
Ondas Planas en medios reales

Reflexión y Transmisión

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

- * **PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS.**
- Propagación de ondas planas en distintos medios
- homogéneos, isotrópicos y lineales, y no acotados espacialmente
- Las ondas planas son una buena aproximación a las ondas reales en la mayoría de las situaciones prácticas.

DIELÉCTRICOS Y CONDUCTORES.

- **Clasificación de materiales: dieléctricos y conductores**
- **La separación NO está muy bien definida, la tierra por ejemplo, se considera conductora hasta ciertas frecuencias, y dieléctrico con pérdidas para frecuencias superiores.**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j \omega \epsilon \mathbf{E}$$

La relación entre los módulos de las densidades de corriente de conducción y de desplazamiento, resulta ser:

$$\frac{\mathbf{J}_c}{\mathbf{J}_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

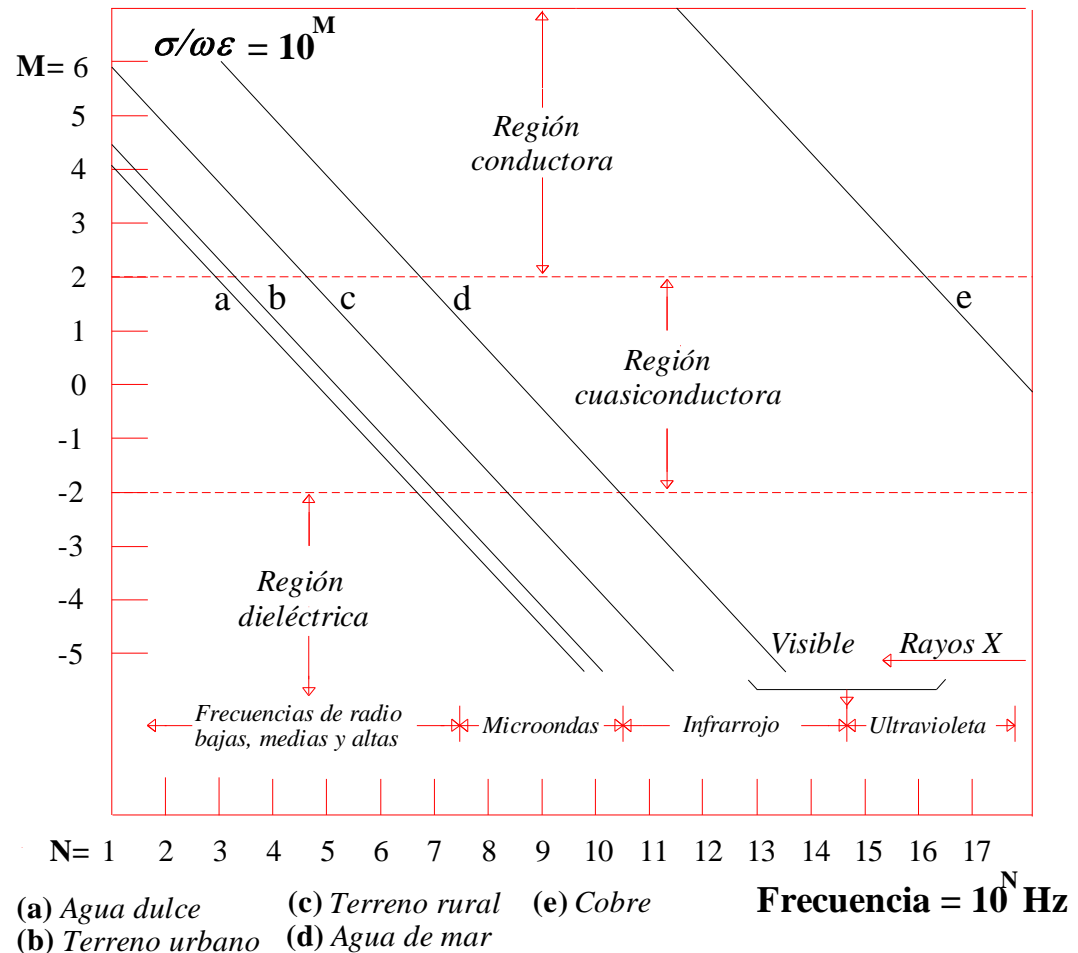
$$\text{Dieléctricos: } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 0,01$$

$$\text{Cuasiconductores: } 0,01 < \frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 100$$

$$\text{Conductores: } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 100$$

Dieléctricos y conductores.

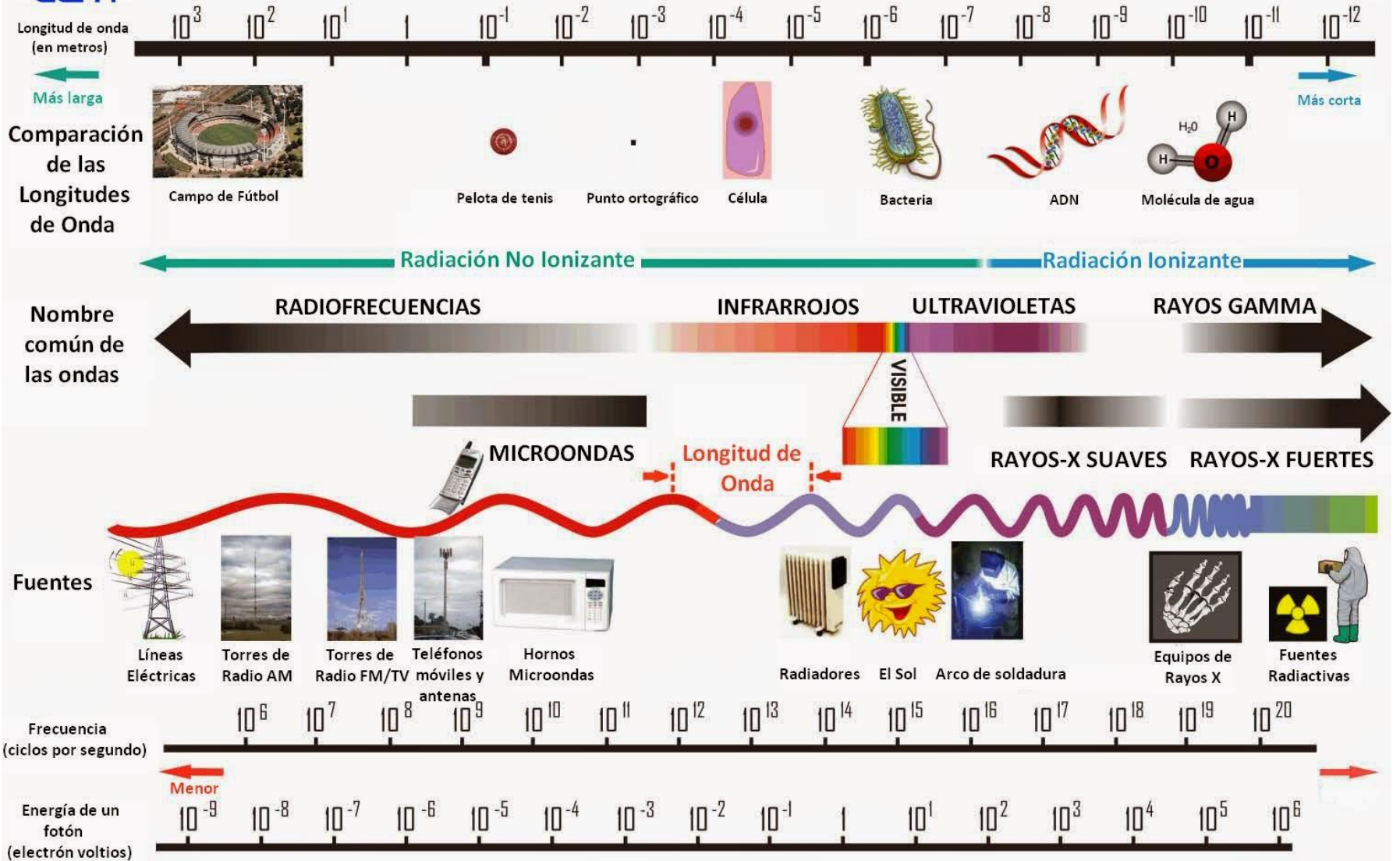
- **Buenos conductores**, tales como los metales, la relación $\sigma / (\omega \epsilon)$ es muy superior a la unidad en todo el espectro de las radiofrecuencias. El Cobre a 30.000 MHz,
- $\sigma / (\omega \epsilon) = 3,5 \cdot 10^9$.
 - Conductores, tanto ϵ como σ son independientes de la frecuencia.
- **Dieléctricos** o aislantes, la relación $\sigma / (\omega \epsilon)$ es mucho menor que la unidad
 - Tanto ϵ como σ son funciones de la frecuencia. $\sigma / (\omega \epsilon)$ puede ser aproximadamente constante dentro de un rango de frecuencias de interés



- **La mayoría de los materiales usados, o bien dejan pasar fácilmente las corrientes de conducción o evitan su circulación, es decir se comportan como**
 - conductores**
 - o como dieléctricos o aislantes, excepto algunas excepciones entre las que cabe mencionar por su importancia práctica, sobre todo en radioenlaces, a la tierra y al agua dulce o salada.**
- En radioenlaces, a la tierra y al agua dulce o salada, que a bajas frecuencias son buenos conductores a altas frecuencias son buenos dieléctricos.



EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO



Más información: www.electromagneticos.es

Correo electrónico: informa@electromagneticos.es

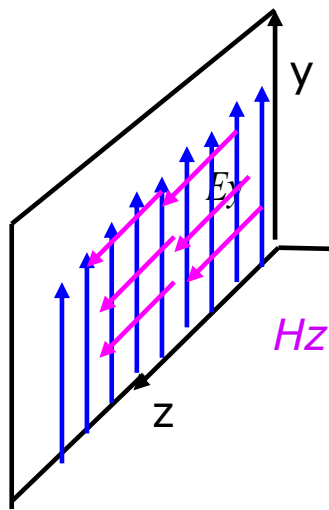
DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix} = 0\hat{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{j} + 0\hat{k} = \sigma E_y \hat{j} + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x) & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} \hat{k} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{k}$$



$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

- **Ecuación de propagación de campo eléctrico de una onda electromagnética plana, dentro de un material dieléctrico o conductor.**
- **Si imaginamos una variación sinusoidal, usamos fasores**

$$E_y = E_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - j\omega\sigma E_y + \omega^2 \varepsilon E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\varepsilon) E_y = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

Constante de Propagación

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{E}} + \epsilon \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{E}} (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \nabla \times \dot{\mathbf{E}} (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon)$$

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}}) - \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = -j\omega\mu (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} = j\omega\mu (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon) \dot{E}_y$$

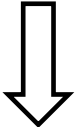
$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} = j\omega\mu (\boldsymbol{\sigma} + j\omega\epsilon) \dot{H}_z$$

DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0$$

- Forma simplificada de la ecuación de propagación, el tiempo no está en forma explícita, variación temporal del tipo armónica.
- UNA SOLUCIÓN PARA LA ONDA INCIDENTE DE CAMPO ELÉCTRICO RESULTA SER ENTONCES:

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$


$$H_z = -\frac{1}{\mu} \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = +\frac{1}{\mu} \gamma \int E_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x} dt = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$H_z = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_y$$

$$H_z = \frac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}}{j\omega\mu} E_y$$

- **IMPEDANCIA INTRINSECA DEL MEDIO**

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

Relación entre las ondas incidentes de campos eléctrico y magnético.

- **Un material dieléctrico real, con pérdidas.**

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x}$$

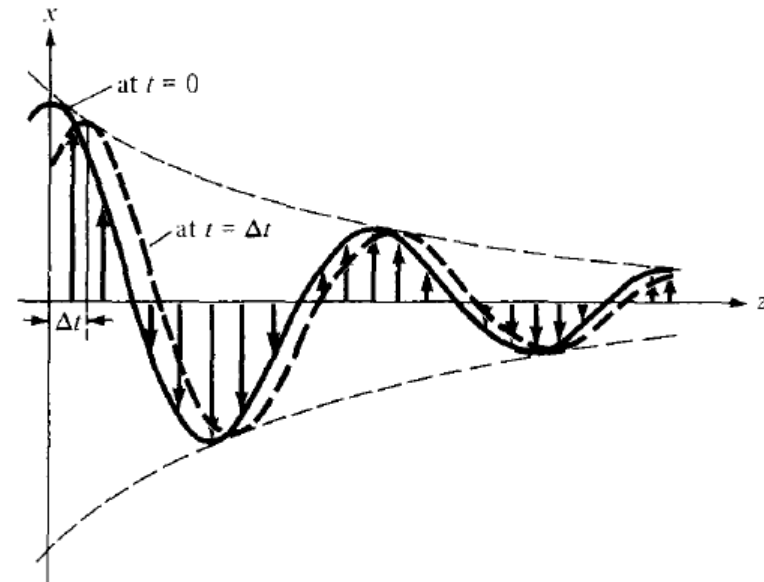
$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$E_y = E_0 e^{\underbrace{-\alpha x}_{\text{constante de atenuación}}} e^{j(\omega t - \underbrace{\beta x}_{\text{constante de fase}})}$$

$$\alpha = \text{Re}\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1\right]}$$

$$\beta = \text{Im}\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1\right]}$$



PROPAGACIÓN EN MEDIOS DIELECTRICOS REALES.

- **Para buenos dieléctricos (bajas pérdidas), se cumple que:**

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1$$

y en tales casos es posible realizar la siguiente aproximación binómica:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$x \ll 1$$

donde se han usado los dos primeros términos del desarrollo binómico de la raíz cuadrada.

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \cong 1 + \frac{\sigma^2}{2 \omega^2 \varepsilon^2}$$

$$\alpha \cong \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2 \omega^2 \varepsilon^2} - 1 \right)} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Como se puede apreciar, la constante de atenuación es pequeña, al serlo la conductividad, tendiendo a cero cuando ésta lo hace.

PROPAGACIÓN EN MEDIOS DIELECTRICOS REALES.

$$\beta = \text{Im}\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1\right]} \quad \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \cong 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x \\ x &\ll 1 \end{aligned} \quad \beta \cong \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\epsilon^2} + 1\right)} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2}\right)$$

Impedancia característica o impedancia intrínseca del medio.

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{(j\omega\mu)^2}{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}}}$$

Ecuación que puede ser
aproximada por expansión
binómica en:

$$Z_i \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\epsilon}\right)$$

- **Dieléctrico ideal Z_i es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente),**
- **Dieléctrico real con bajas pérdidas, Z_i es compleja (el campo magnético atrasa ligeramente en el tiempo con respecto al campo eléctrico).**

$$Z_i \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \qquad |Z_i| \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2} \right)}$$

Este módulo resulta ser igual a la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico perfecto (sin pérdidas), **multiplicada por el factor, mayor a la unidad pero muy próximo a ella.**

La relación entre campo eléctrico y magnético es menor en un medio dieléctrico que en el vacío $\varepsilon_r > 1$.

$$Z_i = Z_o \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

IMPEDANCIA CARÁCTERÍSTICA DE UN MEDIO CONDUCTOR

$$H_z = \frac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}}{j\omega\mu} E_y \quad \frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{j\omega\mu} = \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\mu}} = \frac{1}{Z_i} \quad \delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\sigma\mu}}$$

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{E_0}{H_0} e^{j\xi} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad Z_i = R + jX = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$\xi = 45^\circ$$

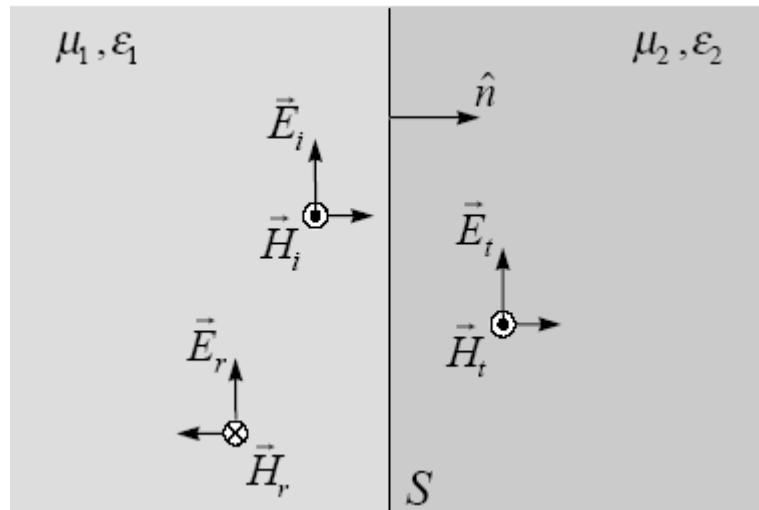
El ángulo de fase de la impedancia característica resulta de 45 grados

$$|Z_i| = \left| \frac{E_y}{H_z} \right| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

- **Dieléctrico perfecto la Z_i es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente)**
- **La Z_i para un medio conductor es una cantidad compleja (el campo magnético atrasa 45° respecto al campo eléctrico).**

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS.

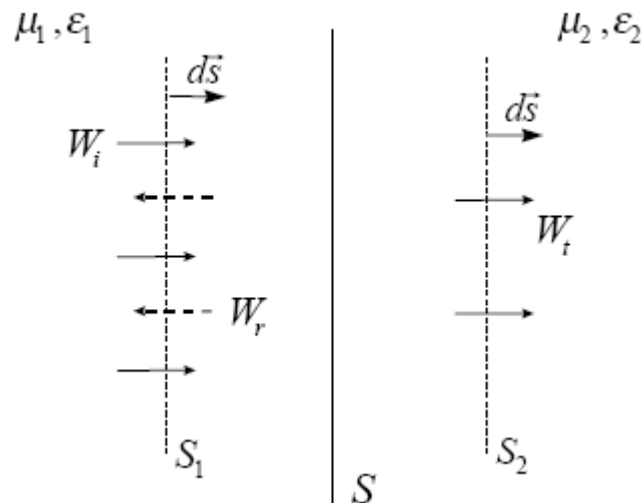
- Onda *incidente*: campo magnético y campo eléctrico, en fase temporal
- Onda *reflejada* aparece por discontinuidad en el medio de propagación.
- Ambas *incidente y reflejada*, son ondas *progresivas*,
 - cada una transporta energía en forma progresiva
 - en sentidos opuestos.
- Las ondas *incidente y reflejada* se propagan en el mismo medio.
- Existe otra onda, denominada *transmitida o refractada*, que ingresa al nuevo medio, transportando así energía en este medio.



REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS.

En la superficie de discontinuidad se plantea:

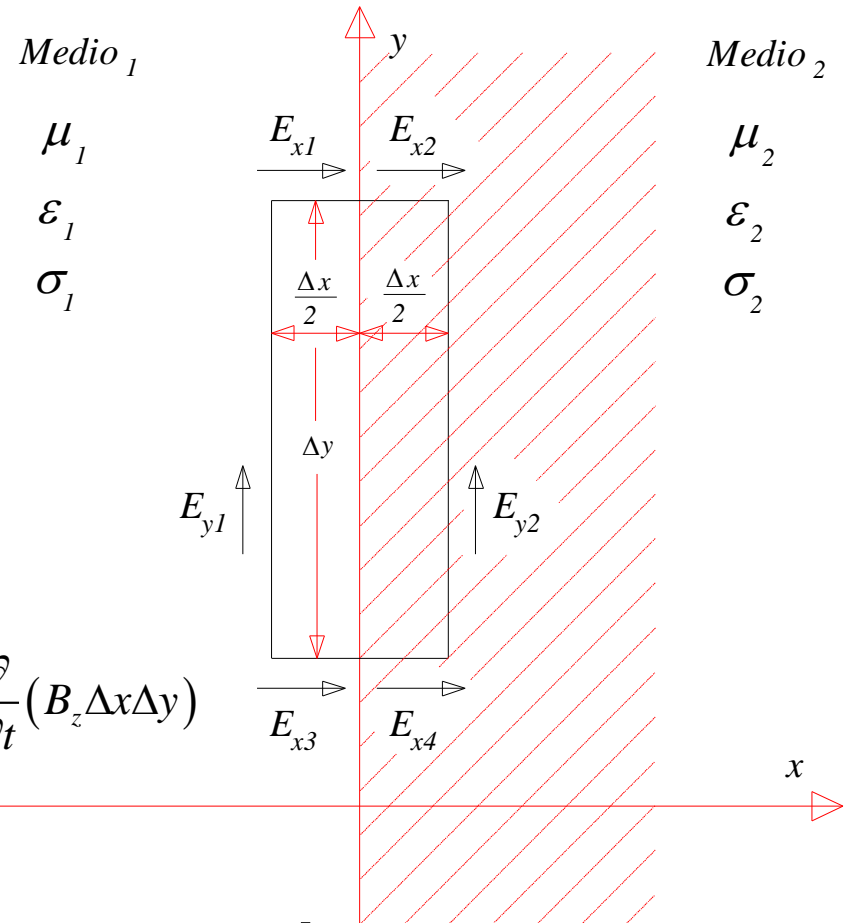
- **Balance energético**
 - onda incidente= energía suministrada por el generador de la onda, parte es devuelta al mismo medio, onda reflejada, y el resto será la onda transmitida en el nuevo medio.
- **Condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético, en la superficie límite de separación entre ambos medios.**



Condiciones de contorno sobre una superficie límite.

Componentes tangenciales de E.

Para el análisis de la componente tangencial de **E** se supone tener una superficie de separación entre dos medios distintos, ubicada en el plano $x=0$



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\lim \Delta x \rightarrow 0$$

$$E_{y2} \Delta y - E_{x2} \frac{\Delta x}{2} - E_{x1} \frac{\Delta x}{2} - E_{y1} \Delta y + E_{x3} \frac{\Delta x}{2} + E_{x4} \frac{\Delta x}{2} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_z \Delta x \Delta y)$$

$$E_{y2} \Delta y - E_{y1} \Delta y = 0$$

$$E_{y2} = E_{y1}$$

Es decir que: la componente tangencial de campo eléctrico es siempre continua

Condiciones de contorno sobre una superficie límite.

- Componentes tangenciales de H.**

- Aplicada la anterior ecuación a un rectángulo elemental similar al de la figura anterior

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} - \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$H_{y2} \Delta y - H_{x2} \frac{\Delta x}{2} - H_{x1} \frac{\Delta x}{2} - H_{y1} \Delta y + H_{x3} \frac{\Delta x}{2} + H_{x4} \frac{\Delta x}{2} = J_z \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial t} (D_z \Delta x \Delta y)$$

$$H_{y2} \Delta y - H_{y1} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} J_z \Delta x \Delta y$$

Medio ₁

μ_1

ϵ_1

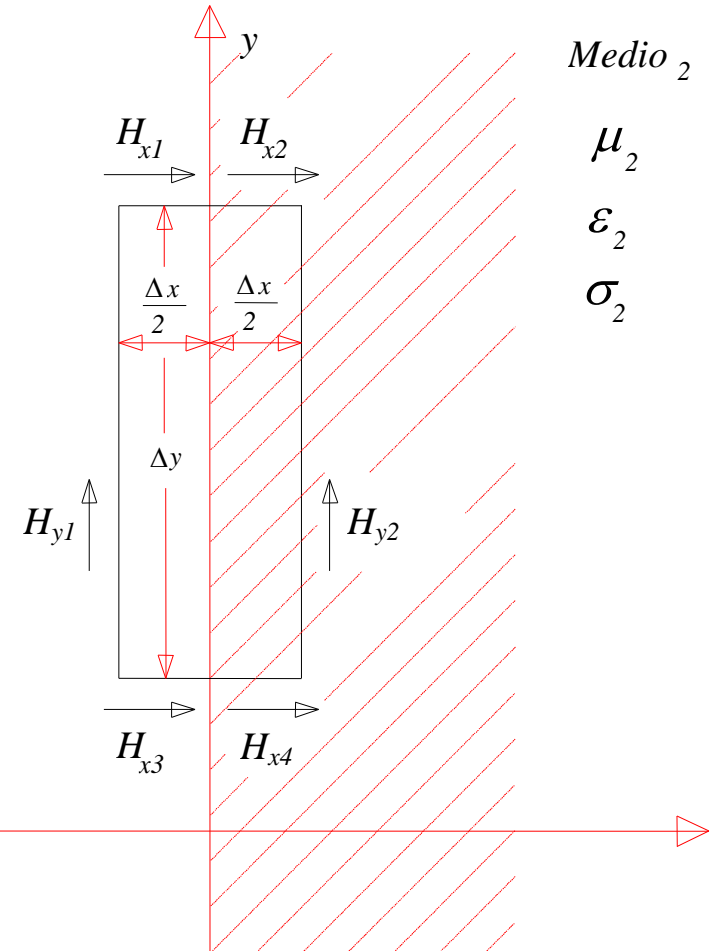
σ_1

Medio ₂

μ_2

ϵ_2

σ_2



Condiciones de contorno sobre una superficie límite.

- **Componentes tangenciales de H.**

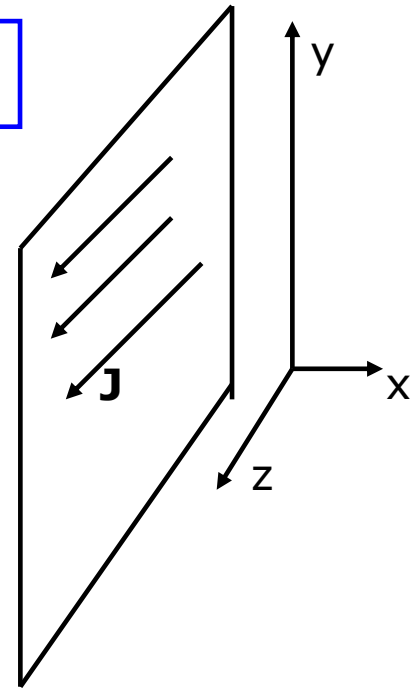
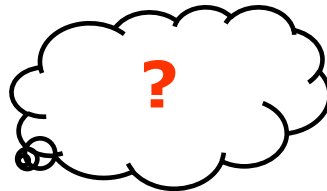
$$H_{y2} \Delta y - H_{y1} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} J_z \Delta x \Delta y$$

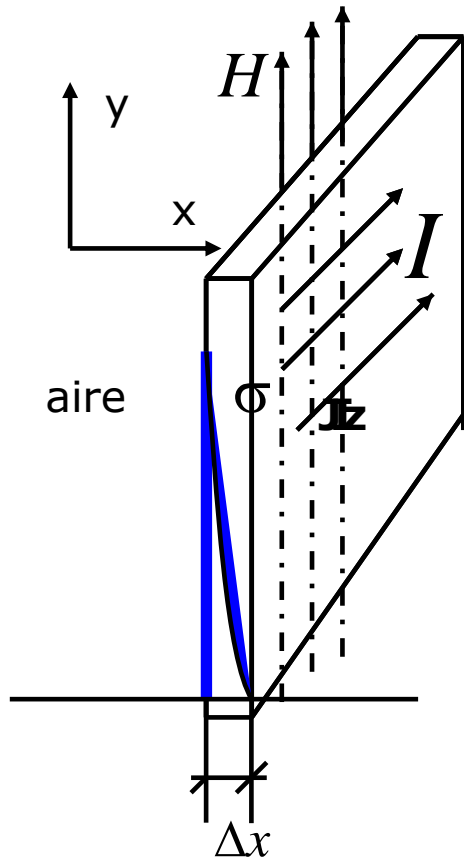
De la anterior ecuación se desprenden dos casos,

1) Densidad de corriente de conducción finita

$$H_{y2} = H_{y1}$$

2) Densidad de corriente de conducción
Infinita





$$J = J_0 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}$$

Conductor ideal

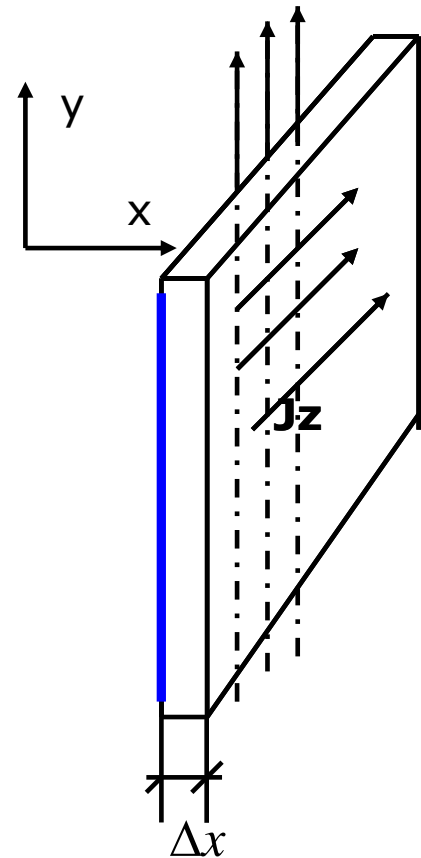
$$\sigma \longrightarrow \infty$$

$$\delta \longrightarrow 0$$

$$Sup \longrightarrow 0$$

$$J \longrightarrow \infty$$

$$I = \iint J \cdot ds \longrightarrow \text{Finita}$$



Condiciones de contorno sobre una superficie límite.

$$\oint H \cdot dl = I$$

$$\oint H \cdot dl = I = J_z \Delta x \cdot l_y$$

$$-H_y \cdot l_y = J_z \cdot \Delta x \cdot l_y$$

$$H_y = -J_z \cdot \Delta x$$

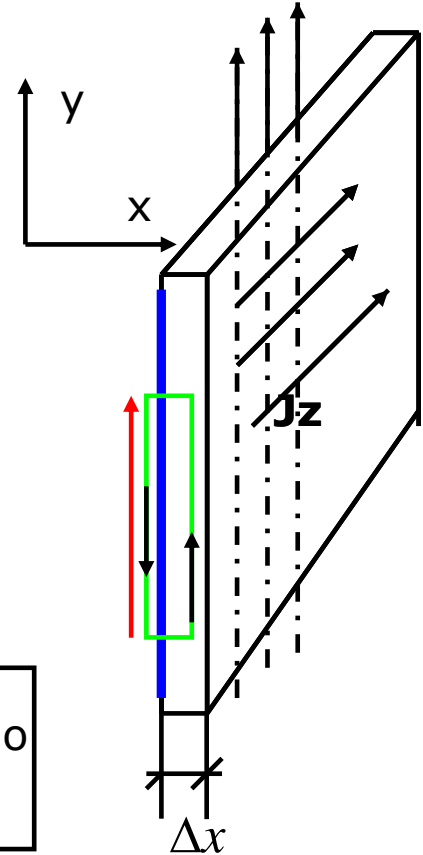
$$H_{y2} = 0$$

$$H_{y1} = -i_{sz}$$

$$\frac{I}{l_y} = J_z \cdot \Delta x = i_{sz}$$

$$i_{sz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} J_z \Delta x \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

Corriente por unidad de largo
en dirección \mathbf{y}

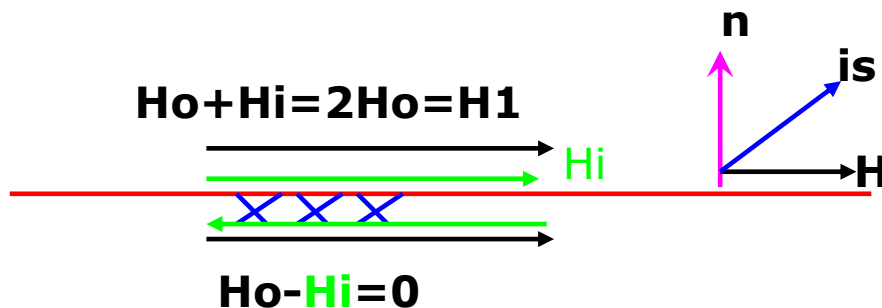


i_{sz} por unidad de largo (amperes por metro) es finita

Condiciones de contorno sobre una superficie límite.

- En un conductor ideal, el campo eléctrico (variable en el tiempo) es cero para cualquier densidad de corriente de conducción,
- Para satisfacer la condición de contorno del campo eléctrico tangencial, debe ser nulo a ambos lados de la superficie límite.
- El campo magnético dentro del conductor es cero, y la componente tangencial fuera del conductor queda determinada por la corriente de conducción superficial del conductor

$$\mathbf{i}_s = \vec{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$$



H_o : campo onda incidente

H_i : campo inducido por la corriente superficial

H_1 : campo total medio 1

Condiciones de contorno sobre una superficie límite

- Componentes normales de D.**

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_{\text{libre}} dv$$

$$D_{n1} ds - D_{n2} ds + \psi_{\text{lateral}} = \rho_{\text{libre}} \Delta x ds$$

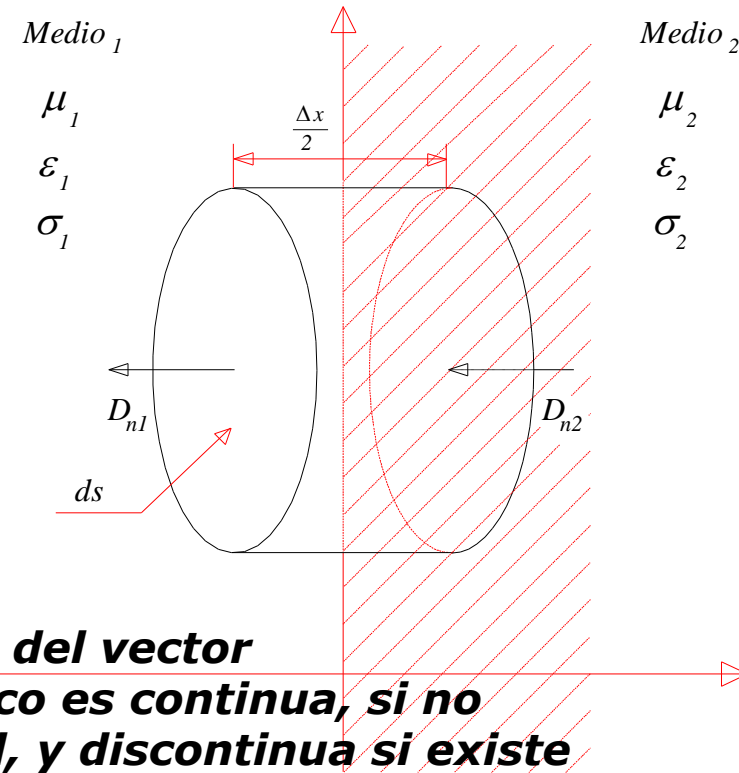
Cuando $\Delta \mathbf{x}$ tiende a cero, el flujo saliente por los laterales tiende también a cero

$$D_{n1} ds - D_{n2} ds = \rho_{\text{libre}} \Delta x ds$$

$$\sigma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_{\text{libre}} \Delta x$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

La componente normal del vector desplazamiento eléctrico es continua, si no existe carga superficial, y discontinua si existe tal carga.



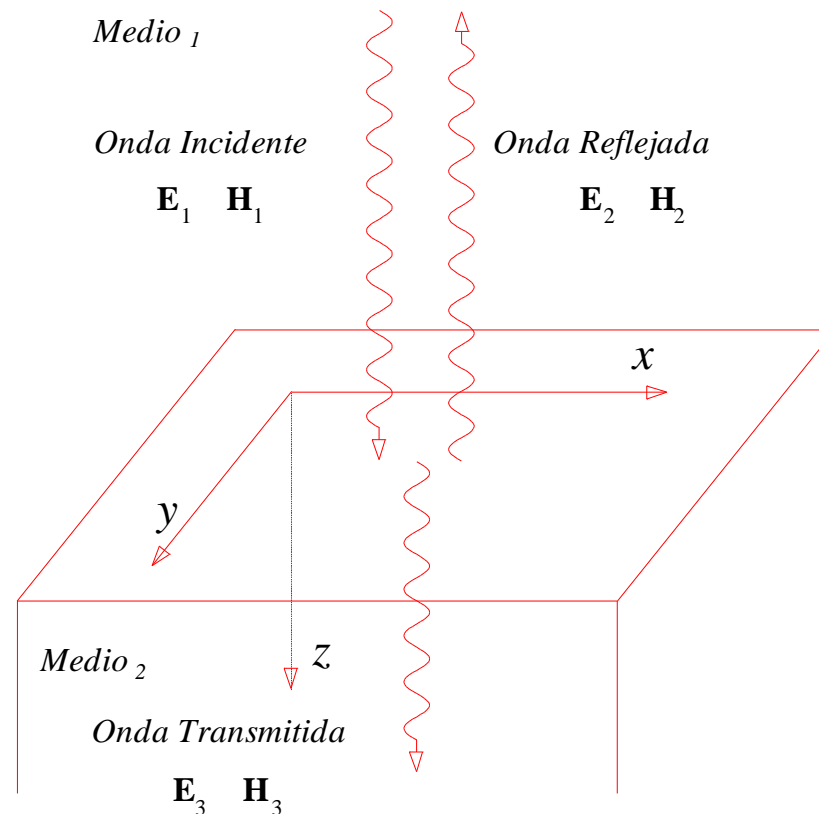
En un medio conductor, la carga reside en la superficie, y por lo tanto:

$$D_{n2} = 0 \quad D_{n1} = \sigma$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Reflexión y Refracción de Ondas Planas con Incidencia Normal.

- **Onda propagándose en un dado medio, incide sobre otro medio que tiene distinta permitividad, permeabilidad o conductividad,**
 - **Onda reflejada y otra refractada o transmitida,**
- **Una nueva repartición de la energía electromagnética.**



- **No pueden existir campos eléctricos ni magnéticos variables en el tiempo en el interior de dicho medio.**
- **Onda incidente no puede transmitir energía hacia el interior del conductor perfecto, si lo hiciera sería infinita ($E \cdot J$)**
- **Toda la energía que transporta la onda incidente en el vacío, es devuelta a dicho medio ahora transportada por la onda reflejada.**

Reflexión sobre superficie conductora perfecta

- **La Onda incidente de E se propaga sentido eje z positivo, y está polarizada linealmente en la dirección del eje x**

La superficie límite está ubicada en $z=0$.

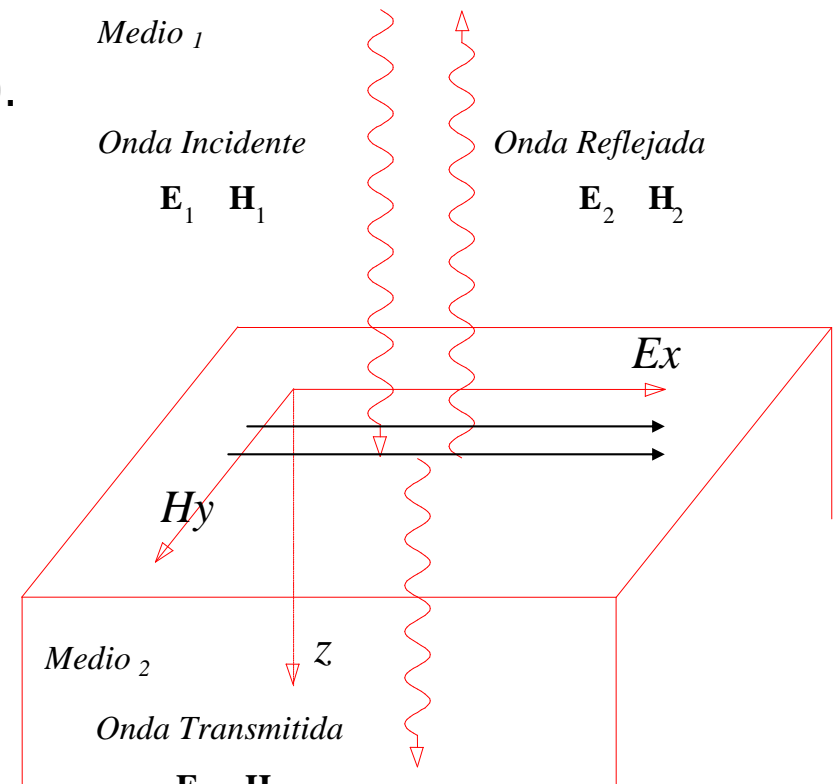
Onda Incidente

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)]$$

Onda Completa

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)] + f_2[vt + z]$$

f_2 dependerá de la onda incidente, y de las condiciones de contorno impuestas por la superficie límite.



Reflexión sobre superficie conductora perfecta

- **El campo eléctrico sobre la superficie conductora debe ser nulo (para todo valor del tiempo).**

$$E_{x2} = E_{x1} \quad E_x = E_m \cos[\beta(vt - 0)] + f_2[vt + 0] = 0$$
$$E_{x2} = 0(\text{conductor}) \quad f_2[vt] = -E_m \cos[\beta(vt)]$$

Para todo otro z , la onda reflejada resulta ser:

$$f_2[vt + z] = -E_m \cos[\beta(vt + z)]$$

- **La onda reflejada sobre la superficie conductora (para $z=0$), coincide en amplitud con la incidente, y está en oposición de fase con la misma**
- **No existe onda transmitida, la onda reflejada transportará la misma cantidad de energía que la onda incidente, pero en sentido contrario, dando un flujo neto nulo de energía en el medio (vacío).**
- **La ONDA TOTAL:**

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)] - E_m \cos[\beta(vt + z)]$$

Reflexión sobre superficie conductora perfecta

expresada en términos de la pulsación angular:

$$E_x = E_m \cos(\omega t - \beta z) - E_m \cos(\omega t + \beta z)$$

Notación exponencial para facilitar las operaciones a realizar, la onda completa resulta ser:

$$E_x = \text{Real} \left[E_m e^{j(\omega t - \beta z)} - E_m e^{j(\omega t + \beta z)} \right]$$

$$E_x = \text{Real} \left[E_m e^{j\omega t} \left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z} \right) \right]$$

$$E_x = \text{Real} \left[-2jE_m e^{j\omega t} \text{sen}(\beta z) \right]$$

$$E_x = 2E_m \text{sen}(\beta z) \text{sen}(\omega t);$$

$$E_y = E_z = 0$$

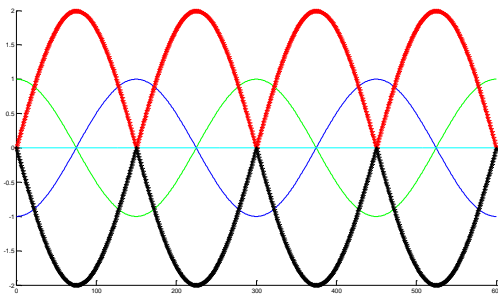
Reflexión sobre superficie conductora perfecta

$$E_x = E_m \cos(\omega t - \beta z) - E_m \cos(\omega t + \beta z)$$

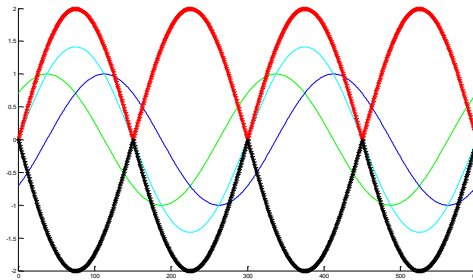
$$E_x = 2E_m \sin(\beta z) \sin(\omega t)$$

- La onda compuesta de campo eléctrico, onda incidente más reflejada. no se propaga en ninguna dirección, siendo denominada: **onda estacionaria**.

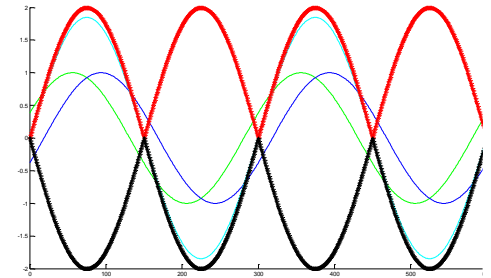
$$\text{Envolvente} = 2E_m \sin(\beta z)$$



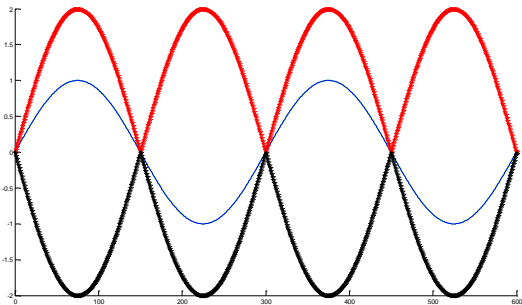
$$\omega t = 0$$



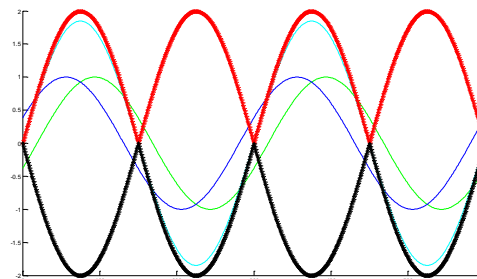
$$\omega t = \frac{\pi}{4}$$



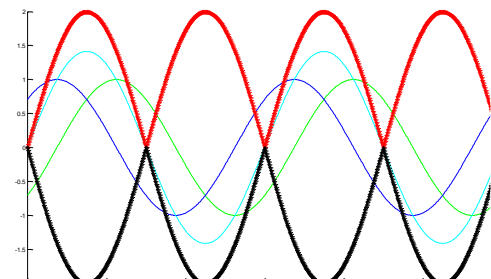
$$\omega t = 3\frac{\pi}{8}$$



$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

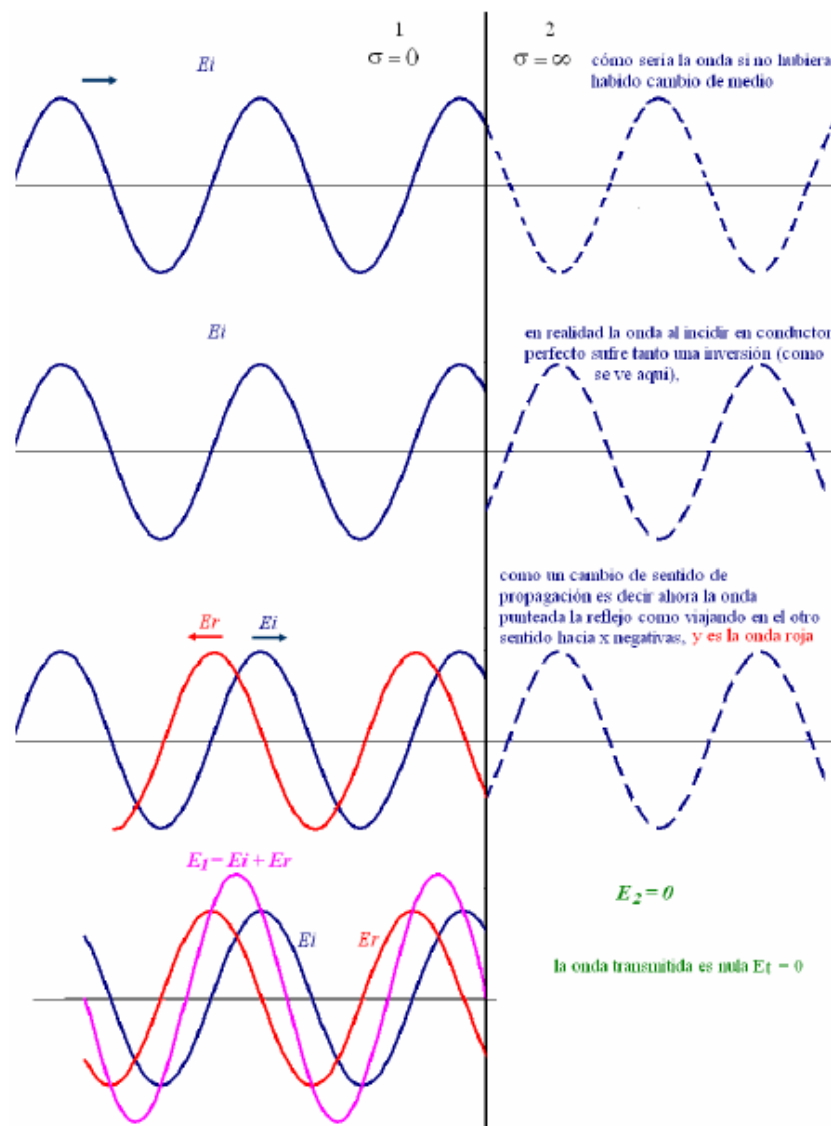


$$\omega t = 5\frac{\pi}{8}$$



$$\omega t = 3\frac{\pi}{4}$$

Construcción de la onda reflejada de E



- ***Vientres*** (máximos) y ***Nodos*** (mínimos), en ubicaciones espaciales fijas, distantes entre sí $\lambda/4$.

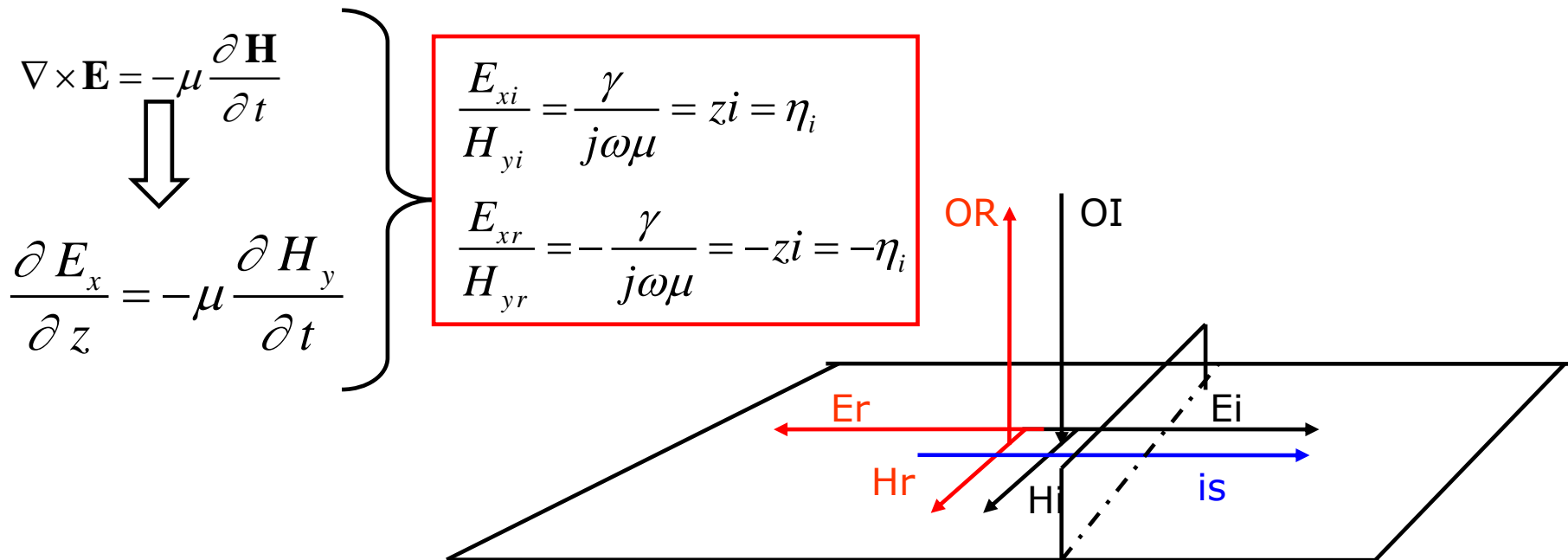
Para el Campo eléctrico:

Vientres a múltiplos impares de $\lambda/4$ desde la superficie conductora perfecta $(2n+1) \lambda/4$

- **Nodos** a múltiplos de $\lambda/2$, desde la superficie conductora perfecta. $(n \lambda/2)$
- En cada punto del espacio, **la variación temporal** de la onda estacionaria de campo eléctrico es senoidal, alcanzando un valor máximo correspondiente al punto en cuestión.
- En todos los puntos espaciales dentro de un *ojo*, los fasores de campo eléctrico están en fase temporal entre sí, y en contrafase con respecto a aquellos pertenecientes a *ojos* adyacentes.

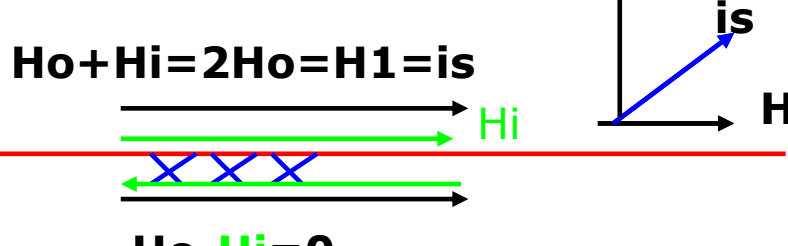
Reflexión sobre superficie conductora perfecta

- El campo magnético se refleje sin inversión de fase. Esto ocurre necesariamente pues de no ser así, no habría inversión del sentido de propagación de la onda electromagnética reflejada.
- La corriente superficial duplica el campo H, ($H_i = H_r$) y anula E ($E_i = -E_r$)
- Ondas incidentes de $E_i/H_i = Z_i$
- $E_r/H_r = -Z_i$ cambia el sentido de propagación
- Recordar la relación entre ambos campos a través del rotacional, variación espacial en sentidos opuestos.



Reflexión sobre superficie conductora perfecta

$$E_x = E_m \cos(\omega t - \beta z) - E_m \cos(\omega t + \beta z)$$

$$H_y = \left(\frac{E_m}{z_i} \right) \cos(\omega t - \beta z) + \left(\frac{E_m}{z_i} \right) \cos(\omega t + \beta z)$$


$H_0 + H_i = 2H_0 = H_1 = i s$

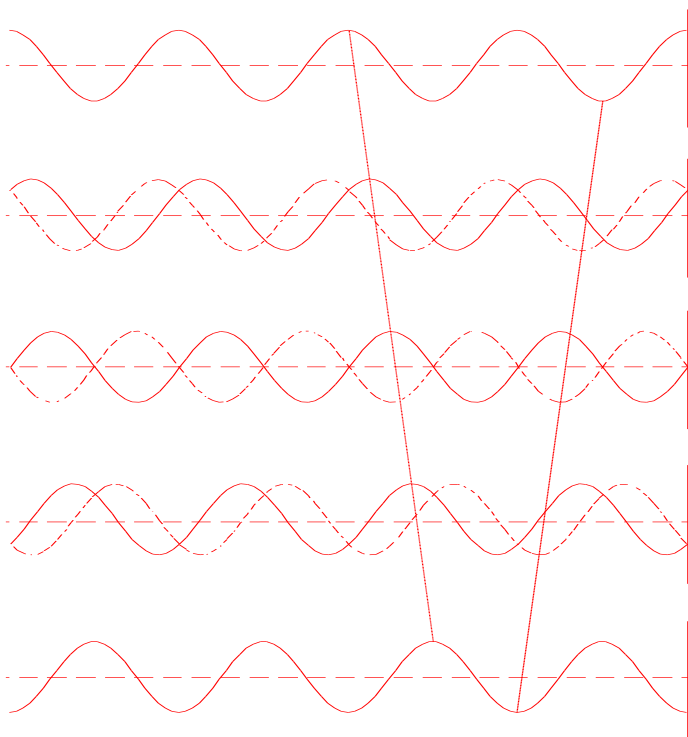
$H_0 - H_i = 0$

$$H_y = 2 \frac{E_m}{z_i} \cos(\beta z) \cos(\omega t) \quad H_x = H_z = 0$$

$$Envolvente = 2 \frac{E_m}{z_i} \cos(\beta z)$$

- Los nodos de la onda estacionaria de campo magnético coinciden con los vientres de la onda de campo eléctrico, y viceversa.
- El faser campo magnético está en cuadratura temporal con el faser campo eléctrico, dando por consiguiente una potencia transportada nula,

*Onda de Campo Magnético
(Incidente y Reflejada)*



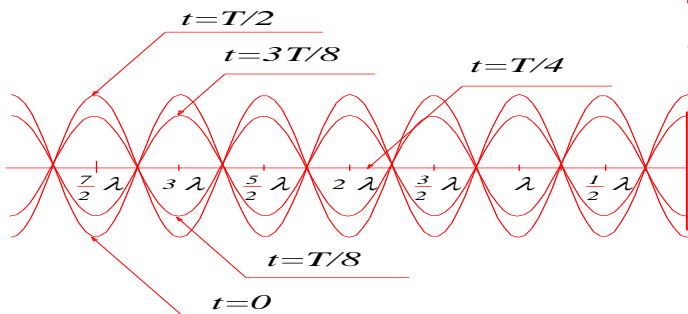
$t = 0$

$t = T/8$

$t = T/4$

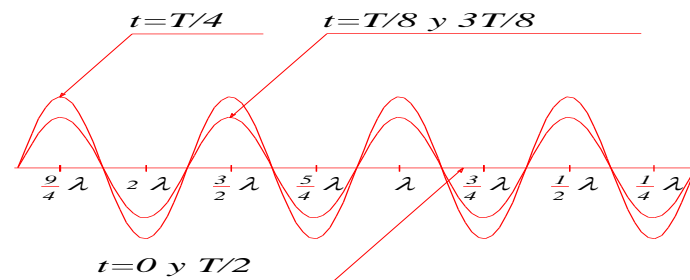
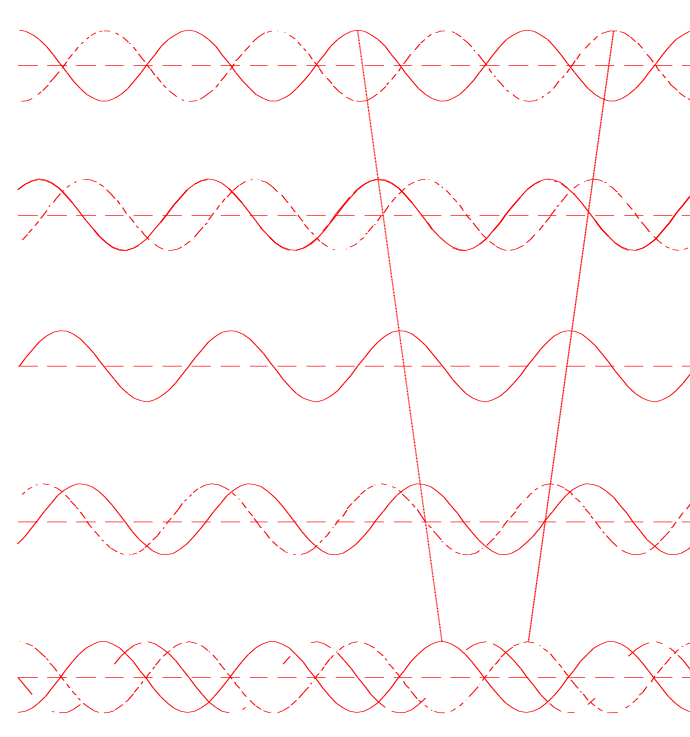
$t = 3T/8$

$t = T/2$



Onda Estacionaria

*Onda de Campo Eléctrico
(Incidente y Reflejada)*



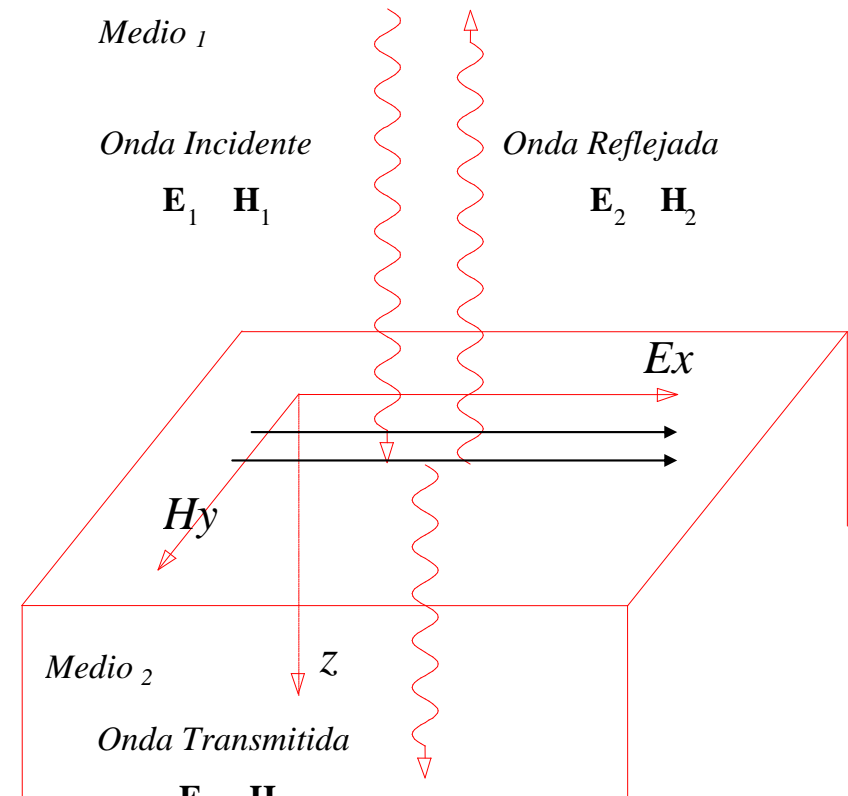
Reflexion sobre superficie **dieléctrica** perfecta.

- Si una onda plana, propagándose en un medio dieléctrico ideal o perfecto, incide normalmente sobre una superficie límite de separación con un medio dieléctrico perfecto, se generarán una
 - Onda reflejada que vuelve al medio original,
 - Onda Transmitida que ingresa y se propaga en el nuevo medio dieléctrico, estableciéndose un nuevo balance energético.
 - La onda total en el vacío será la suma de las ondas incidente y reflejada, y tendrá la siguiente expresión genérica:

$$E_{x \text{ vacío}} = E_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + E_{m2} e^{j(\omega t + \beta_2 z)}$$

Mientras que la onda de campo eléctrico en el dieléctrico será:

$$E_{x \text{ dieléctrico}} = E_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)}$$



Reflexion sobre superficie dieléctrica perfecta.

- La componente tangencial de campo eléctrico debe ser continua en $z=0$,

$$E_{m1} + E_{m2} = E_{m3}$$

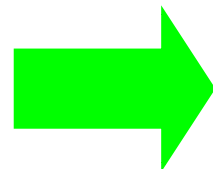
$$E_{x \text{ dieléctrico}} = E_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)}$$

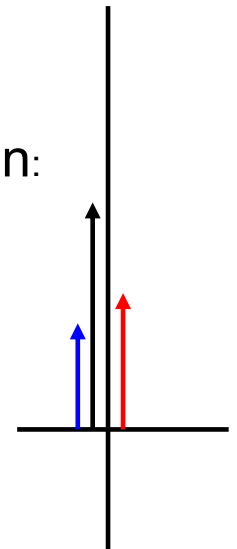
El campo magnético en el vacío tiene la siguiente expresión:

$$H_{y \text{ vacío}} = H_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + H_{m2} e^{j(\omega t + \beta_2 z)}$$

$$H_{y \text{ dieléctrico}} = H_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)}$$

Por otra parte, y dada la no existencia de una densidad de corriente de conducción superficial infinita, la componente tangencial de campo magnético es continua a ambos lados de la superficie límite, o sea que:


$$H_{m1} + H_{m2} = H_{m3}$$



COEFICIENTE DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

$$\begin{aligned} E_{m1} &= Z_{i1} H_{m1} \\ E_{m2} &= -Z_{i1} H_{m2} \\ E_{m3} &= Z_{i3} H_{m3} \end{aligned} \quad Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad \left\{ \begin{aligned} E_{m1} + E_{m2} &= E_{m3} \\ H_{m1} + H_{m2} &= H_{m3} \end{aligned} \right.$$

$$E_{m2} = \frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} E_{m1} = \rho_{RE} E_{m1}$$

$$E_{m3} = \frac{2Z_{i3}}{Z_{i3} + Z_{i1}} E_{m1} = \rho_{TE} E_{m1}$$

$$H_{m2} = -\frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} H_{m1} = \rho_{RH} H_{m1}$$

$$H_{m3} = \frac{2Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} H_{m1} = \rho_{TH} H_{m1}$$

- Los coeficientes de reflexión de los campos eléctrico y magnético difieren entre sí por su signo
- El módulo de estos coeficiente varía entre 0 y 1.

• Ambos coeficientes, reflexión y transmisión, son en general un número complejo, siendo en este caso particular de la reflexión *dieléctrico perfecto-dieléctrico perfecto* un número real.

COEFICIENTE DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

- La onda total (incidente más reflejada) puede ser descompuesta en la suma de una onda estacionaria más otra progresiva (propagándose en el mismo sentido que la incidente).
- Si el coeficiente de reflexión tiende a la unidad (reflexión total), la onda total (incidente más reflejada) tiende a una onda estacionaria pura.
- Si el coeficiente de reflexión tiende a cero (transmisión total), la onda total (incidente más reflejada) tiende a una onda progresiva pura (no hay discontinuidad entre los medios).
- Cuantificar el contenido estacionario de una onda. Este factor se denomina *relación de onda estacionaria (ROE)*, siendo este coeficiente igual a la relación entre las intensidades de campo (eléctrico o magnético) en los vientres y nodos. O sea:

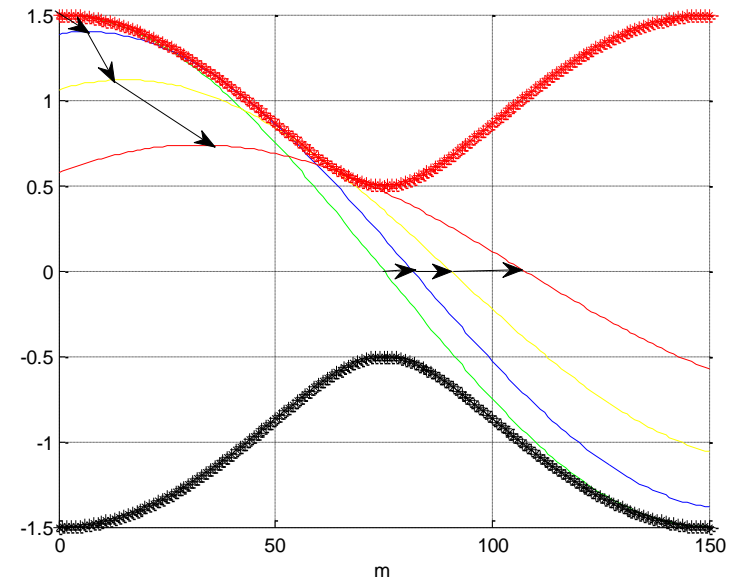
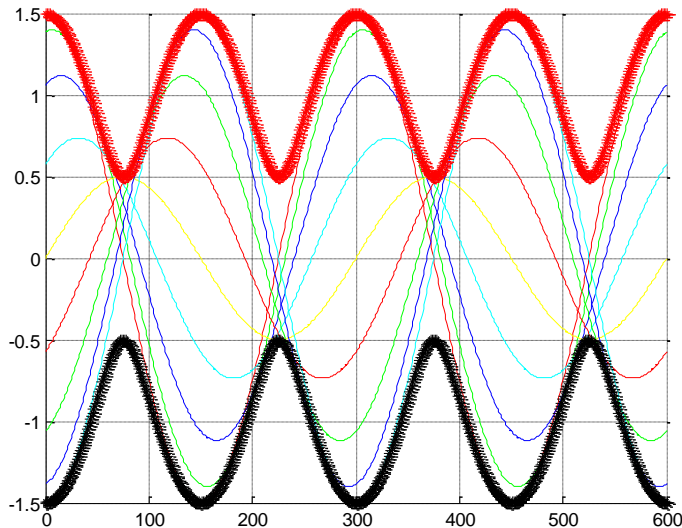
$$ROE = \frac{|Ventre|}{|Nodo|} = \frac{|E_{m1}| + |E_{m2}|}{|E_{m1}| - |E_{m2}|} = \frac{1 + |\rho_{RE}|}{1 - |\rho_{RE}|}$$

$$ROE = \frac{|Vientre|}{|Nodo|} = \frac{|E_{m1}| + |E_{m2}|}{|E_{m1}| - |E_{m2}|} = \frac{1 + |\rho_{RE}|}{1 - |\rho_{RE}|}$$

ROE es un número real, varía entre :

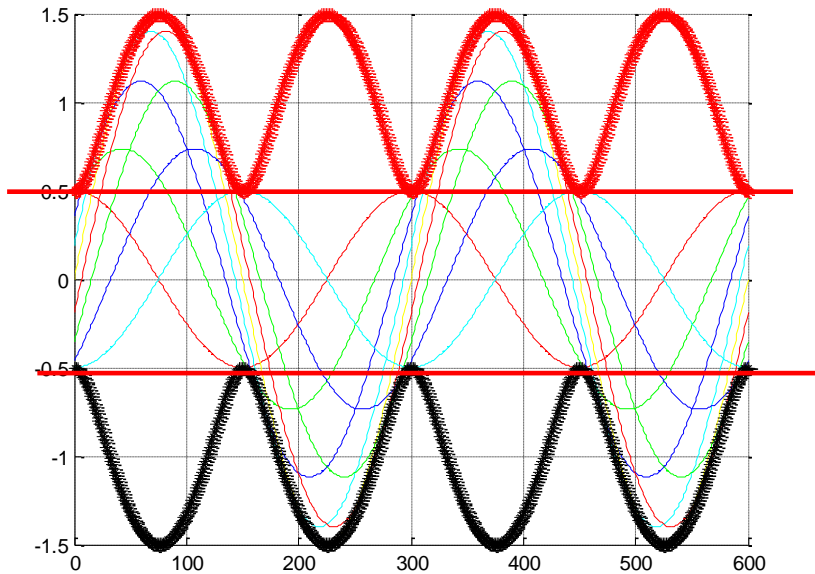
1, cuando el coeficiente de reflexión es nulo (medios completamente adaptados)

Infinito, cuando el coeficiente de reflexión es unitario (medios completamente desadaptados).



$wt=0; wt=\pi/8; ; wt=\pi/4$

Onda Progresiva + Estacionaria

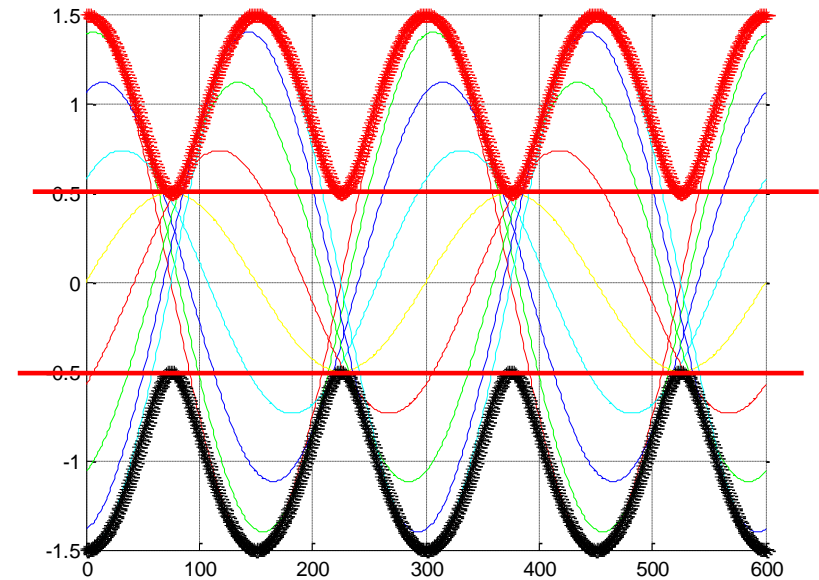


$$E_y = E_o \cos(\omega t - \beta x) - \frac{E_o}{2} \cos(\omega t + \beta x)$$

$$\frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} = -0.5$$

$$E_y = \boxed{\frac{E_o}{2} \cos(\omega t - \beta x)} + \boxed{\left[\frac{E_o}{2} \cos(\omega t - \beta x) - \frac{E_o}{2} \cos(\omega t + \beta x) \right]}$$

progresiva estacionaria

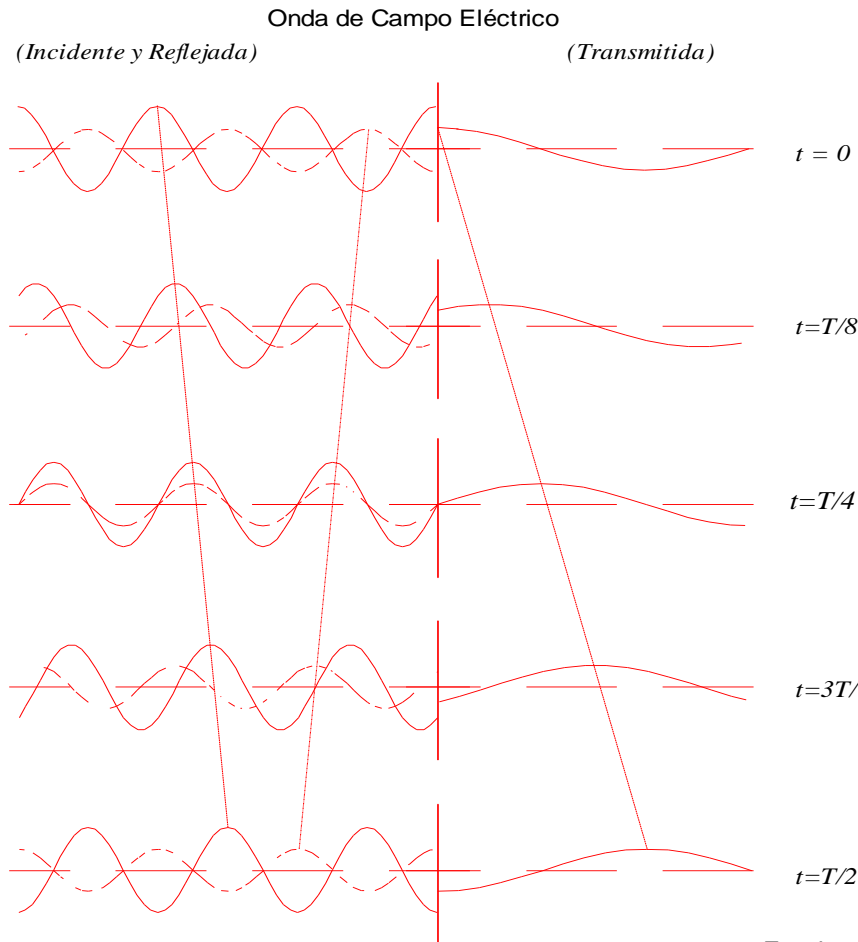


$$E_y = E_o \cos(\omega t - \beta x) + \frac{E_o}{2} \cos(\omega t + \beta x)$$

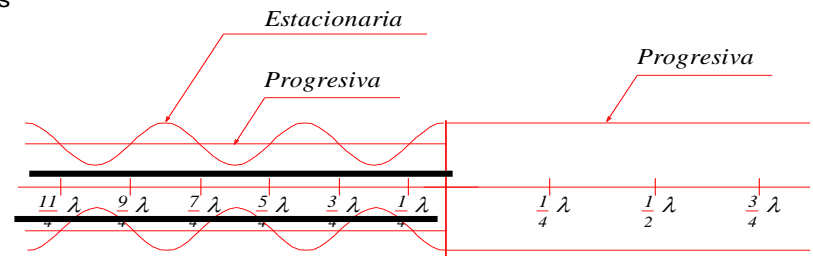
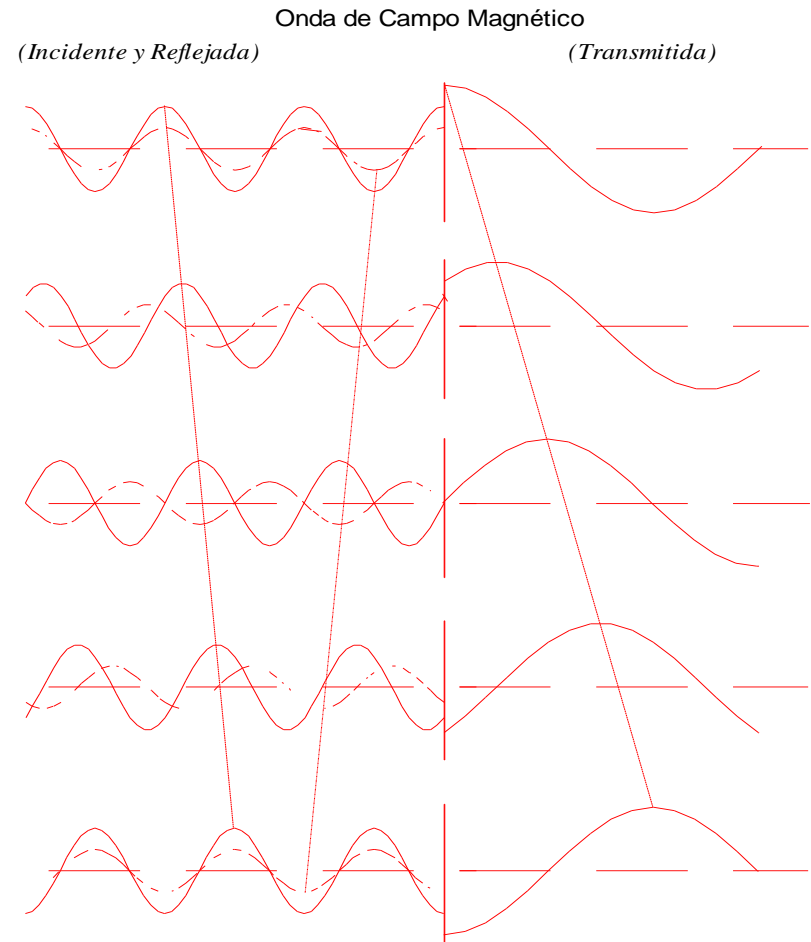
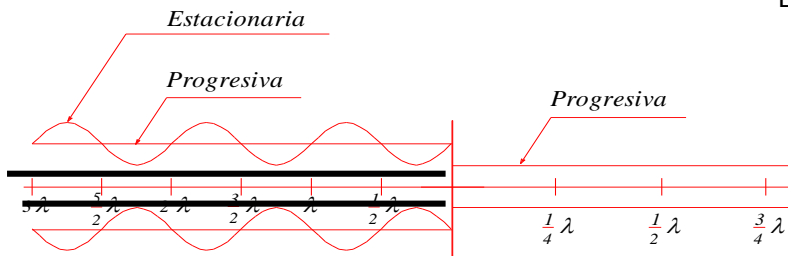
$$\frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} = 0.5$$

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad Z_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

Onda Progresiva + estacionaria



Envolturas



REFLEXIÓN SOBRE SUPERFICIE DIELECTRICA REAL O CONDUCTOR REAL.

- **Medio con conductividad real o equivalente por efecto de la histéresis dieléctrica, puede existir una densidad de corriente de conducción apreciable**
- **Similar al análisis de reflexión sobre una superficie dieléctrica perfecta, a condición de:**
 - **Reemplazar la constante de fase por la constante de propagación, es ahora un número complejo**
 $\alpha + j\beta$
 - **La impedancia intrínseca del medio es ahora compleja (en lugar de real).**

$$Z_i = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

- **Las ondas reflejadas de campo eléctrico o magnético no estarán necesariamente en fase o contrafase con las incidentes,**
- **No estarán necesariamente en fase entre sí las ondas incidentes de ambos campos, o las reflejadas.**