Introducción al diseño de Filtros

NORMALIZACIÓN EN IMPEDANCIA Y FRECUENCIA

CARACTERIZACIÓN DE FILTROS

FUNCIONES DE TRANSFORMACIÓN

Introducción

- Los filtros son cuadripolos particulares, cuyo objetivo es transmitir con la mínima distorsión posible, las señales comprendidas dentro de determinadas bandas de frecuencia, atenuando al mismo tiempo todas las demás frecuencias presentes en dicha señal que estén fuera de las bandas.
- Una clasificación muy general basada en las bandas de frecuencias que dejan pasar conduce a las denominaciones: pasa bajos, pasa altos, pasa banda, supresor de banda, etc.
- En principio, se pueden clasificar en las siguientes tipologías: *analógicos*, *digitales* e *híbridos* (o de capacitor conmutado, los cuales contienen elementos analógicos y digitales.
- Los filtros analógicos se pueden clasificar en *pasivos*, construidos en base a resistencias, inductores y capacitores; y en *activos*, conformados por resistencias, capacitores y amplificadores operacionales.
- Los filtros pasivos están compuestos básicamente por elementos no disipativos (L y C) y el efecto de disipación por apartamiento de las características ideales de los componentes se toma en cuenta en la etapa de ajustes y correcciones finales.

Normalización en impedancia

- Las normalizaciones permiten simplificar los valores numéricos de los elementos, para poder operar con ellos matemáticamente. No causan ninguna pérdida de generalidad.
- La normalización de impedancia permite cambiar el nivel de impedancias en un valor R_0.
- Para normalizar el nivel de impedancias a un valor R_0, se dividen todas las impedancias por R_0.

$$Z_N(s) = \frac{Z(s)}{R_0}$$

- Para el caso de los elementos pasivos R, L y C, los efectos pueden demostrarse de la siguiente manera

$$R_N = (R)\frac{1}{R_0} \Rightarrow R_N = \frac{R}{R_0} \qquad sL_N = (sL)\frac{1}{R_0} \Rightarrow L_N = \frac{L}{R_0} \qquad \frac{1}{sC_N} = \left(\frac{1}{sC}\right)\frac{1}{R_0} \Rightarrow C_N = R_0 C$$

- La desnormalización es el proceso inverso, que debe siempre ejecutarse para retornar a los valores reales

$$Z(s) = R_0 Z_N(s)$$

- Para el caso R, L, C, los efectos resultan

$$R = (R_N)R_0 \Rightarrow R = R_N R_0 \qquad sL = (sL_N)R_0 \Rightarrow L = L_N R_0 \qquad \frac{1}{sC} = \left(\frac{1}{sC_N}\right)R_0 \Rightarrow C = \frac{C_N}{R_0}$$

Normalización en frecuencia

- La normalización en frecuencia permite operar respecto a un valor de frecuencia angular ω_0.
- Para normalizar el nivel de frecuencia a un valor ω_0, se define la frecuencia compleja normalizada.

$$\bar{s} = s/\omega_0$$

- Para el caso de los elementos pasivos R, L y C, los efectos pueden demostrarse de la siguiente manera

$$R_N = R \qquad \bar{s}L_N = \frac{s}{\omega_0}(\omega_0 L) \Rightarrow L_N = \omega_0 L \qquad \frac{1}{\bar{s}C_N} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0}(\omega_0 C)} \Rightarrow C_N = \omega_0 C$$

- La desnormalización es el proceso inverso, que debe siempre ejecutarse para retornar a los valores reales

$$s = \bar{s}\cdot\omega_0$$

- Para el caso R, L, C, los efectos resultan

$$R_N = R \qquad sL = \bar{s}\cdot\omega_0 \frac{L_N}{\omega_0} \Rightarrow L = \frac{L_N}{\omega_0} \qquad \frac{1}{sC} = \frac{1}{\bar{s}\cdot\omega_0 \frac{C_N}{\omega_0}} \Rightarrow C = \frac{C_N}{\omega_0}$$

- Los efectos combinados de normalización y desnormalización de frecuencia e impedancia resultan

$$\frac{1}{R_0}R + \frac{1}{R_0}\cdot(\omega_0 L)\cdot\frac{s}{\omega_0} + \frac{1}{R_0}\cdot\frac{1}{\frac{s}{\omega_0}(\omega_0 C)}$$

Normalización

$$R_0 R_N + R_0 \frac{L_N}{\omega_0}(\bar{s}\cdot\omega_0) + R_0 \frac{1}{\frac{C_N}{\omega_0}} \frac{1}{(\bar{s}\cdot\omega_0)}$$

Desnormalización

Filtro Pasa Bajos Ideal - Características

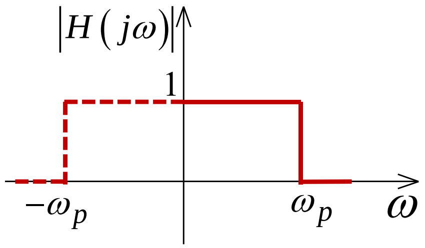
- La denominación *característica de amplitud* se refiere a alguna representación gráfica de $|U_2/U_1|$ ó $|U_1/U_2|$ en función de la pulsación angular ω ó de la frecuencia f.

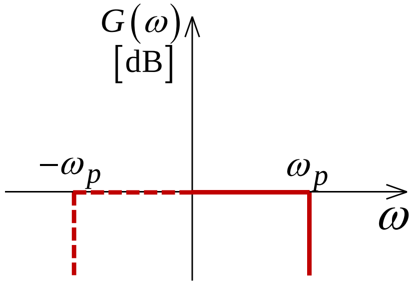
- Si $H(s)$ es la transferencia de tensión del circuito, es decir la relación de la tensión de *salida* a la tensión de *entrada,* cuando se la evalúa sobre el eje $j\omega$ resulta la denominada *amplitud de la respuesta en frecuencia.*

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \qquad\qquad |H(j\omega)| = |H(s)|_{s=j\omega}$$

- Si $|H(j\omega)|$ es la función de un filtro *pasa bajos* ideal cuya banda de paso se encuentra limitada a la pulsación ω_p, su representación en dB suele denominarse *ganancia G(ω)*.

$$G(\omega) = |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log|H(j\omega)| \quad [\text{dB}]$$

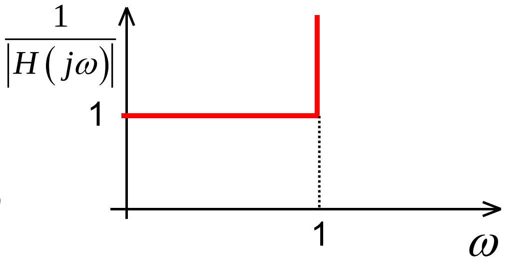


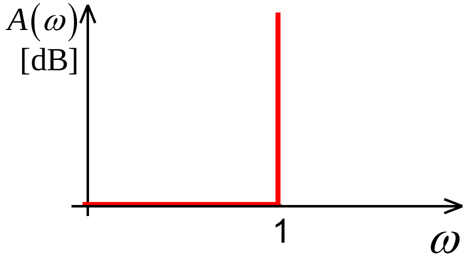


- La inversa de la *amplitud de la respuesta en frecuencia* del filtro da lugar a la definición de la función Atenuación A(ω) cuando se la expresa en dB.

$$A(\omega) = 20\log\frac{1}{|H(j\omega)|} \quad [\text{dB}]$$

Las funciones están normalizadas respecto a ω_p

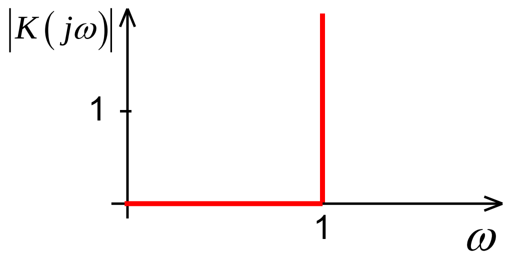




Filtro Pasa Bajos Ideal - Características

- Otra función que se define es la *función característica* $K(s)|_{s=j\omega}$ tal que

$$\left[H(s)\right]^2 = \frac{1}{1+\left[K(s)\right]^2}$$



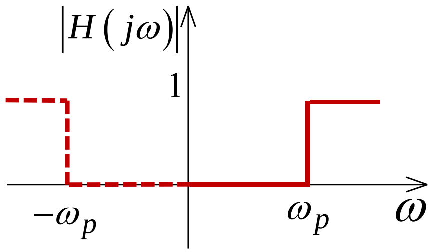
- A partir de la definición de la función característica, puede escribirse la atenuación como

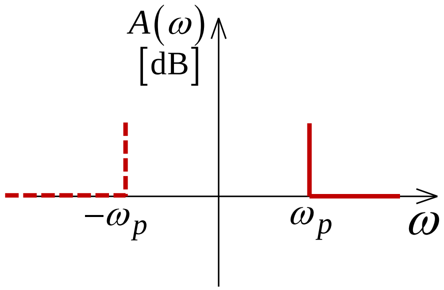
$$A(\omega) = 20\log\left(1+\left|K(j\omega)\right|\right) \quad [\text{dB}]$$

- Las definiciones de las funciones anteriores permiten caracterizar un filtro pasa bajos.
- En el caso de filtros pasa bajos reales, las gráficas hasta aquí analizadas no serán realizables, sino que se obtendrán filtros que intentan aproximarse a las mismas.
- Esto se debe a que, por un lado, la ganancia de los circuitos eléctricos no se puede mantener absolutamente constante en una banda de frecuencia.
- A su vez, la ganancia es una función continua de ω y no puede exhibir un salto desde 1 hasta 0 en la pulsación ω_p
- Las funciones de aproximación que se utilicen para diseñar filtros pasa bajos serán tratadas en las próximas clases.

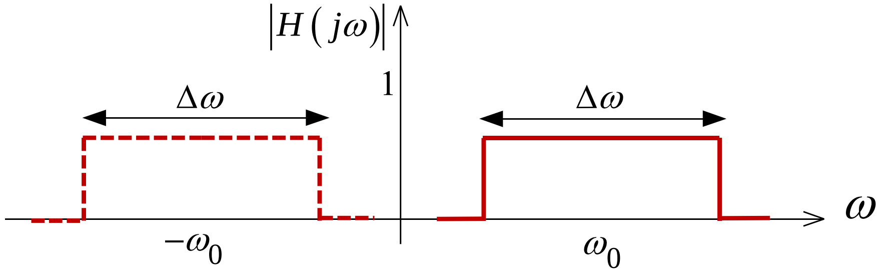
Respuesta y Atenuación - Filtros

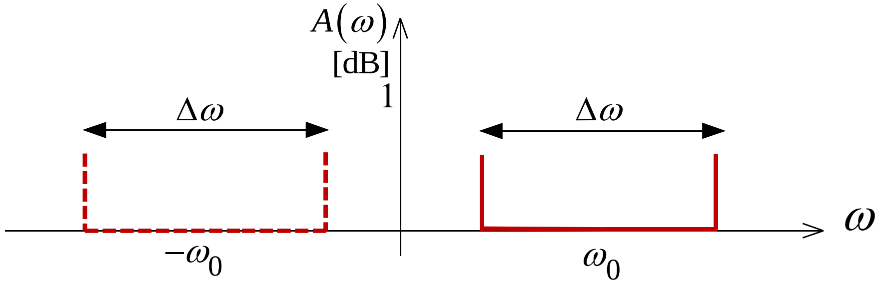
- Las mismas funciones pueden analizarse para todo tipo de filtros.
- Filtro Pasa Altos



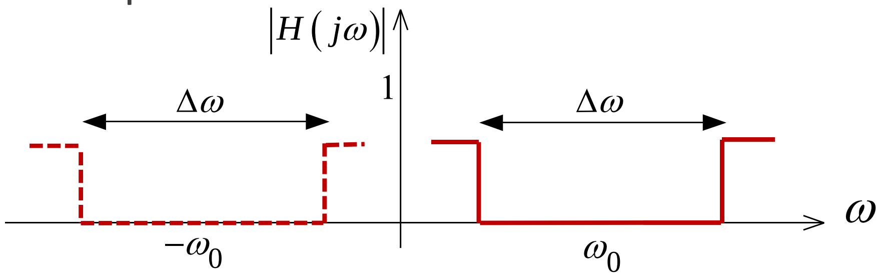


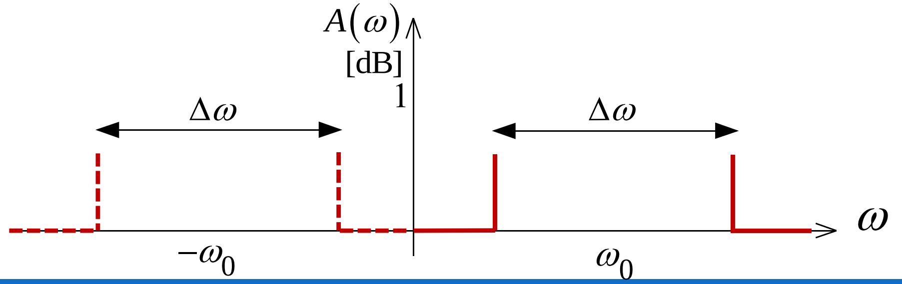
- Filtro Pasa Banda





- Filtro Suprime Banda



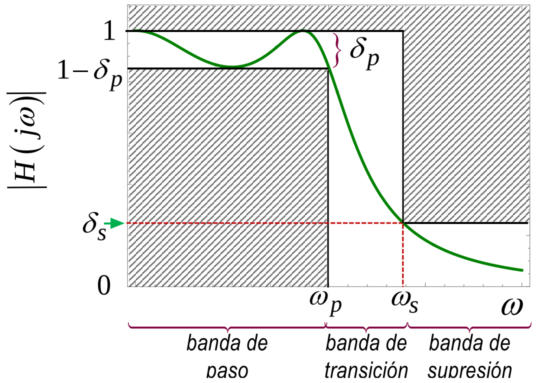


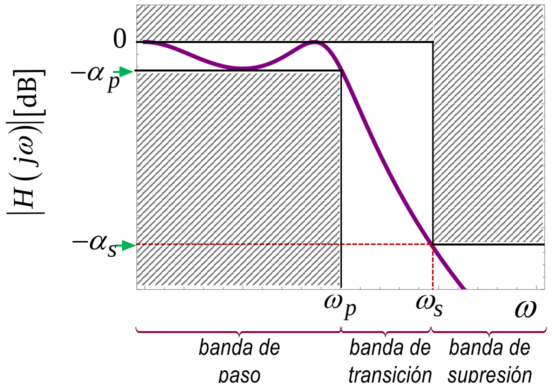
Especificación de un filtro pasa bajos real

- La especificación de un filtro pasa bajos real contiene los requerimientos relevantes para el correcto desempeño, en términos de límites aceptables para los apartamientos respecto de la característica de amplitud del filtro pasa bajos ideal.
- Normalmente, la especificación define la frecuencia límite de la banda de paso, límites para la ondulación aceptable dentro de la banda de paso y la atenuación requerida a una o más frecuencias en la banda de supresión.
- Frente a la irrealizabilidad de los filtros ideales, se debe emplear una *aproximación* a la magnitud de la respuesta en frecuencia ideal.
- Una aproximación *aceptable* a la característica de amplitud debe tener una variación en la banda de paso suficientemente pequeña como para ser despreciable, y una atenuación en la banda de supresión que sea suficientemente grande.
- En la mayoría de los filtros reales, la ganancia en la banda de supresión es varios órdenes de magnitud inferior a la ganancia en la banda de paso. Por ello, la ganancia normalmente se expresa en decibeles (dB).
- Por ejemplo, la ganancia *mínima* de la banda de paso podría especificarse como 0,707 ó −3 dB, mientras que la ganancia máxima en la banda de supresión podría especificarse como 0,0001 ó −80 dB. Puede notarse que los valores en decibeles son más manejables cuando las ganancias son muy pequeñas.

Especificación en términos de ganancia

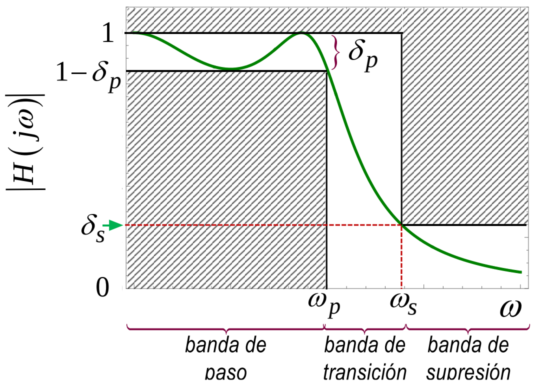
- Cuando se trata de filtros, la ganancia se define como la ganancia *relativa* referida a la máxima ganancia en la banda de paso. Por ello, la amplitud de la respuesta en frecuencia *se normaliza* de manera tal que la ganancia máxima en la banda de paso sea 1 p.u., lo que corresponde a 0 dB.
- La especificación normalizada de la *amplitud de la respuesta en frecuencia* en la cual el borde de la banda de *paso* es la pulsación ω_p y el límite de la banda de *supresión* es ω_s, suele tener la siguiente forma

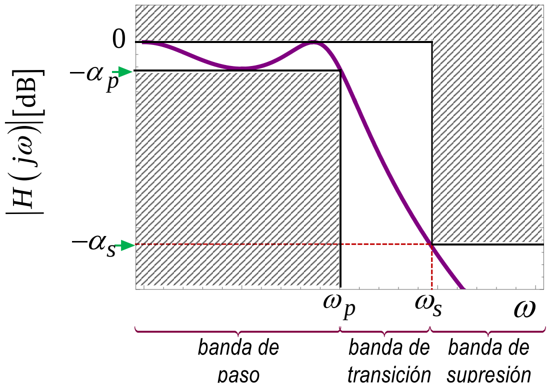




- El intervalo comprendido entre el borde de la banda de paso y el borde de la banda de supresión, es decir el intervalo ω_s - ω_p, es la denominada banda de *transición.*
- Dado que se trata de un filtro real, la característica de amplitud requerida suele especificarse mediante *rangos de tolerancia* tanto para la banda de paso como para la banda de supresión.
- Para $|H(j\omega)|$ se indican los rangos de tolerancia δ_p para la banda de paso y δ_s para la banda de supresión.
- Para $|H(j\omega)|$ en dB se indican los rangos $-\alpha_p$ para la banda de paso y $-\alpha_s$ para la banda de supresión.

Especificación en términos de ganancia



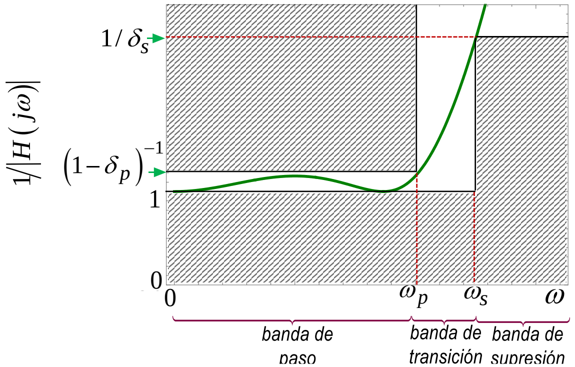


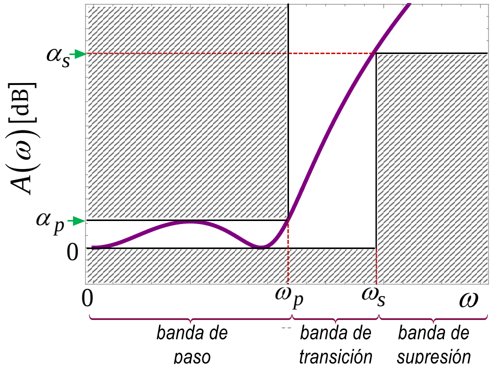
- La relación entre ambas especificaciones resulta $\alpha_p = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log(1-\delta_p) \Rightarrow 10^{-0{,}05 \cdot \alpha_p} = 1-\delta_p$
- Despejando, se obtiene $\delta_p = 1 - 10^{-0{,}05 \cdot \alpha_p}$
- De la misma manera, para el caso de la banda de supresión resulta $\alpha_s = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log(\delta_s)$ por lo que $\delta_s = 10^{-0{,}05 \cdot \alpha_s}$
- Por lo tanto, la especificación del filtro pasa bajos que se desea sintetizar, se efectúa mediante pares de valores $(\omega_p;\delta_p)$ y $(\omega_s;\delta_s)$ si la característica considerada es $|H(j\omega)|$ en p.u. , o bien $(\omega_p;\alpha_p)$ y $(\omega_s;\alpha_s)$ si la característica considerada es $|H(j\omega)|$ en dB.

Especificación en términos de atenuación

- Cuando se trata de filtros, la atenuación se define como la atenuación *relativa* referida a la mínima atenuación en la banda de paso. Por ello, la característica de atenuación *se normaliza* de manera tal que la atenuación mínima en la banda de paso sea 1 p.u., lo que corresponde a 0 dB.

- La especificación normalizada de la *atenuación* en la cual el borde de la banda de *paso* es la pulsación ω_p y el límite de la banda de *supresión* es ω_s, suele tener la siguiente forma



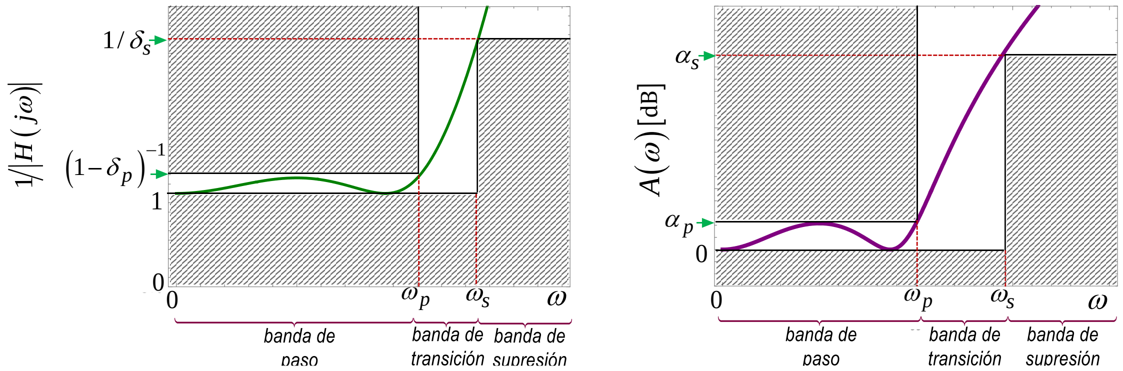


- Dado que se trata de un filtro real, la característica de atenuación requerida suele especificarse mediante *rangos de tolerancia* tanto para la banda de paso como para la banda de supresión.

- Para $|H(j\omega)|^{-1}$ se indican los rangos de tolerancia $1/(1-\delta_p)$ para la banda de paso y $1/\delta_s$ para la banda de supresión.

- Para $|H(j\omega)|^{-1}$ en dB se indican los rangos α_p para la banda de paso y α_s para la banda de supresión.

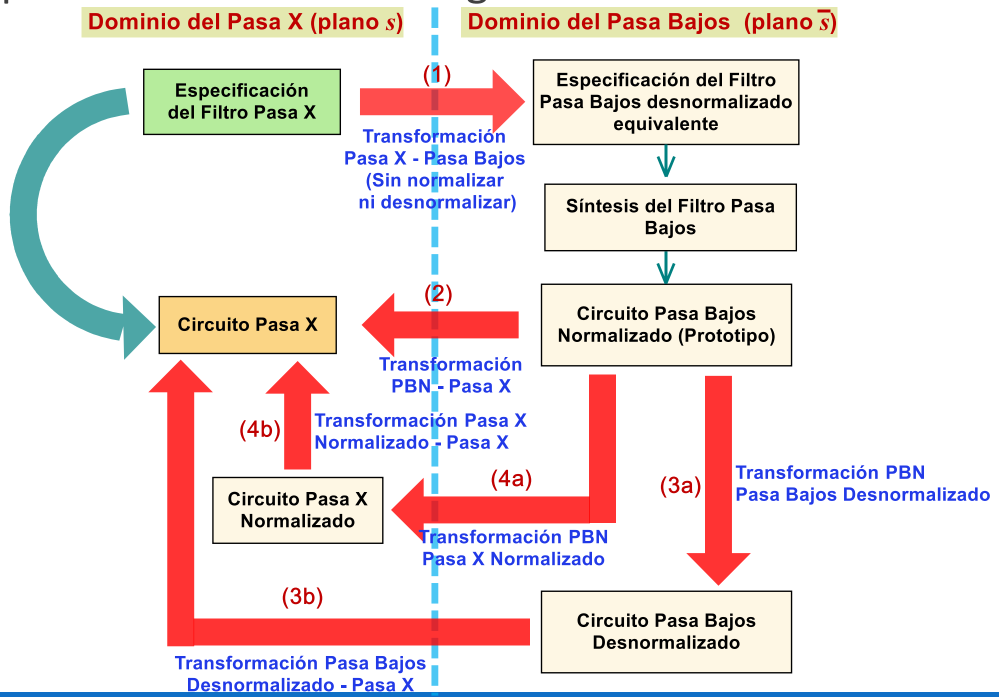
Especificación en términos de atenuación



- La relación entre ambas especificaciones resulta $\alpha_p = 20\cdot\log\left(1-\delta_p\right)^{-1} - 20\cdot\log(1) = -20\cdot\log\left(1-\delta_p\right) \Rightarrow \quad 10^{-0,05\cdot\alpha_p} = 1-\delta_p$
- Despejando, se obtiene $\delta_p = 1-10^{-0,05\cdot\alpha_p}$
- De la misma manera, para el caso de la banda de supresión resulta $\alpha_s = 20\cdot\log\left(1/\delta_s\right) = -20\cdot\log\left(\delta_s\right)$ por lo que $\delta_s = 10^{-0,05\cdot\alpha_s}$
- En este caso, suele trabajarse solo con la especificación del filtro pasa bajos $|H(j\omega)|^{-1}$ en dB por lo que se utilizan los pares $(\omega_p;\alpha_p)$ y $(\omega_s;\alpha_s)$

Transformaciones en frecuencia

- Las características de un filtro pasa bajos pueden ser extendidas a otros tipos de filtros mediante el uso de transformaciones de la variable frecuencia compleja, modificando así las características de las funciones racionales que caracterizan a los filtros.
- Se denominará $\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}$ a la frecuencia compleja del filtro pasa bajos mientras que $s = \sigma + j\omega$ designará a la frecuencia transformada.
- Esto permitirá sintetizar cualquier tipo de filtro mediante la síntesis de un filtro pasa bajos y su posterior transformación al filtro correspondiente. El camino seguido será



Transformaciones proporcional a ω

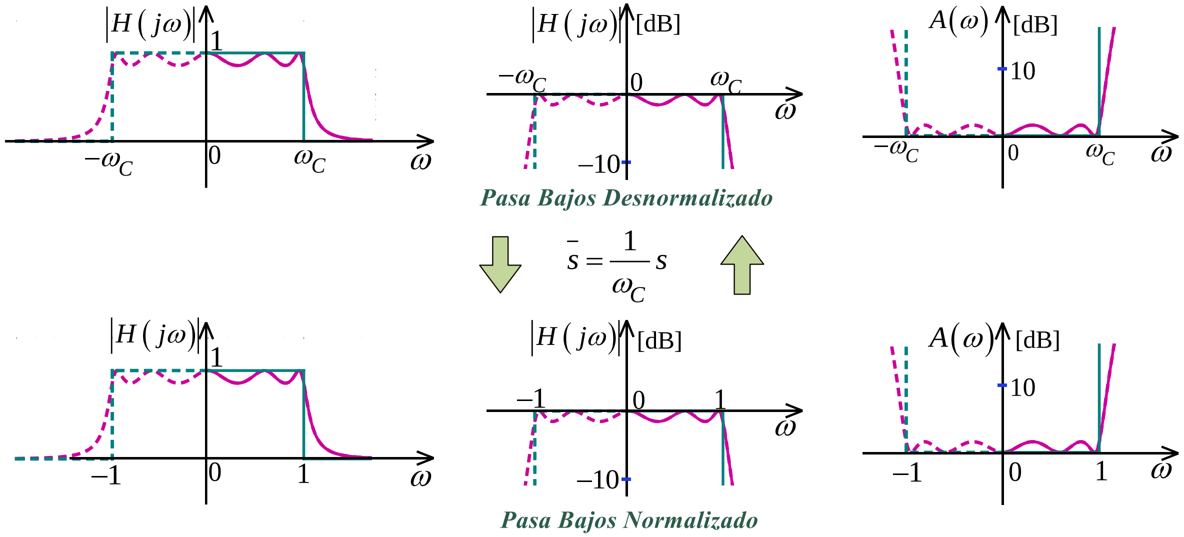
- La *transformación proporcional a la frecuencia* permite normalizar y desnormalizar el filtro pasa bajos. Es equivalente a la normalización en frecuencia.

$$\bar{s} = \frac{1}{\omega_C} s$$

- Si se analizan los efectos de esta transformación en los puntos notables de un filtro pasa bajos, se obtiene

$$\begin{cases} \bar{s} = 0 & \Leftrightarrow \quad s = 0 \\ \bar{s} = \infty & \Leftrightarrow \quad s = \infty \\ \bar{s} = \pm j1 & \Leftrightarrow \quad s = \pm j\omega_C \end{cases}$$

- De la misma manera, si se analizan los efectos en la respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajos



Transformaciones recíproca de ω

- La *transformación recíproca a la frecuencia* permite realizar un cambio de frecuencias bajas en altas, y viceversa.

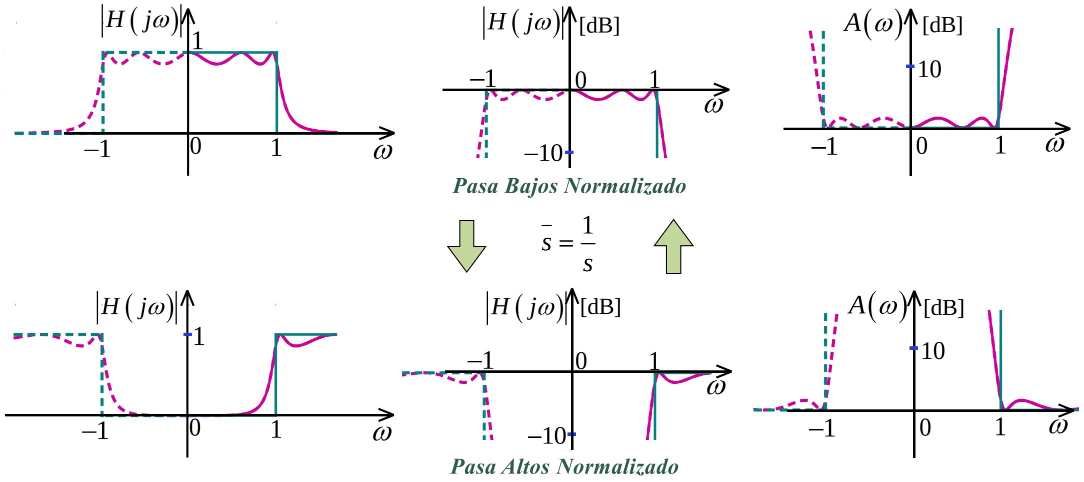
$$\bar{s} = \frac{K}{s}$$

<u>Transformación pasa bajos – pasa altos sin normalizar ni desnormalizar</u>

- Si se desea que el ancho de banda para ambos dominios (pasa-bajos y pasa-altos) sea equivalente, es decir, sin normalizar ni desnormalizar en la transformación, la función a utilizar resulta

$$\bar{s} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{s} = 0 & \Leftrightarrow \quad s = \infty \\ \bar{s} = \infty & \Leftrightarrow \quad s = 0 \\ \bar{s} = \pm j1 & \Leftrightarrow \quad s = \mp j1 \end{cases}$$

- De la misma manera, si se analizan los efectos en la respuesta en frecuencia

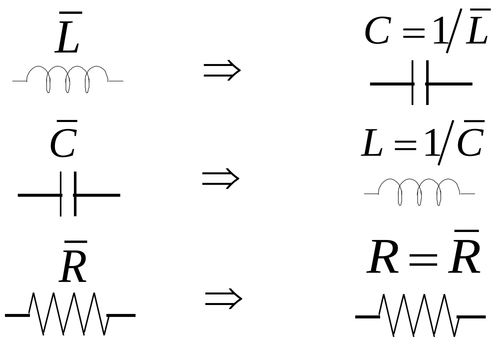


Transformaciones recíproca de ω

<u>Transformación pasa bajos – pasa altos sin normalizar ni desnormalizar</u>

- El hecho de realizar una modificación en la expresión de la frecuencia compleja implica también un impacto sobre el comportamiento de los elementos de un circuito cualquiera.
- De esta manera, los elementos del filtro pasa bajos normalizado (de frecuencia de corte unitaria) se transforman en elementos del filtro pasa altos normalizado (también de frecuencia de corte unitaria), y viceversa.

$$\begin{cases} \bar{s}\bar{L} = \dfrac{\bar{L}}{s} \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{\bar{L}} \\ \dfrac{1}{\bar{s}\bar{C}} = \dfrac{s}{\bar{C}} \quad \Rightarrow \quad L = \dfrac{1}{\bar{C}} \\ \bar{R} = R \end{cases}$$



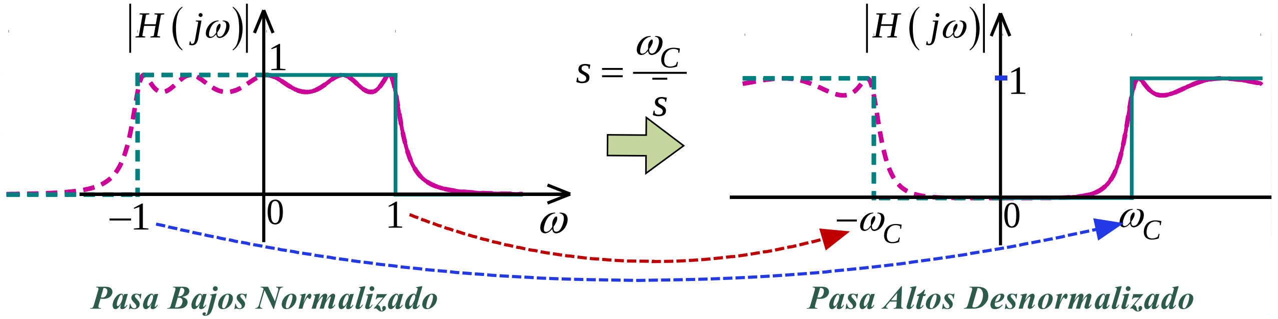
Transformaciones recíproca de ω

<u>Transformación pasa bajos – pasa altos normalizando o desnormalizando</u>

- Si se desea obtener un filtro pasa altos desnormalizado, con pulsación de corte ω_C, a partir de un filtro pasa bajos normalizado, o viceversa, la función a utilizar resulta

$$\bar{s} = \frac{\omega_C}{s} \Rightarrow \begin{cases} \bar{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = \infty \\ \bar{s} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad s = 0 \\ \bar{s} = \pm j1 \quad \Leftrightarrow \quad s = \mp j\omega_C \end{cases}$$

- De la misma manera, si se analizan los efectos en la respuesta en frecuencia

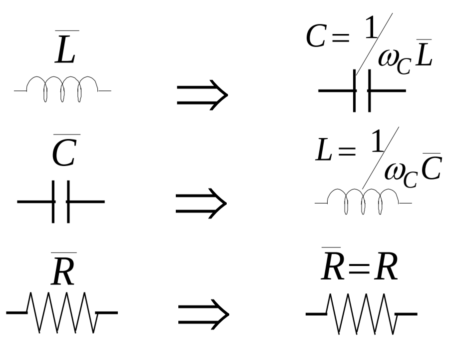


Transformaciones recíproca de ω

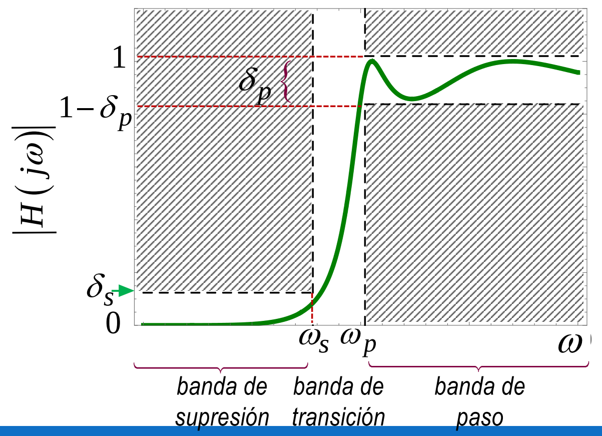
Transformación pasa bajos – pasa altos normalizando o desnormalizando

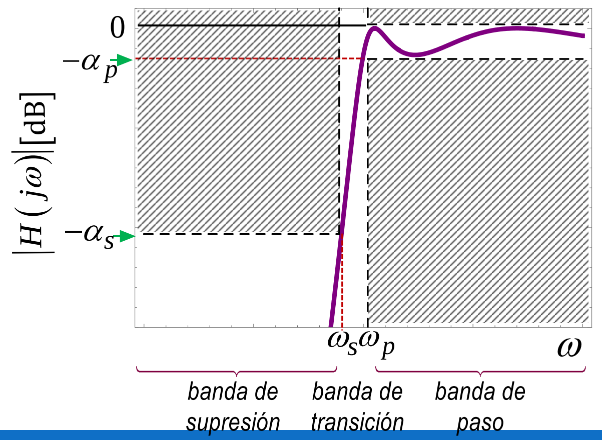
- En este caso, los elementos del filtro pasa bajos normalizado (de frecuencia de corte unitaria) se transforman en elementos del filtro pasa altos desnormalizado, y vieceversa.

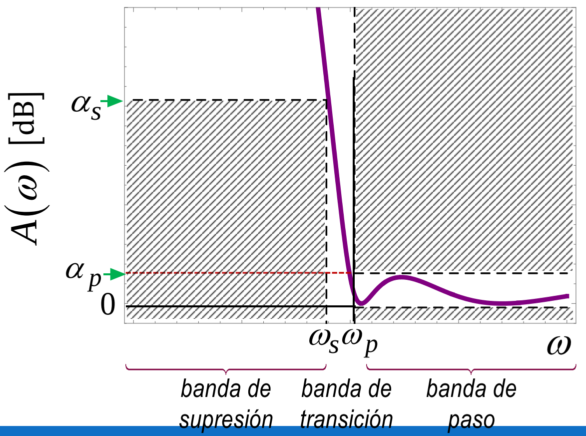
$$\begin{cases} \overline{s}\,\overline{L} = \dfrac{\omega_C \overline{L}}{s} & \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{\omega_C \overline{L}} \\ \dfrac{1}{\overline{s}\,\overline{C}} = \dfrac{s}{\omega_C \overline{C}} & \Rightarrow \quad L = \dfrac{1}{\omega_C \overline{C}} \\ \overline{R} = R & \end{cases}$$



- Plantilla de especificaciones del filtro pasa altos: queda determinada por los pares (ω_p;δ_p) y (ω_s;δ_s) para la versión p.u. y por los pares (ω_p;α_p) y (ω_s;α_s) para la versión en dB.







Transformaciones pasa bajos – pasa banda y viceversa

- La *transformación pasa bajos – pasa banda* de un filtro de <u>ancho de banda *Δω y frecuencia central ω_0*</u> también puede implementarse normalizando o desnormalizando, en este caso respecto del ancho de banda.

$$\bar{s} = s + \frac{\omega_0^2}{s} = \frac{s^2+\omega_0^2}{s}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta\omega}\left(s + \frac{\omega_0^2}{s}\right) = \frac{s}{\Delta\omega} + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega\, s} = \frac{s^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, s}$$

- Si se analizan los efectos de esta transformación en los puntos notables de un filtro pasa bajos, se obtiene

$$\bar{s} = 0$$

$$0 = \frac{s^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, s} \Rightarrow s^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow s = \pm j\omega_0$$

$$\bar{s} = \infty$$

$$\infty = \frac{1}{\Delta\omega}\left(s + \frac{\omega_0^2}{s}\right) \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

$$\bar{s} = \pm j1$$

$$\pm j1 = \frac{1}{\Delta\omega}\left(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\right) \Rightarrow \mp(\Delta\omega)\omega = -\omega^2 + \omega_0^2$$

$$\omega^2 \mp (\Delta\omega)\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \quad \omega_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}\left(\pm\Delta\omega \pm \sqrt{(\Delta\omega)^2 + 4\omega_0^2}\right) = \pm\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con} \quad \omega_2 > \omega_1$$

$$\omega_{3,4} = \pm\frac{\Delta\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con} \quad \omega_4 > \omega_3$$

- $\bar{s} = +j1$ se transforma en $s = j\omega_{2,3}$ siendo $\omega_2>0$ y $\omega_3<0$ y $\bar{s} = -j1$ en $s = j\omega_{1,4}$ siendo $\omega_1>0$ y $\omega_4<0$

Transformaciones pasa bajos – pasa banda y viceversa

- El ancho de la *banda de paso* resultante sobre las frecuencias positivas es entonces

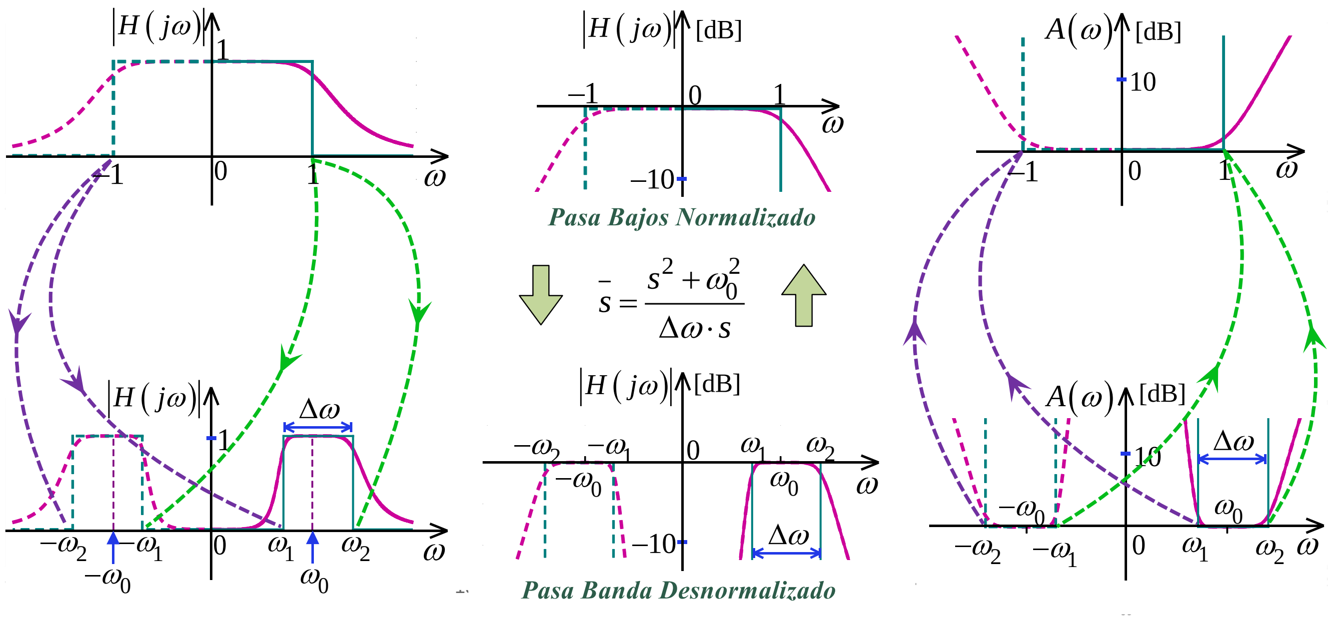
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} - \left(-\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega}$$

- Y por otra parte,

$$\omega_1\omega_2 = \left(\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right)\left(-\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right) = -\frac{(\Delta\omega)^2}{4} + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

- Estas propiedades resultan muy útiles para caracterizar un filtro pasa banda.

- Los efectos sobre la respuesta en frecuencia resultan



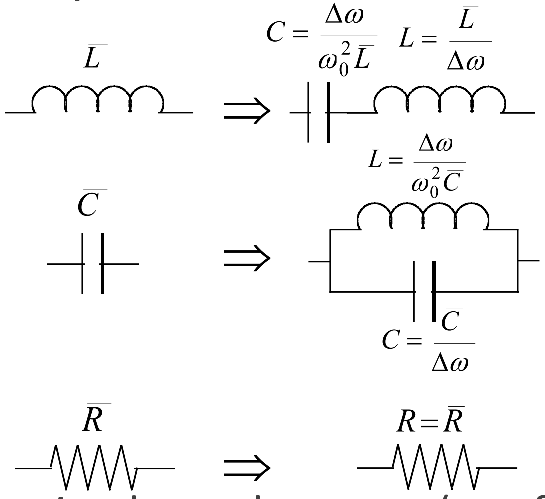
Transformaciones pasa bajos – pasa banda y viceversa

- En este caso, los elementos del filtro pasa bajos normalizado (de frecuencia de corte unitaria) se transforman en elementos del filtro pasa banda desnormalizado, y vieceversa.

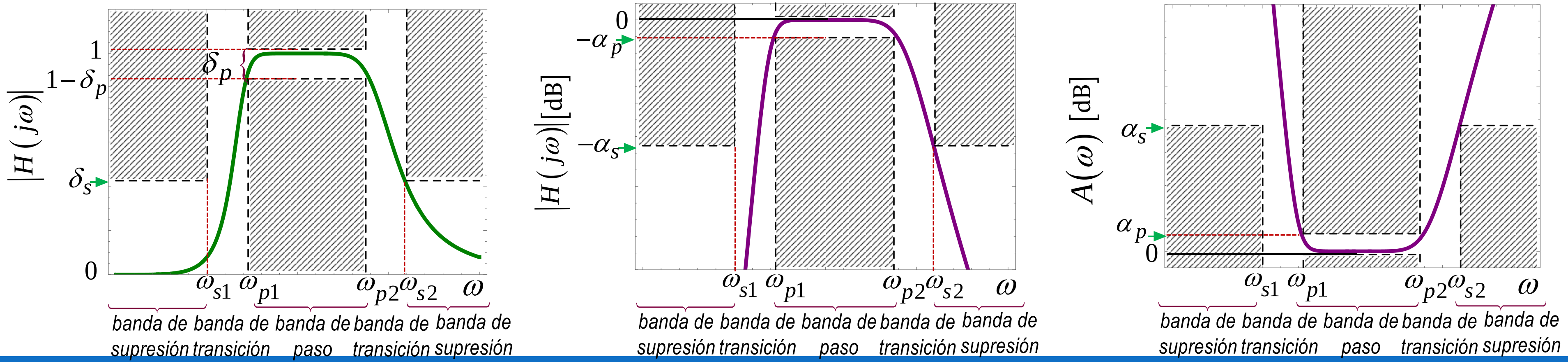
$$\bar{s}\bar{L} = \frac{1}{\Delta\omega}\left(s+\frac{\omega_0^2}{s}\right)\bar{L} = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\bar{L}}{\Delta\omega}\frac{1}{s} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} L = \dfrac{\bar{L}}{\Delta\omega} \\ C = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0^2\bar{L}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\bar{s}\bar{C}} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta\omega}\left(s+\frac{\omega_0^2}{s}\right)\bar{C}} = \frac{1}{\frac{\bar{C}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\bar{C}}{\Delta\omega}\frac{1}{s}} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} L = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0^2\bar{C}} \\ C = \dfrac{\bar{C}}{\Delta\omega} \end{cases}$$

$$\bar{R} = R$$



- Plantilla de especificaciones del filtro pasa banda: queda determinada por los pares $(\omega_{p1};\delta_p)$, $(\omega_{p2};\delta_p)$, $(\omega_{s1};\delta_s)$, $(\omega_{s2};\delta_s)$ en p.u. y por los pares $(\omega_{p1};\alpha_p)$, $(\omega_{p2};\alpha_p)$, $(\omega_{s1};\alpha_s)$. $(\omega_{s2};\alpha_s)$ para la versión en dB.



Transformaciones pasa bajos – pasa banda y viceversa

Ejemplo

Un filtro pasa banda, obtenido a partir de un filtro pasa bajos, tiene un ancho de banda de 3 dB de 30 MHz y una frecuencia central de 60 MHz. **(a)** Obtener las frecuencias f_{p1} y f_{p2} para las cuales la atenuación es 3 dB y las correspondientes frecuencias equivalentes en el dominio del pasa bajos. **(b)** Obtenga la frecuencia equivalente a f_A = ±100 MHz en el filtro pasa bajos correspondiente

- a) A partir de las especificaciones dadas,

$$\Delta f\big|_{3\text{ dB}} = 30\cdot 10^6 \qquad f_{p2} - f_{p1} = 30\cdot 10^6 \qquad f_{p2} = f_{p1} + 30\cdot 10^6$$

$$f_0 = 6\cdot 10^7 \qquad f_{p1}\cdot f_{p2} = 36\cdot 10^{14}$$

- Las frecuencias borde f_{p1} y f_{p2} pueden calcularse entonces como

$$f_{p1}^2 + 30\cdot 10^6 f_{p1} - 36\cdot 10^{14} = 0 \Longrightarrow f_{p1a,b} = -\frac{30}{2}\cdot 10^6 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(30\cdot 10^6\right)^2 + 4\cdot 36\cdot 10^{14}} \Rightarrow \begin{array}{l} f_{p1a} = 46{,}847\cdot 10^6 \\ f_{p1b} = -76{,}847\cdot 10^6 \end{array}$$

$$f_{p2a} = f_{p1a} + 30\cdot 10^6 = 46{,}847\cdot 10^6 + 30\cdot 10^6 = 76{,}847\cdot 10^6 \qquad f_{p2b} = f_{p1b} + 30\cdot 10^6 = -76{,}847\cdot 10^6 + 30\cdot 10^6 = -46{,}847\cdot 10^6$$

- Considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas), resulta

$$f_{p1}\big|_{3\text{ dB}} = \pm 46{,}847\cdot 10^6 \qquad f_{p2}\big|_{3\text{ dB}} = \pm 76{,}847\cdot 10^6$$

- Es importante notar que como Δf_{3dB} es comparable con f_0, existe una asimetría notable en la ubicación de la banda de paso del filtro. Si $\Delta f_{3dB} \ll f_0$, entonces las frecuencias de corte hubieran resultado 45 MHz y 75 MHz

Transformaciones pasa bajos – pasa banda y viceversa

Ejemplo

Un filtro pasa banda, obtenido a partir de un filtro pasa bajos, tiene un ancho de banda de 3 dB de 30 MHz y una frecuencia central de 60 MHz. **(a)** Obtener las frecuencias f_{p1} y f_{p2} para las cuales la atenuación es 3 dB y las correspondientes frecuencias equivalentes en el dominio del pasa bajos. **(b)** Obtenga la frecuencia equivalente a f_A = ±100 MHz en el filtro pasa bajos correspondiente

- Aplicando la transformación pasa banda-pasa bajos conservando el ancho de banda,

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega} \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \Rightarrow \bar{f} = \frac{f^2 - f_0^2}{f}$$

$$\overline{f_{pa}} = \frac{\left(\pm 46,847 \cdot 10^6\right)^2 - \left(60 \cdot 10^6\right)^2}{\pm 46,847 \cdot 10^6} = \mp 30 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\overline{f_{pb}} = \frac{\left(\pm 76,847 \cdot 10^6\right)^2 - \left(60 \cdot 10^6\right)^2}{\pm 76,847 \cdot 10^6} = \pm 30 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

- Entonces para el pasa bajos equivalente, $\overline{f_p} = 30 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
- La transformación pasa banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma el ancho de banda Δf_p = 30 MHz en el dominio del pasa banda, al ancho de banda $\overline{f_p} = 30\text{MHz}$ en el pasa bajos.
- b) Como en el pasa banda, 100 MHz se encuentra por encima de f_0 = 60 MHz, la llamaremos f_2 que determina un ancho de banda Δf_{x_dB} alrededor de f_0 tal que $\Delta f_{X\_dB} = f_{s2} - f_{s1}$ y $f_0^2 = f_{s1} f_{s2}$

$$f_{s1} = \frac{f_0^2}{f_{s2}} = \frac{\left(60 \cdot 10^6\right)^2}{100 \cdot 10^6} = 36\text{MHz}$$

$$\Delta f_{X\_dB} = 100 - 36 = 64 \text{ MHz}$$

Transformando

$$\bar{f} = \frac{\left(\pm 36 \cdot 10^6\right)^2 - \left(60 \cdot 10^6\right)^2}{36 \cdot 10^6} = -64 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad \bar{f} = \frac{\left(\pm 100 \cdot 10^6\right)^2 - \left(60 \cdot 10^6\right)^2}{100 \cdot 10^6} = 64 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Transformaciones pasa bajos – suprime banda y viceversa

- La *transformación pasa bajos – suprime banda* de un filtro de ancho de banda $\Delta\omega$ *y frecuencia central* ω_0 también puede implementarse normalizando o desnormalizando, en este caso respecto del ancho de banda .

$$\bar{s} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \qquad\qquad \bar{s} = \frac{\Delta\omega\, s}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Si se analizan los efectos de esta transformación en los puntos notables de un filtro pasa bajos, se obtiene

$$\bar{s} = 0$$

$$0 = \frac{s\,\Delta\omega}{s^2 + \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

$$\bar{s} = \infty$$

$$\infty = \frac{s\,\Delta\omega}{s^2 + \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\omega_0$$

$$\bar{s} = \pm j1$$

$$\pm j1 = \frac{j\omega\,\Delta\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm (\Delta\omega)\,\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \qquad \omega_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}\left(\mp\Delta\omega \pm \sqrt{(\Delta\omega)^2 + 4\omega_0^2}\right) = \mp\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con} \quad \omega_2 > \omega_1$$

$$\omega_{3,4} = \pm\frac{\Delta\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con} \quad \omega_4 > \omega_3$$

- $\bar{s} = +j1$ se transforma en $s = j\omega_{2,3}$ siendo $\omega_2>0$ y $\omega_3<0$ y $\bar{s} = -j1$ en $s = j\omega_{1,4}$ siendo $\omega_1>0$ y $\omega_4<0$

Transformaciones pasa bajos – suprime banda y viceversa

- El ancho de la *banda de paso* resultante sobre las frecuencias positivas es entonces

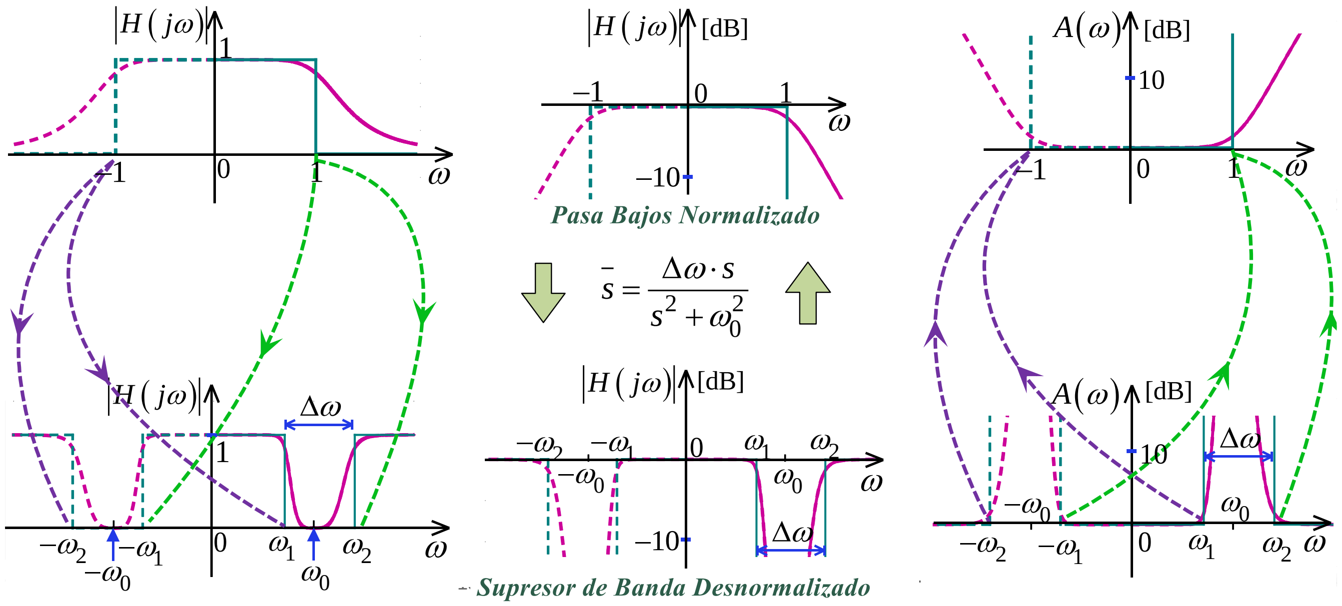
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} - \left(-\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega}$$

- Y por otra parte,

$$\omega_1\omega_2 = \left(\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right)\left(-\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}\right) = -\frac{(\Delta\omega)^2}{4} + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

- Estas propiedades resultan muy útiles para caracterizar un filtro suprime banda.

- Los efectos sobre la respuesta en frecuencia resultan



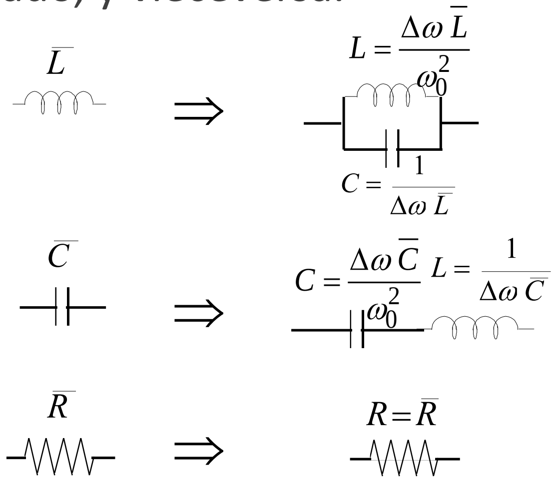
Transformaciones pasa bajos – suprime banda y viceversa

- En este caso, los elementos del filtro pasa bajos normalizado (de frecuencia de corte unitaria) se transforman en elementos del filtro suprime banda desnormalizado, y vieceversa.

$$\bar{s}\bar{L} = \frac{\Delta\omega\, s}{s^2+\omega_0^2}\bar{L} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta\omega\, \bar{L}}\, s + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega\, \bar{L}}\frac{1}{s}} \Rightarrow \begin{cases} L = \dfrac{\Delta\omega\, \bar{L}}{\omega_0^2} \\ C = \dfrac{1}{\Delta\omega\, \bar{L}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\bar{s}\bar{C}} = \frac{1}{\frac{\Delta\omega\, s}{s^2+\omega_0^2}\bar{C}} = \frac{1}{\Delta\omega\, \bar{C}}\, s + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega\, \bar{C}}\frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} L = \dfrac{1}{\Delta\omega\, \bar{C}} \\ C = \dfrac{\Delta\omega\, \bar{C}}{\omega_0^2} \end{cases}$$

$$\bar{R} = R$$



- Plantilla de especificaciones del filtro suprime banda: queda determinada por los pares $(\omega_{p1};\delta_p)$, $(\omega_{p2};\delta_p)$, $(\omega_{s1};\delta_s)$, $(\omega_{s2};\delta_s)$ en p.u. y por los pares $(\omega_{p1};\alpha_p)$, $(\omega_{p2};\alpha_p)$, $(\omega_{s1};\alpha_s)$. $(\omega_{s2};\alpha_s)$ para la versión en dB.