

NOTAS DE CURSO

de la cátedra de "CAMPOS Y ONDAS"

Tema: "Líneas de Transmisión de Energía".

Por los Ingenieros: Roberto H. Frediani  
Jorge L. Agüero  
Eduardo G. Antonelli  
María Beatriz Barbieri

IITREE: Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y  
Equipos Eléctricos.

## 1.- Introducción:

Una línea es, básicamente un dispositivo que se utiliza para transmitir o guiar energía de un punto a otro. En general consiste de un grupo de dos o más conductores que vinculan una fuente de energía con una carga, o en forma más general, interconectan dos circuitos distintos. Su geometría puede ser la de conductores dispuestos en forma paralela, coaxil, siguiendo una ley exponencial, etc.

Las líneas son utilizadas en muy diversos campos de la ingeniería eléctrica, desde el transporte de grandes potencias, centenares o miles de megavatios, en las redes de transmisión de energía en muy alta tensión, hasta la conducción de señales de muy baja potencia de 1 orden de los picovatios o aun menores, en recepción de señales satelitales.

Si bien es muy diverso el tipo de líneas que se utiliza para cubrir cada necesidad específica, todas ellas responden a los mismos principios básicos de funcionamiento, descriptos a través de las denominadas "Ecuaciones del Telegrafista" que dan las expresiones de las tensiones y corrientes a lo largo de la línea, en función del tiempo. Estas ecuaciones serán obtenidas en el presente trabajo junto con su resolución para ciertos casos particulares (líneas sin pérdidas; líneas con pérdidas sin distorsión) y el planteo del método de resolución para el caso más general de líneas (con pérdida y con distorsión). También serán analizados distintos parámetros intrínsecos de las líneas (constante de propagación, impedancia característica, etc.), para arribar por ultimo a los conceptos de onda estacionaria e impedancia de entrada.

## 2.- Ecuaciones diferenciales de una línea

la descripción de los fenómenos que se presentan en una línea, se expresan convenientemente por medio de los valores que adoptan la tensión "u" y la corriente "i".

En general estos valores varían punto a punto a lo largo de la línea y son funciones del tiempo, es así que tenemos expresiones del tipo  $u(x,t)$  e  $i(x,t)$ . De esta manera el comportamiento de la línea puede conocerse resolviendo las expresiones que vinculan a ambas expresiones. En lo que sigue, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, se establece la relación entre  $u(x,t)$  e  $i(x,t)$  que contendrá coeficientes que caracterizan el medio donde se desarrolla el fenómeno electromagnético aquí analizado.

En adelante, con el propósito de simplificar las expresiones matemáticas, los campos eléctricos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  y magnéticos  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$ , como así también las tensiones  $u$  y corrientes  $i$ , serán escritos como funciones del tiempo. Por ejemplo  $u(x,t)$  será expresa como  $u(x)$ .

Considérese ahora un trozo de línea de longitud  $\Delta X$ , compuesto por dos conductores cilíndricos de radio  $a$ , dispuestos en paralelo, separados entre si por una distancia pequeña respecto a la longitud de onda y

ubicados en el plano paralelo  $xz$ , según se muestra en la Figura 1. Supóngase que dicho trozo de línea está sometido a una perturbación electromagnética que lo alcanza en toda su longitud, sin importarnos por ahora el origen de dicha perturbación.

Sin intentar abarcar, por ahora, la generalidad del problema, se puede considerar al campo inducción magnética  $\vec{B}$  dirigido según el eje  $y$ , mientras que el campo eléctrico  $\vec{E}$  está contenido en el plano  $xz$ .

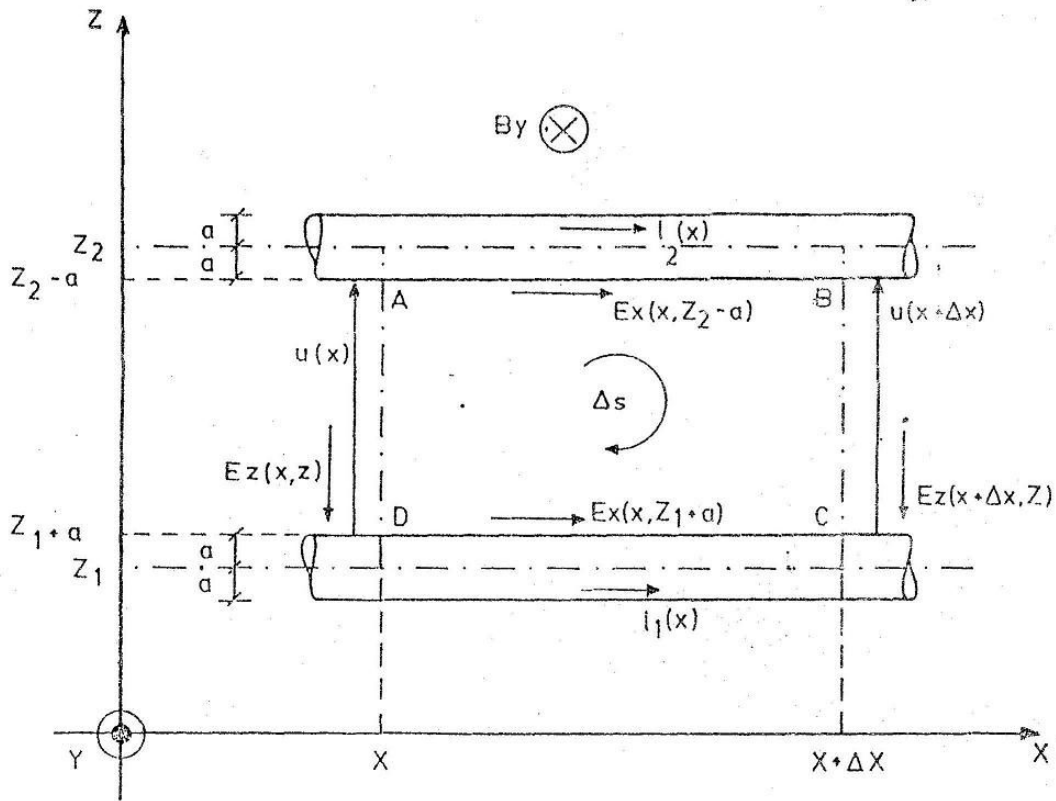


Figura 1: trozo de línea de longitud incremental  $\Delta x$

La primera ecuación de Maxwell establece que el rotor del campo eléctrico  $\vec{E}$  es igual a la derivada parcial temporal del campo  $\vec{B}$  inducción magnética, cambiada de signo, es decir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Integrando el producto del rotor del campo eléctrico  $\bar{E}$ , por el área sobre la superficie incremental  $\Delta S$ , la cual está delimitada por la curva C (lazo ABCD de la Figura 1.), y aplicando el teorema de STOKES, se obtiene:

$$\iint_{\Delta S} (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (2)$$

Integrando el producto de la derivada parcial temporal del campo inducción magnética  $\bar{B}$  por la misma área incremental  $\Delta S$  y teniendo en cuenta que dicha área es invariante en el tiempo, se obtiene:

$$\iint_{\Delta S} (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (3)$$

Resolviendo la integral curvilínea del campo eléctrico  $\bar{E}$ , sobre la curva C definida en la figura resulta:

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{z_1+a}^{z_2} [E_z(x+\Delta x, z) - E_z(x, z)] \cdot dz + \int_x^{x+\Delta x} [E_x(x+z_2-a) - E_x(x, z_1+a)] \cdot dx \quad (4)$$

por otra parte, la variación de tensión sobre la longitud incremental  $\Delta X$ , cuando esta tiende a cero, resulta ser:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta X} \left( \int_{z_1+a}^{z_2-a} [E_z(x+\Delta x, z) - E_z(x, z)] \cdot dz \right) \quad (5)$$

Mientras que las componentes del campo eléctrico, en el sentido longitudinal a los conductores son iguales a la caída de tensión por unidad de longitud en dichos conductores, es decir:

$$E_x(x+z_2-a) = r_2 \cdot i_2(x) + li_2 \frac{\partial i_2(x)}{\partial t} \quad (6)$$

$$E_x(x+z_1+a) = r_1 \cdot i_1(x) + li_1 \frac{\partial i_1(x)}{\partial t} \quad (7)$$

donde  $r_1, r_2$ : son las resistencias por unidad de longitud de cada conductor, que para el caso aquí tratado son iguales, ya que ambos conductores componentes de la línea se suponen idénticos. Estas resistencias interpretan la caída óhmica pura que tiene lugar en los conductores cuando por ellos circula una corriente. Si se supone que el material del que están compuestos los conductores es homogéneo, es decir que su conductividad es uniforme y constante, y que la geometría de los mismos es invariante, estas resistencias serán constantes.

donde  $li_1, li_2$ : son las inductancias intrínsecas por unidad de longitud de cada conductor, y aplicando el mismo razonamiento que para las resistencias, resultan iguales entre si. Estas inductancias dan cuenta de la interacción que se desarrolla en el interior de los conductores, entre la corriente circulante y el campo magnético generado por ella, en el interior de conductores imperfectos. Si se supone que el material del que están compuestos los conductores es homogéneo, es decir que su conductividad y su permeabilidad son uniformes y constantes, y que la geometría de los mismos es invariante, estas inductancias serán constantes.

Es útil recordar que tanto los valores de las resistencias como de las inductancias intrínsecas son susceptibles a cambios con la frecuencia, como consecuencia del efecto pelicular.

Teniendo en cuenta las consideraciones previas pueda escribirse que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} [E_x(x+z_2-a) - E_x(x,z_1+a)] \cdot dx \right) = r \cdot i(x) + li \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (8)$$

Donde  $r$ : resistencia por unidad de longitud de los conductores componentes de la línea ( $r = 2r_1 = 2r_2 = r_1 + r_2$ ).

$li$ : inductancia intrínseca por unidad de longitud de los conductores componentes de la línea ( $li = 2li_1 = 2li_2 = li_1 + li_2$ ).

$I(x)$ :  $i_2(x) = -i_1(x)$  corriente circulante por los conductores componentes de la línea

Por otra parte, resolviendo la integral de superficie del vector inducción magnética  $\vec{B}$  en la superficie incremental  $\Delta S$ , resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) \cdot dx \cdot dz \quad (9)$$

Además se tiene que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) \cdot dx \cdot dz \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) \cdot dz \quad (10)$$

de donde se obtiene la siguiente igualdad:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) \cdot dz = -\frac{\partial}{\partial t} [l_e \cdot i(x)] \quad (11)$$

Donde  $l_e$ : es la inductancia externa por unidad de longitud de la línea (inductancia externa del lazo ABCD de la Figura 1). Esta inductancia tiene en cuenta la interacción entre la corriente que circula por los conductores y el campo magnético dentro del lazo generado por dicha corriente. Si se supone que el material abrazado por el lazo (medio dieléctrico) es homogéneo, es decir su permeabilidad es uniforme y constante, y que la geometría de dicho lazo es invariante, esta inductancia será constante.

Siendo dicha inductancia externa invariante en el tiempo, la anterior ecuación puede describirse de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) \cdot dz = -l_e \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (12)$$

si ahora se reemplaza (5), (8) y (12) en (3) resulta:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} + r \cdot i(x) + li \frac{\partial i(x)}{\partial t} = -l_e \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (13)$$

Ecuación que reagrupada convenientemente deriva en la siguiente:

$$\boxed{\frac{\partial u(x)}{\partial x} + r \cdot i(x) + l \frac{\partial i(x)}{\partial t} = 0} \quad (14)$$

Donde  $l=l_i+l_e$ : es la inductancia total de la línea (interna mas externa)por unidad de longitud.

La ecuación anterior es una de las dos ecuaciones diferenciales básicas que describen el comportamiento de las líneas. En ella se establece la relación entre la variación de la tensión respecto de la distancia en función del valor de la corriente y de su variación respecto del tiempo.

Para hallar la otra ecuación diferencial básica que caracteriza el funcionamiento de una línea, se parte de la segunda ecuación de Maxwell. Esta ecuación establece que el rotor del campo intensidad magnética  $\vec{H}$  es igual a la suma de los vectores densidad de corriente de conducción y de desplazamiento, este último igual a la derivada parcial temporal del campo desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  es decir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (15)$$

la ecuación anterior describe la fuente de rotacional del campo intensidad magnética  $\vec{H}$ , en el medio que circunda a los conductores. Tratándose en forma genérica de un medio dieléctrico real, existe una densidad de corriente de conducción  $\vec{J}$  que tiene en cuenta las pérdidas en el medio dieléctrico y una corriente de desplazamiento, ambas partes del rotacional de  $\vec{H}$ .

Dado que se ha supuesto que el campo intensidad magnética  $\vec{H}$  tiene componente solamente según el eje coordenado y, considerando la componente del rotor en la dirección de z (medio dieléctrico), se obtiene:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y(x,y)}{\partial x} = J_z(z) + \epsilon \frac{\partial E_z(x,z)}{\partial t} \quad (16)$$

Integrando la ecuación a lo largo del eje z, en el espacio comprendido entre ambos conductores componentes de la línea (medio dieléctrico), resulta:

$$\int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial B_y(x,z)}{\partial x} \cdot dz = \int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{1}{\epsilon} J_z(z) \cdot dz + \int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{\partial E_z(x,z)}{\partial t} \cdot dz \quad (17)$$

Resolviendo el miembro izquierdo de la ecuación (17) por aplicación de los mismos conceptos previamente explicados (ver ecuación (12)), resulta:

$$\frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x,z) \cdot dz = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} [l_e \cdot i(x)] = \frac{l_e}{\mu\epsilon} \frac{\partial i(x)}{\partial x} \quad (18)$$

por otro lado, la resolución de una de las componentes del segundo miembro de la ecuación (17), es la siguiente:

$$\int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{\partial E_z(x,z)}{\partial t} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} E_z(x,z) \cdot dz = -\frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad (19)$$

Reconociendo a la integral de la ecuación (19) como la derivada parcial temporal de la caída de tensión a lo largo del eje x, según ya ha sido demostrado (ver ecuación (5)).

Resolviendo la otra componente del segundo miembro de la ecuación (17) resulta:

$$\int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{1}{\epsilon} J_z(z) \cdot dz = \int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{\sigma}{\epsilon} E_z(x,z) \cdot dz = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{z_1+a}^{z_2-a} E_z(x,z) \cdot dz = -\frac{\sigma}{\epsilon} u(x) \quad (20)$$

En donde se ha supuesto que tanto  $\sigma$  como  $\epsilon$  son invariantes a lo largo del eje z, en el espacio entre ambos conductores que conforman la línea.

Reemplazando (18), (19) y (20) en (17), resulta:

$$\frac{l_e}{\mu\epsilon} \frac{\partial i(x)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x)}{\partial t} - \frac{\sigma}{\epsilon} u(x) \quad (21)$$

Considerado que una corriente de desplazamiento tiene asociada a ella una capacidad y que una corriente de conducción tienen asociada a ella una resistencia, por inspección de la ecuación resultan:



$C = \frac{\mu\epsilon}{l_e}$  : Capacidad por unidad de longitud del medio dieléctrico que

ocupa el espacio alrededor de los conductores que forman la línea. Esta capacidad da cuenta de la interacción entre la carga neta superficial sobre los conductores, teniendo en cuenta la polarización del medio dieléctrico producida por el campo eléctrico aplicado al mismo, y la diferencia de tensión existente entre ambos conductores. Si se supone que el material del que está compuesto el medio dieléctrico es homogéneo, es decir que su permitividad es uniforme y constante, y la geometría es invariante, esta capacidad será constante.

$g = \frac{c\sigma}{\epsilon}$  : Conductancia por unidad de longitud del medio dieléctrico que

ocupa el espacio entre los conductores que forman la línea. Esta conductancia da cuenta de las pérdidas por efecto Joule en el medio dieléctrico. Si se supone que el material del que está compuesto el medio dieléctrico es homogéneo, es decir que su permitividad y su conductividad son uniformes y constantes, y que la geometría es invariante, esta conductancia será constante.

Reordenando la ecuación (21) resulta:

$$\boxed{\frac{\partial i(x)}{\partial x} + g \cdot u(x) + c \frac{\partial u(x)}{\partial t} = 0} \quad (22)$$

La ecuación anterior es la segunda ecuación de las ecuaciones diferenciales básicas que describen el comportamiento de las líneas. En ella se establece la relación entre la variación de la corriente respecto de la distancia, en función del valor de la tensión y de su variación respecto del tiempo.

Las ecuaciones (14) y (22) se transcriben a continuación, con la introducción en ellas de la variable tiempo t.

$$\boxed{-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r \cdot i(x,t) + l \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}} \quad (14)$$

$$\boxed{-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g \cdot u(x,t) + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}} \quad (22)$$

Las dos ecuaciones diferenciales anteriores establecen las relaciones entre las tensiones y corrientes en cada punto de la línea. La

solución de cualquier problema particular consistirá en la resolución de estas ecuaciones, con las condiciones de límite impuestas por el problema específico.

Para simplificar el procedimiento matemático utilizado para resolver las ecuaciones anteriores es conveniente obtener expresiones tanto de  $u$  como de  $i$  en función solamente de la distancia a lo largo de la línea  $x$  y del tiempo  $t$ . Para ello se deriva parcialmente respecto de  $x$  a la ecuación (14), con lo que resulta:

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} = \left( r + l \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \quad (23)$$

En donde se ha supuesto que tanto  $r$  como  $l$  son invariantes respecto a  $x$ , es decir que dichos parámetros no varían a lo largo de la línea. Reemplazando ahora la ecuación (22) en la (23) y desarrollando se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} - (l \cdot g + c \cdot r) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - r \cdot g \cdot u(x,t) = 0} \quad (24)$$

La ecuación anterior constituye una de las dos Ecuaciones del Telegrafista. En ella se expresa la relación de la tensión a lo largo de la línea como función de la posición en dicha línea ( $x$ ), del tiempo ( $t$ ) y de parámetros característicos de la línea ( $r$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $c$ ), los cuales a su vez están fijados por la geometría de la misma y por sus materiales constructivos.

Del mismo modo y suponiendo que tanto  $g$  como  $c$  son invariantes respecto de  $x$ , si se deriva parcialmente respecto de  $x$  a la ecuación (22) y luego se reemplaza parte del resultado por la ecuación (14) (o aplicando analogía de la ecuación (24)), resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 t} - (l \cdot g + c \cdot r) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - r \cdot g \cdot i(x,t) = 0} \quad (25)$$

La ecuación anterior constituye la segunda de las Ecuaciones del Telegrafista. En ella se expresa la relación de la corriente a lo largo de la línea como función de la posición de dicha línea ( $x$ ), del tiempo ( $t$ ) y de parámetros característicos de la línea ( $r$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $c$ ).

La solución de las ecuaciones (24) y (25) dependen de las condiciones de contorno impuestas a la línea por el generador que la excita y por la carga a la que está sometida. Dicha solución, al ser las ecuaciones del tipo hiperbólicas, toma la forma de ondas que se propagan a lo largo de la línea, en ambos sentidos (ondas incidente y reflejada). Los parámetros que caracterizan dicha propagación (constante de propagación e impedancia característica), son funciones de  $r$ ,  $l$ ,  $g$  y  $c$ , como se verá más adelante.

Para arribar a las expresiones que dan los valores de tensión  $u$  y corriente  $i$  a lo largo de una línea, se han empleado herramientas proporcionadas por La Teoría de Campos, como son las dos primeras ecuaciones de Maxwell, que expresan las fuentes rotacional de los campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{H}$ . Es de destacar que se habría arribado al mismo resultado utilizando un subconjunto de dicha Teoría de campo, como lo es la teoría Circuitual. Para tal fin se parte del análisis de circuitos equivalentes T o II mostrados en las Figuras 2 y 3 respectivamente, cuyos elementos distribuidos ( $r$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $c$ ) han sido ya introducidos y validados en el presente trabajo y que representan un trozo de línea de longitud incremental. El desarrollo de este análisis con las herramientas proporcionadas por la Teoría Circuitual, no es realizado en el presente trabajo por considerarlo ajeno a los objetivos del mismo, quedando como ejercicio para el lector ávido de encontrar caminos alternativos de razonamiento, que permitan justificar las expresiones que gobiernan el comportamiento de una línea. No obstante debe tenerse en presente que los parámetros característicos de la línea ( $r$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $c$ ) representan elementos circuitales distribuidos a lo largo de la línea, cuyo origen ha sido claramente establecido a través del uso de ecuaciones de Maxwell.

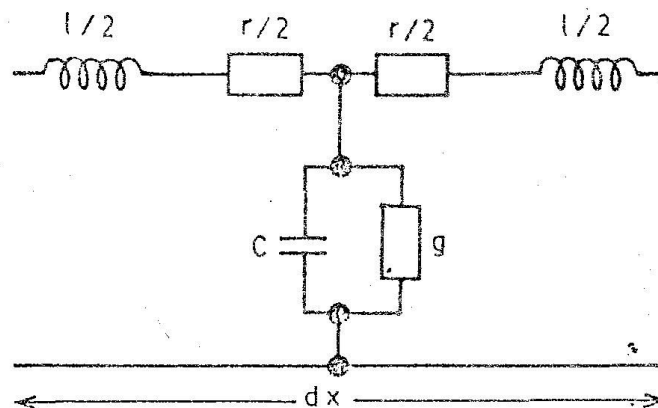


Figura 2- Circuito equivalente T de un trozo  $dx$  de la línea

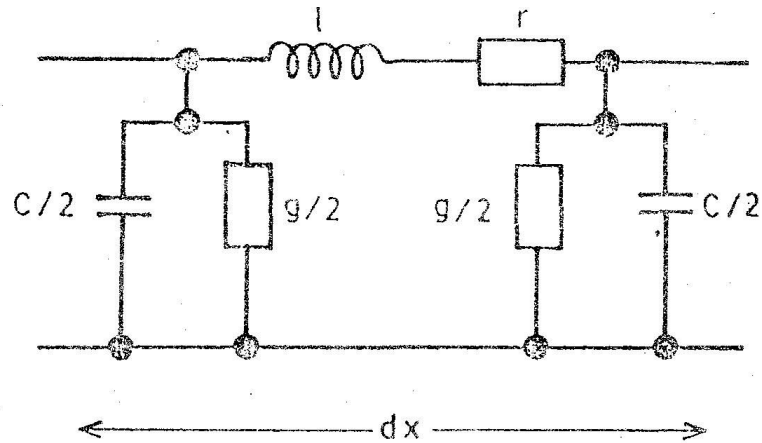


Figura 3- Circuito equivalente  $\pi$  de un trozo  $dx$  de la línea.

### 3.- Líneas sin Pérdidas

Bajo ciertas condiciones, como por ejemplo líneas cortas de muy bajas pérdidas, es posible obtener una buena aproximación del comportamiento de una línea, considerando despreciables las pérdidas (tanto en los conductores como en el medio dieléctrico, las cuales están determinadas por los valores de  $r$  y  $g$  respectivamente). Es así que partiendo de la hipótesis simplificatoria de la línea no disipa energía, las ecuaciones del telegrafista, ecuaciones (24) y (25) devienen en:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \quad (27)$$

La solución de las ecuaciones del telegrafista para una línea sin pérdidas (o con pérdidas despreciables), ecuaciones (26) y (27), da como resultado ondas que se propagan y que tienen la siguiente forma:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = f_1[x-vt] + f_2[x-vt] \quad (28)$$

$$i(x,t) = i_1(x,t) + i_2(x,t) = g_1[x-vt] + g_2[x-vt] \quad (28)$$

Donde  $v = (l \cdot c)^{-1/2}$ : es la velocidad de onda o velocidad de propagación de la onda en la línea.

Las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  dependen de las condiciones de contorno de la línea, impuestas por el generados que la excita y por la carga.

La tensión  $u_1$  y la corriente  $i_1$  se propagan sin deformarse, ya que no hay en la constante de propagación una parte real, en la dirección del eje  $x$ , en el sentido positivo del mismo, con una velocidad  $v$ . De la misma manera, la tensión  $u_2$  y la corriente  $i_2$  se propagan sin deformarse por las razones ya expuestas, en la dirección del eje  $x$ , en el sentido negativo y con la misma velocidad  $v$ .

La solución de la tensión y de la corriente están vinculadas entre si. Para demostrar lo anterior basta recordar lo establecido por la ecuación (22) que se transcribe a continuación:

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g \cdot u(x,t) + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (22)$$

para el caso de una línea sin pérdidas (en este caso dieléctricas), deviene:

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (30)$$

Esta ecuación permite suponer que la solución para la corriente  $i(x)$  previamente establecida en la ecuación (29) puede escribirse de la siguiente forma:

$$i(x,t) = k_1 \cdot f_1[x-vt] + k_2 \cdot f_2[x-vt] \quad (31)$$

en donde ya hemos reemplazado  $g_1$  por  $k_1 f_1$  y  $g_2$  por  $k_2 f_2$ .

Si ahora realizamos las derivadas parciales expresadas en la ecuación (30), utilizando las soluciones de la tensión y corriente establecidas en las ecuaciones (28) y (31) respectivamente, obtendremos:

$$-k_1 \frac{\partial f_1[x-vt]}{\partial [x-vt]} \cdot \frac{\partial [x-vt]}{\partial x} - k_2 \frac{\partial f_2[x+vt]}{\partial [x+vt]} \cdot \frac{\partial [x+vt]}{\partial x} =$$

$$= c \left[ \frac{\partial f_1[x-vt]}{\partial [x-vt]} \cdot \frac{\partial [x-vt]}{\partial t} + \frac{\partial f_2[x+vt]}{\partial [x+vt]} \cdot \frac{\partial [x+vt]}{\partial t} \right] \quad (32)$$

y siendo:  $\frac{\partial [x-vt]}{\partial x} = \frac{\partial [x+vt]}{\partial x} = 1$

al igual que  $\frac{\partial [x-vt]}{\partial t} = -\frac{\partial [x+vt]}{\partial t} = -v$

por simple inspección de la ecuación (32) se obtiene que :

$$k_1 = v \cdot c = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}} \cdot c = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$k_2 = -v \cdot c = -\frac{1}{\sqrt{l \cdot c}} \cdot c = -\sqrt{\frac{l}{c}}$$

por lo que resulta:

$$i_1(x,t) = k_1 \cdot u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{c}}} u_1(x,t) \quad (33)$$

$$i_2(x,t) = k_2 \cdot u_2(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{c}}} u_2(x,t) \quad (34)$$

En las ecuaciones anteriores queda establecida claramente la relación entre las soluciones para la tensión y la corriente. Dichas ecuaciones establecen una de las formas de definición de la denominada impedancia de onda o impedancia característica de la línea: Esta impedancia característica puede expresarse como la relación entre las ondas incidentes de tensión y corriente o como la relación cambiada de signo debido al sentido inverso de propagación de dichas ondas reflejadas. De este modo, y para el caso particular de una línea sin pérdidas, la impedancia característica es:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (35)$$

Esta impedancia de onda o impedancia característica de una línea es similar conceptualmente a la impedancia de onda definida para una

onda electromagnética que se propaga en un dado medio y que establece la relación entre los campos eléctricos y magnéticos. Si bien en ambos casos estas impedancias dependen de las características del medio en el cual tiene lugar la propagación, la diferencia mas significativa radica en el hecho de que para el caso de la línea , esta impedancia depende además de la geometría de dicha línea, como puede apreciarse en la ecuación (35) para el caso de una línea sin pérdidas, ya que  $l$  y  $c$  dependen de dicha geometría. A continuación se desarrollaran dos ejemplos que permiten visualizar gráficamente lo que ocurre en una línea sin pérdidas.

#### Ejemplo a)

Se tiene una línea sin pérdidas de longitud infinita, desarrollada sobre el eje  $x$  positivo, libre de tensión y corriente a lo largo de la misma. A tiempo  $t=0$  se le aplica un generador de impedancia nula y que genera una tensión continua de amplitud  $V$ , como se indica en la figura 4-a). de este modo ingresa a la línea un escalón de tensión  $V$ . que se propaga a lo largo de dicha línea (onda incidente ) en el sentido de las  $x$  positivas, de modo tal que en un tiempo  $t_1$  el escalón de tensión habrá recorrido una distancia  $x_1=v \cdot t_1$ , como se indica en la figura 4-b), siendo  $v$  la velocidad de propagación : del mismo modo, transcurrido un tiempo  $t_2 > t_1$ , dicho escalón de tensión habrá alcanzado a recorrer una distancia  $x_2=v \cdot t_2 > x_1$ , como se indica en la figura 4-c).

Existirá también un escalón de corriente que se propaga conjuntamente con aquel de tensión, y cuya amplitud será igual a  $I=V/Z_0$ .

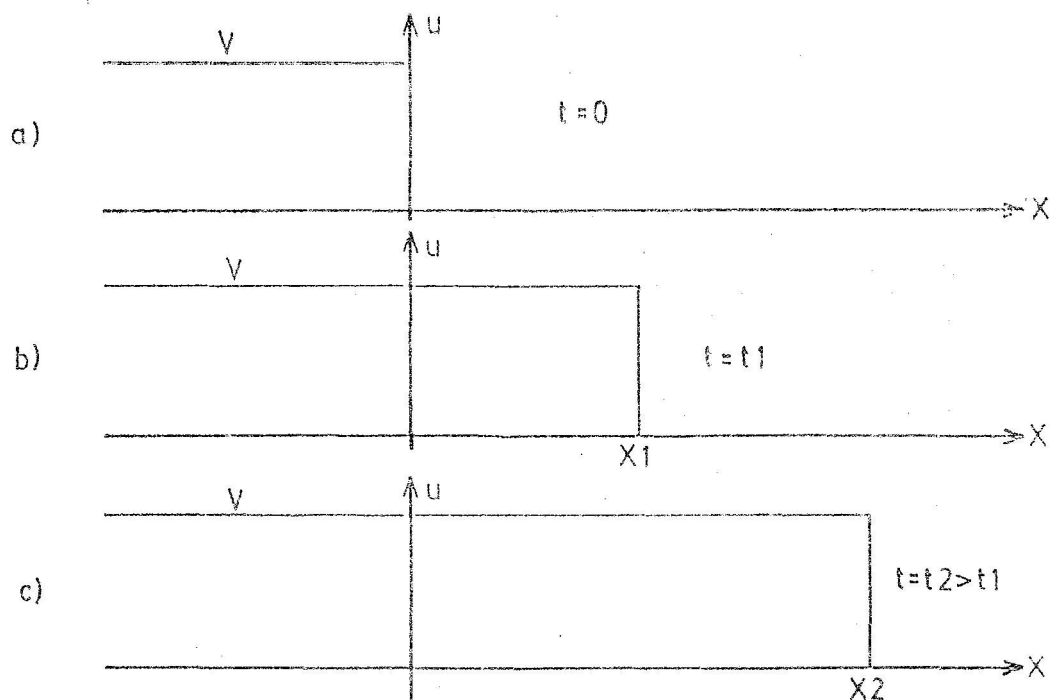


Figura 4- Escalón de tensión  $V$  que se propaga sobre una línea sin pérdidas.

### Ejemplo b)

Se tiene una línea sin pérdidas de longitud infinita, desarrollada sobre ambos sentidos del eje  $x$  y desconectadas ambas mitades de la misma en  $x=0$ . Sobre la mitad izquierda de dicha línea existe una tensión continua de amplitud  $V$ , mientras que la mitad derecha esta libre de tensión y corriente. A tiempo  $t=0$  se conectan ambos lados de la línea. Como se indica en la figura 5-a), en ese instante de tiempo la tensión en  $x=0$  cae a  $V/2$ , generándose dos ondas incidentes de tensión, una que viaja en el sentido de las  $x$  positivas cuya amplitud es  $V/2$  y otra que viaja en el sentido de las  $x$  negativas cuya amplitud es  $-V/2$ . En un tiempo  $t_1$  ambas ondas incidentes alcanzan a recorrer una distancia  $\pm x_1 = \pm v \cdot t_1$ , en ambos casos la tensión total es igual a la suma de la tensión preexistente mas el valor de la onda incidente, dando así un resultado idéntico de  $+v/2$  según se observa en la figura 5-b). en un tiempo  $t_2 > t_1$  ambas ondas incidentes recorren una distancia  $|\pm x_2| = |\pm v \cdot t_2| > |\pm x_1|$  según puede visualizarse en la figura 5-c).

Del mismo modo existirán dos escalones de corriente de amplitud  $V/2Z_0$  que conforman dos ondas incidentes de corriente, una que viaja en el sentido de las  $x$  positivas y otra en sentido contrario, repitiendo lo que sucede con las ondas de tensión.

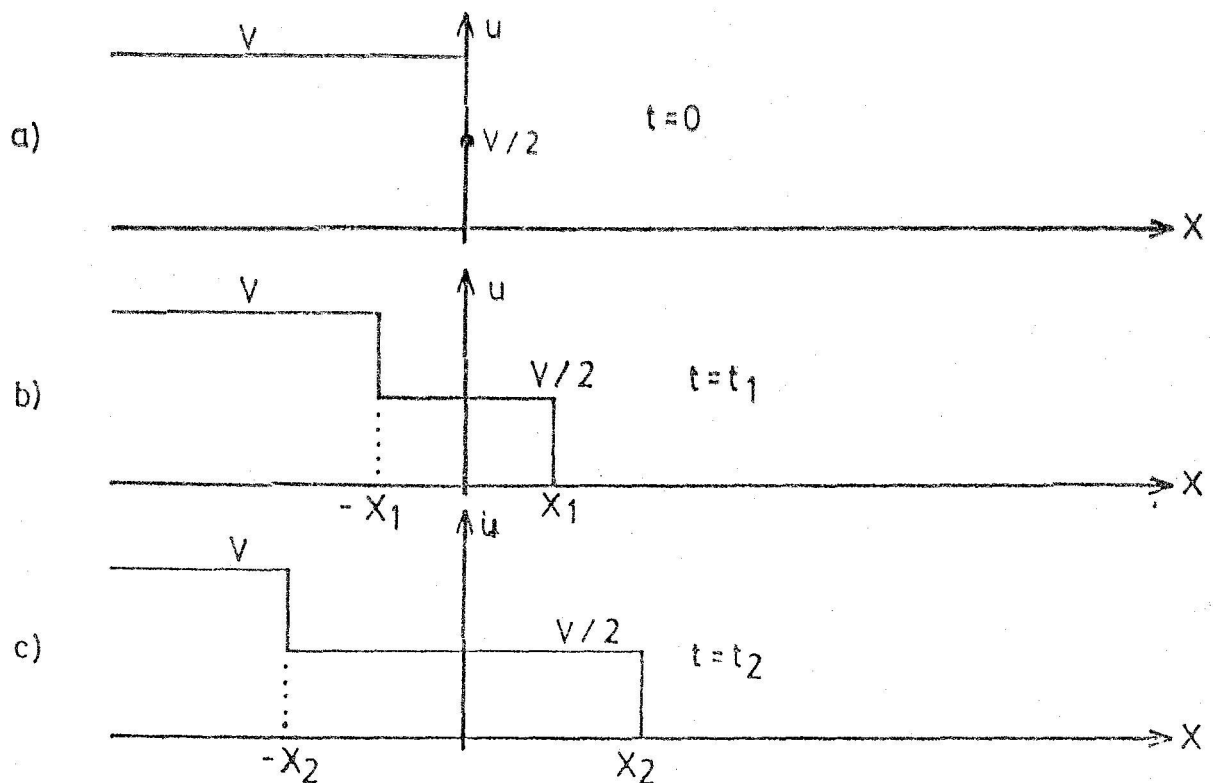


Figura 5- Escalón de tensión  $V/2$  que se propaga en ambos sentidos, a partir del punto medio de una línea infinita, estando previamente la mitad izquierda sometida a una tensión  $V$ .



Ambos ejemplos describen los transitorios que ocurren en conmutación de las líneas con tensiones y corrientes continuas.

#### 4.- Líneas con pérdidas pero sin distorsión

las ecuaciones del telegrafista son de difícil resolución para el caso general de las líneas con pérdidas, es decir cuando tanto  $r$  como  $g$  son distintas a cero. Sin embargo existe un caso muy interesante y a la vez de gran aplicación en la práctica, que determina que la línea aun con pérdidas nulas, no introduzca distorsión en las ondas que se propagan a través de ella. A estas líneas particulares se las conoce como líneas de Heaviside, líneas libres de distorsión o líneas compensadas.

En estas líneas se cumple la siguiente relación:

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} \quad (36)$$

otra forma de escribir las ecuaciones del telegrafista que permitirá resolver fácilmente las mismas para el caso aquí tratado de líneas de Heaviside, es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]^2 \cdot u(x,t) + \frac{l \cdot c}{4} \cdot \left( \frac{r}{l} - \frac{g}{c} \right)^2 \cdot u(x,t) = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]^2 \cdot i(x,t) + \frac{l \cdot c}{4} \cdot \left( \frac{r}{l} - \frac{g}{c} \right)^2 \cdot i(x,t) = 0 \quad (38)$$

el lector deberá tener en cuenta para la deducción de las ecuaciones anteriores, las cuales son idénticas a (24) y (25), que el cuadrado de la derivada parcial corresponde a la derivada segunda parcial al desarrollar el termino entre corchetes elevado al cuadrado.

Si ahora se introduce la ecuación expresada en la ecuación (36) dentro de las ecuaciones del telegrafista (37) y (38), estas devienen en:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]^2 \cdot u(x,t) = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) \right]^2 \cdot i(x,t) = 0 \quad (40)$$

Las ecuaciones (39) y (40) tienen la siguiente forma:

$$u(x,t) = u_0(x,t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) t} \quad (41)$$

$$i(x,t) = i_0(x,t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) t} \quad (42)$$

Introduciendo las soluciones anteriores en las ecuaciones (39) y (40) (obviando cálculos intermedios que se dejan como ejercicio para el lector), estas se transforman en:

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 i_0(x,t)}{\partial^2 x} - l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 i_0(x,t)}{\partial^2 t} = 0 \quad (44)$$

Las ecuaciones (43) y (44) resultan ser las ecuaciones del telegrafista para una línea sin pérdidas (ver ecuaciones (26) y (27)). Resulta así evidente que si bien las líneas sin pérdidas prácticamente no existen, la resolución de las ecuaciones del telegrafista para dicho tipo de líneas, permiten resolver otros casos mas complejos como son las líneas de Heaviside o compensadas.

Por consiguiente la solución de las ecuaciones del telegrafista para líneas de Heaviside es la siguiente.

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) t} \cdot [f_1[x - vt] + f_2[x + vt]] \quad (45)$$

$$i(x,t) = i_1(x,t) + i_2(x,t) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) t} \cdot [g_1[x - vt] + g_2[x + vt]] \quad (46)$$

Donde  $v = \sqrt{l \cdot c}$ : es la velocidad de propagación de la onda en la línea.

Las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  depende de las condiciones de contorno de la línea.

Al igual que en el caso de una línea sin pérdidas, en las líneas de Heaviside se propagan una onda incidente de tensión y otra de corriente, en el sentido positivo de las  $x$  y una onda reflejada de tensión y otra de corriente en el sentido negativo de las  $x$ , todas con velocidad  $v$ .

Las diferencias de la línea sin pérdidas respecto de la línea de Heaviside es que en esta última aparece una atenuación exponencial en las ondas incidentes y reflejada. Esta atenuación no depende de la frecuencia de la onda y, por lo tanto no produce distorsión en la misma. Esto significa que las diferentes frecuencias componentes de la onda, incidente o reflejada, sufren la misma atenuación independiente de su frecuencia. Esto es por la anterior particularidad que este tipo de líneas se denomine libre de distorsión o compensada.

La onda incidente de tensión, que viaja en el sentido positivo de las  $x$ , puede describirse, a partir de la ecuación (45), de la siguiente forma:

$$u_1(x,t) = e^{-\alpha x} f_1[x - vt] \quad (47)$$

donde  $\alpha = \frac{1}{2 \cdot v} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)$ : es la constante de atenuación la cual depende de los parámetros intrínsecos de la línea ( $r, l, g, c$ ), los cuales en principio se han supuesto que no varían con la frecuencia, si despreciamos el efecto pelicular.

En la ecuación (47) el término que provoca la atenuación ha sido expresado en función de la distancia sobre la línea  $x$ , en lugar de hacerlo en función del tiempo como estaba originalmente en la ecuación (45). Ambas expresiones, ecuaciones (45) y (47), son idénticas, ya que el tiempo de la velocidad de propagación  $v$ , de la siguiente manera.

$$X = v \cdot t \quad \text{ó} \quad t = x/v$$

Dado que la onda incidente ha sido expresada en términos de la variable  $(x-vt)$ , arbitrariamente y sin cometer ningún error podemos describir la expresión de onda incidente de tensión, ecuación (47), introduciendo la citada variable en el término que produce la atenuación. De tal manera resulta:

$$u_1(x,t) = e^{-\alpha(x-vt)} f_1[x - vt] \quad (48)$$

Empleando el mismo razonamiento podemos expresar a la onda reflejada de tensión, onda que viaja en el sentido de las  $x$  negativas, de la siguiente manera:

$$u_2(x,t) = e^{-\alpha(x+vt)} f_2[x+vt] \quad (48)$$

Es posible, al igual que en el caso de líneas sin pérdidas, hallar la relación entre las ondas incidentes y reflejadas de tensión y corriente. Esta relación, en el caso ahora tratado de líneas de Heaviside, no difiere de aquel hallado para líneas sin pérdidas. Para o repetir el análisis ya hecho, simplemente se transcriben los resultados, es así que las ondas incidentes y reflejadas de corriente toman la siguiente forma:

$$i(x,t) = i_1(x,t) + i_2(x,t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c}\right)t}}{\sqrt{\frac{l}{c}}} \cdot [f_1[x-vt] + f_2[x+vt]] \quad (50)$$

De la inspección de la ecuación anterior resulta evidente que la impedancia característica de la línea compensada igual a aquella de la línea sin pérdidas e igual a:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

la constante de atenuación de la línea de Heaviside puede escribirse de diversas formas, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot v} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right) = \frac{g}{v \cdot c} = \frac{r}{v \cdot l} = \sqrt{r \cdot g} = \frac{r}{Z_0} = g \cdot Z_0 \quad (51)$$

A continuación se desarrollará un ejemplo que permitirá visualizar gráficamente lo que ocurre en la línea de Heaviside. A los efectos de poder realizar una comparación de comportamientos el ejemplo expuesto coincidirá con uno de los ya desarrollados para líneas sin pérdidas.

#### Ejemplo a)

Se tiene una línea de Heaviside, compensada o sin distorsión, de longitud infinita desarrollada sobre el eje x positivo, libre de tensión y corriente a lo largo de la misma. A tiempo  $t=0$  se le aplica un generador de impedancia nula y que genera una tensión continua de amplitud  $V$ , como se indica en la figura 6-a). De este modo ingresa a la línea un escalón de tensión  $V$ , que se propaga, atenuándose, a lo largo de dicha línea (onda incidente) en el sentido de las x positivas, de modo tal que en un tiempo  $t_1$  el escalón de tensión habrá recorrido una distancia  $x_1 = v \cdot t_1$  y se habrá atenuado hasta alcanzar un valor  $V \cdot e^{-\alpha x_1}$ , como se indica en la figura 6-b), siendo  $v$

la velocidad de propagación de la onda y  $\alpha$  la constante de atenuación. Del mismo modo, transcurrido un tiempo  $t_2 > t_1$ , dicho escalón de tensión habrá alcanzado a recorrer una distancia  $x_2 = v \cdot t_2$  y se habrá atenuado hasta alcanzar un valor  $V \cdot e^{-\alpha x_2}$ , como se indica en la figura 6-c).

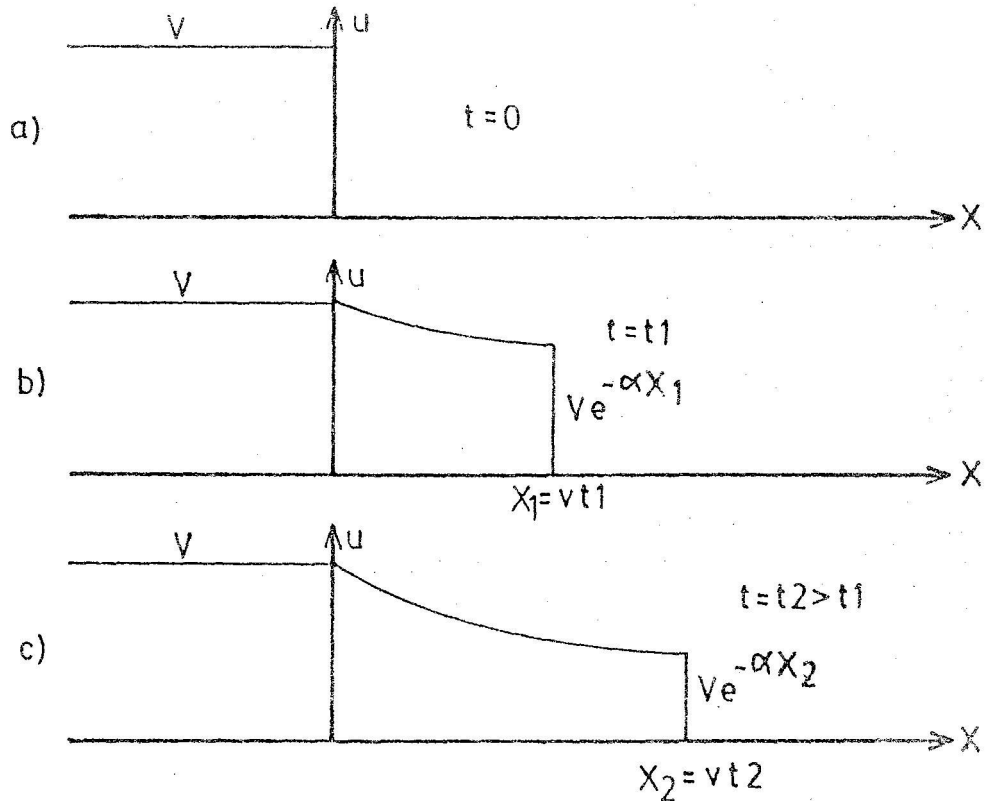


Figura 6- Escalón de tensión  $V$  que se propaga sobre una línea de Heaviside, compensada o libre de distorsión.

##### 5.- Líneas con pérdidas y con distorsión. Caso general

Resulta de un alto grado de complejidad matemática resolver las ecuaciones del telegrafista e forma general, cualesquiera sean las condiciones de contorno, para este caso general de líneas.

Si se limita el análisis a ondas senoidales, habida cuenta de que cualquier onda periódica puede descomponerse en una serie de senos y cosenos de distintas frecuencias, se obtendrá una solución para las ecuaciones del telegrafista del siguiente tipo:

$$u(x,t) = U_0 \cdot e^{-\gamma x + j\omega t} \quad (52)$$

Donde:  $\gamma = \alpha + j\beta$ : es la constante de propagación de onda y resulta compleja. La parte real determina la atenuación que sufre la onda al propagarse, mientras que la parte imaginaria determina la velocidad de propagación de la onda.

$\omega$ : es la pulsación angular de la onda senoidal.

Si se define la impedancia serie de la línea (ver esquemas circuitales de las Figuras 2 ó 3) a la pulsación angular  $\omega$ , como:

$$z = r + j\omega L \quad (53)$$

y de manera similar se define la admitancia paralelo de la línea (ver esquemas circuitales de las Figuras 2 ó 3). a la pulsación angular  $\omega$ , como:

$$y = g + j\omega C \quad (54)$$

se puede demostrar que la constante de propagación resulta ser:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha \pm j\beta \quad (55)$$

Dejándose como ejercicio para el lector dicha demostración, al igual que la comprobación de la ecuación (55) para los casos particulares de líneas sin pérdidas y de Heaviside ya tratados. Se resalta el hecho de que  $\gamma$  depende ahora de la frecuencia.

También puede demostrarse que la impedancia característica tiene la siguiente expresión:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = R \pm jX \quad (56)$$

Siendo ahora la impedancia característica un valor complejo y que depende de la frecuencia, aunque en la mayoría de las líneas de interés práctico, preponderará la parte resistiva en el rango de frecuencias de su utilización.

Los valores de  $\gamma$  y  $Z_0$  ubicados en el primer cuadrante del plano complejo corresponde a la onda incidente, mientras que aquellos ubicados en el cuarto cuadrante corresponden a la onda reflejada. La solución general a las ecuaciones del telegrafista para este tipo de líneas, resulta ser:

$$u(x,t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c}\right)t} \cdot B_\phi \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} - \frac{g}{c} \right) \cdot \sqrt{t^2 - l \cdot c \cdot x^2} \right] \quad (57)$$

Donde  $B_\phi$ : es una función de Bessel de argumento igual al término entre corchetes de la ecuación (57).

## 6.- Reflexiones de la línea.

Ha sido demostrado en puntos anteriores, la existencia de ondas reflejadas de tensión y corriente en una línea, cuando se halló la solución de las ecuaciones del telegrafista.

En los ejemplos dados en dichos puntos siempre se trato con Líneas de long. Infinita, de manera tal de imponer condiciones de contorno específicas, con el objeto de anular, la presencia de ondas reflejadas sobre dichas líneas y facilitar así la comprensión de los tópicos allí tratados.

En este capítulo se pondrá de manifiesto la existencia de las citadas ondas reflejadas las cuales, como se vera a continuación, están determinadas por las condiciones de contorno impuestas a la línea en ambos extremos y, a su vez, están estrechamente relacionadas a las ondas incidentes. Se puede trazar una analogías entre la reflexión de una onda electromagnética plana producida por un cambio en las características del medio en el cual se propagan, como lo es la carga de dicha línea. Ambos fenómenos son equivalentes y se rigen por leyes similares.

Para simplificar el análisis tratara con magnitudes que varíen senoidalmente o sean continuas con el tiempo, lo cual de ningún modo resta generalidad a los resultados que s obtengan, habida cuenta de que cualquier onda periódica puede descomponerse en sumas de senos y cosenos de distintas frecuencias mas una componente continua.

Supóngase tener una línea de longitud  $L$  desarrollada a lo largo del eje  $x$ , desde  $x=0$  hasta  $x=L$ , cuya impedancia característica es  $Z_0$  y cuya impedancia de carga es  $Z_L$ , según se muestra en la figura 7.

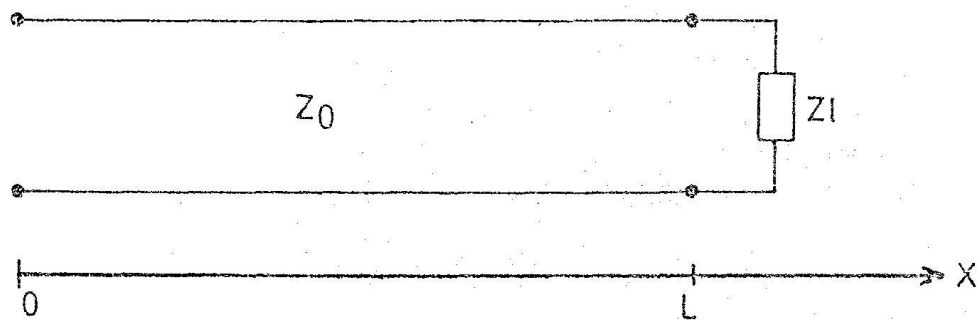


Figura 7- Línea de longitud  $L$  e impedancia característica  $Z_0$ , cargada con una impedancia  $Z_L$

Si sobre la anterior línea se supone que de algún modo, el cual no es relevante para este análisis, ha arribado a la carga  $Z_L$  una onda incidente de tensión y otra de corriente, de amplitudes  $U_1$  e  $I_1$  respectivamente, la discontinuidad que la carga ofrece para la propagación de dichas ondas incidentes generara una onda reflejada de tensión y otra de corriente, cuyas amplitudes serán  $U_2$  e  $I_2$  respectivamente.

Por condiciones de contorno deberá cumplirse que la tensión total y la corriente total sobre la carga están relacionadas por la impedancia de carga  $Z_L$ , de la siguiente manera:

$$U_1 + U_2 = Z_L (I_1 + I_2) \quad (58)$$

En donde tanto la tensión como la corriente total sobre la carga han sido expresadas como la suma de las ondas incidente y reflejada.

Por otra parte como ha sido previamente establecido en capítulos anteriores, la relación entre las ondas incidentes y reflejadas de tensión y corriente es la impedancia característica de la línea. Es decir que:

$$Z_0 = \frac{U_1}{I_1} = -\frac{U_2}{I_2} \quad (59)$$

o sea que en  $x=L$ , es decir en el extremo de carga de la línea, o lo que es equivalente, sobre la carga  $Z_L$  las ondas reflejadas de tensión y corriente,  $U_2$  e  $I_2$  respectivamente, calculadas en base a la condición de contorno expresada por la ecuación (58) y por la relación dada en (59), resulta ser:

$$U_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \cdot U_1 = \sigma_{RV} \cdot U_1 \quad (60)$$

$$I_2 = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0} \cdot I_1 = \sigma_{RI} \cdot I_1 \quad (61)$$

Donde  $\sigma_{RV} = -\sigma_{RI}$ : son los coeficientes, de reflexión de tensión y corriente respectivamente en el punto  $x=L$  de la línea.

Con las expresiones (60) y (61) es posible determinar a su vez el coeficiente de reflexión de potencia, que no es más que la relación entre la potencia de la onda reflejada a la potencia de la onda incidente y cuya expresión es:



$$\sigma_{RP} = \frac{P_2}{P_1} = \sigma_{RV} \cdot \sigma_{RI} = -\left(\frac{Z_0 - Z_L}{Z_0 + Z_L}\right)^2 \quad (62)$$

de la simple inspección de las ecuaciones (60), (61) y (62) resulta evidente que solamente si  $Z_0$  y  $Z_L$  son ambos reales y puros, es decir resistivos puros, los coeficientes de reflexión serán independientes de la frecuencia.

Por otra parte, si  $Z_0$  ó  $Z_L$  son complejos siguen teniendo validez las definiciones de los coeficientes de reflexión, pero solamente para ondas periódicas para las cuales se ha restringido este análisis. En caso contrario dichos coeficientes se transforman en operadores.

Es de destacar el hecho de que si la impedancia de carga  $Z_L$  fuera igual a la impedancia característica de la línea, no existirían las ondas reflejadas de tensión corriente. En este caso se dice que la línea se encuentra adaptada y su comportamiento es similar al de una línea de longitud infinita.

Para visualizar como se comporta una línea cuando existen ondas reflejadas se desarrolla el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo a)

Supóngase tener una línea sin pérdidas, de longitud  $L$  desarrollada a lo largo del eje  $x$  desde  $x=0$  hasta  $x=L$  y cargada con una impedancia  $Z_L$ , línea mostrada en la Figura 7. a tiempo  $t=0$  se le aplica en sus bornes de entrada una tensión continua de amplitud  $V$ , dando origen a una onda incidente de tensión  $V_1=V$  tal como se indica en la figura 8-a). Luego de un cierto tiempo  $t_L=L/v$  con  $v$ : velocidad de propagación, la onda incidente arriba a la carga, según se indica en la Figura 8-b). El arribo de la onda incidente a la carga produce una onda reflejada cuyo valor es  $V_2=\sigma_{RV} \cdot V_1$  y cuyo sentido de propagación es el del eje  $x$  negativa.

En cada punto de la línea la tensión total es igual a la suma de la onda incidente mas la reflejada, según se muestra en la Figura 8-c) , la cual muestra lo que ocurre en la línea para un tiempo  $t_2$  tal que  $2t_L < t_2 < t_L$ .

Para un tiempo  $t_3=2t_L=L/v$  la onda reflejada arriba a los bornes de entrada de la línea, según se indica en la Figura 8-d).

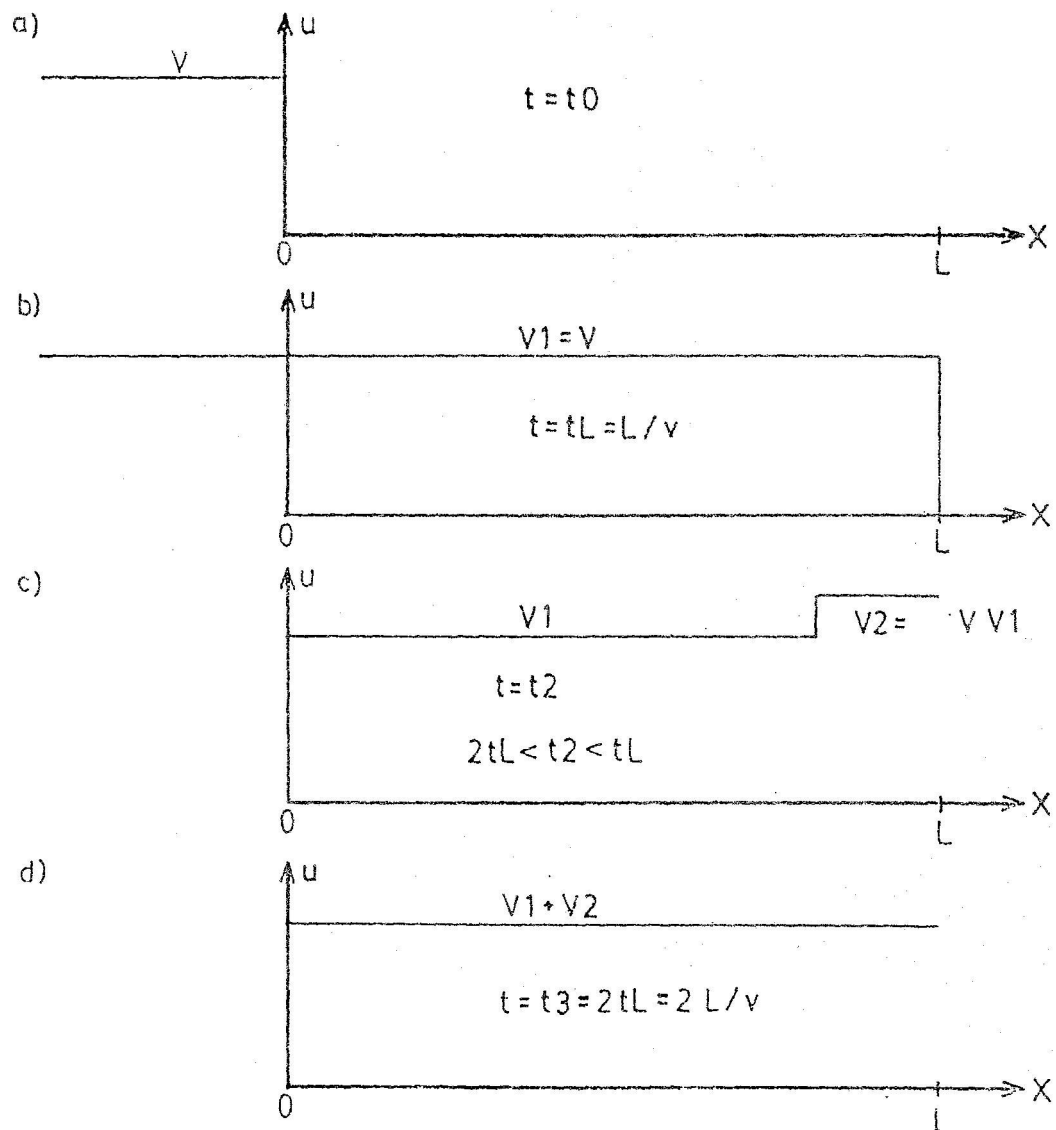


Figura 8- Reflexión en una línea sin pérdidas, de longitud  $L$ .

Existe también un coeficiente de reflexión en el lado generador (bornes de entrada de la línea). La onda reflejada en la carga actúa entonces como un onda incidente y la impedancia de salida del generador hace las veces de impedancia de carga para esta onda incidente, de modo tal que si la línea no está adaptada en al menos uno de sus extremos, se producen múltiples reflexiones, constituyendo un fenómeno transitorio en el establecimiento de las tensiones y corrientes, cuyo resultado final consistirá en establecer un régimen forzado, caracterizado por la presencia de ondas denominadas estacionarias como se verá en el próximo capítulo.

### 7.-Ondas estacionarias en líneas

Como ha sido mencionado en el capítulo anterior, las tensiones y corrientes en cada punto de la línea resultan ser la composición de

las ondas incidentes y reflejadas. Luego de transcurrido en tiempo suficientemente grande, de modo tal de alcanzarse el régimen permanente o forzado, lo que es equivalente a decir que las sucesivas reflexiones han disminuido a un valor despreciable debido a la atenuación que sufren al propagarse, sobre la línea se establecerá un perfil de ondas de tensión y corriente del tipo estacionario. Para tratar de demostrar lo dicho anteriormente, se realizará un análisis de lo que ocurre en la línea caracterizada por su longitud  $L$ , su impedancia característica  $Z_0$  y su constante de propagación  $\gamma$ .

Dicha línea tiene como condiciones de contorno una carga  $Z_L$  conectada en sus bornes de salida y un generador con impedancia nula conectado en sus bornes de entrada, como puede verse en la Figura 9.

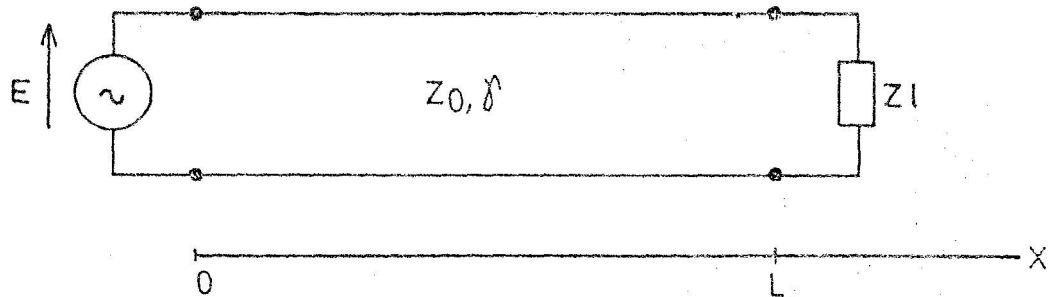


Figura 9 - Línea de longitud  $L$ , impedancia característica  $Z_0$  y constante de propagación  $\gamma$ , cargada con  $Z_L$  y excitada con  $E$ .

Para simplificar una vez más el análisis, se emplea un generador senoidal. Como se trata de hallar la expresión de la tensión y de la corriente en cada punto de la línea se parte de las soluciones de las ecuaciones del telegrafista, halladas con anterioridad y que se transcriben a continuación.

$$U(x) = U_1 \cdot e^{-\gamma x} + U_2 \cdot e^{\gamma x} \quad (63)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} (U_1 \cdot e^{-\gamma x} - U_2 \cdot e^{\gamma x}) \quad (64)$$

en donde se ha obviado la variable tiempo en las expresiones por motivos de simplicidad.

Las anteriores ecuaciones establecen que la tensión (corriente) en un dado punto  $x$  de la línea es la suma de las ondas incidente y

reflejada de tensión (corriente) y además que ambas ondas incidentes y ambas ondas reflejadas están relacionadas entre si por la impedancia característica de la línea.

Si ahora se introducen las condiciones de contorno resulta ser que en  $x=0$ , la tensión sobre la línea es igual a aquella que entrega el generador, es decir que:

$$U(0) = E = U_1 + U_2 \quad (65)$$

y que en  $x=L$  la tensión y corriente sobre la carga están relacionadas a través de la impedancia de carga  $Z_L$  es decir que:

$$U(L) = Z_L \cdot I(L) \quad (66)$$

Introduciendo el valor de  $U(L)$ , calculado con la ecuación (63), y el valor de  $I(L)$ , calculado con la ecuación (64), en la ecuación (66), ésta devienen:

$$U_1 \cdot e^{-\gamma x} + U_2 \cdot e^{\gamma x} = \frac{Z_L}{Z_0} (U_1 \cdot e^{-\gamma x} + U_2 \cdot e^{\gamma x}) \quad (67)$$

si se resuelve el sistema de dos ecuaciones, ecuaciones (65) y (67), con dos incógnitas,  $U_1$  y  $U_2$ , éstas últimas resultan iguales a:

$$U_1 = E \frac{(Z_0 + Z_L) \cdot e^{\gamma L}}{(Z_0 + Z_L) \cdot e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_L) \cdot e^{-\gamma L}} \quad (68)$$

$$U_2 = -E \frac{(Z_0 - Z_L) \cdot e^{\gamma L}}{(Z_0 + Z_L) \cdot e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_L) \cdot e^{-\gamma L}} \quad (69)$$

reemplazando los valores calculados de  $U_1$  y  $U_2$  en las anteriores ecuaciones, valores determinados por las condiciones de contorno de la línea, en la expresión de la tensión a lo largo de la línea dad por la ecuación (63), esta última resulta ser:

$$U(x) = E \left[ \frac{(Z_0 + Z_L) \cdot e^{\gamma(L-x)} - (Z_0 - Z_L) \cdot e^{-\gamma(L-x)}}{(Z_0 + Z_L) \cdot e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_L) \cdot e^{-\gamma L}} \right] \quad (70)$$

o recordando las definiciones de senos y cosenos hiperbólicos:

$$U(x) = E \frac{[Z_0 \cdot \sinh(\gamma d) + Z_L \cdot \cosh(\gamma d)]}{Z_0 \cdot \sinh(\gamma L) + Z_L \cdot \cosh(\gamma L)} \quad (71)$$

en donde se ha hecho el siguiente reemplazo:  $d=L-x$ , siendo entonces  $d$  la distancia contada a partir del extremo de carga de la línea.

Utilizando un procedimiento similar es posible hallar la expresión de la corriente en cualquier punto de la línea, la que resulta ser igual a:

$$I(x) = \frac{E}{Z_0} = \frac{[Z_0 \cdot \cosh(\gamma d) + Z_L \cdot \sinh(\gamma d)]}{Z_0 \cdot \sinh(\gamma L) + Z_L \cdot \cosh(\gamma L)} \quad (72)$$

las expresiones (71) y (72) dan los valores de la amplitud de la tensión y corriente en cualquier punto de la línea. Dado que  $E$  es un valor, las anteriores ecuaciones representan ondas estacionarias en forma compleja. Esto significa que en cualquier punto de la línea, la amplitud de la magnitud tratada depende de la posición dentro de la línea y del tiempo, ya que  $E$  es de la siguiente forma:

$$E = E_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (73)$$

es la longitud finita de la línea la que da lugar al establecimiento de esta onda estacionaria, como composición de una onda incidente mas otra reflejada. Existe una excepción, para la cual no se establece una onda estacionaria, al no existir la onda reflejada. Esta excepción se produce cuando la línea se halla adaptada, es decir cuando  $Z_L=Z_0$ , para la cual las expresiones de la tensión y de la corriente en cualquier punto de la línea toman la siguiente forma:

$$U(x) = E \cdot e^{-\gamma x} = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-\gamma x} \quad (74)$$

$$I(x) = \frac{E}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x} = \frac{E_0}{Z_0} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-\gamma x} \quad (75)$$

en este último caso se dice que sobre la línea se establece una onda progresiva, la cual no es otra que la onda incidente.

## 8.- Impedancia de entrada en Líneas

Resulta de particular interés poder determinar la impedancia que una línea ofrece al generador que la excita, lo cual permite, entre otras cosas, calcular la potencia que el generador entrega a la línea. A esta impedancia se la denomina impedancia de entrada de la línea y su valor está determinado por la relación entre la tensión y la corriente que existe en los bornes de entrada de dicha línea, los cuales pueden ser calculados en base a las ecuaciones (71) y (72), lo que da el siguiente resultado:

$$Z_e = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \left[ \frac{Z_0 \cdot \sinh(\gamma L) + Z_L \cdot \cosh(\gamma L)}{Z_0 \cdot \cosh(\gamma L) + Z_L \cdot \sinh(\gamma L)} \right] \quad (76)$$

como puede verse de la anterior ecuación, la impedancia de entrada depende de la longitud de la línea, de su impedancia característica  $Z_0$  y de la carga  $Z_L$  y de la constante de propagación  $\gamma$ .

Se tratarán a continuación algunos casos particulares.

### a) Línea de longitud infinita

Para este caso resulta ser:  $Z_e = Z_0$ .

El anterior resultado resulta obvio ya que en una línea infinita no existen ondas reflejadas de tensión y corriente. Por lo tanto, la tensión y corriente a la entrada de la línea coinciden con aquellas de las respectivas ondas incidentes y a su vez es conocido que la relación entre las mismas es igual a la impedancia característica.

### b) Línea en cortocircuito

Para este caso, con  $Z_L = 0$  resulta:

$$Z_{ecc} = Z_0 \cdot \tanh(\gamma L) \quad (77)$$

si además se supone que las pérdidas de la línea son despreciables, lo cual puede suceder en la línea de bajas pérdidas y de pequeña longitud, la constante de propagación resulta ser:

$$\gamma = j\omega\sqrt{l \cdot c} = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi f}{v} = \frac{j2\pi}{\lambda} \quad (78)$$

reemplazando el valor de  $\gamma$  obtenido en la ecuación (78) dentro de la expresión de la impedancia de entrada dada por la ecuación (77), se obtiene:

$$Z_{ecc} = Z_0 \cdot \operatorname{tgh}\left(j \frac{2\pi L}{\lambda}\right) = j \cdot Z_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) \quad (79)$$

de la anterior expresión puede verse que  $Z_{ecc}$  es reactiva pura y que

$$Z_{ecc}=0 \text{ para } L=2n\frac{\lambda}{4}$$

Con  $n=0,1,2,3\dots$

$$Z_{ecc}=\infty \text{ para } L=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

En la Figura 10 se grafica  $Z_{ecc}$  en función de  $\frac{L}{\lambda}$ .

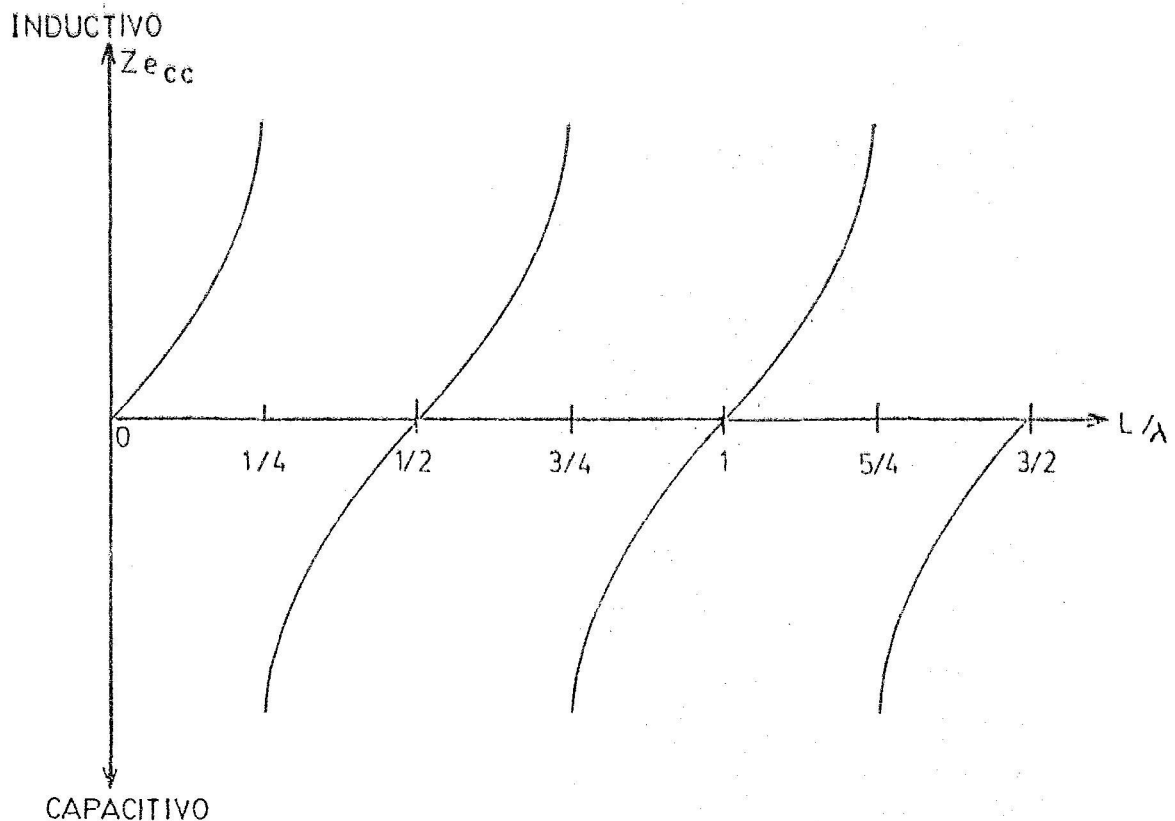


Figura 10 - Impedancia de entrada de una línea de pérdidas despreciables, en cortocircuito ( $Z_{ecc}$ ).

c) Línea en cortocircuito:

Para este caso, con  $Z_L = \infty$  resulta:

$$Z_{eca} = Z_0 \cdot \cot gh(\gamma L) \quad (80)$$

si se trata además de una línea con pérdidas despreciables, puede reemplazarse el valor de la constante de propagación dado en la ecuación (78), con lo que resulta:

$$Z_{eca} = Z_0 \cdot \cot gh\left(j \frac{2\pi L}{\lambda}\right) = j \cdot Z_0 \cdot \cot g\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) \quad (81)$$

de la anterior expresión puede verse que  $Z_{eca}$  es reactiva pura y que:

$$Z_{eca} = 0 \text{ para } L = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

Con  $n=0, 1, 2, 3, \dots$

$$Z_{eca} = \infty \text{ para } L = 2n \frac{\lambda}{4}$$

En la Figura 11 se grafica  $Z_{eca}$  en función de  $\frac{L}{\lambda}$ .

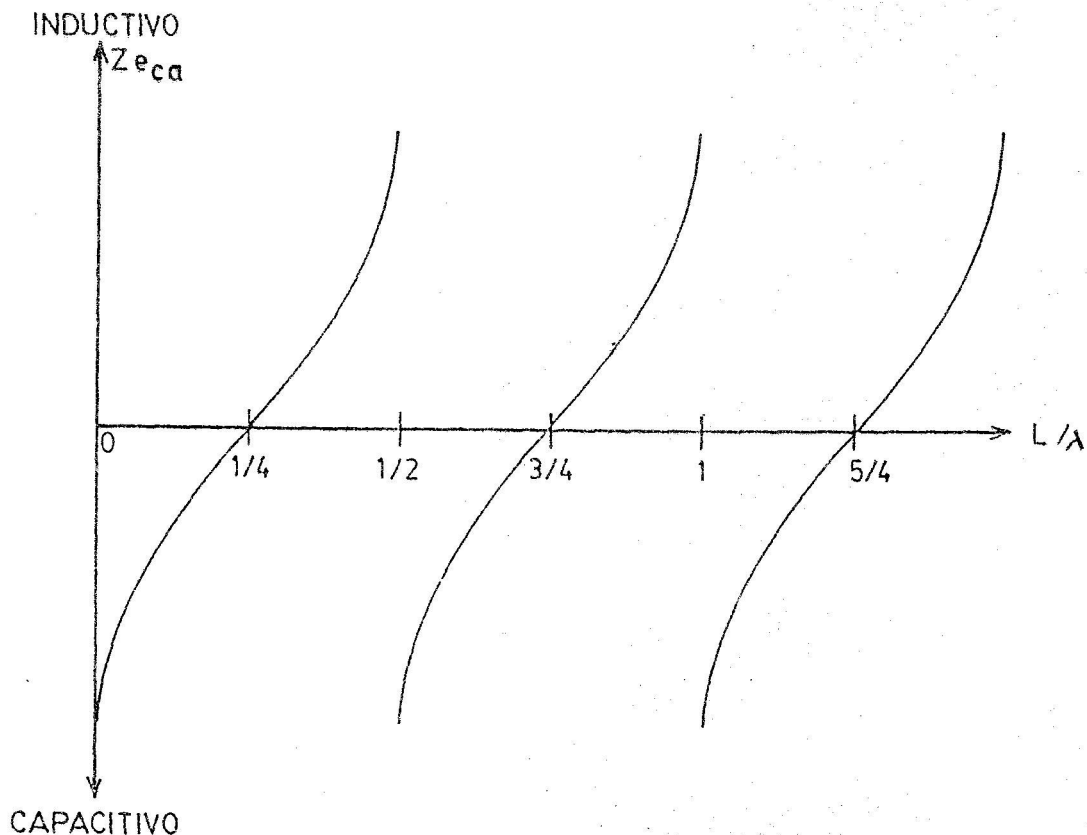


Figura 11 - impedancia de entrada de una línea con pérdidas despreciables, en circuito abierto ( $Z_{ca}$ ).



De las expresiones de las impedancias de entrada de la línea en cortocircuito, ecuación (77), y en circuito abierto, ecuación (80), puede verse que:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ecc} \cdot Z_{eca}} \quad (82)$$

y que

$$\gamma = \frac{1}{L} \operatorname{arctgh} \left[ \left( \frac{Z_{ca}}{Z_{cc}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (83)$$

las ecuaciones (82) y (83) permiten, conocidas las impedancias de entrada de la línea en cortocircuito y en circuito abierto (a través de mediciones por ejemplo), determinar los valores de la impedancia característica  $Z_0$  y de la constante de propagación  $\gamma$  de la línea.

#### d) Línea adaptada

Para este caso, con  $Z_L = Z_0$ , resulta:  $Z_e = Z_0$ .

Este resultado el cual constituye un principio fundamental de la teoría circuital de cuadripolos, permite establecer otra definición de impedancia característica de la línea, a saber: la impedancia característica de una línea es aquella que se observa a la entrada de la misma, cuando ésta es cargada con dicha impedancia característica.

#### e) Línea de $\frac{\lambda}{4}$ de longitud de onda.

Para este caso, con  $L = \frac{\lambda}{4}$ , si se trata además de una línea con pérdidas despreciables en la cual la constante de propagación pueda ser expresada a través de la ecuación (78), la impedancia de entrada resulta ser:

$$Z_e = Z_0 \left[ \frac{Z_0 \cdot \sinh(J \frac{\pi}{2}) + Z_L \cdot \cosh(J \frac{\pi}{2})}{Z_0 \cdot \cosh(J \frac{\pi}{2}) + Z_L \cdot \sinh(J \frac{\pi}{2})} \right] \quad (84)$$

y habida cuenta que

$$\sinh(J \frac{\pi}{2}) = j \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = j$$

y que

$$\cosh(j\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

la impedancia de entrada para esta línea de  $L = \frac{\lambda}{4}$  y pérdidas despreciables, deviene en:

$$Z_e = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (85)$$

es por la anterior expresión que este tipo de líneas se las denomina transformadores de impedancia, siendo de gran aplicación en casos donde se requiere adaptar impedancias.

Como se visualiza en la ecuación (85) y teniendo en cuenta que la impedancia característica de una línea prácticamente resistiva, la línea de  $\frac{\lambda}{4}$  sin pérdidas o con pérdidas despreciables, ofrece al generador una impedancia de entrada que, a menos de una constante, es igual a la inversa de la impedancia de carga. De este modo, si la impedancia de carga tiene un comportamiento inductivo, la impedancia de entrada se comportara capacitivamente o viceversa.