
Ondas Planas

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN EL ESPACIO LIBRE.

El espacio libre es un medio

- HOMOGÉNEO, permitividad, permeabilidad y la conductividad son constantes.
- ISOTRÓPICO, la permeabilidad como la permitividad son escalares y no tensores.
- La CONDUCTIVIDAD es nula .
- PERMITIVIDAD Y LA PERMEABILIDAD son iguales a aquellas correspondientes al VACIO.
- Como se puede inferir, la definición de espacio libre coincide con aquella correspondiente a un **dieléctrico perfecto**

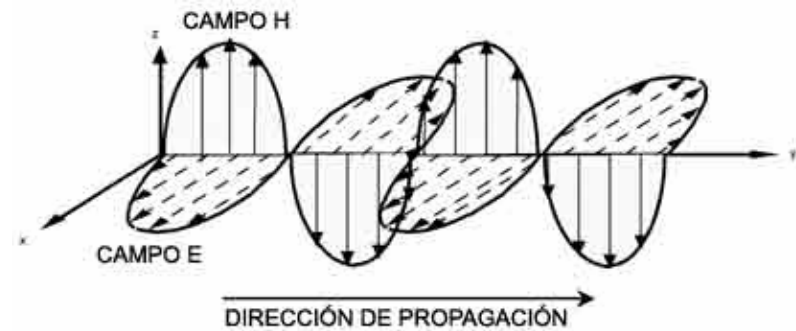
Las ecuaciones de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right.$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

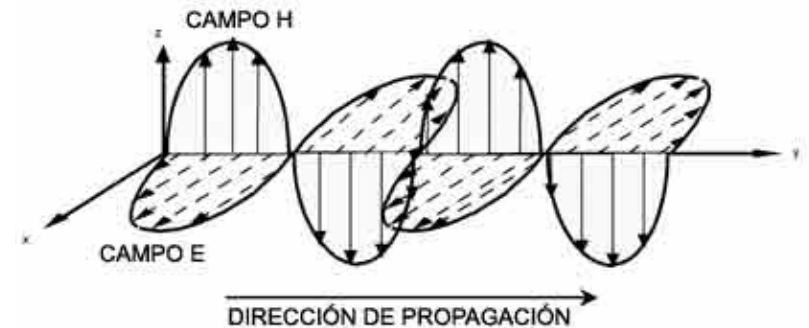


Las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre resultan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\begin{array}{c} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$



- espacio libre en este caso, exento de cargas y corrientes de conducción
- Simetría en las expresiones de los rotacionales de los campos E y H
 - Origen a la propagación de ondas electromagnéticas.
 - De esta forma ambos campos se van generando mutuamente mientras se propagan, transportando energía electromagnética en dicha propagación


Las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre resultan

- Si se aplica el operador rotor a la ecuación que expresa el rotacional del campo eléctrico \mathbf{E} ,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Y se tiene en cuenta además que **la divergencia del campo eléctrico es nula, ya que el medio, espacio libre, esta exento de carga**, se obtiene el siguiente resultado:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \qquad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$


$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\cancel{\nabla \cdot \mathbf{H}}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

\searrow
0

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

- **CASO a considerar:**
- **LOS CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO DEPENDAN SOLAMENTE DE UNA DIRECCIÓN ESPACIAL**
- **Ambos campos no posean componentes según esa dirección (dirección de propagación de la onda electromagnética)??**
- **ESTE COMPORTAMIENTO CORRESPONDE, POR DEFINICIÓN, A LA PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA.**

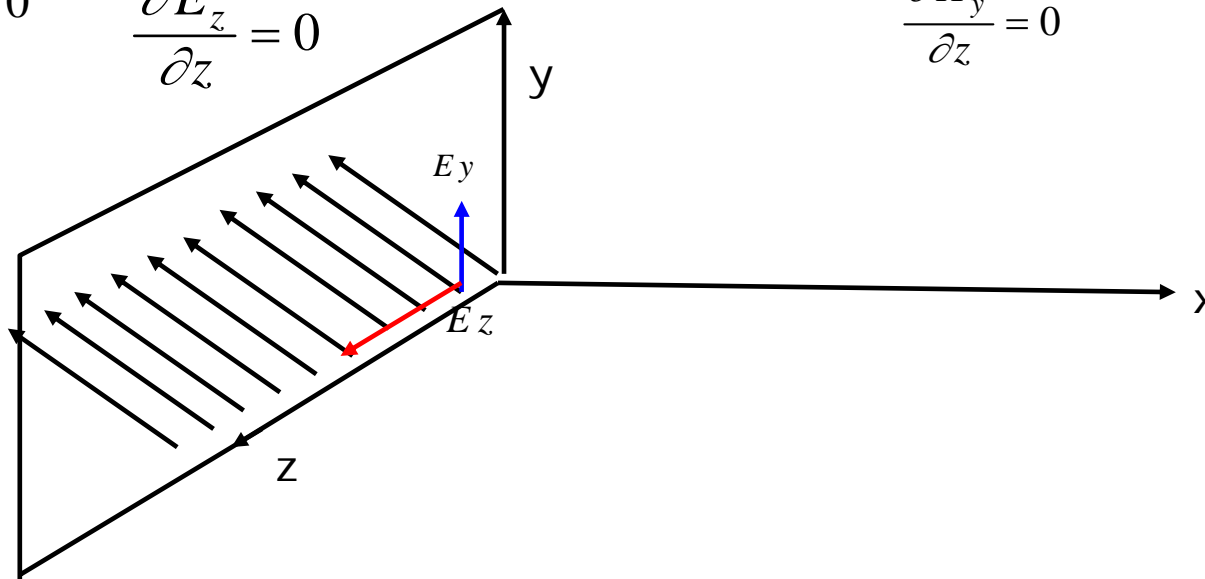
- Propagación en la dirección de x

$$E_x = 0 \quad E_y \neq 0 \quad E_z \neq 0 \quad H_x = 0 \quad H_z \neq 0 \quad H_y \neq 0$$

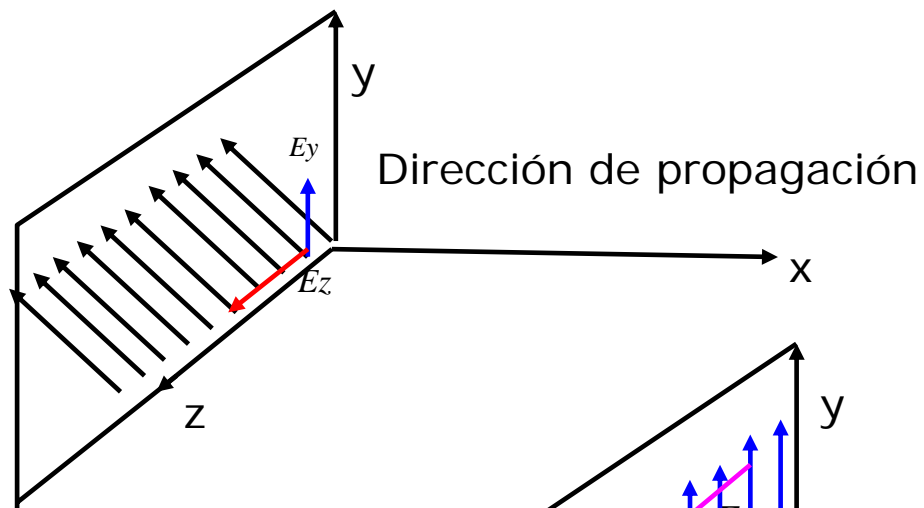
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} \neq 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$



- En una onda plana uniforme E y H se ubican en un plano y tienen los mismos valores en todas las partes de ese plano
- Una onda de este tipo E y H tienen dirección transversal a la propagación, TEM (Transversal electromagnética)

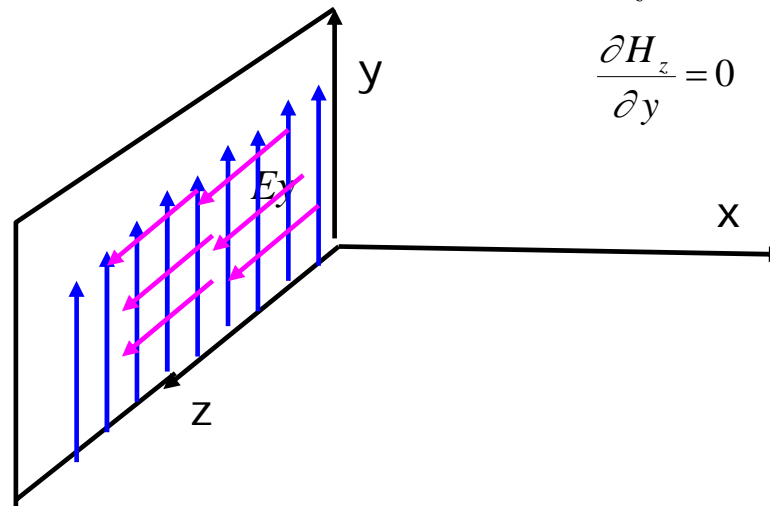


$$E_y \neq 0 \quad E_x = 0 \quad E_z = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$H_z \neq 0 \quad H_x = 0 \quad H_y = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} \neq 0$$



ONDA PLANA.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

- Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de segundo orden, cuya solución general es, para una de ellas, la siguiente:

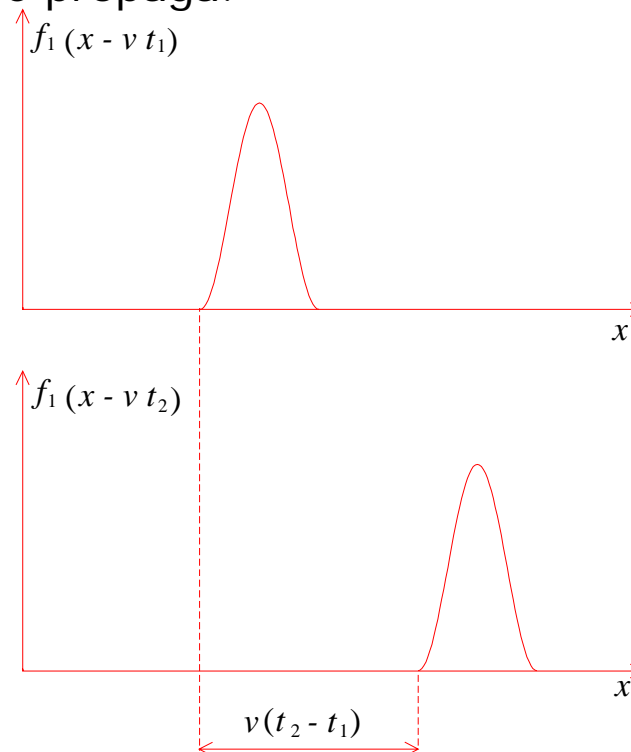
$$\mathbf{E} = \mathbf{f}_1(x - vt) + \mathbf{f}_2(x + vt)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

- Siendo f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera (no necesariamente idénticas), cuyas variables independientes son $(x - vt)$ y $(x + vt)$ respectivamente, siendo x la dirección de propagación de la onda, v la velocidad de propagación, y t el tiempo.

ONDA PLANA.

- **Una onda** puede definirse como un fenómeno físico que, ocurriendo en un dado lugar y en un determinado tiempo, se reproduce en otros lugares a otros tiempos,
- La diferencia de tiempo proporcionales a las diferencias de distancias.
- Esta definición **no implica de por sí que dichas ondas sean fenómenos repetitivos, aunque no prohíbe tal condición**. Por otra parte, la variación de la onda queda confinada a una sola dimensión, aquella en la cual se propaga.



- La solución general de la ecuación de onda, esta compuesta por dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos.

onda incidente $\mathbf{E} = \mathbf{f}_1(x - vt)$

onda reflejada $\mathbf{E} = \mathbf{f}_2(x + vt)$

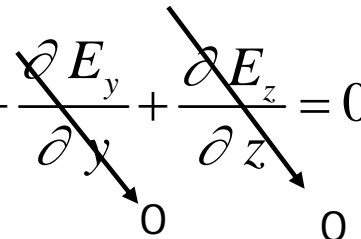
Sin discontinuidad no existe la onda reflejada

- **Por que la componente en la dirección de propagación debe anularse ???**
- Si ahora se retoma la discusión a partir de la ecuación de onda aplicada a una onda plana que se propaga en dirección del eje x , la cual resulta ser para el campo eléctrico, según ya ha sido descripto:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Por otra parte, si se descompone la expresión de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} en cada componente espacial, con la condición de que esta divergencia es nula por no existir densidad de carga, se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$



ONDA PLANA.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = C_1$$



$$E_x = C_1.t + C_2$$

$$E_x = 0$$

- E_x debe ser NULA, CONSTANTE O CRECIENTE UNIFORMEMENTE CON EL TIEMPO, dado que la derivada segunda temporal de la misma debe igualarse, a menos de una constante, con la derivada segunda según x de la misma componente.
- Pero un campo que satisfaga las dos últimas condiciones no sería parte de una onda que se propaga, por lo tanto no existe otra posibilidad que la componente de campo según la dirección de propagación de la onda plana sea nula.
- Un razonamiento similar puede hacerse para el campo magnético \mathbf{H}
- Con lo cual se arriba a la **conclusión de que las ondas electromagnéticas planas son transversales y solo tienen componentes en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación**

- Si se expresan ahora los rotores de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} ,
- Los campos no poseen componentes según el eje x , dirección de propagación de la onda planas
- son independientes de las variables espaciales z e y , se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \bar{\mathbf{z}} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \bar{\mathbf{z}}$$

Ecuaciones de Maxwell de los rotores se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \bar{\mathbf{z}} &= -\mu \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \bar{\mathbf{z}} \right) & -\frac{\partial H_z}{\partial x} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \bar{\mathbf{z}} &= \varepsilon \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \bar{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \bar{\mathbf{z}} \right) \end{aligned}$$

Igualando los términos que corresponden a las mismas direcciones espaciales se obtiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

De las anteriores ecuaciones se observa que existe una relación directa entre las componentes de los campos eléctrico y magnético que se hallan en cuadratura espacial.

$$E_y = f_{1y}(x - vt)$$

$$v = 1/\left(\sqrt{\mu\epsilon}\right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v \frac{\partial f_{1y}}{\partial(x-vt)}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = v\epsilon \frac{\partial f_{1y}}{\partial(x-vt)} = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \frac{\partial f_{1y}}{\partial(x-vt)}$$

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \int \frac{\partial f_{1y}}{\partial(x-vt)} dx$$

ONDA PLANA.

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \int \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x-vt)} dx$$

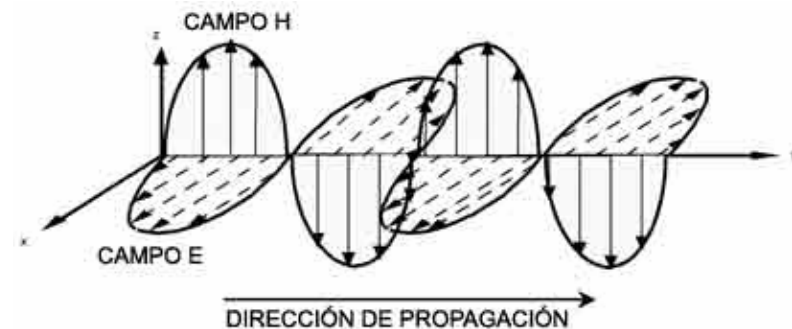
$$\frac{\partial f_{1y}}{\partial x} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x-vt)} \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x-vt)}$$

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \int \frac{\partial f_{1y}}{\partial x} dx = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} f_{1y} (x-vt) + C$$

La constante de integración C indicaría la presencia de un campo que no depende de x , y que por lo tanto no constituiría parte de la onda que se propaga, razón por la cual no se toma en consideración.

Expresado en otros términos, dadas las condiciones de contorno del problema, dicha constante de integración C debe ser nula, por lo tanto se tiene (se demuestra en forma similar para H_y):

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} E_y \quad H_y = -\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} E_z$$



Impedancia intrínseca o característica del medio.

- Las intensidades totales de los campos eléctrico y magnético, y el cociente entre ambas, resultan ser:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \qquad |\mathbf{H}| = \sqrt{H_y^2 + H_z^2} = \sqrt{\frac{E_y^2}{\frac{\mu}{\varepsilon}} + \frac{E_z^2}{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \qquad \boxed{\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

- Onda electromagnética plana**
- Relación constante entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético,
- Válida también para las componentes espaciales de ambos campos que se encuentran en cuadratura espacial.
- Esta relación esta dada por **la raíz cuadrada del cociente entre la permeabilidad y la permitividad del medio, y su unidad es el ohm.**
- Por este motivo, a esta relación suele denominarse ***impedancia intrínseca o característica del medio.***
- Para el vacío esta relación es:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad [\text{H/m}]$$
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \quad [\text{F/m}]$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = 377 \quad [\Omega]}$$

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} E_y \quad H_y = -\frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} E_z \quad E_y = Z_o H_z \quad E_z = -Z_o H_y$$

La posición relativa en el espacio de ambos campos, eléctrico y magnético, puede ser perfectamente determinada si se realiza el producto escalar de ambos campos. Es decir:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_y H_y + E_z H_z = Z_0 (H_z H_y - H_y H_z) = 0$$

De lo que se deduce que en una onda plana los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí espacialmente, además de ser perpendiculares a la dirección de propagación.

Si ahora se realiza el producto vectorial entre ambos campos, se obtiene:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_y H_z - E_z H_y) \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} Z_0 (H_z^2 + H_y^2) = \bar{\mathbf{x}} Z_0 |\mathbf{H}|^2 = \bar{\mathbf{x}} \frac{|\mathbf{E}|^2}{Z_0}$$

Más adelante, al tratarse el vector de Poynting, se hallará el sentido físico de este producto vectorial.

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO.

- Los campos eléctrico y magnéticos en gran cantidad de casos prácticos, varían en forma senoidal con el tiempo.
- Además, toda variación periódica con el tiempo puede desglosarse en una sumatoria de variaciones senoidales cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de repetición de la onda.
- Los campos son vectores y fasores.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \sin(\omega t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \operatorname{Im}\{e^{j\omega t}\}$$

donde $\omega = 2\pi f$, es la pulsación angular, siendo f la frecuencia.

$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ la parte correspondiente a un vector que varía con \mathbf{r} , variable espacial.

y la parte de variación temporal es la real o imaginaria de la exponencial: fasor

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Si se reescriben ahora las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

En donde han sido reemplazadas las derivadas temporales de los fasores por su correspondiente valor, cual es el producto de $j\omega$ por dicho fasor.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \dot{\mathbf{E}} = -\omega^2 \dot{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$



$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= -\omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E} \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= -\omega^2 \mu\epsilon \mathbf{H} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son conocida con el nombre de ecuaciones vectoriales de **Helmholtz**.

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Para el caso de una onda plana que se propaga en la dirección del eje x y que no varía según los ejes z e y , las ecuaciones de onda resultan

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = -\beta^2 \mathbf{E} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} = -\beta^2 \mathbf{H}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

es la denominada *constante de fase* y, como se verá más adelante, es la parte imaginaria de otra constante compleja denominada *constante de propagación*.

LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$E_y = C_1 e^{j(\omega t - \beta x)} + C_2 e^{j(\omega t + \beta x)}$$

- En las que C_1 y C_2 son constantes complejas arbitrarias, y corresponden a la *máxima amplitud* o *amplitud cresta*, que alcanzan las ondas incidente y reflejada, respectivamente.
- Si C_1 o C_2 pueden ser magnitudes complejas, con módulo y fase (modifica el ángulo de la senoide)

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Tomando la parte real de la ecuación anterior, sin por ello perder generalidad en el análisis, se obtiene su forma cosenoidal.
- Por ejemplo si C_1 y C_2 son reales, la forma cosenoidal de la ecuación anterior resulta:

$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x) + C_2 \cos(\omega t + \beta x)$$

- La expresión anterior demuestra que **en un medio homogéneo y sin pérdidas** *cual es el espacio vacío o un dieléctrico ideal, la hipótesis de una variación senoidal en el tiempo da lugar a una variación espacial del mismo tipo.*
- Si C_1 y C_2 son iguales las dos ondas progresivas en sentido opuesto dan lugar a una Onda Estacionaria. Lo veremos en el tema reflexión.

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Si se reescribe la expresión de la onda progresiva de campo eléctrico en función de $x-vt$, puede hallarse la **velocidad v de propagación** :

$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x) + C_2 \cos(\omega t + \beta x)$$

$$E_y = C_1 \cos \beta \left(\frac{\omega}{\beta} t - x \right) + C_2 \cos \beta \left(\frac{\omega}{\beta} t + x \right)$$

$$\cos \beta \left(\frac{\omega}{\beta} t - x \right) = \cos \beta \left(-\frac{\omega}{\beta} t + x \right)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Velocidad de propagación
de la onda Progresiva

$$E_y = C_1 \cos[\beta(x - vt)] + C_2 \cos[\beta(x + vt)]$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- La velocidad de propagación de la onda puede ser obtenida si, observando un punto particular de la **onda progresiva**, se realiza el cociente entre el desplazamiento a lo largo del eje x , que sufre dicho punto y el tiempo transcurrido para que dicho desplazamiento tenga lugar.

$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\omega t - \beta x = Cte.$$

$$\frac{\partial(\omega t)}{\partial t} - \frac{\partial(\beta x)}{\partial t} = 0.$$

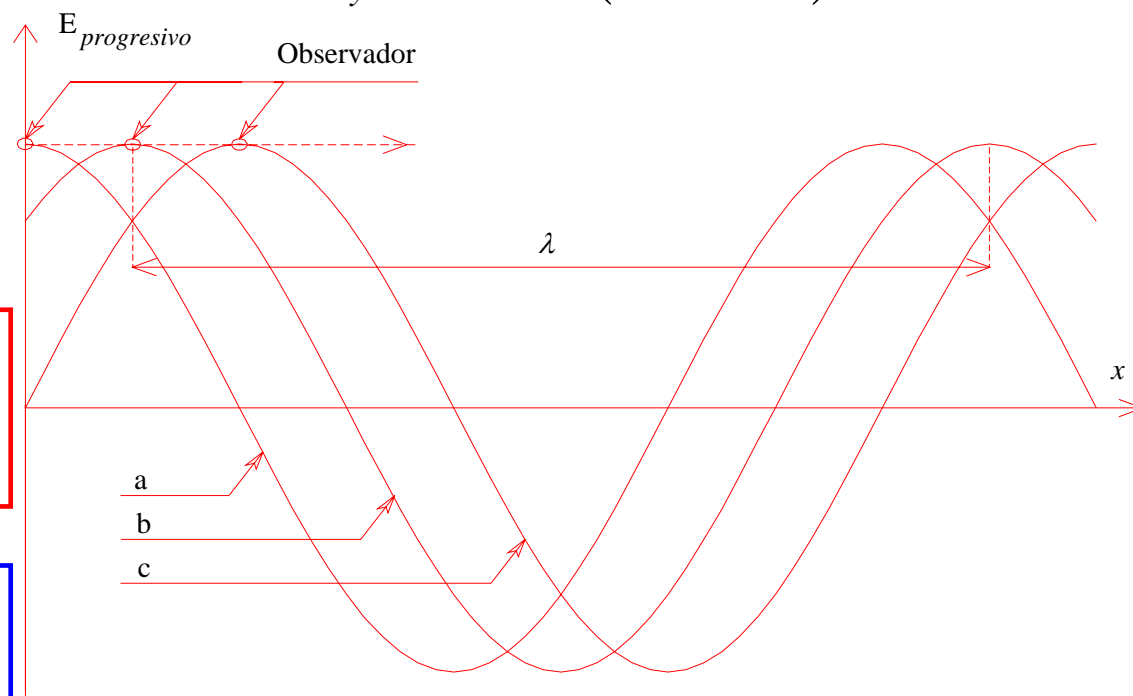
$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta}$$

Constante de fase

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \longrightarrow [radianes / m]$$

Velocidad de fase

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = v \longrightarrow [m / s]$$

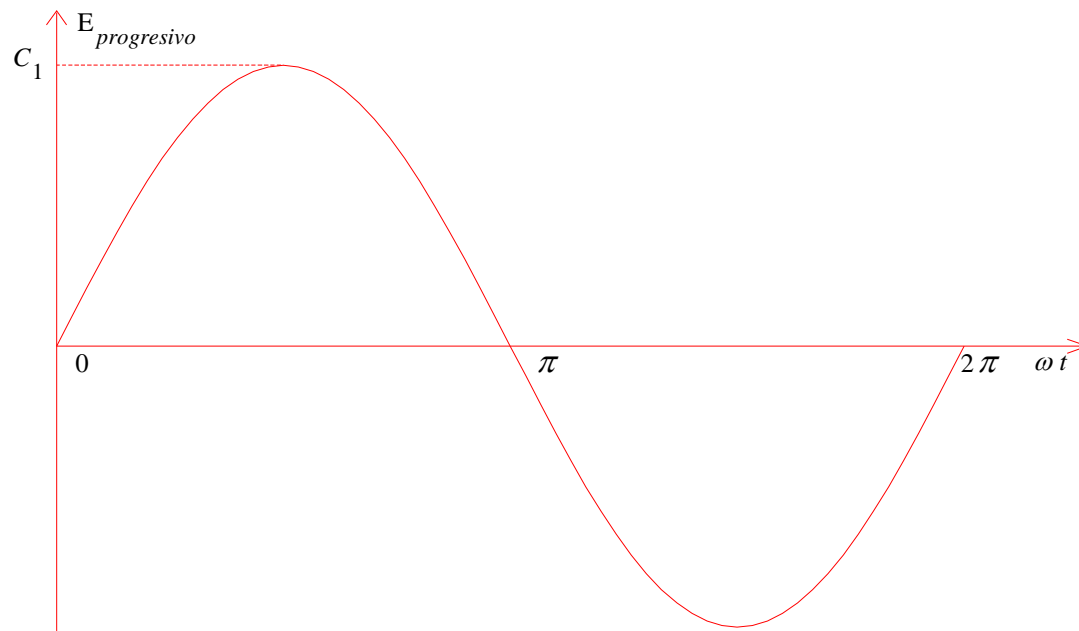


Onda progresiva que avanza en el sentido positivo del eje x . **(a)** $wt=0$, **(b)** $wt=\pi/4$, **(c)** $wt=\pi/2$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Si ahora, el observador se ubica en un punto fijo sobre el eje x , verá que la onda varía senoidalmente con el tiempo, como se grafica en la siguiente

$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x_1)$$



Variación senoidal con el tiempo de una onda progresiva, en un punto del espacio

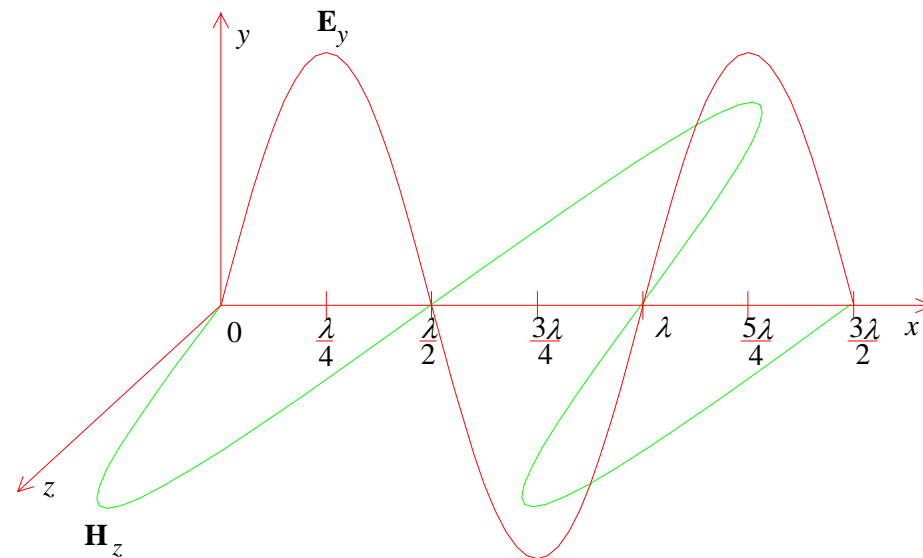
ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- La suposición de que las ondas varían senoidalmente en el tiempo, implica también que dichas ondas varían senoidalmente en el espacio.
- Se muestra una onda espacial progresiva plana que viaja en dirección de x positivas.
 - La variación espacial es sinusoidal
 - Los campos H y E están en cuadratura espacial
 - Y en fase temporal

$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x)$$

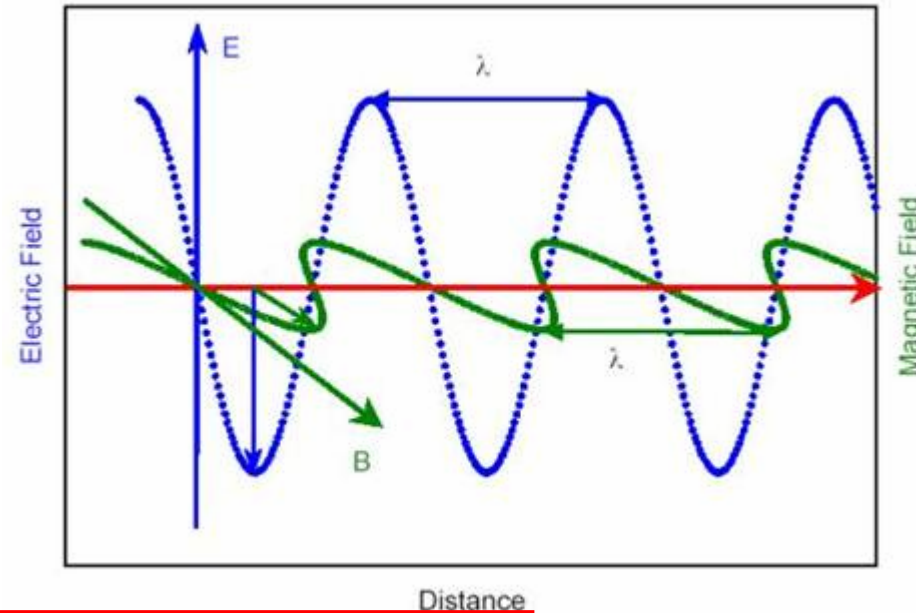
$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} E_y$$

$$H_z = \frac{C_1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \cos(\omega t - \beta x)$$



ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Otra magnitud relevante, es la denominada *longitud de onda* λ , definida como la distancia que ocupa una onda senoidal en un ciclo completo de 2π radianes.
- Ya que las ondas varían en el espacio como funciones senoidales de x , resulta que la longitud de onda, por definición, es



$$E_y = C_1 \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\beta \lambda = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\beta \lambda = 2\pi$$

$$v \beta \lambda = 2\pi v$$

$$\omega \lambda = 2\pi v$$

$$2\pi f \lambda = 2\pi v$$

$$v = \lambda f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\lambda = v/f$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_y = C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Se puede definir a esta **velocidad de fase como la velocidad con que viaja, según la dirección de propagación, un punto de igual fase de una onda.**
- La expresión de la velocidad de fase para una onda plana progresiva, ya ha sido determinado en el punto anterior. Este valor resulta ser en el vacío:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \qquad v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 300.10^6 \text{ [m/s]}$$

donde c es la velocidad de la luz

La velocidad de la fase con relación a la velocidad de la luz, denominada *velocidad de fase relativa*, resulta ser

$$v_r = \frac{v}{c}$$

Para otros medios (sin pérdidas), la *velocidad de fase relativa* es:

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- La velocidad de fase de una onda plana progresiva, en un medio sin pérdidas y no limitado espacialmente, es menor o igual a la velocidad de la luz.
- Sin embargo, este resultado no debe extrapolarse a cualquier medio, ni a cualquier tipo de onda, **ya que en términos generales la velocidad de fase puede ser menor, igual o mayor que la velocidad de la luz.**
- Si dos ondas progresivas, de la misma frecuencia, viajan con la misma velocidad en direcciones opuestas, o con diferentes velocidades en la misma dirección, **la velocidad de fase de la onda compuesta resultante no es una constante sino que varía como función de la posición.**

$$E_y = \cos(\omega t - \beta x) + \frac{1}{2} \cos(\omega t + \beta x)$$

$$C1=1$$

$$C2=0.5$$

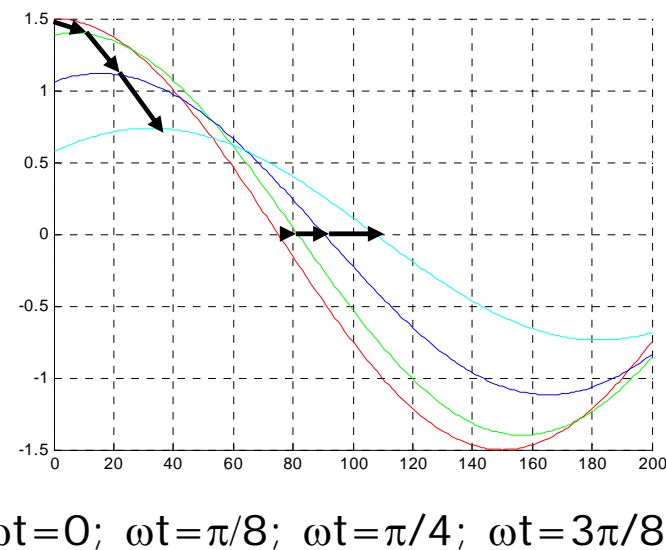
$$f=1 \text{ MHz}$$

$$v= 300.000 \text{ km/s}$$

El punto P se mueve a velocidad que no es constante

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0; \frac{1}{8}T) \rightarrow 0.05\lambda \rightarrow (0.1\pi) \\ (\frac{1}{8}T; \frac{1}{4}T) \rightarrow 0.2\lambda \rightarrow (0.4\pi) \end{array} \right.$$



ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

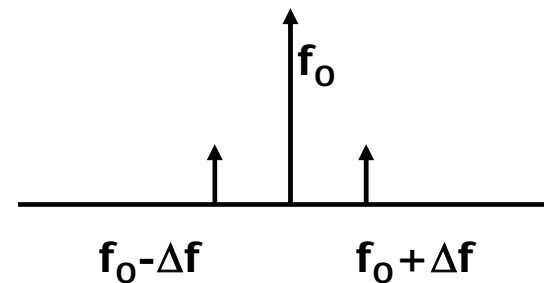
- **Velocidad de fase de una onda plana de frecuencia única** es la velocidad de propagación de un frente de onda de fase constante

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \qquad \beta = \frac{\omega}{v} = 2\pi f \sqrt{\mu \epsilon}$$

- Para una **onda plana en un medio sin pérdidas** La **constante de fase** es una **función lineal con la frecuencia**.
 - La **velocidad de fase es una constante**
- En algunos otros casos por ejemplo:
 - Propagación en medios dieléctricos con pérdidas
 - En una línea de transmisión
 - En una Guía de Onda
 - La constante de fase no es lineal con la frecuencia
 - Las ondas de distinta frecuencia se desplazan a distinta velocidad de fase.
 - Las señales que transportan Información consisten en una “banda” de frecuencia, y si se propagan a distintas velocidades de fase la onda TOTAL se Distorsiona
 - La Señal se DISPERSA
 - El dieléctrico con pérdidas es un medio Dispersor

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- Una señal tiene intervalos de frecuencia (bandas laterales) Muy pequeños alrededor de una portadora de HF .
- Portadora $f_0=1000\text{KHz}$, y la información (voz) esta entre $\Delta f=300$ a 3000 Hz
- Las bandas laterales están alrededor de los 1000kHz y son
» $f_0+\Delta f$, $f_0-\Delta f$



- Esta señal constituye un grupo de frecuencias y forma un paquete de ondas

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- **Velocidad de Grupo:** es la velocidad de propagación de la envolvente del paquete de ondas o grupo de frecuencias.
- **Caso más sencillo:**
 - 2 ondas viajeras de igual amplitud

$$\left. \begin{array}{l} \omega_0 + \Delta\omega \\ \omega_0 - \Delta\omega \end{array} \right\} \text{frecuencias angulares} \qquad \left. \begin{array}{l} \beta_0 + \Delta\beta \\ \beta_0 - \Delta\beta \end{array} \right\} \text{Constantes de fase}$$

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x] + E_0 \cdot \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x]$$

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \cos[(\omega_0 t - \beta_0 x) + (\Delta\omega t - \Delta\beta x)] + E_0 \cdot \cos[(\omega_0 t - \beta_0 x) - (\Delta\omega t - \Delta\beta x)]$$

α
 θ

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \theta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\alpha - \theta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$2E_0 \cdot \cos(\omega_0 t - \beta_0 x) \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x)$$

$$2E_0.\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x).\cos(\omega_0 t - \beta_0 x)$$

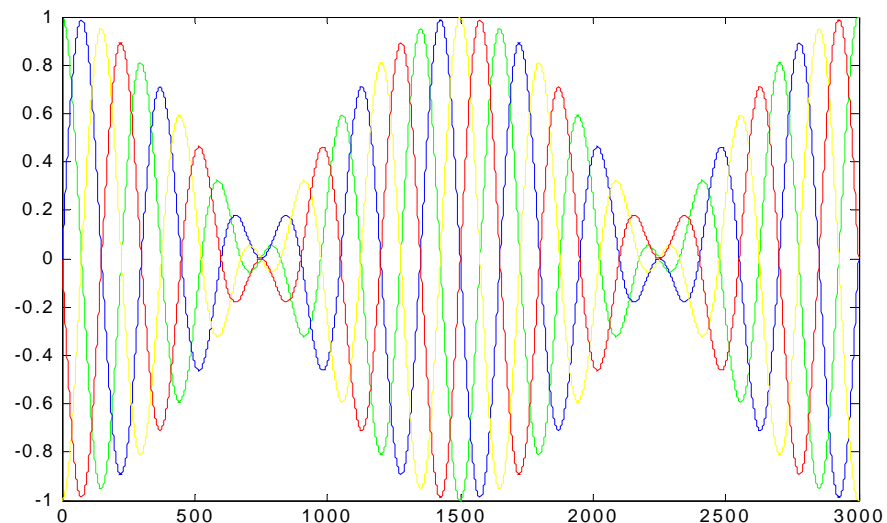
Onda de Amplitud
Modulada

Modulación : 2000 Hz

Portadora : 1000kHz

- Como $\Delta\omega \ll \omega_0$ esta expresión representa una onda que oscila a frecuencia angular ω_0 y a una amplitud que varía lentamente con la frecuencia angular $\Delta\omega$

$$E_y(x, t) = E_0.\cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x] + E_0.\cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x]$$



ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- La onda dentro de la envolvente se propaga a la velocidad de fase determinada por

$$\omega_o t - \beta_o x = cte$$

$$\omega_o - \beta_o \frac{dx}{dt} = 0$$

$$v_{fase} = \frac{\omega_o}{\beta_o}$$

- La velocidad de la envolvente

$$\Delta \omega t - \Delta \beta x = cte$$

$$\Delta \omega - \Delta \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

$$v_{grupo} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta} = \frac{1}{\Delta \beta / \Delta \omega} = \frac{1}{d\beta / d\omega}$$

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

- La velocidad de grupo es la velocidad de fase de la envolvente , velocidad de una señal de banda estrecha.
- La velocidad de grupo puede ser mayor o menor que la velocidad de fase
- En medios no dispersores la velocidad de grupo es la misma que la velocidad de fase
- El espacio libre es un ejemplo de medio NO dispersor sin pérdidas, donde $v_{fase}=v_{grupo}=c$
- Un medio Dispersor es aquel que la velocidad de fase es una función de la frecuencia
 - Normalmente dispersos el cambio de la velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es *positivo*.

$$\frac{d v}{d \lambda} > 0 \quad v_{grupo} < v_{fase}$$

Para estos medios la velocidad de grupo es *menor* que la velocidad de la luz

- Medios Anormalmente dispersivos. el cambio de la velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es *negativo*.

$$\frac{d v}{d \lambda} < 0 \quad v_{grupo} > v_{fase}$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO

$$v_{\text{grupo}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta \cdot v)}{d\beta} = \beta \frac{dv}{d\beta} + v$$

$$\beta = \frac{\omega}{v}$$

$$v_{\text{grupo}} = v_{\text{fase}} + \beta \frac{dv_{\text{fase}}}{d\beta}$$

$$v_{\text{grupo}} = v_{\text{fase}} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv_{\text{fase}}}{d\lambda} \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) d\lambda = v_{\text{fase}} - \lambda \frac{dv_{\text{fase}}}{d\lambda}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$d\beta = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$v_{\text{grupo}} = v_{\text{fase}} - \lambda \frac{dv_{\text{fase}}}{d\lambda}$$

Normales

dispersos $\frac{dv}{d\lambda} > 0$
 $v_g < v_f$

Anormales
dispersos

$\frac{dv}{d\lambda} < 0$
 $v_g > v_f$

Ejemplo de medio dispersivo

El diagrama ω - β para ondas planas transversales en un gas ionizado, y su comparación con el vacío.

Se puede apreciar que la **velocidad de fase**, la cual está determinada por la pendiente de la línea que une el origen con el punto correspondiente de la curva ω - β , es siempre superior que la **velocidad de fase en el vacío** (velocidad de la luz). Dado que la velocidad de fase depende de la frecuencia, **el medio es del tipo dispersivo**. Por lo tanto, la velocidad de transmisión de la información en la onda, es la **velocidad de grupo**, la cual se corresponde con la pendiente de la curva ω - β , siempre inferior, o a lo sumo igual, a la velocidad de la luz.

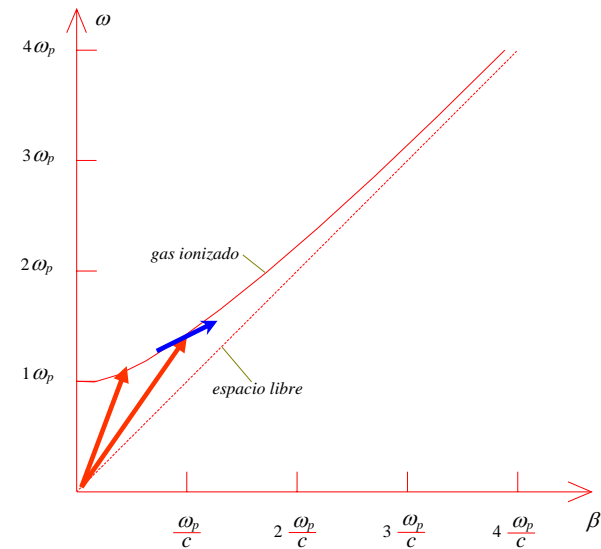


Diagrama ω - β para un gas ionizado

Ejemplo de Onda modulada

Una onda plana que viaja en un medio normalmente disperso sin pérdidas

$$v_{fase} = k\sqrt{\lambda}$$

$$v_{grupo} = v_{fase} - \lambda \frac{dv_{fase}}{d\lambda}$$

$$v_{grupo} = v_{fase} - \lambda \frac{k}{2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}k - \sqrt{\lambda} \frac{k}{2} = \sqrt{\lambda} \frac{k}{2} = \frac{v_{fase}}{2}$$

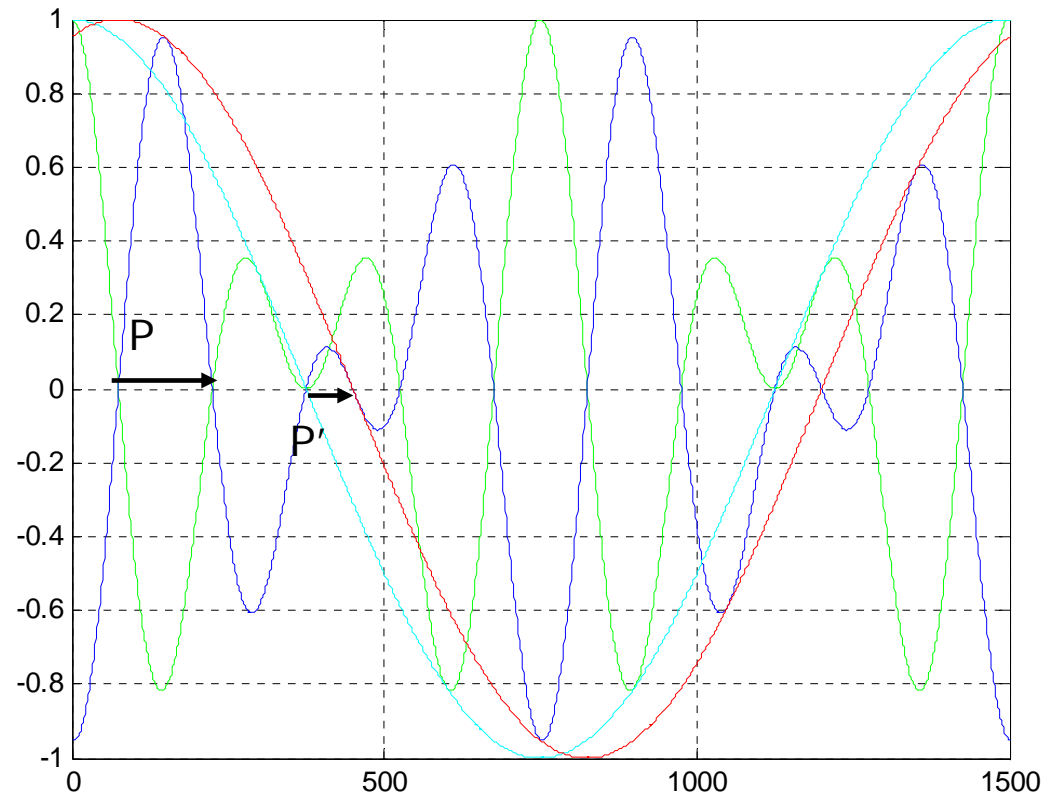
$$\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x) \cdot \cos(\omega_0 t - \beta_0 x)$$

$$v_{fase} = \frac{\omega_0}{\beta_0};$$

$$v_{grupo} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

$\lambda = 300m$

$f_0 = 1MHz;$
 $\Delta f = \pm 100kHz;$
 $v_{fase} = 300.Mm/s;$
 $v_{grupo} = 150Mm/s;$
 $t=0; t=T/2$
 P: -----> v_{fase}
 P':-----> v_{grupo}



- La Información portada por la modulación se mueve a la velocidad de la envolvente, esto es a la velocidad de grupo.
- En un medio sin pérdidas la energía se transporta a la velocidad de grupo.
- La diferencia entre la velocidad de grupo y de fase se ilustra con una *oruga* que se mueve arrastrándose:
 - La onda en su lomo se mueve a la velocidad de fase.
 - Y la oruga avanza como un todo a la velocidad de grupo.
- Para una onda de amplitud constante de una sola frecuencia la velocidad de grupo NO es evidente
- Para ondas de dos o mas frecuencia, o una frecuencia de grupo como en una onda modulada puede distinguirse las dos velocidades.

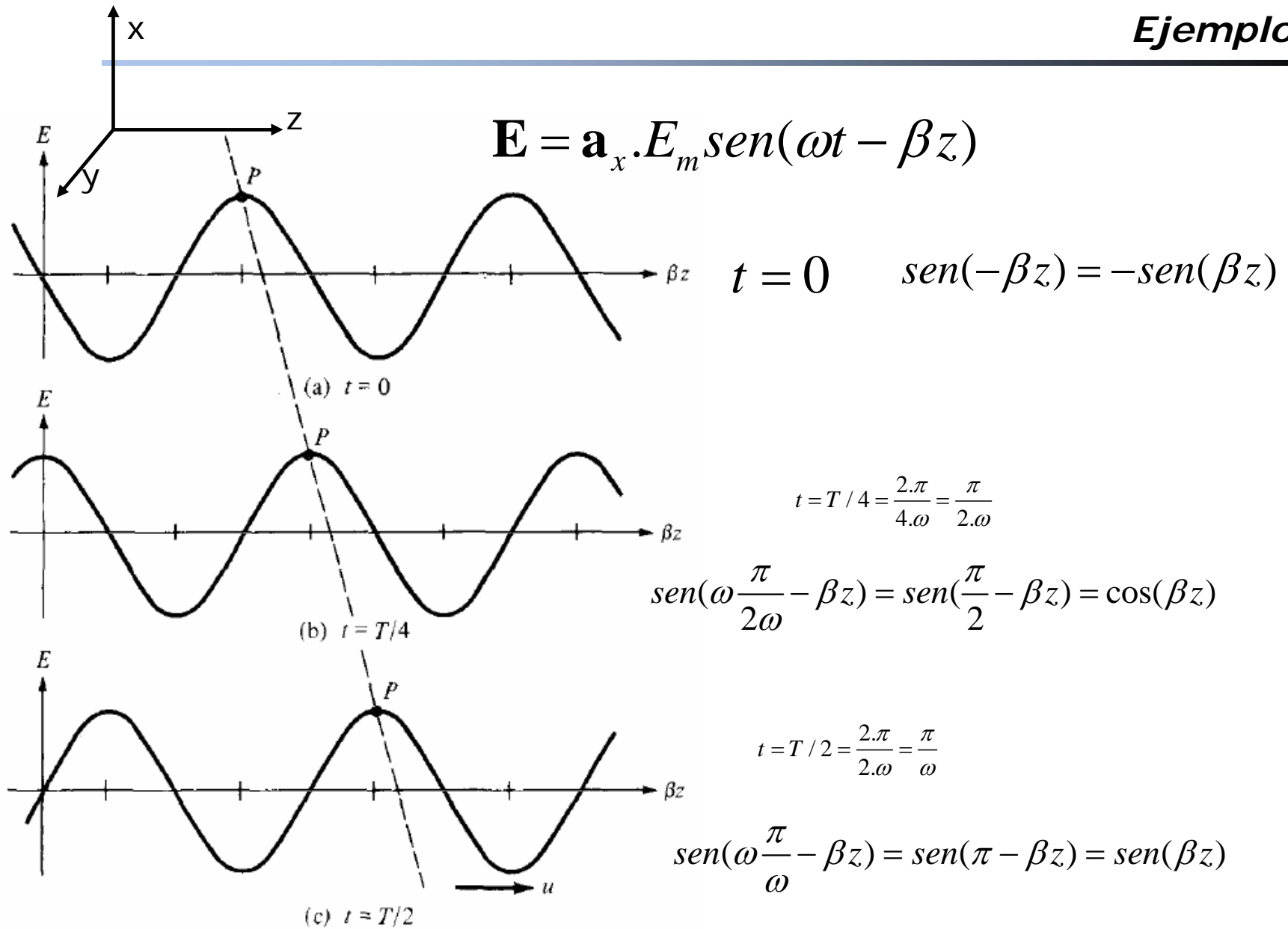
-
- Impedancia característica o intrínseca del medio sin pérdidas, dieléctrico perfecto

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi = 377 \text{ } [\Omega]$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \text{ } [\Omega]$$

- Resulta evidente que, para el caso de un dieléctrico perfecto, se puede hablar de una resistencia intrínseca, ya que la parte imaginaria de la impedancia intrínseca resulta nula. Esto resulta del hecho de que los campos eléctrico E e intensidad magnética H se encuentran en fase temporalmente.
- En el caso general de la propagación en un medio cualquiera, la impedancia intrínseca será un número complejo

- Una onda es una función tanto del tiempo como del espacio
- No tiene principio ni fin, el instante $t=0$ se elige arbitrariamente como punto de referencia
- Cuando $(\omega t - \beta x)$ el signo negativo, la propagación ocurre en el sentido de las x positivo
- Cuando $(\omega t + \beta x)$ el signo positivo, la propagación ocurre en el sentido de las x negativo
- Toda onda se puede representarse con senos o cosenos.



Onda en el espacio libre

$$\mathbf{E} = 50 \cos(10^8 t + \beta x) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

1) Calcular β $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \quad \beta = 0.3333 \text{ rad/m}$

2) Calcular el tiempo para recorrer $\lambda/2$

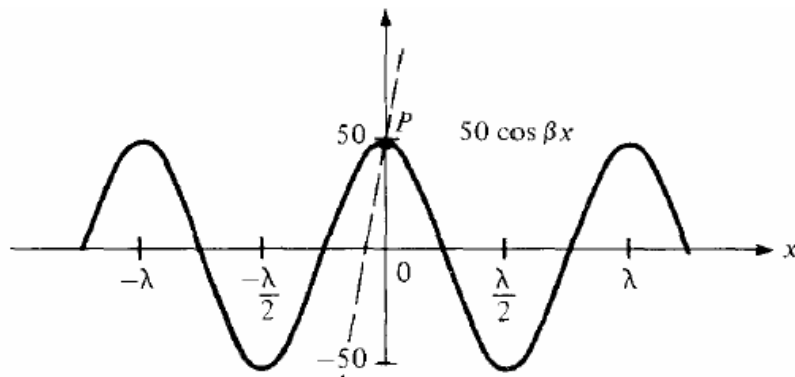
$$\frac{\lambda}{2} = ct_1 \quad t_1 = \frac{\lambda}{2c} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6\pi \quad t_1 = \frac{6\pi}{2(3 \times 10^8)} = 31.42 \text{ ns}$$

3) Dibujar la onda para : $t=0$, $t=T/4$, $t=T/2$. Mostrar hacia donde viaja la onda (un punto de fase constante)

$$t = 0, \quad E_y = 50 \cos \beta x$$

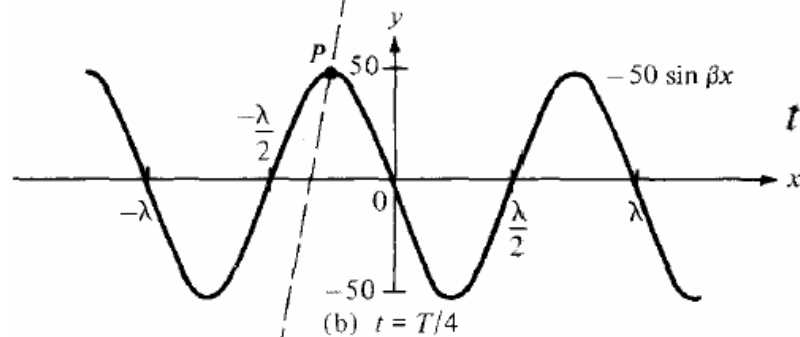
$$t = T/4, E_y = 50 \cos \left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \beta x \right) = 50 \cos (\beta x + \pi/2) \\ = -50 \sin \beta x$$

$$t = T/2, E_y = 50 \cos \left(\omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \beta x \right) = 50 \cos (\beta x + \pi) \\ = -50 \cos \beta x$$



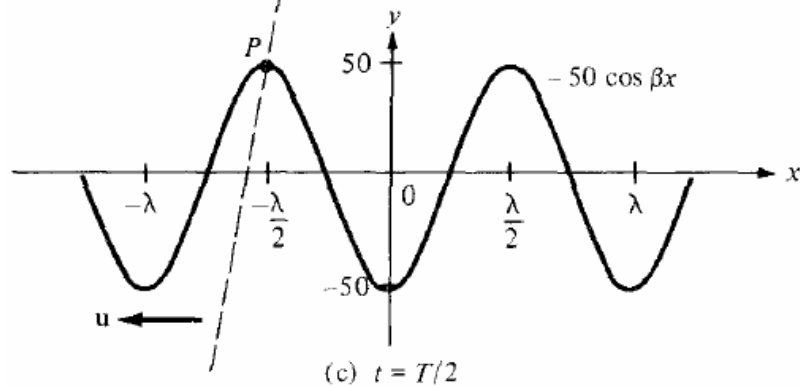
(a) $t = 0$

$$t = 0, \quad E_y = 50 \cos \beta x$$



(b) $t = T/4$

$$t = T/4, \quad E_y = 50 \cos(\beta x + \pi/2) = -50 \sin \beta x$$



(c) $t = T/2$

$$t = T/2, \quad E_y = 50 \cos(\beta x + \pi) = -50 \cos \beta x$$

P Viaja hacia $-\mathbf{a}_x$.

Espectro . Clasificación de múltiples frecuencia

Radiondas :

TV UHF: 470 – 806 MHz

TV VHF, FM 54-216 MHz

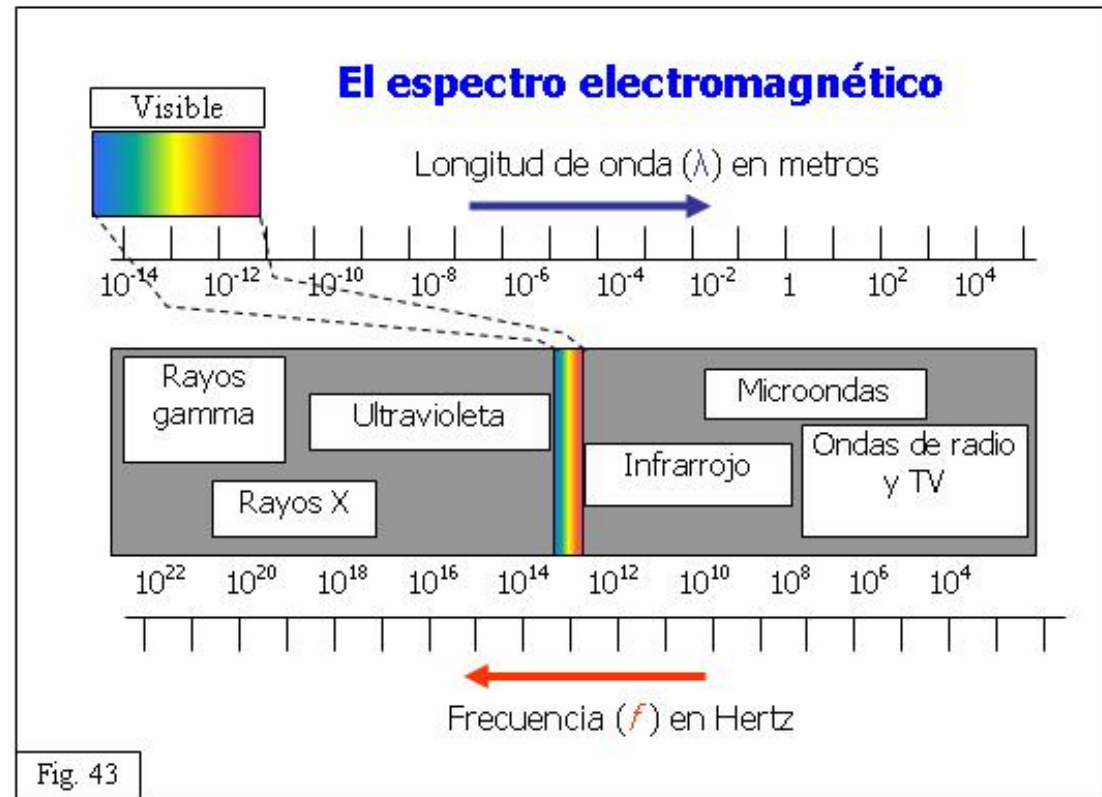
Onda corta: 3- 26 Mhz

Radio AM 535 -1605 kHz

Microndas 3 - 300 MHz

radares,
comunicaciones
Satelitales

- **Luz visible:**
– 10^5 - 10^6 GHZ



| EM Phenomena | Examples of Uses | Approximate Frequency Range |
|-----------------------|---|-----------------------------|
| Cosmic rays | Physics, astronomy | 10^{14} GHz and above |
| Gamma rays | Cancer therapy | 10^{10} – 10^{13} GHz |
| X-rays | X-ray examination | 10^8 – 10^9 GHz |
| Ultraviolet radiation | Sterilization | 10^6 – 10^8 GHz |
| Visible light | Human vision | 10^5 – 10^6 GHz |
| Infrared radiation | Photography | 10^3 – 10^4 GHz |
| Microwave waves | Radar, microwave relays, satellite communication | 3–300 GHz |
| Radio waves | UHF television | 470–806 MHz |
| | VHF television, FM radio | 54–216 MHz |
| | Short-wave radio | 3–26 MHz |
| | AM radio | 535–1605 kHz |

