
Radiación

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

$\phi = U \rightarrow$ Potencial
eléctrico

Potenciales dinámicos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \left(-\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

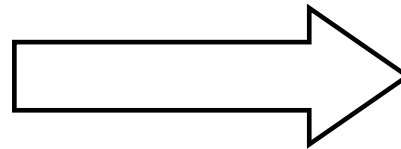
$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Adoptamos

**Condición
de Lorentz**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

Potenciales dinámicos

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

Ecuaciones diferenciales para los potenciales

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

En los lugares en que NO hay cargas ni corrientes

Ecuación de ONDA

Supongamos las cargas y las corrientes concentradas en algún punto del espacio, $r \rightarrow 0$

- En los lugares sin cargas ni corrientes (espacio libre) estas ecuaciones son del tipo ondas tridimensional cuya solución es por ejemplo:
- Ondas planas en dirección x : $f(t - x / v)$
- Ondas esféricas de la forma
$$\frac{f(t - r / v)}{r}$$
- Esta onda esférica se origina en el origen ($r=0$) donde existe una fuente que esta variando en el tiempo .
- La función f es solución de la ec. diferencial de la onda en todo punto excepto en el origen, donde la función debe ser solución de la ecuación completa, incluyendo las fuentes

- Si estamos en $r=0$, la función solución debe cumplir con

$$\nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

La Función solución debe ser solución de la ecuación completa

- Consideramos que para r muy pequeño, podemos despreciar el retardo r/v

$$\frac{f(t)}{r} \quad \text{Cuasi estacionario}$$

- Las derivadas espaciales son mucho mayor que las temporales

$$\nabla^2 \phi \gg \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

Potenciales dinámicos

$$\cancel{r} = t_d = \text{"Tiempo de retardo"}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Ecuación de Poisson

$$\phi = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon r} dv$$

$$\phi = \int \frac{\rho(t - r/v)}{4\pi\epsilon r} dv$$

La solución particular serán los potenciales retardados, que cumplen las condiciones de contorno en la fuente ($r=0$) o cerca de ella y la ecuación de la Onda cuando estoy en el espacio

En $r=0$, si tenemos una carga Q que varia en el tiempo, esta es solución de la ec. De Poisson en $r \rightarrow 0$, en una región limitada a una pequeña distancia de la carga

$$\phi = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon r}$$

La solución para cualquier punto del espacio será

$$\phi = \frac{Q(t - r/v)}{4\pi\epsilon r}$$

Potenciales Retardados

$$\phi = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon r} dv$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}}{4\pi r} dv$$

$$\phi = \int \frac{\rho(t - r/v)}{4\pi\epsilon r} dv$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}(t - r/v)}{4\pi r} dv$$

El potencial (escalar o vectorial) de un punto en el espacio, separado de las fuentes (densidad de cargas o de corriente) una distancia r , en un dado instante t , depende de los valores de estas fuentes en un instante $t - r/v$, ya que éste será el efecto que alcance al punto en cuestión en un instante t .

Debido a este efecto de *retardo* entre causa y efecto, es que a los potenciales dinámicos (escalar o vectorial) se los denomina *potenciales retardados*.

Potenciales retardados para el caso senoidal

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A}$$

$$\phi = \int \frac{\dot{\rho} e^{-j\beta r}}{4\pi\epsilon r} dv$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mu \int \frac{\dot{\mathbf{J}} e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon j\omega \phi$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Y la variación temporal está dada por el **factor, implícito**

$$e^{j\omega t}$$

En este caso el retardo debido al tiempo finito de propagación esta tenido en cuenta por el factor

$$e^{-j\beta r}$$

Este factor aportará un desfase para la contribución de cada elemento diferencial de la fuente (carga o corriente) al potencial de un punto en el espacio, de acuerdo a la distancia r entre dicho punto y el elemento considerado de la fuente.

Estado estacionario con señales senoidales, la relación entre el potencial escalar y el vectorial dado por la expresión

$$\phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{\mu\epsilon j\omega}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

De este modo, resuelto el potencial vectorial, se pueden calcular los campos eléctrico y magnético a partir del mismo con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{j\omega}{\beta^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega \mathbf{A}$$

Solamente es necesario conocer la distribución de corriente en el sistema considerado, calcular el vector potencial con la expresión

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J} e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv$$

- **La radiación de energía electromagnética es importante en al menos dos casos**
 - **transferir energía desde un transmisor a ondas electromagnéticas mediante el uso de un adecuado sistema de antenas.**
 - **la necesidad de acotar a valores razonables la pérdida de energía por radiación, de circuitos con blindajes inadecuados.**
- **Encontrar la cantidad de radiación y los efectos de los sistemas radiantes, mediante los modelos que mejor describan al fenómeno, mediante la correcta aplicación de las ecuaciones de Maxwell y de los potenciales retardados.**

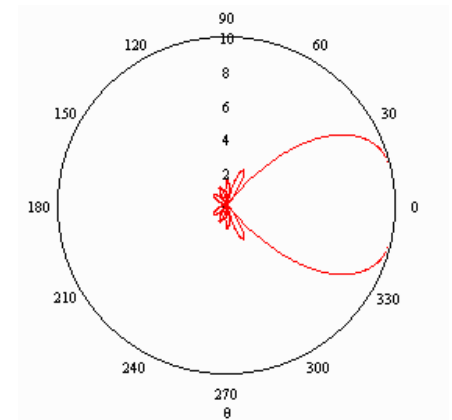
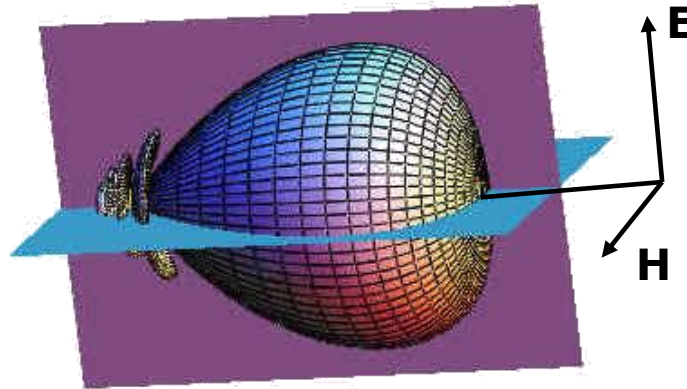
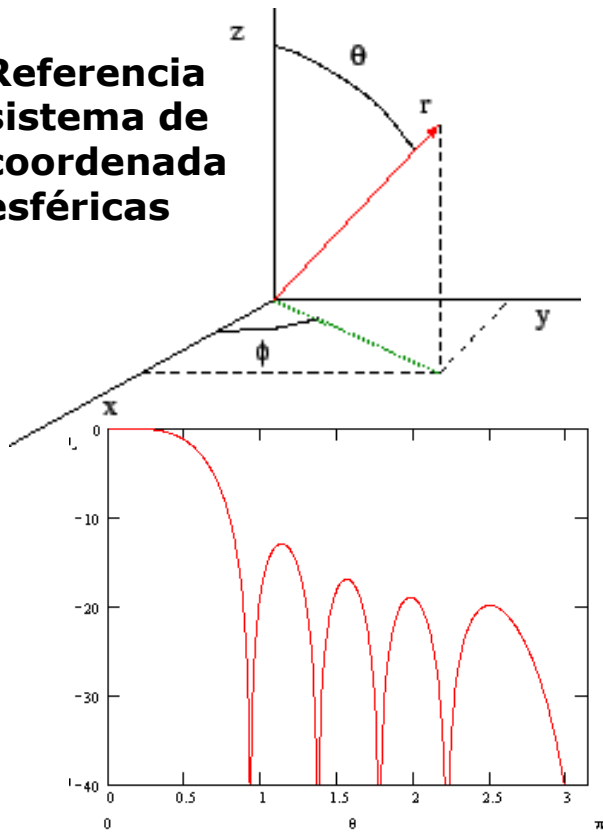
DEFINICIÓN DE ANTENA

- **Interfase con el aire de un sistema de comunicaciones.**
- **Aquellas partes del sistema Transmisor o Receptor diseñada para radiar o recibir ondas electromagnéticas.**
- **Conductor eléctrico o conjunto de estos capaz de:**
 - **Transmisión: Radiar energía al espacio**
 - **Recepción: Recibir energía del espacio**
- **Principio de reciprocidad**
 - **se puede demostrar que las propiedades (impedancia, ganancia, etc.) de una antena cualquiera son las mismas tanto en emisión como en recepción.**

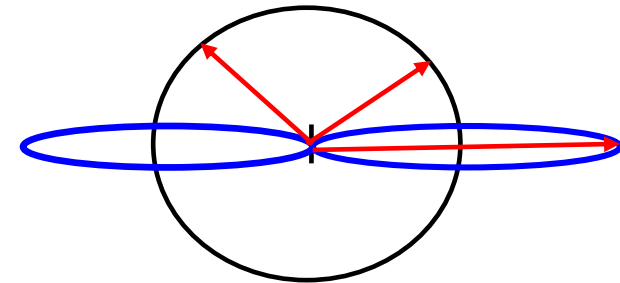
Diagrama de Radiación

Es la representación espacial de la distribución de la densidad de potencia (E , H) que produce un radiador, como función del ángulo cenital θ y acimutal ϕ

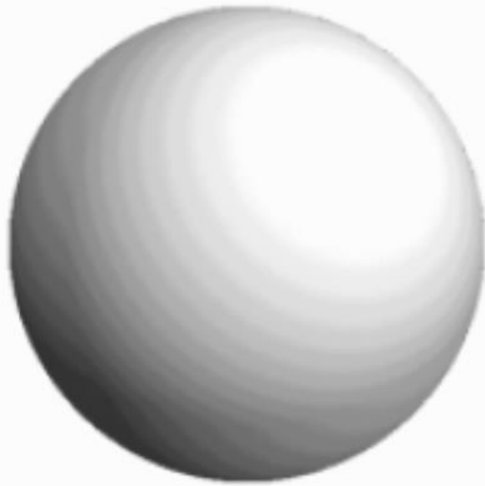
Referencia sistema de coordenada esféricas



**De acuerdo a la aplicación se debe concentrar o no la energía radiada por una Antena.
DIRECTIVIDAD**



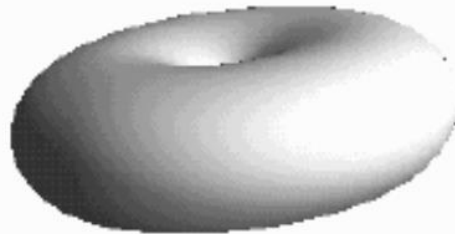
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE RADIACIÓN DE LAS ANTENAS



ISOTRÓPICO

Irradia la misma intensidad en todas las direcciones (Ideal)

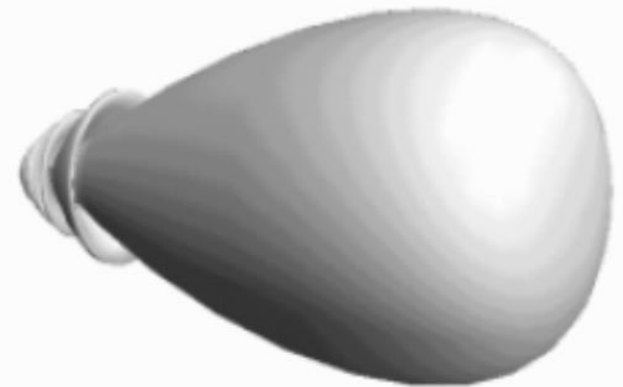
E



OMNIDIRECCIONAL

Simetría de revolución en torno a un eje. Diagrama tridimensional puede representarse en un único corte que contenga al eje

E(θ)



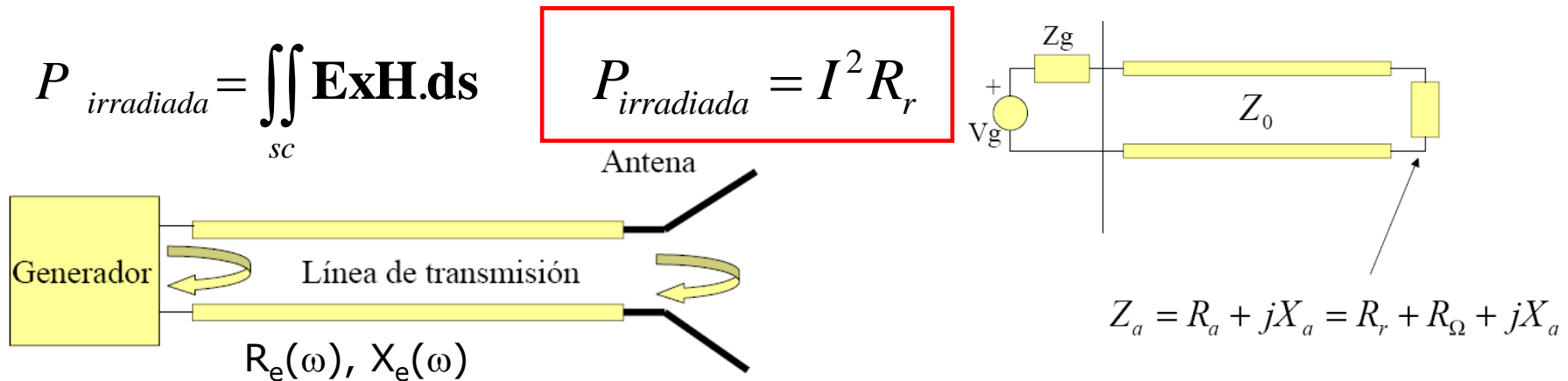
DIRECTIVO Tipo pincel

Se representan cortes por ej. ϕ o θ constante

E(θ, ϕ)

Radiación y Fundamentos de las Antenas

- 2) Determinación de la potencia total irradiada por el sistema de antenas cuando es excitado por una tensión o corriente conocidos. Esto implica conocer la resistencia de irradiación, como se verá en el desarrollo del tema.
- 3) Determinación de la impedancia que ofrece el radiador al generador que lo excita. Esto implica conocer la impedancia de entrada del radiador, la cual será tratada oportunamente.



La impedancia de entrada condiciona la tensiones de los generadores para lograr la potencia irradiada a menor corriente minimizar la $X(\omega)$ y maximizar la $R(\omega)$, para disminuir pérdidas

$$I = \frac{V_g}{Z_e}$$

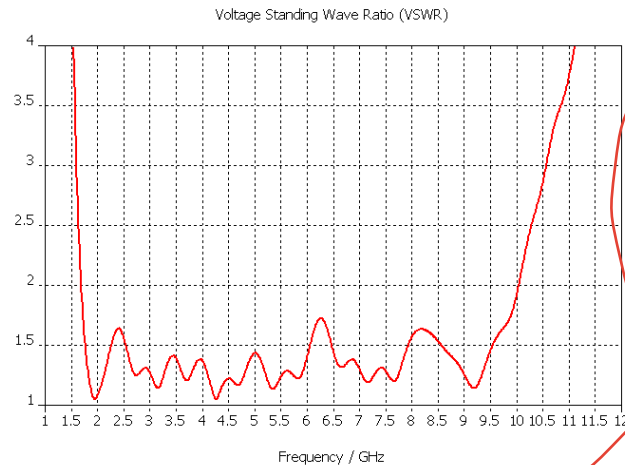
$$P_{irradiada} = \left[\frac{V_g}{Z_e} \right]^2 \cdot R_r$$

$$P_{erdidias} = \left[\frac{V_g}{Z_e} \right]^2 \cdot R_\Omega$$

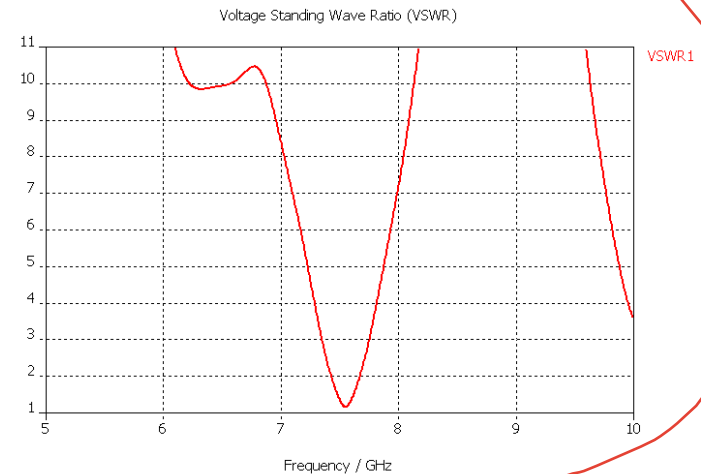
Radiación y Fundamentos de las Antenas

- 4) Determinación del ancho de banda (en frecuencia) en donde el radiador es útil. Esto implica conocer el comportamiento de la impedancia de entrada o del diagrama de irradiación, en función de la frecuencia.

Banda Ancha



Banda Angosta



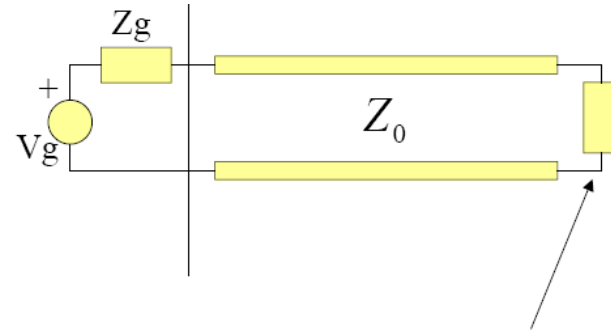
Radiación y Fundamentos de las Antenas

- 5) Determinación de la potencia disipada por pérdidas óhmicas en el sistema irradiante. Esto implica conocer el rendimiento del sistema de radiación.

$$P_{entregada} = I^2 R_r + I^2 R_{\Omega}$$

$$\eta = \frac{R_r}{R_r + R_{\Omega}}$$

$$P_{irradiada} = \iint_{sc} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

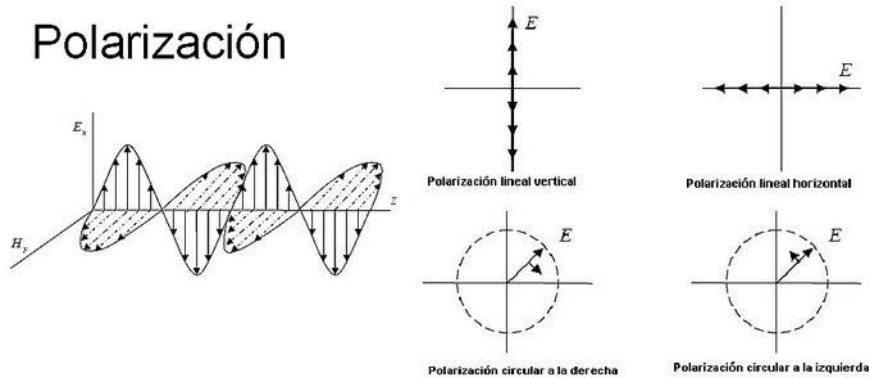


$$Z_a = R_a + jX_a = R_r + R_{\Omega} + jX_a$$

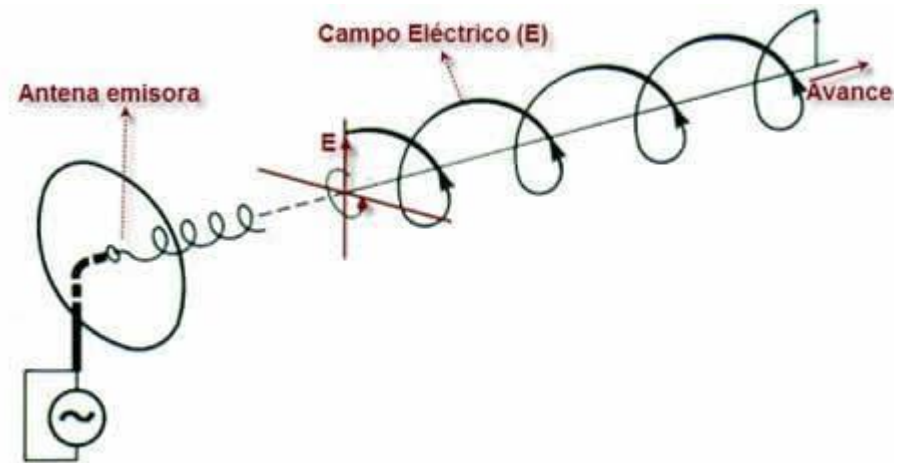
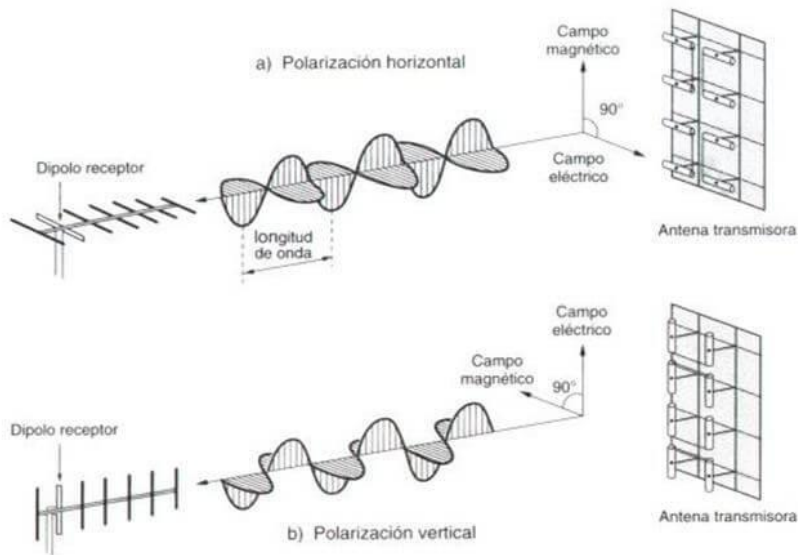
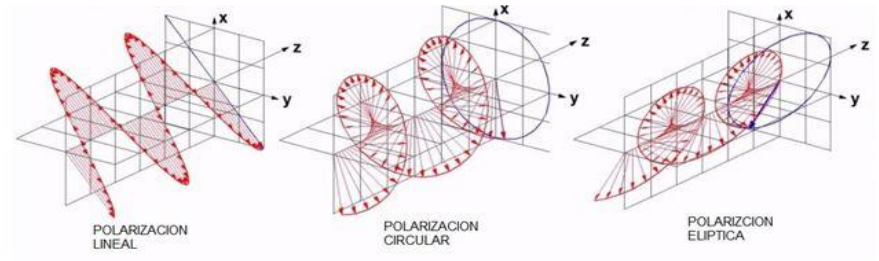
Radiación y Fundamentos de las Antenas

6) Polarización de la Antena. En que dirección se Orienta el Vector de Campo Eléctrico.

Polarización



TIPOS DE POLARIZACION

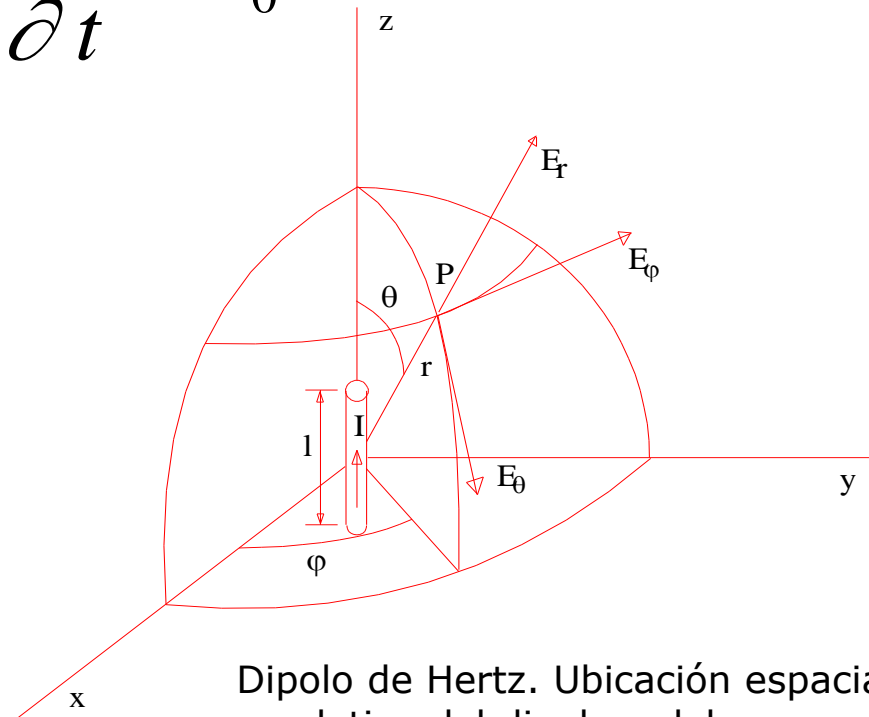
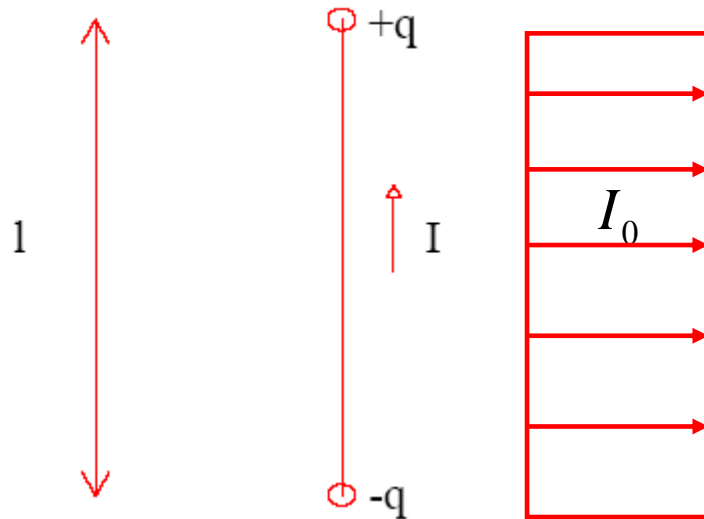


I_0 Constante en la antena

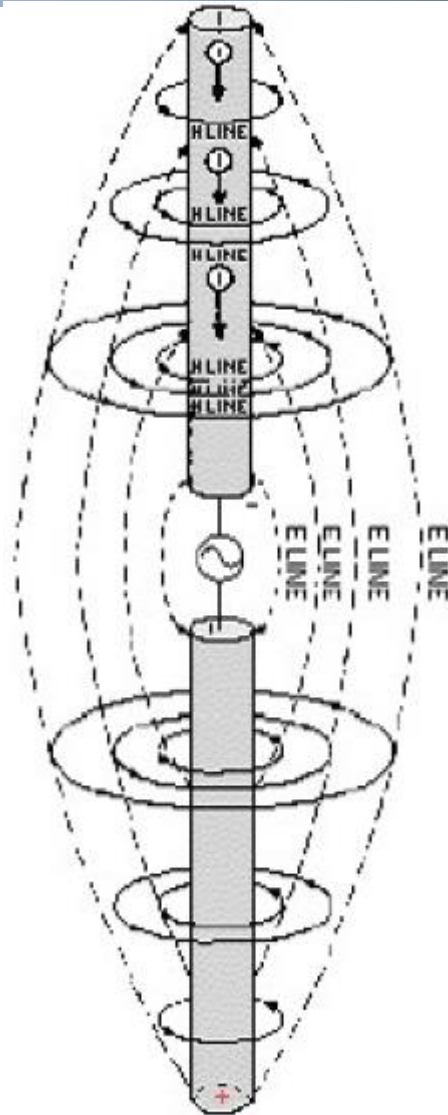
$$\left. \begin{array}{l} I_0 \cos(\omega t) \\ I_0 e^{j\omega t} \end{array} \right\} \text{Variación Armónica}$$

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t} = I_0 e^{j\omega t}$$

Diámetro despreciable
del conductor
 $d \ll l$.



Dipolo de Hertz. Ubicación espacial
relativa del dipolo y del campo
eléctrico en un punto.



Calculo de los Campos producidos por un Dipolo de Hertz

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I(t-r/v)}{4\pi r} \rightarrow$$

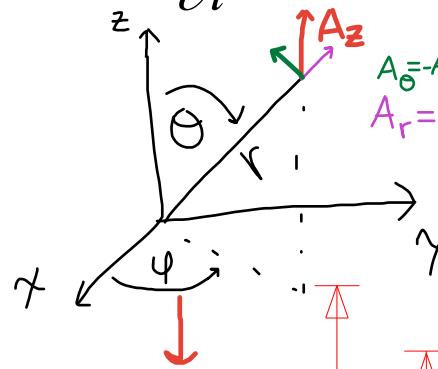
$$\phi = \int \frac{\rho(t-r/v)}{4\pi\epsilon r} dv$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dv$$

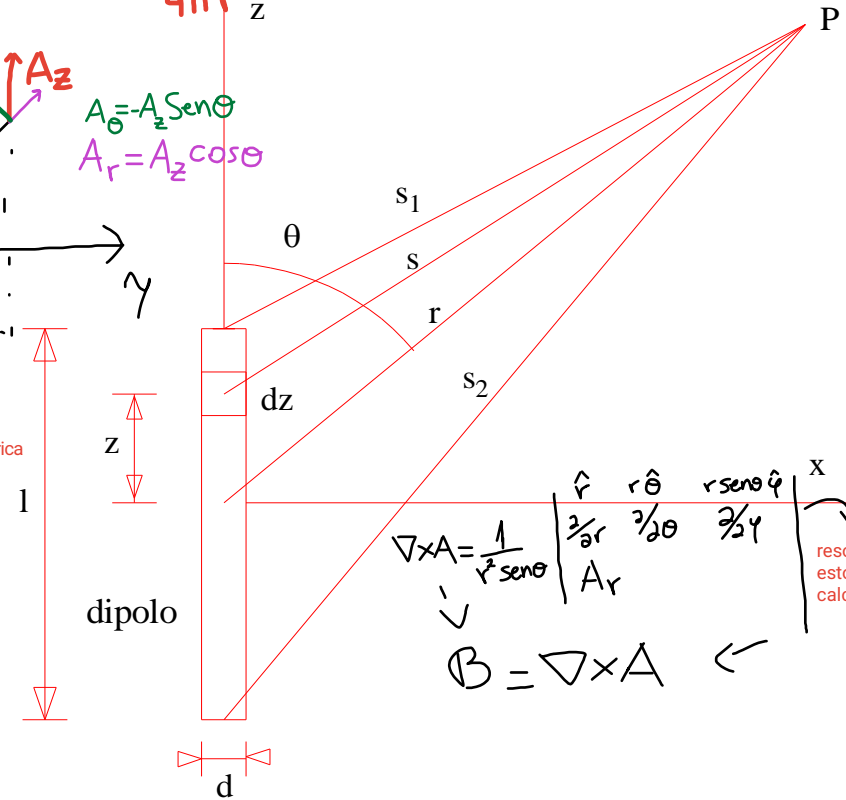
$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}(t-r/v)}{4\pi r} dv$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dv$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon j\omega\phi$$



se considera una simetría cilíndrica



$$A_\theta = A_z \sin\theta$$

$$A_r = A_z \cos\theta$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & A_\theta & A_\phi \end{vmatrix}$$

resolviendo esto se calcula el B

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Dipolo de Hertz. Contribución de un dz de corriente al campo en el punto P

$$dz \ll \lambda$$

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

$$d\mathbf{A} = \mu \frac{\mathbf{J}(t - r/v)}{4\pi r} dv = \mu \frac{I(t - r/v)}{4\pi r} d\mathbf{l}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dz$$

$$r \gg l \text{ y } l \ll \lambda$$

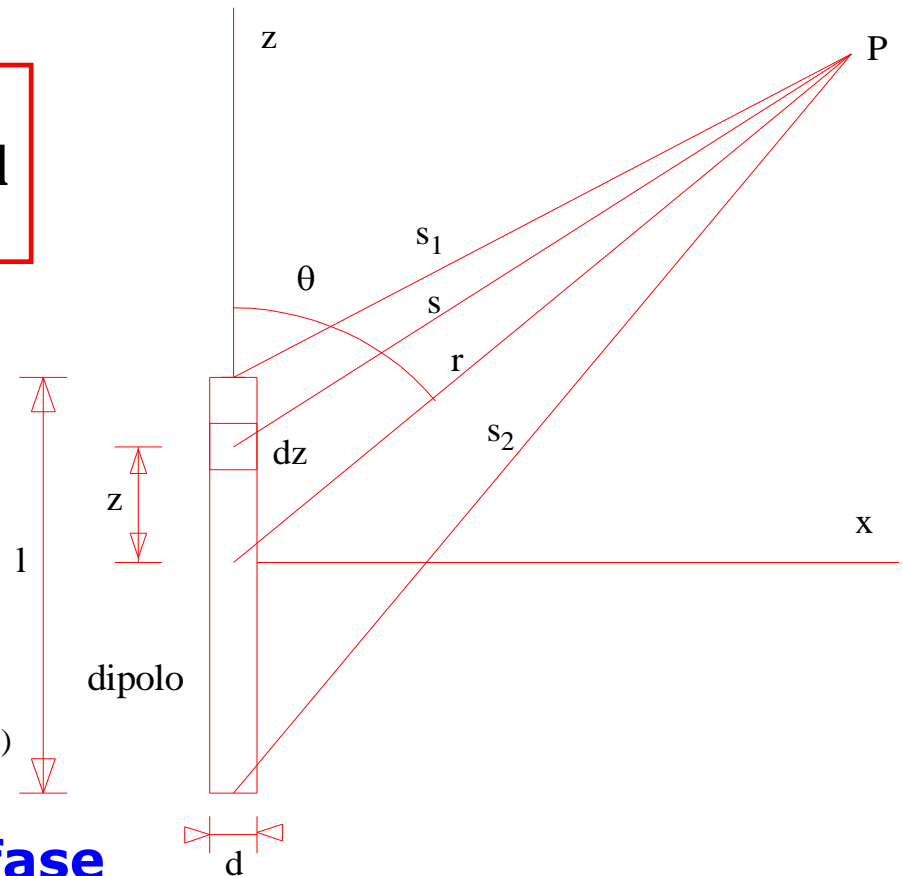
$$s_1 \approx s_2 \approx s \approx r$$

$$e^{j(\omega t - \beta s_1)} \approx e^{j(\omega t - \beta s_2)} \approx e^{j(\omega t - \beta s)} \approx e^{j(\omega t - \beta r)}$$

No hay diferencia de **amplitud** ni de **fase** de las contribuciones de cada **dz** de corriente

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{j\omega t} l}{r} e^{-j\beta r}$$

Dipolo de Hertz. Contribución de un dz de corriente al campo en el punto P



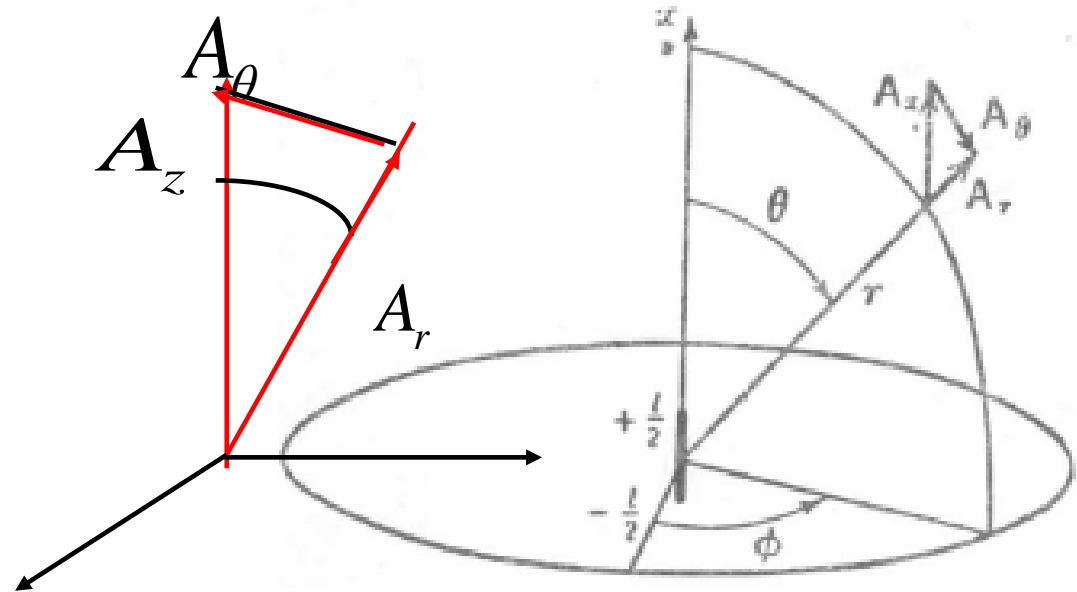
Campos producidos por un Dipolo de Hertz

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r}$$

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r}$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r}$$

$$A_\phi = 0$$



$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2 \cdot \sin(\theta)} & \frac{\mathbf{a}_\theta}{r \cdot \sin(\theta)} & \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r \cdot A_\theta & r \cdot \sin(\theta) \cdot A_\phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

$H_\theta = 0$
 $H_r = 0$

$$H_\phi = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta$$

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

También se puede calcular el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon j\omega\phi$$

$$\mathbf{E} = -\frac{j\omega}{\beta^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega \mathbf{A}$$

$$\phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{\mu\epsilon j\omega} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{A} j\omega}{\mu\epsilon\omega^2} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{A} j\omega}{\omega^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$$

$$\text{grad}(\nabla \mathbf{A}) = \mathbf{a}_r \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{A}}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla \mathbf{A}}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \nabla \mathbf{A}}{\partial \phi}$$

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos\theta$$

$$E_\theta = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin\theta$$

$$E_\phi = 0$$

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

- Por lo tanto, las componentes de campo eléctrico y magnético generadas por el dipolo de Hertz en un punto P del espacio son:

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega}{v r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin\theta$$

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos\theta$$

$$E_{\theta} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin\theta$$

son los terminos que sobreviven,
es la clave de estos calculos

Región cercana al dipolo, r es muy pequeño

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{r^2} \right] \sin\theta$$

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos\theta$$

$$E_{\theta} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin\theta$$

En el tiempo a 90 grados H y E, Vector Poynting medio=nulo . Ec. Campo Dipolo

Región lejana al dipolo, r grande

$$H_{\varphi} = \frac{j\omega I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi v r} e^{-j\beta r} \sin\theta$$

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta$$

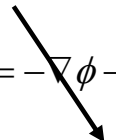
En el tiempo en fase H y E, Vector Poynting medio NO nulo

- **región lejana al dipolo (en donde r es muy grande)**

$$H_{\phi} = \frac{j\omega I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta \quad E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta$$

- **A distancias muy grandes del dipolo, cualquier porción de la onda esférica generada por el dipolo, puede ser considerada como una onda plana que se propaga en dirección radial, alejándose del dipolo. Las componentes de los campos eléctrico y magnético, E_{θ} y H_{ϕ} , están en fase temporalmente, dando como resultado un flujo promedio de energía activa, cual es el caso de una onda plana progresiva.**
- **Puede decirse que el campo lejano es generado por el campo cercano, mientras que el campo cercano es generado por las fuentes, cargas y corrientes.**

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

$$A_{\theta} = -\frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$


Campos producidos por un Dipolo de Hertz

$$\begin{aligned} E_r &= -\eta \frac{I_0 l \cos \theta}{\lambda r} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) \right] \\ E_\theta &= \eta \frac{I_0 l \sin \theta}{2\lambda r} \left[\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) - \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) \right] \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta}{2\lambda r} \left[\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right) \right] \end{aligned}$$

$$\lambda \gg r$$

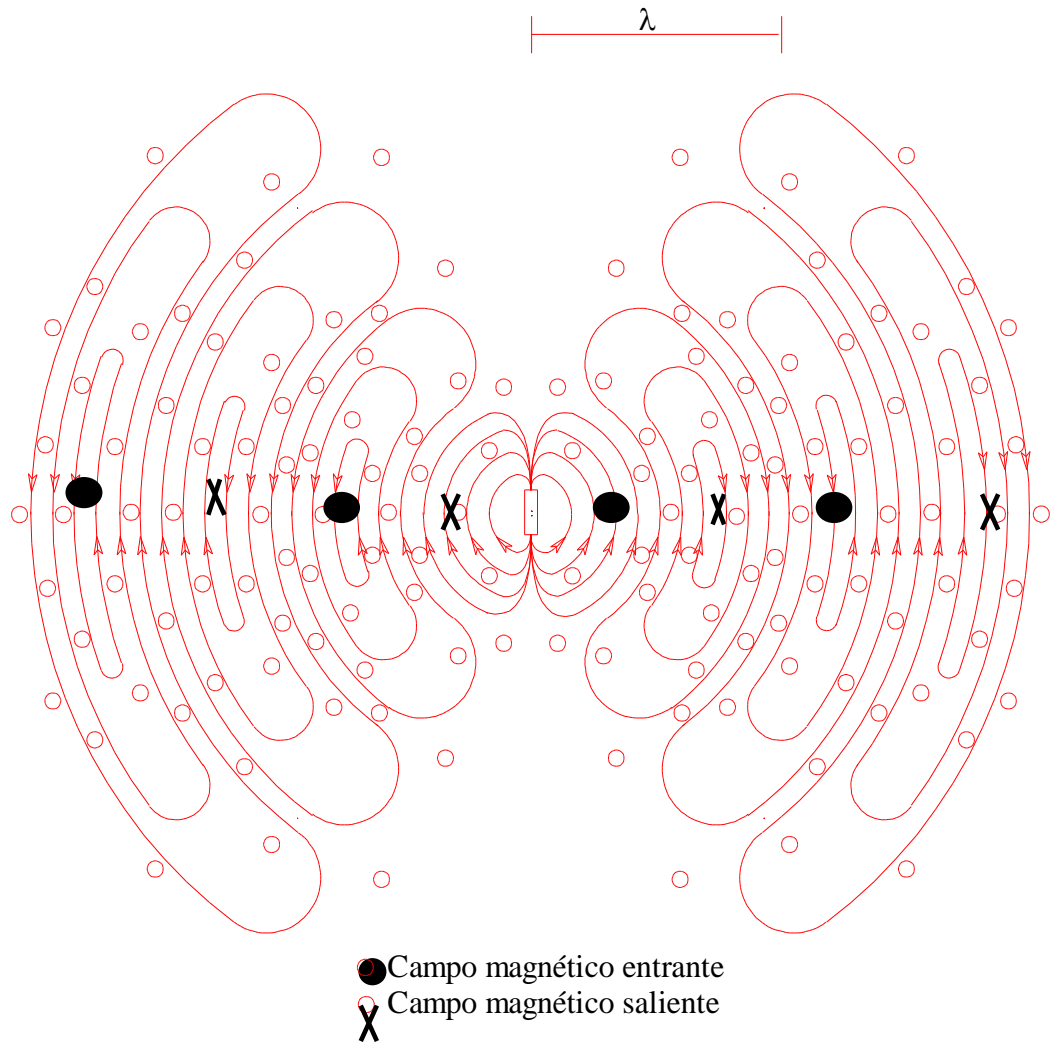
Campo Cercano

$$\lambda \ll r$$

Campo Lejano

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

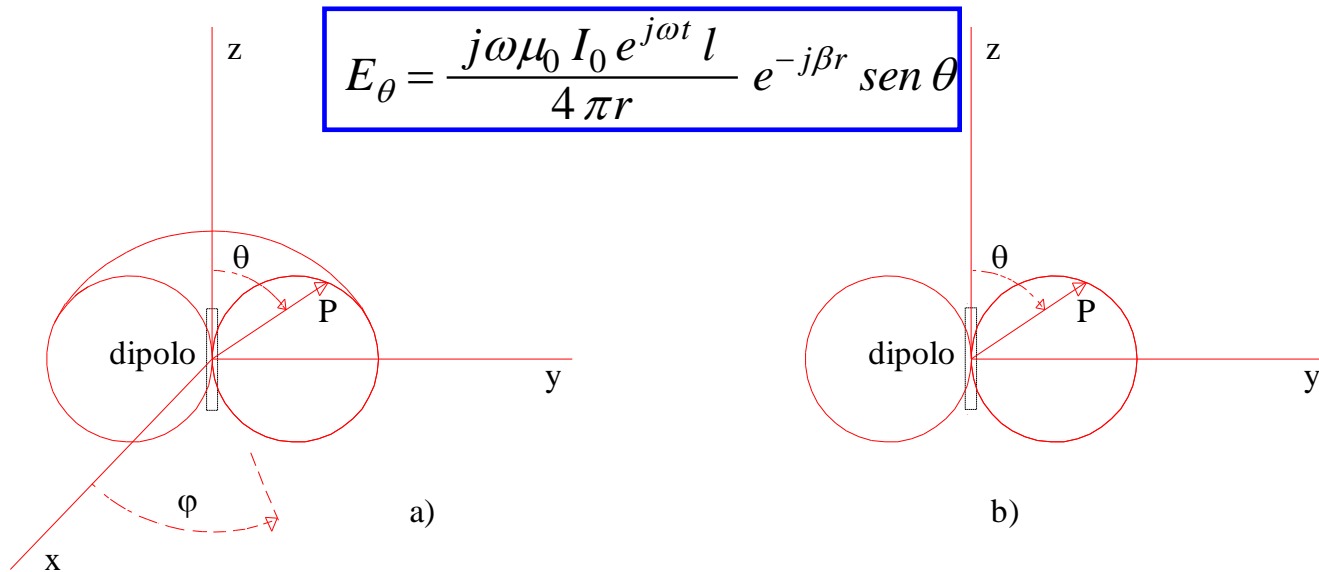
- **Onda esférica.**
- **Líneas de campo magnético son siempre circulares alrededor del eje del dipolo**
- **Líneas de campo eléctrico cercano terminan en los extremos del dipolo, en donde están las fuentes de divergencia, cargas**
- **Líneas de campo eléctrico lejano son cerradas, son debidas a una fuente rotacional (variación temporal del campo magnético).**



$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

- **Ambos campos lejanos son proporcionales al $\sin \theta$, esto significa que ambos son máximos cuando $\theta=90^\circ$ y mínimos cuando $\theta=0^\circ$ (en la dirección del eje del dipolo).**
- **En el diagrama de radiación del dipolo de Hertz, donde la magnitud del radiovector da cuenta de la intensidad del campo en esa dirección**



Diagramas de campo lejano del dipolo de Hertz (E_θ y H_ϕ).

a) Diagrama de campo tridimensional.

b) Diagrama de campo bidimensional.

Campos producidos por un Dipolo de Hertz

- **El vector de Poynting en esta región lejana es radial y en el sentido de la propagación de onda. El promedio temporal es el producto de los máximos/2 o valores eficaces.**

$$P_r = E_\theta \times H_\phi = \frac{\eta \beta^2 I_0^2 l^2}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \theta \quad [\text{W/m}^2] \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

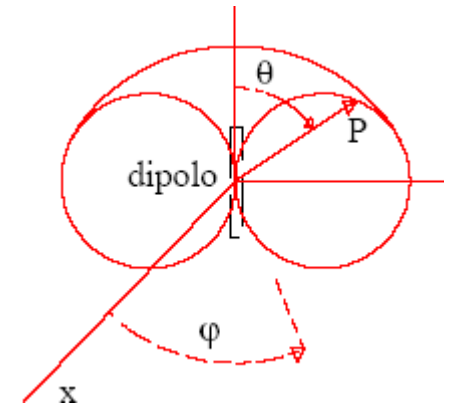
$$\beta = \frac{\omega}{v} =$$

$$W_{\text{promedio}} = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi P_r 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{\eta \beta^2 I_0^2 l^2}{16\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$ds = r.d\phi.r.\sin\theta.d\theta$$

$$W_{\text{promedio}} = \frac{\eta \pi I_0^2}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

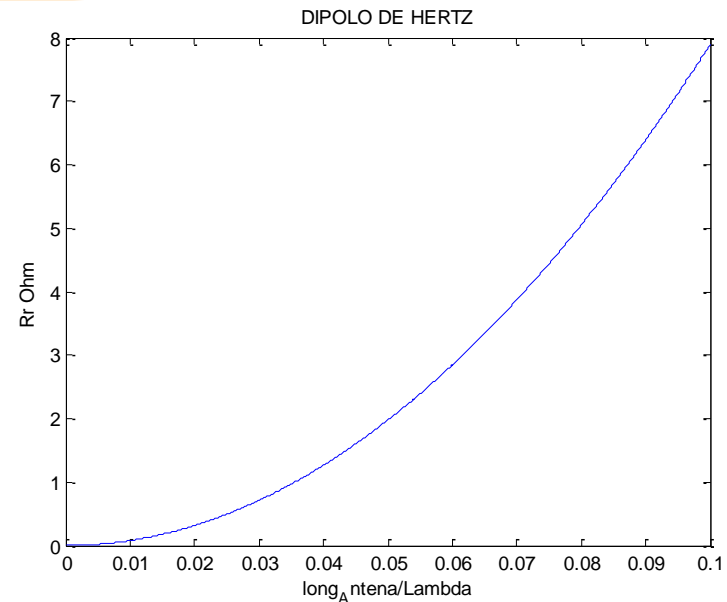
$$R_{\text{radiación}} = \frac{2W_{\text{promedio}}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad [\text{W}]$$



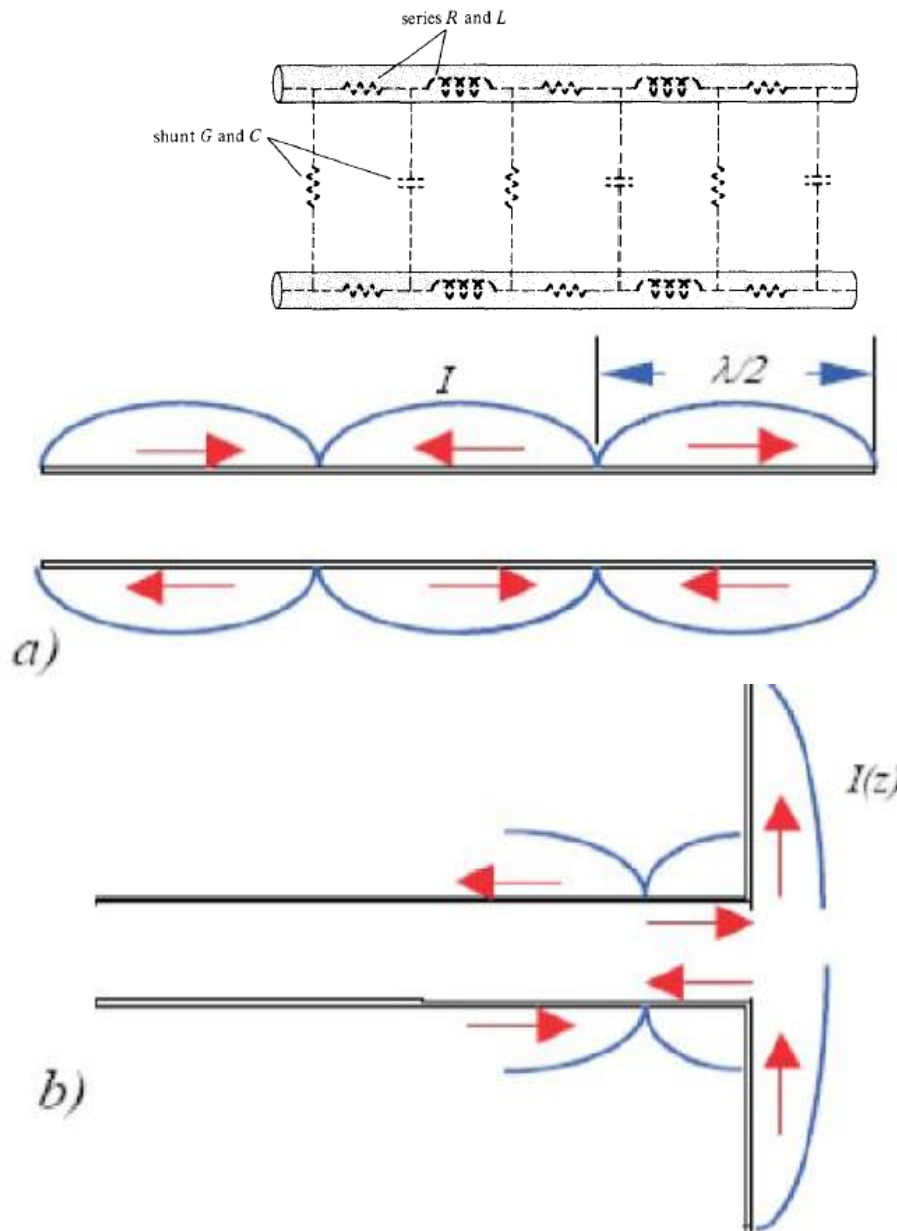
- Se puede definir la resistencia de radiación como aquella resistencia sobre la cual se disipa la potencia radiada, cuando sobre ella circula la misma corriente eficaz que ve el generador (o el valor máximo del diagrama, para el dipolo de Hertz esta corriente eficaz es constante en toda la longitud del mismo). O sea:

$$R_{\text{radiación}} = \frac{2W_{\text{promedio}}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

- A 300 kHz ($\lambda=1\text{km}$), un hilo de 100m es un dipolo de Hertz, $R_r=7.9 \Omega$
- Un conductor de 1m $R_r=7.9 \times 10^{-4} \Omega$.
 - La energía irradiada prácticamente es muy pequeña



Antenas de longitud finita

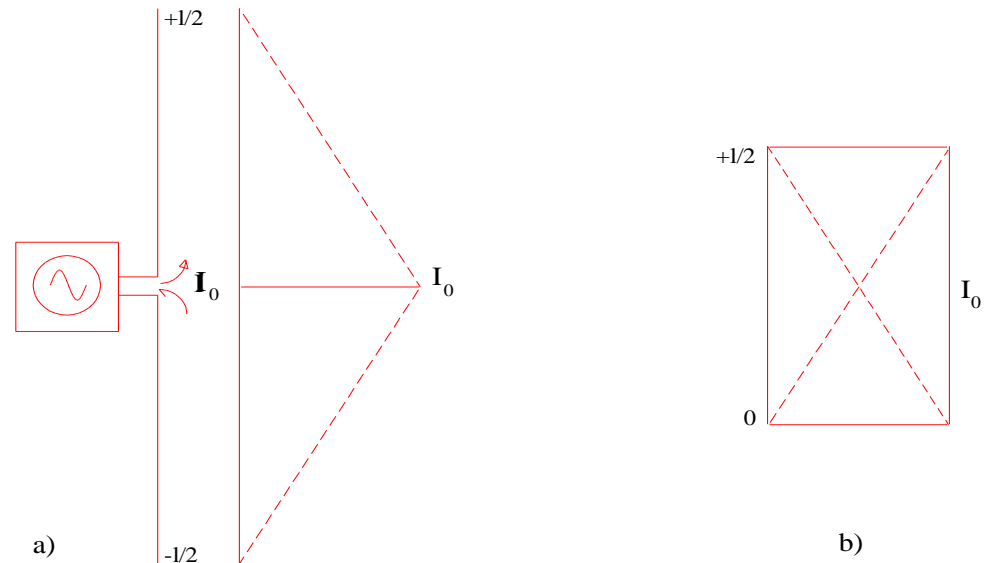


c) $I(z) = I$

d) $I(z) = I(1 - 2z/l)$

$I(z) = I(1 + 2z/l)$

Dado que la **longitud de la antena es muy corta respecto de la longitud de onda**, se pueden suponer despreciables las diferencias de fase debido a diferencias de camino recorrido, en las contribuciones de cada elemento diferencial de longitud.



$$dH_{\varphi} = \frac{j\omega e^{j\omega t} I(z).dz}{4\pi\nu r} e^{-j\beta r} \sin \theta$$

$$H_{\varphi} = \frac{j\omega e^{j\omega t}}{4\pi\nu r} e^{-j\beta r} \sin \theta . I_0 \left(\frac{1}{I_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} I(z).dz \right)$$

$$H_{\varphi} = \frac{j\omega e^{j\omega t} L_{ef} . I_0}{4\pi\nu r} e^{-j\beta r} \sin \theta .$$

Siendo **$l_e = L / 2$** , la *longitud efectiva* del dipolo, y **L** la longitud real del dipolo corto

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} L_{ef}}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta$$

Módulo?

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l/2}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta$$



Dipolo Corto

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta$$



Dipolo de Hertz

$$\frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l/2}{4\pi r} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l_e}{4\pi r}$$

Se compara el campo de Un dipolo de Hertz con el campo de la Antena en cuestión en la dirección del máximo para la misma corriente máxima eficaz I_0 , y se calcula la longitud efectiva

$$L_{ef} = \left(\frac{1}{I_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \cdot dz \right)$$

-
- Se puede definir la longitud efectiva de una antena lineal de longitud

$$L \ll \lambda$$

- Como la longitud de un dipolo de Hertz con distribución de corriente constante que produce el mismo campo EM en el espacio a partir de $r \gg L$

Por lo tanto la longitud efectiva de una antena lineal de longitud $L \ll$ longitud de onda con una distribución cualquiera de corriente $I(z)$ resulta

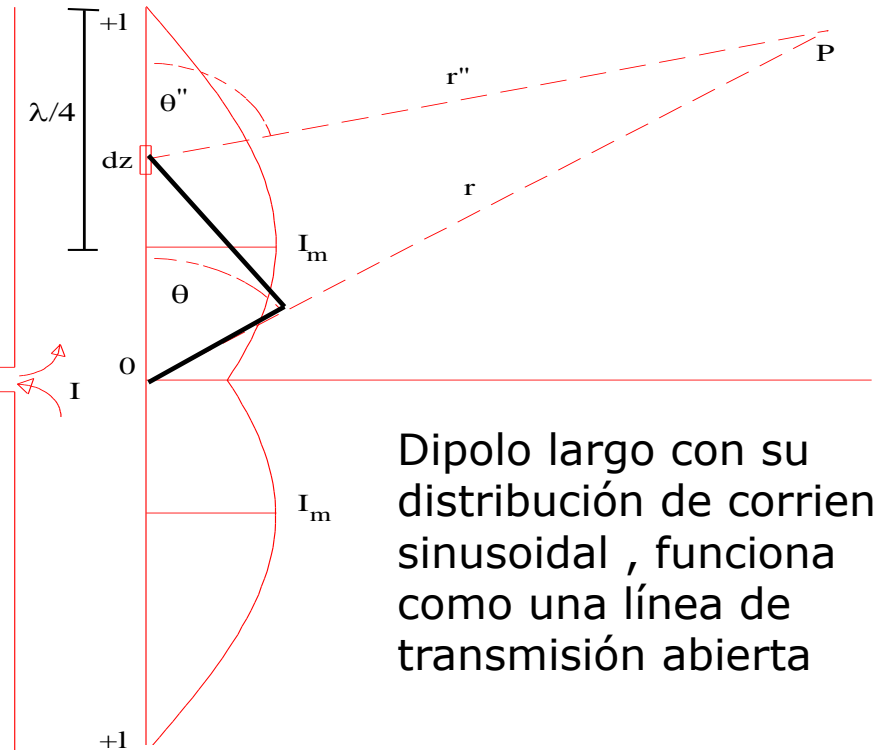
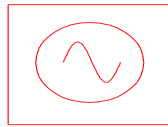
$$L_{ef} = \frac{1}{I_0} \int_{-L/2}^{L/2} I(z).dz$$

$$I = \begin{cases} I_m \sin[\beta(l - z)], & \text{para } z > 0 \\ I_m \sin[\beta(l + z)], & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

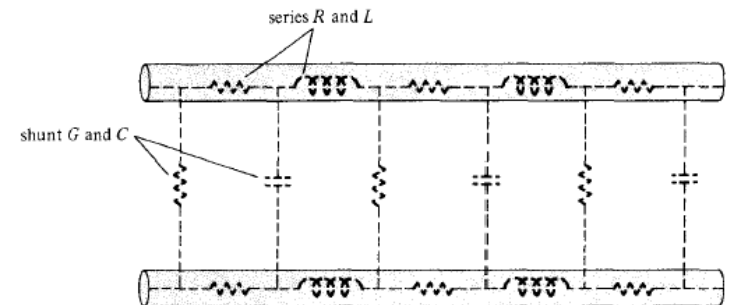
$$dE_\theta = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t} dz}{4\pi r''} e^{-j\beta r''} \sin\theta'$$

$$r'' = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos\theta} \cong r - z \cos\theta$$

$$r'' \cong r \quad \theta' \cong \theta$$



Dipolo largo con su distribución de corriente sinusoidal, funciona como una línea de transmisión abierta



Ambas distancias son lo suficientemente grandes de modo que la pequeña diferencia entre ellas solo afecta la fase y no la magnitud

$$E_{\theta} = \int_{-l}^{+l} dE_{\theta} = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t}}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta e^{-j\beta r} \left\{ \int_{-l}^0 e^{j\beta z \cos\theta} \operatorname{sen}[\beta(l+z)] dz + \int_0^l e^{j\beta z \cos\theta} \operatorname{sen}[\beta(l-z)] dz \right\}$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx+c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen}(bx+c) - b \cos(bx+c)]$$

$$E_{\theta} = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t}}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta e^{-j\beta r} \left\{ \frac{2}{\beta \operatorname{sen}^2 \theta} [\cos(\beta l \cos\theta) - \cos(\beta l)] \right\}$$

$$E_{\theta} = \frac{j\eta I_0 e^{j\omega t}}{2\pi r} e^{-j\beta r} \left[\frac{\cos(\beta l \cos\theta) - \cos(\beta l)}{\operatorname{sen}\theta} \right]$$

$$H_{\varphi} = \frac{1}{\eta} E_{\theta}$$

$$P_r = \frac{1}{2} |E_{\theta}| |H_{\varphi}| = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\beta l \cos\theta) - \cos(\beta l)}{\operatorname{sen}\theta} \right]^2$$

La potencia deberá ser calculada integrando la potencia promedio por unidad de área, o vector de Poynting, sobre una superficie que encierre al radiador

$$W = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi P_r 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{\eta I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(\beta l \cos\theta) - \cos(\beta l)]^2}{\sin\theta} d\theta$$

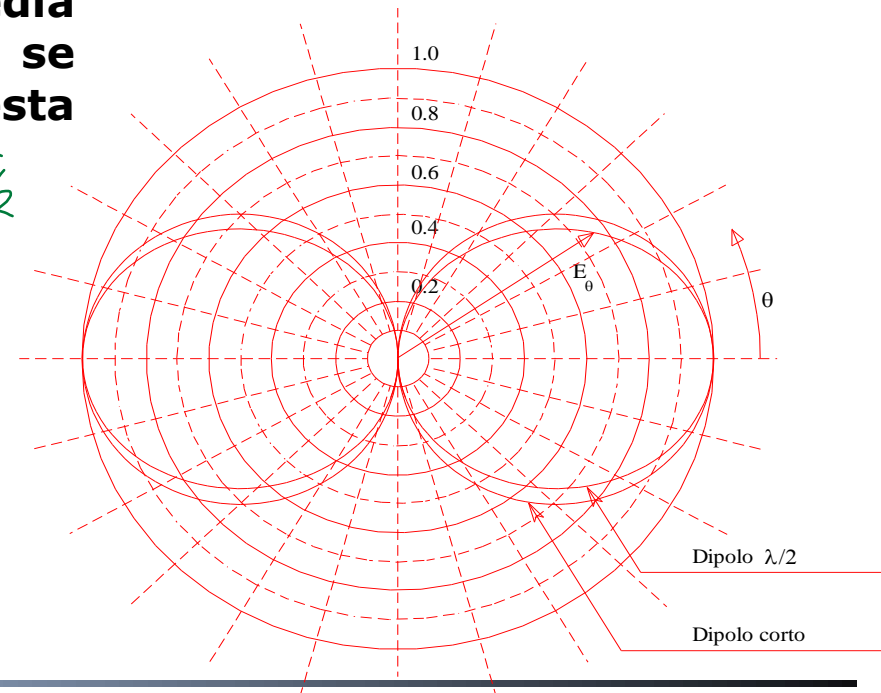
$$R_{\text{radiación}} = \frac{2W}{I_0^2} = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(\beta l \cos\theta) - \cos\beta l]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Para el caso de un dipolo de media longitud de onda, para el cual $l = \lambda/4$, se obtiene el siguiente valor para esta resistencia:

$$R_{\text{radiación}} = 73.09 \text{ } [\Omega]$$

(λ/2)

$$E_\theta = \frac{j\eta I_0 e^{j\omega t}}{2\pi r} e^{-j\beta r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$



- **LONGITUD EFECTIVA** para una antena de $\lambda/2$, para un plano normal a la antena, $\theta = 90^\circ$
- **No Hay diferencia de camino recorrido**

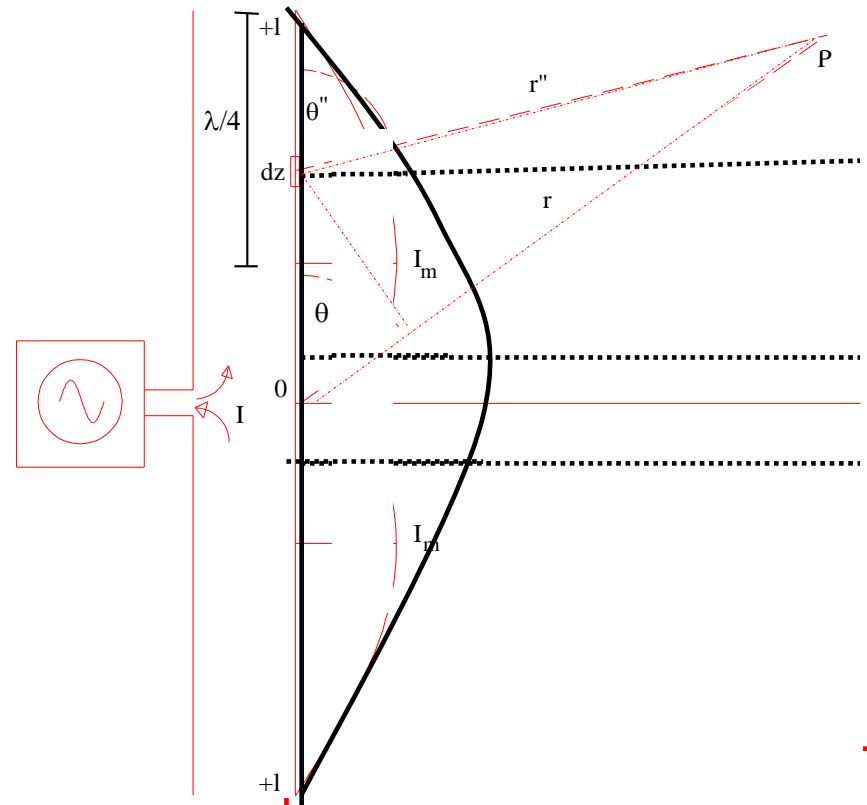
$$r - z \cos \theta = r' \quad I(z) = I_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$$

$$dH_\varphi = \frac{j\omega e^{j\omega t} I(z) \cdot dz}{4\pi v r} e^{-j\beta r}$$

$$dE_\theta = \frac{j\omega\mu_0 e^{j\omega t} I(z) \cdot dz}{4\pi r} e^{-j\beta r}$$

$$H_\varphi = \frac{j\omega e^{j\omega t}}{4\pi v r} e^{-j\beta r} I_0 \left(\frac{1}{I_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \cdot dz \right)$$

$$L_{ef} = \frac{1}{I_0} \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \cdot dz = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{2L}{\pi}$$




$$L_{ef} = 0.637 \lambda L_{real}$$

DIRECTIVIDAD:

La relación entre la potencia de un radiador isotrópico, para producir una dada intensidad de campo eléctrico en la dirección deseada y a una distancia determinada, y la potencia de la antena en cuestión para lograr el mismo objetivo

$$D = \frac{4\pi r^2 P_{r\max}}{W} = \frac{P_{r\max}}{W / 4\pi r^2}$$

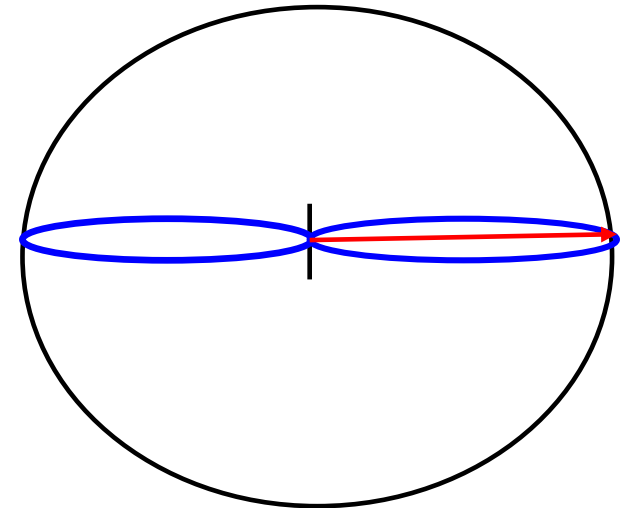
vector de Poynting  *También*

Por ejemplo, para el dipolo de media longitud de onda, en la dirección $\theta = \pi/2$, la directividad será

$$D = 4\pi r^2 \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \frac{2}{73.09 I_0^2} \approx 1.64$$

Mientras que para el dipolo de Hertz será:

$$D = 4\pi r^2 \frac{\eta I_0^2 l^2}{8 r^2 \lambda^2} \frac{3 \lambda^2}{\eta \pi I_0^2 l^2} = \frac{3}{2}$$



GANANCIA= Directividad xrendimiento