# 3. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS.

En este capitulo se tratará la propagación de ondas planas en distintos medios, siendo estos medios homogéneos, isotrópicos y lineales, además de no estar acotados espacialmente.

Las ondas planas son una buena aproximación a las ondas reales en la mayoría de las situaciones prácticas. Las ondas de radio, a una distancia suficiente de la antena transmisora o de superficies reflectoras, pueden ser consideras como ondas planas, ya que su radio de curvatura es muy grande. Muchos de los conceptos aplicados a óptica pueden ser trasladados cuando se trabaja con ondas planas.

La mayoría de las ondas electromagnéticas pueden ser consideradas como la superposición de un conjunto de ondas planas, de modo tal que el conocimiento del comportamiento de las ondas planas, ayuda a resolver los problemas planteados al tratar ondas más complejas.

En este capítulo se extenderán los conocimientos sobre ondas planas, al estudiar su propagación en diversos medios.

## 3.1. DIELÉCTRICOS Y CONDUCTORES.

Antes de comenzar a tratar la propagación en distintos medios, es conveniente establecer una clasificación de algunos de ellos, dieléctricos y conductores.

La separación entre dieléctricos o aislantes, y conductores no está muy bien definida, y algunos medios, la tierra por ejemplo, se consideran conductores hasta ciertas frecuencias, y dieléctricos con pérdidas para frecuencias superiores.

Tomando la ecuación de Maxwell que da las fuentes de rotacional de campo magnético, Ley de Ampere modificada, y trabajando con campos con variación senoidal en el tiempo (fasores), se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\,\omega\,\varepsilon\mathbf{E} \tag{1}$$

El primer sumando del segundo miembro, es la densidad de corriente de conducción, mientras que el segundo miembro es la densidad de corriente de desplazamiento.

La relación entre los módulos de las densidades de corriente de conducción y de desplazamiento, resulta ser:

$$\frac{\mathbf{J}_c}{\mathbf{J}_d} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{2}$$

Se establece como división entre materiales conductores y dieléctricos, cuando la anterior relación es igual a 1. Esta línea divisoria, como se ve de la expresión, varía con la frecuencia.

Es posible ser más específico y clasificar los medios como pertenecientes a tres tipos, según la relación entre los módulos de las densidades de corrientes de conducción y desplazamiento, a saber:

- Dieléctricos: $$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 0{,}01 \tag{3}$$
- Cuasiconductores: $$0{,}01 < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 100 \tag{4}$$
- Conductores: $$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 100 \tag{5}$$

Algunos autores avanzan aún más, particionando a los cuasiconductores en dieléctricos con pérdidas y malos conductores.

En los buenos conductores, tales como los metales, la relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ es muy superior a la unidad en todo el espectro de las radiofrecuencias. Tal es el caso del cobre que hasta frecuencias relativamente elevadas, 30.000 MHz, el valor de dicha relación es de $3{,}5\cdot 10^9$. Además, en los buenos conductores, tanto $\varepsilon$ como $\omega$ son casi independientes de la frecuencia.

En los buenos dieléctricos o aislantes, la relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ es mucho menor que la unidad. Además, para la mayoría de los dieléctricos, tanto tanto $\varepsilon$ como $\omega$ son funciones de la frecuencia, aunque la relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ es prácticamente constante dentro de cierto rango de frecuencias de interés.

La mayoría de los materiales usados, o bien dejan pasar fácilmente las corrientes de conducción o evitan su circulación, es decir se comportan como conductores o como dieléctricos o aislantes, excepto algunas excepciones entre las que cabe mencionar por su importancia práctica, sobre todo en radioenlaces, a la tierra y al agua dulce o salada, que a bajas frecuencias son buenos conductores y a altas frecuencias son buenos dieléctricos.

En la **Figura 3-1** se muestra la relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ para algunos materiales comunes.

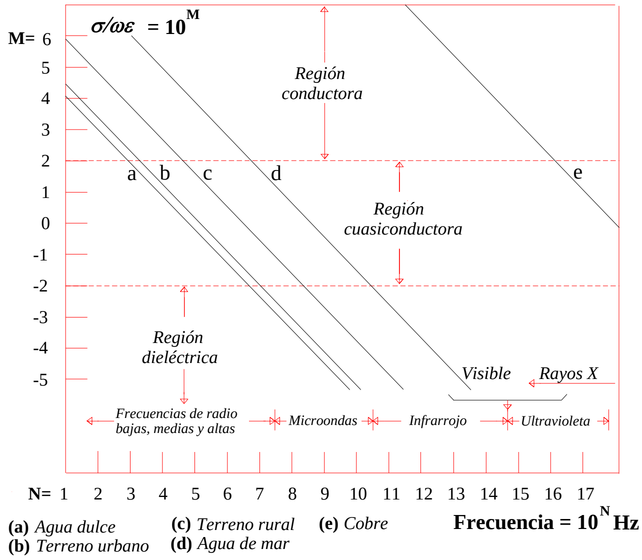


**Figura 3-1.** Relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ entre las densidades de corrientes de conducción y de desplazamiento, para distintos materiales, en función de la frecuencia.

## 3.2. DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

Para analizar la propagación de una onda plana dentro de un material dieléctrico o conductor, se partirá de suponer que la onda ha ingresado al medio de alguna manera, que a los fines de su estudio no interesa determinar. Más adelante se desarrollarán los mecanismos de ingreso de las ondas a los medios, cuando se analice la reflexión y refracción de ondas.

Para deducir la ecuación general de propagación en dieléctricos y conductores partiremos de las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(ley de Ampere modificada)} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(ley de Faraday)} \qquad (2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (4)$$

Se supone que en la onda electromagnética plana, el campo eléctrico está *linealmente polarizado* en la dirección del eje $y$, y se propaga en el sentido del eje $x$ positivo.

Introduciendo las hipótesis anteriores en las ecuaciones de Maxwell para el rotacional de campo magnético, ley de Ampere modificada en su forma puntual, y el rotacional de campo eléctrico, ley de Faraday en su forma puntual, se tiene que:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (6)$$

Diferenciando la primera ecuación respecto a $t$, y la segunda respecto a $x$, surge que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (8)$$

Dado que el orden de diferenciación no altera el resultado final, por consiguiente ambas ecuaciones anteriores tienen uno de sus miembros iguales, despejado el cual resulta ser:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad (9)$$

La anterior ecuación resulta ser la ecuación de propagación de campo eléctrico de una onda electromagnética plana, dentro de un material dieléctrico o conductor.

Si se supone además que el campo eléctrico tiene una variación temporal del tipo senoidal, como se indica a continuación:

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t} \qquad (10)$$

Realizando las derivadas primera y segunda en la ecuación de propagación del campo eléctrico resulta:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - j\,\omega\sigma E_y + \omega^2\varepsilon E_y = 0 \qquad (11)$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \left(j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon\right)E_y = 0 \qquad (12)$$

Si ahora se define la constante de propagación como:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} \qquad (13)$$

Resulta:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0 \qquad (14)$$

Esta ecuación es una forma simplificada de la ecuación de propagación, en donde la variable tiempo no está en forma explícita, ya que se ha supuesto una variación temporal del tipo armónica. Una solución para la onda incidente de campo eléctrico resulta ser entonces:

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x} \qquad (15)$$

Si se tiene en cuenta la ecuación de Maxwell que da las fuentes de rotacional de campo eléctrico, ley de Faraday en su forma puntual, tratada al comienzo de este punto, y se incorpora la solución hallada para el campo eléctrico, se obtiene:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (16)$$

Si ahora se realizan las operaciones matemáticas pertinentes, derivaciones e integraciones, se encontrará la solución para la onda de campo magnético, la cual resulta ser:

$$H_z = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_y \qquad (17)$$

En donde una vez más, se ha puesto de manifiesto la relación entre las ondas incidentes de campos eléctrico y magnético.

## 3.3. PROPAGACIÓN EN MEDIOS DIELÉCTRICOS.

### 3.3.1. Propagación en medios dieléctricos ideales.

El tratamiento de la propagación de ondas electromagnéticas planas en medios dieléctricos ideales (sin pérdidas), es similar a lo ya visto para el espacio libre (vacío), ya que este último es un medio dieléctrico ideal.

La única diferencia respecto de lo ya tratado radica en el hecho de que los medios dieléctricos ideales poseen una permitividad distinta de la del vacío, hecho que debe ser tenido en cuenta ya que afecta a la propagación de las ondas planas, variando la velocidad de fase, impedancia característica del medio, índice de refracción, etc., respecto de los valores obtenidos para el vacío.

### 3.3.2. Propagación en medios dieléctricos reales.

Para analizar lo que ocurre con la propagación de una onda plana dentro de un material dieléctrico real (con pérdidas) se partirá de la ecuación obtenida en el punto anterior *Desarrollo general de la ecuación de propagación para medios dieléctricos o conductores*, que se transcribe a continuación:

$$E_y = E_0 \, e^{j\omega t} \, e^{-\gamma x} \tag{1}$$

siendo

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} \tag{2}$$

es decir, como la constante de propagación es de la forma:

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{3}$$

la (1) resulta:

$$E_y = E_0 \, e^{-\alpha x} \, e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{4}$$

siendo $\alpha$ la *constante de atenuación* y $\beta$ la *constante de fase*.

Puede observarse que:

$$\alpha = \frac{1}{\delta} \tag{5}$$

y además, de (2) y (3):

$$\alpha = Re\left\{ \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} \right\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1 \right]} \tag{6}$$

$$\beta = Im\left\{ \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} \right\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1 \right]} \tag{7}$$

Para buenos dieléctricos (bajas pérdidas), se cumple que:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1 \tag{8}$$

y en tales casos es posible realizar la siguiente aproximación binómica:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \cong 1 + \frac{\sigma^2}{2\,\omega^2\varepsilon^2} \tag{9}$$

donde se han usado los dos primeros términos del desarrollo binómico de la raíz cuadrada.

Con lo que la constante de atenuación, expresión (6), resulta:

$$\alpha \cong \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left( 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2} \right) - 1} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{10}$$

Como se puede apreciar, la constante de atenuación es pequeña, al serlo la conductividad, tendiendo a cero cuando ésta lo hace. Es decir, para un dieléctrico ideal, la constante de atenuación es nula.

La constante de fase dada por (7), con la aproximación binómica (9) resulta:

$$\beta \cong \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left( 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2} \right) + 1} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2} \right) \tag{11}$$

Como se puede apreciar, el efecto producido por una ligera pérdida en el medio dieléctrico real con respecto a un medio dieléctrico ideal, es añadir el segundo sumando de la ecuación anterior, el cual tiende a cero cuando la conductividad tiende a cero, resultando entonces el factor de fase correspondiente a un dieléctrico ideal.

Como las unidades de $E$ son voltios por metro y las de $H$ son amperios por metro, la relación entre las ondas incidentes de campos eléctrico y magnético tendrá dimensiones de impedancia, es decir ohms, y según la expresión (3.2.17) resulta:

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(j\omega\mu)^2}{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \tag{12}$$

que se conoce como *impedancia característica* o *impedancia intrínseca* del medio.

Que para un dieléctrico de bajas pérdidas se transforma en:

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{\sigma}{j\,\omega\varepsilon}}} \qquad (13)$$

Ecuación que puede ser aproximada por expansión binómica en:

$$Z_i \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \qquad (14)$$

Así, mientras en un medio dieléctrico ideal o perfecto la impedancia característica es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente), para un medio dieléctrico real con bajas pérdidas la impedancia característica es una magnitud compleja (el campo magnético atrasa ligeramente en el tiempo con respecto al campo eléctrico).

Por supuesto que si la conductividad del material dieléctrico tiende a cero, la impedancia característica tiende a ser real.

El módulo o magnitud de la impedancia intrínseca resulta ser entonces:

$$\left|Z_i\right| \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2}\right)} \qquad (15)$$

Este módulo resulta ser igual a la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico perfecto (sin pérdidas), multiplicada por el factor, mayor a la unidad pero muy próximo a ella.

De las anteriores consideraciones, y sin necesidad de ejemplificar numericamente, puede concluirse que el módulo o magnitud de la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico real es inferior al correspondiente al vacío, tanto menor cuanto mayor sea la permitividad, habida cuenta que en este medio la permeabilidad es igual a la del vacío. Esto implica que la relación entre campo eléctrico y magnético es menor en un medio dieléctrico que en el vacío.

El relativamente valor alto de la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico, comparado a un medio conductor como se verá más adelante, sugiere que el mismo se comporta equivalentemente a un circuito abierto para las ondas electromagnética.

### 3.3.3. Histéresis dieléctrica.

En materiales dieléctricos, que a su vez son buenos aisladores, la corriente continua de conducción puede ser despreciable. Sin embargo, si se aplica un campo eléctrico armónico sobre estos materiales, puede llegar a aparecer una cantidad apreciable de corriente en fase con este campo (corriente de conducción), debido al fenómeno denominado *histéresis dieléctrica*, que es análogo en su concepción a la histéresis magnética que tiene lugar en los materiales ferromagnéticos.

Es así que en materiales dieléctricos, como vidrios o plásticos, los cuales son normalmente buenos aisladores cuando se encuentran sometidos a campos estáticos, puede llegar a consumir una cantidad apreciable de energía cuando se los expone a campos variables en el tiempo. Este mecanismo, por el cual se genera calor, es usado en algunos procesos industriales para generar calor por radiofrecuencia.

Si se recuerda ahora el mecanismo de polarización, se observa que cuando un campo eléctrico es aplicado a un átomo polarizable eléctricamente, la nube de electrones (carga eléctrica negativa de masa pequeña) se desplaza ligeramente respecto del núcleo (carga eléctrica positiva de masa considerable), dando así origen a un momento eléctrico dipolar, cuya magnitud es:

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l} \qquad (1)$$

siendo $Q$ carga eléctrica equivalente y $\mathbf{l}$ brazo del dipolo (separación entre carga eléctrica negativa y positiva), por cuya presencia se dice que el átomo está polarizado.

Cuando el campo eléctrico desaparece, el átomo vuelve a su estado inicial de reposo (no polarizado). Si se aplica ahora un campo eléctrico, en sentido opuesto al del caso anterior, el dipolo eléctrico se invierte. De esta manera, y generalizando, si se aplica un campo armónico en el tiempo a este átomo polarizable, el dipolo eléctrico generado pasa por susesivos estados de polarización, dando lugar a un momento dipolar que, como se verá a continuación, también variará armonicamente.

En las anteriores condiciones se puede postular un sistema mecánico equivalente, que describa la variación del brazo dipolar equivalente (**l**, distancia relativa entre el centro eléctrico de la nube de electrones y el núcleo). Este sistema mecánico equivalente está constituido por una gran esfera (núcleo del átomo), unida a otra pequeña esfera (nube de electrones), a través de un resorte. El átomo constituye así un sistema electromecánico de masa *m*, coeficiente de amortiguamiento o fricción *d* y coeficiente de elasticidad o tensión mecánica *s*.

El comportamiento de un sistema como el descrito, esta regido por una ecuación diferencial de segundo orden, que se transcribe a continuación:

$$m\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} + d\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + s\mathbf{l} = q\mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \tag{2}$$

Donde:

- $\mathbf{l}$ : Brazo dipolar.
- $m$ : Masa del átomo.
- $d$ : Coeficiente de amortiguamiento o fricción.
- $s$ : Coeficiente de elasticidad o tensión.
- $q$ : Carga eléctrica del núcleo o de la nube electrónica.

Siendo el campo eléctrico armónico igual a:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \tag{3}$$

El primer término de la ecuación diferencial anterior corresponde al producto masa-aceleración, el segundo término corresponde al producto amortiguamiento-velocidad y el tercer término corresponde al producto elasticidad-desplazamiento.

El término derecho de la anterior ecuación diferencial corresponde a la fuerza aplicada $q\mathbf{E}$ = Fuerza pico), resultante de la aplicación de un campo eléctrico que varia armónicamente en el tiempo.

Esta ecuacion tiene dos soluciones, la denominada solución permanente o de regimen forzado, y la denominada solución transitoria. La solución permanente es la siguiente:

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_0 e^{j\omega t} \tag{4}$$

Que reemplazado en la ecuación diferencial, realizando las correspondientes derivaciones y despejando, resulta:

$$\mathbf{l}_0 = \frac{\left(\frac{q}{m}\right)\mathbf{E}_0}{\left(\frac{m}{s} - \frac{d^2}{4m^2} - \omega^2\right) + j\omega\frac{d}{m}} \tag{5}$$

De la anterior ecuación se deduce que el momento dipolar por unidad de volumen es:

$$\mathbf{P} = Nq\mathbf{l} = \frac{\left(\frac{Nq^2}{m}\right)\mathbf{E}_0 e^{j\omega t}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j\omega\frac{d}{m}} \tag{6}$$

Donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{s} - \frac{d^2}{4m^2}} \tag{7}$$

siendo:

- $\omega_0$ : Frecuencia natural o de resonancia del sistema.
- $N$ : Número de átomos polarizados por unidad de volumen.

Por otra parte, y por definición, la constante dieléctrica resulta ser:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} \tag{8}$$

Pero al ser el campo eléctrico una función armónica del tiempo, es decir quem cumple con la expresión (3), la constante dieléctrica resulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\frac{Nq^2}{m}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j\omega\frac{d}{m}} \tag{9}$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior, si se tiene en cuenta el efecto de la histéresis, la constante dieléctrica, o permitividad, resulta ser un número complejo, el cual puede escribirse como:

$$\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon'' \tag{10}$$

Donde:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{d}{m}\right)^2} \right) \tag{11}$$

$$\varepsilon' = \frac{\frac{Nq^2}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{d}{m}\right)^2} \tag{12}$$

Ambas partes de la permitividad, partes real e imaginaria, dependen de la frecuencia. Si se escribe ahora la ecuación de Maxwell que da cuenta de las fuentes de rotacional del campo intensidad magnética **H**, ley de Ampere modificada, se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{13}$$

Siendo $\sigma$ la conductividad del medio diélectrico. Si ahora se reemplaza a la permitividad por el valor calculado para la misma, teniendo en cuenta el fenómeno de histéresis dieléctrica, y se realiza la derivada parcial temporal del campo eléctrico **E**, la ecuación de Maxwell adopta la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \left[\sigma + j\omega\left(\varepsilon' - j\varepsilon''\right)\right] \tag{14}$$

Reordenando la anterior ecuación se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \left[\left(\sigma + \omega\varepsilon''\right) + j\omega\varepsilon'\right] \tag{15}$$

Resulta evidente de la anterior ecuación que el término $\omega\varepsilon''$ tiene dimensiones y comportamiento de conductancia. Por esta razón se denomina *conductancia equivalente*, al término:

$$\sigma' = \sigma + \omega\, \varepsilon'' \tag{16}$$

Por razones similares, al término $\varepsilon'$ se lo denomina *permitividad* o *constante dieléctrica equivalente*.

Por consiguiente se puede escribir que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma' \mathbf{E} + j\, \omega\, \varepsilon' \mathbf{E} \tag{17}$$

En esta ecuación se nota que las fuentes de rotacional del campo intensidad magnética **H** siguen siendo una densidad de corriente de conducción en fase, y una densidad de corriente de desplazamiento en cuadratura respectivamente con el campo eléctrico aplicado.

## 3.4. PROPAGACIÓN EN MEDIOS CONDUCTORES.

Las ondas electromagnéticas se atenúan rapidamente en medios conductores, tanto más rápido cuanto mayor es la frecuencia. La penetración de la onda queda confinada a una pequeña porción del material conductor, dando origen así al concepto de profundidad de penetración, el cual es de particular interés.

Para analizar lo que ocurre con la propagación de una onda plana dentro de un material conductor se partirá de la ecuación general (3.2.15) obtenida para el caso armónico, que se transcribe a continuación:

$$E_y = E_0\, e^{j\,\omega t}\, e^{-\gamma x} \tag{1}$$

Para buenos conductores, en donde se cumple la expresión (3.1.5):

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \tag{2}$$

En este caso, la constante de propagación resulta:

$$\gamma = \sqrt{j\,\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} \cong \sqrt{j\,\omega\mu\sigma} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{3}$$

Como se ve, la constante de propagación tiene una parte real y otra imaginaria. La parte real está asociada a la atenuación y por ello se la denomina constante de atenuación, mientras que la parte imaginaria está asociada a la fase y por tal motivo se la denomina constante de fase.

Sustituyendo estos valores de la constante de propagación en la onda de campo eléctrico, se obtiene:

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-(1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x} = E_0 e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x} e^{j\left(\omega t-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x\right)} \tag{4}$$

En donde el factor de atenuación de la onda está dado por:

$$e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x} \tag{5}$$

Y el factor de fase está dado por:

$$e^{-j\left(\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x\right)} \tag{6}$$

Si se recuerda la expresión hallada para el campo magnético, que se transcribe a continuación:

$$H_z = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x} \tag{7}$$

Si ahora se realizan los reemplazos pertinentes, se obtiene:

$$H_z = \frac{(1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}}{j\omega\mu} E_0 e^{-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x} e^{j\left(\omega t-\sqrt{\omega\mu\sigma/2}\,x\right)} \tag{8}$$

Las ecuaciones de las ondas de campos eléctrico y magnético dentro del conductor, viajando en el sentido del eje $x$ positivo, establecen que dicho campo sufren una atenuación del tipo exponencial y un desfasaje, ambos funciones del camino recorrido por las ondas dentro del material conductor.

### 3.4.1. Profundidad de penetración.

Resulta interesante obtener un medida cuantitativa de la penetración de una onda plana en un medio conductor.

Si el medio conductor comienza en un plano ubicado en $x$=0, y la onda se propaga en el sentido de la $x$ positivas, la ecuación de onda del campo eléctrico puede reescribirse de la siguiente manera:

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-(1+j)x/\delta} = E_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)} \tag{1}$$

Donde:

- $\delta$ : profundidad de penetración 1/$e$ o simplemente *profundidad de penetración*.
- $E_0$ : Campo en la superficie del material conductor (campo que ingresó en el material conductor).

A una profundidad $x=\delta$, la amplitud del campo eléctrico resulta:

$$\left|E_y\right| = |E_0|\, e^{-1} = \frac{|E_0|}{e}$$

De este modo $E_y$ decrece a 1/$e$ (36,8%) de su valor inicial, cuando la onda penetra una distancia $\delta$. De aqui que a esta constante se la denomina *profundidad de penetración*.

Siendo $\omega=2\pi f$, la profundidad de penetración resulta:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} \tag{2}$$

Para el cobre, siendo $\sigma$=5.8 $10^7$ [$\Omega^{-1}$m$^{-1}$] y $\mu=\mu_0$=1.26 $10^6$ [H/m], resulta entonces:

$$\delta = \frac{6.6\ 10^{-2}}{\sqrt{f}} \tag{3}$$

Si se evalúa esta expresión para distintas frecuencias resulta:

$\delta$ = 9.3 $10^{-3}$ m para $f$=50 Hz
$\delta$ = 6.6 $10^{-5}$ m para $f$=1 Mz
$\delta$ = 3.8 $10^{-7}$ m para $f$=30 Gz

Así, mientras que a 50 Hz la profundidad de penetración es igual a 9,3 mm, ésta decrece con la frecuencia alcanzando valores tan bajos como 0,38 $\mu$m para 30 GHz. Es por esta razón que a menudo se describe este fenómeno como *efecto pelicular*.

Por lo expuesto resulta que una onda electromagnética de alta frecuencia penetra menos en un material conductor que otra de baja frecuencia. Este fenómeno es similar a lo que acontece con una variación de temperatura en la superficie de un conductor térmico, en donde una variación brusca de temperatura penetra menos en el conductor que otra más lenta.

De la misma manera puede hablarse de otras profundidades de penetración, por ejemplo la profundidad de penetración 1% es aquella distancia (penetración) para la cual el campo eléctrico (magnético) decae al 1% de su valor superficial.

La velocidad de fase de la onda está dada por la relación $\omega/\beta$. En el caso aquí tratado la velocidad de fase resulta:

$$v_f = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \tag{4}$$

Dado que $\delta$ es pequeño en un medio conductor, lo propio acontece con la velocidad de fase. Además, como la velocidad de fase depende de la frecuencia, el medio conductor es un medio dispersivo, y como la derivada $\partial v_f / \partial\lambda$ es negativa, el medio conductor resulta ser anómalamente dispersivo.

Recordando que el índice de refracción de un medio es la relación entre las velocidades de la onda en el espacio libre y en el medio, resulta que a bajas frecuencias, el índice de refracción de un medio conducor es muy elevado.

La longitud de onda en el conductor puede ser hallada a través de la siguiente expresión:

$$\lambda_c\, f = \omega\delta \tag{5}$$

Lo que resulta en:

$$\lambda_c = 2\pi\delta \tag{6}$$

O sea que la longitud de onda dentro de un conductor es 2 $\pi$ veces la profundidad de penetración.

Es interesante notar que la amplitud de la onda decae a un 1% de su valor superficial, cuando la onda a penetrado alrededor de 3/4 veces su longitud de onda en el medio conductor.

Dado que la penetración es inversamente proporcional a la frecuencia, una hoja de material conductor actúa como un filtro pasabajos para una onda electromagnética.

## 3.5. IMPEDANCIA DE UN MEDIO CONDUCTOR.

El comportamiento de un medio conductor frente a una onda electromagnética plana puede ser analizado bajo el punto de vista de la impedancia característica.

Una solución para la ecuación de onda del campo eléctrico, adopta la siguiente forma ya vista:

$$E_y = E_0\, e^{j(\omega t - \gamma x)} \tag{1}$$

La solución para la onda de campo magnético será entonces:

$$H_z = H_0\, e^{j(\omega t - \xi - \gamma x)} \tag{2}$$

En donde $\xi$ es el retardo de fase temporal del campo magnético respecto del eléctrico. La relación entre ambos campos, denominada *impedancia intrínseca* o *impedancia característica* del medio, resulta ser:

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{E_0}{H_0} e^{j\xi} = \frac{1+j}{\sigma\delta} \tag{3}$$

De acuerdo a esta expresión, la magnitud o módulo de la impedancia característica es:

$$|Z_i| = \left|\frac{E_y}{H_z}\right| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \tag{4}$$

Y el ángulo de fase de la impedancia característica resulta de (3):

$$\xi = 45^{\mathrm{o}} \tag{5}$$

Así, mientras en un medio dieléctrico perfecto la impedancia característica es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente), la impedancia característica para un medio conductor es una cantidad compleja (el campo magnético atrasa 45° respecto al campo eléctrico).

Esta situación es análoga a la de un circuito conteniendo una resistencia en serie con un inductor, en donde la corriente (análoga al campo magnético) atrasa respecto a la tensión (análoga al campo eléctrico).

Reescribiendo la impedancia característica de un medio conductor, en función de su parte resistiva e inductiva, resulta:

$$Z_i = R + j\,X = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \tag{6}$$

La anterior ecuación puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$Z_i = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}} \tag{7}$$

Dando como resultado:

$$Z_i = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}} = (1+j)\ 266.6\,\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}} \tag{8}$$

El módulo o magnitud de la impedancia intrínseca resulta entonces:

$$|Z_i| = 266.6\,\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}} \tag{9}$$

que es igual a la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico perfecto (sin pérdidas), multiplicada por un factor que tiene en cuenta las pérdidas.

La relación $\sigma/(\omega\varepsilon)$ ya fue discutida anteriormente en el apartado **3.1. Dieléctricos y conductores**, concluyéndose que para buenos conductores es una magnitud muy grande y, por consiguiente, su inversa muy pequeña.

En base a estas consideraciones, y sin necesidad de ejemplificar numéricamente, se deduce que para un medio conductor, la impedancia intrínseca tiene un módulo pequeño, y resulta inferior al correspondiente al vacío. Esto implica que la relación entre campo eléctrico y magnético es menor para un medio conductor que para el vacío.

El pequeño valor de la impedancia intrínseca de un medio conductor sugiere que el mismo se comporta como un cortocircuito para las ondas electromagnéticas.

## 3.6. PROPAGACIÓN EN MEDIOS IONIZADOS.

En los puntos previos se ha analizado la propagación de ondas planas en medios dieléctricos, ideales o reales, y en medios conductores.

Para tales medios existen constantes bien definidas (básicamente permeabilidad, permitividad y conductividad), que definen su comportamiento frente a los campos eléctrico y magnético.

Para la mayoría de los materiales, los procesos internos son de tal complejidad que sus constantes son determinadas experimentalmente.

Se considerará ahora un medio constituido por un gas ionizado, medio de trascendental importancia para el estudio de la propagación de ondas eléctromagnéticas, sobre todo para las comunicaciones realizadas a través de la ionósfera (capa de la atmósfera terrestre), si bien en este caso también hay que tener en consideración la presencia del campo magnético terrestre.

Para el análisis que se realizará sobre la propagación de ondas planas en medios ionizados, se adoptarán ciertas hipótesis simplificatorias, a saber:

- Se adoptará un gas ionizado para el cual las densidades electrónicas e iónicas son sustancialmente iguales. Por tal motivo, a este gas ionizado se lo denomina *plasma*.
- Las densidades electrónicas e iónicas no son alteradas por la presencia de la onda electromagnética. Esta hipótesis se asume como válida ya que los campos son transversales y uniformes, de modo tal que no existe agrupamiento de partículas provocados por los campos.
- Los iones se considerarán inmóviles, ya que su masa es 1840 veces superior a la de los electrones.
- La concentración de iones y átomos neutrales es tipicamente muy baja en los gases, y los momentos dipolares magnéticos y eléctrico asociados provocan una muy ligera variación de la permeabilidad y permitividad del gas respecto de aquellas correspondientes al vacío, siendo por tal motivo despreciados estos efectos.
- Para campos de valor no extremadamente altos, el movimiento de los electrones está determinado por el campo eléctrico solamente, sin tener en cuenta la contribución del campo magnético. Es decir que en la *ecuación de fuerzas de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m \tag{1}$$

prepondera la debida al campo eléctrico, siendo $e$ es la magnitud de la carga de un electrón.

La relación entre las magnitudes de las fuerzas magnética y eléctrica resulta ser:

$$\left|\frac{\mathbf{F}_m}{\mathbf{F}_e}\right| = \frac{v\,B}{E} \tag{2}$$

Pero:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{\mu\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_i} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{v}_f} \tag{3}$$

Donde la relación entre la permeabilidad y la impedancia intrínseca del medio se ha reemplazado por la inversa de la velocidad de fase. Se verá que la velocidad de fase en un medio ioniozado es superior a la del vacío, de modo tal que:

$$\left|\frac{\mathbf{F}_m}{\mathbf{F}_e}\right| = \frac{v}{v_f} < \frac{v}{c} \tag{4}$$

Siendo $c$ la velocidad de la luz en ausencia del gas. La velocidad del electrón es muy inferior a la velocidad de la onda, de modo tal que la fuerza magnética sobre el electrón puede ser despreciada respecto de la fuerza eléctrica. Esta simplificación es extensivamente usada en el estudio de ondas en gases ionizados.

Por otra parte resulta necesario adecuar la ley de fuerzas de Lorentz, para aplicarla a un promedio de electrones más que a un simple electrón, introduciendo un término de fuerza que tenga en cuenta la pérdida promedio de energía debido a las colisiones de los electrones con las moléculas del gas.

La fuerza es igual a la velocidad de cambio del momento cinético o cantidad de movimiento. Se asume que la totalidad del momento de los electrones se transfiere a los átomos por medio de colisiones inelásticas, y que la frecuencia de dichas colisiones es $\nu$. De este modo, la pérdida de momento cinético por unidad de tiempo resulta:

$$m\mathbf{v}\,\nu \tag{5}$$

Entonces, si considera esta fuerza, y se desprecia la fuerza debida al campo magnético, y además se supone que la masa $m$ es constante, resulta:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m\mathbf{v}\nu \tag{6}$$

La derivada temporal total de la velocidad respecto del tiempo corresponde aplicarla a las partículas en movimiento, y por lo tanto, ya que la velocidad depende de la posición espacial y del tiempo, puede ser desglosada en las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{7}$$

Dado que las fuerzas aquí tratada son debidas al campo eléctrico asociado a una onda plana que se supone propagándose en la dirección del eje $z$, resulta que los campos, en particular el eléctrico, son transversales al sentido de propagación, y que todas las velocidades son también en el sentido transversal. De este modo, el último término de la ecuación anterior, conteniendo la componente de la velocidad según el eje $z$, es nulo. Debido a que se supone uniformidad de los campos en el plano transversal (onda plana), las variaciones de velocidad respecto de los ejes $x$ e $y$ resultan nulas.

De lo anteriormente expuesto resulta que la derivada total y parcial de la velocidad respecto del tiempo coinciden, es decir:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \tag{8}$$

Por otra parte, si el campo eléctrico es un fasor que varía senoidalmente con una pulsación angular $w$, es decir que:

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t} \tag{9}$$

Lo propio acontecerá con la velocidad, es decir que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0\, e^{j\omega t} \tag{10}$$

Reordenando ahora la ecuación que da la cantidad de movimiento, habida cuenta de que tanto el campo eléctrico como la velocidad son fasores, y la discusión realizada acerca de la derivada total temporal de la velocidad, resulta:

$$\mathbf{v} = \frac{-e\mathbf{E}}{m(\nu + j\omega)} \tag{11}$$

La densidad electrónica no es alterada por el movimiento de los electrones, dado que todas las trayectorias de los mismos se encuentran en planos tranversales al sentido de propagación de la onda, y por consiguiente están en planos paralelos entre sí. Por lo tanto, existirá una corriente de convección cuya densidad resulta:

$$\mathbf{J}_{conv} = -Ne\mathbf{v} = \frac{Ne^2\mathbf{E}}{m(\nu + j\omega)} \tag{12}$$

Siendo **N** la densidad electrónica (o iónica, ya que ambas se supusieron iguales).

Recordando que la ecuación de Maxwell que da las fuentes de rotacional de campo eléctrico, Ley de Faraday puntual, es:

$$\nabla \times \mathbf{E} = j\,\omega\mu_0\,\mathbf{H} \tag{13}$$

Y que la ecuación de Maxwell que da las fuentes de rotacional de campo magnético, Ley de Ampere Modificada, aplicada a este caso resulta ser igual a la suma de las densidades de corriente de desplazamiento y de convección, ya que la de conducción es nula:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\,\mathbf{E} + \frac{Ne^2\mathbf{E}}{m(\nu + j\omega)} = j\omega\varepsilon'\mathbf{E} \tag{14}$$

Donde:

$$j\omega\varepsilon' = j\omega\varepsilon_0\left[1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0\, m(\nu^2 + \omega^2)} + \frac{Ne^2\nu}{j\omega\varepsilon_0\, m(\nu^2 + \omega^2)}\right] \tag{15}$$

Puede expresarse ahora la Ley de Ampere modificada, teniendo en cuenta las partes reales e imaginarias de la permitividad compleja resultante, de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\,\omega\,\varepsilon\mathbf{E} \tag{16}$$

Siendo respectivamente:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0\, m(\nu^2 + \omega^2)}\right) \tag{17}$$

$$\sigma = \frac{Ne^2\nu}{m(\nu^2 + \omega^2)} \tag{18}$$

La conductividad, hallada mediante el anterior análisis de la descripción del comportamiento del gas, tiende a cero cuando lo propio hace la frecuencia de colisiones de los electrones.

Además, la permitividad del gas tiene un valor inferior de aquel correspondiente al vacio, tendiendo a este valor cuando la frecuencia de colisiones de los electrones tiende a cero.

Se considerará ahora un caso particular, pero de especial interés, correspondiente a la propagación de ondas planas en un gas ionizado en donde las colisiones pueden ser despreciadas. Para este caso resulta:

$$\sigma = 0 \tag{19}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \tag{20}$$

Donde se denomina pulsación angular de corte a:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{N\,e^2}{\varepsilon_0\, m}} \tag{21}$$

La constante de propagación al cuadrado resulta ser:

$$\gamma^2 = j\omega^2\,\mu_0\,\varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \tag{22}$$

Para pulsaciones angulares inferiores a la de corte, la impedancia intrínseca resulta un número imaginario, de tal manera que el campo magnético está 90° en atraso respecto del eléctrico (la energía de la onda es puramente reactiva). Para este caso, la constante de propagación es real, y la onda se atenúa localmente en el gas sin propagarse, siendo la onda de campo eléctrico:

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-\alpha x} \tag{23}$$

Para pulsaciones angulares superiores a la de corte, la impedancia intrínseca resulta ser un número real, de tal manera que el campo magnético está en fase con el eléctrico (la energía de la onda es puramente activa). Para este caso, la constante de propagación es imaginaria, y la onda se propaga en el gas sin atenuarse, siendo la onda de campo eléctrico:

$$E_y = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta x} \tag{24}$$

En la **Figura 3.2.** se muestra el diagrama *ω-ß* para ondas planas transversales en un gas ionizado, y su comparación con el vacío.

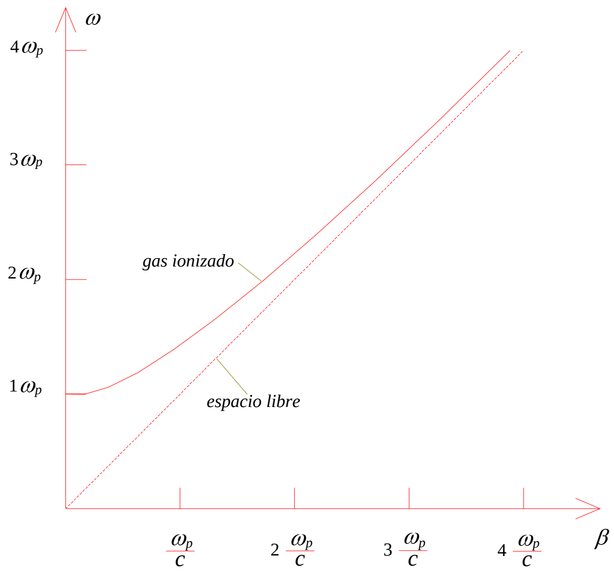


**Figura 3.2.** Diagrama *ω-ß* para un gas ionizado.

Se puede apreciar que la velocidad de fase, la cual está determinada por la pendiente de la línea que une el orígen con el punto correspondiente de la curva *ω-ß*, es siempre superior que la velocidad de fase en el vacío (velocidad de la luz). Dado que la velocidad de fase depende de la frecuencia, el medio es del tipo dispersivo. Por lo tanto, la velocidad de transmisión de la información en la onda, es la velocidad de grupo, la cual se corresponde con la pendiente de la curva *ω-ß*, siempre inferior, o a lo sumo igual, a la velocidad de la luz.