Práctica 4: Estabilidad: Routh y Lugar de Raíces

Control I

Estabilidad por el criterio de Routh

Ejercicio 1:

Considerar la ecuación característica correspondiente a un sistema de tercer orden:

$$s^3 + (2+k)s^2 + (5-2k)s + 5k = 0. \tag{1}$$

(a) Determinar el rango de estabilidad del sistema utilizando el criterio de Routh.

(b) Evaluar qué sucede para $k = -1 + \sqrt{6}$ utilizando la tabulación de Routh.

Resolución:

(a) Se determina la tabulación de Routh:

s^3	1	5 - 2k
s^2	2 + k	5k
s^1	A	0
s^0	5k	0

donde

$$A = \frac{(2+k)(5-2k) - 5k}{2+k}, \tag{2}$$

$$A = \frac{-2k^2 - 4k + 10}{2+k}. \tag{3}$$

Para que las raíces de la ecuación característica se mantengan en el semiplano izquierdo, es necesario que todos los coeficientes de la primera columna sean positivos. De la fila correspondiente a s^2 se obtiene la primera condición que debe cumplirse para que eso suceda:

$$2 + k > 0, \tag{4}$$

$$k > -2. \tag{5}$$

De la fila s^1 se obtiene $A > 0$, que resulta en:

$$-2k^2 - 4k + 10 > 0, \tag{6}$$

es decir,

$$-3{,}4495 < k < 1{,}4495. \tag{7}$$

De la última fila se ve directamente que

$$k > 0. \tag{8}$$

Finalmente, el rango de ganancia en el que el sistema se mantendrá estable resulta:

$$0 < k < 1{,}4495 \tag{9}$$

(b) Al reemplazar $k = -1 + \sqrt{6}(\approx 1{,}4495)$, los coeficientes de la fila correspondiente a s^1 son ceros, por lo que se debe proceder a utilizar como ecuación auxiliar la formada con la fila anterior (en este caso, la correspondiente a s^2) y derivarla, para obtener los coeficientes que reemplazarán la fila de ceros:

$$A(s) = (1+\sqrt{6})s^2 + 5(-1+\sqrt{6}), \tag{10}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 2(1+\sqrt{6})s, \tag{11}$$

La parte restante de la tabulación de Routh una vez reemplazada la fila de ceros, será:

s^1	6.89	0
s^0	7.25	0

Al resultar los coeficientes positivos, el sistema no tiene raíces en el semiplano derecho, es decir que debe tener un par de raíces en el eje imaginario, que se pueden obtener a partir de la ecuación auxiliar A(s) = 0, y están ubicadas en $s = \pm j1{,}4495$.

Ejercicio 2:

Analizar cuántas raíces tiene la ecuación característica $s^4+6s^3-4s^2-54s-45 = 0$ en el semiplano derecho mediante Routh.

Resolución:

Se observa que hay coeficientes negativos y positivos, es decir que de antemano se sabe que al menos una raíz tiene parte Real positiva. Estudiando la cantidad de cambios de signo que resulten en la primera columna de la tabulación de Routh, sabremos cuántas raíces se encuentran en el semiplano derecho:

s^4	1	-4	-45
s^3	6	-54	0
s^2	5	-45	0
s^1	0	0	0

Al aparecer una fila de ceros, se debe proceder a generar la ecuación auxiliar con la fila de s^2: $A(s) = 5s^2 - 45$, y derivarla para obtener los coeficientes de la fila de s^1:

$$\frac{dA(s)}{ds} = 10s, \tag{12}$$

de esta forma, se completa la tabulación de Routh:

s^1	10	0	0
s^0	-45	0	0

se observa que aparece un coeficiente negativo en la última fila, es decir que hubo sólo un cambio de signo y una de las raíces de la ecuación característica será positiva. Se obtiene dicha raíz de la ecuación auxiliar, $A(s) = 5s^2 - 45 = 0$, equivalente a $s^2 - 9 = 0$, cuyas raíces se encuentran en $s = \pm 3$. Las raíces restantes deben encontrarse en el semiplano izquierdo, verificando con Matlab se obtienen $s = -1$ y $s = -5$. Es el caso de raíces reales diametralmente opuestas respecto del origen.

```
p = [4 6 -4 -54 -45];
% define el polinomio p(s) = s^4 + 6s^3-4s^2-54s-45

roots(p) % obtiene las raices de la ecuacion caracteristica p(s) = 0
```

Estabilidad mediante Lugar de Raíces

Determinar el diagrama de LR y el rango de ganancia de estabilidad de los siguientes sistemas implementados bajo la estructura de realimentación negativa habitual:

(a) $G(s) = \frac{-2{,}5K(1-0{,}2s)}{s(1+0{,}5s)} \quad H(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)}$

(b) $G(s) = \frac{0{,}5K(5-s)}{s(1+0{,}5s)} \quad H(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)}$

Resolución:

(a) Para realizar el diagrama de LR es fundamental llevar el sistema a la forma de LR, es decir:

$$G(s)H(s) = \frac{\pm K(s \pm z_1)(s \pm z_2)...}{(s \pm p_1)(s \pm p_2)...} \tag{13}$$

donde los polos y ceros de $G(s)H(s)$ pueden ser reales o estar en pares complejos conjugados y $K \geq 0$.
En este caso, se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{-2{,}5K(1-0{,}2s)}{s(1+0{,}5s)(s^2+2s+5)} \tag{14}$$

operando en pos de llegar a la forma de LR, resulta:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s-5)}{s(s+2)(s^2+2s+5)}. \tag{15}$$

Es importante observar que al expresar $G(s)H(s)$ en la forma de LR, la expresión que se obtuvo tiene signo positivo delante de la K. Esto quiere decir que el sistema se encuentra bajo **realimentaión negativa** y el análisis deberá realizarse con las reglas habituales.
Se puede ver además que el sistema tiene un cero de no mínima fase en $s = 5$, un polo en el origen, otro en $s = -2$ y un par de complejos conjugados en $s = -1 \pm j2$.

Para trazar el lugar de raíces, luego de haber expresado $G(s)H(s)$ en la forma de LR, se procede a marcar en el plano complejo los polos y ceros de lazo abierto, resultando un diagrama como el que se muestra en la Fig. 1.

Se repasarán las reglas para la construcción del diagrama de LR con realimentación negativa a medida que se realiza para este caso.

K = 0 y K = ∞.
Los puntos correspondientes a K = 0 en el LR son los polos de $G(s)H(s)$.
Los puntos correspondientes a K = $\pm\infty$ en el LR son los ceros de $G(s)H(s)$.
Los polos y ceros a los que se refieren las afirmaciones anteriores incluyen los que se encuentran en $s = \pm\infty$.

Número de ramas del LR.
El número de ramas del LR será igual al orden del polinomio determinado por la ecuación característica, es decír, igual al número de polos de $G(s)H(s)$. En este caso serán 4 ramas.

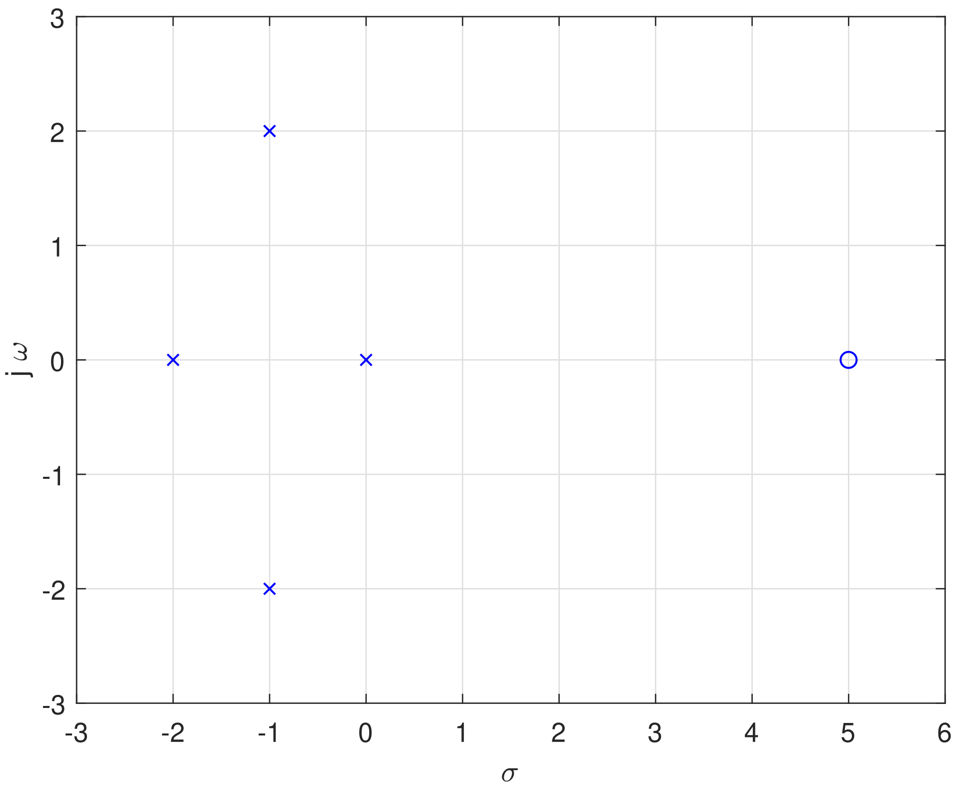

Figura 1: Polos y ceros de G(s)H(s)

Asíntotas.
Cuando el número de polos de $G(s)H(s)$ (n) es distinto del número de ceros (m), el LR de algunos polos irá hacia $\pm\infty$ a medida que $K- > \infty$. Este comportamiento se puede describir a través de asíntotas. Habrá n - m asíntotas, en este caso, 3. Los ángulos de las asíntotas se pueden obtener a partir de la ecuación:

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|}180^{\text{o}} \quad n \neq m, i = 0, 1, 2...n-m-1 \tag{16}$$

En este caso, los ángulos de las asíntotas serán:

$$\theta_i = 60^{\text{o}}, 180^{\text{o}}, 300^{\text{o}}. \tag{17}$$

Las asíntotas se intersectan en el eje Real en:

$$\sigma = \frac{\Sigma R\{polos\} - \Sigma R\{ceros\}}{|n-m|}, \tag{18}$$

es decir que para el caso en estudio, las asíntotas se intersectarán en el eje Real en:

$$\sigma = \frac{-2-1-1-5}{|4-1|} = -3. \tag{19}$$

LR en el eje Real.
Un dado punto del eje Real pertenecerá al lugar de raíces si el número total de polos y ceros a su derecha es **impar**. Es decir, en el caso que estamos estudiando, el eje Real será parte del LR desde $-\infty$ hasta -2 y luego desde 0 hasta 5. En la Fig. 2 se puede ver en rojo el lugar de raíces sobre el eje Real y en verde las asíntotas.

Puntos de quiebre.
Los puntos de quiebre corresponden a raíces múltiples de la ecuación característica, es decir, que

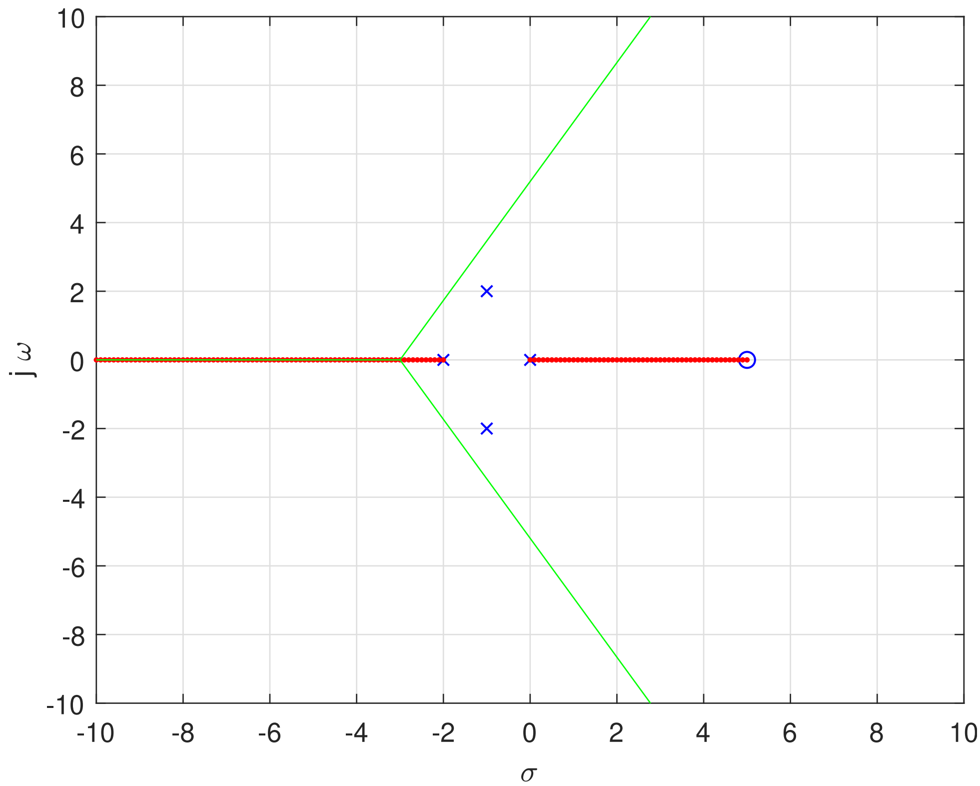

Figura 2: LR en el eje Real + asíntotas

se cumple que:

$$\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0, \tag{20}$$

es importante tener en cuenta que esta ecuación representa una condición necesaria pero no suficiente. Para que un punto dado sea punto de quiebre debe ser parte del LR además de cumplir esta condición.

$$\frac{dG(s)H(s)}{ds} = \frac{-3s^4 + 12s^3 + 51s^2 + 90s + 50}{Den_{GH}^2(s)} = 0, \tag{21}$$

se pueden obtener las 4 raíces de esta ecuación, que resultan: $s = 7{,}0582$, $s = -1{,}0847 \pm 1{,}2167i$ y $-0{,}8888$. Se puede ver fácilmente que las dos raíces que corresponden al eje Real, no forman parte del LR. Para comprobar si el par complejo conjugado forma parte del LR y representa efectivamente dos puntos de quiebre, se utiliza la condición principal del LR:

Condición de magnitud y ángulo.
Despejando de la ecuación característica se obtiene: $G(s)H(s) = -1$. Para que un punto del plano complejo pertenezca al LR, debe cumplir simultáneamente la condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1, \tag{22}$$

y la condición de ángulo, para el caso de **realimentación negativa**:

$$\angle G(s)H(s) = (2i + 1) * 180^{\circ}. \tag{23}$$

Evaluando para el caso en estudio, se ve que ninguno de los puntos calculados anteriormente cumple con esto, es decir que no hay puntos de quiebre.

Observando la Fig. 2, considerando que no hay ningún punto de quiebre, el diagrama está casi resuelto. El polo en $s = -2$ se moverá por el eje Real negativo, a medida que K crece, aproximándose a $-\infty$ cuando $K- > \infty$ (estará sobre la asíntota de ángulo 180°). El polo en el origen se moverá por el eje Real positivo y terminará su recorrido en $s = 5$. Los polos complejos conjugados en $s = -1 \pm 2$ se aproximarán a las asíntotas restantes de ángulos 60º y 300º. Para una mejor aproximación del LR de este par de polos complejos conjugados sea más acertado, podemos utilizar la condicion de ángulo como se describe a continuación.

Ángulos de partida y llegada.
El ángulo con el que una rama del diagrama de LR parte de un polo o llega a un cero se puede calcular utilizando la condición anterior reescrita de la siguiente manera: la resta entre los ángulos obtenidos de los vectores trazados desde los ceros y los trazados desde los polos a un punto del lugar de raíces debe ser igual a un múltiplo impar de 180º.

Aplicando esto al polo en $s = -1 + 2$ se obtiene que el ángulo de partida será $theta \approx 72^o$, y para obtener el ángulo sobre su conjugado, hacemos uso de una última regla:

Simetría respecto del eje Real.
El diagrama de LR es siempre simétrico respecto del eje Real, es decir, el ángulo de partida de $s = -1 + 2$ será $theta \approx 360^o - 72^o = 288^o$.

Rango de ganancia de estabilidad.
Utilizando la tabulación de Routh, se puede obtener el conjunto de valores de K para los cuales el sistema será estable. Observando el LR en este caso, se puede notar fácilmente que el sistema no será estable para ningún valor de $K \geq 0$.
Con esto, completamos el lugar de raíces como se ve en la Fig. 3.

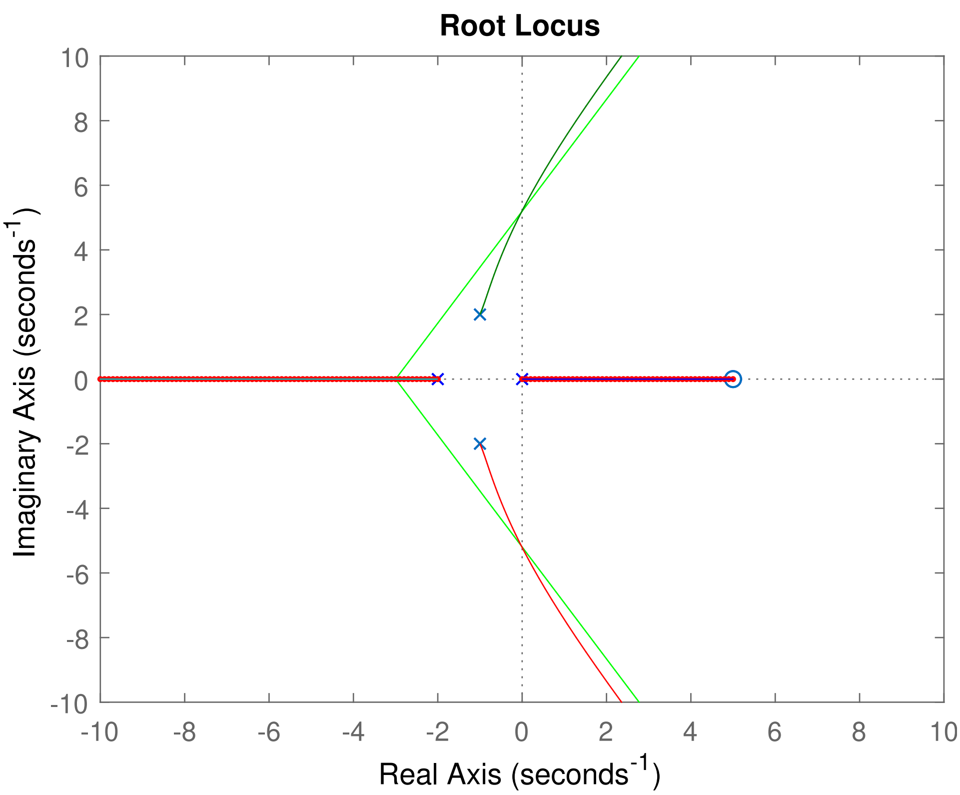

Figura 3: Lugar de Raíces de G(s)H(s)

```
num = [1  -5];   % numerador de G(s)H(s) (dejando afuera la ganancia K)
den = conv([1 2 0],[1 2 5]);  % denominador de G(s)H(s)
rlocus(num,den)  % diagrama de LR para K>=0
```

(b) Primero, se opera para expresar el sistema en la forma de LR, llegando a:

$$G(s)H(s) = \frac{-K(s-5)}{s(s+2)(s^2+2s+5)}. \tag{24}$$

Se puede observar que se obtuvo el mismo sistema que en el inciso (a) pero ahora con un signo menos delante. Se debe realizar el diagrama de LR considerando que el sistema ahora se encuentra bajo **realimentación positiva**, es decir que se deben utilizar las reglas complementarias.

$\mathbf{K = 0}$ y $\mathbf{K = \infty}$.
Los polos y ceros del sistema en lazo abierto son los mismos que en (a).

Número de ramas del LR.
El número de ramas es el mismo que en (a).

Asíntotas.
El número de asíntotas es el mismo que en (a), pero los ángulos cambian y se deben calcular con la regla complementaria:

$$\theta_i = \frac{2i}{|n-m|}180^{\circ} \quad n \neq m, i = 0, 1, 2...n-m-1, \tag{25}$$

resultando para este caso:

$$\theta_i = 0^{\circ}, 120^{\circ}, 240^{\circ}. \tag{26}$$

Estas asíntotas se intersectarán en el eje Real en el mismo punto que en (a), es decir, en $s = -3$.

LR en el eje Real.
Un dado punto del eje Real pertenecerá al lugar de raíces de un sistema **realimentado positivamente** si el número total de polos y ceros a su derecha es **par**, es decir que:
El eje Real será parte del LR de $s = -2$ a $s = 0$ y de $s = 5$ a $s = \infty$

Condición de magnitud y ángulo.
Cualquier punto del plano complejo que pertenezca al LR, debe cumplir simultáneamente la condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1, \tag{27}$$

y la condición de ángulo, que para el caso de **realimentación positiva** (reglas complementarias) resulta:

$$\angle G(s)H(s) = (2i) * 180^{\circ}. \tag{28}$$

Puntos de quiebre.
Las soluciones a la ecuación $\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$ serán las mismas que en (a) ya que para este caso sólo cambió el signo del numerador de $G(s)H(s)$ y se puede verificar que eso no las modifica. Las soluciones son: $s = 7{,}0582$, $s = -1{,}0847 \pm 1{,}2167i$ y $-0{,}8888$. Se puede ver que en este caso, las dos soluciones a la ecuación que se encuentran sobre el eje Real sí forman parte del LR. Comprobando con la condición de magnitud y ángulo, se puede ver que el par complejo conjugado de soluciones nuevamente no cumple.
Es decir, el diagrama de LR del caso (b) tendrá dos puntos de quiebre: $s = 7{,}0582$ y $s = -0{,}8888$.

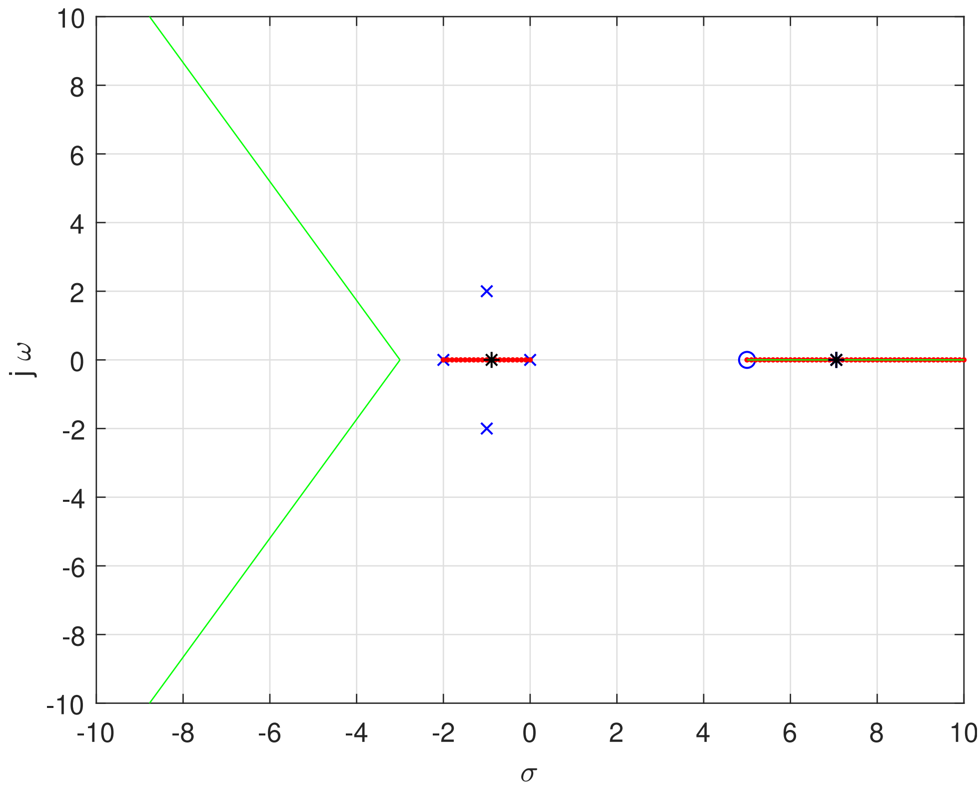

Figura 4: LR en el eje Real + asíntotas + puntos de quiebre

En la Fig. 4 se ve el esquema inicial del diagrama con los polos y ceros de lazo abierto, el LR en el eje Real, las asíntotas graficadas y los puntos de quiebre marcados. Considerando lo conocido hasta este punto, se puede prever que los polos en $s = -2$ y el origen se moverán a medida que K crece desde 0 hasta encontrarse en el punto de quiebre $s = -0{,}8888$, donde se separarán entre sí y del eje Real. Por otro lado, un par de polos llegará al eje Real en el semiplano derecho en el punto de quiebre $s = 7{,}0582$ y luego se separarán, uno hacia $s- > +\infty$ y el otro hacia el cero de lazo abierto en s=5. Para tener una idea mejor de cuál de los pares de polos será el que se una en $s = 7{,}0582$, se calculan los ángulos de partida del par complejo conjugado $s = -1 \pm j2$.

Ángulos de partida y llegada.
Para el caso de **realimentación positiva**, la regla complementaria es: La resta entre los ángulos obtenidos de los vectores trazados desde los ceros y los trazados desde los polos a un punto del lugar de raíces debe ser igual a un múltiplo par de 180º.
De esta forma, se puede obtener el ángulo de partida para el polo en $s = -1 + j2$, resultando $\theta \approx 252^{\circ}$. Considerando además la simetría con el eje Real, se obtiene el ángulo de partida para $s = -1 - j2$, $\theta \approx 108^{\circ}$. Con esto, es suficiente para realizar un diagrama de LR con bastante detalle.

Rango de ganancia de estabilidad.
Del diagrama realizado se puede ver que en este caso sí hay un rango de valores de K para el cual el sistema de lazo cerrado será estable. A partir de la ecuación característica, se forma la tabulación de Routh:

s^4	1	9	5K
s^3	4	10 - K	0
s^2	A	B	0
s^1	C	0	0
s^0	B	0	0

donde:

$$A = \frac{4*9-(10-K)}{4} = 6{,}5 + 0{,}25K, \tag{29}$$

$$B = \frac{4*5K-0}{4} = 5K, \tag{30}$$

$$C = \frac{A*(10-K)-4B}{A} = \frac{-0{,}25K^2-24K+65}{6{,}5+0{,}25K}. \tag{31}$$

Para que el sistema sea estable, es necesario que se cumpla simultáneamente que todos los coeficientes de la primera columna sean positivos, es decir, deben ser $A > 0$, $B > 0$ y $C > 0$.
De $A > 0$ surge $K > -26$, de $B > 0$ resulta $K > 0$ y de $C > 0$, $-98{,}636 < K < 2{,}636$. Finalmente, el conjunto de valores de k en el que el sistema se mantiene estable será el más restrictivo, es decir: $0 < K < 2{,}636$.
En K = 0, el sistema tiene un polo en el origen, por lo que no es estable.
Para $K = 2{,}636$ se da el cruce del par de polos complejos conjugados con el eje imaginario. Para este valor de K, se obtienen las raíces imaginarias: $s = \pm 1{,}3568$. En la Fig. 5 se observa el resultado final del diagrama de LR para el sistema en estudio.

```
num = -[1 -5];        % numerador de G(s)H(s) (dejando afuera la ganancia
    K)
den = conv([1 2 0],[1 2 5]); % denominador de G(s)H(s)
rlocus(num,den) % diagrama de LR para K>=0
```

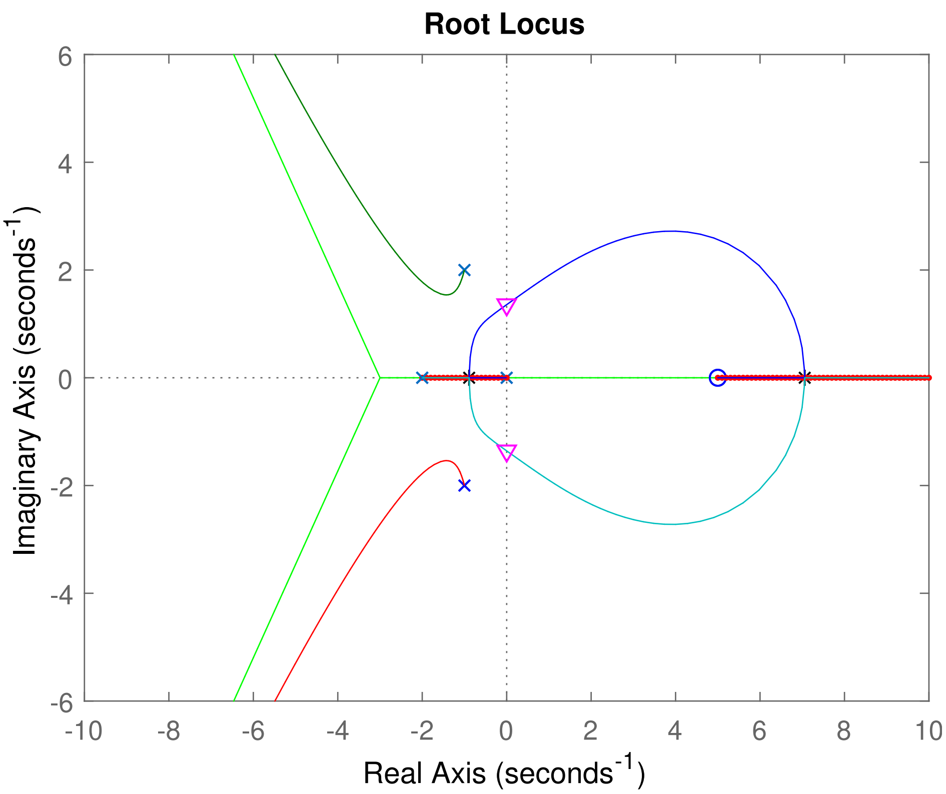

Figura 5: Lugar de Raíces de G(s)H(s)