1 Inductancia interna de conductores

En esta sección se efectúan las deducciones de la inductancia interna de distintas geometrías de conductores, que conducen una corriente estacionaria con una densidad de corriente uniforme en toda la sección transversal, esto es, no se considera aquí la incidencia del efecto pelicular.

1.1. Definiciones

La *inductancia propia* de un inductor se define como:

$$L \equiv \frac{\Lambda}{I} \quad \left(\mathit{Flujo\ \ concatenado}\ \ \mathrm{A}^{-1}\right) \quad [\mathrm{H}] \tag{1}$$

donde la unidad de inductancia es el henrio (henry), Λ es el *flujo total concatenado* del inductor, e I es la corriente que circula por el inductor. Una unidad de flujo concatenado corresponde a *una* línea de flujo que concatena a *una* espira del inductor. Si todas las líneas de flujo concatenan a todas las espiras del inductor, el flujo total concatenado resulta:

$$\Lambda = N\,\Phi \quad [\mathrm{Wb}\ \mathit{vueltas}] \tag{2}$$

donde Φ es el flujo *total* producido por el inductor, y N es el número de veces que la corriente del inductor concatena al flujo total. Cuando no todo el flujo concatena todas las vueltas, el flujo total concatenado es menor al indicado por (2).

Es conveniente resaltar que en la expresión (2), y por consiguiente en la (1), N está interviniendo dos veces: una en la determinación del flujo total Φ, el cual es el debido a la corriente que circula por las N espiras; y otra vez para indicar qué cantidad de veces la corriente I que circula por el inductor es concatenada por el flujo total Φ (o viceversa, qué cantidad de veces el flujo total Φ concatena a la corriente I que circula por el inductor).

La inductancia definida por (1) se conoce como *autoinductancia* o *inductancia propia*, debido a que los concatenamientos son producidos por el propio inductor.

En el caso de conductores aislados, la inductancia debida al flujo interno al conductor, se denomina *inductancia interna*. Las líneas de flujo internas concatenan sólo una porción de la corriente total I.

En sistemas de conductores, como por ejemplo en cables coaxiales o en líneas de conductores paralelos, la *inductancia propia* del sistema de conductores comprende una parte debida al flujo interno los conductores (*inductancia interna*) y otra parte debida al flujo confinado en el medio comprendido entre los conductores (*inductancia externa*).

1.2. Conductor cilíndrico macizo

Sea un conductor cilíndrico macizo de radio a, recorrido por una corriente I de densidad uniforme $\mathbf{J}$. La aplicación directa de la ley circuital de Ampere a una trayectoria interna al conductor ($r < a$), y teniendo en cuenta que $\mathbf{B}$ es constante a lo largo de dicha trayectoria, resulta:

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = B\oint dl = \mu_0\, J\, \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\,\pi r^2 \tag{1}$$

que conduce a la expresión (empleando coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, I\, r}{2\pi a^2}\,\vec{\theta} \tag{2}$$

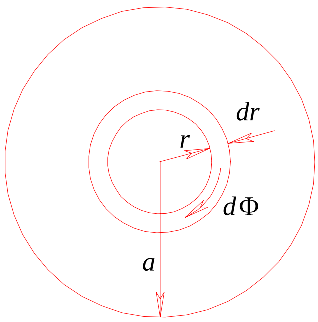

Figura 1. Concatenamientos de flujo parciales dentro de un conductor cilíndrico.

Consideremos ahora el flujo concatenado en el interior del conductor. Para ello refirámonos a la **Figura 1**. Obsérvese que en la delgada capa de espesor dr, el diferencial de flujo por unidad de longitud resulta:

$$d\Phi = B\,dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, r\, dr \tag{3}$$

De acuerdo a lo mencionado en relación a la expresión (1.1.2), el diferencial de flujo concatenado de este elemento de flujo es el diferencial de flujo multiplicado por la fracción de corriente contenida dentro de la trayectoria que encierra al flujo.

Para hacer una analogía con el caso del inductor, se debe determinar N, es decir la *cantidad de veces* que el flujo *interior* al conductor, concatena a la corriente I. Como esta concatenación es *parcial*, es decir no todo el flujo concatena a toda la corriente; o sea, N es la fracción de corriente contenida dentro de la trayectoria (de radio genérico $r < a$) que encierra al flujo ($N < 1$,):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J\pi r^2}{J\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2} \tag{4}$$

entonces el diferencial de flujo concatenado resulta, combinando (1.1.2), (3) y (4):

$$d\Lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4}\, r^3\, dr \tag{5}$$

y el flujo total concatenado interno al conductor, por unidad de longitud es:

$$\Lambda = \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4}\, r^3\, dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \tag{6}$$

De acuerdo a la definición de inductancia propia dada por (1.1.1), y teniendo en cuenta que (6) da el flujo *total* concatenado (por unidad de longitud) *interior* al conductor, la *inductancia interna* por unidad de longitud del conductor resulta:

$$L_i = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} \tag{7}$$

Es interesante comprobar este resultado en base a consideraciones de energía. La energía almacenada en el campo magnético debido a la inductancia interna del conductor (que pretendemos determinar) puede escribirse:

$$W = \frac{1}{2} L_i I^2 \tag{8}$$

Donde si L_i es la inductancia por unidad de longitud, W es la energía almacenada por unidad de longitud. Por otra parte, sabemos que dicha energía debe ser igual a:

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\, dv = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, dv \tag{9}$$

Haciendo:

$$dv = 2\pi r\, dr \tag{10}$$

la energía almacenada por unidad de longitud resulta:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\, r\right)^2 2\pi r\, dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3\, dr = \left.\frac{\mu_0 I^2 r^4}{16\,\pi a^4}\right]_0^a = \frac{\mu_0 I^2}{16\,\pi} \tag{11}$$

y despejando L_i de (8) y (11):

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi} \tag{12}$$

que coincide con la expresión (7).

1.3. Conductor cilíndrico hueco

Sea un conductor cilíndrico hueco, de radios a y b ($a < b$), recorrido por una corriente I de densidad uniforme **J**. Para determinar la inductancia interna de este conductor, es necesario considerar dos regiones (**Figura 3**) en las cuales la fracción de la corriente I que circula por el conductor, concatenada por las líneas de flujo en cada región responde a diferentes leyes:

Región 1 ($r < a$):

$$N = 0 \tag{1}$$

Región 2 ($a \leq r < b$):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J\,\pi\left(r^2 - a^2\right)}{J\,\pi\left(b^2 - a^2\right)} = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \tag{2}$$

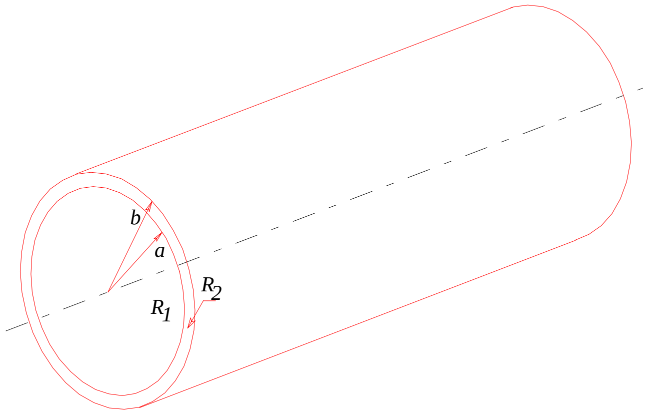

Figura 2. Regiones dentro de un conductor cilíndrico hueco, para el flujo concatenado interno.

Es decir, que sólo existe flujo concatenado en la *Región 2* ($a \leq r < b$). La aplicación directa de la ley circuital de Ampere a una trayectoria interna al conductor ($a \leq r < b$), y teniendo en cuenta que **B** es constante a lo largo de dicha trayectoria, resulta:

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = B \oint dl = \mu_0\, J\; \pi\left(r^2 - a^2\right) = \mu_0 \frac{I}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}\; \pi\left(r^2 - a^2\right) \tag{3}$$

que conduce a la expresión (empleando coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\; \frac{\left(r^2 - b^2\right)}{\left(c^2 - b^2\right)} \vec{\theta} \tag{4}$$

Consideremos ahora el diferencial de flujo en el interior del conductor, por unidad de longitud, el cual resulta:

$$d\Phi = B\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\;\pi\left(b^2 - a^2\right)}\; \frac{1}{r}\left(r^2 - a^2\right) dr \tag{5}$$

De acuerdo a lo mencionado en relación a la expresión (1.1.2), el diferencial de flujo concatenado de este elemento de flujo es el diferencial de flujo multiplicado por la fracción de corriente contenida dentro de la trayectoria que encierra al flujo. Es decir, combinando (1.1.2), (2) y (5):

$$d\Lambda = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\; \frac{1}{r} \left[\frac{\left(r^2 - a^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right)}\right]^2 dr = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(b^2 - a^2\right)^2}\left(r^3 - 2\,a^2\, r + \frac{a^4}{r}\right) dr \tag{6}$$

y el flujo total concatenado interno al conductor, por unidad de longitud es:

$$\Lambda = \int_a^b \frac{\mu_0\, I}{2\;\pi\left(b^2 - a^2\right)^2}\left(r^3 - 2\,a^2\, r + \frac{a^4}{r}\right) dr = \frac{\mu_0\, I}{2\;\pi\left(b^2 - a^2\right)^2}\left(a^4\, ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) - a^2\left(b^2 - a^2\right)\right) \tag{7}$$

o sea:

$$\Lambda = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(b^2 - a^2\right)^2}\left(a^4\, ln\left(\frac{b}{a}\right) - a^2\left(b^2 - a^2\right) + \frac{1}{4}\left(c^4 - a^4\right)\right) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(b^2 - a^2\right)}\left(\frac{a^4}{b^2 - a^2}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(b^2 - 3\,a^2\right)\right) \tag{8}$$

De acuerdo a la definición de inductancia propia dada por (1.1.1), y teniendo en cuenta que (8) da el flujo *total* concatenado (por unidad de longitud) *interior* al conductor, la *inductancia interna* por unidad de longitud del conductor resulta:

$$L_i = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\left(b^2 - a^2\right)}\left(\frac{a^4}{b^2 - a^2}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(b^2 - 3\,a^2\right)\right) \tag{9}$$

Obtengamos ahora la inductancia interna del conductor cilíndrico hueco, en base a consideraciones de energía. La energía almacenada en el campo magnético debido a la inductancia interna del conductor (que pretendemos determinar) puede escribirse:

$$W = \frac{1}{2} L_i\, I^2 \tag{10}$$

Donde si L_i es la inductancia por unidad de longitud, W es la energía almacenada por unidad de longitud. Por otra parte, sabemos que dicha energía debe ser igual a:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv = \frac{1}{2\,\mu_0} \int B^2\, dv \tag{11}$$

siendo:

$$v = \pi\left(r^2 - a^2\right) \Rightarrow dv = 2\,\pi\, r\, dr \tag{12}$$

Entonces con (11) y (12), la energía almacenada por unidad de longitud resulta:

$$W = \frac{1}{2\,\mu_0} \int_a^b \left[\frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r} \left(\frac{r^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \right]^2 2\,\pi\, r\, dr = \frac{\mu_0\, I^2}{4\,\pi\left(b^2 - a^2\right)^2} \int_a^b \left(\frac{a^4}{r} - 2\,a^2\, r + r^3 \right) dr$$

es decir:

$$W = \frac{\mu_0\, I^2}{4\,\pi\left(b^2 - a^2\right)^2} \left(a^4\, ln\left(\frac{b}{a}\right) - a^2\left(b^2 - a^2\right) + \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) \right) = \frac{\mu_0\, I^2}{4\,\pi\left(b^2 - a^2\right)^2} \left(\frac{a^4}{b^2 - a^2}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(b^2 - 3\,a^2\right) \right) \tag{13}$$

y despejando L_i de (10) y (13):

$$L_i = \frac{2\,W}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\left(b^2 - a^2\right)} \left(\frac{a^4}{b^2 - a^2}\, ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(b^2 - 3\,a^2\right) \right) \tag{14}$$

que coincide con la expresión (9).

1.4. Conductor coaxial

Sea un conductor coaxial cilíndrico formado por dos cilíndros concéntricos, uno interior macizo de radio a recorrido por una corriente I de densidad uniforme $\mathbf{J_1}$, y otro exterior, hueco, de radios b y c ($a < b < c$), recorrido por una corriente I (opuesta a la del conductor interno) de densidad uniforme $\mathbf{J_2}$.

Para determinar la *inductancia propia* de este conductor, es necesario considerar tres regiones (**Figura 3**) en las cuales la fracción de la corriente I que circula por el conductor, concatenada por las líneas de flujo en esa región, debidas a dicha corriente, responde a diferentes leyes:

Región 1 ($r < a$):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J_1\,\pi\, r^2}{J_1\,\pi\, a^2} = \frac{r^2}{a^2} \tag{1}$$

Región 2 ($a \le r < b$):

$$N = 1 \tag{2}$$

Región 3 ($b \le r < c$):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J_1\,\pi a^2 - J_2\,\pi\left(r^2 - b^2\right)}{I} = \frac{J_1\,\pi a^2}{J_1\,\pi a^2} - \frac{J_2\,\pi\left(r^2 - b^2\right)}{J_2\,\pi\left(c^2 - b^2\right)} = 1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \tag{3}$$

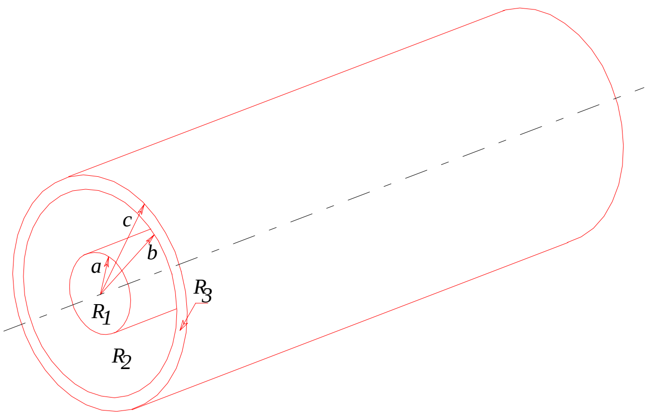

Figura 3. Regiones dentro de un conductor coaxial, para el flujo concatenado interno.

En correspondencia con estos valores, surgirá el flujo concatenado en cada una de las tres regiones definidas, obteniéndose tres componentes de la inductancia propia del conductor coaxial:

$$L_i = L_1 + L_2 + L_3 \qquad (4)$$

<u>Región 1</u>

La componente L_1 para la *Región 1*, corresponde a la inductancia interna de un conductor cilíndrico, ya obtenida en el apartado 1.2.:

$$L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \qquad (5)$$

<u>Región 2</u>

En la *Región 2* ($a \leq r < b$) resulta:

$$\oint \mathbf{B}_2\, d\mathbf{l} = B_2 \oint dl = \mu_0\, I \qquad (6)$$

que conduce a la expresión (empleando coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\,\vec{\theta} \qquad (a \leq r < b) \qquad (7)$$

En la *Región 2*, en una delgada capa de espesor *dr*, el diferencial de flujo por unidad de longitud resulta:

$$d\Phi_2 = B_2\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, dr \qquad (8)$$

y el diferencial de flujo concatenado resulta combinando (1.1.2), (2) y (8):

$$d\Lambda_2 = N\, d\Phi_2 = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\, dr \qquad (9)$$

y el flujo concatenado en toda la *Región 2* resulta:

$$\Lambda_2 = \int_a^b \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, ln\frac{b}{a} \qquad (10)$$

Entonces:

$$L_2 = \frac{\Lambda_2}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\, ln\frac{b}{a} \qquad (11)$$

<u>Región 3</u>

Si el conductor externo fuese muy delgado (es decir, $c \to b$), entonces de la expresión (3) resultaría que $N \to 0$, ya que el numerador siempre es menor que el denominador. Por esta razón, debido a que normalmente el conductor externo es delgado frente a la distancia entre conductores, suele despreciarse la contribución del término L_3 a la inductancia propia del conductor coaxial.

Sin embargo, a continuación no efectuaremos tal suposición y se calculará esa contribución, primero a partir de la ley de Ampere, y luego en base a consideraciones de energía.

Aplicando la ley de Ampere en la *Región 3* ($b \leq r < c$) resulta:

$$\oint \mathbf{B}_3\, d\mathbf{l} = B_3 \oint dl = \mu_0\, I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) = \mu_0\, I \left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} - \frac{r^2}{c^2 - b^2}\right) \qquad (12)$$

que conduce a la expresión (empleando coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} - \frac{r^2}{c^2 - b^2}\right)\vec{\theta} \qquad (b \leq r < c) \qquad (13)$$

En la *Región 3*, en una delgada capa de espesor *dr*, el diferencial de flujo por unidad de longitud resulta:

$$d\Phi_3 = B_3\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} - \frac{r^2}{c^2 - b^2}\right) dr \qquad (14)$$

y el diferencial de flujo concatenado resulta combinando (1.1.2), (3) y (14):

$$d\Lambda_3 = N\, d\Phi_3 = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} - \frac{r^2}{c^2 - b^2}\right)^2 dr = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\left(c^2 - b^2\right)^2}\left(\frac{c^4}{r} - 2c^2 r + r^3\right) dr \qquad (15)$$

y el flujo concatenado en toda la *Región 3* resulta:

$$\Lambda_3 = \int_b^c \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)^2}\left(\frac{c^4}{r}-2c^2r+r^3\right)dr = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)^2}\left[\left(c^4\, ln\, r - c^2r^2+\frac{r^4}{4}\right)\right]_b^c$$

o sea:

$$\Lambda_3 = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)^2}\left(c^4\, ln\left(\frac{c}{b}\right)-c^2\left(c^2-b^2\right)+\frac{1}{4}\left(c^4-b^4\right)\right) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2-3\,c^2\right)\right) \qquad (16)$$

Entonces:

$$L_3 = \frac{\Lambda_3}{I} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2-3\,c^2\right)\right) \qquad (17)$$

Obtengamos la inductancia interna del conductor exterior del coaxil en base a consideraciones de energía. La energía almacenada en el campo magnético debido a la inductancia interna del conductor (que pretendemos determinar) puede escribirse:

$$W = \frac{1}{2} L_3\, I^2 \qquad (18)$$

Donde si L_3 es la inductancia por unidad de longitud, W es la energía almacenada por unidad de longitud. Por otra parte, sabemos que dicha energía debe ser igual a:

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\, dv = \frac{1}{2\,\mu_0}\int B^2\, dv \qquad (19)$$

siendo:

$$v = \pi\left(r^2-b^2\right) \Rightarrow dv = 2\,\pi\, r\, dr \qquad (20)$$

Entonces con (19) y (20), la energía almacenada por unidad de longitud resulta:

$$W = \frac{1}{2\,\mu_0}\int_b^c\left[\frac{\mu_0\, I}{2\ \pi\, r}\left(\frac{c^2}{c^2-b^2}-\frac{r^2}{c^2-b^2}\right)\right]^2 2\,\pi\, r\, dr = \frac{\mu_0\, I^2}{4\ \pi\left(c^2-b^2\right)^2}\int_b^c\left(\frac{c^4}{r}-2\,c^2\, r+r^3\right)dr$$

es decir:

$$W = \frac{\mu_0\, I^2}{4\ \pi\left(c^2-b^2\right)^2}\left(c^4\, ln\left(\frac{c}{b}\right)-c^2\left(c^2-b^2\right)+\frac{1}{4}\left(c^4-b^4\right)\right) = \frac{\mu_0\, I^2}{4\ \pi\left(c^2-b^2\right)^2}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2-3\,c^2\right)\right) \qquad (21)$$

y despejando L_3 de (18) y (21):

$$L_3 = \frac{2\,W}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2-3\,c^2\right)\right) \qquad (22)$$

que coincide con la expresión (17).

Inductancia propia resultante

Con (5), (11) y (17) en la expresión (4), se obtiene la expresión final para la *inductancia propia por unidad de longitud* de un conductor coaxial:

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\,\pi}+\frac{\mu_0}{2\,\pi}\ ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0}{2\,\pi\left(c^2-b^2\right)}\left(\frac{c^4}{c^2-b^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2-3\,c^2\right)\right)$$

$$L_i = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\left(\frac{1}{4}+ln\frac{b}{a}+\frac{c^4}{\left(c^2-b^2\right)^2}\, ln\left(\frac{c}{b}\right)-\frac{1}{4}\frac{\left(3\,c^2-b^2\right)}{\left(c^2-b^2\right)}\right) \qquad (23)$$

1.5. Conductores paralelos

Consideremos ahora un par de conductores paralelos, cada uno de sección circular de radio a, separados entre sí por una distancia D, constituyendo uno el circuito de retorno para la corriente que circula por el otro (**Figura 4**).

Para determinar la inductancia propia del par de conductores (línea bifilar), es necesario considerar tres regiones en las cuales la cantidad de corriente I que circula por uno de los conductores y es concatenada por las líneas de flujo debidas a la misma corriente, responde a diferentes leyes (ver **Figura 4**):

Región 1 ($r < a$):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J\,\pi\, r^2}{J\,\pi\, a^2} = \frac{r^2}{a^2} \tag{1}$$

Región 2 ($a \le r < D - a$):

$$N = 1 \tag{2}$$

Región 3 ($D - a \le r < D + a$):

$$N = \frac{I_r}{I} = \frac{J\,\pi\, a^2 - J\ S_i(r)}{J\,\pi\, a^2} = 1 - \frac{S_i(r)}{\pi a^2} \tag{3}$$

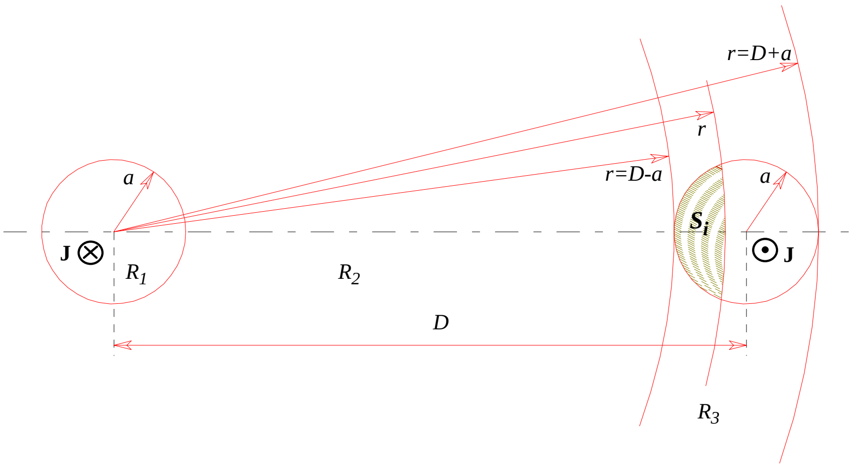

Figura 4. Sección transversal de dos conductores cilíndricos paralelos.

En correspondencia con estos valores, surgirá el flujo concatenado en cada una de las tres regiones definidas, obteniéndose tres componentes de la *inductancia propia* de la línea de conductores paralelos: L_1, L_2 y L_3.

Pero, dado que el concatenamiento del flujo debido a la corriente que circula por uno de los conductores, resulta aditivo con respecto al concatenamiento del flujo debido a la corriente que circula por el otro conductor, la *inductancia propia* de la línea de conductores paralelos resulta:

$$L_i = 2\left(L_1 + L_2 + L_3\right) \tag{4}$$

<u>Región 1</u>

La componente L_1 para la *Región 1*, corresponde a la inductancia interna de un conductor cilíndrico, ya obtenida en el apartado 1.2.:

$$L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \tag{5}$$

<u>Región 2</u>

En la *Región 2* ($a \le r < D - a$) resulta:

$$\oint \mathbf{B}_2\, d\mathbf{l} = B_2 \oint dl = \mu_0\, I \tag{6}$$

que conduce a la expresión (empleando coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\,\vec{\theta} \qquad\qquad (a \le r < b) \tag{7}$$

En la *Región 2*, en una delgada capa de espesor *dr*, el diferencial de flujo por unidad de longitud resulta:

$$d\Phi_2 = B_2\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, dr \tag{8}$$

y el diferencial de flujo concatenado resulta combinando (1.1.2), (2) y (8):

$$d\Lambda_2 = N\, d\Phi_2 = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, dr \tag{9}$$

y el flujo concatenado en toda la *Región 2* resulta:

$$\Lambda_2 = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, dr = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi}\ ln \frac{D-a}{a} \tag{10}$$

Entonces:

$$L_2 = \frac{\Lambda_2}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{D-a}{a} \tag{11}$$

<u>Región 3</u>

Si bien tal como surge de la **Figura 4** existen concatenamientos parciales de flujo en la región ($D\text{-}a \leq r < D+a$), todas estas líneas encierran parcialmente a la corriente de retorno, y para distancias mayores a $D\text{-}a$ ya no existe corriente neta concatenada. Sin embargo, se supondrá que esta tercera componente de flujo concatenado (y, por consiguiente la inductancia L_3) es despreciable, frente a la componente presente en la *Región 2*.

Por esta razón, debido a que normalmente ambos conductores son muy delgados frente a la distancia que los separa, suele despreciarse la contribución del término L_3 a la *inductancia propia* de la línea de conductores paralelos.

$$L_3 = \frac{\Lambda_3}{I} \cong 0 \tag{12}$$

<u>Inductancia propia resultante</u>

Con (5), (11) y (12) en la expresión (4), se obtiene la expresión final para la *inductancia propia por unidad de longitud* de una línea de conductores paralelos:

$$L_i = 2\left(\frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{D-a}{a}\right) = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D-a}{a}\right) \tag{13}$$

y si se considera $D \gg a$, que es un caso frecuente en la práctica, resulta:

$$L_i = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D}{a}\right) \tag{14}$$