Cuadripolos

PROPIEDADES

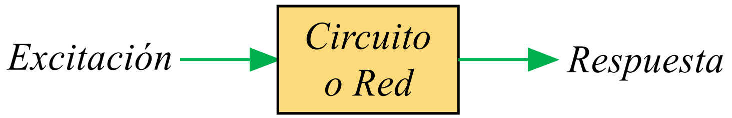
MATRIZ Y – MATRIZ Z. USO Y APLICACIONES

MATRICES H, G Y T

INTERCONEXIÓN DE CUADRIPOLOS

Características generales

- Se estudiarán redes o circuitos eléctricos de parámetros concentrados: redes conformadas por la interconexión de elementos pasivos y activos mediante cables o hilos de conexión de resistencia nula.
- Elementos pasivos:
  - Resistores.
  - Capacitores.
  - Inductores.
  - Transformadores.
- Elementos activos:
  - Generadores independientes de tensión o corriente.
  - Generadores dependientes de tensión o corriente.
- A lo largo de la materia, se abarcarán las dos temáticas del estudio de redes o circuitos eléctricos.



- Análisis: hallar la respuesta de una red o circuito a una dada excitación.
- Síntesis: Diseñar una red o circuito para obtener la respuesta deseada frente a una excitación conocida.

Características generales

- Previamente se ha estudiado el análisis de redes lineales mediante el planteo de métodos sistemáticos de resolución de circuitos:
  - Tensiones de nodos
  - Corrientes de mallas
- También se ha analizado el modelado simplificado de circuitos, mediante los modelos de Thevenin y Norton.
- Estos últimos métodos permiten conocer cómo interactúa la red con su exterior, es decir, hacia afuera de su par de terminales, sin interesarnos lo que ocurre en su interior.
- Este concepto de *caja negra* resulta de sumo interés cuando se pretende analizar redes de dos puertas, denominadas Cuadripolos.
- En dichas redes, el objetivo es conocer y modelar una red *cualquiera* en base a su comportamiento de cara al exterior

Cuadripolos - Definición

- En una red bipuerta o Cuadripolo existen cuatro variables de interés:
  - Tensión y corriente en la puerta de entrada.
  - Tensión y corriente en la puerta de salida.
- El análisis de las redes bipuerta se realiza mediante matrices de parámetros que expresan la interdependencia entre estas cuatro variables.
- La teoría de Cuadripolos permite tratar a una parte de una red como una caja negra descripta por alguna matriz de parámetros.
- El análisis apunta, entonces, a estudiar el vínculo de dicha porción de red con el resto de la misma.
- La topología real de los elementos no reviste, en principio, verdadero interés a los efectos de analizar la interacción de dicha red con los circuitos conectados a sus terminales.

Cuadripolos - Definición

- Se estudiarán, en CySL, redes lineales y pasivas (incluyendo en este conjunto a las redes con generadores dependientes).
- Para ello, las redes estarán conformadas por Capacitores, Inductores, Resistencias y Transformadores invariables en el tiempo.
- Con las premisas anteriores, podemos establecer dos expresiones lineales que relacionan las cuatro variables del cuadripolo.

$$W_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$$
$$W_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2$$

- X_i y W_j son variables que representan tensiones o corrientes, pudiendo corresponder a cualquiera de las variables indicadas en la figura, donde además se define las convenciones de signos positivos para tensiones y corrientes (notar las corrientes entrantes en cada caso).
- X_1 y X_2 son *variables independientes*, es decir, las variables de entrada o las excitaciones de la red representada por el cuadripolo y W_1 y W_2 son variables dependientes, es decir, las variables de salida o las respuestas.

Cuadripolos - Definición

$$W_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2$$

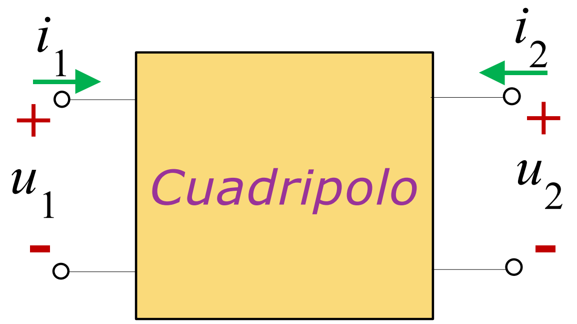
$$W_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2$$

- Un aspecto muy importante es que las expresiones lineales anteriores son válidas tanto en el dominio del tiempo, como en el dominio de la frecuencia compleja s o dominio de Laplace, por la propiedad de linealidad y superposición de la transformada de Laplace.
- En el dominio del tiempo para régimen sinusoidal permanente las variables de entrada y de salida son variables fasoriales.
- Los parámetros a_{ij} tanto en el dominio del tiempo para régimen sinusoidal permanente, como en el dominio de Laplace dependen exclusivamente de los valores *R*, *L*, *C* y eventualmente de los elementos del modelo equivalente del transformador.
- Según sean las variables que se adopten como variables de entrada y de salida, los a_{ij} reciben nombres diferentes, y se determinan a partir de las ecuaciones anteriores, anulando en cada una, sucesivamente una de las variables independientes.

Cuadripolos - Definición

$$W_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$$

$$W_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2$$



$$\alpha_{11} = \left.\frac{W_1}{X_1}\right|_{X_2=0} \qquad \alpha_{12} = \left.\frac{W_1}{X_2}\right|_{X_1=0} \qquad \alpha_{21} = \left.\frac{W_2}{X_1}\right|_{X_2=0} \qquad \alpha_{22} = \left.\frac{W_2}{X_2}\right|_{X_1=0}$$

- Las ecuaciones escritas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{W} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}$$

- Siendo:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de las excitaciones (matriz *columna*).

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de las respuestas (matriz *columna*).

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Matriz de parámetros del cuadripolo (matriz *cuadrada*).

Cuadripolos - Características

$$\alpha_{11} = \left.\frac{W_1}{X_1}\right|_{X_2=0} \qquad \alpha_{12} = \left.\frac{W_1}{X_2}\right|_{X_1=0} \qquad \alpha_{21} = \left.\frac{W_2}{X_1}\right|_{X_2=0} \qquad \alpha_{22} = \left.\frac{W_2}{X_2}\right|_{X_1=0}$$

- Es importante tener en cuenta que, para determinar la matriz α del cuadripolo, puede no ser estrictamente necesario determinar sus 4 parámetros α_{ij}, dependiendo de las características topológicas y eléctricas del cuadripolo.

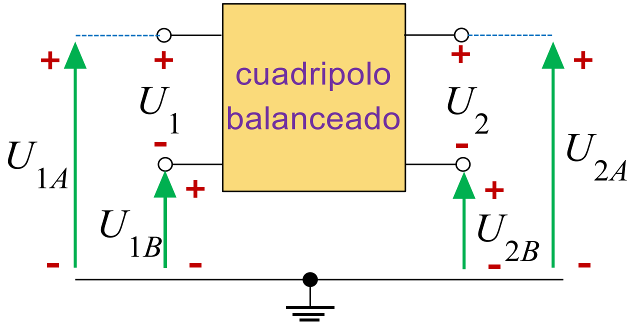
Simetría

- *Simetría balanceada*: cuadripolo simétrico respecto a un eje horizontal. La parte superior del circuito es igual a la parte inferior.
- *Simetría de transferencia*: cuadripolo simétrico respecto a un eje vertical. La mitad respecto al eje de simetría vista desde la entrada es igual a otra mitad vista desde la salida.
- Cuando el cuadripolo presenta ambas simetrías, se lo denomina de *doble simetría*.

Cuadripolos - Características

Cuadripolos balanceados o equilibrados

- Los cuadripolos balanceados o equilibrados son los que tienen simetría balanceada.
- Los cuadripolos balanceados o equilibrados carecen de la conexión común entre la entrada y la salida, y son redes *equilibradas respecto a tierra.* Las condiciones de balance serían: $U_{1A}= -U_{1B}$ y $U_{2A}= -U_{2B}$



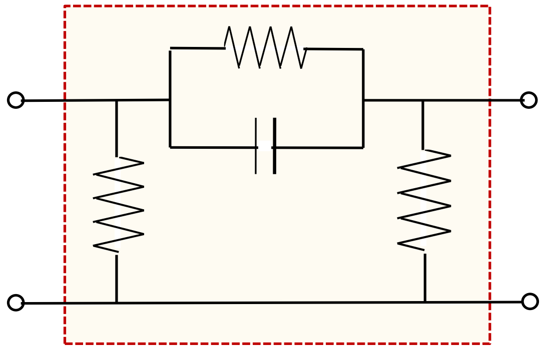
$$\boxed{\begin{array}{ll} U_{1A} = U_1/2 & U_{1B} = -U_1/2 \\ U_{2A} = U_2/2 & U_{2B} = -U_2/2 \end{array}}$$

- Las redes equilibradas se emplean en numerosas aplicaciones, sobre todo en aquellas donde el ruido presente (que aparece como tensión de modo común en ambos terminales) puede afectar el funcionamiento del sistema.

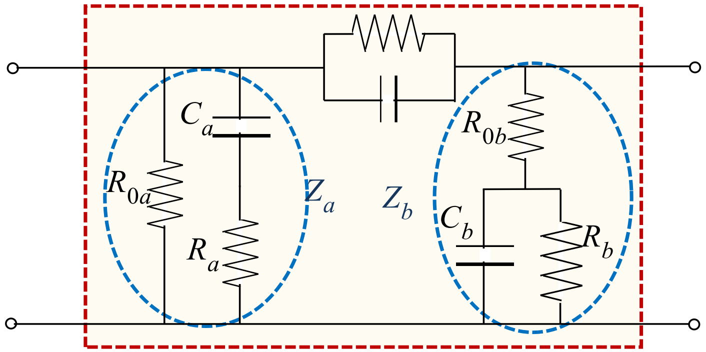
Cuadripolos - Características

Cuadripolos simétricos

- Los cuadripolos simétricos son los que tienen simetría de transferencia.
- La simetría de transferencia puede ser eléctrica y topológica:
  - Eléctrica: igual impedancia e igual configuración del cuadripolo visto desde ambos terminales de entrada (a).
  - Topológica: igual impedancia pero distinta configuración del cuadripolo visto desde ambos terminales de entrada (b).



a)



b)

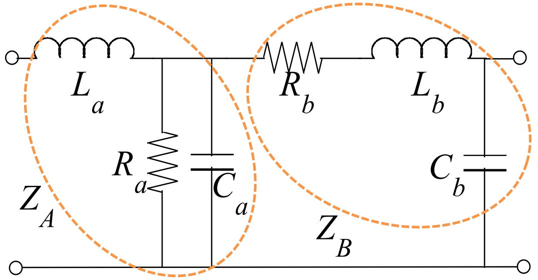
Cuadripolos - Características

Cuadripolos asimétricos

- Las redes *asimétricas* son cuadripolos cuyas impedancias de entrada para ambas puertas son distintas.

Cuadripolos antisimétricos

- Los cuadripolos *antisimétricos* son aquéllos en los que se puede trazar una línea divisoria interna tal que el cuadripolo, *visto desde cada puerta*, queda dividido en dos circuitos *duales:*
- Para determinados valores de los componentes, las impedancias de entrada y de salida son duales ($Z_A Z_B$=1).



Cuadripolos recíprocos o bilaterales

- El teorema de reciprocidad establece que, si en una red *pasiva y lineal* se aplica una tensión *U* en una rama 1, obteniendo una corriente *I* en una rama 2, entonces al aplicar la tensión *U* en la rama 2 se obtendrá la misma corriente *I* en la rama 1. Y del mismo modo si se cambian tensiones por corrientes y viceversa.
- *En consecuencia, cualquier cuadripolo que sólo contenga elementos pasivos y lineales (es decir resistencias, inductancias, capacidades y bobinas acopladas), es recíproco o bilateral.*

Matriz Y de admitancias en cortocircuito

- Se consideran las tensiones y corrientes de la figura, incluidos los signos positivos definidos para cada una de ellas.
- Se definen a las variables de entrada como las tensiones u_1 y u_2 y las variables de salida como las corrientes i_1 e i_2.

$$I_1(s) = y_{11}(s)\,U_1(s) + y_{12}(s)\,U_2(s)$$
$$I_2(s) = y_{21}(s)\,U_1(s) + y_{22}(s)\,U_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

- Los parámetros y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} son *las admitancias en cortocircuito* (abreviadamente *parámetros y*) y la definición de cada uno surge directamente de anular una de las tensiones en las ecuaciones anteriores

$$y_{11}(s) = \left.\frac{I_1(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2(s)=0}$$

Admitancia de entrada, con salida en cortocircuito

$$y_{12}(s) = \left.\frac{I_1(s)}{U_2(s)}\right|_{U_1(s)=0}$$

Admitancia de transferencia entrada-salida, con entrada en cortocircuito o Admitancia de *transferencia directa* en cortocircuito

$$y_{22}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{U_2(s)}\right|_{U_1(s)=0}$$

Admitancia de salida, con entrada en cortocircuito

$$y_{21}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2(s)=0}$$

Admitancia de transferencia salida-entrada, con salida en cortocircuito o Admitancia de *transferencia inversa* en cortocircuito

Matriz Y de admitancias en cortocircuito

Determinación analítica o experimental de los parámetros y

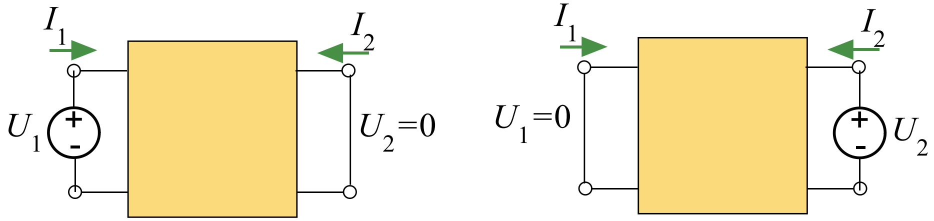
- Para obtener las expresiones de los parámetros, se debe tener en cuenta que las *variables independientes* o de entrada son las *tensiones*.

Variable a medir o determinar (en la puerta de salida)

$$y_{ij} = \left.\frac{I_i(s)}{U_j(s)}\right|_{U_i(s)=0}$$

Condición para la puerta de salida

Señal a inyectar (generador independiente en la puerta de entrada)



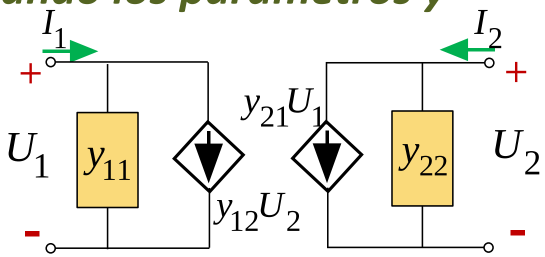
(a) (b)

- El circuito a) permite determinar y_{11} e y_{21} mientras que el b) se utiliza para y_{12} e y_{22}.

- Para cuadripolos pasivos (y por lo tanto *recíprocos* o *bilaterales*) resulta $y_{12} = y_{21}$, y por lo tanto la matriz **Y** resulta simétrica respecto de la diagonal principal.

- Para cuadripolos *simétricos* $y_{11} = y_{22}$ y para cuadripolos *asimétricos* $y_{11} \neq y_{22}$.

Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros y



Matriz Z de impedancias en circuito abierto

- Se consideran las tensiones y corrientes de la figura, incluidos los signos positivos definidos para cada una de ellas.
- Se definen a las variables de entrada como las corrientes i_1 e i_2 y las variables de salida como las tensiones u_1 y u_2.

$$U_1(s) = z_{11}(s)\,I_1(s) + z_{12}(s)\,I_2(s)$$
$$U_2(s) = z_{21}(s)\,I_1(s) + z_{22}(s)\,I_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

- Los parámetros z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} son las *impedancias en circuito abierto* (abreviadamente *parámetros z*) y la definición de cada uno surge directamente de anular una de las corrientes en las ecuaciones anteriores

$$z_{11}(s) = \left.\frac{U_1(s)}{I_1(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Impedancia de entrada, con salida en circuito abierto

$$z_{12}(s) = \left.\frac{U_1(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1(s)=0}$$ Impedancia de transferencia entrada-salida, con entrada en circuito abierto o Impedancia de *transferencia directa* en circuito abierto

$$z_{22}(s) = \left.\frac{U_2(s)}{I_2(s)}\right|_{I_1(s)=0}$$ Impedancia de salida, con entrada en circuito abierto

$$z_{21}(s) = \left.\frac{U_2(s)}{I_1(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Impedancia de transferencia salida-entrada, con salida en circuito abierto o Impedancia de *transferencia inversa* en cortocircuito

Matriz Z de impedancias en circuito abierto

Determinación analítica o experimental de los parámetros z

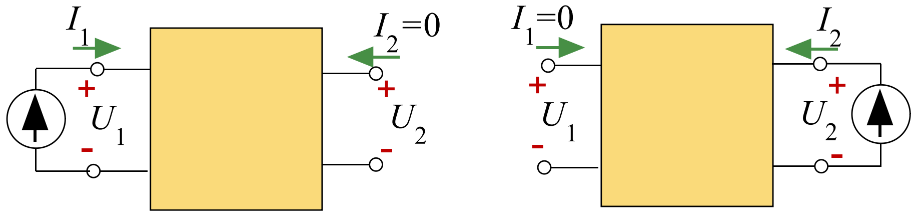
- Para obtener las expresiones de los parámetros, se debe tener en cuenta que las *variables independientes* o de entrada son las *tensiones*.

Variable a medir o determinar (en la puerta de salida)

$$z_{ij} = \left.\frac{U_i(s)}{I_j(s)}\right|_{I_{\hat{i}}(s)=0}$$

Condición para la puerta de salida

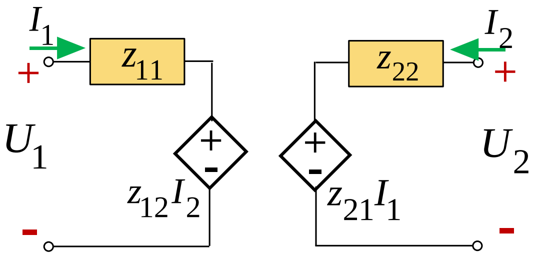
Señal a inyectar (generador independiente en la puerta de entrada)



(a) (b)

- El circuito a) permite determinar z_{11} e z_{21} mientras que el b) se utiliza para z_{12} e z_{22}.
- Para cuadripolos pasivos (y por lo tanto *recíprocos* o *bilaterales*) resulta $z_{12} = z_{21}$, y por lo tanto la matriz **Z** resulta simétrica respecto de la diagonal principal.
- Para cuadripolos *simétricos* $z_{11} = z_{22}$ y para cuadripolos *asimétricos* $z_{11} \neq z_{22}$.

Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros z



Relación entre los parámetros Z e Y

- De las expresiones que definen a los parámetros de las matrices Z e Y, puede deducirse rápidamente que las mismas son inversas entre si.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|}\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

- Por lo tanto, es posible encontrar la relación existente entre los parámetros de ambas matrices a partir de sus definiciones.

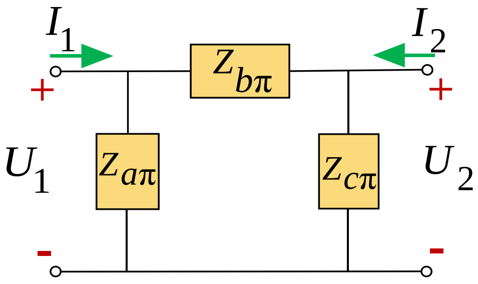
$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|\mathbf{Y}|} \qquad z_{12} = \frac{-y_{12}}{|\mathbf{Y}|} \qquad z_{22} = \frac{y_{11}}{|\mathbf{Y}|} \qquad z_{21} = \frac{-y_{21}}{|\mathbf{Y}|}$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{|\mathbf{Z}|} \qquad y_{21} = \frac{-z_{21}}{|\mathbf{Z}|} \qquad y_{11} = \frac{z_{22}}{|\mathbf{Z}|} \qquad y_{12} = \frac{-z_{12}}{|\mathbf{Z}|}$$

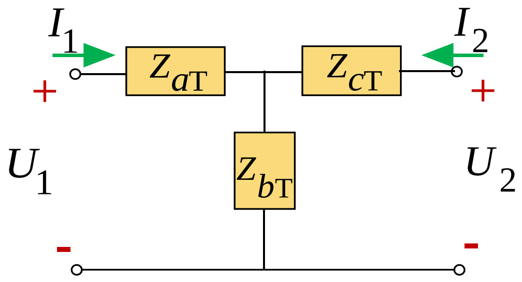
Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Celdas T y π

Toda red recíproca, por estar constituidas exclusivamente por elementos pasivos, puede modelarse *sin* fuentes controladas mediante los circuitos elementales o *celdas T y* π. Ambas celdas son representaciones únicas par estas redes. Es decir, toda red recíproca tiene una y sólo una red T equivalente que consta sólo de elementos pasivos y sólo una red π equivalente con elementos pasivos exclusivamente.



(a)



(b)

$$\mathbf{Y}_\pi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_{a\pi}} + \dfrac{1}{Z_{b\pi}} & -\dfrac{1}{Z_{b\pi}} \\ -\dfrac{1}{Z_{b\pi}} & \dfrac{1}{Z_{b\pi}} + \dfrac{1}{Z_{c\pi}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_\pi = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{a\pi}Z_{b\pi} + Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} & \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{c\pi}} + \dfrac{1}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi}}} \cdot \dfrac{Z_{a\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi}} \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{a\pi}} + \dfrac{1}{Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}} \cdot \dfrac{Z_{c\pi}}{Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} & \dfrac{Z_{a\pi}Z_{c\pi} + Z_{b\pi}Z_{3\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} \end{bmatrix}$$

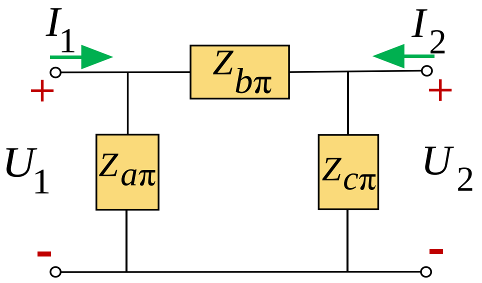
$$\mathbf{Y}_\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_{a\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{c\mathrm{T}}}}} & \dfrac{-1}{Z_{c\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{a\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}}}} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{a\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}}} \cdot \dfrac{1}{Z_{a\mathrm{T}}} \\ \dfrac{-1}{Z_{a\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{c\mathrm{T}}}}} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{c\mathrm{T}}}} \cdot \dfrac{1}{Z_{c\mathrm{T}}} & \dfrac{1}{Z_{c\mathrm{T}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_{a\mathrm{T}}} + \dfrac{1}{Z_{b\mathrm{T}}}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_\mathrm{T} = \begin{bmatrix} Z_{a\mathrm{T}} + Z_{b\mathrm{T}} & Z_{b\mathrm{T}} \\ Z_{b\mathrm{T}} & Z_{b\mathrm{T}} + Z_{c\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

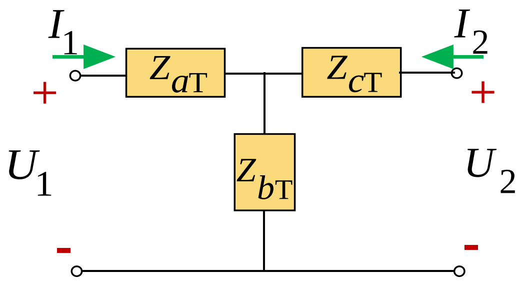
Celdas T y π. Transformación Estrella-Triángulo

A partir de lo antes descripto, puede afirmarse que: *Toda red T que conste sólo de elementos pasivos tiene una red π equivalente también pasiva, y viceversa*.



(a)

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\pi} &= \mathbf{Y}_{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{T}} &= \mathbf{Z}_{\pi}\end{aligned}}$$



(b)

$$Z_{a\pi} = \frac{Z_{a\mathrm{T}}Z_{b\mathrm{T}} + Z_{a\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}} + Z_{b\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}}}{Z_{c\mathrm{T}}}$$

$$Z_{b\pi} = \frac{Z_{a\mathrm{T}}Z_{b\mathrm{T}} + Z_{a\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}} + Z_{b\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}}}{Z_{b\mathrm{T}}}$$

$$Z_{c\pi} = \frac{Z_{a\mathrm{T}}Z_{b\mathrm{T}} + Z_{a\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}} + Z_{b\mathrm{T}}Z_{c\mathrm{T}}}{Z_{a\mathrm{T}}}$$

$$Z_{a\mathrm{T}} = \frac{Z_{a\pi}Z_{b\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

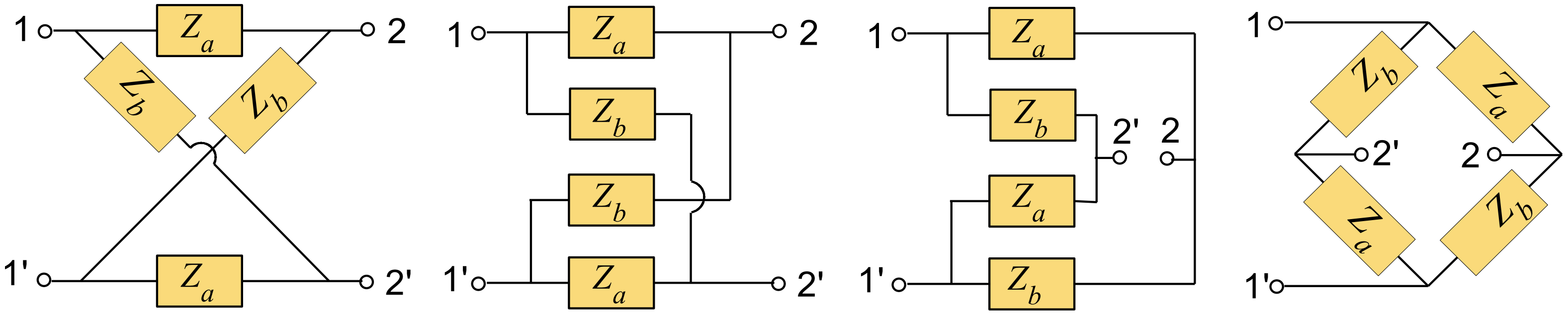
$$Z_{b\mathrm{T}} = \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

$$Z_{c\mathrm{T}} = \frac{Z_{b\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Celdas Lattice o Celosía

- La topología *Lattice* (o *celosía*) es el ejemplo más sencillo de redes equilibradas.
- La celda Lattice es una red recíproca por estar constituida exclusivamente por elementos pasivos (por lo tanto $y_{12} = y_{21}$ y $z_{12} = z_{21}$), física y eléctricamente simétrica (por lo tanto $y_{11} = y_{22}$ y $z_{11} = z_{22}$) y balanceada o equilibrada.



$$\mathbf{Y}_{\text{lattice}} = \begin{bmatrix} \frac{Y_a + Y_b}{2} & \frac{Y_b - Y_a}{2} \\ \frac{Y_b - Y_a}{2} & \frac{Y_a + Y_b}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}_{\text{lattice}} = \begin{bmatrix} \frac{Z_a + Z_b}{2} & \frac{Z_b - Z_a}{2} \\ \frac{Z_b - Z_a}{2} & \frac{Z_a + Z_b}{2} \end{bmatrix}$$

Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Transformación de redes balanceadas a desbalanceadas

- Toda red recíproca tiene su correspondiente celda T o π, siendo estas celdas desbalanceadas.
- Los elementos de las celdas pueden determinarse a partir de igualar la matriz Z o Y de la red analizada con la correspondiente matriz Z o Y de la celda equivalente.

$$\mathbf{Y}_\pi = \mathbf{Y}$$
$$\mathbf{Z}_\mathrm{T} = \mathbf{Z}$$

Celda π

$$Z_{b\pi} = \frac{-1}{y_{12}}$$
$$Z_{a\pi} = \frac{1}{y_{11} + y_{12}}$$
$$Z_{c\pi} = \frac{1}{y_{22} + y_{12}}$$

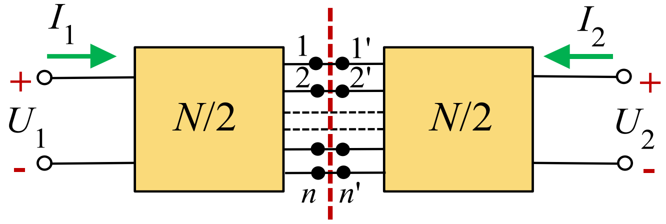
Celda T

$$Z_{b\mathrm{T}} = z_{12}$$
$$Z_{a\mathrm{T}} = z_{11} - z_{12}$$
$$Z_{c\mathrm{T}} = z_{22} - z_{12}$$

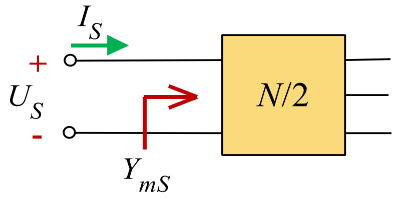
Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Transformación de redes desbalanceadas a balanceadas – Teorema de Bartlett

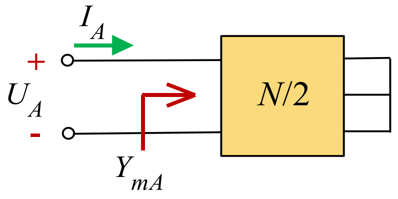
- El teorema de Bartlett, también conocido como teorema de bisección, conduce a simplificaciones que agilizan el proceso de análisis, en el caso de redes simétricas.
- Consideremos un cuadripolo recíproco o bilateral, física y eléctricamente simétrico, el cual ha sido separado en dos mitades simétricas entre sí, mostrándose las uniones entre ambas partes.



- Las excitaciones U1 y U2 podemos expresarlas en función de dos tensiones. Tensión simétrica UA y tensión antisimétrica UB, tal que: $U_1 = U_S + U_A \qquad U_2 = U_S - U_A$
- En el caso de excitación simétrica (a), y por simetría de la red, los puntos 1 y 1', 2 y 2', etc tienen igual potencial. Por lo tanto, la corriente entre ambos puntos resulta nula.
- En el caso antisimétrico (b), resultan $U_{12} = -U_{1'-2'}$, $U_{13} = -U_{1'-3'}$, $U_{1n} = -U_{1'-n'}$, etc. Entonces, todos los vínculos entre ambas mitades de la red se encuentran al mismo potencial, y por lo tanto pueden cortocircuitarse en un solo nodo.



(a)

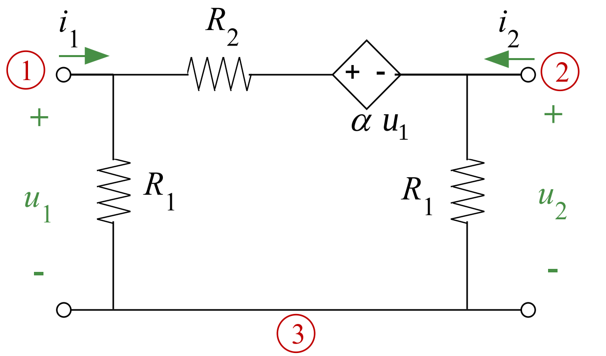


(b)

- Por lo tanto, la red original puede analizarse como la superposición de dos redes con configuraciones particulares.

Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Ejemplo



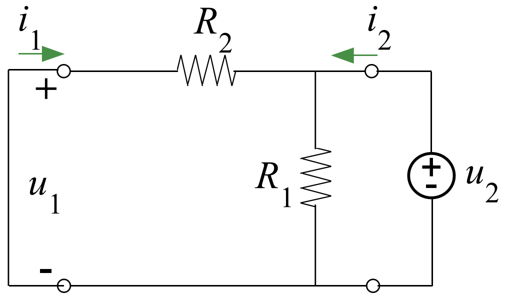
Dado el circuito de la figura en nodo 3 común,

a) Hallar la matriz de admitancias en cortocircuito $|Y_{cc3}|$, aplicando la definición de cada parámetro.

- La matriz de admitancias queda establecida por la definición de sus parámetros:

$$y_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0}$$

- Parámetros para $u_1 = 0$



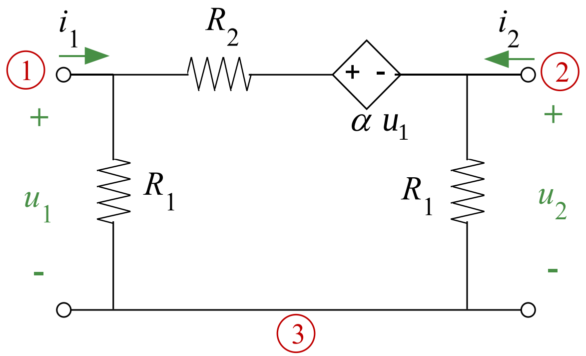
$$i_1 = -\frac{1}{R_2} u_2 \quad \Rightarrow \quad y_{12} = -\frac{1}{R_2}$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u_2 \quad \Rightarrow \quad y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Uso y Aplicaciones de las matrices Z e Y

Ejemplo

Dado el circuito de la figura en nodo 3 común,

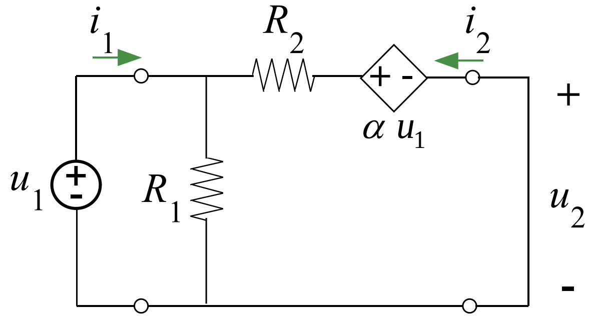


a) Hallar la matriz de admitancias en cortocircuito $|Y_{cc3}|$, aplicando la definición de cada parámetro.

- La matriz de admitancias queda establecida por la definición de sus parámetros:

$$y_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0}$$

- Parámetros para $u_2 = 0$



$$i_2 = -\frac{1-\alpha}{R_2}u_1 \Longrightarrow y_{21} = -\frac{1-\alpha}{R_2}$$

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}\right)u_1 \Longrightarrow y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}$$

$$[Y_{CC3}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1-\alpha}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Matriz H o híbrida

- Se definen como matrices híbridas a aquellas que consideran como variables independientes a la corriente en una de las puertas y a la tensión en otra.
- Las matrices híbridas resultan útiles para cuadripolos no bilaterales.
- La matriz H utiliza como variables independientes la corriente de entrada y la tensión de salida.

$$U_1(s) = h_{11}(s)\, I_1(s) + h_{12}(s)\, U_2(s)$$
$$I_2(s) = h_{21}(s)\, I_1(s) + h_{22}(s)\, U_2(s)$$

$$h_{11}(s) = \left.\frac{U_1(s)}{I_1(s)}\right|_{U_2(s)=0}$$ Impedancia de entrada, con salida en cortocircuito

$$h_{12}(s) = \left.\frac{U_1(s)}{U_2(s)}\right|_{I_1(s)=0}$$ Ganancia inversa de tensión con entrada en circuito abierto

$$h_{22}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{U_2(s)}\right|_{I_1(s)=0}$$ Admitancia de salida, con entrada en circuito abierto

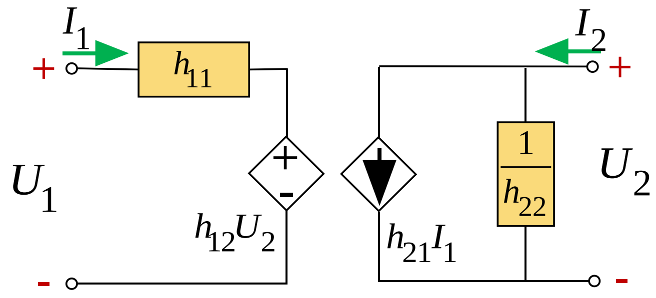
$$h_{21}(s) = \left.\frac{I_2(s)}{I_1(s)}\right|_{U_2(s)=0}$$ Ganancia directa de corriente con salida en cortocircuito

Matriz H o híbrida

- Si se consideran las definiciones de los parámetros h, y se los relaciona con los parámetros de admitancia e impedancia, es posible obtener las siguientes expresiones:

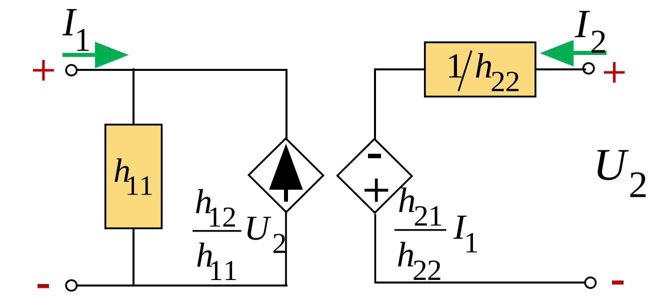
$$U_1(s) = h_{11}(s)\, I_1(s) + h_{12}(s)\, U_2(s)$$
$$I_2(s) = h_{21}(s)\, I_1(s) + h_{22}(s)\, U_2(s)$$

Circuito equivalente



(a)

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{|\mathbf{Z}|}{z_{22}} \qquad h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{z_{12}}{z_{22}}$$



(b)

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{|\mathbf{Y}|}{y_{11}} = \frac{1}{z_{22}} \qquad h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}$$

Matriz G o híbrida inversa

- Se define como matriz híbrida inversa a aquella que considera como variables independientes a la tensión de entrada y a la corriente de salida.
- Es la matriz análoga a la matriz H

$$I_1(s) = g_{11}(s)\,U_1(s) + g_{12}(s)\,I_2(s)$$
$$U_2(s) = g_{21}(s)\,U_1(s) + g_{22}(s)\,I_2(s)$$

$$g_{11}(s) = \left.\frac{I_1(s)}{U_1(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Admitancia de entrada, con salida en circuito abierto

$$g_{22}(s) = \left.\frac{U_2(s)}{I_2(s)}\right|_{U_1(s)=0}$$ Impedancia de salida, con entrada en cortocircuito

$$g_{12}(s) = \left.\frac{I_1(s)}{I_2(s)}\right|_{U_1(s)=0}$$ Ganancia inversa de corriente con entrada en cortocircuito

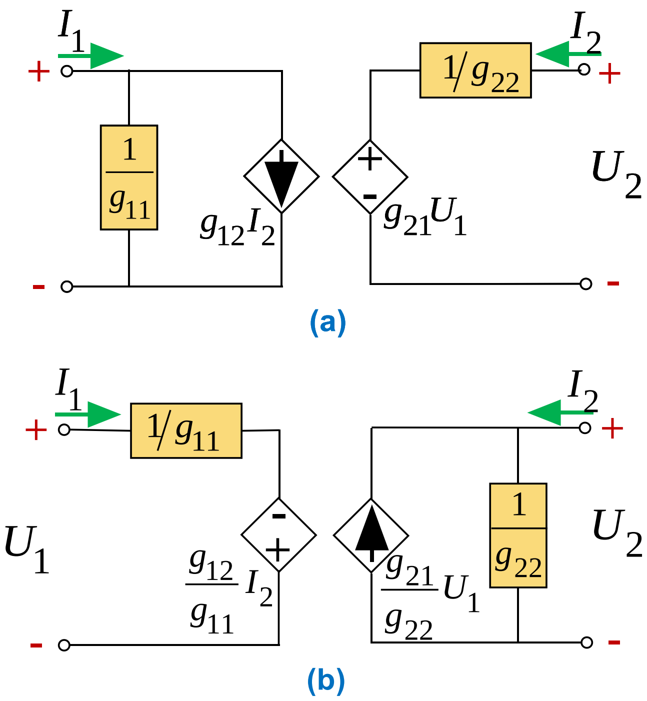
$$g_{21}(s) = \left.\frac{U_2(s)}{U_1(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Ganancia directa de tensión con salida en circuito abierto

Matriz G o híbrida inversa

- Si se consideran las definiciones de los parámetros g, y se los relaciona con los parámetros de admitancia e impedancia, es posible obtener las siguientes expresiones:

$$I_1(s) = g_{11}(s)\,U_1(s) + g_{12}(s)\,I_2(s)$$
$$U_2(s) = g_{21}(s)\,U_1(s) + g_{22}(s)\,I_2(s)$$

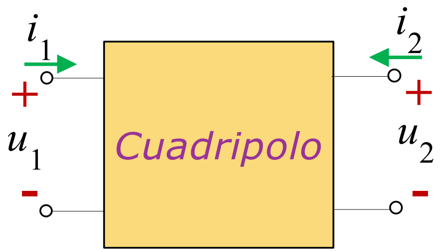
Circuito equivalente



$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{|\mathbf{Y}|}{y_{22}} \qquad g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0} = \frac{|\mathbf{Z}|}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}} \qquad g_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0} = -\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{z_{21}}{z_{22}}$$

Matriz H - Ejemplo

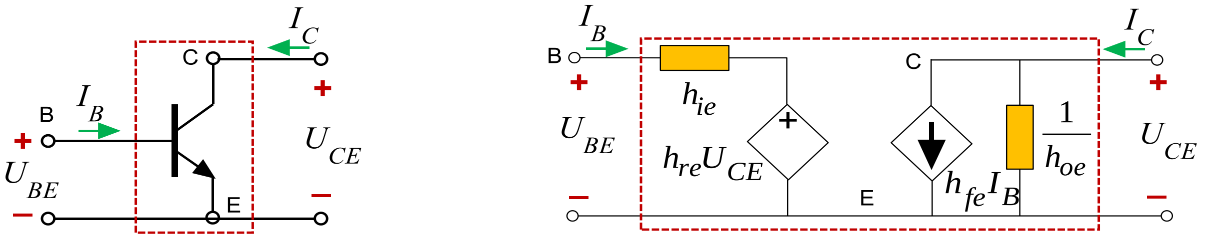


Se dispone de los parámetros h de un transistor bipolar para conexión emisor común.

a) Encontrar la matriz H de dicho transistor en conexión colector común.

b) Encontrar la matriz Y de dicho transistor en conexión emisor común.

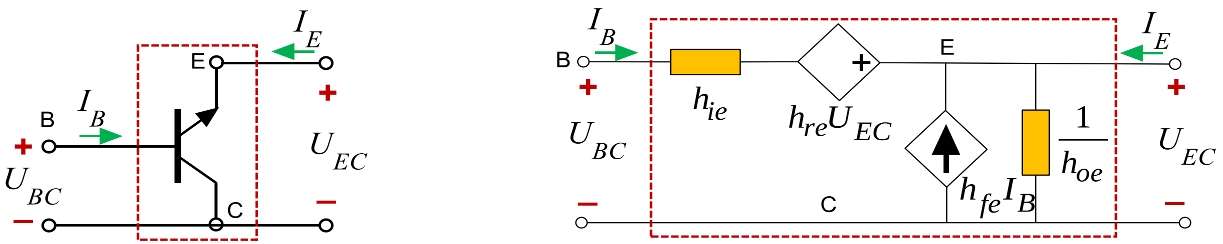
En las hojas de datos suministradas por los fabricantes, se indican los valores de los parámetros *h*, que en esta configuración se los denomina: $h_{11}=h_{ie}$, $h_{12}=h_{re}$, $h_{21}=h_{fe}$ y $h_{22}=h_{oe}$



(a) (b)

Configuración emisor común. Circuito equivalente

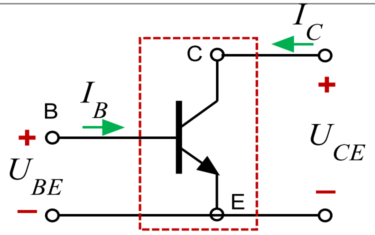
Reordenando el circuito,



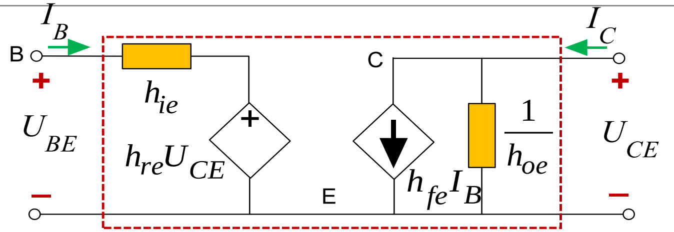
(a) (b)

Configuración colector común. Circuito equivalente

Matriz H - Ejemplo



(a)

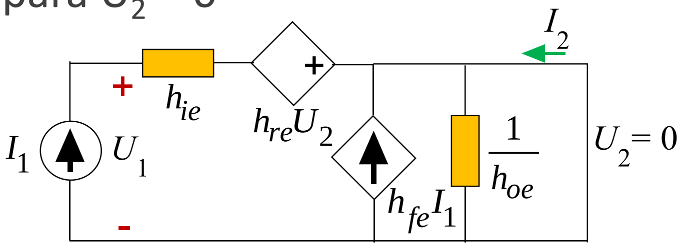


(b)

Parámetros para $U_2 = 0$

$$U_1 = h_{ie} I_1 \quad \therefore \quad h_{11} = h_{ic} = h_{ie}$$

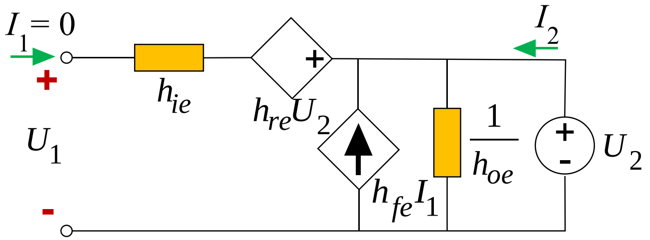
$$I_2 = -\left(h_{fe} + 1\right) I_1 \quad \therefore \quad h_{21} = h_{fc} = -\left(h_{fe} + 1\right)$$



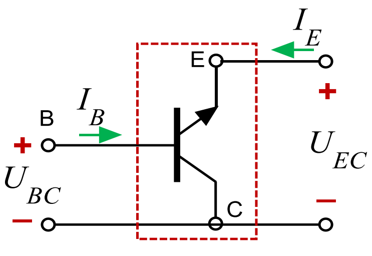
Parámetros para $I_1 = 0$

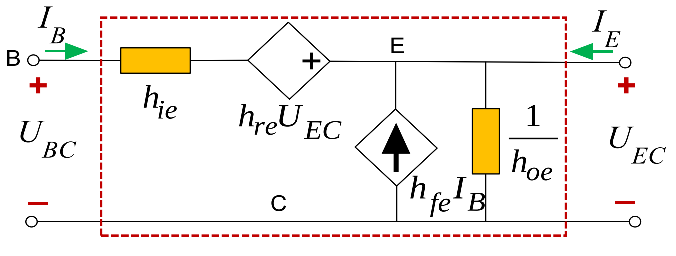
$$U_1 = (1 - h_{re}) U_2 \quad \therefore \quad h_{12} = h_{rc} = (1 - h_{re})$$

$$I_2 = h_{oe} U_2 \quad \therefore \quad h_{22} = h_{oc} = h_{oe}$$



Matriz H - Ejemplo



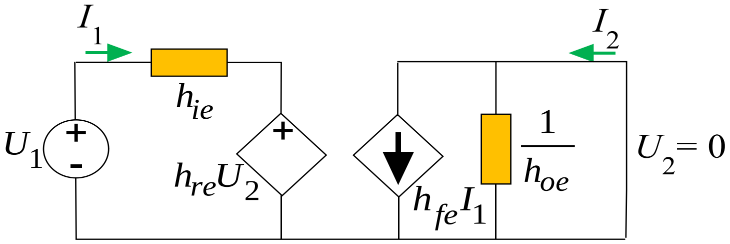


Calculando los parámetros de Y por definición para la configuración emisor común

Parámetros para $U_2 = 0$

$$I_2 = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} U_1 \quad \therefore \quad y_{21} = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$$

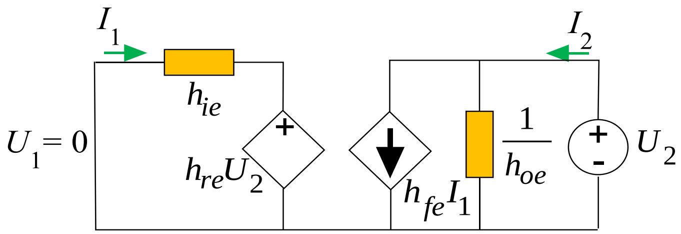
$$I_1 = \frac{U_1}{h_{ie}} \quad \therefore \quad y_{11} = \frac{1}{h_{ie}}$$



Parámetros para $U_1 = 0$

$$I_1 = -\frac{h_{re}}{h_{ie}} U_2 \quad \therefore \quad y_{12} = -\frac{h_{re}}{h_{ie}}$$

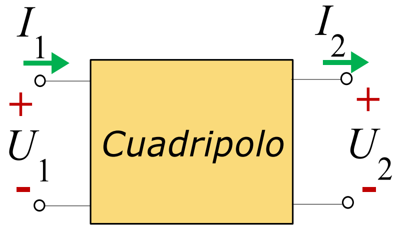
$$I_2 = -\frac{h_{re} h_{fe}}{h_{ie}} U_2 + h_{oe} U_2 \quad \therefore \quad y_{22} = h_{oe} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe}}{h_{ie}}$$



Matriz T de transmisión

- La matriz de transmisión o matriz **T** resulta cuando se consideran como variables independientes la tensión y corriente en la puerta de salida, y como variables dependientes la tensión y corriente en la puerta de entrada.

- En este tipo de conexión la corriente $I_2(s)$ saliente de uno de los cuadripolos es igual a la corriente $I_1(s)$ entrante al siguiente cuadripolo de la cascada. Para mantener la compatibilidad con el modelo hasta ahora utilizado, se modifica el modelo de ecuaciones.



$$U_1(s) = A(s)\ U_2(s) + B(s)\ I_2(s)$$
$$I_1(s) = C(s)\ U_2(s) + D(s)\ I_2(s)$$

$$U_1(s) = A(s)\,U_2(s) - B(s)\,I_2(s)$$
$$I_1(s) = C(s)\,U_2(s) - D(s)\,I_2(s)$$

$$A(s) = \left.\frac{U_1(s)}{U_2(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Ganancia inversa de tensión, con salida en circuito abierto

$$B(s) = \left.\frac{U_1(s)}{-I_2(s)}\right|_{U_2(s)=0}$$ Impedancia de transferencia con salida en cortocircuito

$$C(s) = \left.\frac{I_1(s)}{U_2(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Admitancia de transferencia con salida en circuito abierto

$$D(s) = \left.\frac{I_1(s)}{-I_2(s)}\right|_{I_2(s)=0}$$ Ganancia inversa de corriente, con salida en cortocircuito

Matriz T de transmisión

- Si se consideran las definiciones de los parámetros ABCD, y se los relaciona con los parámetros de admitancia e impedancia, es posible obtener las siguientes expresiones:

$$U_1(s) = A(s)\,U_2(s) - B(s)\,I_2(s)$$
$$I_1(s) = C(s)\,U_2(s) - D(s)\,I_2(s)$$

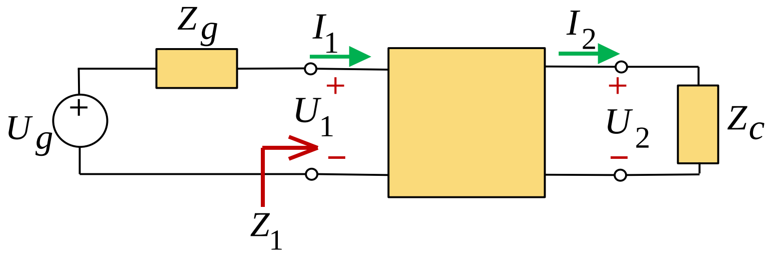
$$A = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} \qquad B = \left.\frac{U_1}{-I_2}\right|_{U_2=0} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{|\mathbf{Z}|}{z_{21}}$$

$$C = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{|\mathbf{Y}|}{y_{21}} \qquad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{U_2=0} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Matriz T de transmisión

Impedancia de entrada

- Se denomina *impedancia de entrada* a la impedancia Z_1 que presenta el cuadripolo a la fuente que lo alimenta y, naturalmente, depende de la impedancia Z_c con que está cargado el cuadripolo.



- Para el sentido de la corriente de salida indicado como referencia *saliente* del cuadripolo:

$$U_1(s) = A(s)\ U_2(s) + B(s)\ I_2(s)$$
$$I_1(s) = C(s)\ U_2(s) + D(s)\ I_2(s)$$

- La impedancia de entrada resulta de dividir miembro a miembro las expresiones anteriores, teniendo en cuenta la condición de carga establecida por la salida.

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A\,U_2 + B\,I_2}{C\,U_2 + D\,I_2}$$

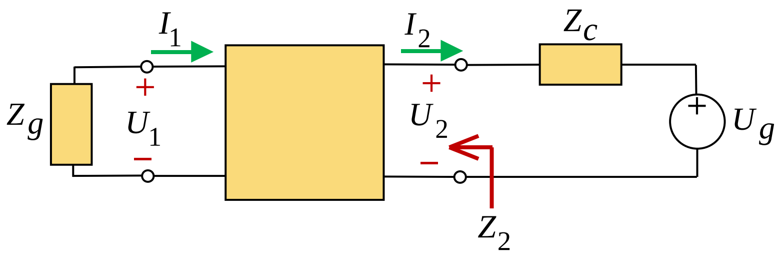
$$Z_c = \frac{U_2}{I_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_1 = \frac{A\,Z_c + B}{C\,Z_c + D}}$$

Matriz T de transmisión

Impedancia de salida

- Si se conectara el generador en bornes de salida, puede obtenerse la impedancia de salida con la entrada cargada con Z_g.



- Empleando los parámetros de la matriz Z, considerando los sentidos de las corrientes y la condición impuesta por la carga

$$U_1 = Z_{11}\, I_1 - Z_{12}\, I_2 \qquad I_1 = -\frac{1}{Z_g} U_1$$
$$U_2 = Z_{21}\, I_1 - Z_{22}\, I_2$$

$$U_1 = -\frac{z_{11}}{Z_g} U_1 - z_{12}\, I_2 \qquad U_2 = -\frac{z_{21}}{Z_g} U_1 - z_{22}\, I_2$$

- Despejando U_1 y operando

$$Z_2 = -\frac{U_2}{I_2} = -\frac{z_{12} z_{21}}{Z_g + z_{11}} + z_{22} = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21} + z_{22} Z_g}{Z_g + z_{11}} = \frac{|\mathbf{Z}| + z_{22} Z_g}{Z_g + z_{11}} \implies \boxed{Z_2 = \frac{D\, Z_g + B}{C\, Z_g + A}}$$

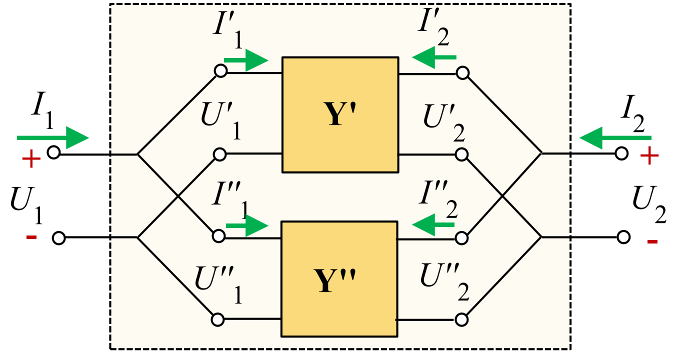
Dividiendo numerador y denominador por z_{21} y las definiciones de parámetros Z

Interconexión de cuadripolos

- La interconexión entre cuadripolos permite obtener cuadripolos de mayor grado de complejidad y caracterizarlos mediante alguna de las matrices vistas, obtenida a partir de las correspondientes matrices de los cuadripolos individuales interconectados.
- De la misma manera, permite subdividir cuadripolos complejos en cuadripolos más simples interconectados, siendo más sencillo determinar la matriz de parámetros completa.
- El primer tipo de conexión conecta entradas entre sí y salidas entre sí. Hay 4 formas de conexión de este tipo: las denominadas conexiones *en paralelo*, *en serie*, *serie-paralelo* y *paralelo-serie.*
- Esta interconexión puede alterar el funcionamiento normal de uno de los cuadripolos. Esta situación se pone siempre de manifiesto en la corriente de entrada y/o de salida de los cuadripolos individuales cuando están conectados. En esa puerta, la corriente que ingresa por uno de los terminales es distinta de la corriente que sale por el otro terminal.
- Esto ocurre porque la interconexión produce una modificación tal, que en el circuito se establece una corriente de circulación interna. En cada caso de interconexión se deben efectuar dos pruebas diseñadas por O. Brune (una en las entradas y otra en las salidas).
- Si la interconexión da lugar a una corriente de circulación no nula, *no significa que la interconexión no se pueda hacer*, sino que una dada matriz del cuadripolo resultante no se puede determinar a partir de las correspondientes matrices de los cuadripolos individuales.

Interconexión de cuadripolos

Cuadripolos en paralelo



- Dos o más cuadripolos están en paralelo cuando se aplica a todas las puertas de entrada la misma tensión U_1 y a todas las puertas de salida la misma tensión U_2.
- A partir de las matrices Y de cada uno de los cuadripolos:

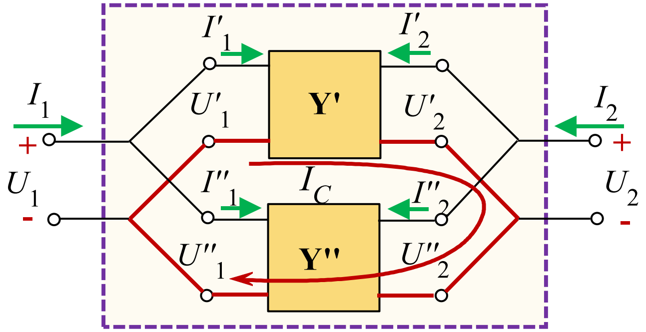
$$\mathbf{I}' = \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{U}' \qquad \mathbf{I}'' = \mathbf{Y}'' \cdot \mathbf{U}''$$

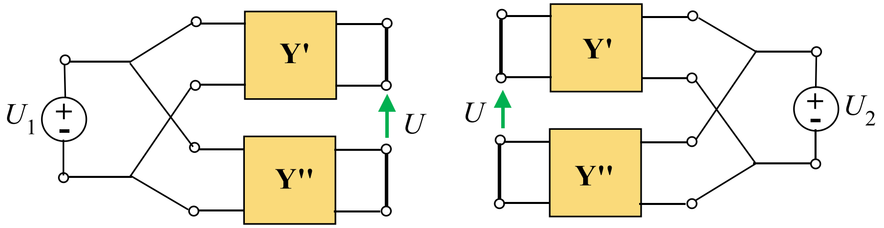
$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' = \mathbf{U}'' \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}''$$

- Sumando miembro a miembro, resulta $\mathbf{I} = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'') \cdot \mathbf{U}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}''}$

Prueba de Brune

Al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación $I_{C,}$ que aumenta la corriente en una puerta y la reduce en otra.





(a) (b)

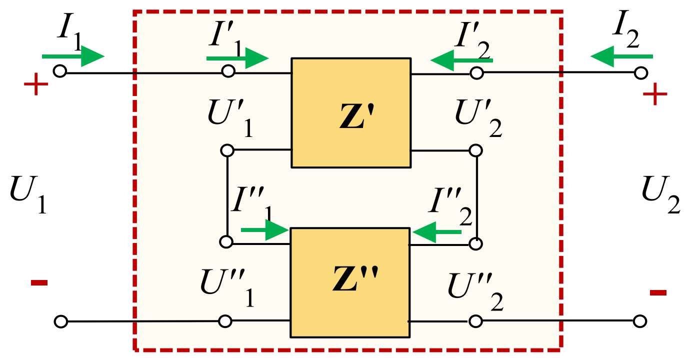
$\boxed{U=0}$

1) Se excita en una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos individuales.
2) Se anula la variable común entre los cuadripolos individuales en la otra puerta de la interconexión.
3) Se mide la tensión U entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

Interconexión de cuadripolos

Cuadripolos en serie

- Dos o más cuadripolos están en serie cuando circula en todas las puertas de entrada la misma corriente I_1 y en todas las puertas de salida la misma corriente I_2.



- A partir de las matrices Z de cada uno de los cuadripolos:

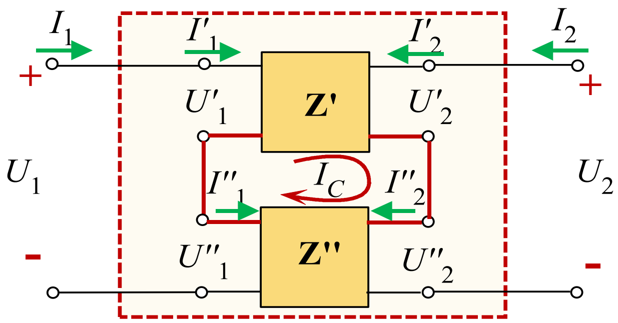
$$\mathbf{U}' = \mathbf{Z}' \cdot \mathbf{I}' \qquad \mathbf{U}'' = \mathbf{Z}'' \cdot \mathbf{I}''$$

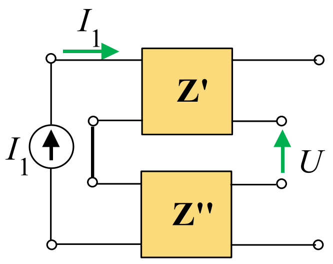
$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}' = \mathbf{I}''$$

- Sumando miembro a miembro, resulta $\mathbf{U} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'') \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}''}$

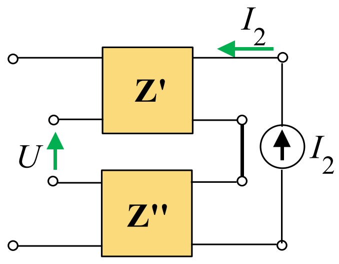
Prueba de Brune

Al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación I_C, que aumenta la corriente en una puerta y la reduce en otra.





(a)



(b)

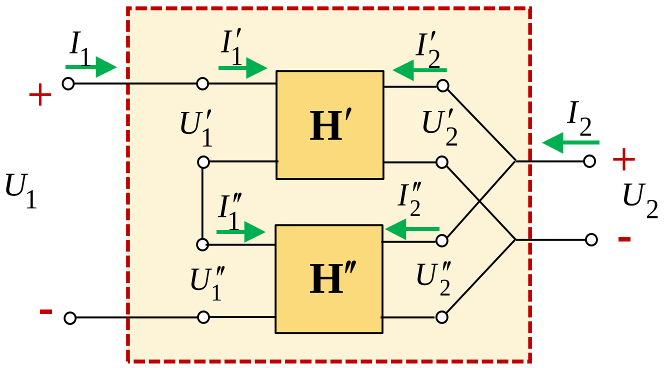
$\boxed{U=0}$

1) Se excita en una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos individuales.
2) Se anula la variable común entre los cuadripolos individuales en la otra puerta de la interconexión.
3) Se mide la tensión U entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

Interconexión de cuadripolos

Cuadripolos en serie-paralelo

- Dos o más cuadripolos están en serie-paralelo cuando circula en todas las puertas de entrada la misma corriente I_1 y se aplica en todas las puertas de salida la misma tensión U_2.

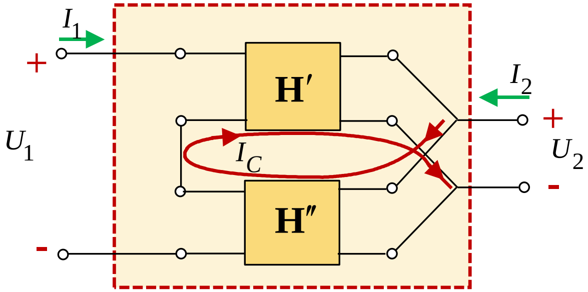


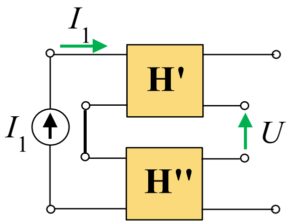
$$\left|\begin{array}{c} U_1'+U_1'' \\ I_2'+I_2'' \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} U_1 \\ I_2 \end{array}\right| = \left(\mathbf{H}'+\mathbf{H}''\right)\left|\begin{array}{c} I_1 \\ U_2 \end{array}\right|$$

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''}$$

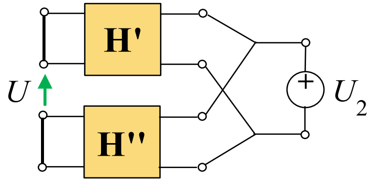
Prueba de Brune

Al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación I_C, que aumenta la corriente en una puerta y la reduce en otra.





(a)



(b)

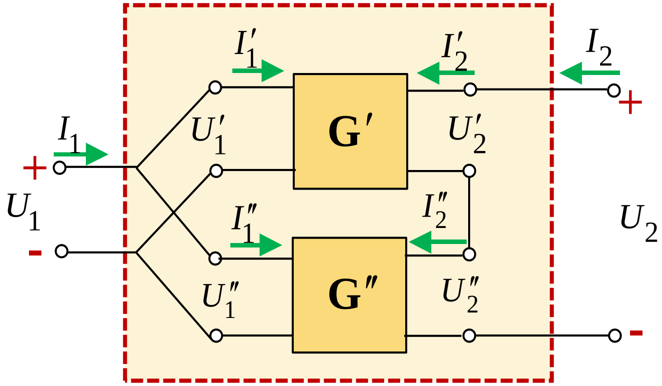
$\boxed{U=0}$

1) Se excita en una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos individuales.
2) Se anula la variable común entre los cuadripolos individuales en la otra puerta de la interconexión.
3) Se mide la tensión U entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

Interconexión de cuadripolos

Cuadripolos en paralelo-serie

- Dos o más cuadripolos están en paralelo-serie cuando se aplica en todas las puertas de salida la misma tensión U_1 y cuando circula en todas las puertas de salida la misma corriente I_2

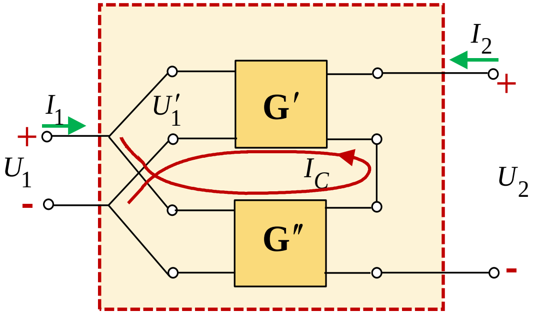


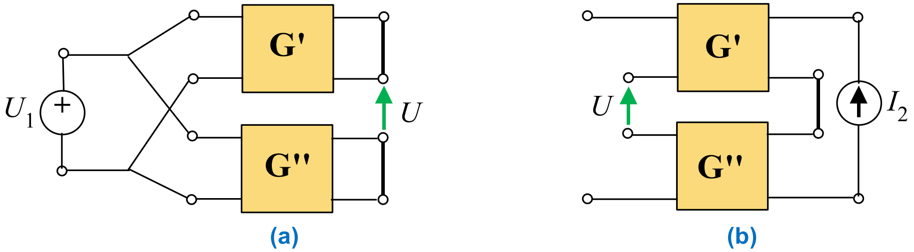
$$\begin{vmatrix} I_1' + I_1'' \\ U_2' + U_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \left(\mathbf{G}' + \mathbf{G}''\right) \begin{vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}''}$$

Prueba de Brune

Al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación $I_{C,}$ que aumenta la corriente en una puerta y la reduce en otra.





$\boxed{U=0}$

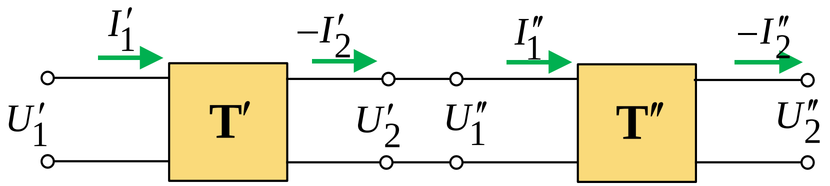
1) Se excita en una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos individuales.
2) Se anula la variable común entre los cuadripolos individuales en la otra puerta de la interconexión.
3) Se mide la tensión U entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

Interconexión de cuadripolos

El segundo grupo de conexiones conecta la entrada de un cuadripolo con la salida de otro. Hay una sola forma de conexión de este tipo: es la denominada conexión en cascada o en cadena.
Esta interconexión nunca origina corriente de circulación.

Cuadripolos en cascada

- Dos o más cuadripolos están en cascada cuando la salida del primer cuadripolo se conecta a la entrada del segundo.



Las variables de salida del primer cuadripolo son las variables de entrada del segundo

$$\begin{vmatrix} U_1' \\ I_1' \end{vmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{vmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{vmatrix} = \mathbf{T}'' \cdot \begin{vmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} U_1' \\ I_1' \end{vmatrix} = \left(\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}''\right) \cdot \begin{vmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{vmatrix}$$

La matriz de Transmisión resultante de poner en cascada dos cuadripolos, es igual al producto de las matrices de Transmisión, en el orden en que están conectadas (ya que el producto de matrices no es conmutativo).