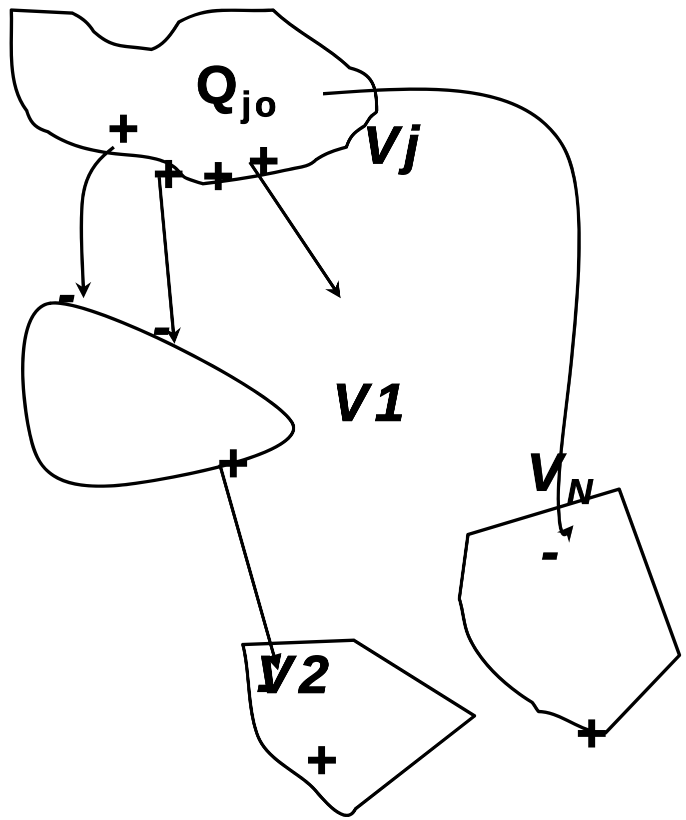
Electrostática
Clase 4

Distribución de los potenciales y de las cargas en un sistema de cuerpos conductores
Coeficientes de potencial y de capacidades

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

- **Si tenemos una distribución de conductores de formas arbitraria demostraremos que existe una relación líneal entre el potencial de cada conductor y la carga de los distintos conductores del sistema.**
  - **Los coeficientes de esta relación se llaman coeficientes de potencial.**
  - **Son funciones solo de la GEOMETRÍA**
  - **NO dependen de la carga ni del potencial**
  - **No siempre pueden calcularse analíticamente, pero si pueden determinarse por mediciones experimentales.**



- **Supongamos N conductores, y una geometría.**
- **Consideremos que todos los conductores están decargados excepto el conductor "j", Q_{jo}**
- **La solución de la ecuación de Laplace al problema planteado es $U^j(x,y,z)$**
- **El potencial de cada conductor: U_1^j ; U_2^j; U_3^j ;... U_j^j;... U_N^j**

Carga solo del conductor "j"

$$Q_j = Q_{j0}$$

$\text{Solución} \rightarrow U^j(x,y,z)$

$\nabla^2 U^j = 0 \rightarrow$ en espacio libre

En conductores Condiciones de contorno

$$E_{n1} = -\overrightarrow{\nabla}.U_1{}^j \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S1} \overrightarrow{\nabla}.U_1{}^j = Q_1 = 0$$

$$E_{n2} = -\overrightarrow{\nabla}.U_2{}^j \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S2} \overrightarrow{\nabla}.U_2{}^j = Q_2 = 0$$

.

$$\boxed{E_{nj} = -\overrightarrow{\nabla}.U_j{}^j \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{Sj} \overrightarrow{\nabla}.U_j{}^j = Q_j = Q_{j0}}.$$

.

$$E_{nN} = -\overrightarrow{\nabla}.U_N{}^j \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{SN} \overrightarrow{\nabla}.U_N{}^j = Q_N = 0$$

Cambiamos la carga del conductor "j" a un nuevo valor

$$Q_j = k.Q_{j0}$$

$$\boxed{\text{Solución Proponemos} \rightarrow k.U^j(x,y,z)}$$

$\nabla^2(kU^j) = k.\nabla^2 U^j = 0 \rightarrow$ En espacio libre

Condiciones de contorno

$$E_{n1} = -\overrightarrow{\nabla}.kU_1{}^j \rightarrow -k\varepsilon_0 \iint_{S1} \overrightarrow{\nabla}.U_1{}^j = Q_1 = 0$$

$$E_{n2} = -\overrightarrow{\nabla}.kU_2{}^j \rightarrow -k\varepsilon_0 \iint_{S2} \overrightarrow{\nabla}.U_2{}^j = Q_2 = 0$$

.

$$\boxed{E_{nj} = -\overrightarrow{\nabla}.kU_j{}^j \rightarrow -k\varepsilon_0 \iint_{Sj} \overrightarrow{\nabla}.U_j{}^j = Q_j = kQ_{j0}}.$$

.

$$E_{nN} = -\overrightarrow{\nabla}.kU_N{}^j \rightarrow -k\varepsilon_0 \iint_{SN} \overrightarrow{\nabla}.U_N{}^j = Q_N = 0$$

- La nueva solución propuesta satisface la ecuación de Laplace
- El potencial en todos los puntos queda multiplicada por k
- Las derivadas de este también
- Las cargas son el gradiente normal a cada superficie
- Por lo tanto cumplirán con las condiciones de bordes impuesta
  - En cada conductor descargado la carga será cero
  - En el conductor con carga será k veces la anterior

Como la solución es única:

- Demostramos que el potencial es proporcional a la carga

$$U_i^j = \alpha_{ij}.Q_j..(i = 1,2...N)$$

α_{ij} : Es una constante solo depende de la geometría

Se denomina Coeficiente Potencial

Carga solo del conductor en el conductor "m", los otros descargados

$$Q_m = hQ_{m0}$$

Solución $\rightarrow hU^m(x,y,z)$

$\nabla^2 hU^m = 0 \rightarrow$ en espacio libre

En conductores Condiciones de contorno

$E^m{}_{n1} = -\vec{\nabla}.hU_1{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S1} \vec{\nabla}.hU_1{}^m.ds = Q_1 = 0$

$E^m{}_{n2} = -\vec{\nabla}.hU_2{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S2} \vec{\nabla}.hU_2{}^m.ds = Q_2 = 0$

.

$E^m{}_{nm} = -\vec{\nabla}.hU_m{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{Sm} \vec{\nabla}.hU_m{}^m.ds = Q_m = hQ_{m0}..$

.

$E^m{}_{nN} = -\vec{\nabla}.hU_N{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{SN} \vec{\nabla}.hU_N{}^m.ds = Q_N = 0$

carga del conductor "j" y "m"

$$Q_j = k.Q_{j0}; Q_m = hQ_{m0}$$

Solución Proponemos $\rightarrow k.U^j(x,y,z) + h.U^m(x,y,z)$

$\nabla^2(kU^j + hU^m) = k.\nabla^2 U^j + h.\nabla^2 U^m = 0 \rightarrow$ En espacio libre

Condiciones de contorno

$E_{n1} = -\vec{\nabla}.kU_1{}^j - \vec{\nabla}.hU_1{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S1} (\vec{\nabla}.kU_1{}^j + \vec{\nabla}.hU_1{}^m).ds = Q_1 = 0$

$E_{n2} = -\vec{\nabla}.kU_2{}^j - \vec{\nabla}.hU_2{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{S2} (\vec{\nabla}.kU_2{}^j + \vec{\nabla}.hU_2{}^m).ds = Q_2 = 0$

.

$E_{nj} = -\vec{\nabla}.kU_j{}^j - \vec{\nabla}.hU_j{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{Sj} (\vec{\nabla}.kU_j{}^j + \vec{\nabla}.hU_j{}^m).ds = Q_j = kQ_{j0}.$

.

$E_{nm} = \vec{\nabla}.kU_m{}^j - \vec{\nabla}.hU_m{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{Sm} (\vec{\nabla}.kU_m{}^j + \vec{\nabla}.hU_m{}^m).ds = Q_m = hQ_{m0}$

.

$E_{nN} = -\vec{\nabla}.kU_N{}^j - \vec{\nabla}.hU_m{}^m \rightarrow -\varepsilon_0 \iint_{SN} (\vec{\nabla}.kU_N{}^j + \vec{\nabla}.hU_N{}^m).ds = Q_N = 0$

- **El potencial de cada conductor**

$$U_i = \alpha_{ij}.Q_j + \alpha_{im}.Q_m ......(i = 1, 2...N)$$

- **Se puede Generalizar para el caso de que los N conductores tengan carga**

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}.Q_j$$

Una relación lineal entre el potencial y la carga

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Se puede demostrar por condiciones energéticas

- **El potencial del sistema de conductores cargados en un punto cualquiera *A* se puede representar como la suma de los potenciales debidos a las cargas del primero, segundo, tercero, etc. conductor, de la siguiente manera:**

$$U_A = U_{A1} + U_{A2} + \ldots + U_{An}$$

Además, cada componente es directamente proporcional a la carga correspondiente, es decir:

$$U_{A1} = q_1 \cdot \alpha_{A1} \qquad U_{A2} = q_2 \cdot \alpha_{A2} \qquad U_{An} = q_n \cdot \alpha_{An}$$

Los coeficientes α_{A1}, α_{A2}, α_{A3}, ... dependen tanto de la posición del punto A como de la geometría de todos los conductores y de las propiedades dieléctricas del medio.

- **El potencial de un punto A es:**

$$U_A = \alpha_{A1} \cdot q_1 + \alpha_{A2} \cdot q_2 + ... + \alpha_{An} \cdot q_n$$

- **Suponiendo que el punto *A* al principio se halla sobre el conductor 1, luego sobre el 2, etc., se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$U_1 = \alpha_{11} \cdot q_1 + \alpha_{12} \cdot q_2 + ... + \alpha_{1n} \cdot q_n$$

$$U_2 = \alpha_{21} \cdot q_1 + \alpha_{22} \cdot q_2 + ... + \alpha_{2n} \cdot q_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_n = \alpha_{n1} \cdot q_1 + \alpha_{n2} \cdot q_2 + ... + \alpha_{nn} \cdot q_n$$

donde U1 es el potencial del primer conductor, U2 es el potencial del segundo conductor, etc.

- **En forma matricial, el conjunto de ecuaciones puede escribirse:**

$$[U] = [\alpha] \cdot [q]$$

- Los coeficientes α_{ik} se llaman coeficientes potenciales o coeficientes de potencial y $[\alpha]$ es la matriz de coeficientes de potencial.
- El sistema de ecuaciones con los coeficientes potenciales permiten resolver directamente el problema acerca de la distribución de los potenciales en un sistema de conductores cuando se conoce la distribución de sus respectivas cargas eléctricas.

Coeficientes de capacidad

- **Si conocemos el potencial de los conductores y queremos conocer las cargas ????**

$$[U]=[\alpha]\cdot[q]$$

$$[q]=[\alpha]^{-1}\cdot[U]$$

$$[q]=[\beta]\cdot[U]$$

- **La matriz β es la matriz de coeficientes de capacidades**

$$q_1=\beta_{11}\cdot U_1+\beta_{12}\cdot U_2+\ldots+\beta_{1n}\cdot U_n$$

$$q_2=\beta_{21}\cdot U_1+\beta_{22}\cdot U_2+\ldots+\beta_{2n}\cdot U_n$$

....

$$q_n=\beta_{n1}\cdot U_1+\beta_{n2}\cdot U_2+\ldots+\beta_{nn}\cdot U_n$$

- **Los coeficientes β son constantes que dependen de la forma, dimensiones relativas, permitividades dieléctricas del espacio entre los conductores, y de la disposición de los conductores.**
- **Esto es, los coeficientes β_{ij} son funciones**
  - **de la geometría de la configuración**
  - **y de las propiedades dieléctricas del medio.**
- **Para algunos autores, los coeficientes β_{ij} se denominan *coeficientes de capacidad***

Coeficientes de capacidad

- **Para otros autores,**
  - **los términos de la diagonal (propios) del arreglo: β11, β22, ..., β*nn*, son los denominados *coeficientes de capacidad*,**
  - **y los otros factores: β12, β13, ...(mutuos), son los denominados *coeficientes de inducción* (debido a que tienen en cuenta la carga que se induce en uno de los conductores, debido a la presencia de carga eléctrica otro).**
  - **con $\beta ij = \beta ji$**
  - **El hecho de que $\beta ij = \beta ji$ se expresa diciendo para los coeficientes β es válido el *principio de reciprocidad***

Coeficientes de capacidad

- **Los coeficientes β son tales que βij es:**
  - ***la cantidad de carga eléctrica del i-ésimo conductor,***
  - ***cuado el conductor j-ésimo está a un potencial unitario,***
  - ***con todos los restantes conductores puestos a tierra (U=0)***

$$q_1 = \beta_{11} \cdot U_1 + \beta_{12} \cdot U_2 + ... + \beta_{1n} \cdot U_n$$

$$q_2 = \beta_{21} \cdot U_1 + \beta_{22} \cdot U_2 + ... + \beta_{2n} \cdot U_n$$

$$..$$

$$q_n = \beta_{n1} \cdot U_1 + \beta_{n2} \cdot U_2 + ... + \beta_{nn} \cdot U_n$$

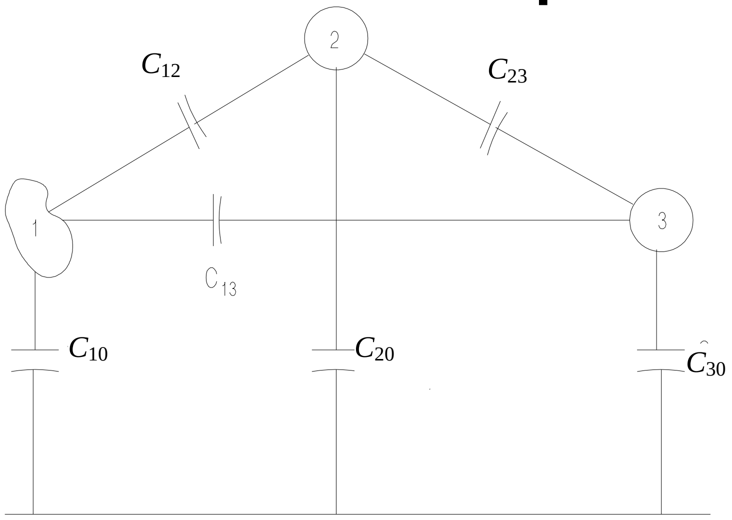
$$U_2 = U_3 = ...U_n = 0$$

$$q_1 = \beta_{11} \cdot U_1 \rightarrow \beta_{11} = \frac{q_1}{U_1}$$

$$q_2 = \beta_{21} \cdot U_1 \rightarrow \beta_{21} = \frac{q_2}{U_1}$$

Capacidades parciales

- Las *capacidades parciales*, son las capacidades físicas existentes en un sistema de conductores, que vinculan a cada par de conductores del sistema



- Para encontrar las relaciones entre dichas capacidades y los coeficientes de capacidad β, es conveniente reescribir el conjunto de expresiones de manera tal que su interpretación resulte más directa.

Ecuaciones circuitales Capacidades parciales

$$q_1 = C_{10} \cdot U_1 + C_{12} \cdot (U_1 - U_2) + C_{13} \cdot (U_1 - U_3)$$
$$q_2 = C_{20} \cdot U_2 + C_{12} \cdot (U_2 - U_1) + C_{23} \cdot (U_2 - U_3)$$
$$q_3 = C_{30} \cdot U_3 + C_{13} \cdot (U_3 - U_1) + C_{23} \cdot (U_3 - U_2)$$

Ecuaciones con coeficientes de Capacidad

$$q_1 = \beta_{11} \cdot U_1 + \beta_{12} \cdot U_2 + \beta_{13} \cdot U_3$$
$$q_2 = \beta_{21} \cdot U_1 + \beta_{22} \cdot U_2 + .\beta_{23} \cdot U_3$$
$$q_3 = \beta_{31} \cdot U_1 + \beta_{32} \cdot U_2 + .\beta_{33} \cdot U_3$$

$$q_1 = \beta_{11} \cdot U_1 + \beta_{12} \cdot U_2 + \ \ldots + \beta_{1n} \cdot U_n$$

$$q_1 = C_{10} \cdot U_1 + C_{12} \cdot \left(U_1 - U_2\right) + \ \ldots + C_{1n} \cdot \left(U_1 - U_n\right)$$

$$q_1 = (C_{10} + C_{12} + \ldots C_{1n}) \cdot U_1 - C_{12} \cdot U_2 \ldots - C_{1n} \cdot U_n$$

$$C_{10} + C_{12} + \ldots C_{1n} = \beta_{11}$$

$$C_{1j} = -\beta_{1j}$$

$$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} + .. + \beta_{1n}$$

$$C_{i0} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \ldots \beta_{ii} .. + \beta_{in}$$

$$C_{ij} = -\beta_{ij} \quad i \neq j$$

Principio de reciprocidad

- **En el sistema considerado de cuerpos conductores cargados eléctricamente, se cumple el *principio de reciprocidad*, cuya expresión son las igualdades:**

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}$$

- **La igualdad coincide con la igualdad evidente de las capacidades parciales:**

$$C_{ik} = C_{ki}$$

- *Cik y Cki representan las diferentes notaciones de la misma capacidad entre los conductores i y k.*

- Analizando el sistema de ecuaciones es fácil dar una formulación verbal del principio de reciprocidad:

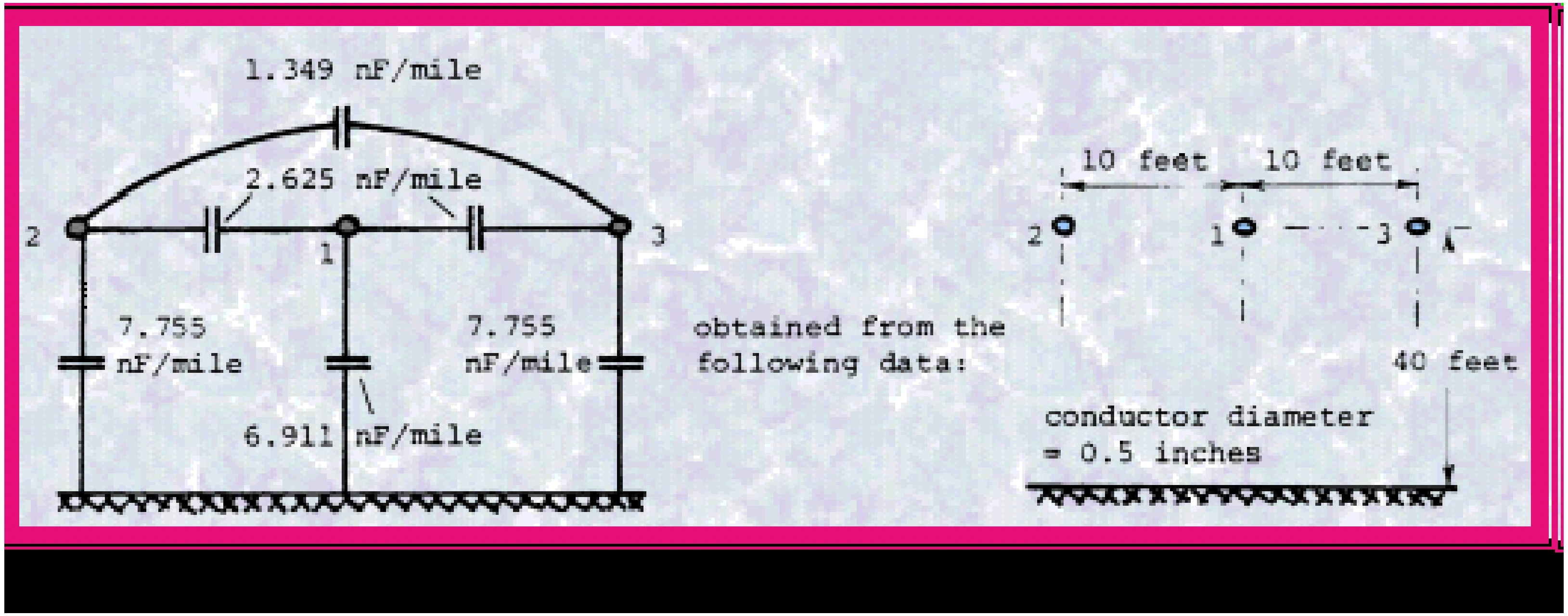
  el potencial del primer conductor, en presencia de una carga perteneciente únicamente al segundo conductor, es igual al potencial del segundo conductor en presencia de una carga de igual valor perteneciente sólo al primer conductor.

$$U_1 = \alpha_{12}.q_2$$

$$U_2 = \alpha_{21}.q_1$$

$$\text{Si } q_1 = q_2 \rightarrow U_1 = U_2$$

Ejemplo de línea de Transmisión sobre la tierra



Campo y potencial de un cilindro conductor

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{r}$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r}\right) + Cte \qquad \mathbf{E} = -\nabla U$$

$$Cte = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_{iref})$$

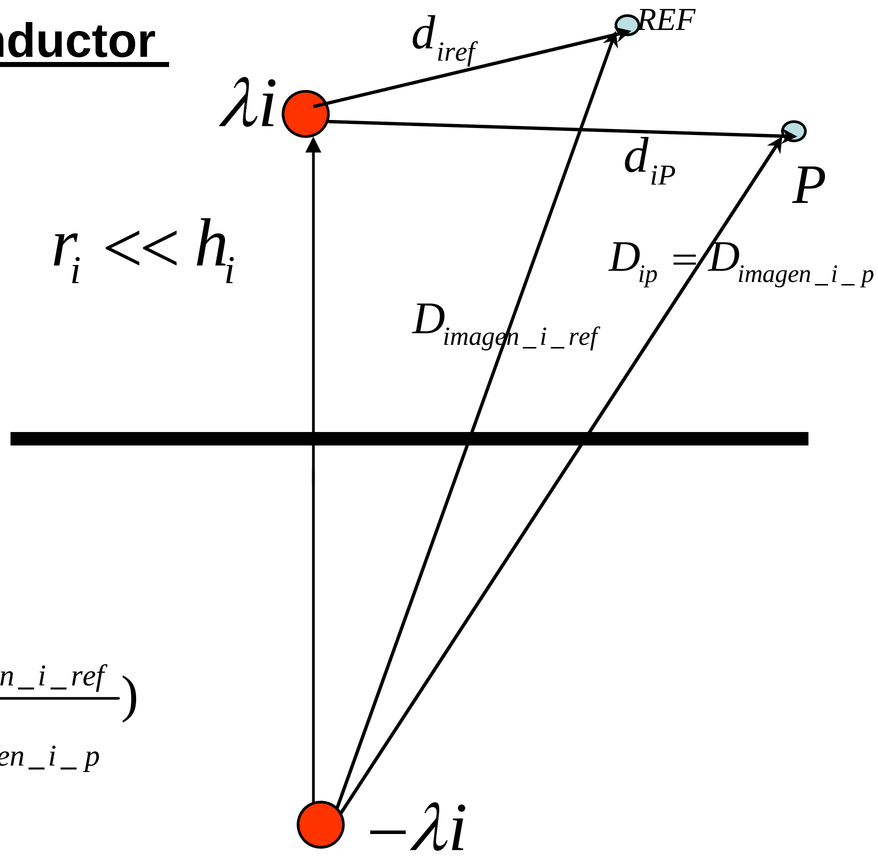
$$Ui_p = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d_{iref}}{d_{ip}}\right)$$

$$U_{(i+ímag)p} = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d_{iref}}{d_{ip}}\right) - \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D_{imagen\_i\_ref}}{D_{imagen\_i\_p}}\right)$$

$$d_{iref} = D_{imagen\_i\_ref}$$

$$U_{(i+ímag)p} = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D_{imagen\_i\_p}}{d_{ip}}\right)$$

$$\boxed{U_{iP} = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D_{ip}}{d_{ip}}\right)}$$

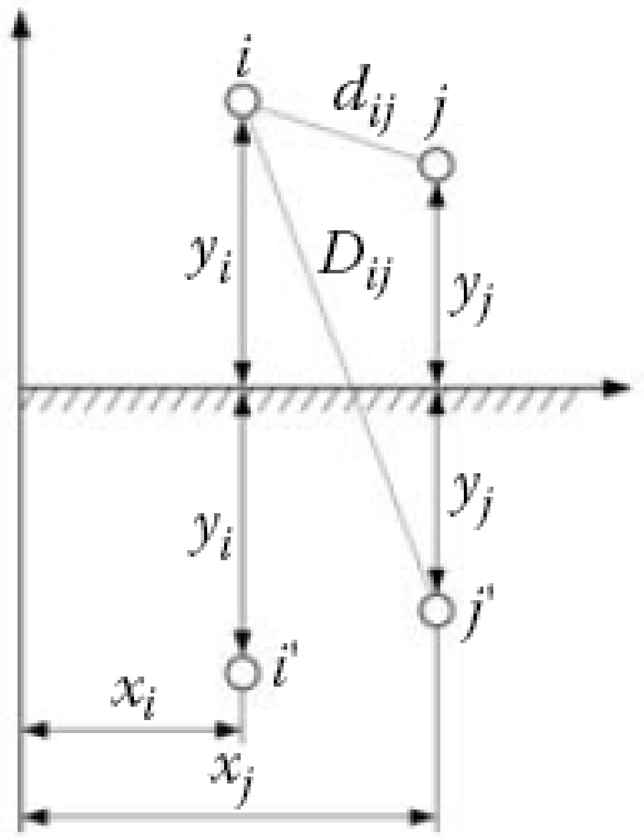


Potencial en P debido a carga en conduc. i

$$U_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{11}}{r_1}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{12}}{d_{12}}) + \frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{13}}{d_{13}})$$

$$U_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{21}}{d_{21}}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{22}}{r_2}) + \frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{23}}{d_{23}})$$

$$U_3 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{31}}{d_{31}}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{32}}{r_3}) + \frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{D_{33}}{r_3})$$



$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$D_{ij} = D_{ji}$$

Ejemplo de línea de Transmisión sobre la tierra

$$[\alpha] = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} \ln\frac{D_{11}}{r_1} & \cdots & \ln\frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln\frac{D_{n1}}{d_{n1}} & \cdots & \ln\frac{D_{nn}}{r_n} \end{bmatrix}$$

$$[U] = [\alpha].[\lambda]$$

$$[\lambda] = [\alpha]^{-1}.[U]$$

$$[\lambda] = [\beta].[U]$$