Corrientes estacionarias
Ley de Ohm.

Campos y Ondas

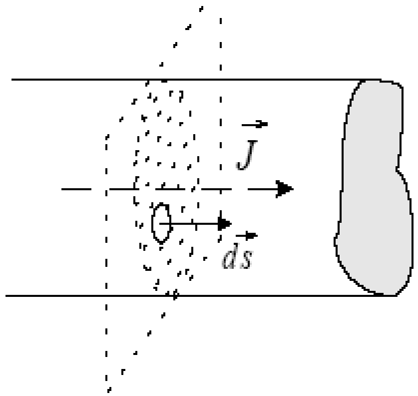
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

- En electrostática las cargas son estacionarias.
- Si las cargas se mueven a velocidad constante, se genera un flujo de cargas denominado corriente estacionaria.
- Vamos a considerar corrientes que varían muy lentamente en el tiempo y pueden asumirse solo dependientes del campo eléctrico, despreciándose el efecto de campo magnético.
- Las corrientes se genera en los materiales que tiene portadores que pueden moverse con libertad.
- Se define corriente:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$1 \text{ ampere} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}}$$

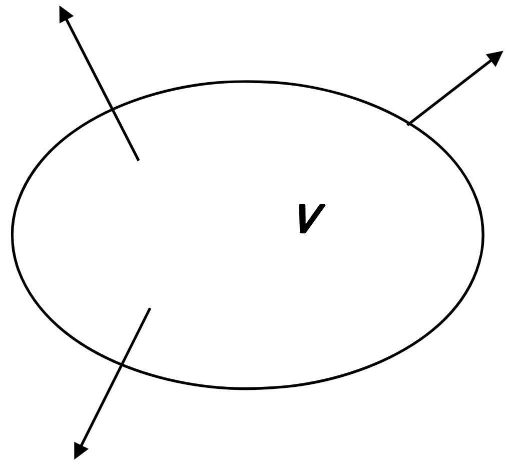
$$\iint_S \mathbf{J}.\mathbf{ds} = I$$



La conservación de la carga, ecuación de continuidad.

- **J es un vector que indica la densidad de corriente dentro de un medio.**
- **La velocidad a la cual la carga deja un volumen V, cuyo límite es la superficie S está dado por:**

$$\iint_S \mathbf{J.ds} = -\frac{\partial q}{\partial t} \qquad -\frac{\partial q}{\partial t} = -\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \iint_S \mathbf{J.ds}$$



•***<u>Principio de Conservación de la carga</u>***

Por teorema Gauss

$$-\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \iiint_v \nabla \mathbf{J.ds}$$

•***<u>Ecuación de continuidad</u>***

$$\boxed{\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

- **<u>Definición de corriente eléctrica estacionaria.</u>**

  Corriente eléctrica que se produce en un conductor de forma que la densidad de carga de cada punto del conductor es constante, es decir que se cumple que

$$\boxed{\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

  Por tanto, para las corrientes estacionarias, la ecuación de continuidad toma la forma $\nabla \mathbf{J} = 0$

  que es una definición de corriente estacionaria equivalente a la primera.

  Las dos anteriores propiedades equivalen a decir que la carga de cualquier volumen del conductor no varía o, también, que la cantidad de carga que en cada unidad de tiempo entra en un volumen del conductor sale de él. Esto debe ser así si la carga en su interior ha de permanecer constante.

La corriente es llamada estacionaria si no hay acumulación de carga en ningún punto

$$\nabla \mathbf{J} = 0$$

<u>Primera Ley de Kirchoff</u>

$$\sum I = \iiint_V \nabla \mathbf{J}.dv = \iint_S \mathbf{J.ds} = 0$$

$$\sum I = 0$$

- **Las corrientes de conducción que estudiaremos se dan sin movimiento de masas, a diferencia de las corrientes de convección que se dan en gases o fluídos con movimientos de iones con masa (descargas de rayos). El medio No resulta neutro**
- **Las corrientes de conducción se establecen en los materiales “conductores” que resultan neutros.**
  - **Se desplazan los electrones de valencia.**
  - **Los iones pesados se encuentran fijos**
  - **En condiciones de estado estacionario, los electrones entran al metal por un punto y salen por otro produciendo una corriente pero el material resulta ELECTRICAMENTE NEUTRO**

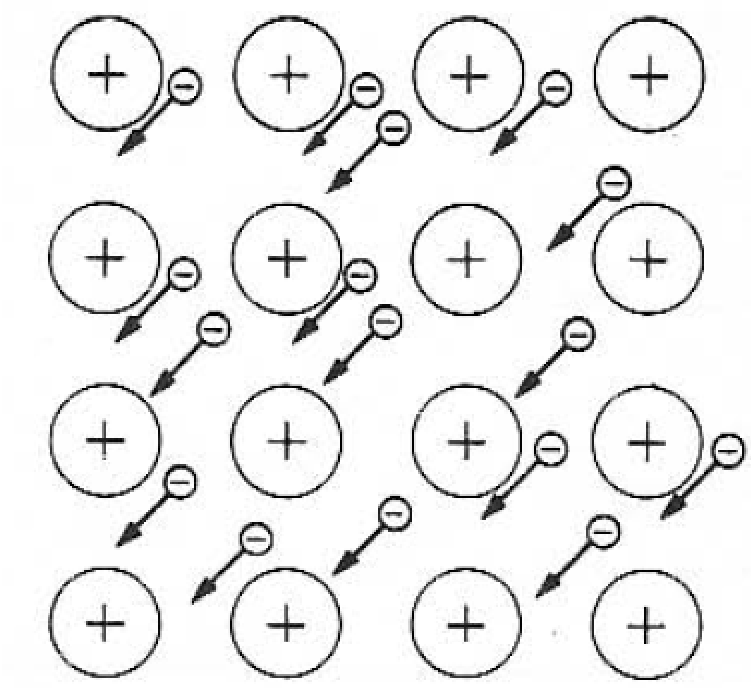
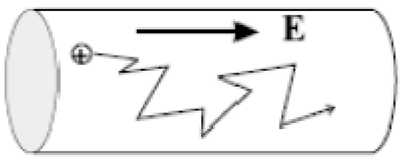


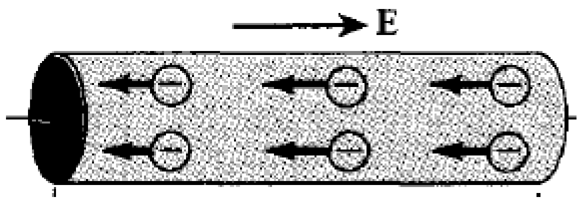
Diagrama esquemático del movimiento de los electrones en un metal.

$$\sum Q = 0$$ ***Para cualquier instante***

- Al aplicar un campo eléctrico en un medio conductor los electrones son acelerados y se detienen en los choques con los iones (+), describiendo un camino errático con una velocidad promedio v, la cual resulta proporcional al campo.
- Se tiene que



$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$



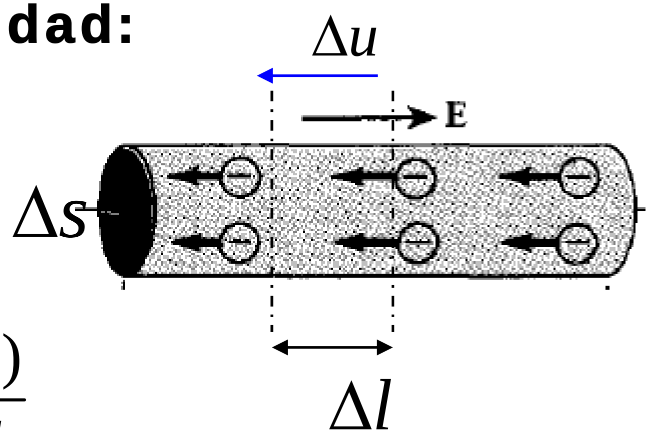
Ley de Ohm microscópica

- σ es la conductividad del medio expresada en [Siemens/m], [moh/m].

En los casos de los conductores esta es constante en un amplio rango, el material resulta lineal, homogéneo e isotrópico, excepto en cristales (tensor).

- **Esta expresión es de aplicación solo a los materiales conductores. Es una característica fenomenológica y no es de aplicación universal.**

- **La energía se consume a una velocidad:**



$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$J.E = \left(\frac{\Delta q / \Delta t}{\Delta s}\right)\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\Delta q \Delta u}{\Delta t \boxed{.\Delta s.\Delta l}} = \frac{W(energia)}{tiempo.vol}$$

Densidad de Potencia

$$\mathbf{J.E} = [Joule/(seg.m^3)] ---> [Watt/m^3]$$

- **Las corrientes estacionarias son imposibles en campos puramente irrotacionales o conservativos.**
- **Debe aparecer en algún lugar del circuito una fuente de campo eléctrico de tipo rotacional NO CONSERVATIVO .**
- **El campo proveniente de fuentes electromotrices (FEM) lo denominamos E', campo impropio**
- **El campo E es el campo derivable de un potencial**
- **La ecuación de Ohm microscópica es:**

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$$

- **Definimos a la Fuerza electromotriz o FEM como**

$$FEM = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}')\mathbf{dl} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\mathbf{dl}$$

$$FEM = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}')\mathbf{dl} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\mathbf{dl}$$

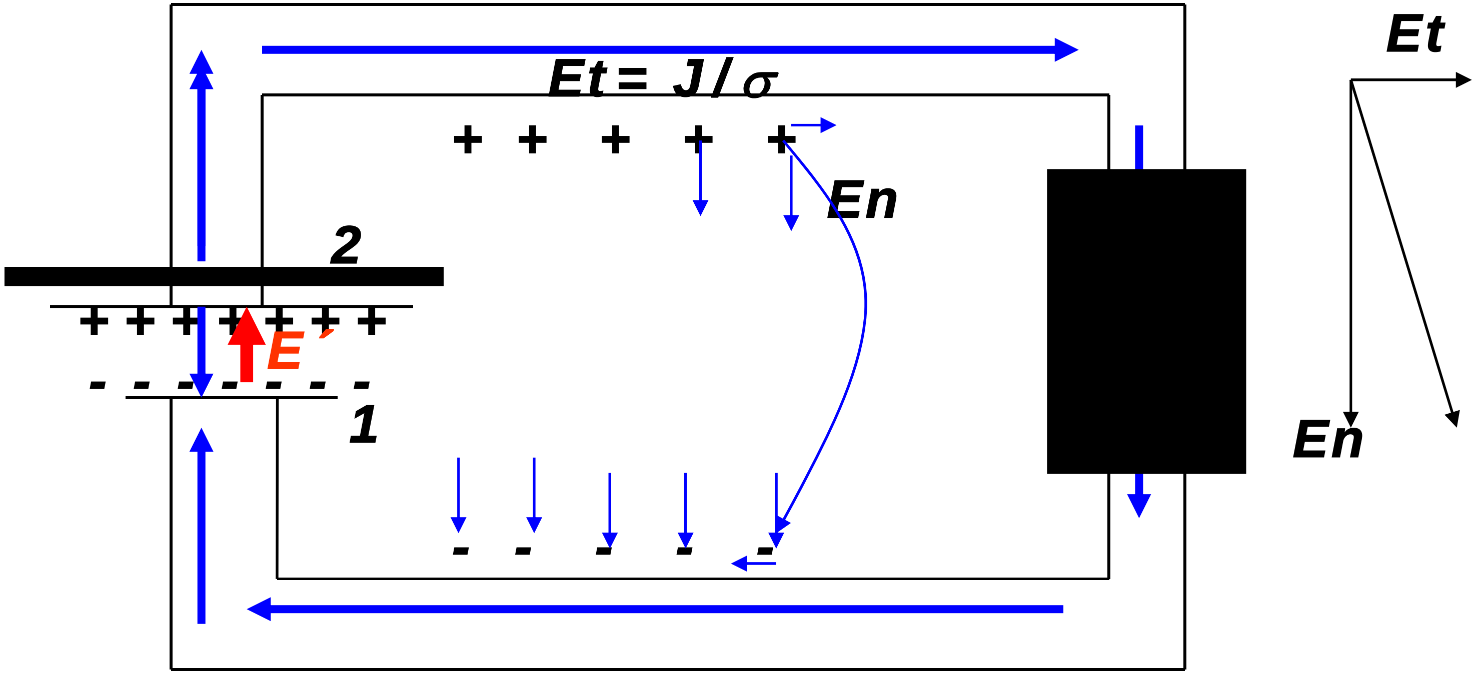
$$\boxed{FEM = \oint \mathbf{E}'\mathbf{dl} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\mathbf{dl}}$$

- **La parte conservativa del campo E da una integral cerrada nula, lo cual muestra que para que exista una corriente es necesario que exista una fuente de campo NO CONSERVATIVO.**
- **La corriente está influenciada por la Geometría**
- **Si la densidad de corriente es constante en todo el camino de integración se puede expresar (casos de geometrías de sección uniforme):**

$$FEM = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\mathbf{dl} = \oint \frac{I}{s\sigma}dl = I.\oint \frac{1}{s\sigma}dl = I.R$$

$$\sum_j Fem_j = \sum_i I.R_i$$

Segunda ley de Kirchoff



- **En el circuito eléctrico existe un lugar donde hay un E' (fem electroquímica pila o batería), hace las veces de bomba de los electrones**
- **El modelo de conducción resulta como si los electrones se movieran a velocidad constante en un fluido viscoso.**
- **La energía disipada por efecto Joule en el conductor es por efecto del ¨rozamiento¨ (choque de los electrones con los iones)**

Ley de Ohm

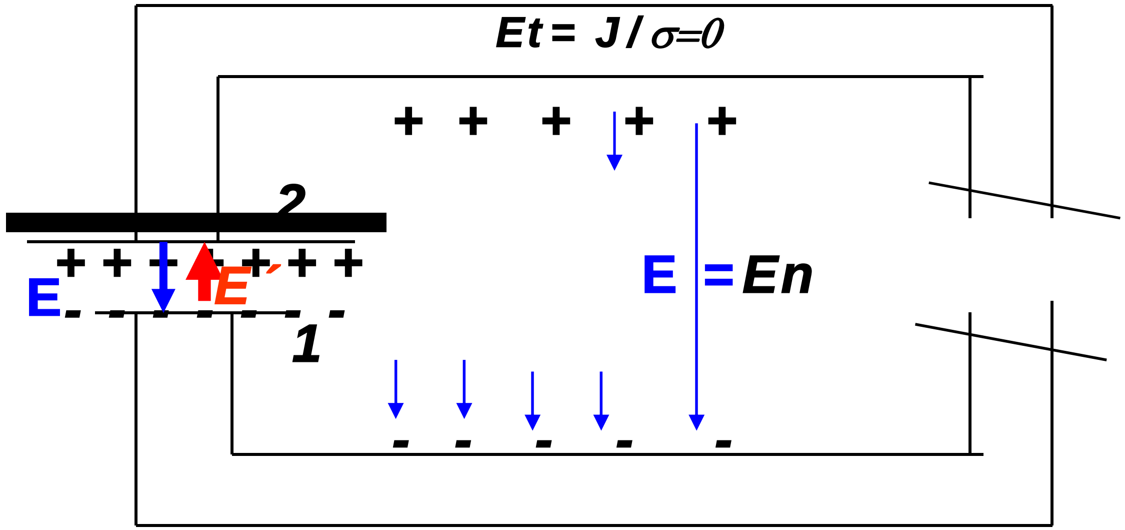
- **En el caso de las corrientes estacionarias dentro del conductor solo existe un campo electrostático E.**
- **La diferencia de potencial al pasar de un punto a otro en la dirección de J es la energía disipada por unidad de carga (se transforma en calor).**
- **El campo impropio E’ solo existe en la pila o batería.**
- **Si despreciamos la resistencia interna de la pila:**

Adentro del conductor

$$\int_2^1 \mathbf{E.dl} = \int_2^1 \frac{\mathbf{J}}{\sigma}.\mathbf{dl} = \frac{I}{\sigma S} l = I.R$$

$$\oint \mathbf{E'dl} = \int_1^2 \mathbf{E'dl} = I.R$$

$$Fem = \int_1^2 \mathbf{E'dl} = \int_2^1 \mathbf{E.dl} = -\int_1^2 \mathbf{E.dl}$$



$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E'}) = 0$$

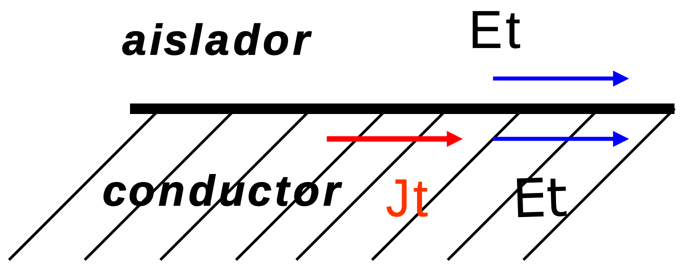
- **En el caso de no haber corriente, si σ es distinta de cero en la pila**

$$\mathbf{E} + \mathbf{E'} = 0 \qquad \mathbf{E} = -\mathbf{E'} \qquad \int_1^2 \mathbf{E'dl} = -\int_1^2 \mathbf{E.dl} = U$$

- **La tensión del campo electrostático entre dos puntos de un circuito abierto es igual a la FEM**
- **En el conductor existe un campo radial o normal al conductor desde la superficie de mayor potencial (+) a la de menor potencial (-). El campo tangencial, Et=0 pues J=0**

Corriente y campo en una frontera Conductor-aislador

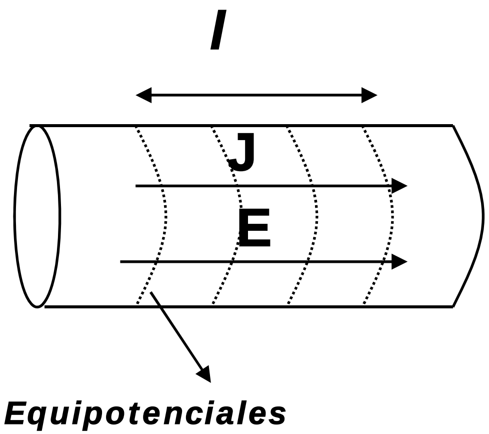
- **En el aislador la corriente es cero pues $\sigma=0$**
- **En el conductor la corriente debe fluir tangencialmente al conductor: por lo tanto del lado del conductor se tiene**
- **Por la continuidad del campo eléctrico tangencial, del lado del aislador el campo tangencial es Et.**
- **Cuando fluye una corriente por un conductor de conductividad finita no es un cuerpo equipotencial como en electrostática**



$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$$ *En un conductor*

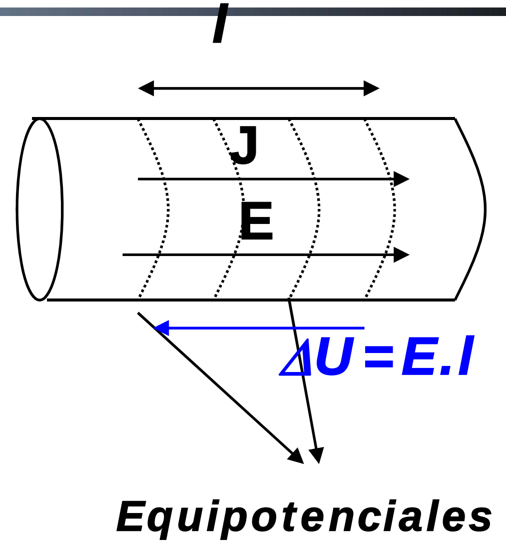
$$Et=\frac{Jt}{\sigma}$$

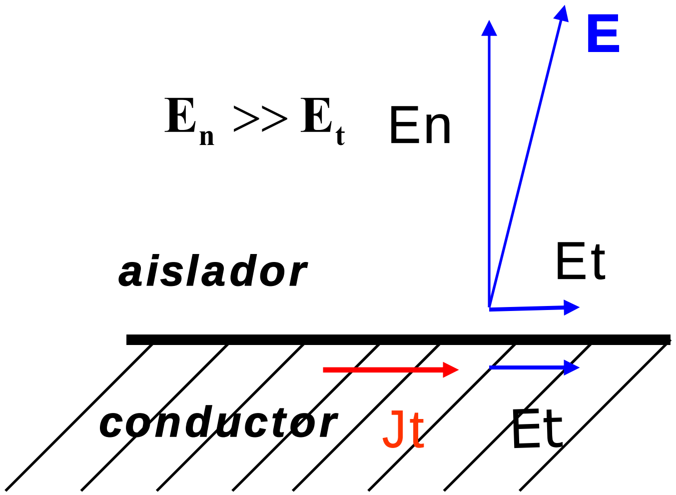
$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{E}=0$$



Corriente y campo en una frontera Conductor-aislador

- **Un conductor con densidad de corriente uniforme**
- **Las líneas punteadas son equipotenciales**
- **E en el conductor es uniforme**
- **La diferencia de potencial es $\Delta U = E.l = I.R$, R es la resistencia de la longitud *l* del conductor**
- **$Et_{conductor} = Et_{aislante}$**
- **Existe una distribución de carga superficial debido a la proximidad con otros conductores a otro potencial, y por lo tanto aparece una E_n , componente perpendicular a la frontera aislador-conductor del lado del aislador.**
- **En el aislador el campo total es la suma vectorial de Et y En**
- **En el conductor En=0 solo existe Et**

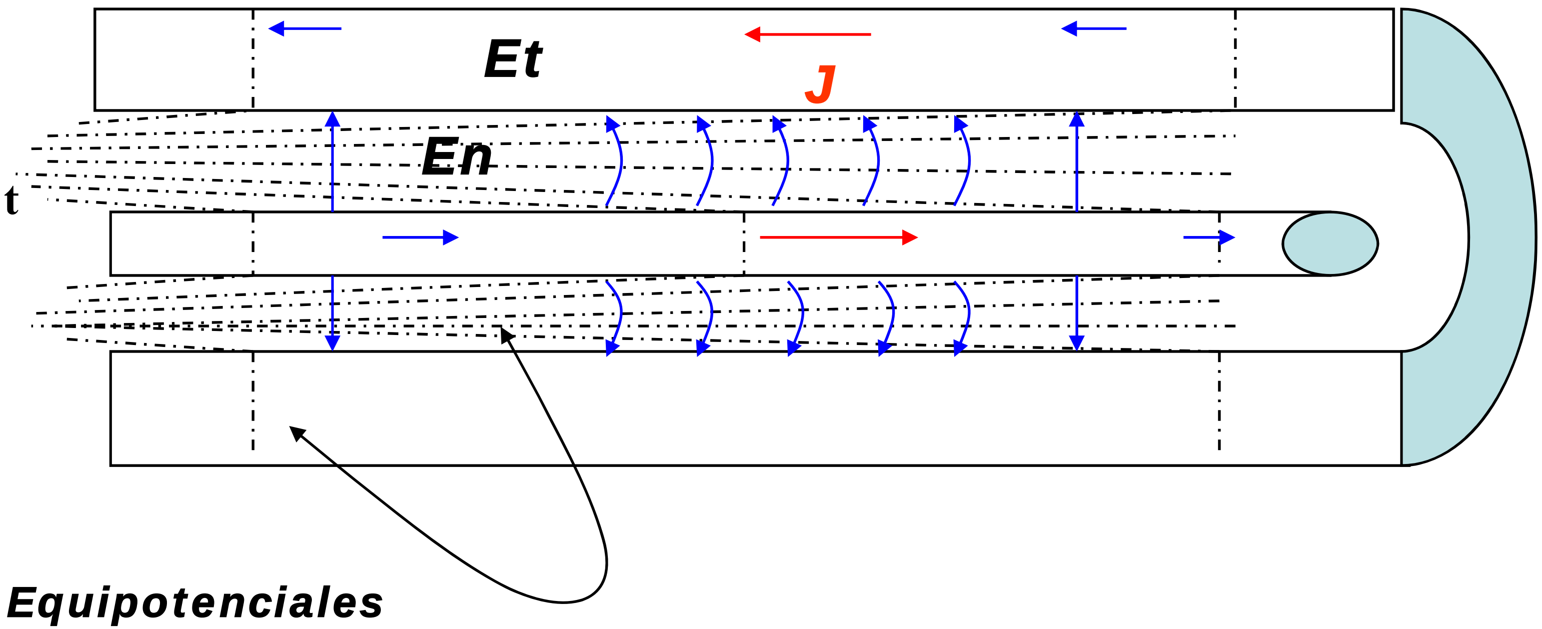




Corriente y campo en una frontera Conductor-aislador

- **En la figura se muestra una sección transversal de una línea coaxil. La corriente fluye hacia la derecha por el conductor interno y regresa por el externo**
- **Puesto que la conductividad de los conductores es alta el campo Et es relativamente bajo respecto al En**
- **En el aislante puede existir un campo alto en virtud de la tensión aplicada en el extremo del cable**
- **Las líneas de campo Prácticamente siguen siendo Perpendiculares a La superficie e iguales a E_n**

$$E_n >> E_t$$

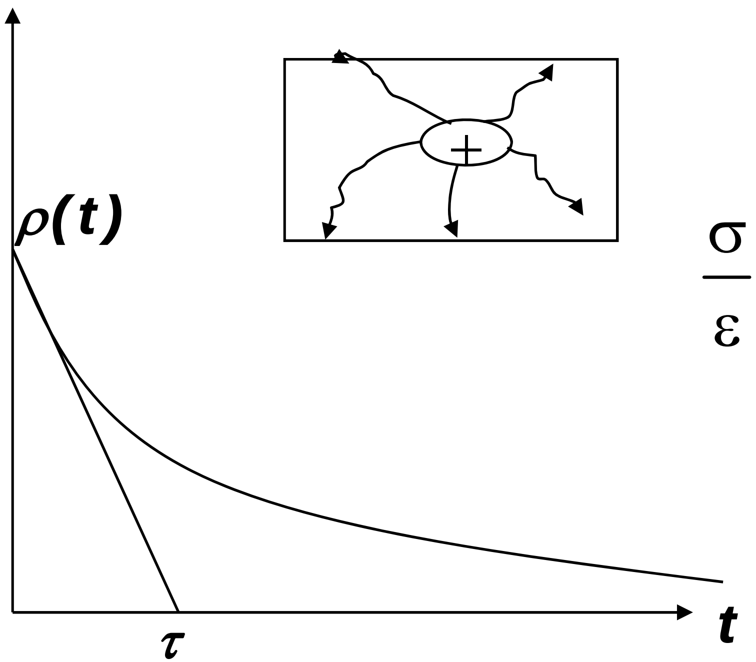


- **Las cargas en un conductor rápidamente se van a la superficie, aún para corrientes no estacionarias (campos variables en el tiempo)**

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{D}$$

$$\nabla \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \mathbf{D} \qquad \nabla \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$



$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \left\} \begin{array}{l} \rho(t) = \rho_0 e^{-t.\sigma/\varepsilon} \\ \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} \end{array} \right.$$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{7}} \approx 10^{-19}$$

•Para corrientes que varian 1/f=T>> τ (tiempo de relajación), vale dentro del conductor $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla \mathbf{J} = 0}$

- **Condiciones de borde**

$$\nabla \mathbf{J} = 0$$

$$\iiint_v \nabla \mathbf{J}.dv = \iint_{sc} \mathbf{J.ds} = 0$$

$$\Delta h \rightarrow 0$$

$$-J_{n1}.S + J_{n2}.S = 0$$

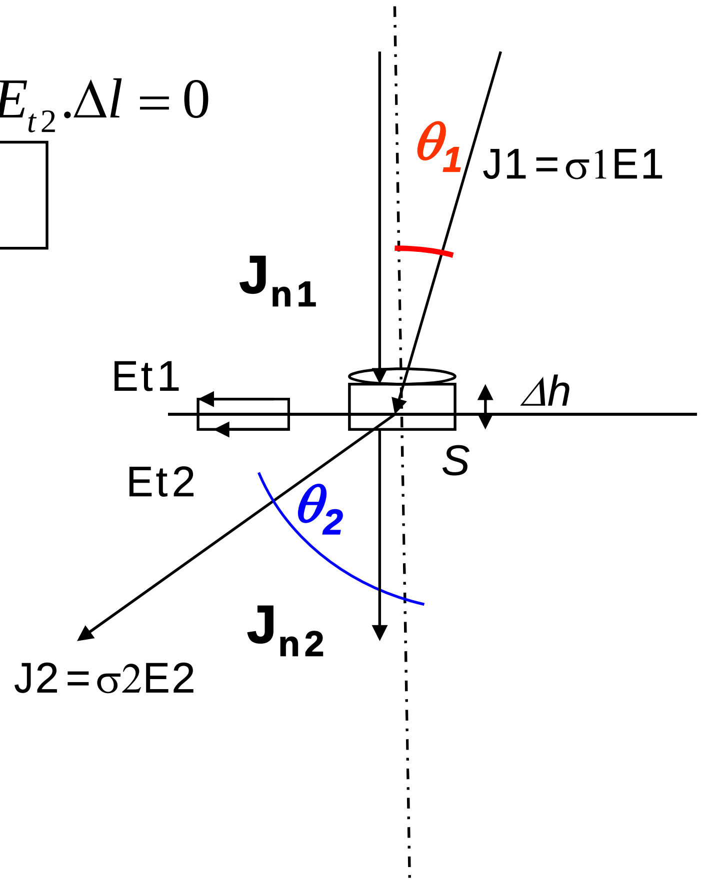
$$\boxed{J_{n1} = J_{n2}}$$

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E.dl} = 0$$

$$E_{t1}.\Delta l - E_{t2}.\Delta l = 0$$

$$\boxed{E_{t1} = E_{t2}}$$



$$J_1 \cos(\theta_1) = J_2 \cos(\theta_2)$$

$$\frac{J_1 sen(\theta_1)}{\sigma_1} = \frac{J_2 sen((\theta_2)}{\sigma_2}$$

$$\frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$J_{n1} = J_{n2}$$

$$E_{n1} = J_{n1} / \sigma_1$$

$$E_{n2} = J_{n2} / \sigma_2$$

$$\frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\sigma_1 E_{t1} = J_{t1}$$

$$\sigma_2 E_{t2} = J_{t2}$$

$$\frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}}$$

Condiciones de Frontera en corrientes Estacionarias

$$J_{n1} = J_{n2}$$

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$$

$$E_{n2} = \frac{\sigma_1 E_{n1}}{\sigma_2}$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = D_{n1}$$

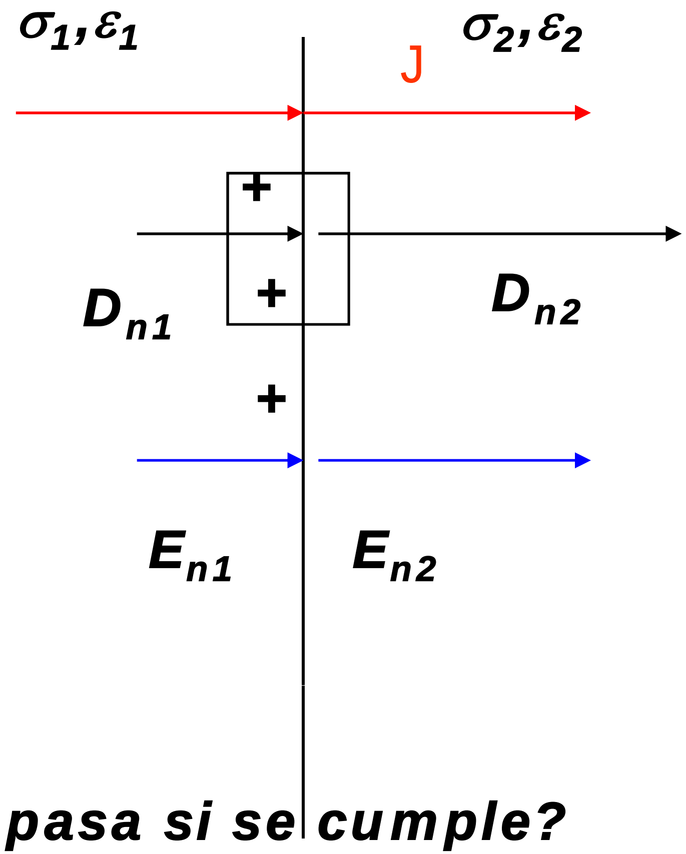
$$\varepsilon_2 E_{n2} = D_{n2}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\sigma_1 E_{n1}}{\sigma_2} = D_{n2}$$

$$-D_{n1} + D_{n2} = \sigma_{carga}$$

$$-\varepsilon_1 E_{n1} + \varepsilon_2 \frac{\sigma_1 E_{n1}}{\sigma_2} = \sigma_{carga}$$

$$E_{n1}\left(\frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_2}\right) = \sigma_{carga}$$



Que pasa si se cumple?

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}}$$

- **La distribución de corriente si bien está determinada por la FEM y por la conductividad del medio, dentro de los conductores solo existe campo conservativo**
- **Se cumple:**

$$\boxed{\nabla \mathbf{J} = 0 \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \qquad \boxed{\nabla x \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{E} = -\nabla U}$$

$$\nabla \mathbf{J} = \nabla(\sigma \mathbf{E}) = -\underset{\text{constante}}{\sigma} \nabla^2 U = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2 U = 0}$$

Laplace: dentro del conductor

- **La solución para corriente estacionaria es matemáticamente idéntica que la solución de potenciales electrostáticos, que tengan la misma geometría ,reemplazando ε por σ.. ANALOGIAS**

$$\boxed{\nabla \mathbf{D} = 0 \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \qquad \boxed{\nabla x \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{E} = -\nabla U}$$

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{J}$$

$$Q \rightarrow I$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$$

$$U \rightarrow U$$

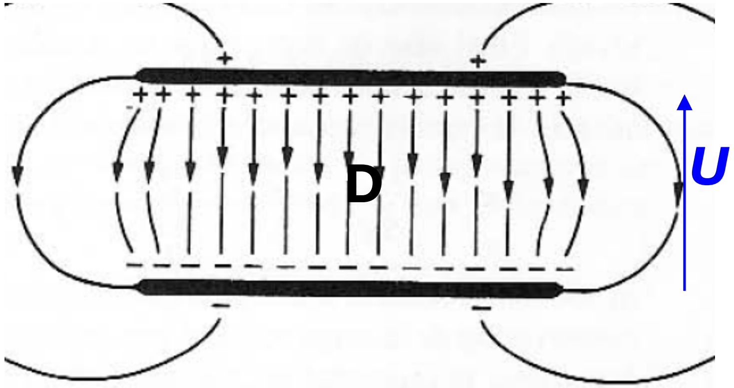
$$\varepsilon \rightarrow \sigma$$

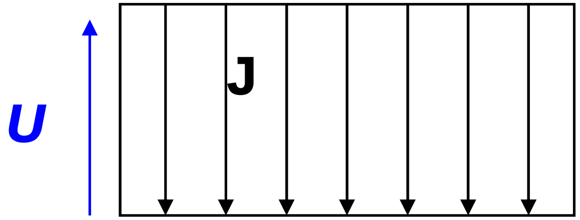
$$C = \frac{Q}{U} \rightarrow G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$$

$$G = C.\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$R = \frac{1}{C}\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

- **Los métodos de resolución de la ecuación de Laplace son aplicables a los problemas de corrientes estacionarias.**
- **La diferencia entre ambos problemas es que la conductividad de una determinada región puede anularse, mientras que el valor de la permeabilidad nunca será cero.**
- **Por ejemplo si analizamos el caso de dos electrodos planos paralelos y entre ellos un medio de conductividad σ y comparamos con la misma geometría y el medio lleno de un dieléctrico de permitividad ε, tendremos una distribución uniforme de corriente en el medio conductor sin ninguna distorsión, mientras que en el caso del capacitor aparece una distribución NO uniforme del campo E y de D debido al efecto de borde, y por lo tanto solo es aproximadamente uniforme.**





$$\frac{1}{C}=\frac{U}{Q}=\frac{\int \mathbf{E.dl}}{\iint_s \mathbf{D.ds}}=\frac{\int \mathbf{E.dl}}{\varepsilon\iint_s \mathbf{E.ds}}\approx\frac{l}{S\varepsilon}$$

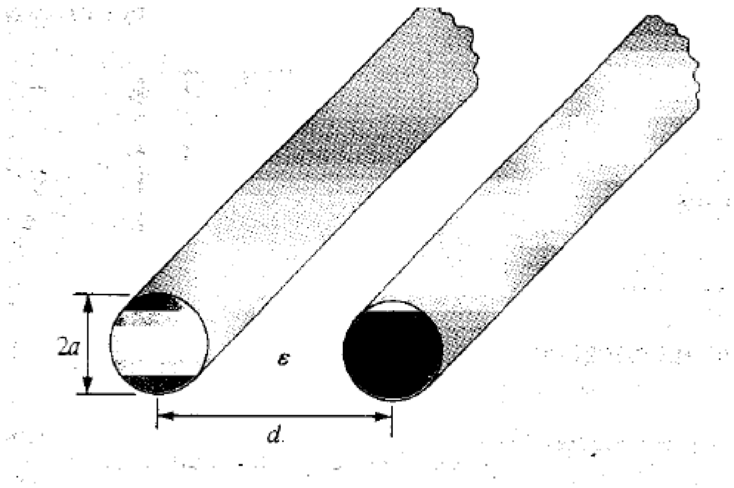
$$R=\frac{U}{I}=\frac{\int \mathbf{E.dl}}{\iint_s \mathbf{J.ds}}=\frac{\int \mathbf{E.dl}}{\sigma\iint_s \mathbf{E.ds}}=\frac{l}{S\sigma}$$

- **En general si conocemos la capacidad de una determinada geometría entonces podemos calcula la resistencia**

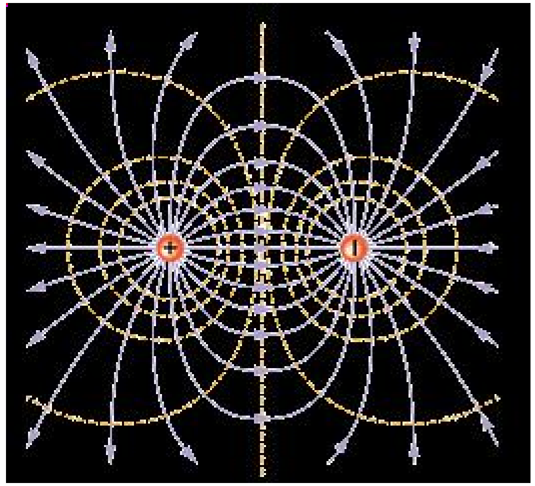
$$R.\sigma=\frac{\varepsilon}{C}---->C.R=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\boxed{R=\frac{\varepsilon}{C.\sigma}}$$

- **Calculo de la resistencia de dos electrodos cilíndricos paralelos muy largos inmersos en un material de conductividad σ**



$$R = \frac{\varepsilon}{C.\sigma}$$



$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\left[\dfrac{d}{2a}\right]}$$

Capacidad por unidad de longitud

$$R = \frac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{d}{2a}\right)}{\pi\sigma}$$

Resistencia para una longitud unitaria de la línea

$$C.l$$

Capacidad para una longitud l

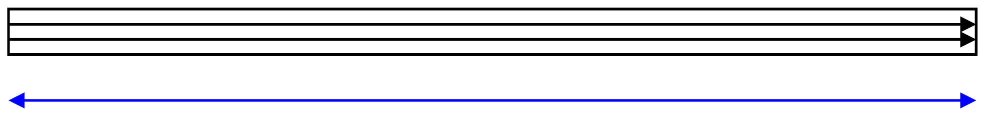
Resistencia para para una longitud l

$$R/l$$

Caso de una geometría donde el conductor y el dieléctrico son de gran longitud y sección transversal S pequeña.
Los resultados no serían análogos, pues en el caso del capacitor el efecto de borde (campo en el aire, fuera del dieléctrico) pesa y en el conductor no existe este efecto pues la conductividad del aire es cero .

I

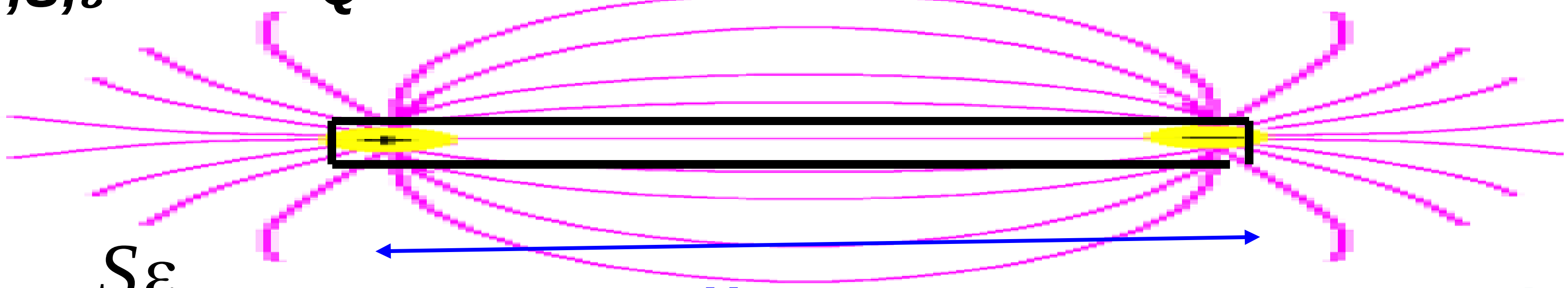
l,S,σ



U

$$R = \frac{l}{S\sigma}$$

l,S,ε **Q**



U

$$C \neq \frac{S\varepsilon}{l}$$

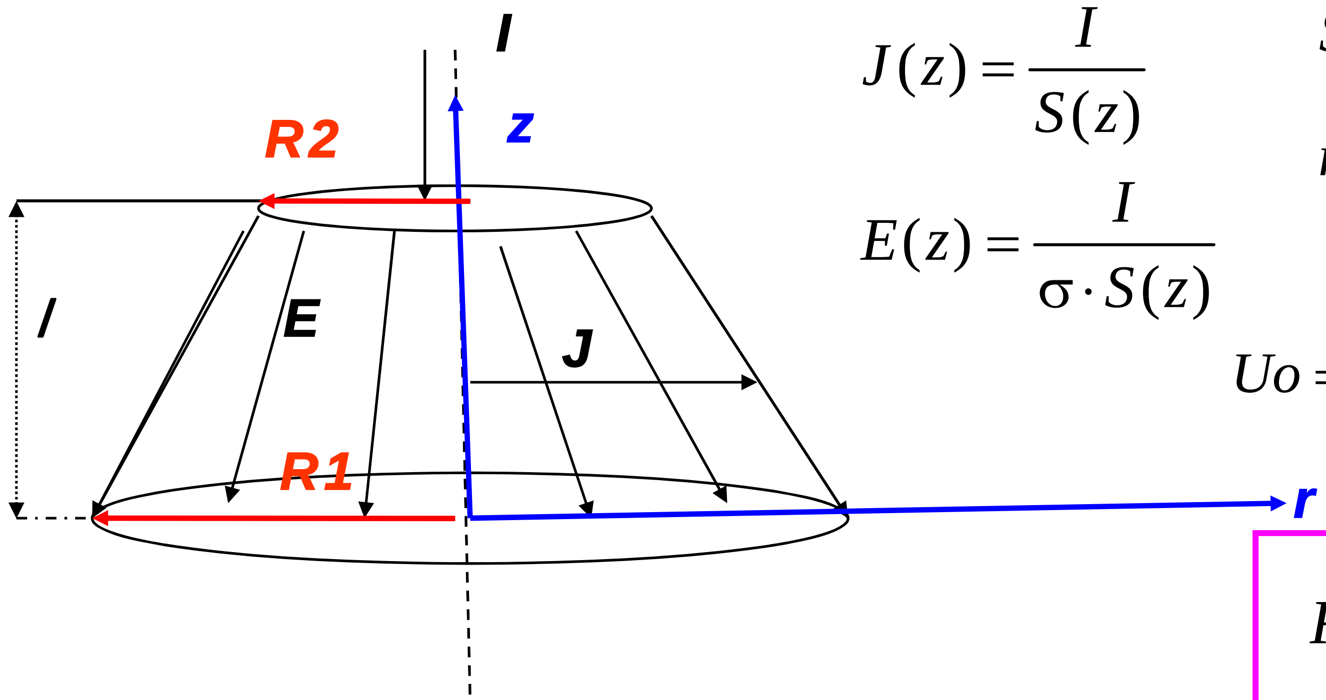
Calculo de Resistencia de un conductor

- El problema de encontrar el valor de la resistencia de un conductor con **sección no uniforme** debe ser tratado como un problema de **resolución de la ecuación de Laplace**.
  - 1. Elegir el sistemas de coordenadas
  - 2. Asumir una diferencia de potencial entre conductores terminales Uo
  - 3. Resolver la ecuación de Laplace y obtener U(x,y,z). Determinar

    $$\mathbf{E} = -\nabla U$$
  - 4. Obtener I,

    $$I = \int \sigma \mathbf{E.ds}$$
  - 5. Obtener R=Uo/I.

- En algunos casos de geometrías sencillas puede estimarse la densidad de corriente en función de la corriente y plantear el campo eléctrico en función de la corriente , integrarlo para obtener Uo y encontrar el valor de R=Uo/I
- Ejemplo la resistencia de un tronco de cono:



$$J(z) = \frac{I}{S(z)}$$

$$E(z) = \frac{I}{\sigma \cdot S(z)}$$

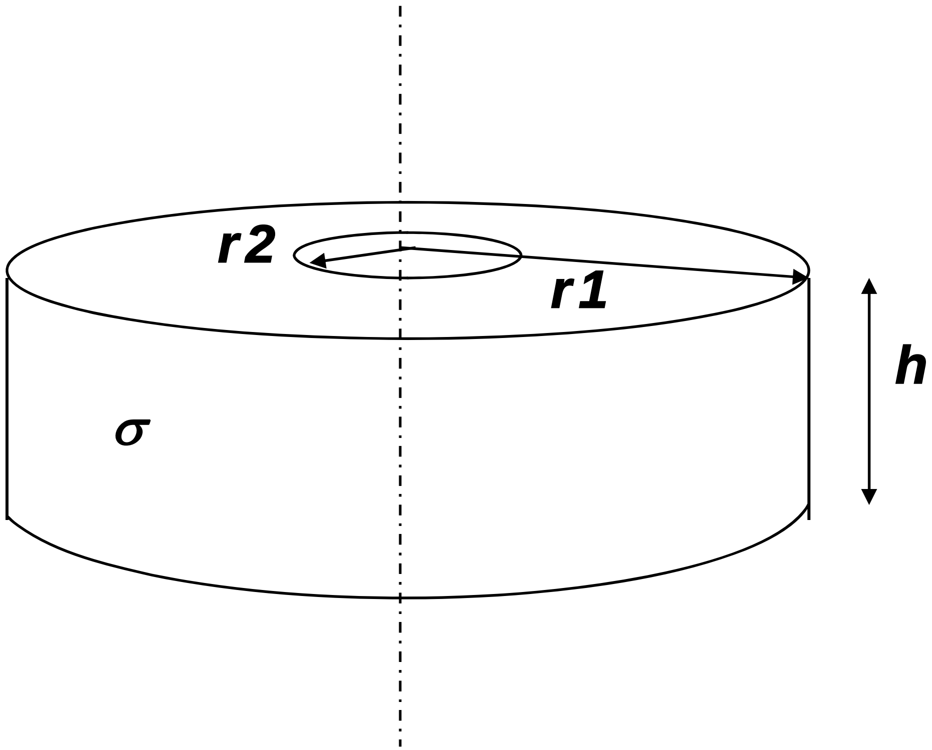
$$S(z) = \pi r^2$$

$$r = R_1 - \left(\frac{R_1 - R_2}{l}\right) z$$

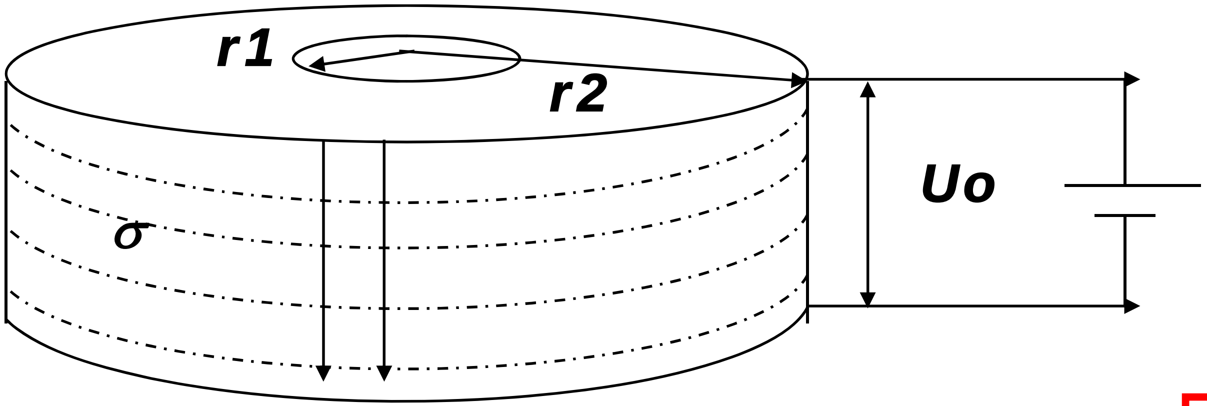
$$Uo = -\int_0^l E dl = I \int_0^l \frac{1}{\sigma S(z)} dz$$

$$\boxed{R = \frac{Uo}{I} = \int_0^l \frac{1}{\sigma . S(z)} dz}$$

- **Cálculo de la resistencia de una arandela???**



- **Sección transversal uniforme**
- **Superficies equipotenciales marcadas en líneas de punto (discos)**



$$E = \frac{Uo}{h}$$

$$J = E.\sigma$$

$$I = J.S$$

$$I = \frac{Uo}{h}.\sigma\pi(r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2})$$

$$\boxed{R = \frac{Uo}{I} = \frac{h}{\sigma\pi(r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2})}}$$

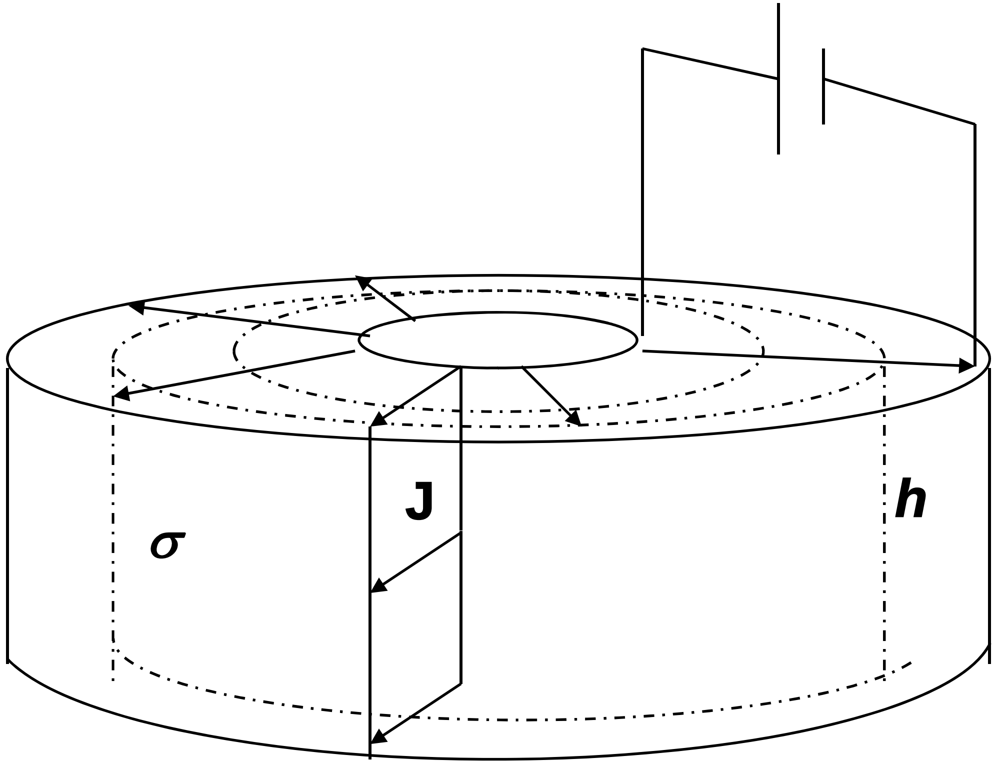
- **Arandela alimentada con una FEM entre r2 y r1**
- **Superficies equipotenciales marcadas en líneas de punto (cilindros)**

$$Jr(r) = \frac{I}{S(r)} = \frac{I}{2\pi r.h}$$

$$Er = \frac{Jr(r)}{\sigma} = \frac{I}{\sigma 2\pi r.h}$$

$$Uo = -\int_{r2}^{r1} E.dr = -\int_{r2}^{r1} \frac{I}{\sigma 2\pi r.h} dr = \frac{I}{\sigma.h.2\pi} \ln(\frac{r_2}{r_1})$$

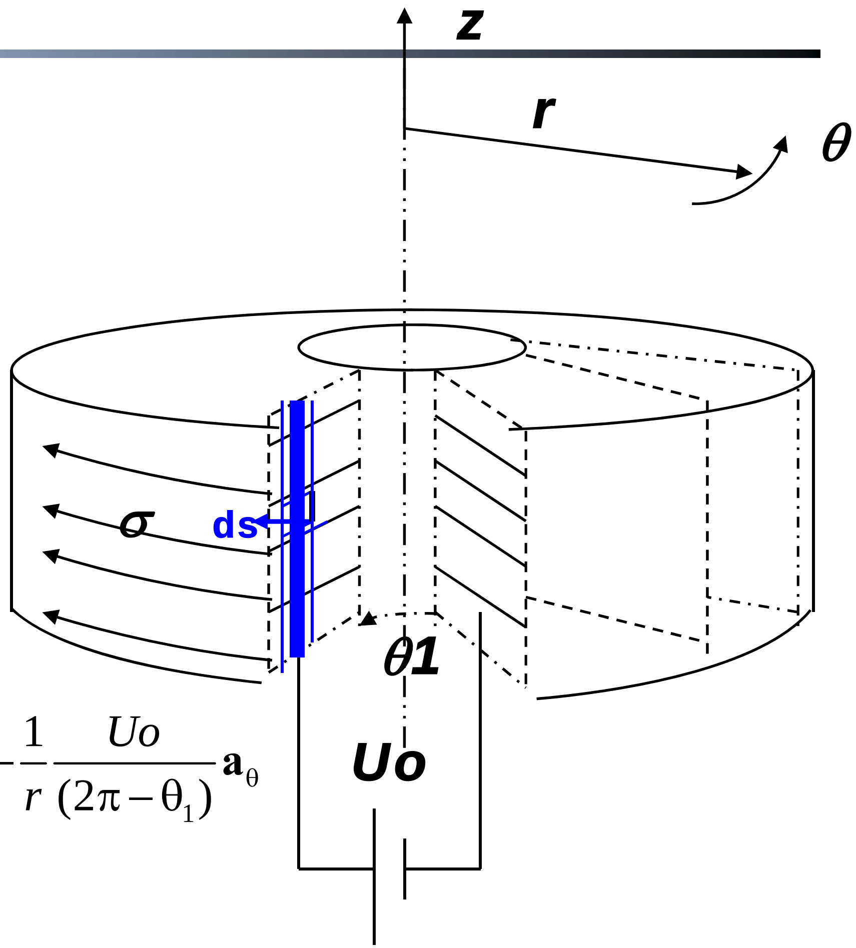
$$\boxed{R = \frac{Uo}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma.h} \ln(\frac{r_2}{r_1})}$$



Caso análogo a la Capacidad de un cable coaxil:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(\frac{r_2}{r_1})} \qquad G = \frac{2\pi\sigma h}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$

- **La fem se aplica entre dos caras luego de hacer un corte del arandela de un cierto ángulo $\theta 1$**
- **Superficies equipotenciales marcadas en líneas de punto (planos, θ constante)**
- **U=0, $\theta=0$**
- **U=Uo, $\theta=2\pi-\theta 1$**
- **Puesto que el potencial solo es función de θ, la ecuación de Laplace se simplifica**



$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \qquad U = a + b\theta$$

$$U(0) = a = 0$$

$$U(2\pi - \theta_1) = Uo = b(2\pi - \theta_1)$$

$$b = \frac{Uo}{2\pi - \theta_1}$$

$$U = \frac{Uo}{2\pi - \theta_1}\theta$$

$$E = -\nabla U = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{Uo}{(2\pi - \theta_1)}\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sigma}{r}\frac{Uo}{(2\pi - \theta_1)}\mathbf{a}_\theta$$

$$I = \iint_s \mathbf{Jds} = \int_{r1}^{r2} -\frac{\sigma}{r}\frac{Uo}{(2\pi - \theta_1)}\mathbf{a}_\theta(-hdr\mathbf{a}_\theta) = \frac{h\sigma Uo}{(2\pi - \theta_1)}\ln(\frac{r_2}{r_1})$$

$$\boxed{R = \frac{Uo}{I} = \frac{Uo}{\dfrac{h\sigma Uo}{(2\pi - \theta_1)}\ln(\dfrac{r_2}{r_1})} = \frac{2\pi - \theta_1}{h\sigma \ln(\dfrac{r_2}{r_1})}}$$