Práctica 6: Compensación

Control I

Ejercicio 5:

Sea el sistema de control a lazo cerrado con:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0{,}5)} \qquad H(s) = 1$$

Se desea que la relación de amortiguamiento de los polos dominantes del sistema sea igual a 0.5 y que $\omega_n = 5$ rad/seg, cumpliendo también con $K_v = 80$/seg. Diseñar un compensador que cumpla con estas especificaciones.

Resolución:

El enunciado nos indica que debemos cumplir con las siguientes especificiaciones:

- Respuesta de polos dominantes con $\xi = 0{,}5$ y $\omega_n = 5$. Por lo tanto, la ubicación de los polos dominantes corresponde a $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -5/2 \pm j5\sqrt{3}/2$.
- Un error de estado estacionario a la rampa constante, e igual a $e_{ss} = 1/K_v = 1/80$.

Siguiendo el procedimiento para realizar la compensación, el primer paso consiste en agregar la cantidad de polos en el origen que sean necesarios para cumplir con las especificaciones. En este caso, como el error a la rampa es constante, el error de estado estacionario al escalón debe ser 0. Para ello, el producto CGH debe tener un polo en el origen. Como la planta $G(s)$ ya posee un polo allí, no hace falta agregar ningún integrador.
Luego, se continua la compensación asegurando la ubicación de los polos dominantes del sistema de lazo cerrado. Si graficamos el lugar de raíces del sistema sin compensador, vemos que los puntos donde se quieren ubicar los polos dominantes no pertenecen a él. Por lo tanto, se debe agregar un compensador para ubicar los polos.

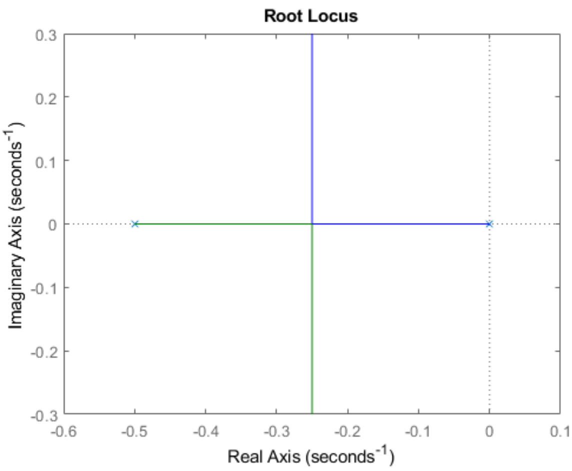

Figura 1: Lugar de raíces de GH

Para que los polos dominantes deseados pertenezcan al lugar de raíces, deben cumplirse las condiciones de fase y de módulo. Es decir que:

$$-\phi_1 - \phi_2 + \phi_{C_1} = -180°$$

Donde $\phi_1 = 180° - tan^{-1}(\frac{5\sqrt{3}/2}{5/2}) = 120°, \phi_2 = 180° - tan^{-1}(\frac{5\sqrt{3}/2}{5/2-1/2}) = 114{,}8°$. Por lo tanto: $\phi_{C_1} = 54{,}8°$. Este aporte de fase puede ser obtenido con un compensador de la forma:

$$C_1(s) = \frac{K_c(s - z_{c1})}{(s - p_{c1})}$$

Donde, por simplicidad de cálculos, se propone que el cero del compensador cancele al polo de la planta ubicado en $s = -0{,}5$.

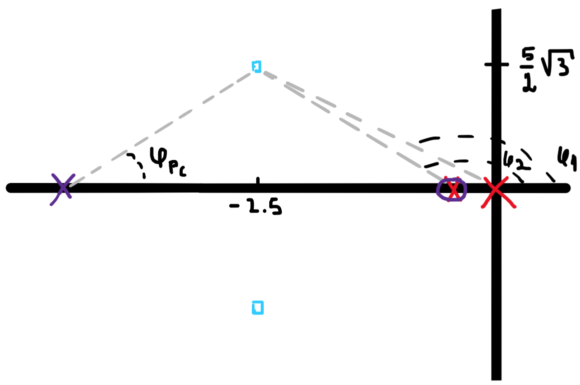

Figura 2: Diagrama cero-polar de la planta con el compensador propuesto

Con esta configuración, la condición de fase queda:

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_{p_{c1}} + \phi_{z_{c1}} = -180°$$

Donde $\phi_2 = \phi_{z_{c1}}$, por lo tanto cancelan su aporte de fase. Luego:

$$\phi_1 = 120°, \quad \longrightarrow \phi_{p_{c1}} = 60°$$

Conociendo los aportes de fases de las singularidades del compensador, se puede calcular su ubicación en el eje real:

$$z_{c1} = -0{,}5, \quad tan(60°) = \frac{5\sqrt{3}/2}{p_{c1} - 5/2} \longrightarrow p_{c1} = -5$$

Luego, queda calcular la ganancia K_c del compensador, sabiendo que debe cumplirse la condición de módulo:

$$|\frac{K_c L_{z_{c1}}}{L_1 L_2 L_{p_{c1}}}| = 1$$

Donde nuevamente, el polo de la planta en 0.5 y el cero del compensador cancelan su aporte de módulo. Por lo tanto:

$$L_1 = \sqrt{(5\sqrt{3}/2)^2 + (5/2)^2} = 5, \quad L_{p_{c1}} = \sqrt{(5\sqrt{3}/2)^2 + (5 - 5/2)^2} = 5$$

Entonces:

$$|\frac{4K_c L_{z_{c1}}}{L_1 L_2 L_{p_{c1}}}| = 1, \longrightarrow K_c = 25/4$$

De acuerdo a lo calculado, el compensador que ubica los polos dominantes del sistema en el lugar deseado es:

$$C_1(s) = \frac{25/4(s+0{,}5)}{(s+5)}$$

Para la segunda especificación, se requiere que el error de estado estacionario a la rampa sea $e_{ss} = 1/K_v = 1/80$. Para esto, se agregará un segundo compensador de la forma:

$$C_2(s) = \frac{(s-z_{c2})}{(s-p_{c2})}$$

Se puede obtener K_v para el sistema con ambos compensadores con la siguiente expresión:

$$K_v = lim_{s->0} \quad sCGH = \frac{s4K_c(s-z_{c1})(s-z_{c2})}{s(s+0{,}5)(s-z_{c1})(s-z_{c2})},$$

igualando la expresión al valor que solicita el enunciado, resulta:

$$K_v = \frac{4 * \frac{25}{4}(0{,}5)(-z_{c2})}{0{,}5 * 5(-p_{c2})} = 80,$$

de donde se obtiene:

$$\frac{z_{c2}}{p_{c2}} = 16$$

Para lograr esta relación cero-polo del segundo compensador afectando mínimamente la ubicación de los polos dominantes, es conveniente que las singularidades del segundo compensador estén lo más cerca posible entre sí. De esta forma, se puede elegir $p_{c2} = -0{,}01$ y a partir de la relación encontrada, resulta $z_{c2} = -0{,}16$.
Con esta selección, se obtiene el siguiente lugar de raíces:

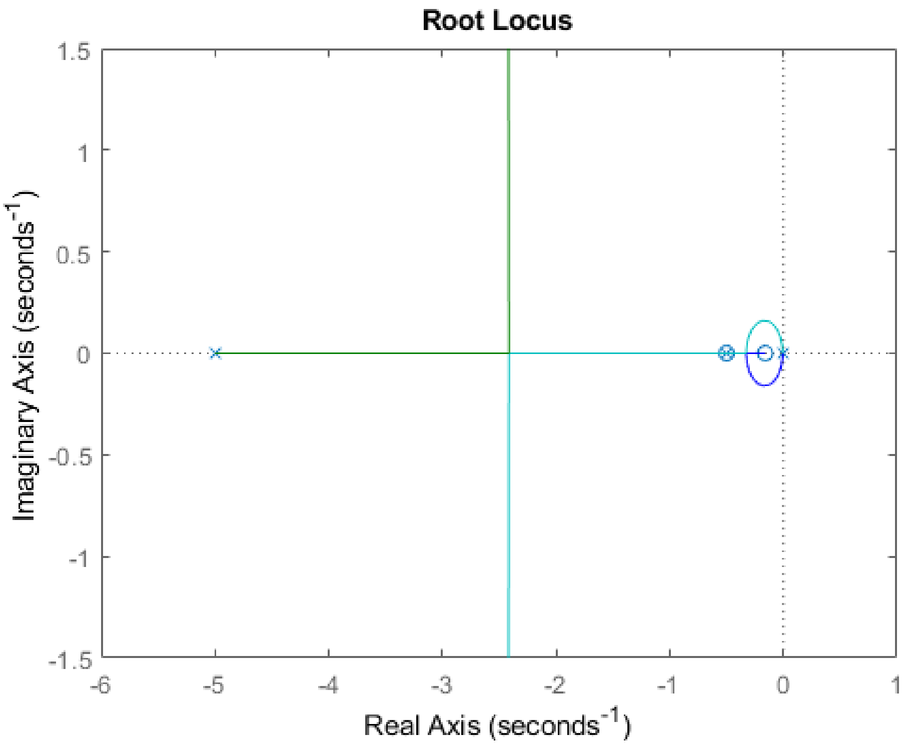

Figura 3: Lugar de raíces final de la planta con el compensador propuesto

Los polos dominantes de lazo cerrado quedan en: $p_1 = -2{,}4225 + j4{,}2874, p_2 = -2{,}4225 - j4{,}2874$
Si se compara la respuesta del sistema compensado con la de un sistema de segundo orden con el amortiguamiento y ω_n especificadas, resulta:

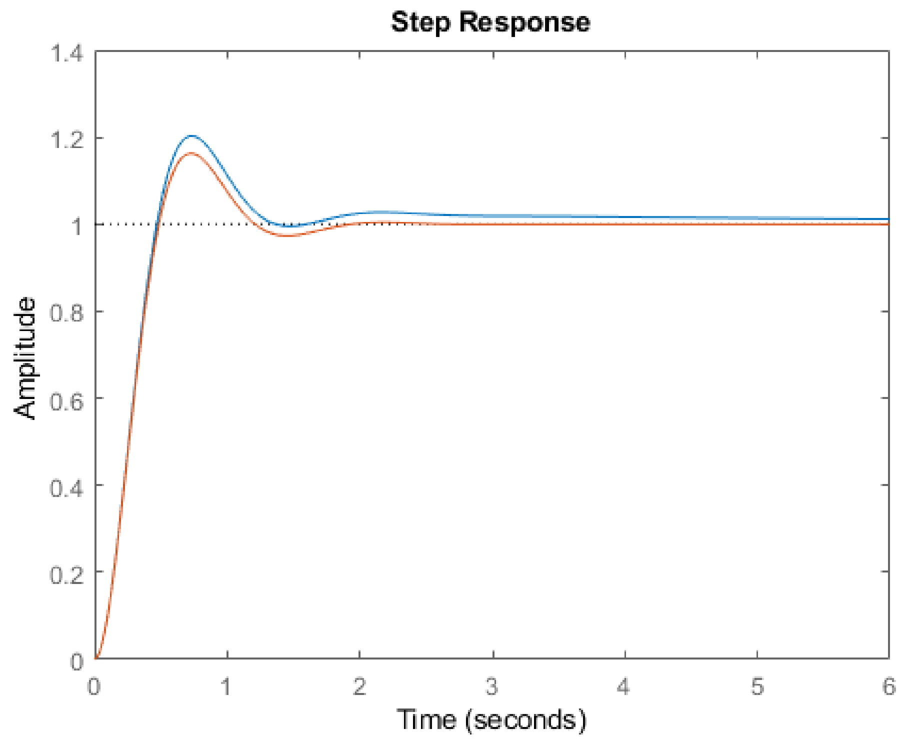

Figura 4: Respuesta al escalón del sistema compensado.

Cabe aclarar que si se hubieran elegido las singularidades de $C_2(s)$ aún más cercanas entre sí, la respuesta del sistema compensado sería más parecida a la especificación. Por ejemplo, eligiendo $p_{c2} = -0{,}001$ y $z_{c2} = -0{,}016$ se obtiene el siguiente lugar de raíces:

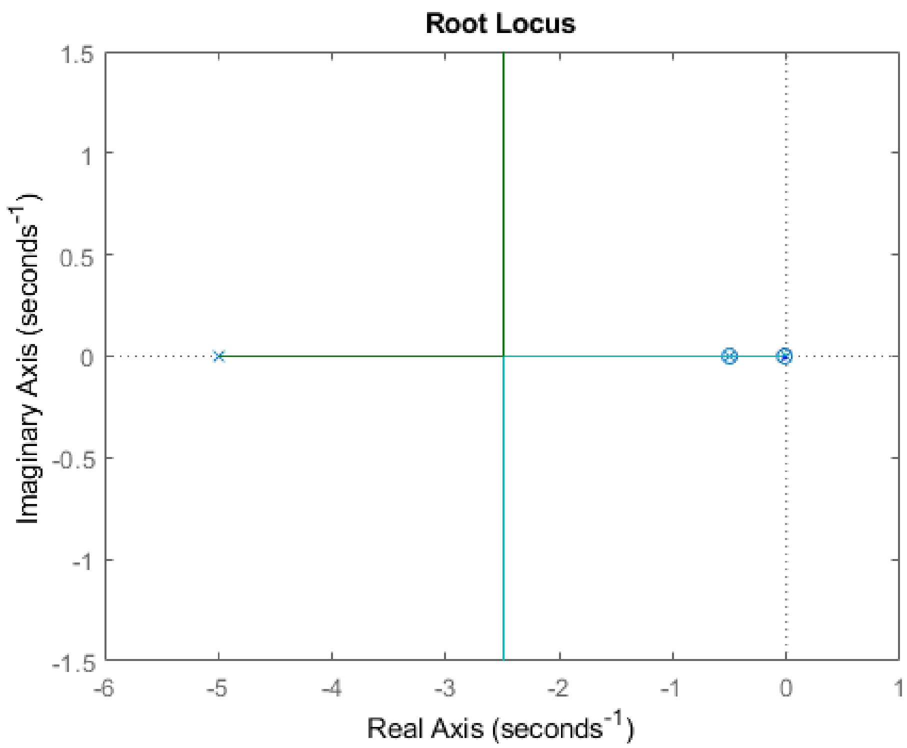

Figura 5: Lugar de raíces final de la planta con el compensador propuesto

Los polos dominantes de lazo cerrado quedan en: $p_1 = -2{,}4925 + j4{,}3258$, $p_2 = -2{,}4925 - j4{,}3258$

Comparando nuevamente la respuesta del sistema compensado con la de un sistema de segundo orden con el amortiguamiento y ω_n especificados, se obtiene:

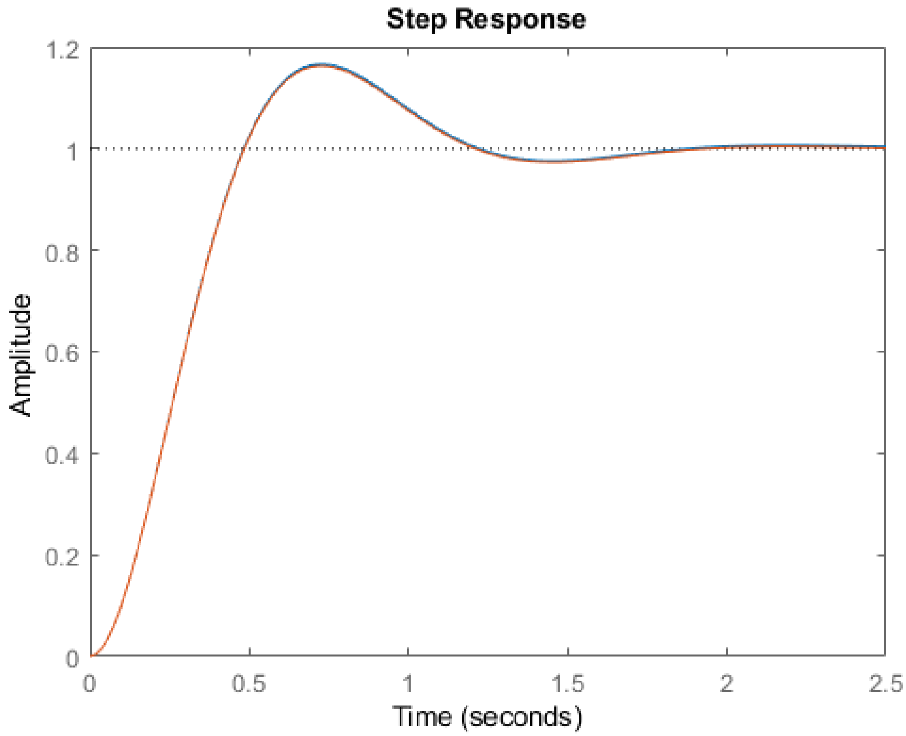

Figura 6: Respuesta al escalón del sistema compensado.