

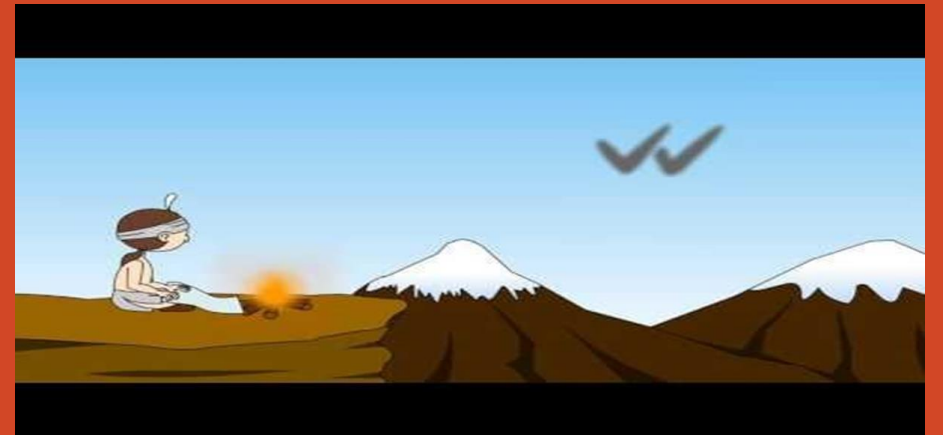
E1214 Fundamentos de las Comunicaciones

E0311 Comunicaciones

E0214 Comunicaciones

Curso 2023

Adrián Carlotto

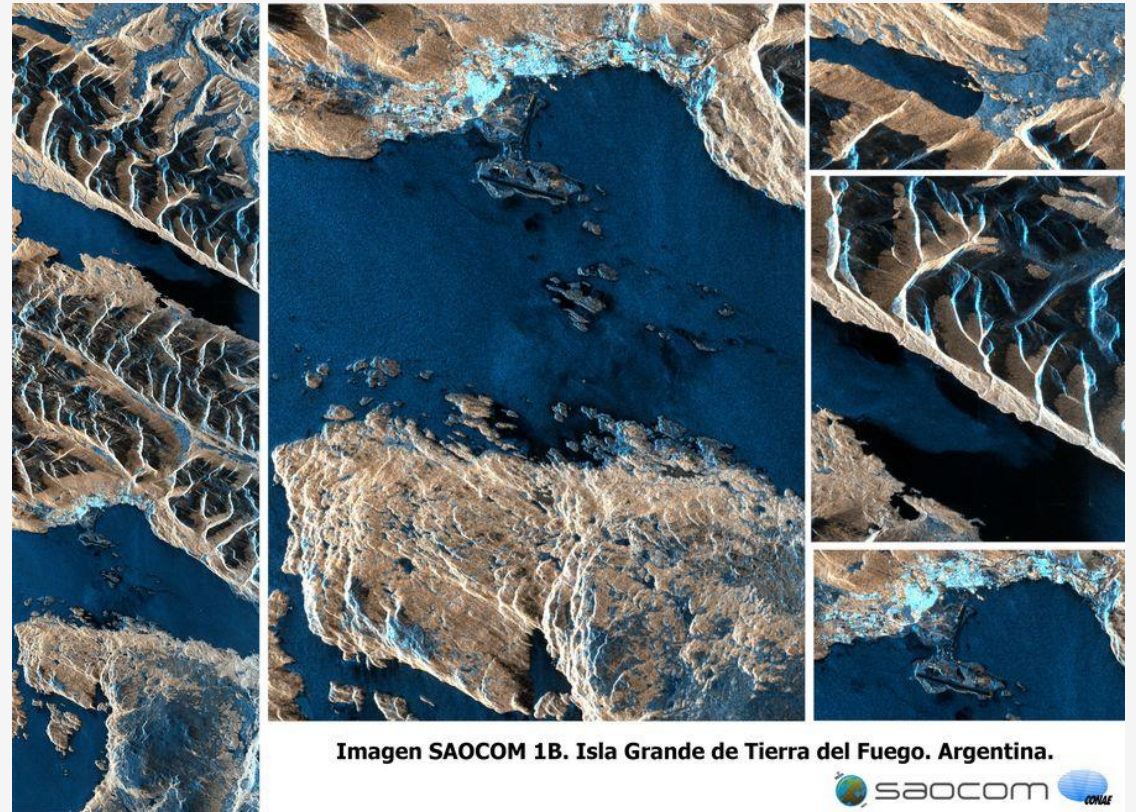


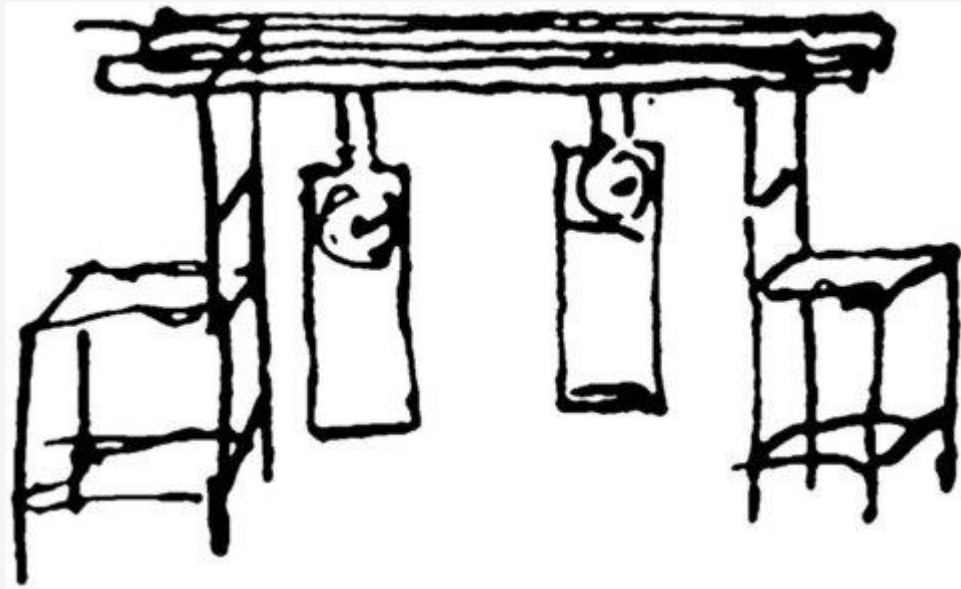
comunica@ing.unlp.edu.ar

Temas a tratar

- Lazo de Enganche de Fase (PLL)
- Bloques que lo componen
- Modelo lineal
- Algunos usos

Primeras imágenes del satélite argentino SAOCOM 1B (CONAE)

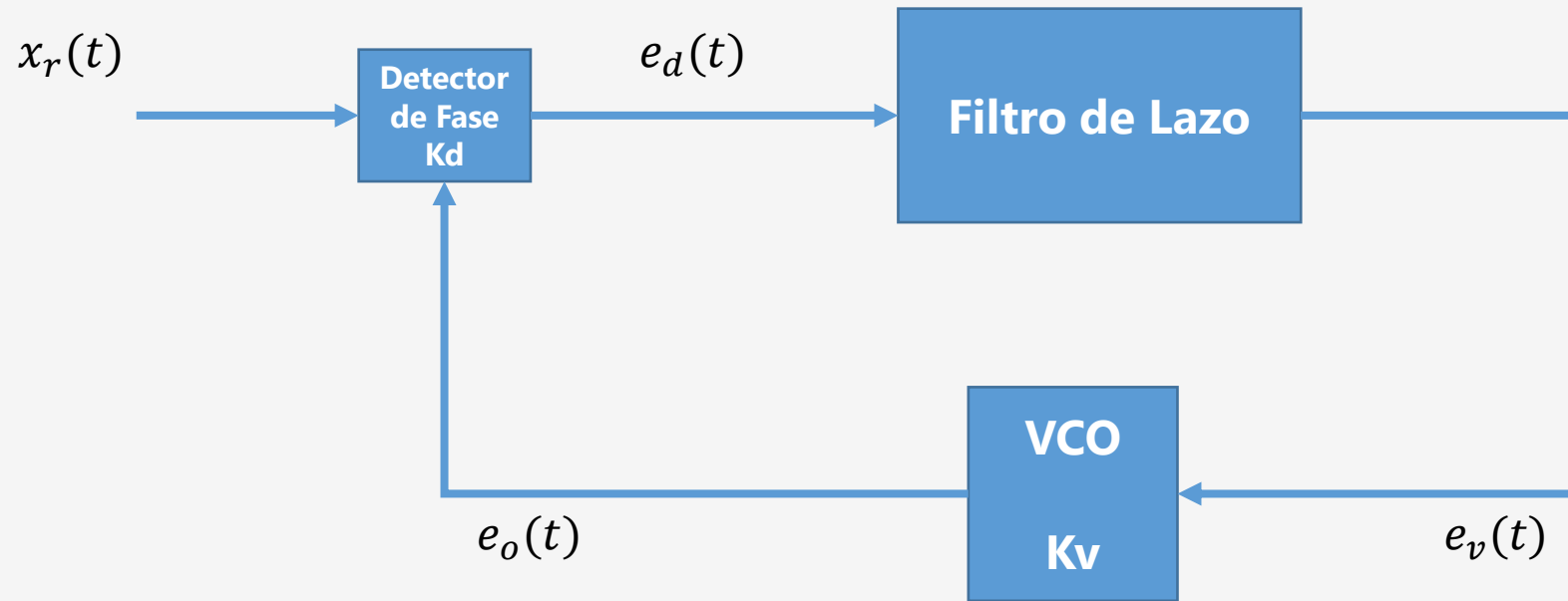




Christiaan Huygens (1665)



Lazo de Enganche de Fase (PLL)



$$x_r(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

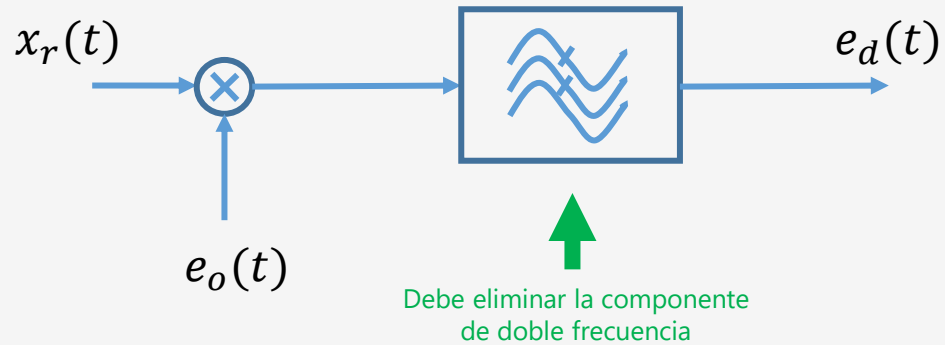
$$e_o(t) = -B \sin(2\pi f_0 t + \theta(t))$$

$$\psi(t) = \phi(t) - \theta(t)$$



Detectores de Fase

Multiplicador

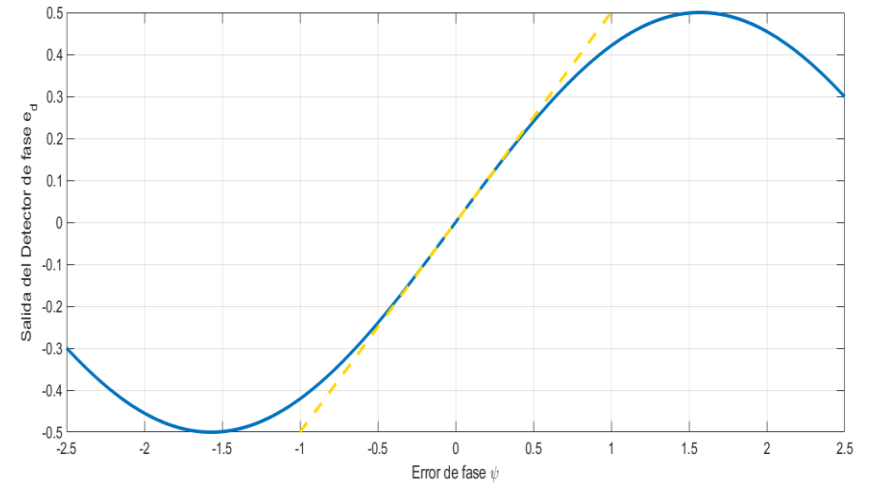


$$e_d(t) = \{-AB \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) \sin(2\pi f_0 t + \theta(t))\}_{LPF}$$

$$e_d(t) = \frac{AB}{2} \sin(\phi(t) - \theta(t))$$

$$e_d(t) = f(\psi(t))$$

↑
NO LINEAL



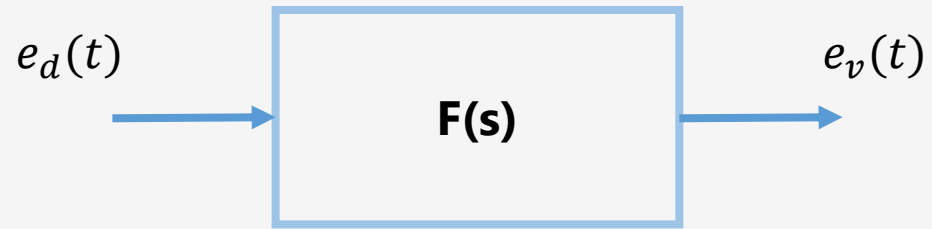
En condiciones cercanas al enganche

→ **MODELO LINEAL PARA EL DETECTOR MULTIPLICATIVO**

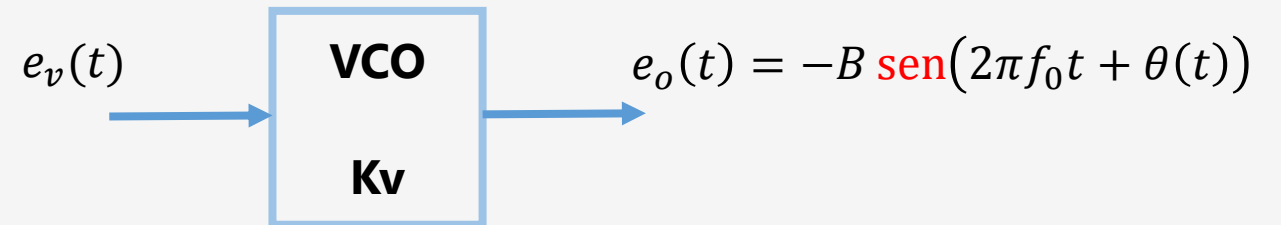
$$e_d(t) \cong \frac{AB}{2} (\phi(t) - \theta(t)) = k_D \psi(t) \quad \longleftrightarrow \quad E_d(s) = k_D \psi(s)$$

Otro tipos: Orex, IQ

Filtro de Lazo. VCO.



$$E_v(s) = E_d(s) F(s)$$



MODELO LINEAL PARA EL VCO

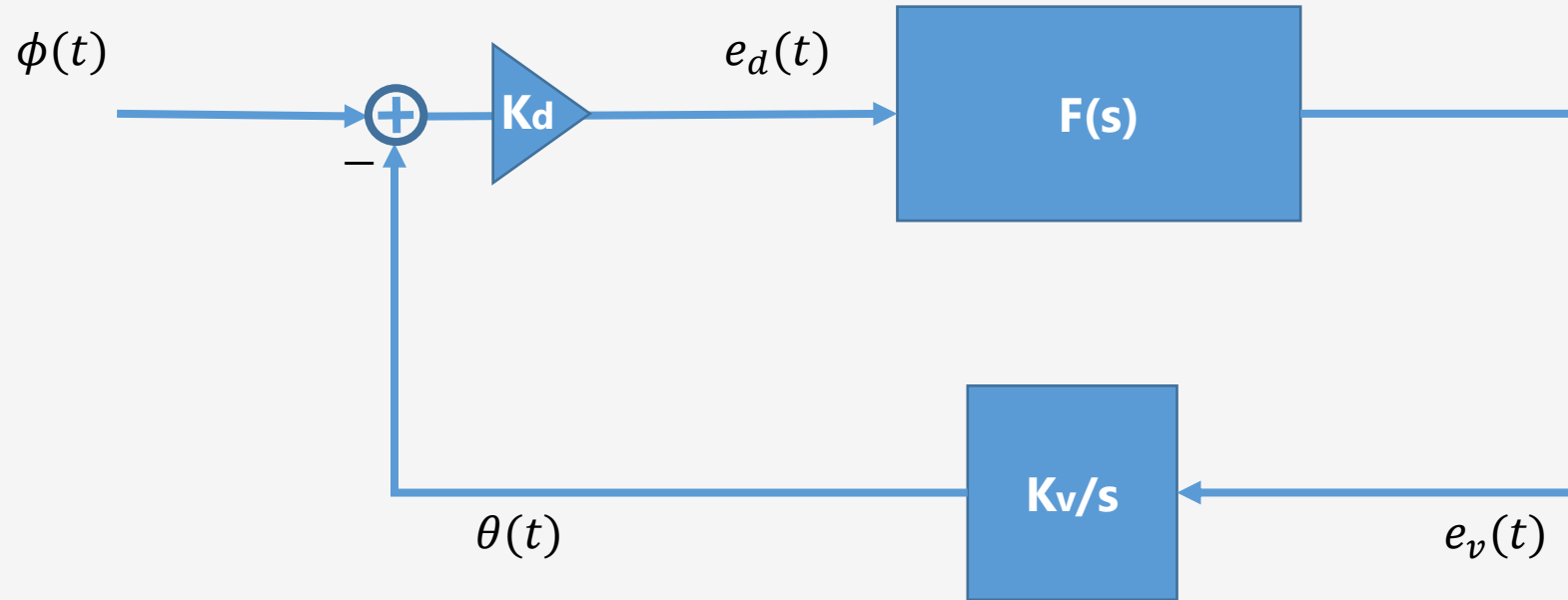
$$\frac{d\theta}{dt} = k_v e_v(t)$$

$$\theta(t) = k_v \int_{-\infty}^t e_v(\lambda) d\lambda$$

$$\theta(s) = \frac{k_v}{s} E_v(s)$$

Modelo lineal en fase para el PLL

En condiciones de enganche o cercana a ella:



$$k_d [\phi(s) - \theta(s)] F(s) \frac{k_v}{s} = \theta(s)$$

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{k_d k_v F(s)}{s + k_d k_v F(s)}$$

← Función de transferencia en fase a lazo cerrado (modelo lineal)

Análisis no lineal del PLL de orden 1

ORDEN DEL PLL: orden de la ecuación diferencial que lo representa.

TIPO DEL PLL: en el modelo lineal, número de polos en el origen de la función de transferencia a lazo abierto.

Supongamos un PLL de primer orden (con $F(s) = 1$). La ecuación diferencial que lo representa:

$$\frac{d\theta}{dt} = k_v e_v(t) = k_d k_v \text{sen}[\phi(t) - \theta(t)]$$

Cuando conectemos la señal sinusoidal de entrada $x_r(t)$, la frecuencia no coincidirá con la de la señal de salida del VCO \rightarrow tendremos un escalón de frecuencia a la entrada de amplitud $\Delta\omega$ (rampa de fase)

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega \quad t > 0$$

$$\phi(t) = \Delta\omega t \quad t > 0 \quad \dot{\theta} = k_d k_v \text{sen}(\psi) = \dot{\phi} - \dot{\psi}$$

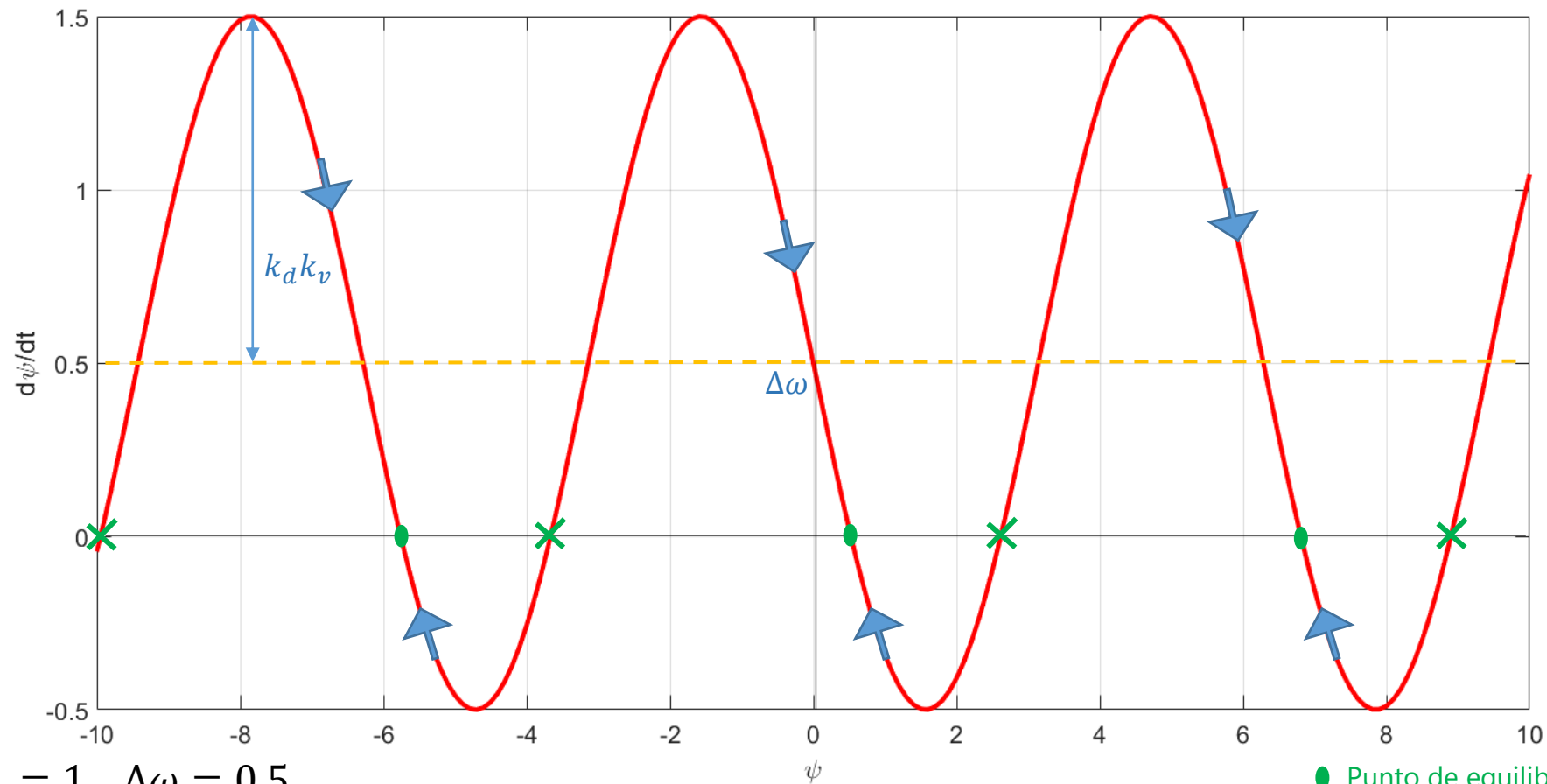
$$\rightarrow \dot{\psi} + k_d k_v \text{sen}(\psi) = \Delta\omega$$

Análisis no lineal del PLL de orden 1

$$\dot{\psi} + k_d k_v \sin(\psi) = \Delta\omega$$

$$|\Delta\omega| < k_d k_v = K$$

Plano de Fase

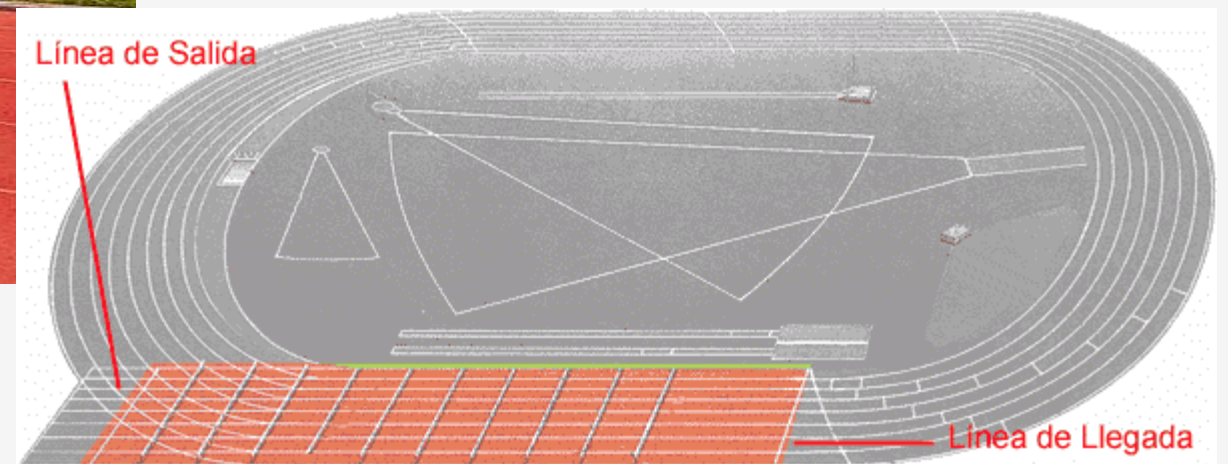


$$k_d = k_v = 1 \quad \Delta\omega = 0.5$$

- Punto de equilibrio estable
- ✕ Punto de equilibrio inestable

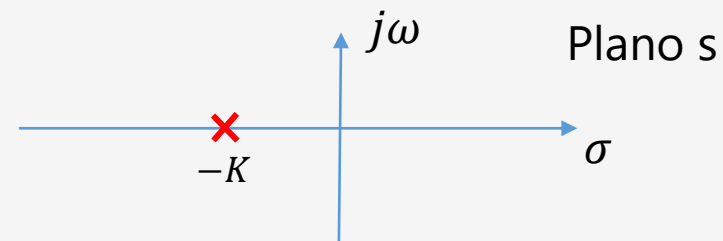


Nonlinear Dynamics And Chaos: With
Applications To Physics, Biology, Chemistry And
Engineering (Studies in Nonlinearity)
por Steven H. Strogatz



Modelo lineal

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{k_d k_v F(s)}{s + k_d k_v F(s)} \xrightarrow{F(s)=1} H(s) = \frac{K}{s + K}$$

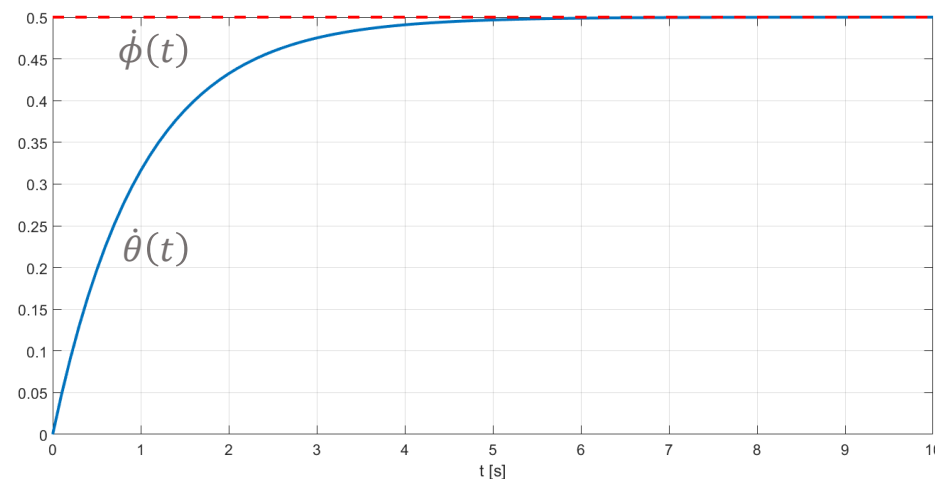


$$\text{Si } \dot{\phi}(t) = \Delta\omega \quad t > 0 \quad \longrightarrow \quad \phi(t) = \Delta\omega t \quad t > 0$$

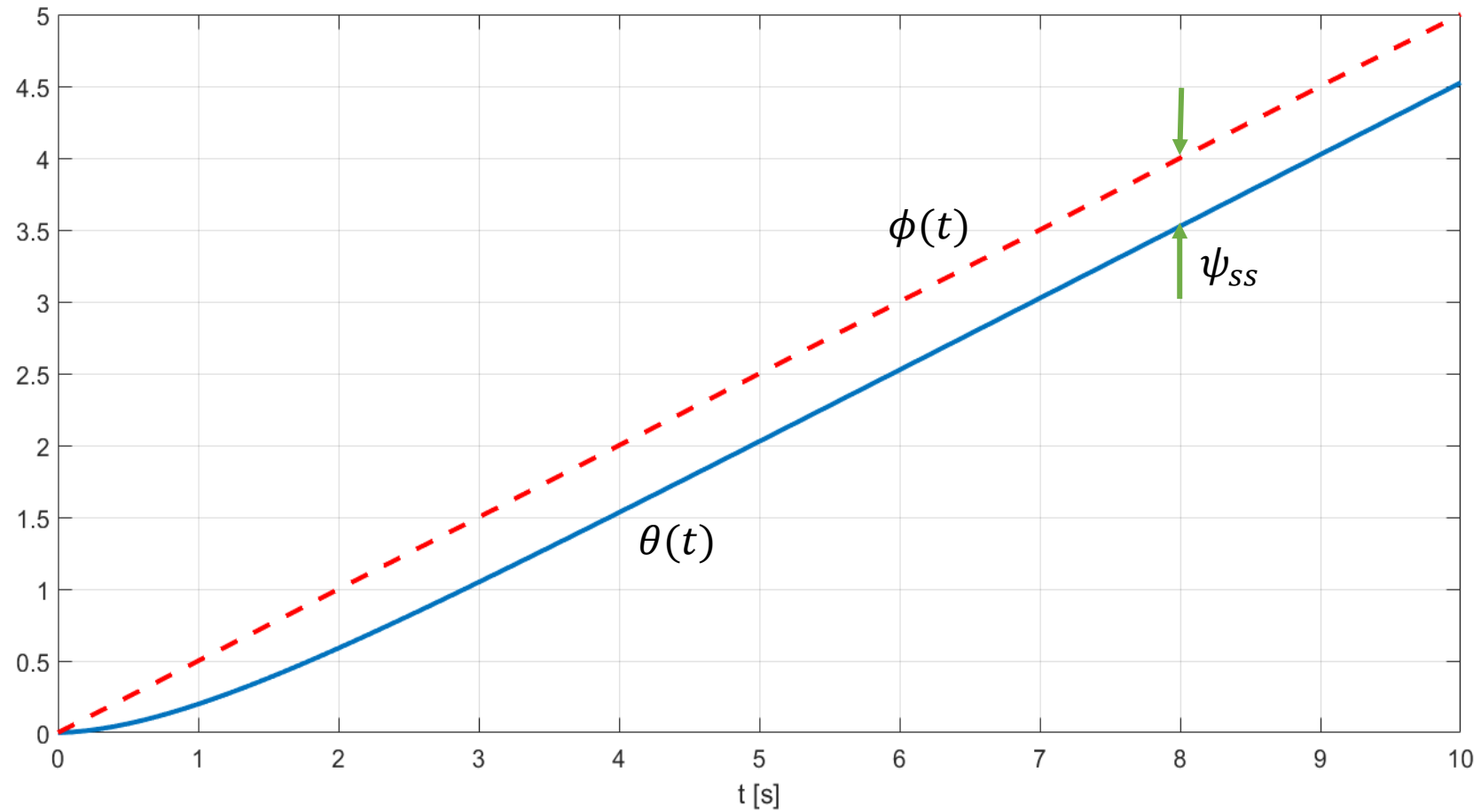
$$\theta(s) = \frac{\Delta\omega}{s^2} \frac{K}{s + K} \qquad s \theta(s) = \frac{\Delta\omega}{s} \frac{K}{s + K}$$

$$s \theta(s) = \frac{\Delta\omega}{s} - \frac{\Delta\omega}{s + K}$$

$$\dot{\theta}(t) = \Delta\omega (1 - e^{-Kt})u(t)$$



Modelo lineal



Ancho de banda de ruido

El rango de captura para el PLL de primer orden: $|\Delta\omega| < K$ es decir que necesito aumentar el valor de K para que el PLL se enganche para escalones de frecuencia más grandes.

Por otro lado, el Ancho de Banda equivalente de ruido para un sistema de primer orden:

$$B_N = \frac{\pi}{2} f_{-3dB} = \frac{\pi}{2} \frac{K}{2\pi} = \frac{K}{4}$$



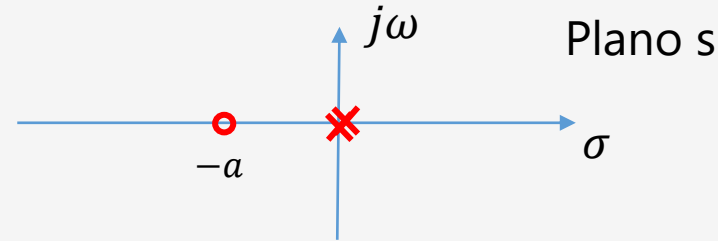
K



PLL 2do. Orden Tipo II (modelo lineal)

Necesito otro integrador

$$F(s) = \frac{s + a}{s}$$

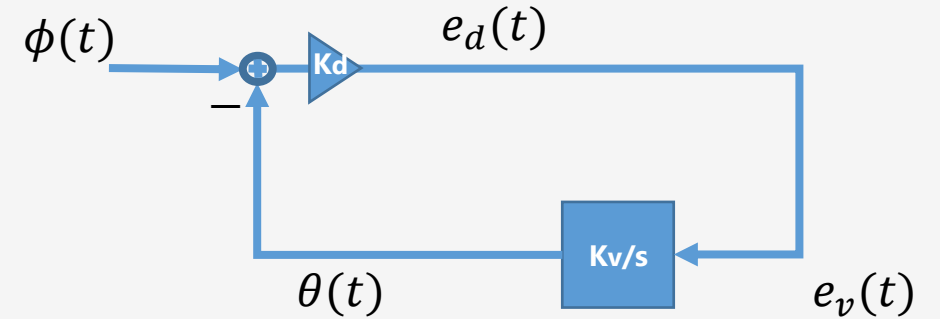


La transferencia de lazo cerrado:

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{K(s + a)}{s^2 + Ks + Ka}$$

La transferencia para el error:

$$\frac{\psi(s)}{\phi(s)} = 1 - H(s) = \frac{s^2}{s^2 + Ks + Ka} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_N s + \omega_N^2}$$

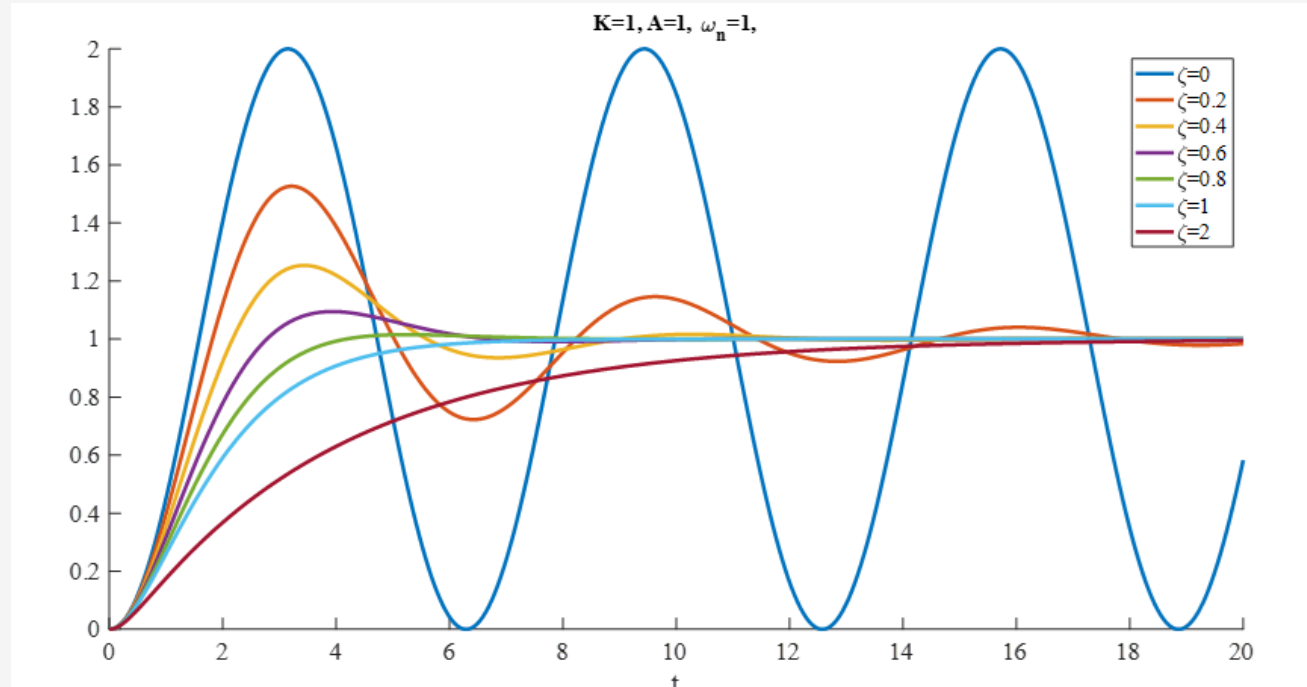


PLL de primer orden

$$\omega_N = \sqrt{Ka}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{a}}$$

PLL 2do. Orden Tipo II (modelo lineal)



$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\phi(s)} = \frac{K(s+a)}{s^2 + Ks + Ka}$$

La transferencia para el error:

$$\frac{\psi(s)}{\phi(s)} = 1 - H(s) = \frac{s^2}{s^2 + Ks + Ka} \quad \downarrow \quad \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_N s + \omega_N^2}$$

$$\omega_N = \sqrt{Ka}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{a}}$$

PLL 2do. Orden Tipo II (modelo no lineal)

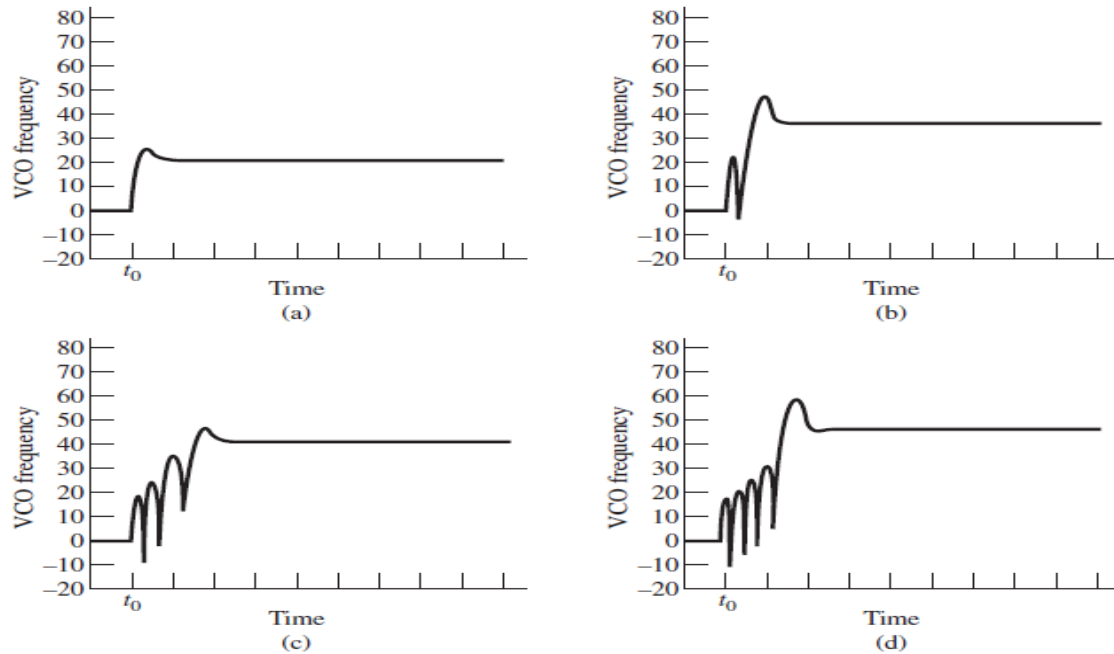
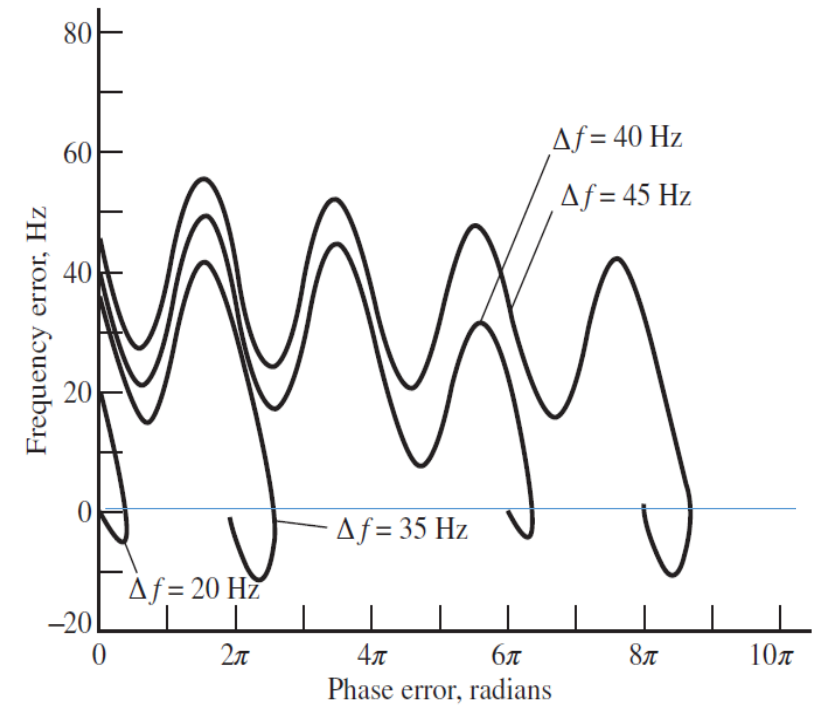


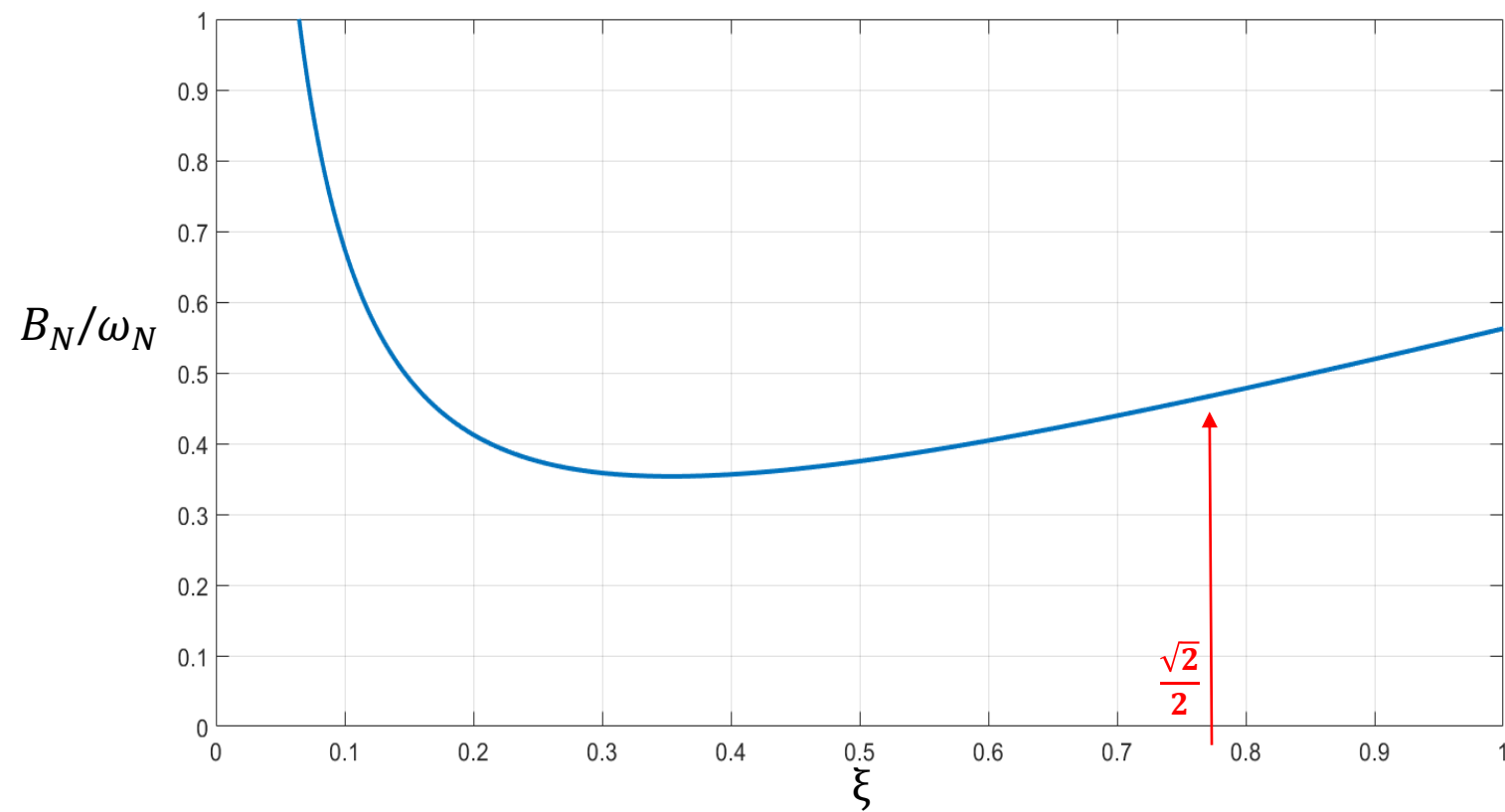
Figure 4.25

Voltage-controlled frequency for four values of the input frequency step. (a) VCO frequency for $\Delta f = 20$ Hz. (b) VCO frequency for $\Delta f = 35$ Hz. (c) VCO frequency for $\Delta f = 40$ Hz. (d) VCO frequency for $\Delta f = 45$ Hz.



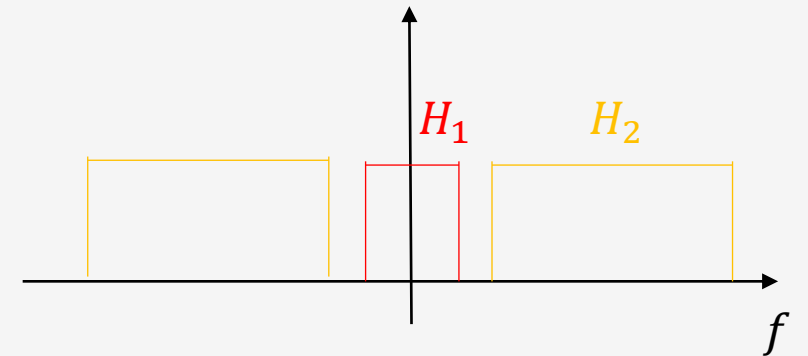
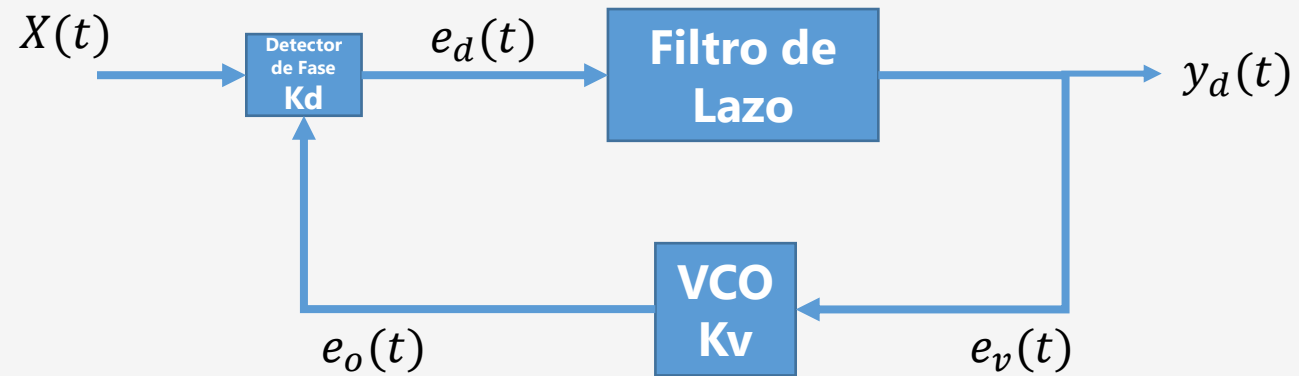
PLL 2do. Orden Tipo II

$$B_N = \frac{\omega_N}{2} \left(\xi + \frac{1}{8\xi} \right)$$

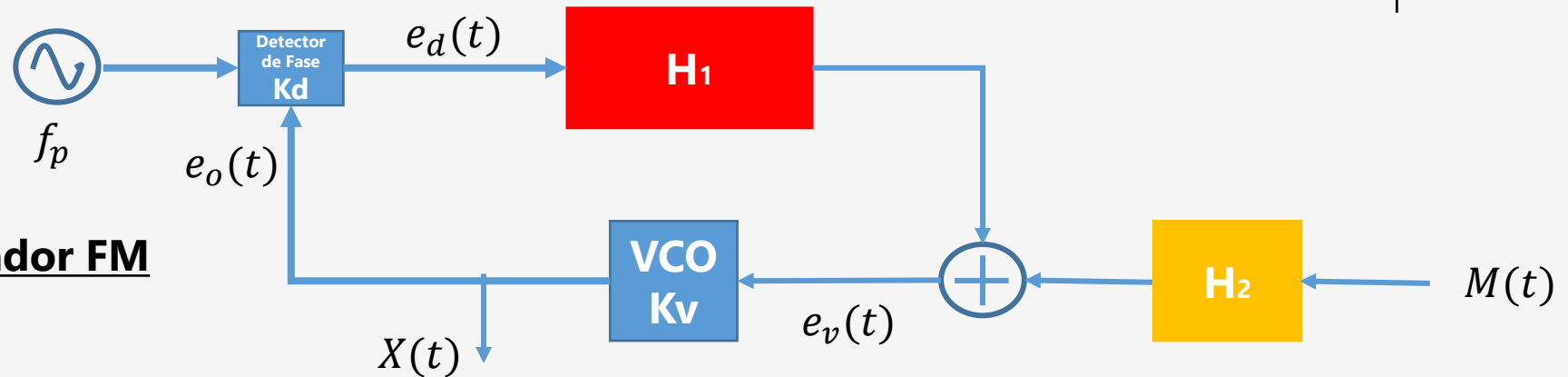


PLL usos

Demodulador FM

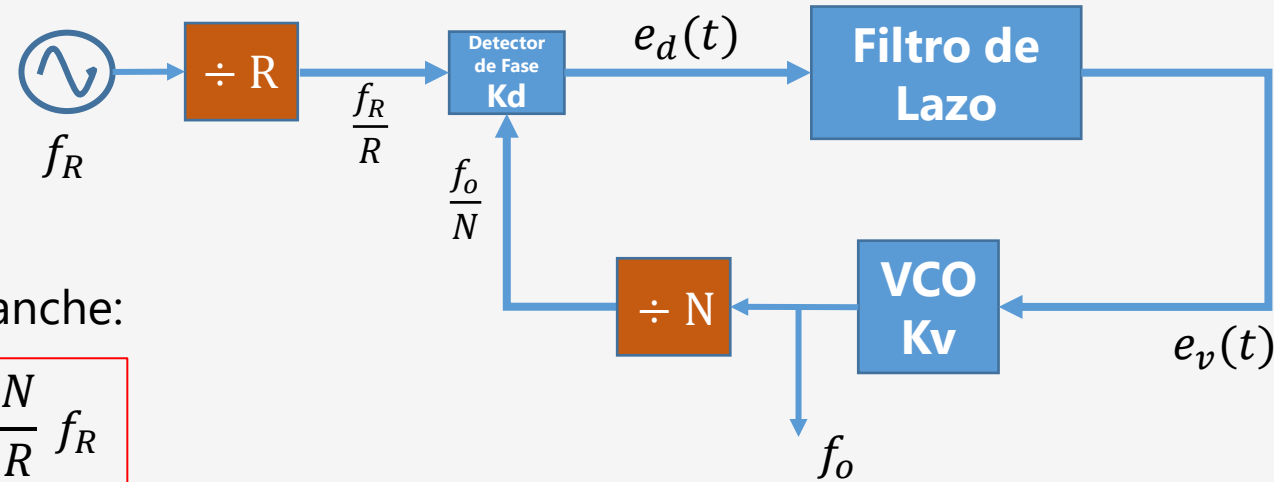


Modulador FM



PLL usos: Síntesis de Frecuencia

Integer-N PLL



En condiciones de enganche:

$$\frac{f_o}{N} = \frac{f_R}{R} \longrightarrow \boxed{f_o = \frac{N}{R} f_R}$$

$$N, R \in \mathbb{Z}$$

Fractional-N PLL

$$\boxed{f_o = \left(N + \frac{K}{F}\right) f_R}$$

$$N, K, F \in \mathbb{Z}$$

Fuentes:

- Principles of Communications, 5/E by Rodger Ziemer and William Tranter, John Wiley & Sons. Inc.
- Sitio de Analog Devices, Texas Instruments.
- CONAE

