Introducción al diseño de Filtros

MÉTODOS DE APROXIMACIÓN A LA CARACTERÍSTICA DE AMPLITUD

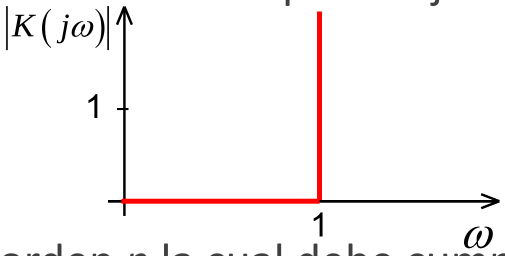
Introducción

- El diseño de los filtros pasivos *LC* puede realizarse ya sea mediante la selección adecuada de sus elementos, o bien aplicando a los filtros pasa bajos normalizados (prototipos pasa bajos) determinadas transformaciones de frecuencia en el plano complejo.
- Los diferentes métodos de aproximación a la característica de amplitud permiten obtener un filtro pasa bajos *normalizado* que se aproxime a un filtro ideal con un determinado error.
- De esta manera, una vez obtenido el filtro pasa bajos normalizado aproximado a las características del filtro buscado, es posible transformarlo para que adquiera las características del filtro pasa bajos desnormalizado real requerido.
- Finalmente, si el filtro a aproximar no es un pasa bajos, se procede a aplicar *transformaciones en frecuencia* (a pasa altos, a pasa banda, etc.) según el caso.
- En base a esto, la pulsación angular ω tratada de aquí en adelante debe entenderse que está normalizada, es decir en realidad se trata de $\omega' = \omega / \omega_p$ donde ω_p es la pulsación de corte del filtro pasa bajos *no normalizado ideal* que se pretende aproximar.

Aproximación de Butterworth

- La función de aproximación de Butterworth permite obtener una respuesta en frecuencia *máximamente plana.*
- Esto significa que ninguna otra aproximación tiene una transición más suave a través de la banda de paso hasta la banda de supresión.
- Lo que se pretende aproximar es la función característica de un filtro pasa bajos mediante la expresión

$$|K(j\omega)| = \varepsilon\, B_n(\omega)$$



- donde $B_n(\omega)$ es la función genérica de Butterworth de orden n la cual debe cumplir las propiedades
  - $B_n(\omega)$ es un polinomio de orden n.
  - $B_n(0) = 0$
  - $B_n(\omega)$ es *máximamente plano* en el origen.
  - $B_n(1) = 1$
- En base a estas condiciones, resulta que

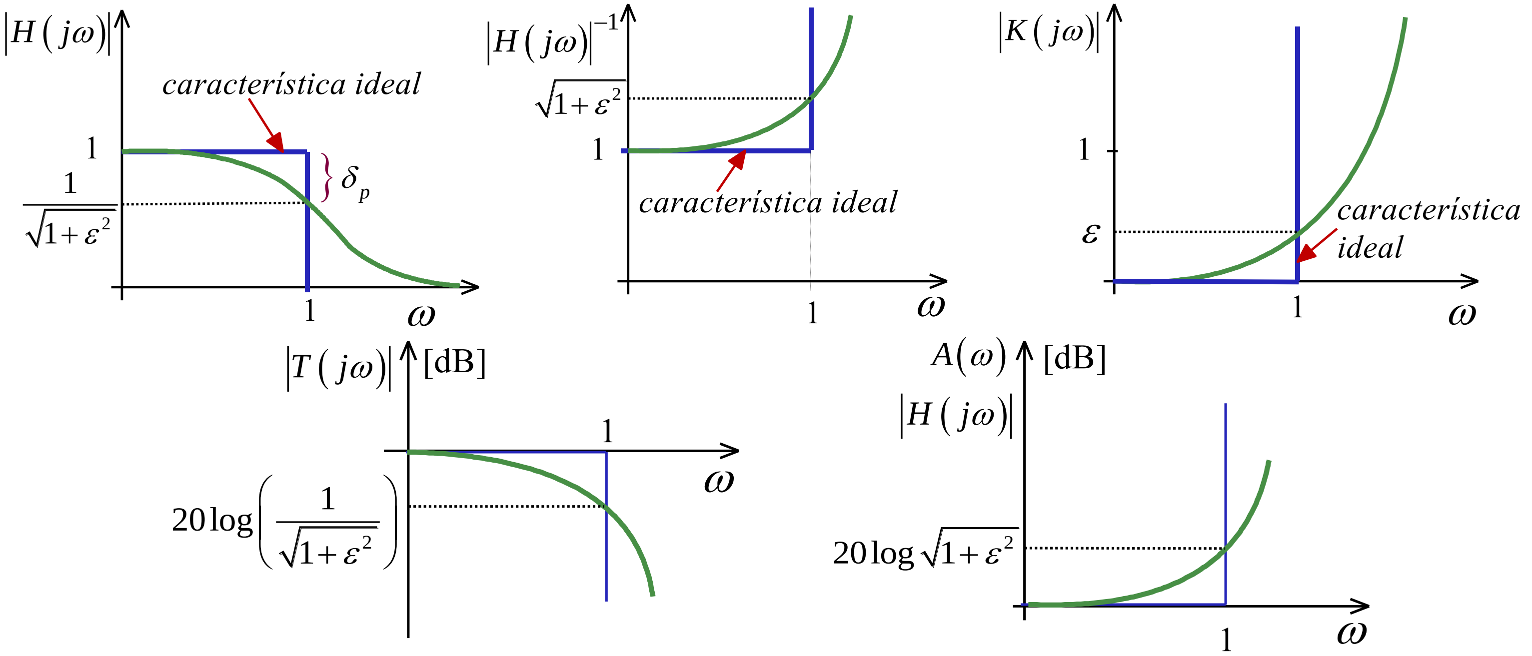
$$B_n(\omega) = \omega^n$$

Aproximación de Butterworth

- A partir de la definición del polinomio de Butterworth de orden *n*, es posible aproximar la característica de amplitud de un filtro pasa bajos ideal como.

$$\left|K\left(j\omega\right)\right| = \varepsilon \cdot \omega^{n} \qquad \left|H\left(j\omega\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^{2n}}}$$

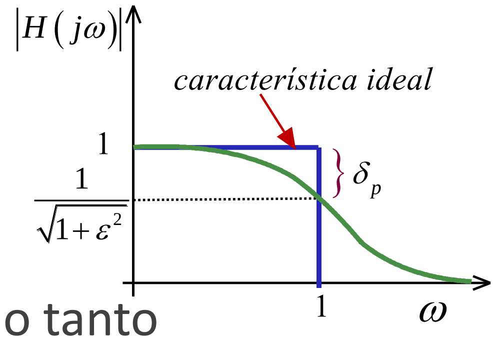
- donde ε es un número real positivo no mayor que 1, y la pulsación ω se encuentra *normalizada* respecto a la pulsación ω_p .
- Las correspondientes funciones del filtro resultan



Aproximación de Butterworth

- Reescribiendo las funciones explicitando la normalización en frecuencia.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}}} \qquad A(\omega) = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}\right] \quad [\mathrm{dB}]$$



- Se observa que, dentro de la banda de paso, $|H(j\omega)|$ oscila entre 1 y $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ y, por lo tanto

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

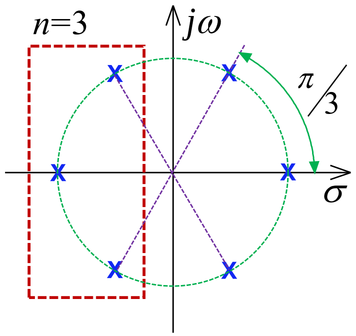
- Operando sobre la función $|H(j\omega)|$ puede obtenerse $H(s)$ teniendo en cuenta que

$$\left[H(s)\right]^2 = H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n\varepsilon^2 s^{2n}} = \frac{1/\varepsilon^2}{s^{2n}+(-1)^n 1/\varepsilon^2} \Longrightarrow H(s) = \frac{1/\varepsilon}{\prod_{\forall s_k\in SPI}(s+s_k)}$$

- Operando para hallar los polos de H(s) resulta

n par

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \qquad \text{k=1,2,....2n}$$



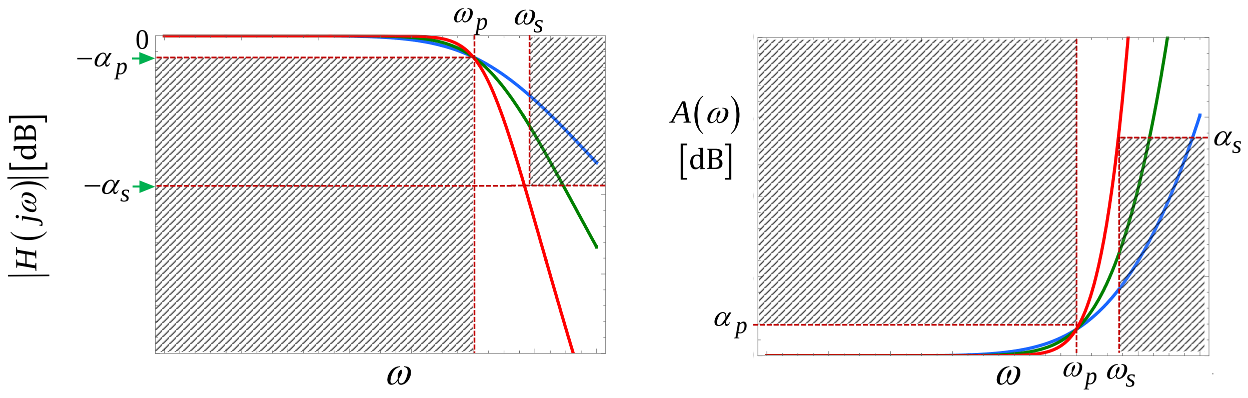
n impar

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j\frac{k\pi}{n}} \qquad \text{k=1,2,...2n}$$

Aproximación de Butterworth

- Si se analiza el comportamiento de la aproximación para distintos valores de *n* puede observarse que, en la banda de supresión, la pendiente se vuelve más pronunciada al aumentar *n.*

- Por lo tanto, a mayor *n*, se obtiene mejor aproximación a la característica ideal del filtro en la banda de supresión, sin mayor efecto apreciable sobre la aproximación de la banda de paso.



- Una especificación con una banda de transición pequeña requerirá un filtro de orden elevado, y un filtro que cumpla con requisitos mayores de lo necesario será más costoso de implementar.

- Es por eso que siempre se buscará intentar minimizar el orden del filtro.

Aproximación de Butterworth

Determinación de los parámetros de diseño

- Los parámetros de diseño a determinar a partir de las especificaciones del filtro son ε y n. Su correcta determinación permitirá asegurar que la curva aproximada cumpla con los requerimientos de la plantilla de especificaciones.

- Uno de los requisitos a cumplir es el de atenuación máxima α_p admitida en la banda de paso, especificada para la pulsación ω_p.

$$A(\omega_p) = 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\right)^{2n}\right) \leq \alpha_p \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1\cdot\alpha_p}-1}$$

- Es usual para Butterworth normalizar respecto a la pulsación angular donde la atenuación alcanza 3 dB. Esta pulsación suele llamarse *pulsación de corte* ω_c y, si esa es la frecuencia utilizada, se obtiene ε=1.

- Por esta característica es que, aunque el dato de especificación sea una pulsación ω_p y $\alpha_p = x$ dB, muchos diseñadores prefieren normalizar respecto a la pulsación de corte de 3 dB (ω_C), para trabajar con coeficientes numéricamente más sencillos.

- En este caso, cuando sea necesario *desnormalizar*, será necesario determinar la pulsación ω_C no especificada. La relación entre ω_p y ω_C resulta de considerar:

$$A(\omega_C) = 10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_C}{\omega_p}\right)^{2n}\right] = 3\,\text{dB} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\left(\frac{\omega_C}{\omega_p}\right)^{n} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega_C = \frac{\omega_p}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

Aproximación de Butterworth

Determinación de los parámetros de diseño

- Por otra parte, los puntos de la banda de atenuación se especifican de modo que cumplan con la atenuación mínima α_s a partir de la frecuencia ω_s.
- En base a esta especificación

$$A(\omega_s) = 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2n}\right) \geq \alpha_s \quad \Longrightarrow \quad n \geq \frac{\log\left[\dfrac{10^{0{,}1\cdot\alpha_s}-1}{\varepsilon^2}\right]}{2\log\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

- Combinando con la expresión de ε se obtiene la expresión para calcular el mínimo *n* del filtro

$$n \geq \frac{\log\left[\dfrac{10^{0{,}1\cdot\alpha_s}-1}{10^{0{,}1\cdot\alpha_p}-1}\right]}{2\log\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

- Una vez conocidos ε y *n*, es posible obtener la función de transferencia H(s) de un filtro Butterworth pasa bajos normalizado.

$$H(s) = \frac{1/\varepsilon}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} = \frac{1/\varepsilon}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{1/\varepsilon}{B_n^*(s)}$$

- Los coeficientes para el caso $\varepsilon=1$ pueden obtenerse de tablas que están disponibles en la bibliografía.

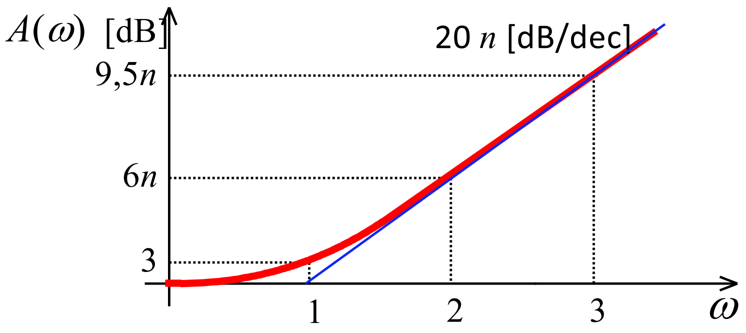
Aproximación de Butterworth

Comportamiento asintótico

- Cuando ω>>1, la aproximación resulta

$$\left|H(j\omega)\right| \cong \frac{1}{\omega^n} \qquad A(\omega) = 20\log\frac{1}{\left|H(j\omega)\right|} = n \cdot 20\log\omega$$

- Cuya asíntota es 20 n dB/dec ó 6 n dB/oct, partiendo de ω=1



Aproximación de Butterworth

Ejemplo

Obtener la función de transferencia $H(s)$ de un filtro *pasa bajos* que permita el paso de frecuencias inferiores a 6 kHz con una variación de amplitud que no supere los 3 dB y que para frecuencias superiores a 14 kHz atenúe como mínimo 20 dB empleando la aproximación de Butterworth

- En base a la especificación dada,

$$f_p = f_C = 6\,\text{kHz} \qquad \alpha_p = A_{máx} = 3\,\text{dB} \qquad f_s = 14\,\text{kHz} \qquad \alpha_s = A_{mín} = 20\,\text{dB}$$

- En primer lugar, se calculan los parámetros del filtro,

$$10 \cdot \log\left[1+\varepsilon^2\right] = \alpha_p \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1\cdot\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1\cdot 3} - 1} = 1$$

$$A(f_s) = 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{f_s}{f_p}\right)^{2n}\right) \geq \alpha_s \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log\left[\dfrac{10^{0,1\cdot\alpha_s}-1}{\varepsilon^2}\right]}{2\log\left(\dfrac{f_s}{f_p}\right)} = \frac{\log\left[\dfrac{10^{0,1\cdot 20}-1}{10^{0,1\cdot 3}-1}\right]}{2\log\left(\dfrac{14\cdot 10^3}{6\cdot 10^3}\right)} = 2,72$$

- Entonces resulta $\varepsilon=1$ y $n=3$

Aproximación de Butterworth

Ejemplo

Obtener la función de transferencia *H*(*s*) de un filtro *pasa bajos* que permita el paso de frecuencias inferiores a 6 kHz con una variación de amplitud que no supere los 3 dB y que para frecuencias superiores a 14 kHz atenúe como mínimo 20 dB empleando la aproximación de Butterworth

- A partir de los parámetros obtenidos,

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2n}} \quad \Rightarrow \quad \left[H(s)\right]^2 = \frac{1}{1-s^6}$$

- Esta expresión que se encuentra normalizada respecto de $\omega_p=\omega_C= 2\pi\ 6.10^3$ rad/s, tiene seis ceros en el origen y seis polos con simetría cuadrantal ubicados sobre una circunferencia de radio 1.

$$s_k = \pm 1; \quad \pm\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad H(s) = \frac{1}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

- Finalmente, se desnormaliza respecto de ω_C

$$H(s) = \frac{1}{(\bar{s})^3+2(\bar{s})^2+2\bar{s}+1} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_C}{\omega_C}\bar{s}\right)^3+2\left(\frac{\omega_C}{\omega_C}\bar{s}\right)^2+2\left(\frac{\omega_C}{\omega_C}\bar{s}\right)+1} = \frac{\omega_C^3}{s^3+2\omega_C s^2+2\omega_C^2 s+\omega_C^3} = \frac{5{,}358\cdot 10^{13}}{s^3+7{,}54\cdot 10^4\cdot s^2+2{,}482\cdot 10^9\cdot s+5{,}358\cdot 10^{13}}$$

Aproximación de Chebyshev

- La aproximación de Butterworth a la característica de amplitud de un filtro pasa bajos ideal concentra toda su potencia de aproximación en el origen, en vez de distribuirla en el intervalo $0<\omega<1$.
- En este sentido, se obtiene una mejor aproximación mediante una función racional que se aproxime a 1 en todo el margen de frecuencias, en forma oscilatoria.
- Puede esperarse una mejor aproximación si esta se acerca a 0 en forma oscilatoria y con una *amplitud constante de la oscilación* en el intervalo $0<\omega<1$, y alcanza rápidamente grandes valores cuando $\omega>1$.
- Los polinomios de Chebyshev cumplen con esta condición, definiéndose como

$$V_n(\omega) = \cos\left(n\cos^{-1}\omega\right) \qquad V_n(\omega) = \cosh\left(n\cosh^{-1}\omega\right)$$

$$\omega<1 \qquad\qquad\qquad \omega>1$$

- Puede notarse que los polinomios de Chebyshev oscilan con una amplitud 1 en el intervalo $-1<\omega<1$
- En el caso de altas frecuencias ($\omega>>1$), los polinomios pueden aproximarse como $V_n(\omega) \approx 2^{n-1}\omega^n$

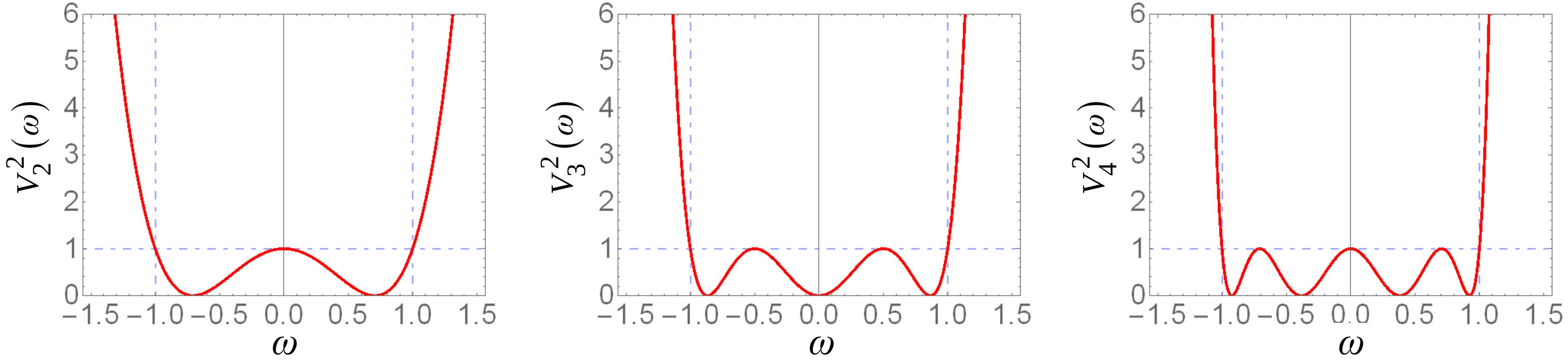
Aproximación de Chebyshev

- A partir de la definición del polinomio de Butterworth de orden *n*, es posible aproximar la característica de amplitud de un filtro pasa bajos ideal como.

$$\left|K(j\omega)\right| = \varepsilon V_n(\omega) \qquad \left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)}} \qquad \left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \qquad A(\omega) = 10\log\left[1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)\right]$$

- donde *ε* es un número real positivo no mayor que 1, y la pulsación *ω* se encuentra *normalizada* respecto a la pulsación ω_p .

- Las gráficas de $V_n^2(\omega)$ para distintos valores de *n* resultan resultan



- Es importante observar que en la banda de paso ($0 < \omega < 1$) $V_n^2(\omega)$ oscila entre 0 y 1, presentando *n* máximos y mínimos. Por este motivo a ε se lo denomina *coeficiente de ondulación*. Además $V_n^2(1) = 1$ para todos los valores de *n*; pero $V_n^2(0) = 1$ para valores impares de *n* mientras que $V_n^2(0) = 0$ para valores pares de *n.*

Aproximación de Chebyshev

- Si se analiza la función $|H(j\omega)|$ para distintos valores de n

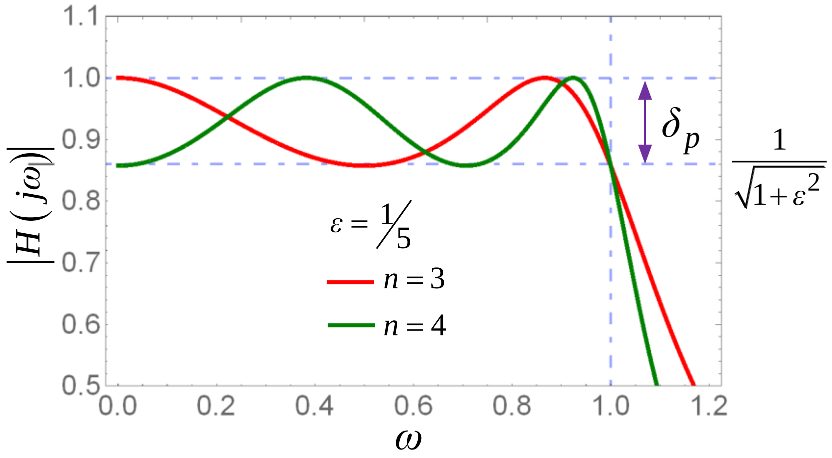
$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)}}$$

- Se observa que, dentro de la banda de paso,

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

- Mientras que, en la banda de atenuación, donde $\varepsilon^2 V_n^2(\omega) >> 1$

$$\left|H(j\omega)\right| \cong \frac{1}{\varepsilon\ V_n(\omega)} = \frac{1}{\varepsilon\ 2^{n-1}\omega^n}$$



- Operando sobre la función $|H(j\omega)|$ puede obtenerse $H(s)$ teniendo en cuenta que

$$\left[H(s)\right]^2 = H(s)\cdot H(-s) = \left.\frac{1}{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)}\right|_{\omega=s/j} = \left.\frac{K}{V_n^2(\omega)+1/\varepsilon^2}\right|_{\omega=s/j} \Longrightarrow H(s) = \frac{1/\left(\varepsilon\cdot 2^{n-1}\right)}{\prod_{\forall s_k \in SPI}(s+s_k)}$$

- Operando para hallar los polos de H(s) resulta

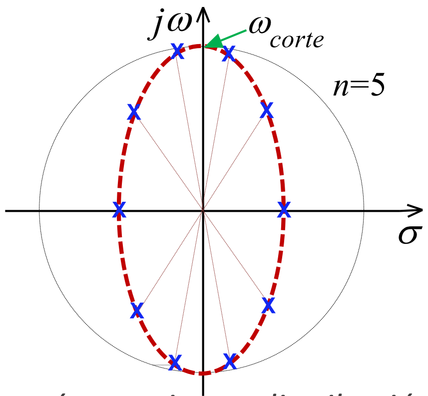
$$1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)\Big|_{\omega=s/j} = 0$$

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k \qquad \text{k=1,2,3...2n}$$

Para polinomios de la forma $A+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)\Big|_{\omega=s/j} = 0$

$$\alpha_k = \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\operatorname{senh}(\varphi_2) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\left[\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2}+1}+\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon}\right)^{1/n} - \left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2}+1}+\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon}\right)^{-1/n}\right]$$

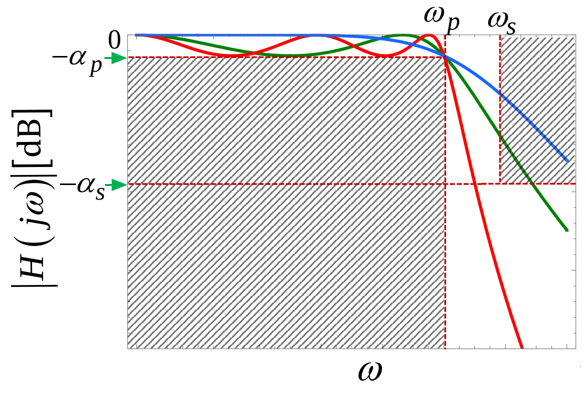
$$\beta_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\cosh(\varphi_2) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\left[\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2}+1}+\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon}\right)^{1/n} + \left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2}+1}+\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon}\right)^{-1/n}\right]$$

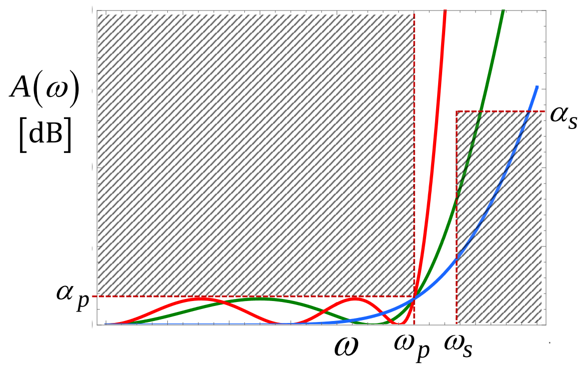


Las raíces s_k tienen distribución simétrica alrededor de una elipse

Aproximación de Chebyshev

- Si se analiza el comportamiento de la aproximación para distintos valores de *n* puede observarse que, en la banda de supresión, la pendiente se vuelve más pronunciada al aumentar *n.*
- Por lo tanto, a mayor *n*, se obtiene mejor aproximación a la característica ideal del filtro en la banda de supresión, sin mayor efecto apreciable sobre la aproximación de la banda de paso (definida por el parámetro ε).





- Una especificación con una banda de transición pequeña requerirá un filtro de orden elevado, y un filtro que cumpla con requisitos mayores de lo necesario será más costoso de implementar.
- Es por eso que siempre se buscará intentar minimizar el orden del filtro.

Aproximación de Chebyshev

Determinación de los parámetros de diseño

- Los parámetros de diseño a determinar a partir de las especificaciones del filtro son ε y n. Su correcta determinación permitirá asegurar que la curva aproximada cumpla con los requerimientos de la plantilla de especificaciones.

- Uno de los requisitos a cumplir es el de atenuación máxima α_p admitida en la banda de paso, especificada para la pulsación ω_p.

$$A(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{|H(j\omega)|}\right) = 20\log\sqrt{1+[\varepsilon V_n(\omega)]^2} = 10\log\left[1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega)\right] \le \alpha_p$$

La atenuación máxima en la banda de paso corresponde a los máximos de Vn(ω), es decir: Vn(ω)=1

$$\alpha_p = 10\log\left(1+\varepsilon^2\right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0{,}1\cdot\alpha_p} - 1}$$

- Por otra parte, el polinomio de Chebyshev de orden n puede escribirse como

$$V_n(\omega) = \cos\left(n\cos^{-1}\omega\right) \qquad \omega<1$$

$$V_n(\omega) = \cosh\left(n\cosh^{-1}\omega\right) \qquad \omega>>1$$

- Es decir que la atenuación fuera de la banda de paso (banda de supresión) puede escribirse como

$$A(\omega) = 10\log\left\{1+[\varepsilon V_n(\omega)]^2\right\} = 10\log\left\{1+\left[\varepsilon\cosh\left(n\cosh^{-1}\omega\right)\right]^2\right\}$$

Aproximación de Chebyshev

Determinación de los parámetros de diseño

- Los puntos de la banda de atenuación se especifican de modo que cumplan con la atenuación mínima α_s a partir de la frecuencia ω_s.
- En base a esta especificación

$$A(\omega_s) = 10\log\left\{1+\left[\varepsilon\cosh\left(n\cosh^{-1}\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right]^2\right\} \geq \alpha_s \quad\Longrightarrow\quad n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{0,1\cdot\alpha_s}-1}{10^{0,1\cdot\alpha_p}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

- Otra forma resulta de considerar la aproximación asintótica dada por $V_n(\omega) = 2^{n-1}\ \omega^n$

$$A(\omega_s) = 10\log\left\{1+\left[\varepsilon\cdot 2^{n-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n\right]^2\right\} \geq \alpha_s \quad\Longrightarrow\quad n \geq \frac{\log\left[2\cdot\sqrt{\dfrac{10^{0,1\cdot\alpha_s}-1}{10^{0,1\cdot\alpha_p}-1}}\right]}{\log\left(\dfrac{2\cdot\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

- Una vez conocidos ε y n, es posible obtener la función de transferencia H(s) de un filtro Chebyshev pasa bajos normalizado

$$H(s) = \frac{1/\left(\varepsilon\cdot 2^{n-1}\right)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} = \frac{1/\left(\varepsilon\cdot 2^{n-1}\right)}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{1/\left(\varepsilon\cdot 2^{n-1}\right)}{V_n^*(s)}$$

- Los coeficientes para el caso ε=*1* pueden obtenerse de tablas que están disponibles en la bibliografía.

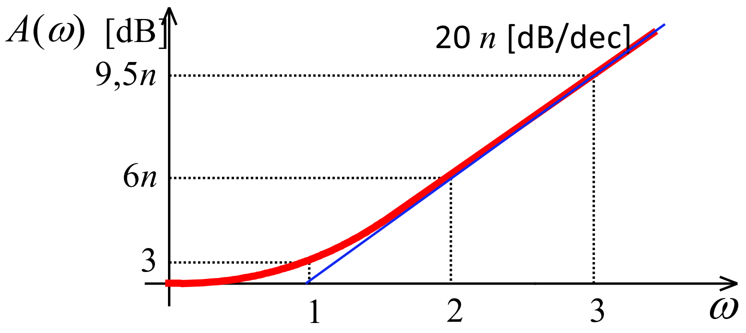
Aproximación de Chebyshev

Comportamiento asintótico

- Cuando ω>>1, la aproximación resulta

$$\left|H(j\omega)\right| \cong \frac{1}{\varepsilon\ 2^{n-1}\omega^n} \qquad 20\log\frac{1}{\left|H(j\omega)\right|} = 20\log 2^{n-1} + 20\log\varepsilon + 20\log\omega^n = 6(n-1) + 20\log\varepsilon + 20\cdot n\log\omega$$

- Cuya asíntota es 20 n dB/dec ó 6 n dB/oct, partiendo de ω=1



Aproximación de Chebyshev

Ejemplo

Obtener la función de transferencia $H(s)$ de un filtro *pasa bajos* empleando la aproximación de Chebyshev. La banda de paso debe ser 10 kHz con una variación de amplitud que no supere 1,4 dB. Además para frecuencias superiores a 15 kHz debe atenuar como mínimo 20 dB

- En base a la especificación dada,

$$f_p = 10\,\text{kHz} \qquad \alpha_p = A_{máx} = 1{,}4\,\text{dB} \qquad f_s = 15\,\text{kHz} \qquad \alpha_s = A_{mín} = 20\,\text{dB}$$

- En primer lugar, se calculan los parámetros del filtro,

$$10 \cdot \log\left[1+\varepsilon^2\right] = \alpha_p \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0{,}1\cdot\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0{,}1\cdot 1{,}4} - 1} = 0{,}6167$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{0{,}1\cdot\alpha_s}-1}{10^{0{,}1\cdot\alpha_p}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{0{,}1\cdot 20}-1}{10^{0{,}1\cdot 1{,}4}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{2\pi\cdot 15\cdot 10^3}{2\pi\cdot 10\cdot 10^3}\right)} = 3{,}609$$

- Entonces resulta ε=0,617 y n=4

Aproximación de Chebyshev

Ejemplo

Obtener la función de transferencia $H(s)$ de un filtro *pasa bajos* empleando la aproximación de Chebyshev. La banda de paso debe ser 10 kHz con una variación de amplitud que no supere 1,4 dB. Además para frecuencias superiores a 15 kHz debe atenuar como mínimo 20 dB

- A partir de los parámetros obtenidos, y normalizando respecto a $\omega_p=2\pi\,.10^4$ rad/s, es posible hallar los 4 polos de $H(s)$

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{8}\right)\left[\left(\sqrt{\frac{1}{0,617^2}+1}+\frac{1}{0,617}\right)^{1/4}-\left(\sqrt{\frac{1}{0,617^2}+1}+\frac{1}{0,617}\right)^{-1/4}\right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{8}\right)\left[\left(\sqrt{\frac{1}{0,617^2}+1}+\frac{1}{0,617}\right)^{1/4}+\left(\sqrt{\frac{1}{0,617^2}+1}+\frac{1}{0,617}\right)^{-1/4}\right]$$

- Los polos resultan -0,1226±j0,9701; -0,2959±j0,4018, y la función $H(s)$ del pasa bajos normalizado es

$$H(s)=\frac{1\big/\left(0,617\cdot 2^3\right)}{(s+0,12-j0,97)(s+0,12+j0,97)(s+0,3-j0,4)(s+0,3+j0,4)}=\frac{0,2027}{s^4+0,837\cdot s^3+1,35\cdot s^2+0,6269\cdot s+0,2381}$$

- Finalmente, se desnormaliza respecto de $\omega_p=2\pi\,.10^4$ rad/s

$$H(s)=\frac{0,2027}{\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\bar{s}\right)^4+0,837\cdot\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\bar{s}\right)^3+1,35\cdot\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\bar{s}\right)^2+0,6269\cdot\left(\frac{\omega_p}{\omega_p}\bar{s}\right)+0,2381}=\frac{3,159\cdot 10^{18}}{s^4+5,259\cdot 10^4\cdot s^3+5,331\cdot 10^9\cdot s^2+1,555\cdot 10^{14}\cdot s+3,711\cdot 10^{18}}$$