

Análisis de Sistemas y Señales

Transformada de Laplace



Transformada de Laplace
Diagramas de Bode

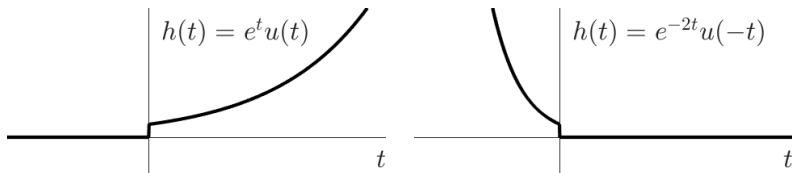


Transformada de Laplace

Motivación

Señales y Sistemas de Variable Independiente Continua.

- Señales de energía finita \rightarrow Transformada de Fourier
- Señales de potencia finita \rightarrow TF + Deltas de Dirac
- Sistemas estables $\rightarrow H(f) = TF\{h(t)\}$
- Respuesta de sistemas inestables (o a señales que no tienen TF)



Transformada de Laplace

Motivación

Recordemos

- $e^{j2\pi ft}$ autofunción de SLIT
- e^{st} , con $s = \sigma + j\omega$, también autofunción de SLIT

Entonces extendemos al plano complejo

Señales y Sistemas VIC $\in \mathbb{R} \supset$ Funciones de variable compleja

Utilidad de la Transformada de Laplace

- Análisis de señales y sistemas que no tienen TF.
- Determinación de estabilidad de sistemas.
- Descomposición de sistemas en bloques simples.
- Manipulación de diagramas en bloques.
- Diseño de sistemas lineales.

Transformada de Laplace

Definición

En general, tenemos señales SVIC bilaterales $x(t)$

Transformada de Laplace Bilateral

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) \quad s \in \text{RDC} \subseteq \mathbb{C}$$

- $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma = \text{Re}\{s\}$ y $\omega = \text{Im}\{s\}$
- RDC es la **región de convergencia** de la transformada en el plano complejo
- $X(s)$ es una función de variable compleja analítica en su región de convergencia
- $e^{-\sigma t}$ modifica la existencia de $X(s)$
- comparación de $x(t)e^{-\sigma t}$ con una señal de frecuencia conocida

Transformada de Laplace

Definición

Relación con la transformada de Fourier

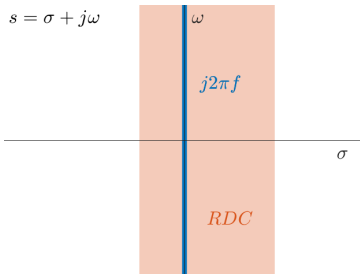
$$X(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}(f) \quad \text{con } \omega = 2\pi f$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$s = j2\pi f$$

$$\begin{aligned} X^L(j2\pi f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ &= X^F(f) \end{aligned}$$



Transformada de Laplace

Definición

Transformada Unilateral a derecha

$$X_+(s) = \mathcal{L}_+\{x(t)\}(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad s \in \mathbb{C}$$

- Por lejos, la más usada.
- cuando $x(t)$ es unilateral a derecha, desde $t = 0$, o sea $x(t) = 0$ para $t < 0$, resulta $X(s) \equiv X_+(s)$

y también Transformada Unilateral a izquierda

$$X_-(s) = \mathcal{L}_-\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-st}dt \quad s \in \mathbb{C}$$

esta última, muy poco utilizada.

Transformada de Laplace

Ejemplo

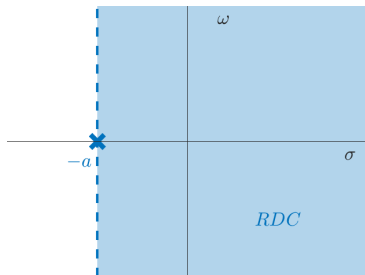
$$y(t) = e^{-at}u(t)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-(s+a)t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-e^{-(s+a)M} + 1}{s+a} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Si $\text{Re}\{s\} > -a$

Converge

$$e^{-at}u(t) \supset \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$



Transformada de Laplace

Ejemplo

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)e^{-at}u(-t)e^{-st} dt$$

$$= - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 e^{-(s+a)t} dt$$

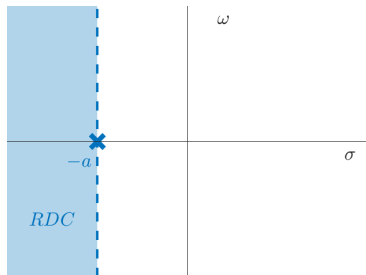
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{(s+a)M}}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

e^{Ax}
 $s \cdot A \rightarrow \infty \rightarrow e \rightarrow \infty$
 $\nearrow \infty, A \rightarrow \infty$

Si $\text{Re}\{s\} < -a$

Converge

$$-e^{-at}u(-t) \supset \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < -a$$



Transformada de Laplace

Ejemplo

Observaciones

- Dos señales distintas tienen la misma $X(s)$
- Difieren en la región de convergencia RDC
- La señal UD tiene una RDC a la derecha de un punto
- La señal UI tiene una RDC a la izquierda de un punto
- La no-unicidad se resolverá conociendo la lateralidad de la señal o su RDC

Necesitamos estudiar las RDC y sus propiedades.

Tendremos cuidado con esto cuando definamos la transformada de Laplace inversa... ¿existe?, ¿y la no-unicidad?

Transformada de Laplace

Inversa

Teníamos $X(s)|_{s=\sigma+j2\pi f} = \mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j2\pi f) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}(f)$.

Aprovechamos que conocemos la transformada inversa de Fourier

$\mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j2\pi f)\}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ y entonces

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\sigma t} \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j2\pi f)\}(t) = e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j2\pi f) e^{j2\pi f t} df \\&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j2\pi f) e^{\sigma t} e^{j2\pi f t} df\end{aligned}$$

la línea de integración $s \in (\sigma - j\infty, \sigma + j\infty)$ tiene que estar dentro de la RDC para estar seguro que la $X(s)$ es válida en ella

Transformada de Laplace Inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) \quad \sigma \in \text{RDC}$$

Transformada de Laplace

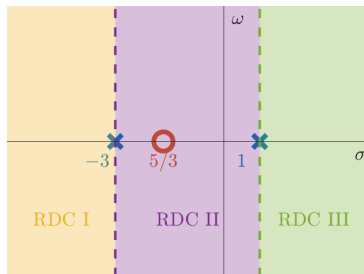
RDC

Propiedad 1

La RDC de $X(s)$ son bandas paralelas al eje imaginario del plano s

$\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ debe existir $\rightarrow x(t)e^{-\sigma t}$ debe cumplir las condiciones de Dirichlet que depende de $\sigma = \text{Re}\{s\}$ y no de $\text{Im}\{s\} \rightarrow$ mientras $\text{Re}\{s\} \in \text{RDC}, s \in \text{RDC}$

RDC: bandas sombreadas
posiblemente hasta $\sigma = \pm\infty$



Transformada de Laplace

RDC

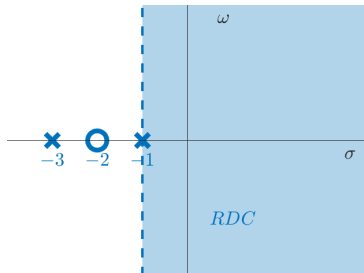
Propiedad 2

Si $X(s)$ es una función racional de s , su RDC no contiene polos

- $X(s)$ es una función racional de s

$$X(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{a_0 s^M + a_1 s^{M-1} + \dots + a_{M-1} s + a_M} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{n=0}^N (s - z_n)}{\prod_{m=0}^M (s - p_m)}$$

- una función en un polo vale “infinito” por lo que tiene sentido que los $p_i \notin \text{RDC}$
- si la función tiene polos, están fuera de las bandas de la RDC
- $X(s)$ racionales asociadas a los SLIT



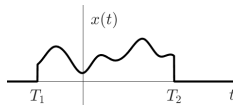
Transformada de Laplace

RDC

Propiedad 3

Si $x(t)$ es una función de duración finita y hay al menos un $s_0 \in \text{RDC}$ entonces $X(s)$ converge $\forall s \in \mathbb{C}$

Duración finita: existe un intervalo (T_1, T_2) por fuera del cual $x(t) = 0$



Como $s_0 \in \text{RDC}$, $\text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt &= \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{(\sigma_0 - \sigma)t} dt \\ &< \begin{cases} e^{(\sigma_0 - \sigma)T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty & \text{si } (\sigma_0 - \sigma) > 0 \\ e^{(\sigma_0 - \sigma)T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty & \text{si } (\sigma_0 - \sigma) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

para cualquier $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}\{s\} = \sigma$

Transformada de Laplace

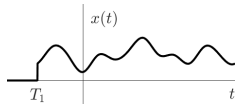
RDC

Propiedad 4

Si $x(t)$ es unilateral a derecha y $s_0 \in \text{RDC}$ entonces $X(s)$ converge $\forall s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma = \text{Re}\{s\} \geq \text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$

La RDC también es hacia la derecha.

UD: existe un T_1 tal que $x(t) = 0 \forall t < T_1$



Como $s_0 \in \text{RDC}$, $\text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{(\sigma_0 - \sigma)t} dt \\ &< e^{(\sigma_0 - \sigma)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

para cualquier $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}\{s\} = \sigma \geq \sigma_0$.

Transformada de Laplace

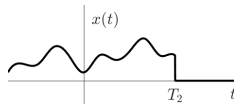
RDC

Propiedad 5

Si $x(t)$ es unilateral a izquierda y $s_0 \in \text{RDC}$ entonces $X(s)$ converge $\forall s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma = \text{Re}\{s\} \leq \text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$

La RDC también es hacia la izquierda.

UI: existe un T_2 tal que $x(t) = 0 \forall t > T_2$



Como $s_0 \in \text{RDC}$, $\text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt &= \int_{-\infty}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{(\sigma_0 - \sigma)t} dt \\ &< e^{(\sigma_0 - \sigma)T_2} \int_{-\infty}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

para cualquier $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}\{s\} = \sigma \leq \sigma_0$.

Transformada de Laplace

RDC

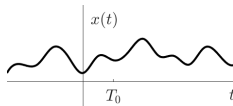
Propiedad 6

Si $x(t)$ es bilateral y $s_0 \in \text{RDC}$ entonces $X(s)$ converge $\forall s \in \mathbb{C}$ en una **banda** paralela al eje $j\omega$ que contiene a s_0

Bilateral: existe un T_0 tal que

$x(t) = x_{ud}(t) + x_{ui}(t)$ tal que

$x_{ud}(t) = 0 \forall t > T_0$ y $x_{ui}(t) = 0 \forall t < T_0$



- $X_{ud}(s)$ existe $\forall s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_D$
- $X_{ui}(s)$ existe $\forall s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}\{s\} = \sigma < \sigma_I$
- Como hay un $s_0 \in \text{RDC}$ entonces debe ser $\sigma_D \leq \sigma_0 \leq \sigma_I$
- La RDC es una única banda paralela al eje $j\omega$ que contiene a s_0

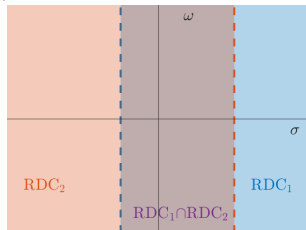
Atención: puede ocurrir que $\sigma_D \not\leq \sigma_I$ entonces no hay RDC para toda la señal y **no** existe su $\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$. Aún se puede trabajar con métodos de Laplace para $x_{ud}(t), X_{ud}(s)$ y $x_{ui}(t), X_{ui}(s)$ pero separadamente

Transformada de Laplace

Propiedades

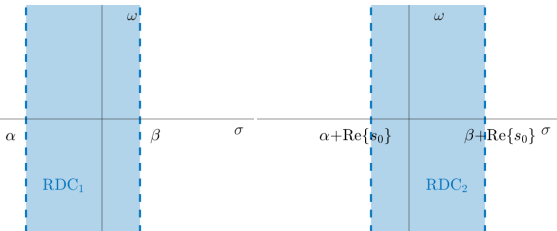
Linealidad: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$ y $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$; $a, b \in \mathcal{C}$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ax_1(t) + bx_2(t)\}(s) &= \\ &= a\mathcal{L}\{x_1\}(s) + b\mathcal{L}\{x_2\}(s) = \\ &= aX_1(s) + bX_2(s)\end{aligned}$$



Desplazamiento:

$$\begin{aligned}x(t - t_0) &\supset e^{-st_0} X(s) \\ e^{s_0 t} x(t) &\supset X(s - s_0)\end{aligned}$$

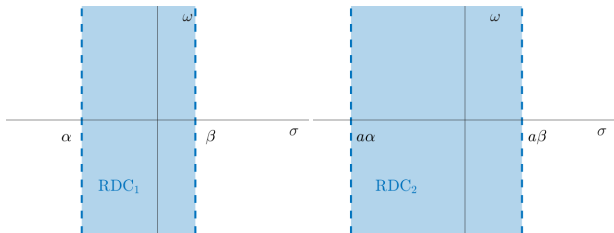


Transformada de Laplace

Propiedades

Cambio de Escala:

$$x(at) \supset \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$



Convolución:

$$x_1(t) * x_2(t) \supset X_1(s)X_2(s) \quad \text{RDC}_1 \cap \text{RDC}_2 \subset \text{RDC}$$

$$x_1(t)x_2(t) \supset X_1(s) * X_2(s) \quad \text{RDC}_1 \cap \text{RDC}_2 \subset \text{RDC}$$

Integración:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \supset \frac{X(s)}{s} \quad \text{RDC} = \text{RDC}_x \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}$$

Transformada de Laplace

Propiedades

Diferenciación:

$$\frac{dx(t)}{dt} \supset sX(s) \quad \text{RDC} = \text{RDC}_x$$

$$-tx(t) \supset \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{RDC} \supset \text{RDC}_x$$

Valor inicial y Valor final: sólo para UD $x(t) = 0 \forall t < 0$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Transformada de Laplace

Pares

$$\delta(t) \supset 1 \quad \forall s$$

$$u(t) \supset \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$u(t-a) \supset \frac{1}{s} e^{-as} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$e^{-at}u(t) \supset \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \supset \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

$$\text{sen}(\omega t)u(t) \supset \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\text{cos}(\omega t)u(t) \supset \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

\mathcal{L}
no \nexists cte

Transformada de Laplace

SLIT

Para un SLIT $y(t) = \{h * x\}(t) \supset Y(s) = H(s)X(s)$

Transferencia del Sistema

es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Ecuación diferencial lineal

$$y(t) = -a_1 \dot{y}(t) - a_2 \ddot{y}(t) + b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t)$$

$$Y(s) = -a_1 s Y(s) - a_2 s^2 Y(s) + b_0 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 s^2 X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2} = H(s)$$

la transferencia es **racional**

Transformada de Laplace

SLIT

Para transferencias **racionales**

- Raíces del numerador: Ceros ($H(z_k) = 0$)
- Raíces del denominador: Polos ($H(p_k) \rightarrow \infty$)

Ejemplo

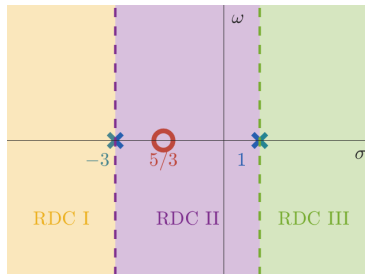
$$H(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 2s - 3}$$

polos? ceros?

$$= \frac{3(s + 5/3)}{(s - 1)(s + 3)}$$

polos: $\{-3, 1\}$, ceros: $\{-5/3, \infty\}$

$$= \frac{1}{s - 1} + \frac{2}{s + 3}$$



Transformada de Laplace

SLIT

Propiedades de SLIT con $H(s)$ racional y RDC

- **Sistemas estables**

$h(t)$ absolutamente integrable $\Leftrightarrow \{\operatorname{Re}\{s\} = 0\} \subset \text{RDC}$

- **Sistemas causales**

$h(t)$ unilateral derecha $\Leftrightarrow \{\operatorname{Re}\{s\} = \infty\} \subset \text{RDC}$

- **Sistemas anticausales**

$h(t)$ unilateral izquierda $\Leftrightarrow \{\operatorname{Re}\{s\} = -\infty\} \subset \text{RDC}$

- **Sistemas no causales**

$h(t)$ bilateral $\Leftrightarrow \{\operatorname{Re}\{s\} = \pm\infty\} \notin \text{RDC}$

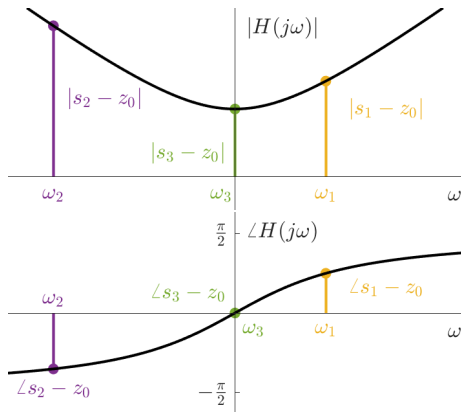
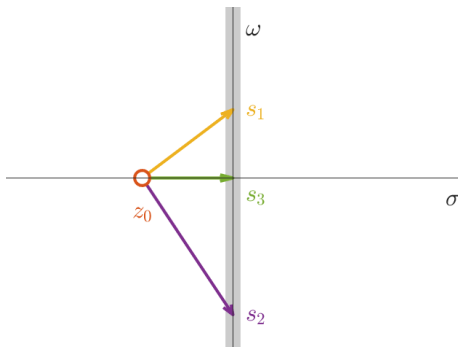
Para que un sistema sea **causal y estable**, su función transferencia debe tener todos sus polos en el semiplano izquierdo

Respuesta en Frecuencia

Introducción

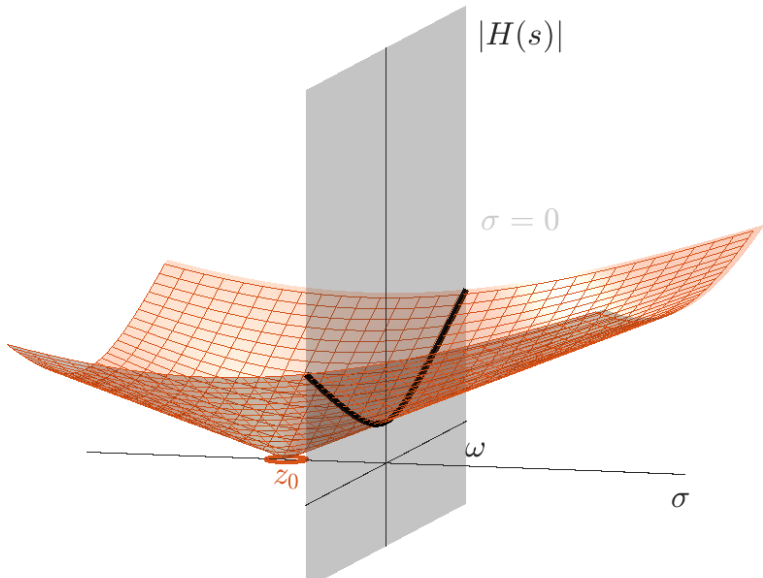
Cero

$$H(s) = s - z_0$$



Respuesta en Frecuencia

Introducción

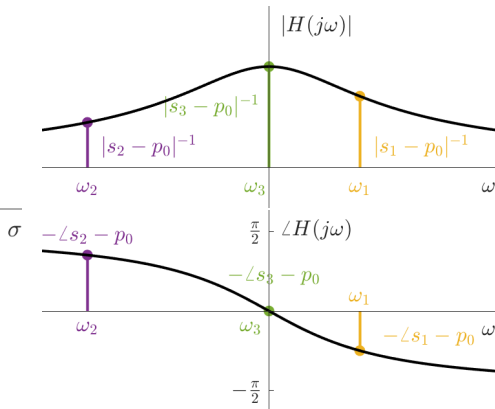
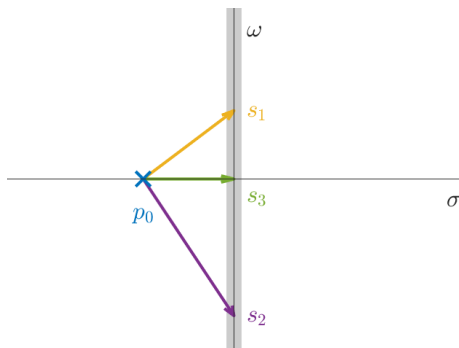


Respuesta en Frecuencia

Introducción

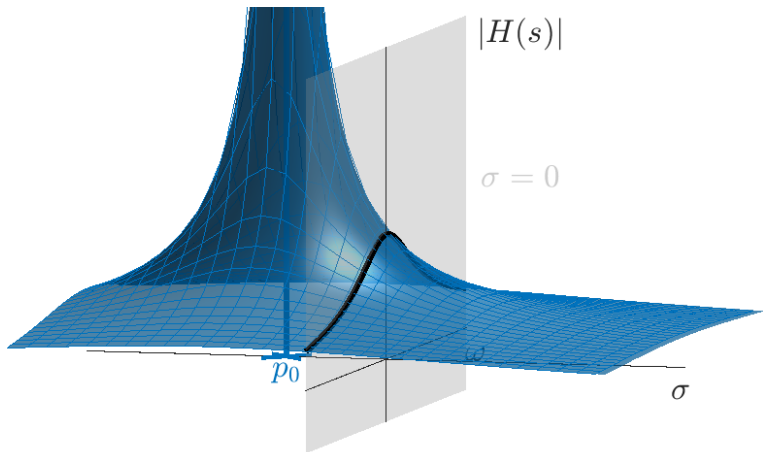
Polo

$$H(s) = \frac{1}{s-p_0} \quad \begin{matrix} \text{red arrows} \\ \swarrow \searrow \\ \angle s \end{matrix}$$



Respuesta en Frecuencia

Introducción

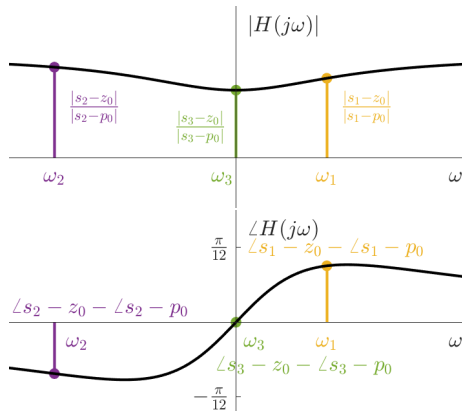
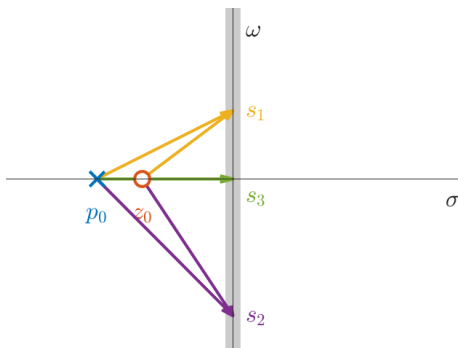


Respuesta en Frecuencia

Introducción

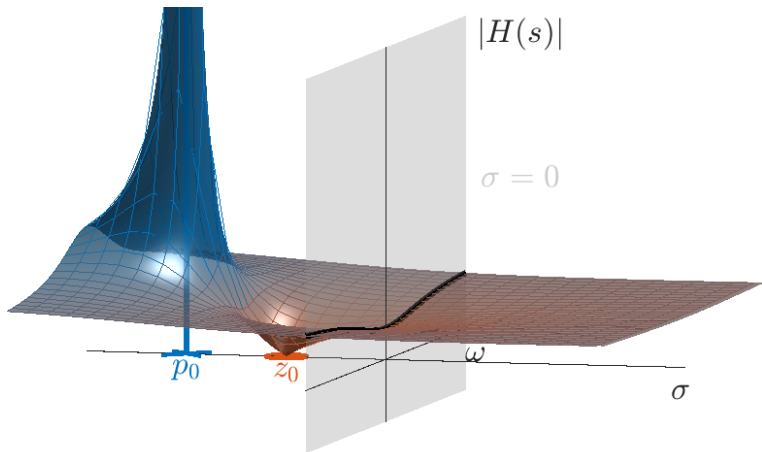
Polo y cero

$$H(s) = \frac{s-z_0}{s-p_0}$$



Respuesta en Frecuencia

Introducción

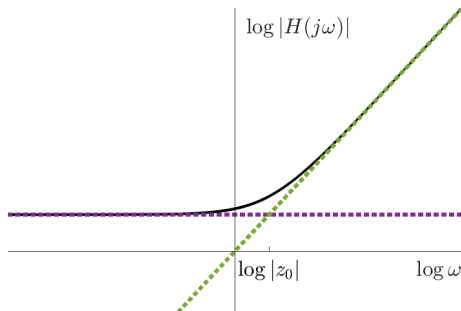
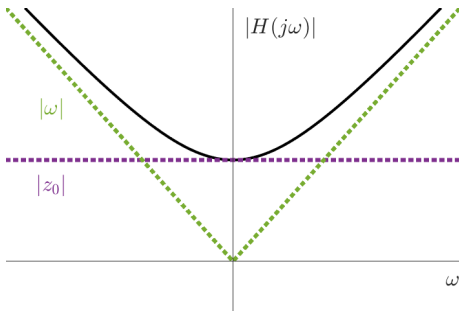


Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico del Módulo

Cero

$$H(j\omega) = j\omega - z_0$$



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = |z_0|$$

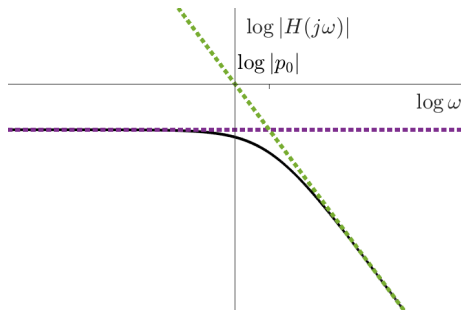
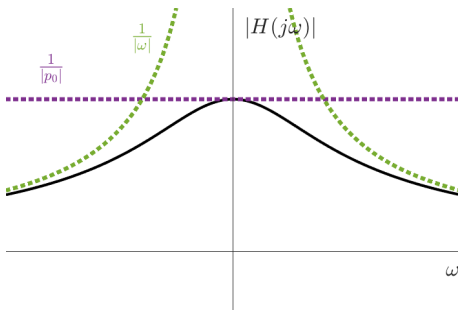
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = \omega$$

Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico del Módulo

Polo

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - p_0}$$



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \frac{1}{|p_0|}$$

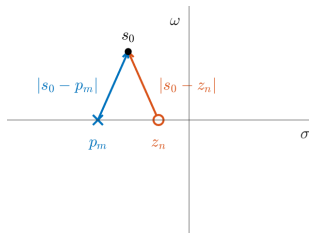
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico del Módulo

Polos y Ceros

$$H(s) = K \frac{\prod_{n=1}^N (s - z_n)}{\prod_{m=1}^M (s - p_m)}$$



$$|H(s)| = \left| K \frac{\prod_{n=1}^N (s - z_n)}{\prod_{m=1}^M (s - p_m)} \right| = |K| \frac{\prod_{n=1}^N |(s - z_n)|}{\prod_{m=1}^M |(s - p_m)|}$$

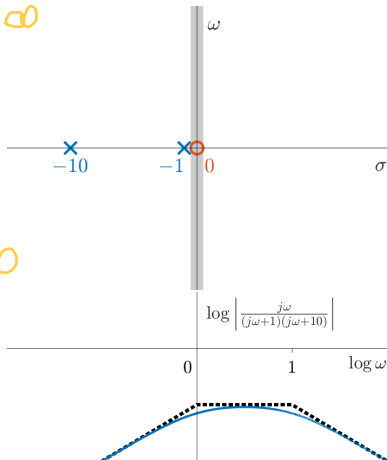
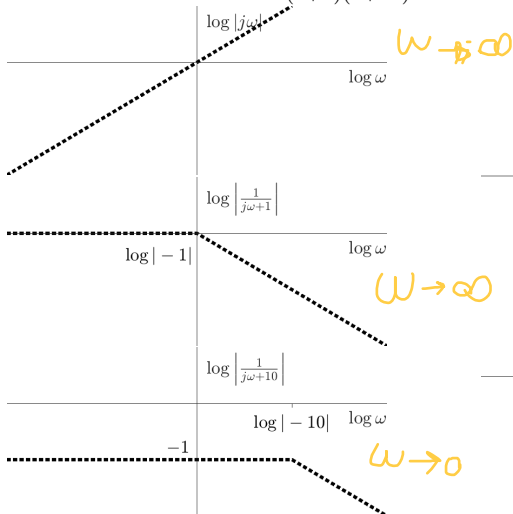
$$\log |H(s)| = \log |K| + \sum_{n=1}^N \log |(s - z_n)| - \sum_{m=1}^M \log |(s - p_m)|$$

Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico del Módulo

Ejemplo 1

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}$$

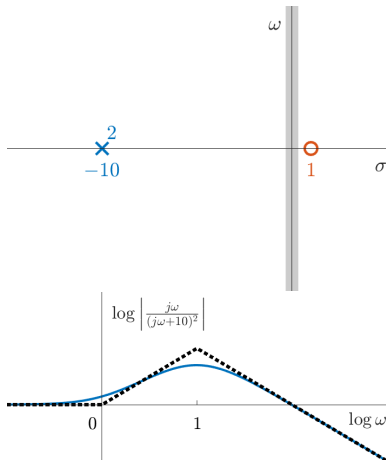
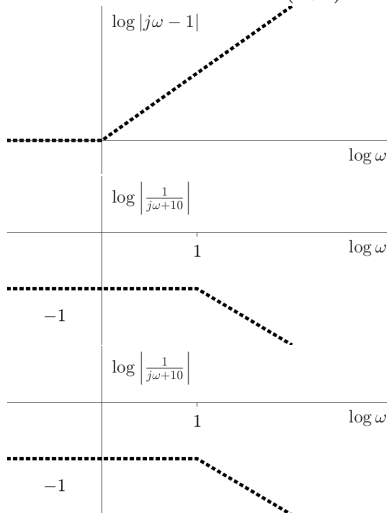


Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico del Módulo

Ejemplo 2

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+10)^2}$$

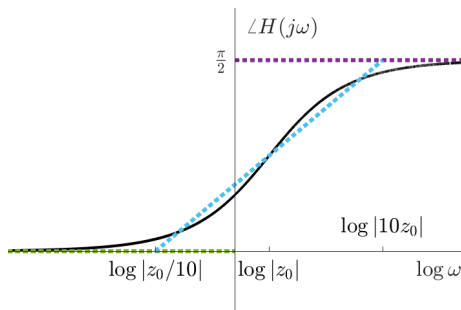
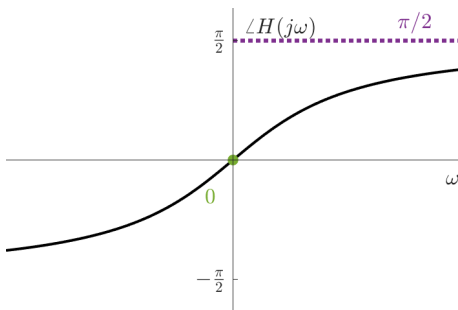


Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico de la Fase

Cero

$$H(j\omega) = j\omega - z_0$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

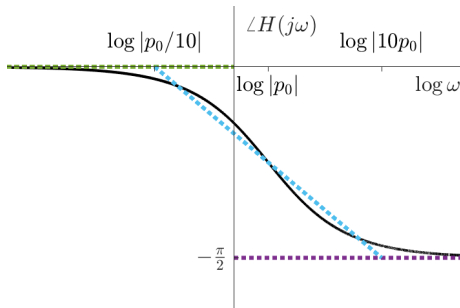
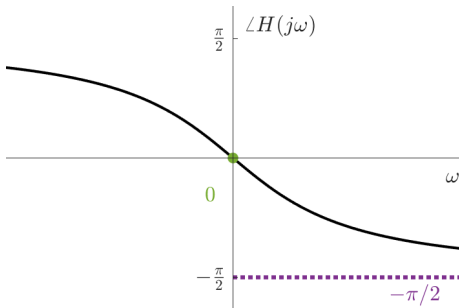
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) = 0$$

Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico de la Fase

Polo

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - p_0}$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle H(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

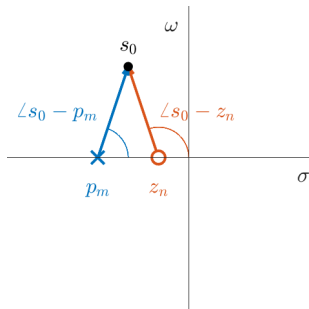
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle |H(j\omega)| = 0$$

Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico de la Fase

Polos y Ceros

$$\begin{aligned}\angle H(s) &= \angle \left(K \frac{\prod_{n=1}^N (s - z_n)}{\prod_{m=1}^M (s - p_m)} \right) \\ &= \angle K + \sum_{n=1}^N \angle(s - z_n) - \sum_{m=1}^M \angle(s - p_m)\end{aligned}$$

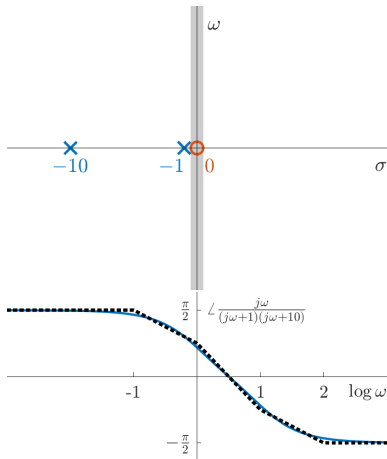
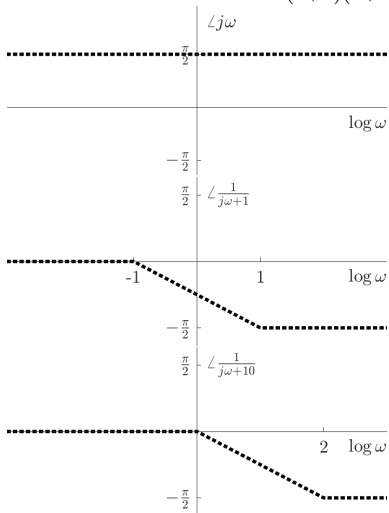


Respuesta en Frecuencia

Comportamiento Asintótico de la Fase

Ejemplo 1

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}$$

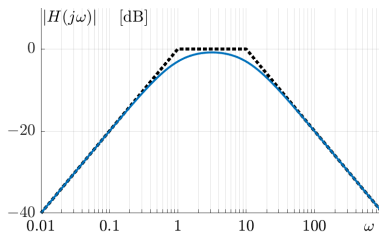
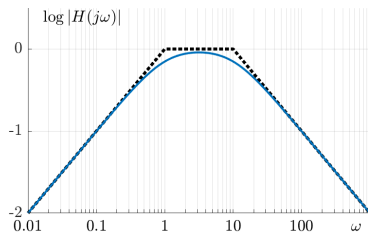
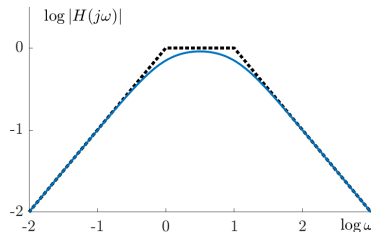


Respuesta en Frecuencia

Diagrama de Bode

$$H(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+10)}$$

$$|H(j\omega)| \text{ [dB]} = 20 \log |H(j\omega)|$$



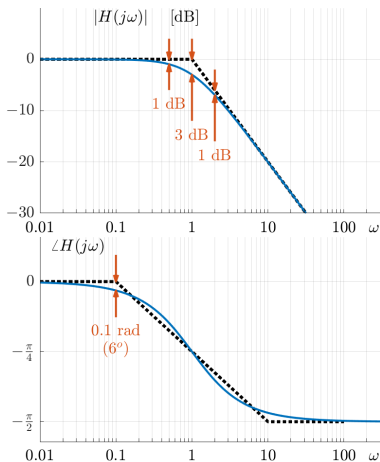
Respuesta en Frecuencia

Diagrama de Bode

Exactitud

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

X	$20 \log X$
1	0 dB
$\sqrt{2}$	≈ 3 dB
2	≈ 6 dB
10	20 dB
100	40 dB



Respuesta en Frecuencia

Diagrama de Bode

Polos Complejos Conjugados

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Sistema de Segundo orden

