UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. Julieta Vernieri
J.T.P. Cátedra de Campos y Ondas

Resumen de Fórmulas sobre Reflexión y Refracción de Ondas Planas y Vector de Poynting

para el desarrollo del TP 11

INDICE DE TEMAS

* Ecuaciones de Maxwel para Ondas Planas en medios LIH
    - La ecuación diferencial y su solución, depende de las hipótesis iniciales de la onda (en este caso onda plana), de las constantes del medio y de las condiciones de contorno
* Condiciones de Contorno
    - Sólo abordaremos componentes tangenciales (campo eléctrico se conserva siempre, campo magnético hay un solo caso en el que no se conserva, en el resto se conserva siempre)
* Reflexión y Refracción de Ondas Planas con Incidencia Normal
    - Caso 1: dielec perfecto/ conductor perfecto o ideal
    - Caso 2: GENERAL dielec con pérdidas/ dielec con pérdidas
    - Caso 3: dielec perfecto/ dielec perfecto
* Relación de Onda Estacionaria
* Vector de Poynting

ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS LINEALES, ISOTROPICOS Y HOMOGENEOS, PARA CAMPOS CON VARIACION ARMONICA.

Hipótesis

- medios homogéneos, isotrópicos y lineales (NO hay cargas libres en el espacio)
- medio acotado espacialmente.
- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo (varían sinusoidalmente)

Ecuaciones de Maxwell	Considerando fasores
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0$ $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega \dot{\mathbf{H}}$ $\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$ $\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon \dot{\mathbf{E}}$

haciendo rotor de rotor, para el campo eléctrico, $\nabla\times\nabla\times\dot{\mathbf{E}} = \vec{\nabla}(\nabla.\dot{\mathbf{E}}) - \nabla^2\dot{\mathbf{E}}$

$$\boxed{\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\dot{\mathbf{E}}} \quad \boxed{\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2\dot{\mathbf{E}}}$$

Siendo $\overset{*}{\Upsilon}$ la constante de propagación, un número complejo

$$\overset{*}{\Upsilon} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta,$$

α : coeficiente de atenuación, β: constante de fase

velociddad de fase $v_f = \omega/\beta$

PARA ONDAS PLANAS

$$\boxed{\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2\dot{\mathbf{E}}} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2\dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2\dot{E}_y(x)}$$

y la solución para el fasor será: $\boxed{\dot{E}_y(x) = \overset{*}{C}_1 e^{-\overset{*}{\Upsilon}x} + \overset{*}{C}_2 e^{+\overset{*}{\Upsilon}x} = \dot{E}_i(x) + \dot{E}_r(x)}$

Sabemos que la relación entre el fasor del campo eléctrico de una onda que viaja en el sentido positivo de las x, y eñ fasor de la onda del campo magnético que viaja en el mismo sentido está dada por la IMPEDANCIA INTRÍNSECA del medio Zi. Si las ondas viajan en el sentido negativo la relación es MENOS la IMPEDANCIA INTRÍNSECA del medio Zi (esto sale de resolver la ecuación de Maxwell: $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega\dot{\mathbf{H}}$)

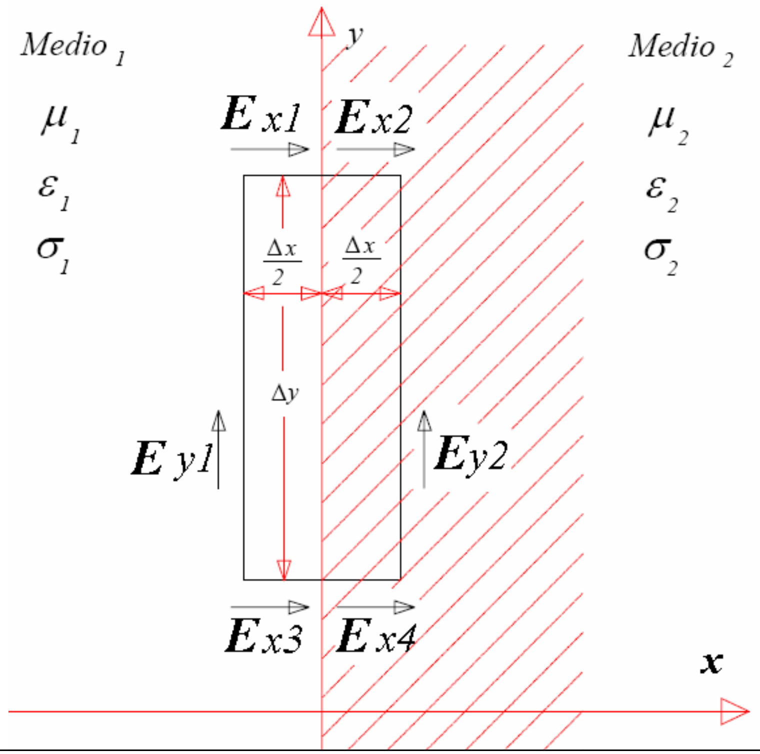
La impedancia intrínseca del medio $\overset{*}{\eta}$ o $\overset{*}{Z}_i$ es:

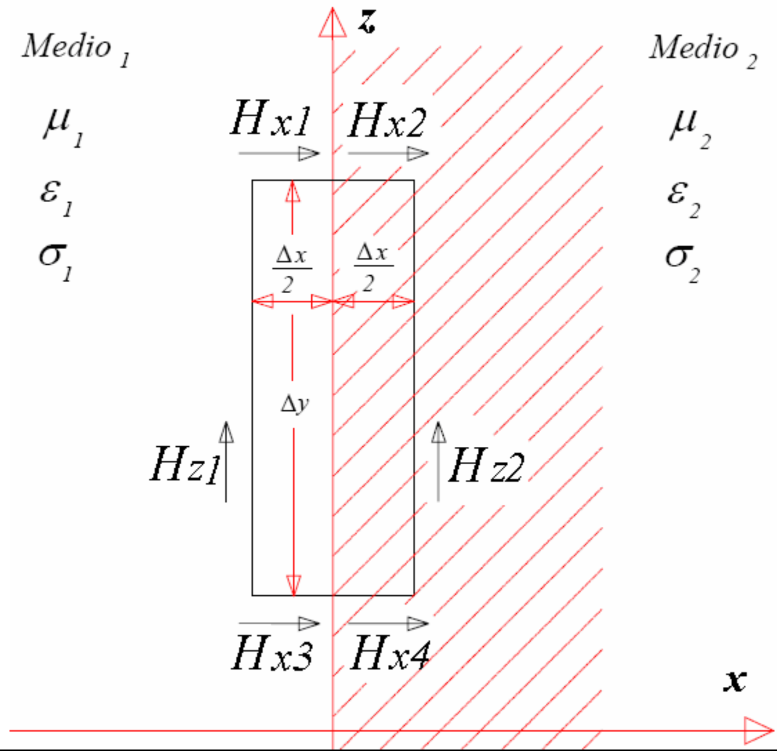
$$\overset{*}{\eta} = \overset{*}{Z}_i = \frac{\dot{E}_i}{\dot{H}_i} = -\frac{\dot{E}_r}{\dot{H}_r}$$

me da la relación de módulos entre ambos campos con sus respectivas unidades y también me da el desfasaje temporal entre los dos campos E y H

$$\boxed{\overset{*}{Z}_i = \left|\overset{*}{Z}_i\right| e^{j\varphi_{Zi}} = \frac{j\omega\mu}{\overset{*}{\Upsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}}$$

CONDICIONES DE CONTORNO





$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ como } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq \infty \rightarrow Ey_1 = Ey_2$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{Et_1 = Et_2}$ E tangencial se conserva SIEMPRE

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$, sí puedo asegurar $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq \infty$

pero ¿puedo asegurar que $\mathbf{J} \neq \infty$???

* Si **J** finita $Hz_1 = Hz_2$ H tang se conserva sólo si J es finita

* **J** infinita $Hz_1 \Delta z - Hz_2 \Delta z = (\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x)\Delta z = i_{ly} \Delta z$

Htang NO SE CONSERVA $\boxed{Hz_1 - Hz_2 = i_{ly}}$ i_{ly} ***corriente laminar***, corriente por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético [A/m]

Reflexión Y Refracción De Ondas Planas Con Incidencia Normal.

Caso 1: Medio 1 Dieléctrico Perfecto / Medio 2 Conductor Perfecto

Hipótesis

- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite
- $\sigma_1 = 0$ (ε_1 ; $\mu_1 = \mu_0$)
- $\sigma_2 = \infty$; ($\varepsilon_2 = \varepsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$)

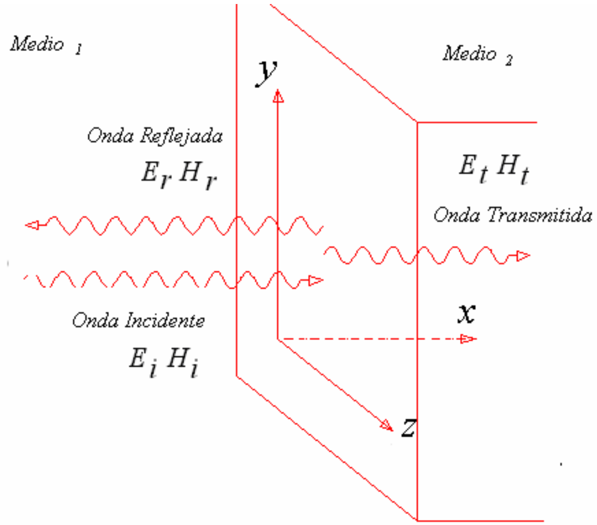


Figura. Reflexión y refracción de ondas planas.

Medio 1 (dielec perfecto):

$$\boxed{\overset{*}{\Upsilon}_1 = 0 + j\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}}$$ es un imaginario puro

$$\alpha_1 = 0 \ \text{ y } \ \beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}$$

no tiene atenuación(α_1=0)

Para un medio sin pérdidas la onda viaja SIN ATENUACION

La impedancia intrínseca del medio 1 (dieléctrico sin pérdidas)

$$\overset{*}{Z}i_1 = \frac{j\omega\mu_0}{\overset{*}{\Upsilon}} = \frac{\dot{E}i}{\dot{H}i} = -\frac{\dot{E}r}{\dot{H}r} = \frac{j\omega\mu_0}{\sqrt{j\omega\mu_0(0 + j\omega\varepsilon_1)}} = \sqrt{\frac{(j\omega\mu_0)^2}{j\omega\mu_0 j\omega\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

$$\boxed{\overset{*}{Z}i_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}}$$ es un número real

Para un medio sin pérdidas, E y H viajan en FASE TEMPORAL

Ecuación diferencial en el medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_1^2\, \dot{E}_y(x)}$$

la solución para el fasor será:

$$\boxed{\dot{E}_y(x) = \overset{*}{C}_1\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} + \overset{*}{C}_2\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = \dot{E}i(x) + \dot{E}r(x)}$$

Supongamos conocida la onda incidente y deduzcamos la onda reflejada a partir de las condiciones de contorno. Al ser la incidencia normal, sólo habrá componente tangencial:

Componente tangencial de campo eléctrico

siempre se conserva: $E_{tang1} = E_{tang2}$

¿se conserva???? $H_{tang1} = ? \neq ?\, H_{tang2}$

J = σ E= ∞ . 0 = ?? indefinido

Medio 2 (conductor ideal):

Componente tangencial de campo magnético

Resolvamos primero la solución para el campo eléctico ya que para éste sí sabemos que en la superficie de separación el E tangencial se conserva a uno y otro lado de la superficie

El **conductor ideal** no deja penetrar al campo, $\delta_2 = 0$

En el medio 2, para x > 0 o sea adentro del conductor ideal ═► **E** transmitida = 0 para todo x> 0

$$E_2(0) = 0$$

en x = 0 ═► $E_1(0) = E_2(0)$ por condición de contorno, o sea E_1 (0) = 0

$$E_1(0) = 0 = Ei(0) + Er(0)$$

$$Er(0) = -Ei(0)$$

Sea la onda incidente (por simplicidad asumimos $\varphi_{Ei}=0$)

$$\boxed{Ei_y(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x)}$$

La parte compleja del fasor correspondiente al campo eléctrico será :

$$\dot{E}\, i(x) = \dot{E}_i\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_0 e^{-j\beta_1 x}$$

De la onda reflejada sabemos que viaja en el medio1, $\overset{*}{\Upsilon}_1$ y en sentido negativo de x

$$\dot{E}\, r(x) = \overset{*}{E}_r\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_{r0} e^{j\beta_1 x + j\rho_{RE}}$$

$$\dot{E}\, i(0) = E_0 = -\dot{E}\, r(0)$$

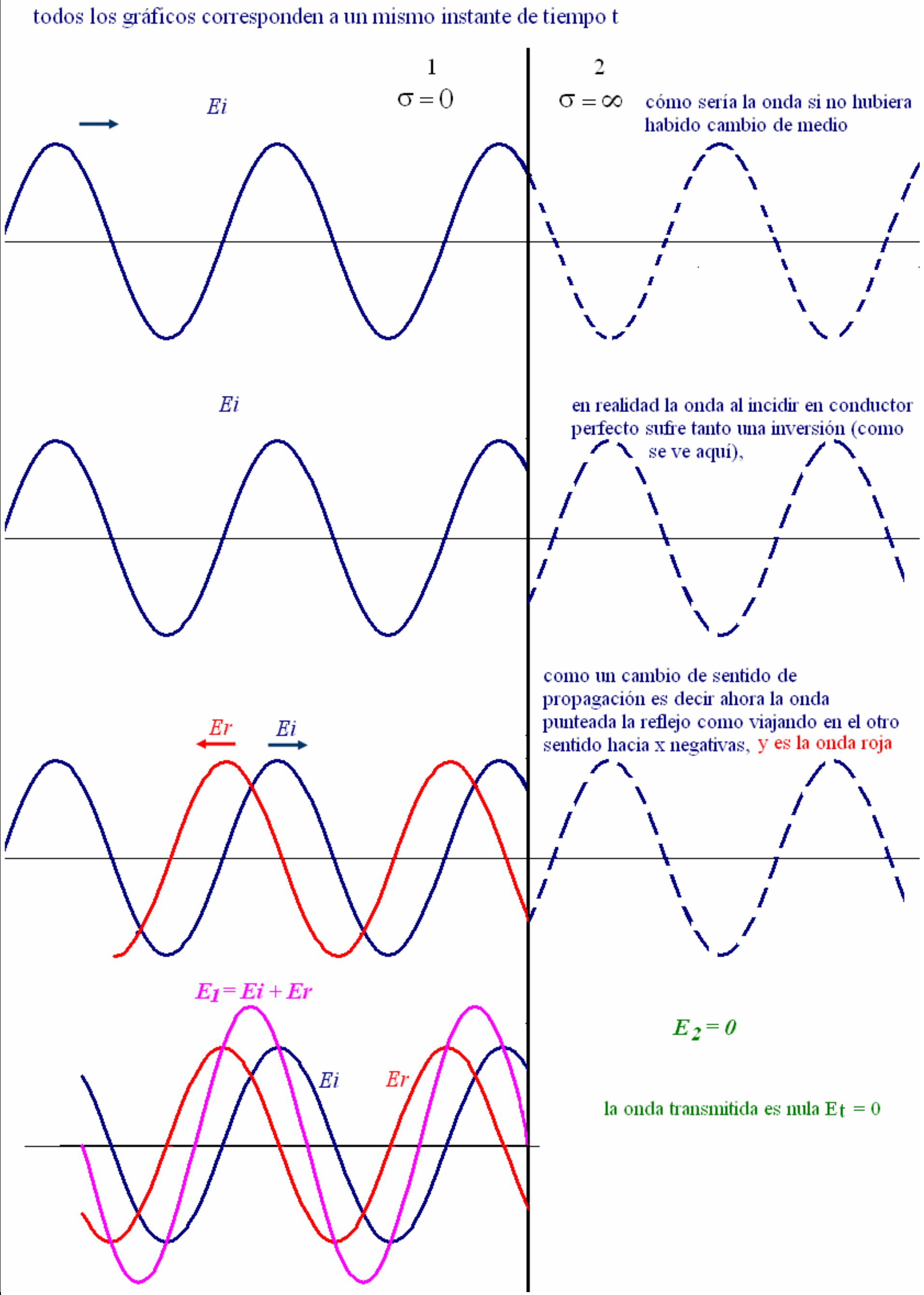
$$\dot{E}\, r(0) = E_{r0} e^{j\beta_1 0 + j\varphi_{RE}} = -E_0$$

$$\boxed{\dot{E}r(x) = -E_0 e^{+j\beta_1 x}}$$

La solución para la onda reflejada será:

$$\boxed{Er(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$

$$\boxed{E_1(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x) - E_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$



$$\dot{E}_1 = \dot{E}_i + \dot{E}_r = E_0 e^{-j\beta_1 x} - E_0 e^{j\beta_1 x} = E_0\left(e^{-j\beta_1 x} - e^{j\beta_1 x}\right)$$

$$\dot{E}_1 = -E_0 2j \frac{\left(e^{j\beta_1 x} - e^{-j\beta_1 x}\right)}{2j} \quad E_1(x,t) = \operatorname{Re}al\left[-E_0 2j \frac{\left(e^{j\beta_1 x} - e^{-j\beta_1 x}\right)}{2j} e^{j\omega t}\right]$$

Reconociendo la expresión exponencial del seno trigonométrico:

$$E_1(x,t) = \operatorname{Re}al\left[-2jE_0\, e^{j\omega t}\operatorname{sen}\left(\beta_1 x\right)\right] = \operatorname{Re}al\left[2E_0\, e^{j(\omega t - \pi/2)}\operatorname{sen}\left(\beta_1 x\right)\right]$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo eléctrico en el medio 1 (vacío) resulta ser:

$$\boxed{E_{1y}(x,t) = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\beta_1 x\right)\operatorname{sen}\left(\omega t\right)}$$ ONDA ESTACIONARIA

$$E_x = E_z = 0$$

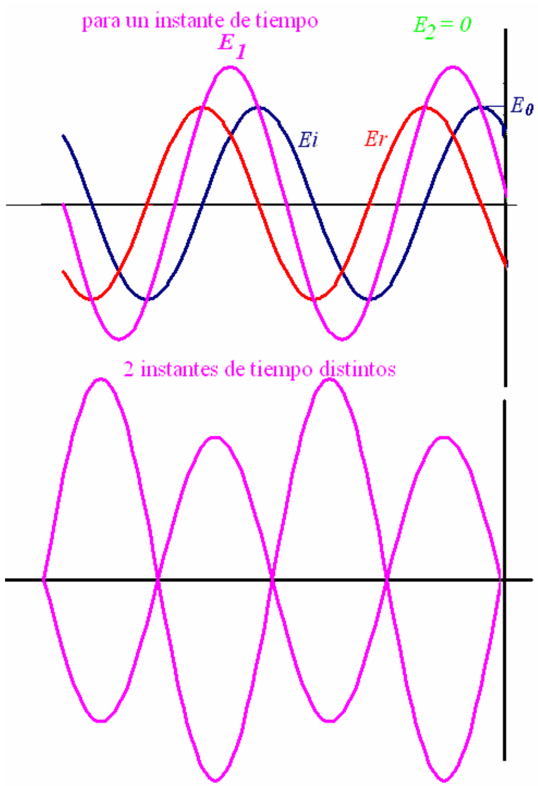
Onda estacionaria de campo eléctrico: no transporta energía

En la superficie de separación entre ambos medios hay un NODO de campo Eléctrico

Vientres : máxima amplitud $2E_0$

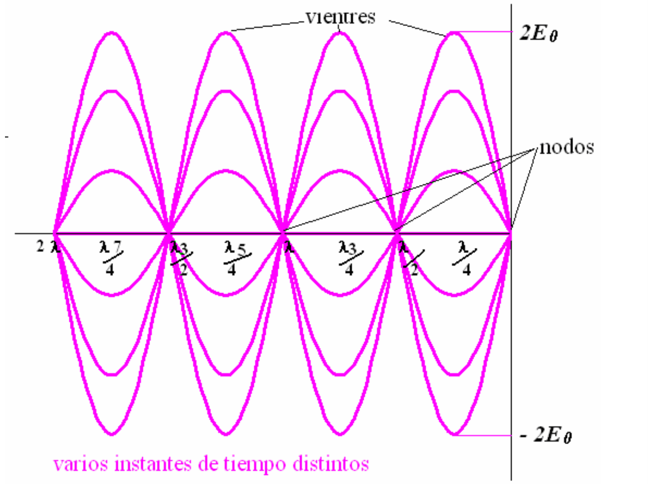
Envolvente de la onda estacionaria (lugar geométrico de los máximos en cada punto del espacio):

$$Envolvente \Rightarrow \pm 2E_0 \operatorname{sen}\left(\beta x\right)$$



Onda estacionaria

$$Envolvente = 2E_0 \,\mathrm{sen}(\beta x)$$



Onda estacionaria

$$E_{1y} = 2E_0 \,\mathrm{sen}(\beta x)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$\boxed{\textbf{nodos:}}$

$$\mathrm{sen}\,(\beta x) = 0$$

$$(\beta x) = n\,\pi$$

$$x = \frac{n\,\pi}{\beta} \qquad \beta = \frac{2\,\pi}{\lambda}$$

$$\boxed{x = \frac{n\,\cancel{\pi}\,\lambda}{2\,\cancel{\pi}} = \frac{n\,\lambda}{2}\ ;\ n=0,1,2..}$$

$\boxed{\textbf{vientres}}$

$$\mathrm{sen}\,(\beta x) = +/-1$$

$$(\beta x) = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4}\quad ;\ n=0,1,2..}$$

Conocida la onda incidente así como la reflejada, del campo eléctrico es posible obtener las dos ondas de campo magnético (incidente y reflejada) a partir de la definición de impedancia intrínseca $\overset{*}{\eta}$ o $\overset{*}{Zi}$ usando según las siguientes relaciones:

$$\boxed{\frac{\dot{Ei}_y}{\dot{Hi}_z} = \overset{*}{Zi}_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{Er}_y}{\dot{Hr}_z} = -\overset{*}{Zi}_1}$$

Recordando que la impedancia intrínseca del medio 1 (dieléctrico sin pérdidas) es un número real

$\overset{*}{Zi}_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ es un número real, => Ei y Hi están en fase temporal

$$\dot{H}\, i(x) = \frac{\dot{E}\, i(x)}{\overset{*}{Zi}_1} = \frac{E_0}{\left|Zi_1\right|} e^{-j\beta_1 - \varphi_{Zi1}} = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}} e^{-j\beta_1 - 0}$$

$$\boxed{Hi_z(x,t) = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}} \cos(\omega t - \beta_1 x) = H_0 \cos(\omega t - \beta_1 x)}$$

$$\boxed{Ei_y(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x)}$$

$$\dot{H}r(x) = \frac{\dot{E}r(x)}{-\overset{*}{Zi_1}} = \frac{-E_0}{-|Zi_1|}e^{+j\beta_1 - \varphi_{Zi1}}$$

$$\boxed{Hr(x,t) = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}}\cos(\omega t + \beta_1 x) = H_0\cos(\omega t + \beta_1 x)}$$

$$H_1(x,t) = Hi(x,t) + Hr(x,t)$$

$$\boxed{H_1(x,t) = H_0\cos(\omega t - \beta_1 x) + H_0\cos(\omega t + \beta_1 x)}$$

Ahora analicemos qué condición de contorno queda implícita (en x=0)

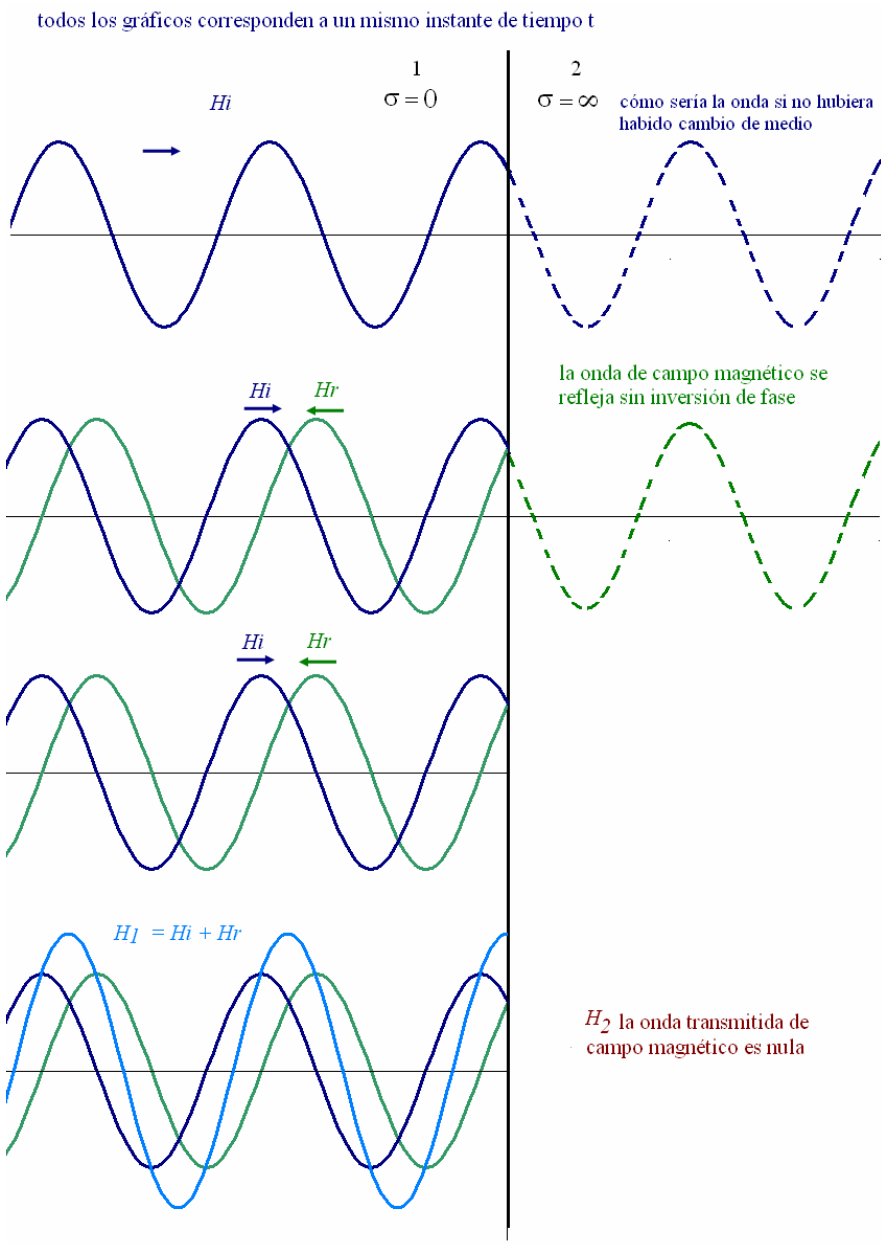
$$H_1(0,t) = 2H_0\cos(\omega t)$$

$H_2(0,t) = 0$; pues en el conductor perfecto el campo tiene que ser nulo

$\boxed{H_1(0,t) \neq H_2(0,t)}$ H NO SE CONSERVA (existe J=∞)

***J_y* infinita**, es decir una corriente que fluye por un **área de espesor nulo**. Es posible definir entonces una *corriente laminar,* i_{ly} por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético [A/m]

$$\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x = i_{ly} = Hz_1 - Hz_2 = 2H_0\cos(\omega t)$$



Observará el alumno que NO hemos obtenido el valor de la onda reflejada de campo magnético a partir de la incidente y las condiciones de contorno. Y esto es así pues la condición de contorno para la componente tangencial del campo magnético implicaba que esta componente se **conservaba si y sólo si se podía asegurar que la densidad de corriente NO ERA INFINITA,** sin embargo estamos frente al único caso en el cual no es posible asegurar esto, pues no es posible asegurar que J sea finita. ¿Por qué?

En un conductor ideal sé que es imposible que los campos lo penetren ($\delta=0$). Tanto E como J y H serán cero en el interior o sea para $x > 0$, pero aún no sé cuánto valdrán en $x = 0$. De la condición de contorno de la componente tangencial del campo eléctrico sé que ésta se conserva SIEMPRE, por lo tanto si E es cero para $x > 0$ también será cero en $x = 0$.

Entonces si quisiera resolver la ecuación de la ley de Ohm puntual ($J = \sigma E$) en la superficie de separación, tendré que $E = 0$ y que la conductividad es infintia ($\sigma = \infty$), por tanto tendré una indefinición:

$J = \infty \,.\, 0 = ??$ indefinido ; en $x = 0$

Es por ello que este camino no me permite resolver la condición de contorno, ni poder deducir cuánto vale el campo magnético reflejado a partir de conocer el incidente. El camino correcto es el que ya realizamos, es decir conociendo el campo eléctrico reflejado y aplicando la relación $\frac{\dot{E}r_y}{\dot{H}r_z} = -\overset{*}{Z}i$ obtenemos el campo magnético reflejado.

Ahora que conocemos tanto la onda incidente como la reflejada de campo magnético, entonces para $x = 0$ podremos ver qué condición de contorno se cumple $Hz_1 \underset{=}{?} Hz_2$

$$H_1(0,t) = 2H_0 \cos(\omega t)$$

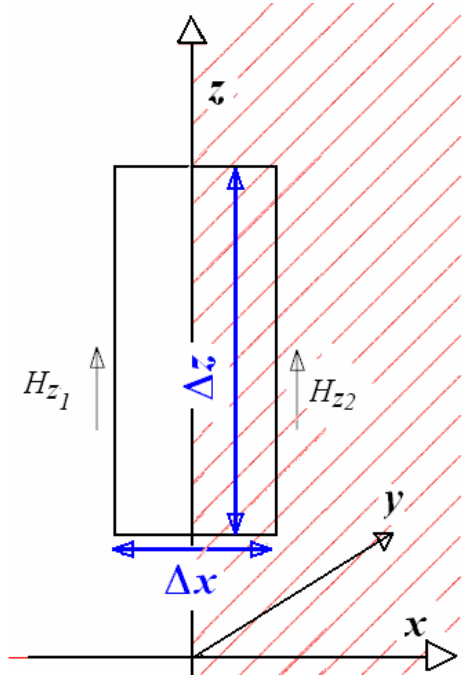
$$H_2(0,t) = 0$$

$$\boxed{H_1(0,t) \neq H_2(0,t)}$$ H NO SE CONSERVA

Entonces si H no se conserva es porque hay una densidad de corriente J_y infinita, es decir una corriente que fluye por un **área de espesor nulo**. Es posible definir entonces una corriente laminar i_{ly} como :

$$\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x) = i_{ly}$$

i_{ly} *corriente laminar*, corriente por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético [A/m]



Recordando las condiciones de contorno dicha corriente laminar es igual a la diferencia entre los campos magnéticos a uno y otro lado de la superficie de separación:

$$\boxed{Hz_1 - Hz_2 = i_{ly}}$$

$$H_1 - 0 = i_{ly} = 2H_0 \cos(\omega t) \quad \boxed{\text{corriente laminar } i_{ly} = 2H_0 \cos(\omega t) \text{ [A/m]}}$$

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_i + \dot{H}_r = H_0 e^{-j\beta_1 x} + H_0 e^{j\beta_1 x} = H_0\left(e^{-j\beta_1 x} + e^{j\beta_1 x}\right)$$

$$\dot{H}_1 = H_0 2 \frac{\left(e^{j\beta_1 x} + e^{-j\beta_1 x}\right)}{2}$$

Reconociendo la expresión exponencial del coseno trigonométrico:

$$H_1(x,t) = \mathrm{Re}\,al\left[2H_0\, e^{j\omega t} \cos\left(\beta_1 x\right)\right] =$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo magnético en el medio 1 (vacío) resulta ser:

$$\boxed{H_{1z} = 2H_0 \cos\left(\beta_1 x\right)\cos\left(\omega t\right)}$$ ONDA ESTACIONARIA $H_x = H_y = 0$

Onda estacionaria de campo magnético: no transporta energía

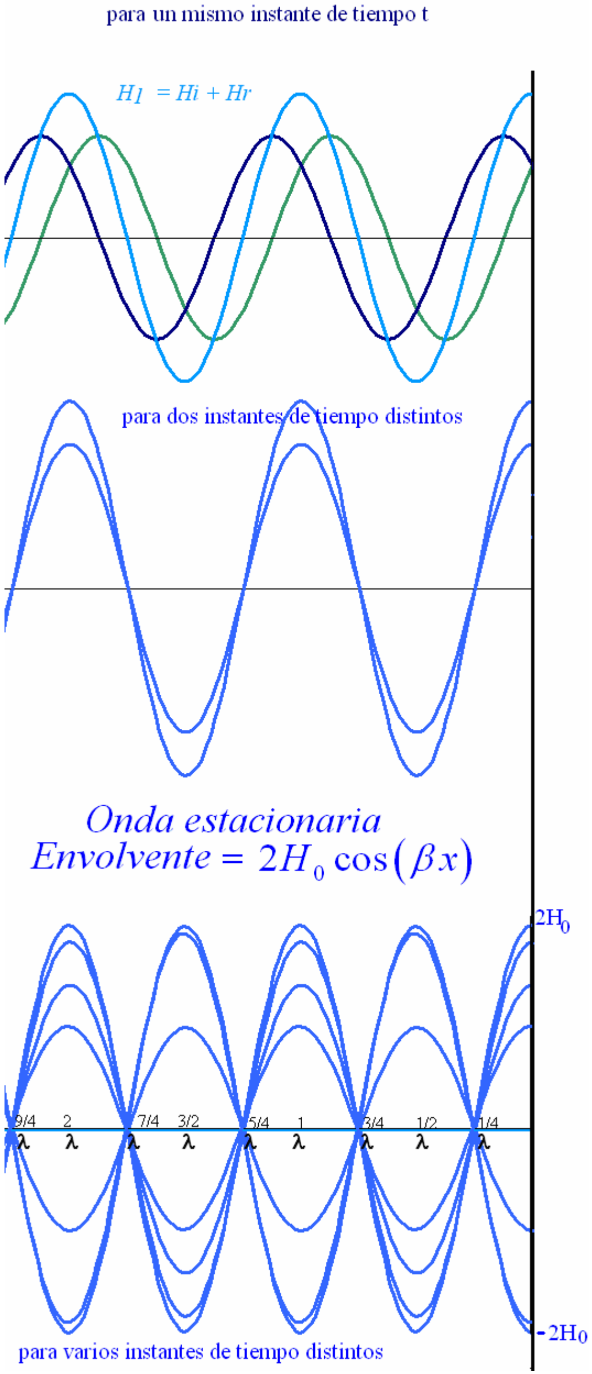
En la superficie de separación entre ambos medios hay un VIENTRE de campo Magnético

Vientres : máxima amplitud $2H_0$

Envolvente de la onda estacionaria (lugar geométrico de los máximos en cada punto del espacio):

$$Envolvente \Rightarrow \pm 2H_0 \cos\left(\beta x\right)$$

Donde están los nodos de la onda estacionaria de campo eléctrico están los vientres de la de campo magnético y viceversa.



Onda estacionaria

$$Envolvente = 2H_0 \cos(\beta x)$$

$\boxed{\textbf{nodos:}}$

$$\cos(\beta x) = 0$$

$$(\beta x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad ; \; n=0,1,2..}$$

$\boxed{\textbf{vientres}}$

$$\cos(\beta x) = +/-1$$

$$(\beta x) = n\pi$$

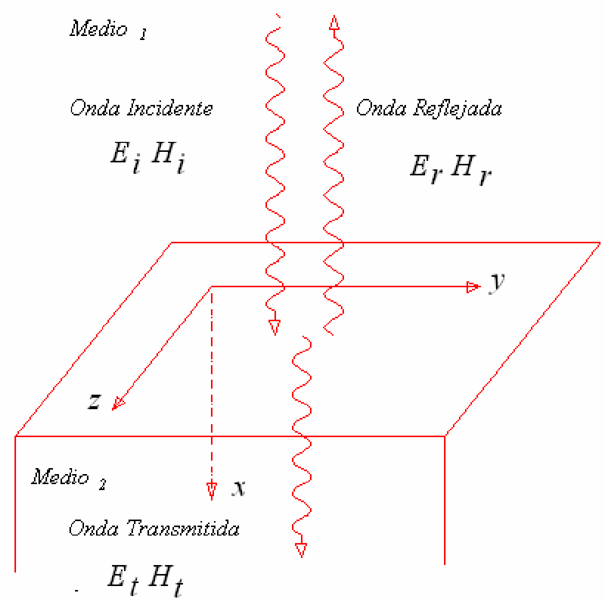
$$x = \frac{n\pi}{\beta} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\boxed{x = \frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\lambda = \frac{n\lambda}{2} \; ; n=0,1,2..}$$

CASO 2 (GENERAL): MEDIO 1 / MEDIO 2

Hipótesis

- dos medios diferentes , ambos LIH
- $(\sigma_1 ; \varepsilon_1 ; \mu_1); (\sigma_2 ; \varepsilon_2 ; \mu_2)$
- ondas planas [$E_x=E_z=0$; $E_y(x,t)$ se propaga en la dirección de x]
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite



$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{1y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}{}_1^2\, \dot{E}_{1y}(x)}$$

Medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{2y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}{}_2^2\, \dot{E}_{2y}(x)}$$

Medio 2

La solución en el Medio 1 implicará una onda incidente Ei y una reflejada Er

La solución en el Medio 2 implicará una onda transmitida Et

$$\boxed{\dot{E}_{1y}(x) = \overset{*}{A}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} + \overset{*}{B}\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = \dot{E}i(x) + \dot{E}r(x)}$$

$$\boxed{\dot{E}_{2y}(x) = \overset{*}{C}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_2 x} = \dot{E}t(x)}$$

Supongamos conocida ***Ei***(x,t):

$$\boxed{Ei(x,t) = E_m e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x + 0)}$$

Su forma fasorial será:

$$\dot{E}i(x) = \overset{*}{A}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_m e^{-\alpha_1 x - j\beta_1 x + 0}$$

A partir de la onda incidente de campo eléctrico $\dot{E}i(x)$, más las condiciones de contorno y las impedancias intrínsecas de ambos medios $\overset{*}{Z}i_1$ y $\overset{*}{Z}i_2$, es posible obtener el resto de las ondas es decir:

- onda reflejada de campo eléctrico $\dot{E}r(x)$
- onda transmitida de campo eléctrico $\dot{E}t(x)$
- onda incidente de campo magnético $\dot{H}i(x)$
- onda reflejada de campo magnético $\dot{H}r(x)$
- onda transmitida de campo magnético $\dot{H}t(x)$

CONDICIONES DE CONTORNO

$\boxed{E_{\text{tang}1} = E_{\text{tang}2}}$

$\boxed{H_{\text{tang}1} = H_{\text{tang}2}}$ siempre y cuando ninguno de los medios sea un conductor ideal

en x = o que es donde se ubica la superficie de separación de los dos medios:

$$\dot{E}i(0) + \dot{E}r(0) = \dot{E}t(0) \Rightarrow \overset{*}{Z}i_1\, \dot{H}i(0) - \overset{*}{Z}i_1\, \dot{H}r(0) = \overset{*}{Z}i_2\, \dot{H}t(0)$$

$$\dot{H}i(0) + \dot{H}r(0) = \dot{H}t(0) \Rightarrow \frac{\dot{E}i(0)}{\overset{*}{Z}i_1} - \frac{\dot{E}r(0)}{\overset{*}{Z}i_1} = \frac{\dot{E}t(0)}{\overset{*}{Z}i_2}$$

coeficientes me dan relaciones entre las componentes reflejada y/o transmitida, respecto de la incidente:

$$\boxed{\overset{*}{\rho}_{RE} = \frac{\dot{E}r(0)}{\dot{E}i(0)} = \frac{\overset{*}{Z}i_2 - \overset{*}{Z}i_1}{\overset{*}{Z}i_2 + \overset{*}{Z}i_1}} \qquad \boxed{\overset{*}{\rho}_{TE} = \frac{\dot{E}t(0)}{\dot{E}i(0)} = \frac{2\overset{*}{Z}i_2}{\overset{*}{Z}i_2 + \overset{*}{Z}i_1}}$$

$$\boxed{\overset{*}{\rho}_{RH} = \frac{\dot{H}r(0)}{\dot{H}i(0)} = \frac{\overset{*}{Z}i_1 - \overset{*}{Z}i_2}{\overset{*}{Z}i_2 + \overset{*}{Z}i_1}} \qquad \boxed{\overset{*}{\rho}_{TH} = \frac{\dot{H}t(0)}{\dot{H}i(0)} = \frac{2\,\overset{*}{Z}i_1}{\overset{*}{Z}i_2 + \overset{*}{Z}i_1}}$$

´

$\overset{*}{\rho}_{RE} = |\rho_{RE}|\, e^{j\varphi_{RE}}$, a partir de $\dot{E}i(0) = E_m e^{-\alpha_1 0 - j\beta_1 0} = E_m$

$$\dot{E}r(0) = \dot{E}i(0)\left|\rho_{RE}\right| e^{j\varphi_{RE}} = \left|\rho_{RE}\right| E_m e^{j\varphi_{RE}}$$

$$\dot{E}r(x) = \overset{*}{\mathrm{B}}\, e^{+\overset{*}{\gamma}_1 x} = \left|\rho_{RE}\right| E_m e^{\alpha_1 x + j(\beta_1 x + \varphi_{RE})}$$

$$\boxed{Er(x,t) = \left|\rho_{RE}\right| E_m e^{\alpha_1 x} \cos(\omega t + \beta_1 x + \varphi_{RE})}$$

$$\boxed{Et(x,t) = \left|\rho_{TE}\right| E_m e^{-\alpha_2 x} \cos(\omega t - \beta_2 x + \varphi_{TE})}$$

$$\boxed{Hi(x,t) = \frac{E_m}{\left|Zi_1\right|} e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x - \phi_{Zi}) = H_m e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x - \phi_{Zi})}$$

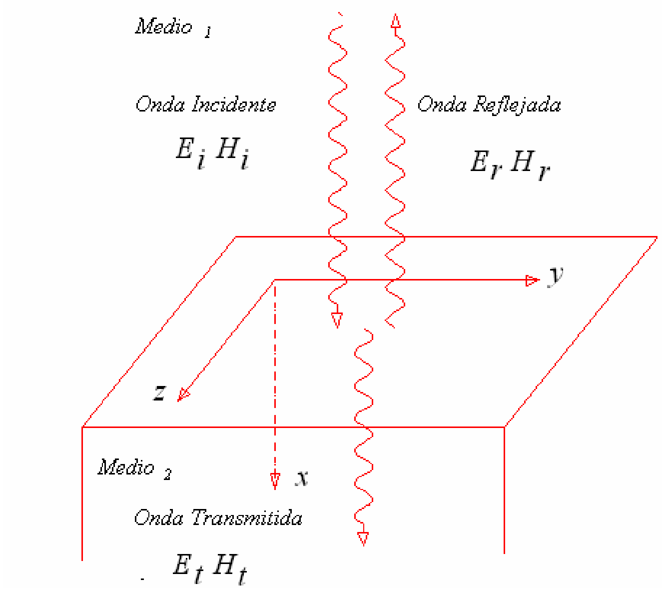
$$\boxed{Hr(x,t) = \left|\rho_{RH}\right| H_m e^{\alpha_1 x} \cos(\omega t + \beta_1 x - \phi_{Zi} + \varphi_{RH})}$$

$$\boxed{Ht(x,t) = \left|\rho_{TH}\right| H_m e^{-\alpha_2 x} \cos(\omega t - \beta_2 x - \phi_{Zi} + \varphi_{TH})}$$

CASO 3: MEDIO 1 DIELECTRICO sin pérdidas / MEDIO 2 DIELECTRICO sin pérdidas

Hipótesis

- dos medios diferentes , ambos LIH
- $\sigma_1 = 0$; $(\varepsilon_1 ; \mu_1)$; $\sigma_2 = 0$; $(\varepsilon_2 ; \mu_2)$
- ondas planas [$E_x=E_z=0$; $E_y(x,t)$ se propaga en la dirección de x]
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite



$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{1y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_1^2\, \dot{E}_{1y}(x)}$$

Medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{2y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_2^2\, \dot{E}_{2y}(x)}$$

Medio 2

La solución en el Medio 1 implicará una onda incidente Ei y una reflejada Er

$$\boxed{E_1(x,t) = Ei(x,t) + Er(x,t)}$$

La solución en el Medio 2 implicará una onda transmitida Et

$$\boxed{E_2(x,t) = Et(x,t)}$$

Para medios sin pérdidas (σ = 0)

$\overset{*}{\Upsilon}_1$ y $\overset{*}{\Upsilon}_2$ son números imaginarios puros

$\overset{*}{Zi}_1$ y $\overset{*}{Zi}_2$ son números reales $\therefore\ \overset{*}{\rho}_{RE}\,;\overset{*}{\rho}_{TE}\,;\ \overset{*}{\rho}_{RH}\,;\ \overset{*}{\rho}_{TH}$ son números reales

Medio 1:

$$E_1(x,t) = \mathrm{Real}\left\{Ei_m\ e^{j(\omega t-\beta_1 x+0)} + Er_m\ e^{j(\omega t+\beta_1 x+\varphi_{Er})}\right\}$$

Tratamiento fasorial

$$\dot{E}_1(x) = Ei_m\ e^{j(-\beta_1 x)} + Er_m\ e^{j(+\beta_1 x+\varphi_{\rho RE})} = Ei_m\ e^{j(-\beta_1 x)} + \frac{Ei_m}{\rho_{RE}}\, e^{j(+\beta_1 x+0)}$$

Medio 2:

$$\dot{E}_2(x) = Et_m\ e^{j(-\beta_2 x+\varphi_{\rho TE})} = \frac{Ei_m}{\rho_{TE}}\, e^{j(-\beta_2 x+0)}$$

Aplicando condiciones de contorno (en x = 0)

- Componente tangencial de campo eléctrico se conserva (la componente tangencial del campo magnético también se conserva pero dejamos al alumno la deducción de las tres ondas de campo magnético: incidente, reflejado, y transmitido)

$$\dot{E}_1(0) = \dot{E}_2(0)$$

$$Ei_m e^{j0} + Er_m e^{j(0+0)} = Et_m e^{j(0+0)}$$

Superposición de ondas viajeras en el medio 1

$$\dot{E}_1(x) = Ei_m\ e^{-j\beta_1 x} + Er_m\ e^{+j\beta_1 x} =$$

$$= Ei_m\ e^{-j\beta_1 x} - Er_m\ e^{-j\beta_1 x} + Er_m\ e^{-j\beta_1 x} + Er_m\ e^{+j\beta_1 x} =$$

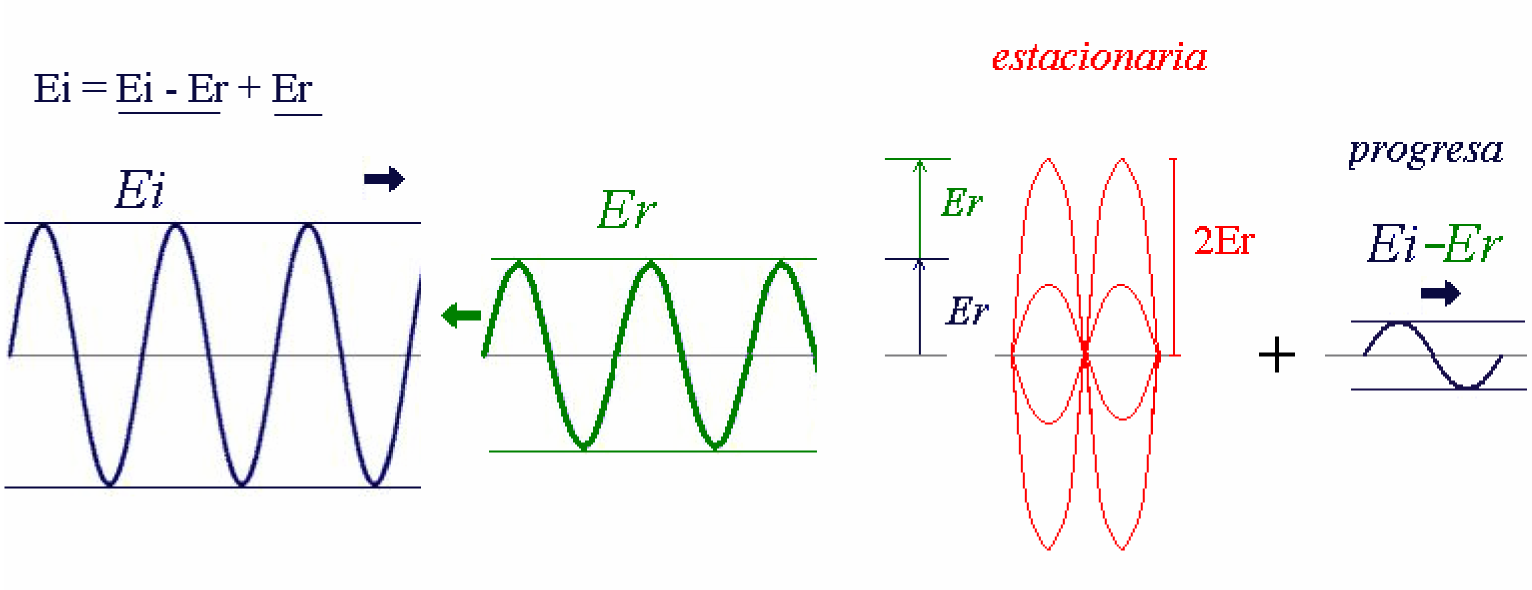
$$= (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + Er_m\,(e^{-j\beta_1 x} + e^{+j\beta_1 x}) = (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + 2Er_m \frac{(e^{-j\beta_1 x} + e^{+j\beta_1 x})}{2} =$$

$$= (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + 2Er_m \cos(\beta_1 x)$$

Multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando parte real:

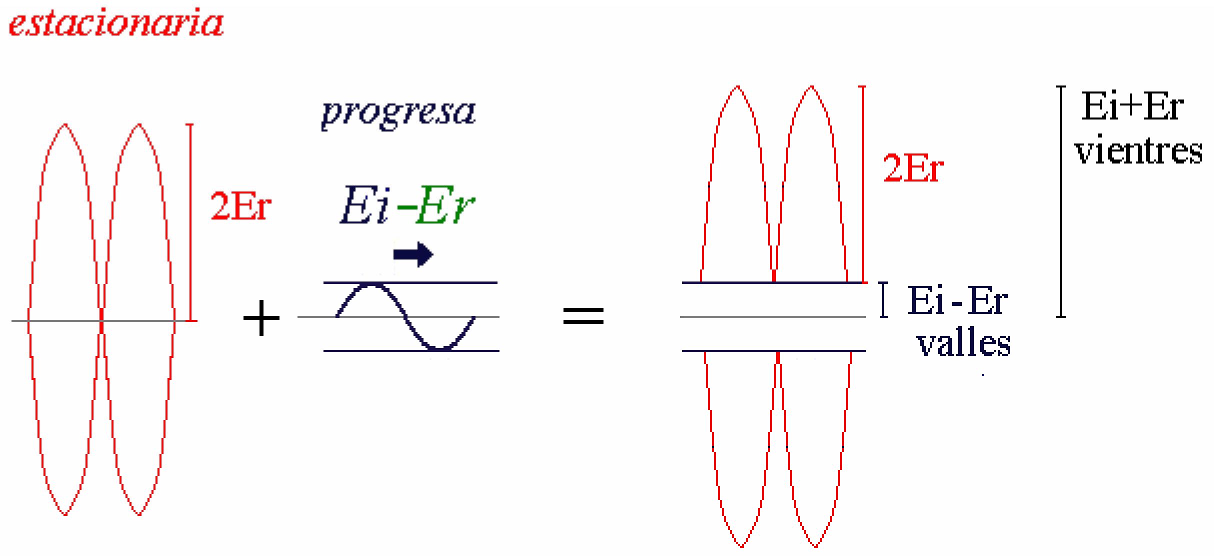
$$\boxed{E_1(x,t) = (Ei_m - Er_m)\cos(\omega t - \beta_1 x) + 2Er_m \cos(\omega t)\cos(\beta_1 x)}$$

PROGRESIVA + ESTACIONARIA



RELACIÓN DE ONDA ESTACIONARIA (ROE)

la relación entre las intensidades de campo (eléctrico o magnético) en los vientres y valles, determinándose los vientres y los valles por superposición de las dos envolventes (la de la onda estacionaria, y la de la onda progresiva).

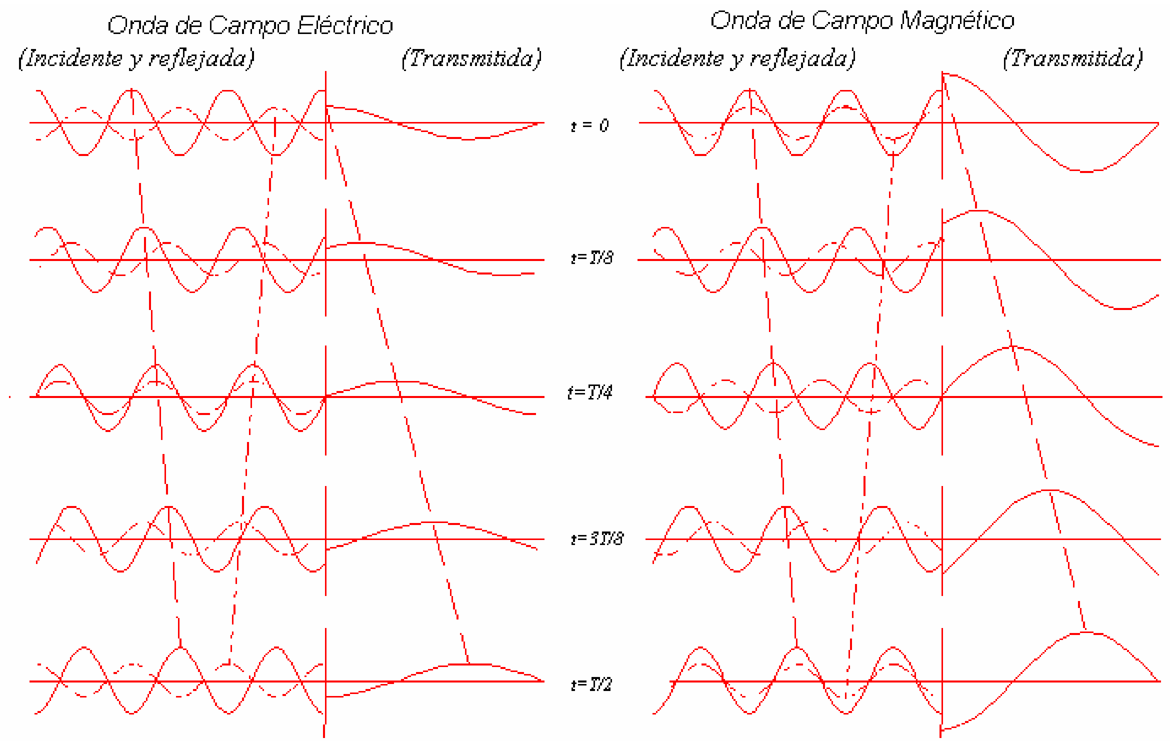


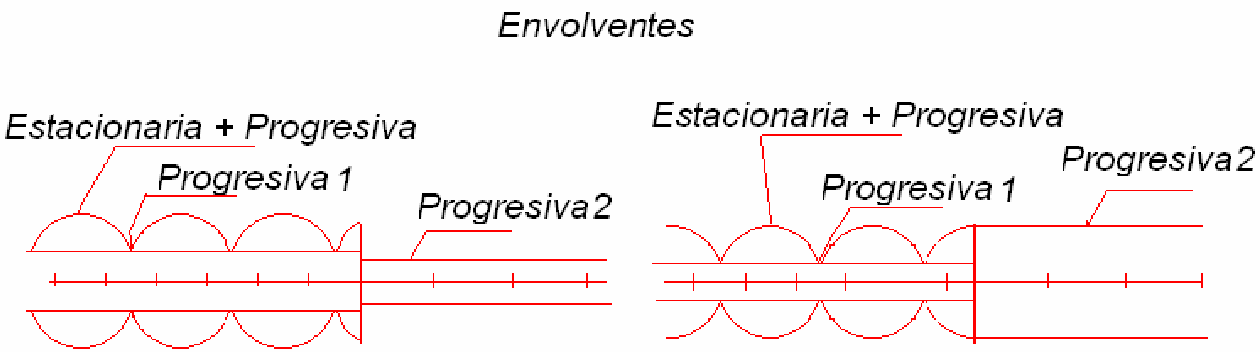
$$ROE = \frac{|Vientres|}{|Valles|} = \frac{|Ei_m| + |Er_m|}{|Ei_m| - |Er_m|} = \frac{1 + |\rho_{RE}|}{1 - |\rho_{RE}|}$$

$$\boxed{1 \leq |ROE| < \infty}$$

ROE = 1 para onda PROGRESIVA PURA

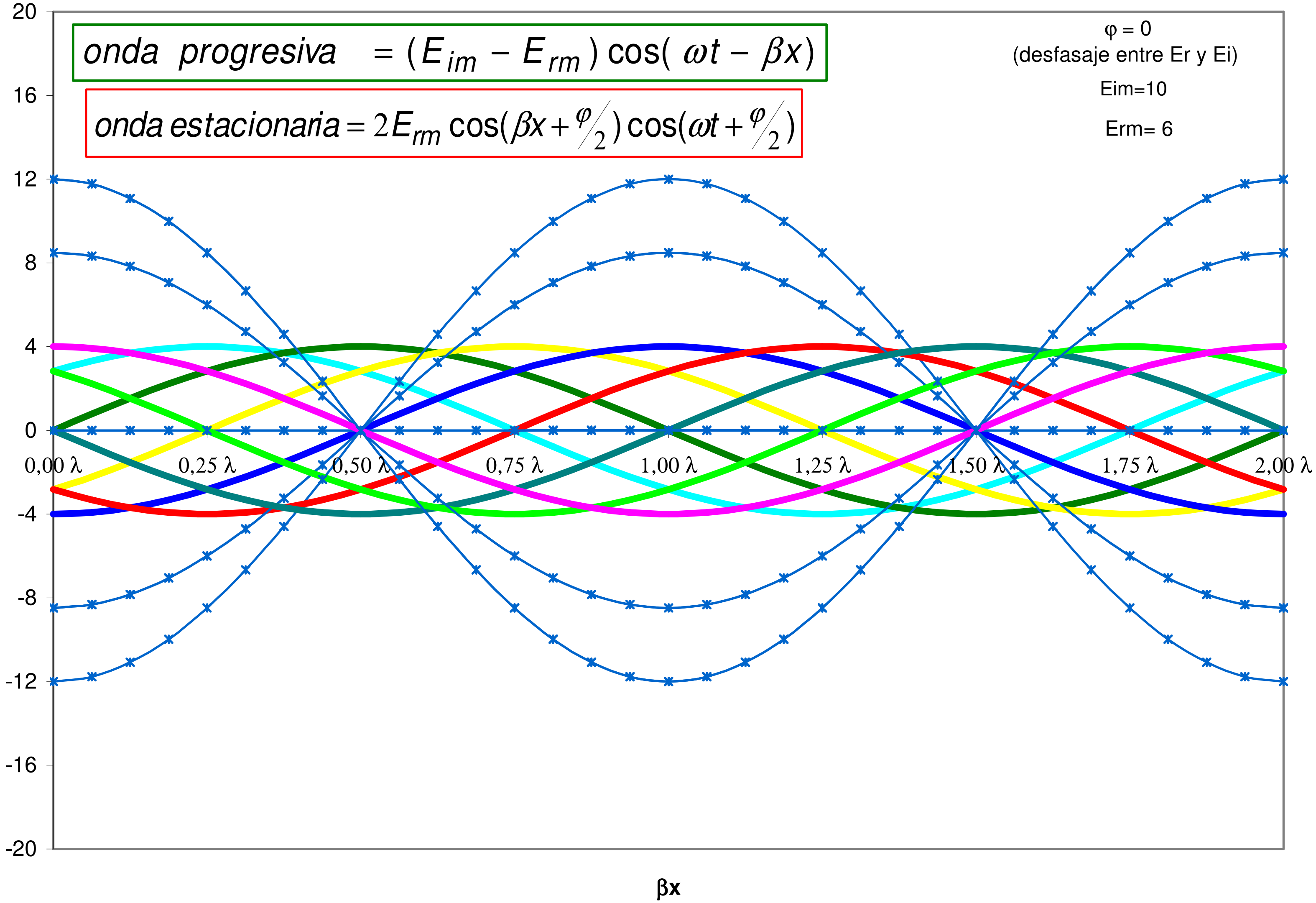
ROE = ∞ para onda ESTACIONARIA PURA





Reflexión y refracción de ondas planas sobre superficie dieléctrica perfecta.

Onda progresiva y onda estacionaria en distintos instantes de tiempo



RESUMEN

* Ecuaciones de Maxwel para Ondas Planas en medios LIH

- la ecuación diferencial $\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2 \dot{\mathbf{E}}$
- su solución $\dot{E}_y(x) = \overset{*}{C}_1 e^{-\overset{*}{\Upsilon} x} + \overset{*}{C}_2 e^{+\overset{*}{\Upsilon} x} = \dot{E}_i(x) + \dot{E}_r(x)$
- constante de propagación $\overset{*}{\Upsilon} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$
- velocidad de fase $v_f = \omega/\beta$
- impedancia intrínseca del medio $\overset{*}{Z}_i = \dfrac{j\omega\mu}{\overset{*}{\Upsilon}} = \dfrac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}$
- Medios sin pérdidas:

$\overset{*}{\Upsilon} = o + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ imaginario puro onda viaja sin atenuación, y $v_f = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\overset{*}{Z}_i = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ real puro, significa que E y H están en fase temporal (obviamente a 90º en el espacio)

* Condiciones de Contorno

Componente tangencial de campo eléctrico se conserva siempre: $E_{tang1} = E_{tang2}$	Componente tangencial de campo magnético se conserva en todos los casos salvo cuando hay un conductor perfecto con J=∞ en caso de conduct perfecto NO se conserva y la diferencia es una ***corriente laminar*** i_{ly}, $Hz_1 - Hz_2 = i_{ly}$

* Reflexión y Refracción de Ondas Planas con Incidencia Normal.

- **Caso 1 MUY IMPORTANTE**: Medio 1 Dieléctrico Perfecto / Medio 2 Conductor Perfecto: Reflexión total, Etang se conserva y Htang **NO** se conserva

  Medio 1: $Ey_1(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x) - E_0 \cos(\omega t + \beta_1 x) = 2E_0 \,\mathrm{sen}(\beta_1 x)\,\mathrm{sen}(\omega t)$ estacionaria pura con nodos en la superficie de separación.

  $Hz_1(x,t) = H_0 \cos(\omega t - \beta_1 x) + H_0 \cos(\omega t + \beta_1 x) = 2H_0 \cos(\beta_1 x)\cos(\omega t)$ estacionaria pura con vientres en la superficie de separación.

  Medio 2: NO hay transmitida, conductor perfecto no deja penetrar los campos $E_2=0$, $H_2=0$

- Caso 2: GENERAL: Medio 1 / Medio 2 (niguno es conductor perfecto) Etang se conserva y Htang se conserva

$$\dot{E}_{1y}(x) = \overset{*}{A}\, e^{-\overset{*}{\gamma}_1 x} + \overset{*}{B}\, e^{+\overset{*}{\gamma}_1 x} = \dot{E}i(x) + \dot{E}r(x) \qquad \dot{E}_{2y}(x) = \overset{*}{C}\, e^{-\overset{*}{\gamma}_2 x} = \dot{E}t(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{E}i(0)+\dot{E}r(0)=\dot{E}t(0)\\ \dot{H}i(0)+\dot{H}r(0)=\dot{H}t(0)\end{array}\right\}\ \text{condiciones de contorno}$$

coeficientes de reflexión y transmisión de campo eléctrico y magnético:

$$\boxed{\overset{*}{\rho}_{RE}=\frac{\dot{E}r(0)}{\dot{E}i(0)}=\frac{\overset{*}{Zi_2}-\overset{*}{Zi_1}}{\overset{*}{Zi_2}+\overset{*}{Zi_1}}};\boxed{\overset{*}{\rho}_{TE}=\frac{\dot{E}t(0)}{\dot{E}i(0)}=\frac{2\overset{*}{Zi_2}}{\overset{*}{Zi_2}+\overset{*}{Zi_1}}};\boxed{\overset{*}{\rho}_{RH}=\frac{\dot{H}r(0)}{\dot{H}i(0)}=\frac{\overset{*}{Zi_1}-\overset{*}{Zi_2}}{\overset{*}{Zi_2}+\overset{*}{Zi_1}}};\boxed{\overset{*}{\rho}_{TH}=\frac{\dot{H}t(0)}{\dot{H}i(0)}=\frac{2\overset{*}{Zi_1}}{\overset{*}{Zi_2}+\overset{*}{Zi_1}}}$$

- Caso 3: Medio 1 diel sin pérd/ Medio 2 diel sin pérd Etang se conserva y Htang se conserva

$\overset{*}{\Upsilon}_1$ y $\overset{*}{\Upsilon}_2$ son imaginarios puros (no hay atenuación), $\overset{*}{Zi_1}$ y $\overset{*}{Zi_2}$ son números reales, Ey H en fase temporal

$\therefore\ \overset{*}{\rho}_{RE};\overset{*}{\rho}_{TE};\ \overset{*}{\rho}_{RH};\ \overset{*}{\rho}_{TH}$ son números reales

En el medio 1 al superponerse dos ondas sin atenuación que viajan en sentido contrario y de igual frecuencia tendré una parte estacionaria y una parte progresiva

$$\boxed{E_1(x,t)=(Ei_m-Er_m)\cos(\omega t-\beta_1 x)+2Er_m\cos(\omega t)\cos(\beta_1 x)}$$

PROGRESIVA + ESTACIONARIA

Defino la ROE: $ROE=\frac{|Vientres|}{|Valles|}=\frac{|Ei_m|+|Er_m|}{|Ei_m|-|Er_m|}=\frac{1+|\rho_{RE}|}{1-|\rho_{RE}|}$ $\boxed{1\leq|ROE|<\infty}$ (1 progr pura; ∞ estac pura)