \quad (78)$$

$$\frac{d^2 \dot{J}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{J}_z}{dr} + t^2 \dot{J}_z = 0 \quad (79)$$

donde

$$t^2 \equiv -j\omega \mu_s \quad (80)$$

o:

$$t = j^{-1/2} \sqrt{\omega \mu_s} = j^{-1/2} \frac{\sqrt{2}}{d} \quad (81)$$

La ecuación (79) es de la forma de la ecuación de Bessel de orden cero, con  $t$  complejo. Una solución completa de esta ecuación es:

$$\dot{J}_z = A J_0(tr) + B H_0^{(1)}(tr) \quad (82)$$

Para un alambre sólido,  $r=0$  debe estar incluida en la solución, y por lo tanto es necesario que la constante  $B$  sea cero, ya que un estudio de la función de Hankel  $H_0^{(1)}(tr)$  demuestra que ésta se hace infinita cuando  $r=0$ , aún cuando  $t$  sea complejo. Es decir:

$$\dot{J}_z = A J_0(tr) \quad (83)$$

La constante arbitraria  $A$  puede ser evaluada a partir de la densidad de corriente en la superficie. Si:

$$\dot{J}_z = \dot{J}_{z0} \quad \text{en } r = r_0 \quad (84)$$

entonces, de (83):

$$A = \frac{\dot{J}_{z0}}{J_0(\mathbf{t} r_0)} \quad (85)$$

$$\dot{J}_z = \frac{\dot{J}_{z0} J_0(\mathbf{t} r)}{J_0(\mathbf{t} r_0)} \quad (86)$$

Pero siendo  $\mathbf{t}$  complejo puede resultar problemático encontrar la función de Bessel. Si nos referimos a la serie de potencias para  $J_0$ , se observa que si el argumento es complejo la función tendrá tanto parte real como parte imaginaria. Estas pueden ser calculadas separadamente, si definimos:

$$Ber(v) \equiv \text{Re}\left\{J_0\left(j^{-1/2} v\right)\right\} \quad (87a)$$

$$Bei(v) \equiv \text{Im}\left\{J_0\left(j^{-1/2} v\right)\right\} \quad (87b)$$

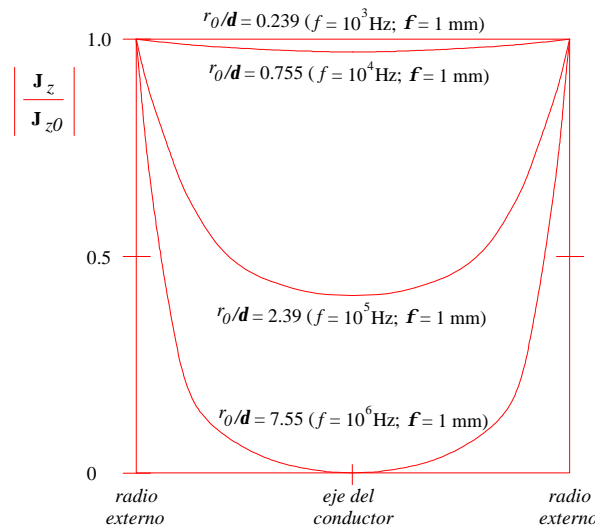
puede escribirse:

$$J_0\left(j^{-1/2} v\right) \equiv Ber(v) + j Bei(v) \quad (87c)$$

$Ber(v)$  y  $Bei(v)$  se encuentran tabuladas en numerosas referencias. Usando estas definiciones y (81), (86) puede escribirse:

$$\dot{J}_z = \dot{J}_{z0} \frac{Ber(\sqrt{2} r/d) + j Bei(\sqrt{2} r/d)}{Ber(\sqrt{2} r_0/d) + j Bei(\sqrt{2} r_0/d)} \quad (88)$$

En la **Figura 10** se muestran las curvas de las densidades de corriente en función del radio de un conductor cilíndrico. En realidad se grafica la densidad de corriente relativa a la densidad de corriente en la superficie, en función del radio normalizado al radio exterior del conductor, para distintos valores del parámetro  $r_0/d$ . Además, a efectos de brindar una imagen física de los valores dados al parámetro  $r_0/d$ , en cada curva se indican las frecuencias a que corresponden dichos valores considerando un alambre de cobre de 1 mm de diámetro.



**Figura 10.** Distribución de corriente en conductores cilíndricos para diferentes frecuencias.

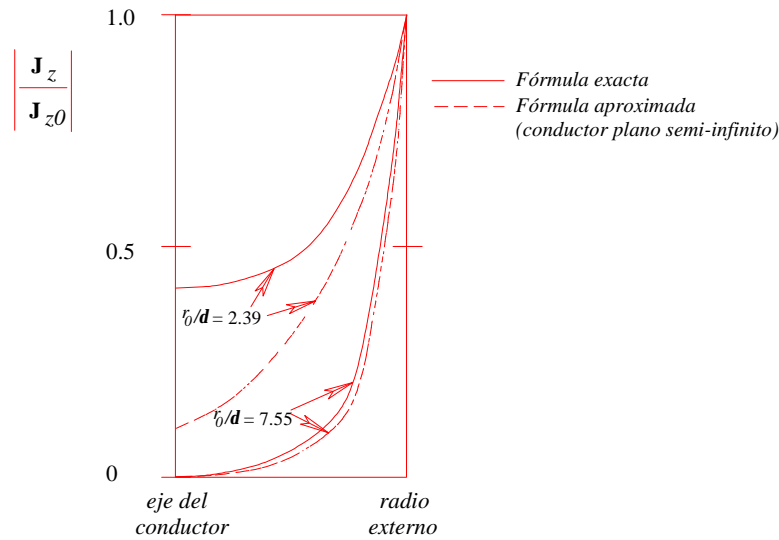
Como un ejemplo de la aplicabilidad del análisis del conductor plano semi-infinito a casos de conductores curvados en frecuencias elevadas con  $d$  pequeño frente al radio de curvatura, se puede estudiar el presente caso del conductor cilíndrico.

Si se va a despreciar la curvatura para aplicar el análisis del conductor plano, la coordenada  $y$ , distancia medida desde la superficie hacia el interior del conductor, es para el conductor cilíndrico:  $r_0 - r$ . Entonces, la ecuación (36) resulta:

$$\frac{J_z}{J_{z0}} = e^{-(r_0-r)/d} \quad (89)$$

En la **Figura 11** se muestran las curvas de  $|J_z/J_{z0}|$  empleando la expresión exacta (88) y la expresión aproximada (89), para dos casos:  $r_0/d=2.39$  (alambre de cobre de 1mm de diámetro, y  $f=100$  kHz) y  $r_0/d=7.55$  (alambre de cobre de 1mm de diámetro, y  $f=1$  MHz). Como se observa, en el último caso, la coincidencia es buena, a diferencia del primero, en que las curvas exacta y aproximada se alejan mucho entre sí.

De modo que si la relación  $r_0/d$  es grande, se introduce un error pequeño considerando al conductor cilíndrico como si fuera plano semi-infinito.



**Figura 11.** Distribución de corriente real en conductores cilíndricos y aproximada (expresión para un conductor plano semi-infinito) para diferentes frecuencias.

## 6.2. Impedancia interna de un conductor cilíndrico en muy altas frecuencias

La expresión de la impedancia interna de los conductores cilíndricos en muy altas frecuencias, puede obtenerse a partir de las expresiones de la impedancia, obtenidas para el conductor plano semi-infinito.

En el apartado anterior se comprobó que si la frecuencia es lo suficientemente elevada, la curvatura del alambre puede despreciarse, y considerarlo como un conductor plano de profundidad infinita, y ancho igual a su circunferencia.

Es decir, si  $Z_s$  dada por la expresión (40) es la impedancia interna por *unidad de longitud* y *unidad de ancho*, del conductor plano, la impedancia por *unidad de longitud* para un ancho igual a  $2\pi r_0$  (la circunferencia del conductor cilíndrico) será  $Z_s/(2\pi r_0)$ . De manera que para un alambre de sección circular, de radio  $r_0$ , en frecuencias muy elevadas se tiene:

$$\dot{Z}_{h.f.} = \frac{(1+j)}{2\pi r_0 s d} = \frac{R_s(1+j)}{2\pi r_0} \quad (90)$$

o bien:

$$R_{h.f.} = (w L_i)_{h.f.} = \frac{R_s}{2\pi r_0} [\Omega / m] \quad (91)$$

$$L_{i-h.f.} = \frac{R_s}{4\pi^2 f r_0} [H / m] \quad (92)$$

donde  $R_s$  está definida por (42):

$$R_s = \frac{1}{s d} = \sqrt{\frac{\rho f m}{s}} \quad (42)$$

## 6.3. Impedancia interna de un conductor cilíndrico en muy bajas frecuencias

En muy bajas frecuencias, la corriente tiene esencialmente una distribución uniforme sobre la sección transversal del conductor (ver **Figura 10**), de manera que es posible aplicar la expresión para corriente continua:



$$R_0 = \frac{1}{\rho_0^2 s} [\Omega / \text{m}] \quad (93)$$

y la inductancia interna resulta:

$$L_i = \frac{\mu}{8\pi} [\text{H} / \text{m}] \quad (94)$$

## 7. Efecto pelicular y efecto de proximidad

El fenómeno de concentración de la corriente en la capa superficial del conductor, que tiene lugar con corrientes variables con el tiempo, recibe el nombre de *efecto de superficie* o *efecto pelicular*. La brusquedad de su aparición crece con la frecuencia  $f$ , con la permeabilidad  $\mu$  y con la conductividad  $s$ .

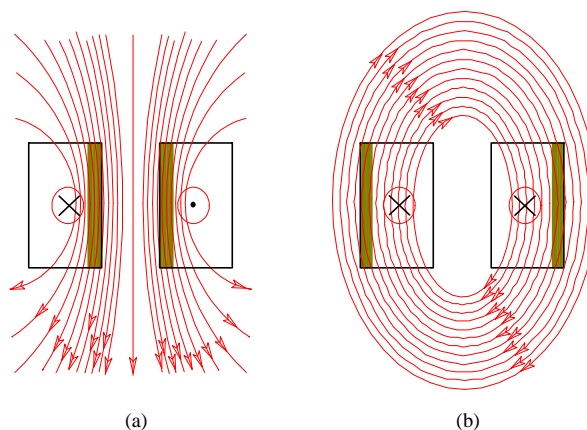
Como resultado del efecto pelicular la sección transversal de un conductor en corriente alterna se desaprovecha más que en corriente continua. Para un valor eficaz de corriente alterna, igual al valor de corriente continua, la potencia disipada es mayor en el primer caso.

Otra consecuencia del efecto pelicular es la disminución en la inductancia interna del conductor, a causa del debilitamiento del campo magnético en el interior del conductor. En el caso teórico límite en que la corriente se concentra en la superficie del conductor en una capa infinitamente delgada, el conductor carece de campo magnético en su interior.

Con corrientes alternas de alta frecuencia, la parte interna del conductor no se aprovecha, y por esta razón se suelen emplear conductores huecos en forma de tubos, y conductores multifilares de alta frecuencia. Estos últimos consisten en alambres delgados aislados uno del otro, retorcidos de manera tal que cada uno de ellos ocupe alternativamente en la sección transversal del cable, distintas posiciones desde el eje hasta la periferia. Con esta disposición, todos los hilos se encuentran en las mismas condiciones, con lo que se consigue que las corrientes respectivas sean iguales entre sí. Además, en la periferia de cada alambre, y en virtud de su pequeño diámetro, el efecto pelicular no se manifiesta bruscamente, y la densidad de corriente en la sección del alambre varía de forma insignificante.

Sobre la distribución de la corriente alterna en un conductor, ejercen su influencia las corrientes en los conductores vecinos. Este fenómeno suele denominarse *efecto de proximidad*.

A fin de ejemplificar este fenómeno, considérese los dos casos representados en la **Figura 12** en la que se muestran las líneas de flujo magnético resultantes para dos conductores paralelos de sección rectangular. En el caso de la **Figura 12 a)** ambos conductores conducen corrientes iguales y de sentidos opuestos, mientras que en el caso de la **Figura 12 b)** las corrientes son iguales pero del mismo sentido.



**Figura 12.** Distribución de corriente en conductores paralelos. (a) corrientes iguales de sentidos opuestos; (b) corrientes iguales del mismo sentido.

Analizando ambos casos, se deduce que las distintas zonas de la sección de cada conductor, concatenan un número diferente de líneas de flujo.

Basándonos en consideraciones análogas a las efectuadas en el apartado 2.1 para un conductor aislado único, se puede llegar a la conclusión de que la mayor densidad de corriente existirá en las zonas de los conductores concatenadas con un número mínimo de líneas de flujo magnético.

Si las corrientes en los conductores tienen el mismo sentido, la mayor densidad de corriente se observará en aquellas zonas de las secciones transversales que se encuentren más alejadas entre sí. En cambio, si las corrientes tienen sentidos opuestos, la mayor densidad tendrá lugar en las zonas que se encuentren más próximas entre sí. La zona de las mayores densidades se indica con un sombreado en la **Figura 12**.

Se propone, como ejercicio para el estudiante, analizar el caso de un conductor coaxial, en el cual la corriente circula en un sentido por el conductor interior, y en sentido opuesto por el conductor exterior. Deberá justificar que la corriente en el conductor interior se distribuye con mayor densidad en la periferia, mientras que en el conductor exterior, la densidad es mayor en la superficie interna, disminuyendo a cero sobre la superficie exterior.