E1214 Fundamentos de las Comunicaciones
E0311 Comunicaciones
E0214 Comunicaciones

Curso 2023

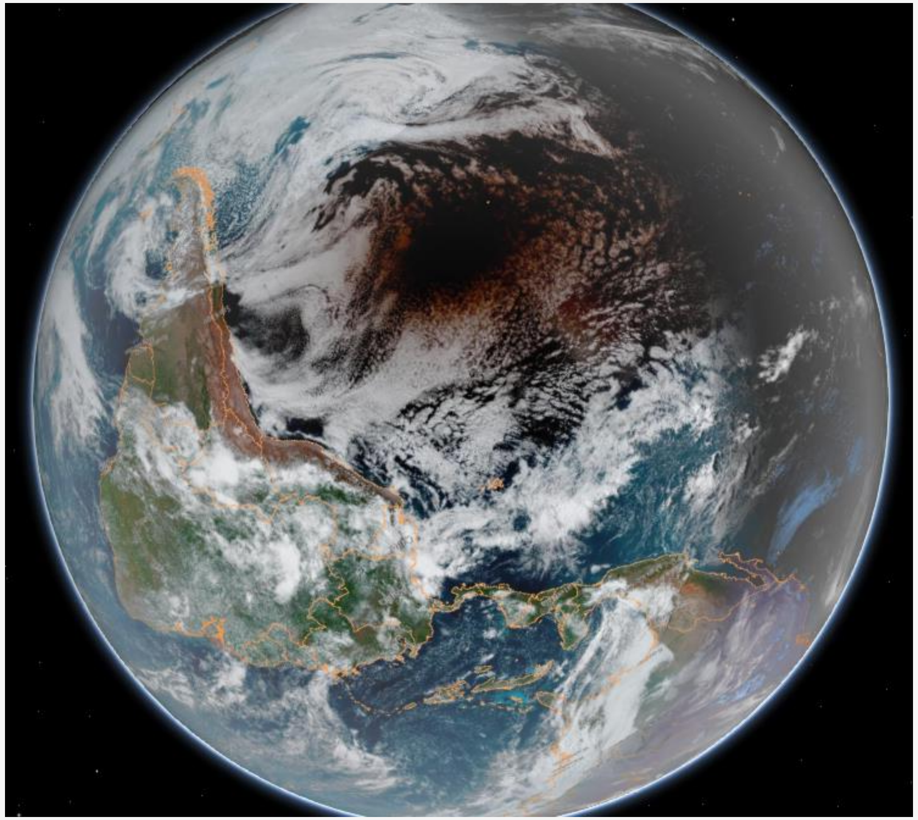
Adrián Carlotto

comunica@ing.unlp.edu.ar

Temas a tratar

- Modulación de pulsos
- Cuantización uniforme
- SNR_Q
- PCM

Eclipse (14/12/2020) Foto: NOAA



Modulación de pulsos (en banda base)

A partir del teorema de muestreo: podemos representar a una señal de banda limitada B, por sus muestras tomadas a $f_s > 2B$

Ejemplo: Forma de pulso $p(t) = \sqcap\left(\frac{t-\frac{a}{2}}{a}\right)$

Modulación de amplitud de pulso (PAM)

$$x(t) = \sum_n m(nT_s)\, p(t - nT_s)$$

Modulación de ancho de pulso (PWM)

$$x(t) = \sum_n A\, p\left(\frac{t - nT_s\frac{d_n}{a}}{}\right)$$

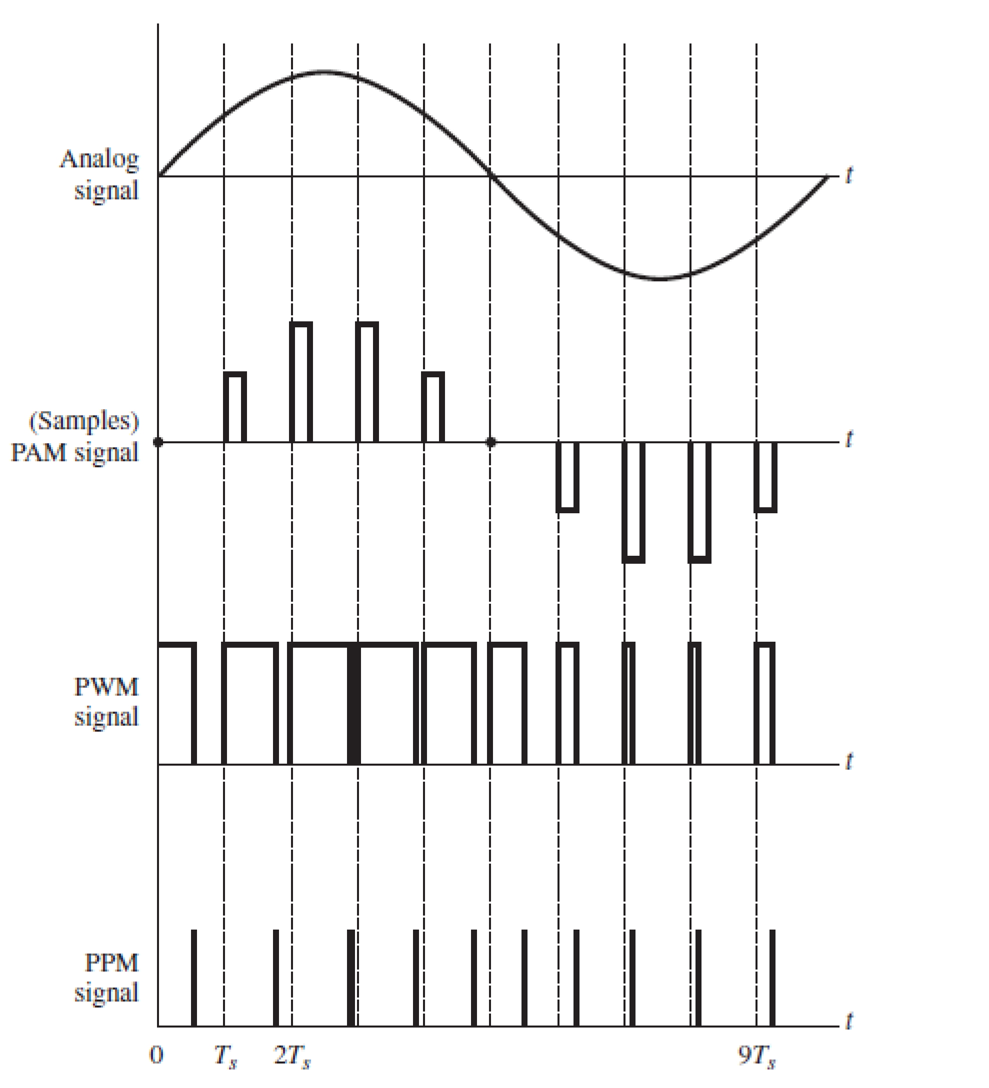
$$d_n \begin{cases} T_s/2 & \text{si} \quad m(nT_s) = 0 \\ > T_s/2 & \text{si} \quad m(nT_s) > 0 \\ < T_s/2 & \text{si} \quad m(nT_s) < 0 \end{cases}$$

Modulación de posición de pulso (PPM)

$$0 \le \tau_n < T_s$$

$$x(t) = \sum_n A\, p(t - nT_s - \tau_n)$$

si $m(nT_s) = 0 \rightarrow \tau_n = T_s/2$



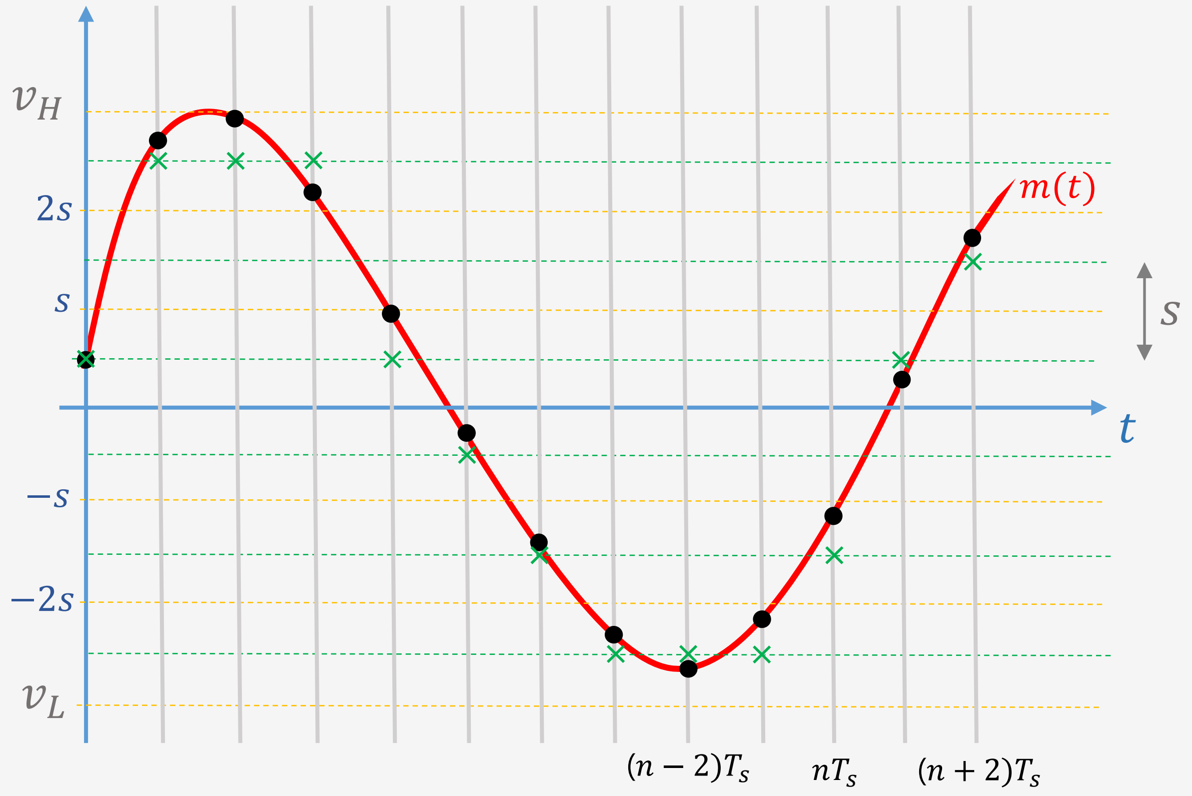
Cuantización uniforme

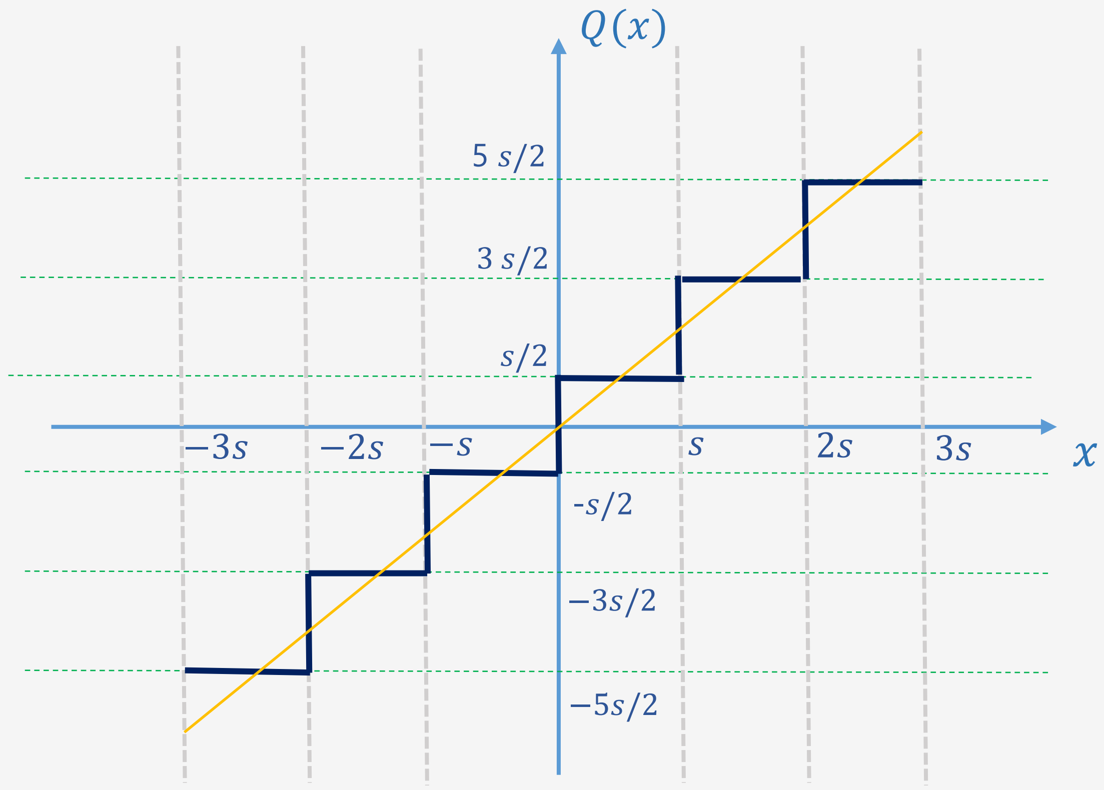
$\bullet\ m[n] = m(nT_s)$ $\quad\quad \times\ m_q[n] = Q(m[n])$

$$e[n] = m[n] - m_q[n]$$

$$s = \frac{V_H - V_L}{M}$$

M: Nro. Niveles (en gral. pot. 2)

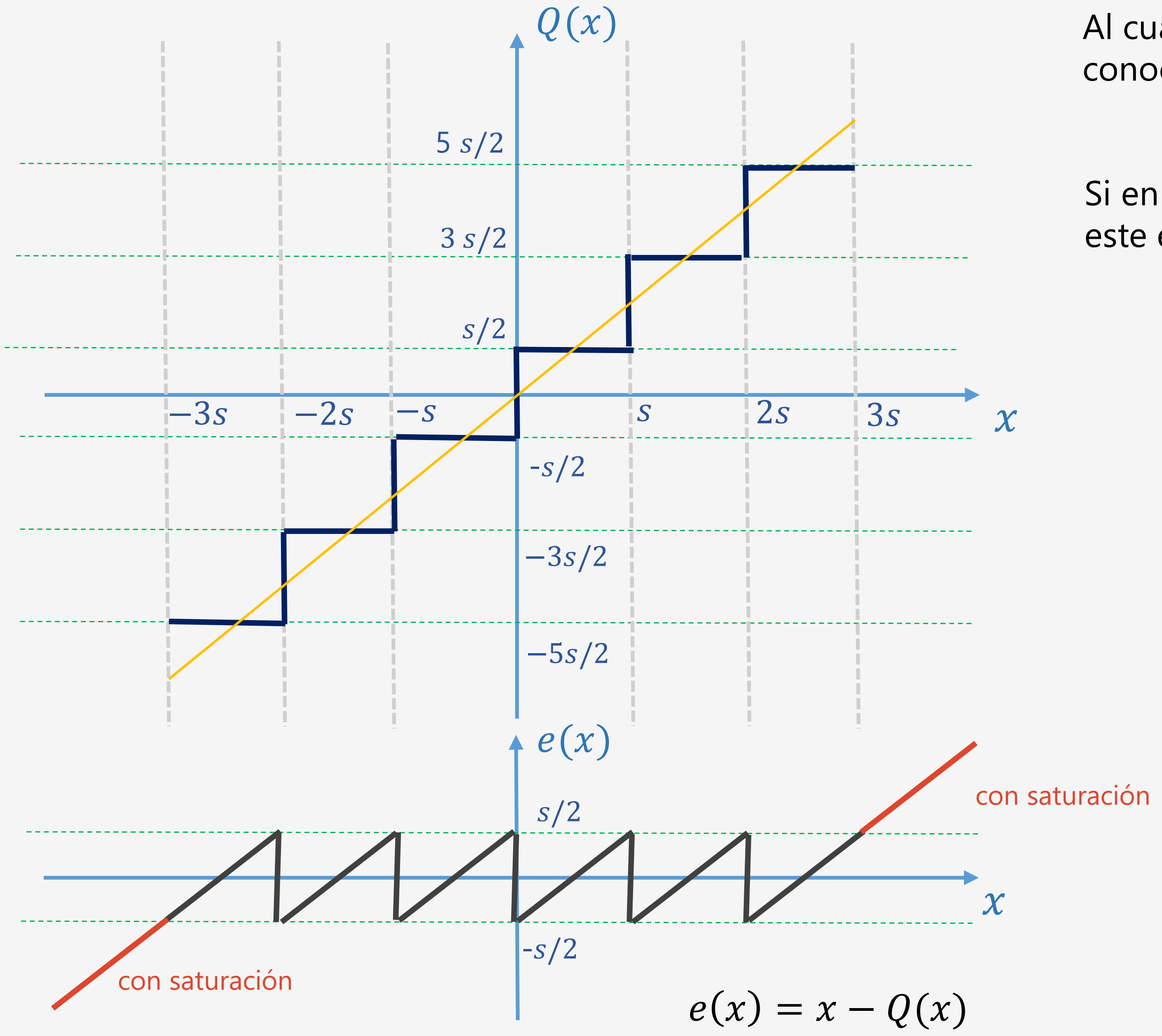




Niveles permitidos

s: paso de cuantización

Cuantización uniforme



Al cuantizar la amplitud de las muestras de la señal se comete un error, conocido generalmente como Ruido de Cuantización

$$e[n] = m[n] - m_q[n]$$

Si en la recepción la SNR es lo suficientemente buena, es probable que este efecto sea el único que degrada la señal al reconstruirse

Suposiciones para el análisis del ruido de cuantización:

- El número de niveles permitidos es "grande", de manera de tener una probabilidad tendiendo a uno de que haya un cambio de nivel entre muestra y muestra.
- La señal varía "rápidamente" entre todos los niveles permitidos, de manera que las muestras de "ruido" no se encuentren correlacionadas.
- No existe coherencia entre la frecuencia de muestreo y alguna de las componentes de la señal.
- No se produce saturación.

Bajo estas hipótesis, se modela al ruido de cuantización $e[n]$, como un proceso aleatorio de media nula e i.i.d.

SNRQ

Sea $f_M(x)$ la fdp para las amplitudes del mensaje, cumpliendo con $f_M(x) = 0$ para $|x| > \frac{Ms}{2}$; la potencia media normalizada para el ruido de cuantización es:

$$Var\{e[n]\} \overset{\text{media nula}}{=} E\{e^2[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(x)\, f_M(x)\, dx \qquad \text{con} \qquad e(x) = x - Q(x)$$

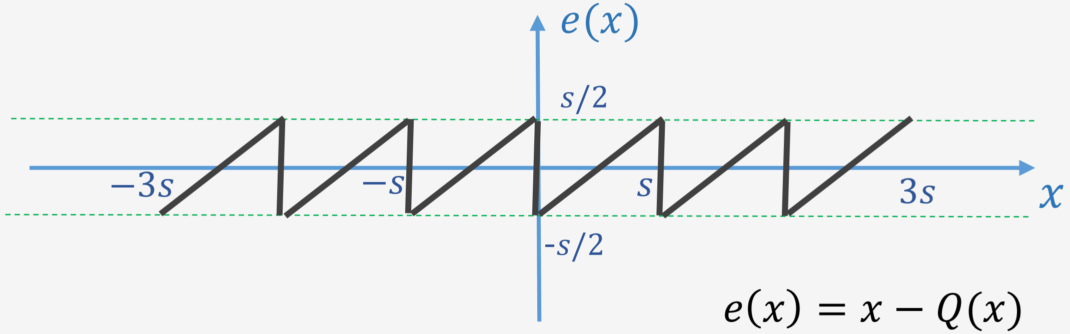
$$E\{e^2[n]\} = \cdots + \int_{-2s}^{-s} \left(x + \frac{3s}{2}\right)^2 f_M(x)\, dx + \int_{-s}^{0} \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 f_M(x)\, dx + \int_{0}^{s} \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 f_M(x)\, dx + \int_{s}^{2s} \left(x - \frac{3s}{2}\right)^2 f_M(x)\, dx + \ldots$$

$$E\{e^2[n]\} \underset{s \text{ suficientemente pequeño}}{\cong} \cdots + f_M\left(-\frac{3s}{2}\right) \int_{-2s}^{-s} \left(x + \frac{3s}{2}\right)^2 dx + f_M\left(-\frac{s}{2}\right) \int_{-s}^{0} \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 dx + f_M\left(\frac{s}{2}\right) \int_{0}^{s} \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 dx + f_M\left(\frac{3s}{2}\right) \int_{s}^{2s} \left(x - \frac{3s}{2}\right)^2 dx + \ldots$$

$$E\{e^2[n]\} \cong \left[\ldots + f_M\left(-\frac{3s}{2}\right) + f_M\left(-\frac{s}{2}\right) + f_M\left(\frac{s}{2}\right) + f_M\left(\frac{3s}{2}\right) + \cdots\right] \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx = \frac{s}{s} \sum_k f_M(x_k) \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx$$

$$E\{e^2[n]\} \cong \frac{s}{s} \sum_k f_M(x_k) \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx \cong \frac{1}{s} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x^2\, dx$$

$$\boxed{E\{e^2[n]\} \cong \frac{s^2}{12}}$$



$e(x) = x - Q(x)$

SNRQ

Ruido de cuantización $\longrightarrow$

$$\begin{cases} e[n] \sim \mathrm{U}\left[-\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right] \\ P_e = \frac{s^2}{12} \\ \text{Independientes} \longrightarrow \text{DEP constante en } [0, f_m] \end{cases}$$

La relación señal a ruido de cuantización SNR_Q:

$$SNR_Q = \frac{P_m}{P_e} = \frac{P_m}{s^2/12}$$

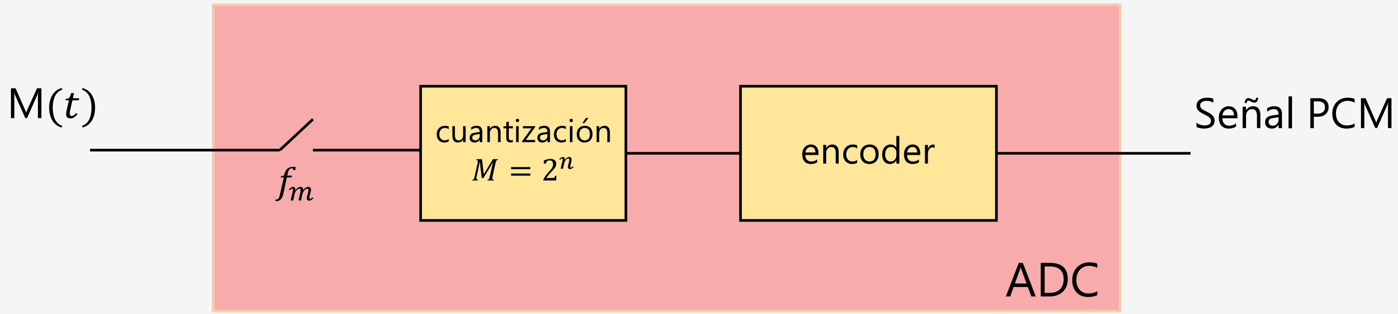
Supongamos que tenemos una señal cuya amplitud se distribuye como $\mathrm{U}[-v, v]$. Si muestreamos y cuantizamos en amplitud las muestras cumpliendo con el teorema de muestreo y con las hipótesis antes descriptas:

$$P_m = \frac{(2v)^2}{12}$$

$$s = \frac{2v}{M}$$

$$\boxed{SNR_Q = \left(\frac{v^2}{3}\right)\left(\frac{M^2 12}{4v^2}\right) = M^2} \longrightarrow SNR_Q[\mathrm{dB}] = 10\log(M^2)$$

PCM (Pulse Coded Modulation)



$M = 2^n$

n: nro. bits por muestra

Si $M(t) \sim U[-v, v\,]$ $\quad P_m = \dfrac{(2v)^2}{12}$

$$s = \frac{2v}{M} = \frac{2v}{2^n}$$

$$SNR_Q = \left(\frac{v^2}{3}\right)\left(\frac{2^{2n}12}{4v^2}\right) = 2^{2n} \longrightarrow SNR_Q[\mathrm{dB}] = 10\log(2^{2n}) \cong 6\,n\,[\mathrm{dB}]$$

16 bits $\longrightarrow$ 96 dB

Los bits se transmiten utilizando técnicas de modulación digital (en banda base o pasabanda)

$R_b = \dfrac{1}{T_b} = n\, f_m$ [bps] $\qquad f_m \geq 2W \longrightarrow R_b \geq 2\,n\,W$

Fuentes:

- Principles of Communications, 5/E by Rodger Ziemer and William Tranter, John Wiley & Sons. Inc.
- NOAA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

POR LA CIENCIA Y POR LA PATRIA

U.N.L.P.

Fi