
Vector de Poynting

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

VECTOR DE POYNTING

Los campos electromagnéticos y el transporte de energía.

TEOREMA DE POYNTING.

Relación entre la velocidad de transferencia de energía y las amplitudes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} .

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

Potencias por unidad de volumen, como se indica a continuación:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Si se aplica ahora la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Reemplazando este valor en la ecuación previa se obtiene:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} \qquad \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv$$

1 ---> Potencia instantánea disipada dentro del volumen V, la ley de Joule.

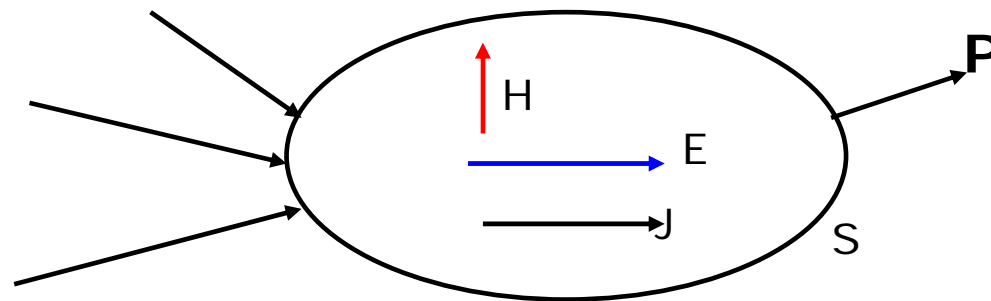
$$\iiint \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) dv$$

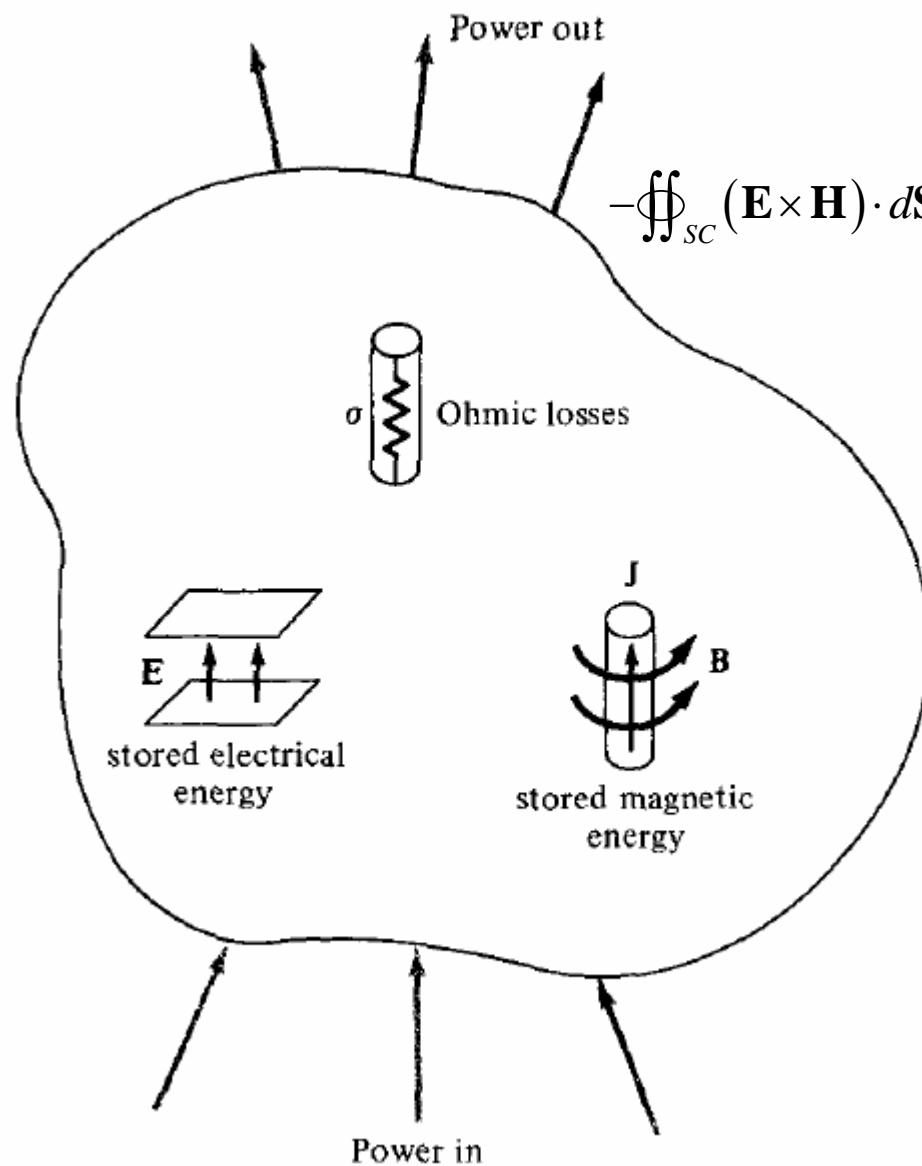
2 ---> Energía almacenada en los campos electromagnéticos

Con lo cual la ecuación de la potencia dentro del volumen V se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) dv - \oint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

vel c/ DISIPACIÓN = vel disminución EEM + vel c/ ENERGÍA entra





$$-\oint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) dv$$

-
- Con el signo positivo, representa el flujo de energía saliente a través de la superficie que limita el volumen.:

$$\oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

VECTOR DE POYNTING , DIMENSIONES W/M².

- Es una medida de la velocidad de flujo de energía por unidad de tiempo y POR UNIDAD DE ÁREA en el punto donde se calcula dicho vector
- La dirección de tal flujo de energía perpendicular a \mathbf{E} y \mathbf{H} , en el sentido al producto vectorial de los mismos.

$$\oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) dv$$

INTERPRETACIÓN DEL VECTOR DE POYNTING.

Si bien la integral del vector de Poynting sobre una superficie cerrada da el flujo de potencia sobre dicha superficie **NO resulta de ello necesario que el vector de Poynting represente correctamente el flujo de potencia en cada punto del espacio**

$$\mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{K}$$

Por consiguiente, el flujo neto de potencia a través de cualquier superficie cerrada sería:

$$\oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \iiint (\nabla \cdot \mathbf{T}) dv$$
$$\oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (16)$$

debido a que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{K}) = 0 \quad (17)$$

Se ve entonces que, incluso si se pudiera hallar una expresión correcta para el flujo de potencia a través de una superficie cerrada, sigue sin ser posible dilucidar donde se halla la energía.

Onda Plana Progresiva linealmente polarizada

$$E_y = E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x)$$

$$H_z = H_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \xi)$$


$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_y H_z = E_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) H_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \xi)$$

$$\sin(\omega t - \beta x - \xi) = \sin(\omega t - \beta x) \cos(\xi) - \cos(\omega t - \beta x) \sin(\xi)$$

$$\sin(\omega t - \beta x - \xi) \sin(\omega t - \beta x) = \sin^2(\omega t - \beta x) \cos(\xi) - \sin(\omega t - \beta x) \cos(\omega t - \beta x) \sin(\xi)$$

$$P_x(t) = E_0 H_0 e^{-2\alpha x} \sin^2(\omega t - \beta x) \cos(\xi) - E_0 H_0 e^{-2\alpha x} \frac{\sin(2\omega t - 2\beta x)}{2} \sin(\xi)$$

$$P_x(t) = \frac{E_0^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} \sin^2(\omega t - \beta x) \cos(\xi) - \frac{E_0^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} \frac{\sin(2\omega t - 2\beta x)}{2} \sin(\xi)$$

$$\overline{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})} = \overline{P_x} \rightarrow (\text{promedio temporal}) = \frac{E_0 H_0 e^{-2\alpha x}}{T} \int_t^{t+T} \left[\sin^2(\omega t - \beta x) \cos(\xi) - \frac{\sin(2\omega t - 2\beta x)}{2} \sin(\xi) \right] dt = \frac{E_0 H_0}{2} e^{-2\alpha x} \cos(\xi)$$


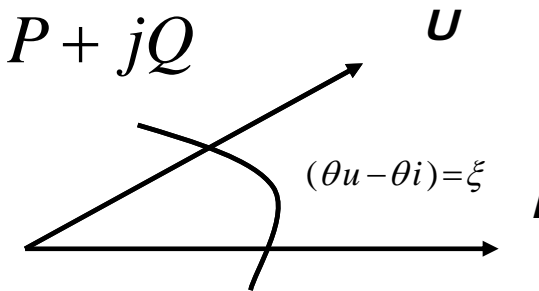
VECTOR DE POYNTING COMPLEJO

Cuando los Campos eléctrico y magnético varían armónicamente con el tiempo, se puede calcular el valor medio del vector de Poynting , a partir de definir una potencia *Aparente con los fasores de E y H*.

$$S = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U_o e^{j\theta_u} \cdot I_o e^{-j\theta_i} = U_o I_o e^{j(\theta_u - \theta_i)} = P + jQ$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \rightarrow \bar{P}_{medio} (activa) = \text{Real}(\mathbf{P})$$

$$\bar{P}_{reactiva} = \text{Imag}(\mathbf{P})$$



\mathbf{P} es un valor medio, no instantáneo.

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{a}}_E \dot{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{a}}_E E_0 e^{j\omega t}$$

$\bar{\mathbf{a}}_E$ = versor en la dirección de E

$$\mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{a}}_H \dot{\mathbf{H}}^* = \bar{\mathbf{a}}_H H_0 e^{-j(\omega t - \xi)}$$

$\bar{\mathbf{a}}_H$ = versor en la dirección de H

ξ = desfase temporal entre \mathbf{E} y \mathbf{H}^*

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{a}}_H \dot{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{a}}_H H_0 e^{j(\omega t - \xi)}$$

VECTOR DE POYNTING COMPLEJO

La cantidad \mathbf{H} y su complejo conjugado \mathbf{H}^* tienen la misma dirección espacial y la misma amplitud

Difieren en el signo de sus factores de fase.

Si se asume que las direcciones de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, el vector de Poynting complejo es normal al plano que contiene a estos campos, y su valor es:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} E_0 H_0 e^{j\xi}$$

El vector de Poynting medio, esta dado por la parte real del vector de Poynting complejo, o sea:

$$P_{promedio} = Real[\mathbf{P}] = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} E_0 H_0 \cos \xi \quad (27)$$

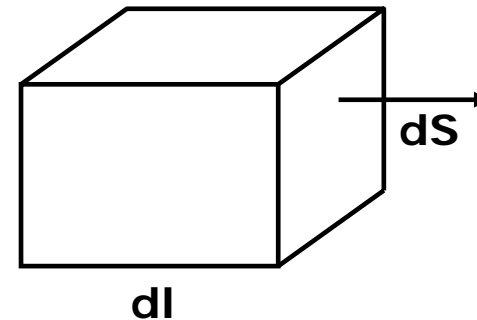
La potencia promedio que fluye a través de una superficie cerrada esta expresada por:

$$: \oiint_{SC} Real[\mathbf{P}] \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{SC} Real[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] d\mathbf{S}$$

Vector de POYNTING en una ONDA PROGRESIVA.

$$\oiint_{sc} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2} = \mathbf{v}$$



Si se divide al vector de Poynting por la densidad de energía, se obtiene una cantidad que dimensionalmente es una velocidad, y cuyo significado físico es el de ser la velocidad con que se propaga o transmite la energía. En un medio no dispersivo la velocidad de propagación de la energía es igual a la velocidad de fase. Por ejemplo en un medio no dispersivo y sin pérdidas (dieléctrico perfecto por ejemplo) se tiene que:

$$v_{energía} = \frac{\text{Vector de Poynting}}{\text{Densidad de energía}} = v_{fase} \quad \text{Medio NO dispersivo y sin pérdidas} \quad (29)$$

En un medio dispersivo pero sin pérdidas, la velocidad de propagación de la energía es igual a la velocidad de grupo. En un medio con pérdidas, la velocidad de grupo tiende a perder significado físico, no así la velocidad de propagación de la energía.

Mientras que la velocidad de fase o la de grupo pueden adoptar valores inferiores o superiores al de la velocidad de la luz, la velocidad de propagación de la energía es siempre inferior a este límite teórico.

Vector de POYNTING en una ONDA PROGRESIVA.

La expresión de la velocidad del flujo de energía (potencia) por unidad de área es fácilmente verificable en una onda plana progresiva que viaja a la velocidad:

$$v = \frac{1}{(\mu\epsilon)^{1/2}}$$

La densidad de energía por unidad de volumen de una OEM es:

$$W_{em} = \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2$$

Una onda que viaja en un medio sin pérdidas y sin límites

$$\frac{E}{H} = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2}$$

$$W_{em} = \mu H^2 = \epsilon E^2 = 2W_{el\acute{e}ctrica} = 2W_{magn\acute{e}tica}$$

Para una onda progresiva que se mueve a la velocidad **v, la velocidad del flujo de energía por unidad de área resulta ser:**

$$P = \frac{1}{2} (\mu H^2 + \epsilon E^2) v$$

Introduciendo la relación entre campo eléctrico y magnético, impedancia intrínseca del medio, resulta:

$$P = \frac{1}{2} \left[\epsilon \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} EH + \mu \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{-1/2} EH \right] v = \frac{EH}{v} v = EH = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Vector de POYNTING en una ONDA PROGRESIVA.

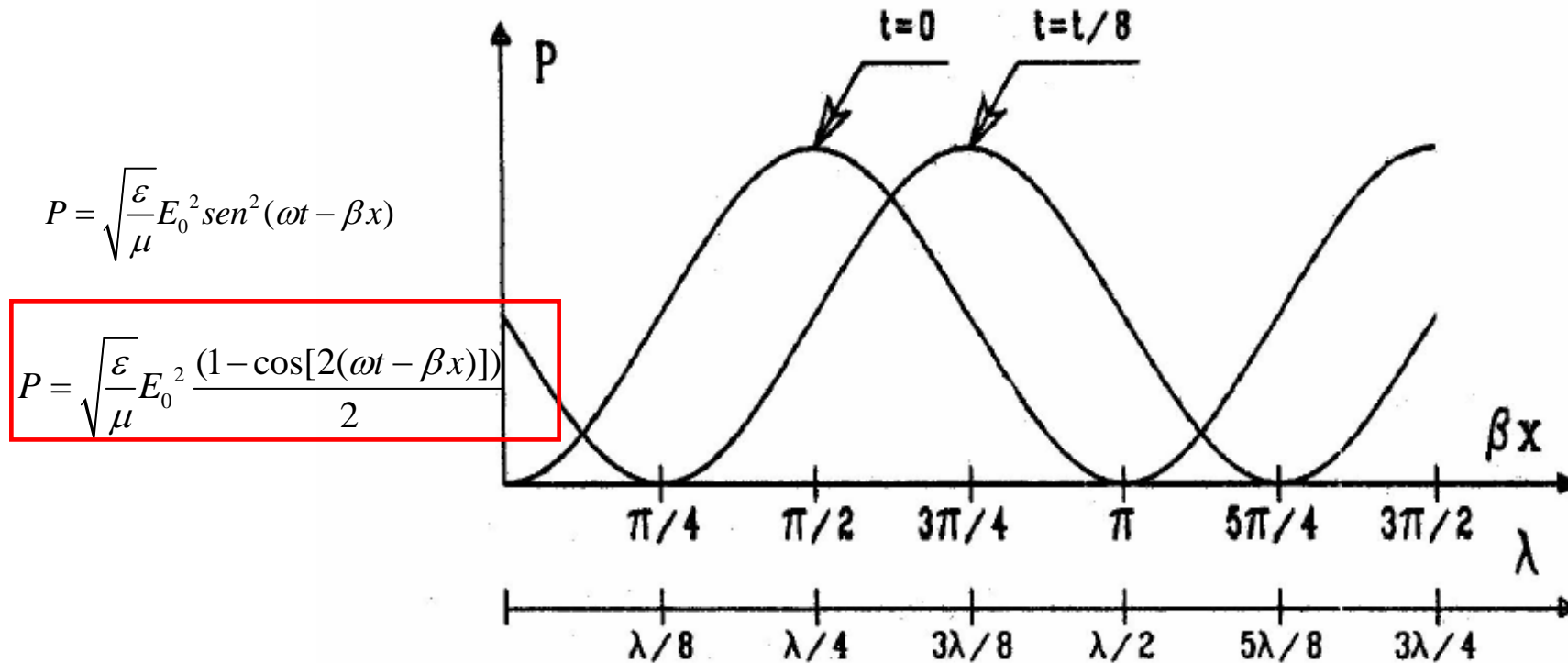
$$P = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} E_0^2 \text{sen}^2(\omega t - \beta x)$$

$$P_{\text{promedio}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} E_0^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} E_{\text{eficaz}}^2$$

$$P_{\text{pico}} = 2P_{\text{promedio}} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} E_0^2$$

Vector de POYNTING en una ONDA PROGRESIVA.

El flujo de energía por unidad de tiempo y unidad de área, o la densidad de potencia por unidad de área o vector de Poynting de una onda plana que viaja en la dirección de las x positivas y que varía senoidalmente en el tiempo, está graficado en la figura 6.1.



Vector de POYNTING

ONDA PROGRESIVA.

- El vector de Poynting es pulsante, con dos pulsos por cada longitud de onda.
- Los pulsos se mueven hacia la dirección de las x positivas

Vector de POYNTING en una ONDA PROGRESIVA.

$$W = \frac{P}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} E_0^2 \sen^2(\omega t - \beta x) \quad (39)$$

Dado que la velocidad de propagación es:

$$v = \left(\frac{1}{\varepsilon \mu} \right)^{1/2} \quad (40)$$

La densidad instantánea de energía resulta:

$$W = \varepsilon E_0^2 \sen^2(\omega t - \beta x) \quad (41)$$

Con razonamientos similares a los ya empleados con anterioridad, se pueden calcular las densidades de energía promedio, las que resultan ser:

$$W_{promedio} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \quad (42)$$

$$W_{pico} = 2W_{promedio} = \varepsilon E_0^2 = \mu H_0^2$$

VECTOR DE POYNTING EN UNA ONDA ESTACIONARIA.

$$E_y = E_1 \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) + E_2 \operatorname{sen}(\omega t + \beta x) \quad (44)$$

Las componentes del campo magnético, ubicadas espacialmente según el eje z, pueden ser calculadas con la siguiente relación, derivada de una de las ecuaciones de Maxwell, según ha sido explicitado con anterioridad. Esta relación es:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (45)$$

Si se realizan las operaciones matemáticas correspondientes, se obtiene el valor del campo magnético siguiente:

$$H_z = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1 \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) - \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2 \operatorname{sen}(\omega t + \beta x) \quad (46)$$

La magnitud del vector de Poynting, realizado el producto vectorial correspondiente, es la siguiente:

$$P_x = E_v H_z \quad P_x = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \beta x) - \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \beta x)$$

- el vector de Poynting neto de la onda compuesta resulta ser igual a la diferencia de los vectores de Poynting de la onda incidente menos la reflejada.

VECTOR DE POYNTING EN UNA ONDA ESTACIONARIA.

$$P_x = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1^2 \sin^2(\omega t - \beta x) - \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2^2 \sin^2(\omega t + \beta x)$$

onda reflejada tenga origen en una reflexión de la onda incidente, al arribar esta a una superficie conductora perfecta.

$$E_1 = -E_2 \quad (49)$$

En una onda estacionaria pura el vector de Poynting medio es nulo, lo que es equivalente a que la onda completa no transporta energía.

Reflexión en un conductor

$$E_y = E_1 \sin(\omega t - \beta x) + E_2 \sin(\omega t + \beta x)$$

$$E_y = -E_2 \sin(\omega t - \beta x) + E_2 \sin(\omega t + \beta x)$$

$$H_z = H_2 \sin(\omega t - \beta x) + H_2 \sin(\omega t + \beta x)$$

$$H_z = H_1 \sin(\omega t - \beta x) + H_1 \sin(\omega t + \beta x)$$

$$E_1 = -E_2$$

$$H_1 = H_2$$

VECTOR DE POYNTING EN UNA ONDA ESTACIONARIA.

Sin embargo resulta interesante examinar con más detalle este caso de onda estacionaria pura, particularmente desde el punto de vista de ubicar en donde está la energía que individualmente transportan cada onda progresiva, ondas incidente y reflejada respectivamente. Para tal fin se halla la expresión de la densidad de energía del campo eléctrico en una onda estacionaria pura, la cual resulta ser igual a:

$$E_y = 2E_2 \cos \omega t \sin \beta x$$

$$W_{el\acute{e}ctrica} = 2\varepsilon E_2^2 \cos^2 \omega t \sin^2 \beta x \quad (50)$$

Por otra parte, conocida la expresión del campo intensidad magnética para una onda estacionaria pura:

$$H_z = 2H_2 \sin \omega t \cos \beta x \quad (51)$$

Es posible calcular la densidad de energía del campo magnético, que resulta ser igual a:

$$W_{magn\acute{e}tica} = 2\mu H_2^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \beta x \quad (52)$$

Wmagnetica, Welectrica

- Cuando una de ellas alcanza su máximo la otra es nula y viceversa.
- los puntos espaciales en donde cada una de las densidades de energía es máximo individualmente, están separados una distancia igual a $\lambda/4$.

VECTOR DE POYNTING EN UNA ONDA ESTACIONARIA.

- Las densidades de energía eléctrica y magnética de una onda estacionaria pura están en cuadratura temporal y espacial.
- La energía oscila entre energía eléctrica y magnética,
- Energía reactiva o almacenada, pues esta energía no es efectivamente transmitida.

La expresión del vector de Poynting para esta onda estacionaria pura es la siguiente:

$$W_{ele} = 2\varepsilon E_2^2 \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\beta x)$$

$$W_{mag} = 2\mu H_2^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot \cos^2(\beta x)$$

$$P_x = 4E_2 H_2 \cos \omega t \sin \omega t \cos \beta x \sin \beta x$$

$$P_x = E_2 H_2 \sin(2\omega t) \cdot \sin(2\beta x)$$

$$P_x = -\frac{E_2^2}{Z_i} \sin(2\omega t) \cdot \sin(2\beta x)$$

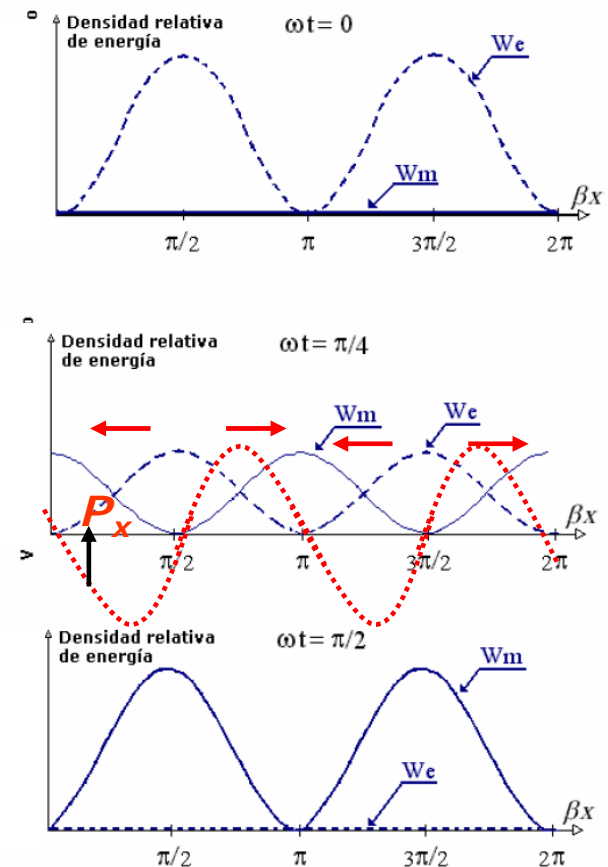
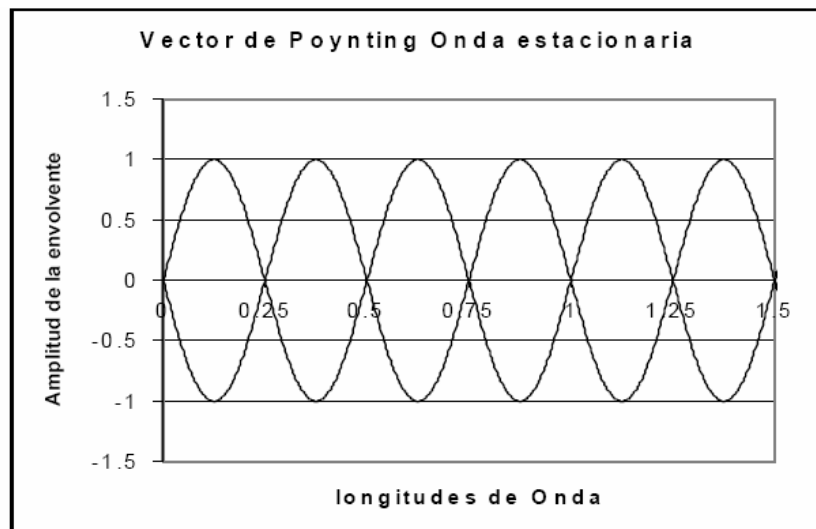


figura 6.2

VECTOR DE POYNTING EN UNA ONDA ESTACIONARIA.

$$P_x = 4E_2H_2 \cos \omega t \sin \omega t \cos \beta x \sin \beta x$$



Envolvente del vector de Poynting Onda estacionaria Pura

$$P_x = E_2H_2 \sin 2\omega t \sin 2\beta x$$

$$P_x = \frac{E_2^2}{Z_i} \sin 2\omega t \sin 2\beta x$$

$$P_{x\text{cresta}} = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2^2$$

Se observa que el vector de Poynting alcanza sus máximos para:

$$\omega t = (2n+1)\frac{\pi}{4} \quad \text{con } n=1,2,\dots$$

$$Max(\mathbf{E}) = (2n+1)\lambda/4$$

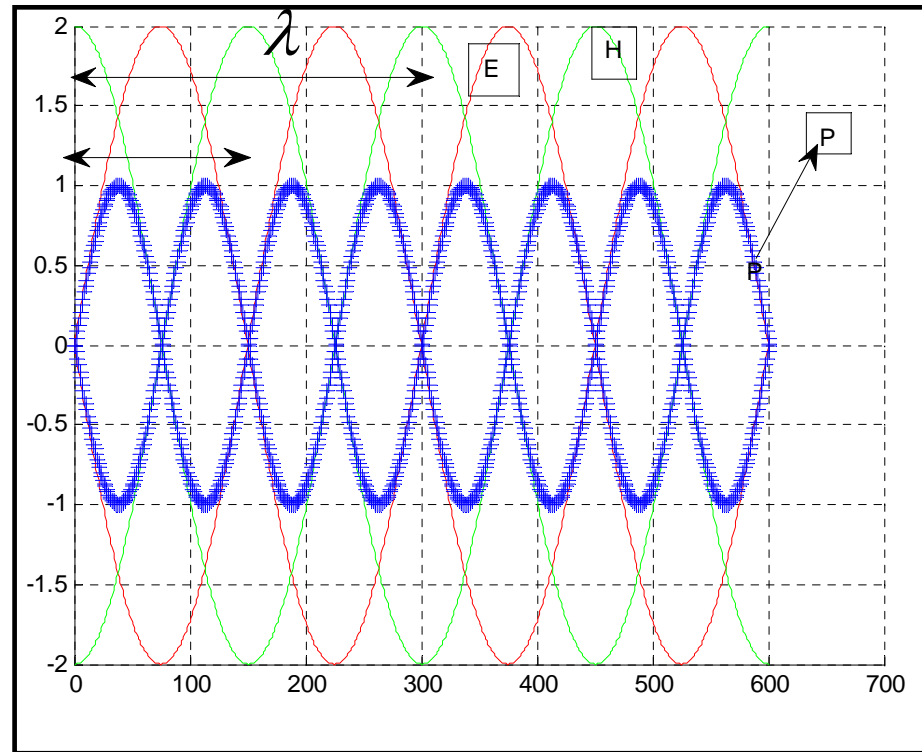
$$Max(\mathbf{H}) = (n)\lambda/2$$

$$Max(\mathbf{P}) = (2n+1)\lambda/8$$

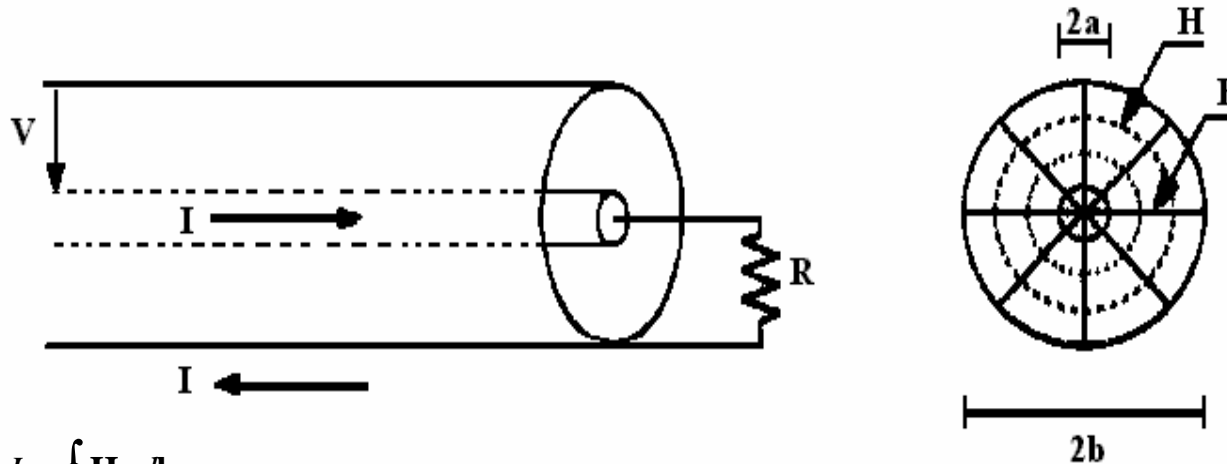
$$Min(\mathbf{E}) = (n)\lambda/2$$

$$Min(\mathbf{H}) = (2n+1)\lambda/4$$

$$Min(\mathbf{P}) = (n)\lambda/4$$



Vector de POYNTING en un cable coaxial.



$$\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I = 2\pi r H$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

$$E_r = \frac{V}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

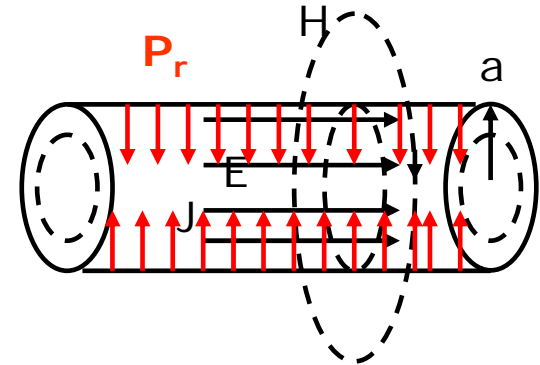
$$P_z = E_r \cdot H_\phi$$

$$W = \iint_{SC} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \int_a^b \frac{V}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r dr = \frac{VI}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{dr}{r} = VI$$

VECTOR DE POYNTING EN UN HILO CONDUCTOR.

- En un conductor, con conductividad finita, circula una corriente continua, se desarrollará un campo eléctrico dentro de dicho conductor. Este campo tendrá la misma dirección que la corriente, ya que:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \quad V_L = E_z L$$



El vector intensidad de campo magnético será concéntrico con el conductor, y en la superficie del mismo tendrá el siguiente valor:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi a} \quad \mathbf{P} = -E_z H_\phi \bar{r} + 0\bar{\phi} + 0\bar{z}$$

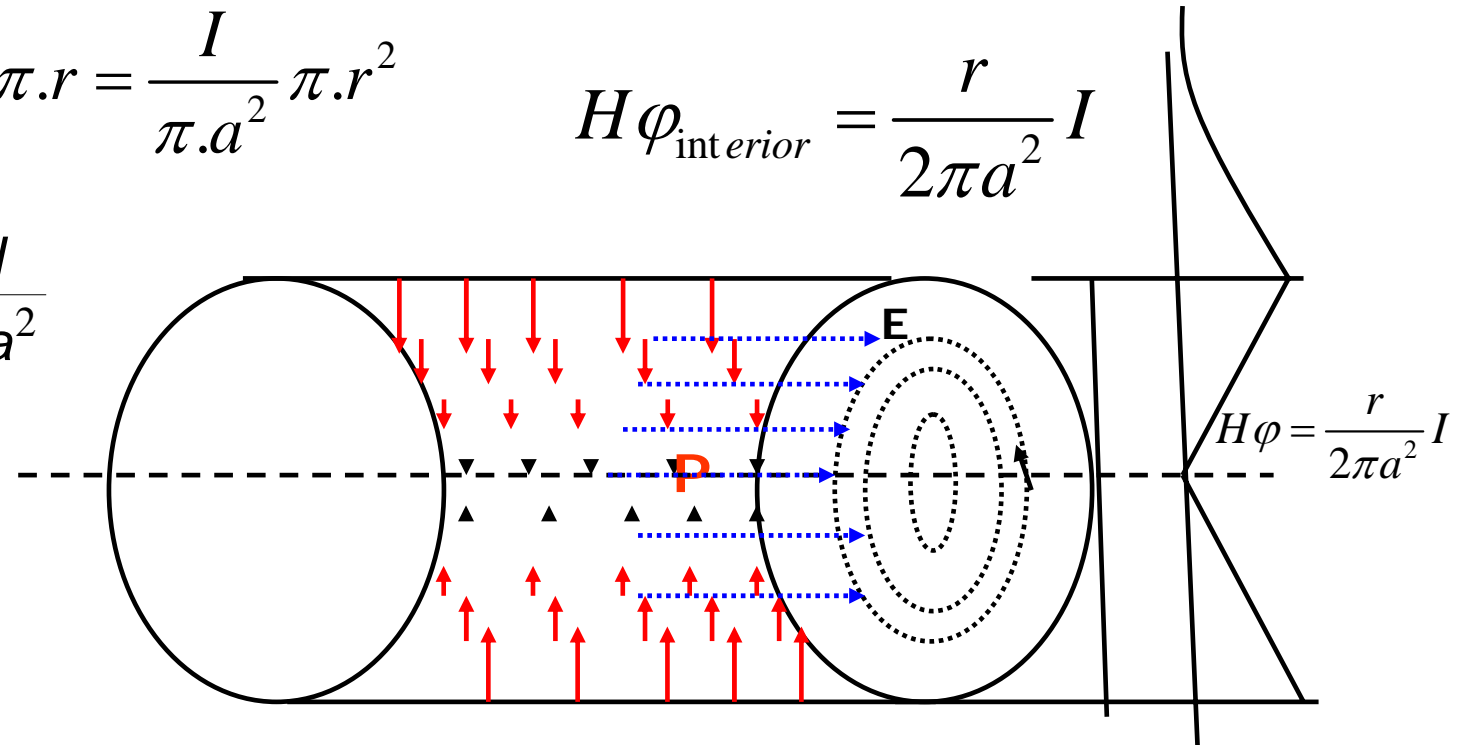
$$W = \iint_{sc} E_z H_\phi ds = \int_0^L E_z H_\phi 2\pi a dz = V_L \frac{I}{L} \int_0^L dz = VI$$

VECTOR DE POYNTING EN UN HILO CONDUCTOR.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \phi . 2\pi . r = \frac{I}{\pi . a^2} \pi . r^2$$

$$H \phi_{\text{interior}} = \frac{r}{2\pi a^2} I$$

$$I_{\text{interior}} = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2}$$



- La potencia que fluye hacia adentro del conductor, a través de una capa cilíndrica, de radio $r < a$, será:

$$W = \frac{V_L}{L} \cdot \frac{r}{2\pi a^2} I \cdot 2\pi r L = V_L I \frac{r^2}{a^2}$$

APLICACIÓN DEL VECTOR DE POYNTING A CIRCUITOS.

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Circuito}$$

Potencia

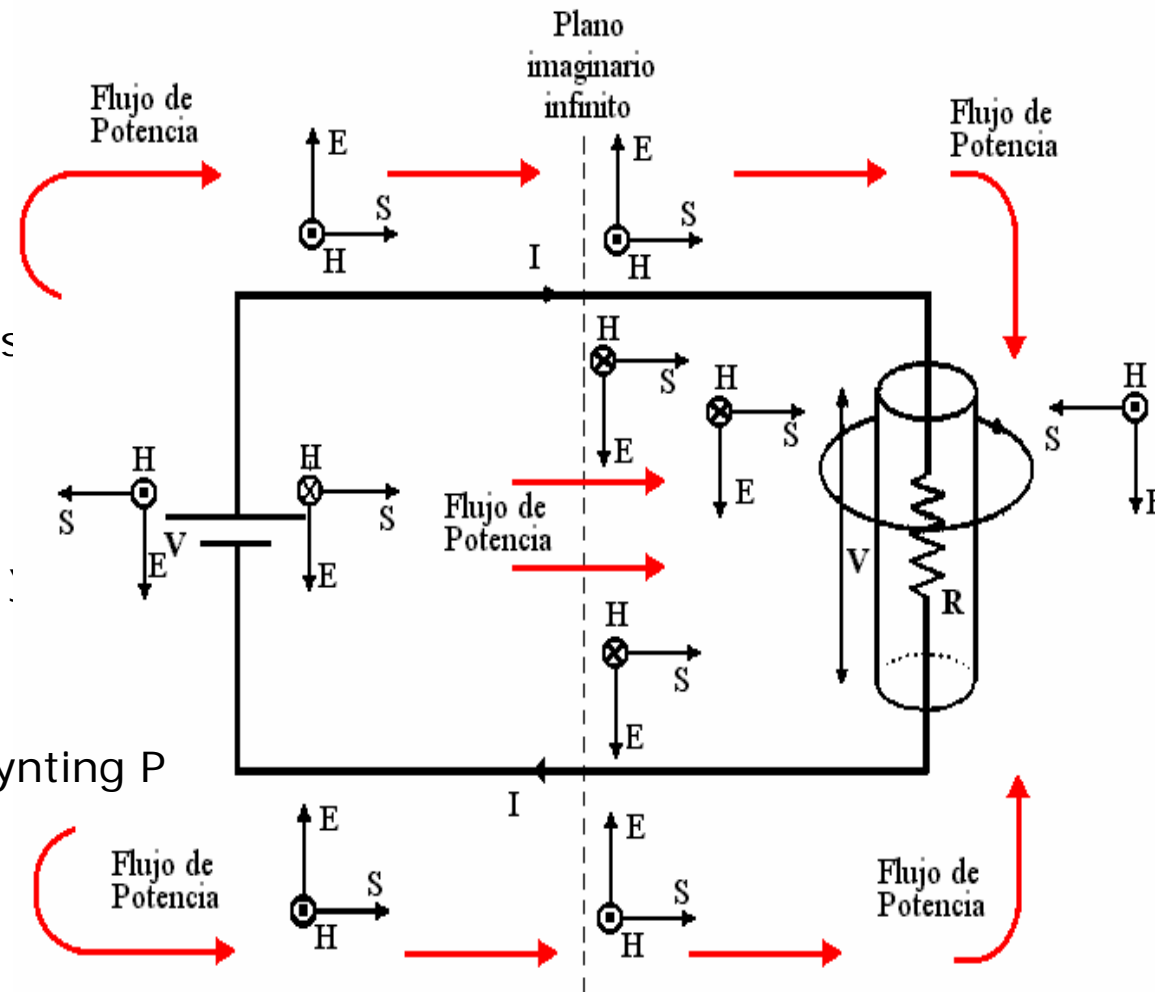
$$P = \oiint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \oiint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$$

Se considera ahora un circuito

- una batería conectada, a través
- de un par de conductores perfectos
- una carga de resistencia R .
- Se supone que toda la f.e.m. está concentrada en la batería, que toda la resistencia está concentrada en la carga.

En cualquier punto el vector de Poynting \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

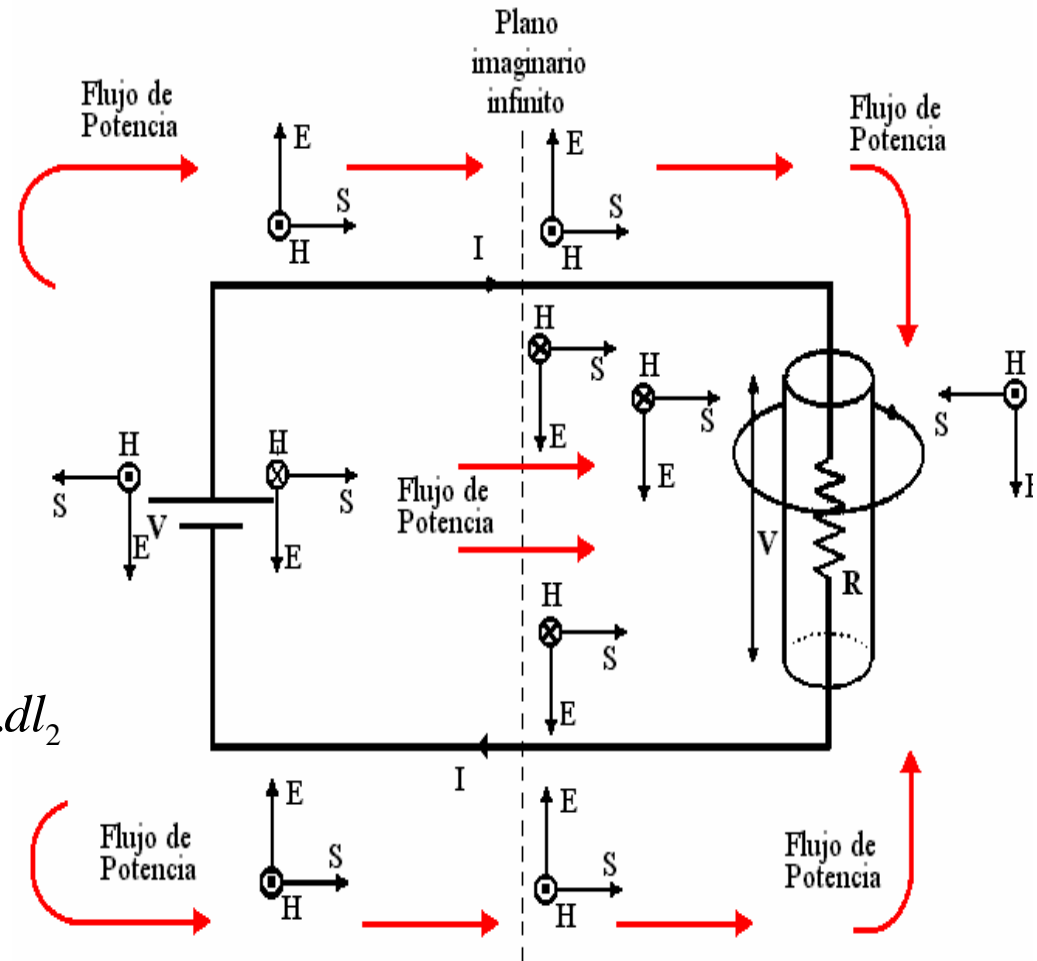


APLICACIÓN DEL VECTOR DE POYNTING A CIRCUITOS.

- Alrededor de la batería el vector de Poynting es hacia afuera (positivo).
- Alrededor de la resistencia (carga) el vector de Poynting es hacia adentro (negativo).
- En un plano imaginario ubicado a mitad del circuito, el vector de Poynting va de izquierda (batería) a derecha (carga).
- En la **superficie de integración que encierra a la carga, un cilindro conductor**

$$P = \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint (E_z \cdot H_\phi) \cdot dl_1 \cdot dl_2$$

$$P = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_1 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_2 = -VI$$



APLICACIÓN DEL VECTOR DE POYNTING A CIRCUITOS.

- Se obtiene la misma potencia en la carga predicha por la teoría de circuitos
- En la teoría de campo, esta potencia es negativa, ya que se dirige hacia el interior de la superficie de integración que encierra a la carga.
- El flujo de potencia se desarrolla en el espacio circundante al circuito, actuando los conductores del circuito como guías para dicha potencia.
- En la anterior figura del circuito se muestran algunas líneas de flujo del vector de Poynting. Resulta evidente que el **flujo de potencia se desarrolla en el espacio circundante al circuito, actuando los conductores del circuito como guías para dicha potencia.**
- Desde el punto de vista de **la teoría circuital, usualmente se dice que los conductores transportan la potencia o que la potencia fluye por los conductores**, pero esto no es mas que una simplificación del problema y no representa la situación real.

Plano infinito
inductor perfecto

