ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 5

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD), Serie Discreta Fourier (SDF)

1. **TFTD y sus propiedades... al derecho y al revés**

   a) Halle y grafique la TFTD de las siguientes secuencias. Tenga presente la identidad de Poisson: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$

   I. $x[n] = \delta[n - n_0]$, con $n_0 \in \mathbb{Z}$
   II. $x[n] = \sqcap_N[n]$, con N impar
   III. $x[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$.
   IV. $x[n] = 1$
   V. $x[n] = e^{j(2\pi s_0 n + \phi)}$, con $|s_0| < 1/2$ y $\phi \in \mathbb{R}$.
   VI. $x[n] = 2\cos(2\pi s_0 n)$, con $s_0 \in \mathbb{R}$.

   b) Enuncie la propiedad que relaciona la TFTD de la convolución de dos secuencias con las TFTDs de dichas secuencias. Utilice este resultado para obtener la TFTD de $y[n] = \wedge_5[n]$. Grafique la secuencia y su TFTD.

   c) Sea $X(e^{j2\pi s})$ la TFTD de $x[n]$.

   I. Verifique que $X(e^{j2\pi s})$ es periódica, con período 1 (no necesariamente es el fundamental).
   II. Muestre que $x[n]$ puede hallarse como la TF inversa de un período de $X(e^{j2\pi s})$.

   d) Antitransforme las siguientes TFTDs definidas en $[-1/2; 1/2]$.

   I. $X(e^{j2\pi s}) = \sqcap(s/B)$, con $B < 1$
   II. $X(e^{j2\pi s}) = \wedge(s/B)$, con $B < 1/2$
   III. $X(e^{j2\pi s}) = s$
   IV. $X(e^{j2\pi s}) = 5 - 2j\cos(2\pi s) + 4\mathrm{sen}(4\pi s)$

   e) ¿Qué se obtiene al hacer la TFTD del producto de dos secuencias? Calcule la TFTD de $z[n] = x[n] \cdot y[n]$, con

   I. $x[n] = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{n}{2})$, $y[n] = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{n}{2})$
   II. $x[n] = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\frac{n}{2})$, $y[n] = \frac{3}{4}\,\mathrm{sinc}(\frac{3n}{4})$

   f) Halle la TFTD de $u[n]$ y de $\mathrm{sgn}[n] = u[n] - u[-n]$. Recuerde que no puede derivar una secuencia (pero sí hacer diferencias) y cómo afecta el valor medio de estas señales a sus transformadas.

   g) Sea $x[n]$ una secuencia y $X(e^{j2\pi s})$ su TFTD. Halle las TFTD´s de las siguientes secuencias en función de la TFTD de $x[n]$:

   I. $y[n] = x^*[n]$
   II. $y[n] = x[-n]$
   III. $y[n] = x[n] - x[n-1]$
   IV. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
   V. $y[n] = n\,x[n]$
   VI. $y[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{si } n/k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otros } n \end{cases}$

   h) Sea $x[n] = -\delta[n+3] + 2\delta[n+2] - 3\delta[n+1] + 4\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3]$. Grafíquela. Sin evaluar explícitamente su TFTD, $X(e^{j2\pi s})$, encuentre:

   I. $X(1)$
   II. $X(-1)$
   III. $\int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s})\, ds$
   IV. $\int_{-1/2}^{1/2} |X(e^{j2\pi s})|^2\, ds$

   Calcule y grafique $X(e^{j2\pi s})$. Verifique los resultados I y II.

2. **Respuesta en frecuencia de un SLID**

   Consideremos un SLID con respuesta impulsional $h[n]$, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

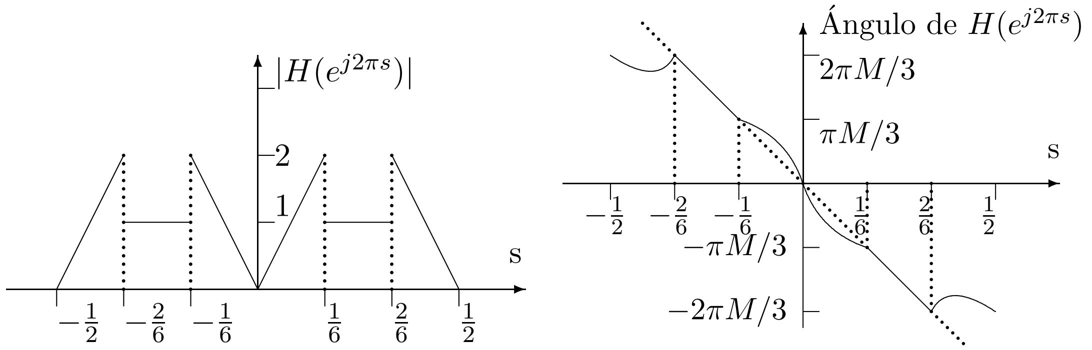
   a) Pruebe que si $x[n] = A\, e^{j(2\pi s_0 n+\theta)}$, con $s_0 \in \mathbb{R}$, entonces la salida es $y[n] = A\, H(e^{j2\pi s_0})\, e^{j(2\pi s_0 n+\theta)}$, donde $H(e^{j2\pi s})$ es la TFTD de $h[n]$. Note que $x[n]$ no es necesariamente una señal periódica. Si $h[n]$ es real: ¿Cuánto vale $y[n]$ si $x[n] = A\cos(2\pi s_0 n + \theta)$?

   b) Sea $X(e^{j2\pi s})$ la TFTD de la entrada (cualquiera) e $Y(e^{j2\pi s})$ la TFTD de la salida.

      I. Halle una expresión que las vincule. ¿Cómo debe ser el sistema para asegurar que si $X(e^{j2\pi s})$ existe, entonces $Y(e^{j2\pi s})$ existe?

      II. ¿Qué característica debe tener $x[n]$ para poder hallar $H(e^{j2\pi s})$ conociendo $y[n]$?

   c) Suponga que la respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j2\pi s})$, es la mostrada en la figura.



      I. Halle $y[n]$ cuando la entrada es $v[n]\cos(\pi n/2)$, siendo $V(e^{j2\pi s}) = \wedge\,(20s)$ para $|s| \leq 1/2$.

      II. Demuestre que si $|X(e^{j2\pi s})| = 0$ para todo $|s| \leq 1/6$ y $|s| \geq 2/6$; se tiene que $y[n] = x[n-M]$.

3. **SLID $\equiv$ Filtro digital**

   a) Un filtro digital causal responde a la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - 0{,}5\, y[n-1] = x[n] + x[n-1]$$

      I. Calcule, usando el dominio transformado, la respuesta al impulso de Kronecker y la respuesta en frecuencia del filtro. ¿Cuál es el largo de la respuesta al impulso? Dibuje la respuesta en frecuencia (en MATLAB) y trate de ver si es pasa-bajos, pasa-altos, etc.

      II. Obtenga la salida del sistema cuando la entrada es:

         i) $x[n] = \mathrm{sen}(8\pi n/3) + \cos(5\pi n)$ *ii*) $x[n] = u[n]$

         iii) $x[n] = (0{,}7)^n u[n]$

      III. Genere un nuevo sistema cuya respuesta en frecuencia es $\hat{H}(e^{j2\pi s}) = H(e^{j2\pi(s-0{,}5)})$. ¿Qué tipo de filtro resulta? Obtenga su ecuación en diferencias.

   b) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema que obtiene el promedio móvil de la entrada (ejercicio 5 de la práctica 3). ¿Qué frecuencias serán rechazadas por completo?

4. **SDF**

   a) Sea $x[n] = x[n+N]$ una señal periódica de período N. Dado que se trata de una señal periódica, puede definirse a partir del período N, y el valor de la señal en un período, que donotaremos $q[n]$. Obtenga los coeficientes $c[k]$ de la Serie Discreta de Fourier (SDF) para las siguientes señales:

      I. $q[n] = \delta[n]$, para $N = 1, 2, 3...$ II. $q[n] = \sqcap_3[n]$, para $N = 4, 5, 6...$

      III. $x[n] = e^{j2\pi n/N}$ IV. $x[n] = \cos(\frac{2\pi n}{3})$

      V. $x[n] = \mathrm{sen}(8\pi n/3) + \cos(5\pi n)$

      ¿Qué sucede en el caso II para $N = 3$?

b) Se puede demostrar que la relación entre los coeficientes de la SDF de una secuencia periódica y la TFTD de un período es igual que en el caso continuo (con SF y TF). Relacionando las definiciones, enuncie esta propiedad. Utilizando este procedimiento verifique sus resultados de los puntos I y II del inciso anterior.

c) ¿Qué sucede si quiero utilizar este procedimiento en el punto IV?

d) Obtenga una expresión para la potencia de la secuencia periódica en función de los coeficientes de su SDF. ¿Cuál es el máximo número de frecuencias distintas en las que se puede "distribuir" la potencia?

5. **TFTD en MATLAB**

A diferencia de lo que ocurría para el cálculo de la TF (ejercicio 6 de la Práctica 4), en el cálculo de la TFTD con MATLAB no se requiere la aproximación de una integral. Para cada valor de la variable s, se tiene:

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\; e^{-j2\pi sn}$$

Sin embargo, en una implementación numérica, la sumatoria no puede realizarse de $-\infty$ a ∞, sino de un determinado valor N_1 a N_2. Si se toma $N_1 = -K$, $N_2 = K$, y se define $M = 2K + 1$, la "aproximación" de la TFTD resulta:

$$\hat{X}(e^{j2\pi s}) \approx \sum_{n=-K}^{K} x[n]\; e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap_M[n]x[n]\; e^{-j2\pi sn}$$

Es decir, $\hat{X}(e^{j2\pi s})$ es la TFTD de la señal $\sqcap_M[n]x[n]$.

Cuando la señal $x[n]$ es de soporte finito, como en el caso de un cajón discreto, eligiendo adecuadamente el valor de K, se tiene que $\hat{X}(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})$.

a) Calcule la TFTD de la señal $x[n] = \sqcap_N[n]$, para lo cual deberá ejecutar las sentencias siguientes, previa implementación de la función `cajN` en un archivo `*.m`:

```
K = 10; n = [-K:K];
N = 3; x = cajN(n,N);
ds = 0.001; s = [-2:ds:2]; X = zeros(size(s));
for k = 1:length(s)
    X(k)=sum(x.*exp(-1i*2*pi*s(k)*n));
end
```

Verifique que la TFTD es periódica de período 1, y compare con la TFTD analítica obtenida en el ejercicio 1 graficando módulo y fase. Repita para diferentes valores de N, teniendo en cuenta de seleccionar el valor de K adecuado.

b) Aproxime la TFTD de la señal $x[n] = a^n\; u[n]$, para diferentes valores de a (por ejemplo 0,9 y 0,5). Compárela con la solución analítica obtenida en el ejercicio 1 graficando módulo y fase. Vea qué sucede en cada caso al tomar diferentes valores de K (por ejemplo 10, 25 y 50). ¿Qué sucede con la aproximación? Trate de explicar analíticamente el resultado.

c) Aproxime la TFTD de la señal $x[n] = 2\; \cos(2\pi s_0 n)$, para diferentes valores de s_0. Vea qué sucede al tomar diferentes valores de K. ¿Es congruente con el resultado analítico obtenido en el ejercicio 1? Trate de explicar analíticamente el resultado.

d) Dado el sistema SLID descripto por la ecuación en diferencias:

$$y[n] + b_1\; y[n-1] + b_2\; y[n-2] = a_0\; x[n] + a_1\; x[n-1] + a_2\; x[n-2]$$

halle de manera analítica la expresión que representa la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del sistema. Para los siguientes casos:

I.	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
II.	$a_0 = 1$	$a_1 = -1$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
III.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = -1$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
IV.	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
V.	$a_0 = 1$	$a_1 = -1$	$a_2 = 1$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
VI.	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = -1$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$
VII.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$b_1 = -0{,}5$	$b_2 = 0$
VIII.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0{,}5$	$b_2 = 0$
IX.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0{,}8$	$b_2 = 0{,}8$
X.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0{,}2$	$b_2 = 0{,}8$
XI.	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$b_1 = 0{,}8$	$b_2 = 0{,}2$

Grafique módulo y fase de $H(e^{j2\pi s})$ y determine si se trata de un sistema pasa-bajos, pasa-altos o pasa-banda. ¿Cuáles de los sistemas son FIR? ¿Cuáles son IIR?

Algunos resultados

1. *a*) I. $e^{-j2\pi n_0 s}$ II. $\dfrac{\operatorname{sen}(N\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)}$ III. $\dfrac{1}{1 - a\, e^{-j2\pi s}}$

   IV. $\text{Ш}(s)$ V. $\text{Ш}(s - s_0)\, e^{j\phi}$ VI. $\text{Ш}(s + s_0) + \text{Ш}(s - s_0)$

   d) I. $B\operatorname{sinc}(Bn)$ II. $B\operatorname{sinc}^2(Bn)$ III. $\dfrac{(-1)^n - \delta[n]}{j2\pi n}$

   IV. $5\delta[n] - j\delta[n-1] - j\delta[n+1] + 2j\delta[n-2] - 2j\delta[n+2]$

   e) I. $Z(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}\wedge(2\ s),\ \ -\frac{1}{2} \le s \le \frac{1}{2}$

   II. $Z(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}\sqcap(s) + \frac{3}{8}\wedge(\frac{8}{3}\ s) - \frac{1}{8}\wedge(8\ s),\ \ -\frac{1}{2} \le s \le \frac{1}{2}$

   f) $\text{TFTD}\{u[n]\} = \dfrac{1}{(1 - e^{-j2\pi s})} + \dfrac{\text{Ш}(s)}{2}$ y $\text{TFTD}\{sgn[n]\} = -j\ \operatorname{cotg}(\pi s)$

   g) I. $X^*(e^{-j2\pi s})$ II. $X(e^{-j2\pi s})$ III. $(1 - e^{-j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$

   IV. $\dfrac{X(e^{j2\pi s})}{(1 - e^{-j2\pi s})} + \dfrac{\text{Ш}(s)X(1)}{2}$ V. $\dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX(e^{j2\pi s})}{ds}$ VI. $X(e^{j2\pi k s})$

   h) I. 0 II. 16 III. 4 IV. 44

3. *a*) II. *i*) $y[n] = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi n}{3} - \operatorname{tg}^{-1}(3\sqrt{3})\right)$ *ii*) $y[n] = (4 - 3(0{,}5)^n)u[n]$

   iii) $[8{,}5(0{,}7)^n - 7{,}5(0{,}5)^n]\, u[n]$

   III. $y[n] + 0{,}5y[n-1] = x[n] - x[n-1]$

   b) $H(e^{j2\pi s}) = \dfrac{\operatorname{sen}(M\pi s)}{M\operatorname{sen}(\pi s)}$, $H = 0$ en $s = \dfrac{k}{M}$, con $k = 1, ..., (M-1)$.

4. *a*) Soluciones para $0 \le k \le N - 1$

   I. $c[k] = \frac{1}{N}$ II. $c[k] = \dfrac{\operatorname{sen}(3\pi k/N)}{N\ \operatorname{sen}(\pi k/N)}$ III. $c[k] = \delta[k-1]$

   IV. $N = 3,\ \ c[k] = \frac{1}{2}\ \delta[k-1] + \frac{1}{2}\ \delta[k-2]$

   V. $N = 6,\ \ c[k] = -\frac{j}{2}\ \delta[k-2] + \delta[k-3] + \frac{j}{2}\ \delta[k-4]$