

E-1214 FUNDAMENTOS DE LAS COMUNICACIONES - AÑO 2023

TP Nº1: Correlación, Densidad Espectral de Potencia.

1. Función de Autocorrelación

- a) Dadas las siguientes señales determine si son de energía o de potencia. Calcule su valor medio, su función de autocorrelación y su densidad espectral de energía o de potencia según corresponda.
- I. $x(t) = \sin(20\pi t) + j \cos(40\pi t)$ II. $x(t) = \square(t/5)$ III. $x(t) = u(t)$ (escalón unitario)
- IV. $x(t) = e^{-j2\pi t^2}$ (note que $\int_0^\infty \cos(2\pi t^2) dt = \int_0^\infty \sin(2\pi t^2) dt = \frac{1}{4}$, integrales de Fresnel)
- b) Escriba la desigualdad de Cauchy-Schwarz para modelo de señal determinística de energía y de potencia $x(t)$ e $y(t)$.
- c) Considere un SLIT BIBO estable con respuesta impulsional $h(t)$, entrada $x(t)$ de potencia y salida $y(t)$.
- I. Halle una expresión del valor medio de la salida $\langle y(t) \rangle$ en función de $\langle x(t) \rangle$.
- II. Demuestre que $r_{yx}(\tau) = \{h * r_{xx}\}(\tau)$ y $r_{xy}(\tau) = \{h^{-*} * r_{xx}\}(\tau)$, con $h^{-}(t) = h(-t)$.
- III. Demuestre que $r_{yy}(\tau) = \{r_{hh} * r_{xx}\}(\tau)$.
- d) Una señal de audio $s(t)$, es emitida por un parlante en una sala de conferencias. Debido al rebote de la misma en las paredes del local, un micrófono muy cercano al parlante obtiene la señal $x(t) = s(t) + k_1 s(t - \tau_1)$. Obtenga la autocorrelación de la señal $x(t)$ en función de la autocorrelación de la señal emitida, $r_{ss}(\tau)$. ¿Es posible obtener los parámetros k_1 , y τ_1 a partir de $r_{xx}(t)$ o $r_{xs}(t)$?

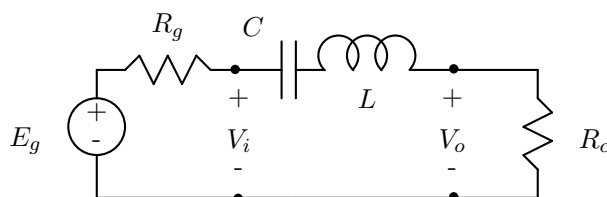
2. DEP por definición

Sea $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, con ω_0 y A ctes. y $\theta \sim \mathcal{U}[-\pi/4, \pi/4]$.

- a) Calcule la potencia instantánea del proceso, $\mathcal{P}_{XX}(t) = E\{|X(t)|^2\}$. ¿Cómo debería ser este valor si el proceso fuera ESA?
- b) Calcule la potencia media del PA, $\overline{\mathcal{P}}_{XX}$, como el valor medio (temporal) de $\mathcal{P}_{XX}(t)$.
- c) Calcule la TF de la versión truncada de $X(t)$ al intervalo $[-T, T]$, $\mathcal{F}\{X_T(t)\}$, y con ella, la densidad espectral de energía del proceso truncado, $E\{|\mathcal{F}\{X_T(t)\}|^2\}$.
- d) Dividiendo por $2T$ y tomado el límite para $T \rightarrow \infty$, obtenga la densidad espectral de potencia de $X(t)$, $S_{XX}(f)$, por definición. Recuerde que $\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}(Tf) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2(Tf) = \delta(f)$.
- e) Calcule el promedio temporal de $R_{XX}(t + \tau, t)$ (con respecto a t). Luego obtenga su TF y verifique que coincide con $S_{XX}(f)$. ¿Cuánto vale la integral de S_{XX} en todo el espectro?

3. Filtro Pasa-Banda

En la figura se muestra el esquema de un filtro pasa-banda pasivo.



- a) Verifique que su transferencia es $H(s) = \frac{V_o(s)}{E_g(s)} = \frac{(K\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$, con $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{\omega_0 L}{R_g + R_c}$ y $K = \frac{R_c}{R_g + R_c}$. Consideraremos que $4Q^2 \gg 1$.

- b) Muestre que el ancho de banda de 3 dB del filtro es igual a $B_3 = f_0/Q$, con $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Ayuda: Expresé la ganancia del sistema como $|H(\omega)|^2 = \frac{K^2}{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$

- c) Obtenga el ancho de banda de ruido del filtro (puede usar teoría de residuos).
- d) Considerando que $R_g = R_c = 50\Omega$, dé valores a L y C para obtener un filtro pasabanda con $f_0 = 970\text{kHz}$ y $B_3 = 590\text{kHz}$.
- e) Suponga que a la entrada del filtro hay ruido blanco con DEP $1\mu\text{V}^2/\text{Hz}$. Usando c) calcule la potencia media normalizada de la señal a la salida del filtro para los valores hallados en d).

4. Ancho de Banda de Ruido usando MATLAB

En este ejercicio simularemos el filtrado de ruido blanco gaussiano con un SLIT sencillo. Supondremos que el sistema es causal y tiene una función de transferencia $H(s) = \frac{1}{s+1}$ y que a su entrada está el PA $X(t)$ con media nula, $R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ y distribución gaussiana.

- a) Calcule el Ancho de Banda de -3dB y el equivalente de Ruido del sistema. Calcule la potencia y la DEP de la salida $Y(t)$.
- b) Considere que el PA de entrada se muestrea a 100Hz utilizando un filtro anti-replicado ideal. Dé una expresión para la potencia del PA muestreado. Suponiendo que esta potencia es igual a 1 simule 1000 segundos de una realización. Verifique media, varianza y distribución (usando `hist`).
- c) Obtenga un filtro digital que aproxime al SLIT continuo utilizando la transformación bilineal ($s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, con T tiempo de muestreo). Halle la ecuación en diferencias correspondiente y filtre la realización obtenida anteriormente. Puede usar el comando `filter`.
- d) Calcule la potencia de la secuencia obtenida al filtrar (recuerde descontar el transitorio inicial). Compare con el resultado teórico de a).

5. SNR a pedir de oído

En este ejercicio intentaremos relacionar la calidad de una señal de voz de acuerdo a la relación señal a ruido que ésta posea. ¡Para ello deberemos escuchar y ver que pasa!

- a) Con alguna aplicación que permita grabar audio genere un archivo de sonido `.wav`. La calidad del sonido debe ser muy buena ya que supondremos que no tiene ruido apreciable. Otra opción es bajar el archivo `audio.wav` de la página de la cátedra.
- b) Utilizando el comando `[X,fs]=audioread('archivo.wav');` cargue en la matriz `X` las secuencias de muestras que representan los dos canales de la señal de audio estereo en el Matlab. Además en `fs` podrá ver la frecuencia de muestreo y en `nb` el número de bits utilizados para representar el valor de estas muestras. Descarte uno de los dos canales haciendo `x=X(:,1);`.
- c) Verifique lo hecho hasta ahora escuchando la señal con el comando `sound(x,fs)`. Calcule la potencia normalizada de la señal.
- d) Genere distintas secuencias de ruido blanco gaussiano de igual largo que la señal y con potencia tal que al sumarmas la relación señal a ruido (SNR) sea 0dB, 10dB , 20dB, 30dB, 40dB y 50dB. Use el comando `randn`.
- e) Sumando las distintas secuencias de ruido genere versiones de audio con distintas SNR. Escuche las señales resultantes y vea que le parece. A su juicio ¿Qué SNR es necesaria para que una señal de audio sea de buena calidad? ¿Y para que sea inteligible?

Algunos resultados

1. a) I. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{P}_x = 1$, $r_{xx}(\tau) = \frac{\cos(20\pi\tau) + \cos(40\pi\tau)}{2}$ y $s_{xx}(f) = \frac{\delta(f-10) + \delta(f+10) + \delta(f-20) + \delta(f+20)}{4}$.
 II. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{E}_x = 5$, $r_{xx}(\tau) = 5 \wedge (\tau/5)$ y $s_{xx}(f) = 25 \text{sinc}^2(5f)$.
 III. $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}$, $r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}$ y $s_{xx}(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$.
 IV. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{P}_x = 1$, $r_{xx}(0) = 1$ pero $r_{xx}(\tau) = 0$ si $\tau \neq 0$.
 d) $r_{xx}(\tau) = r_{ss}(\tau)(1 + |k_1|^2) + k_1^* r_{ss}(\tau + \tau_1) + k_1 r_{ss}(\tau - \tau_1)$, $r_{xs}(\tau) = r_{ss}(\tau) + k_1 r_{ss}(\tau - \tau_1)$
2. a) $\mathcal{P}_{XX}(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{\pi} \cos(2\omega_0 t)$
 b) $\overline{\mathcal{P}}_{XX} = \frac{A^2}{2}$
3. c) $B_N = \frac{\pi}{2} B_3$.
 e) $\mathcal{P} = 0,46V^2$.
4. a) $f_{c-3dB} = BW_{-3dB} = \frac{1}{2\pi}$ $B_N = \frac{1}{4}$ $P_y = \frac{N_0}{4}$
 b) $R_{X_f X_f}[m] = 50N_0\delta[m]$ $P_{X_f} = 50N_0$
 c) $y[n] = \frac{199}{201}y[n-1] + \frac{1}{201}x[n] + \frac{1}{201}x[n-1]$