

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE INGENIERIA

Cátedra de Campos y Ondas

Resumen de Fórmulas sobre Ecuaciones de Maxwell, Notas sobre Corrientes y Campos variables con el tiempo en los conductores, Ecuación de Difusión y Propagación de Ondas Planas¹

Parte 2

¹ Resumen de fórmulas de los apuntes de la Cátedra: “Notas sobre Corrientes y Campos variables con el tiempo en los conductores” y “Notas sobre Ecuaciones de Maxwell, Propagación de Ondas Planas y Vector de Poynting”

CASO DE PROPAGACIÓN EN EL ESPACIO LIBRE o EN UN MEDIO SIN PERDIDAS**(VACÍO: $\sigma_0=0$; μ_0, ϵ_0)****(idem un dieléctrico ideal sin pérdidas $\sigma_d=0$; $\mu_d = \mu_r \mu_0$; $\epsilon_d = \epsilon_r \epsilon_0$).****ONDAS ELECTROMAGNETICAS**

Considerando un medio sin cargas ($\rho=0$) y sin pérdidas ($\sigma=0$), por ejemplo el vacío o dieléctrico ideal ($\sigma=0$), las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

ó Expresando todo en función de \mathbf{E} y \mathbf{H}

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

FENOMENO DE PROPAGACIÓN

Si se aplica el operador rotor a la ecuación que expresa el rotacional del campo eléctrico \mathbf{E} , se tiene que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \quad \text{idem para } \mathbf{H} \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}}$$

ecuaciones de onda

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE

Los campos eléctrico y magnético dependen, además del tiempo, solamente de una dirección espacial, y a su vez ambos campos no poseen componentes según esa dirección (dirección de propagación de la onda electromagnética, en este caso elegimos x como dirección de propagación):

| | | | | | |
|--------------|--------------|--|--|--|--|
| $E_x = 0$ | $H_x = 0$ | $\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0$; | $\frac{\partial E_z}{\partial x} \neq 0$ | $\frac{\partial H_y}{\partial x} \neq 0$, | $\frac{\partial H_z}{\partial x} \neq 0$ |
| $E_y \neq 0$ | $H_y \neq 0$ | $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$; | $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$ | $\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$; | $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ |
| $E_z \neq 0$ | $H_z \neq 0$ | $\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$; | $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ | $\frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$; | $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ |

Por simplicidad supondremos el campo eléctrico \mathbf{E} en una sola dirección por ejemplo en “y”, propagándose en la dirección del eje x

$$E_x = 0 ; E_z = 0$$

$$E_y(x, t) \neq 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 ;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0$$

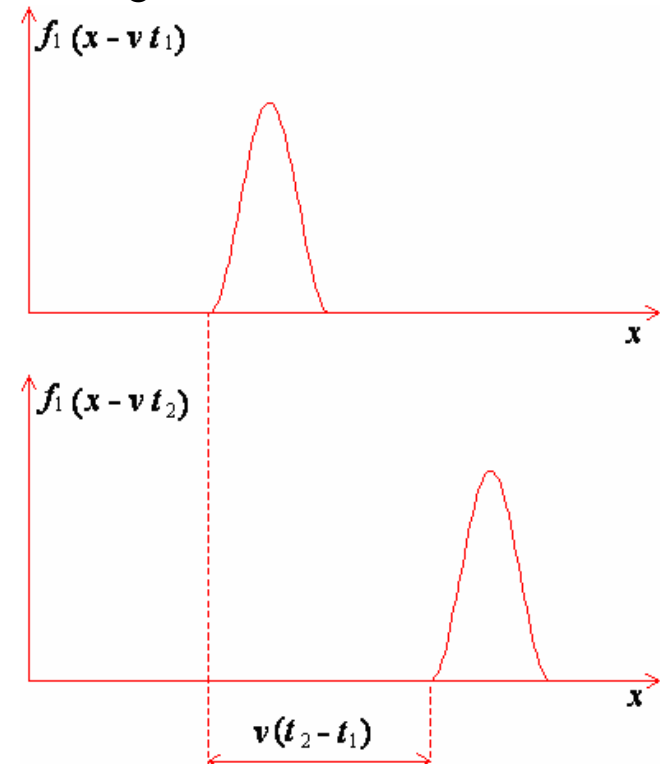
Por lo tanto el campo eléctrico de esta onda plana deberá satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2}$$

La ecuación de onda es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución general es la siguiente:

$$E_y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Donde: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$; v la velocidad de propagación en la dirección x .



Onda propagándose en dirección de las x positivas, mostrada en los instantes t_1 y t_2

Así la solución general de la ecuación de onda, está compuesta por dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos.

- onda incidente
- onda reflejada

Ahora si no existe discontinuidad, tampoco existirá la onda reflejada y la solución para la ecuación de onda consistirá en sólo la onda viajando en un sentido:

$$E_y = f_1(x - vt)$$

ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO.

Suponiendo la onda plana

$$\mathbf{E}(x, t) = 0\hat{i} + E_y(x, t)\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$E_y(x, t) = \text{Re}\{\dot{E}(x) \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{E_0(x) \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\} = E_0(x) \cos(\omega t + \phi)$$

donde $\omega = 2\pi f$, es la pulsación angular, siendo f la frecuencia.

Usando fasores la ecuación diferencial espacio-temporal

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

se reduce a una ecuación diferencial espacial

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} = -\omega^2 \mu \varepsilon \dot{E}_y = -\beta^2 \dot{E}_y$$

Esta ecuación es conocida con el nombre de ecuación vectorial de Helmholtz.

donde : $\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ es la denominada *constante de fase* y, como se verá más adelante, es la parte imaginaria de otra constante compleja denominada *constante de propagación*.

La solución general de la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} = -\beta^2 \dot{E}_y$ será:

$$\dot{E}_y = C_1^* e^{-j\beta x} + C_2^* e^{+j\beta x}$$

En las que C_1^* y C_2^* son constantes complejas arbitrarias

Considerando al medio infinito, $C_2^* = 0$

$$\dot{E}_y = E_0 e^{j(-\beta x + \varphi)}$$

La solución en función del tiempo y del espacio será:

$$E_y(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{j(-\beta x + \varphi)} e^{j(\omega t)} \right\}$$

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - \beta x + \varphi)$$

ó

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \beta(vt - x + \theta) \quad \text{llamando } \theta = \varphi/\beta$$

Siendo la velocidad de propagación:

$$v = \omega/\beta$$

$$v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

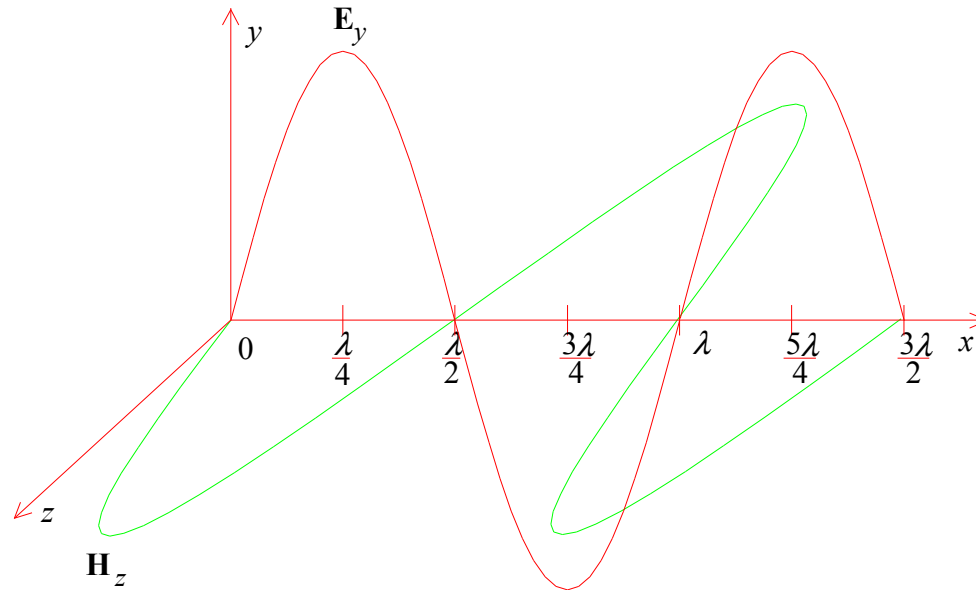
y la longitud de la onda λ :

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

Volviendo a las ecuaciones de Maxwell ($\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$) puedo demostrar que la solución para el campo magnético de esta onda plana que viaja por el espacio libre resulta:

$$H_z(x, t) = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cos(\omega t - \beta x + \varphi) = H_0 \cos(\omega t - \beta x + \varphi)$$

Los campos eléctrico y magnético están **en cuadratura espacial** y **en fase temporal**, siendo estas características correspondientes a una onda plana progresiva.



La **velocidad de fase** de la onda, que coincide con su velocidad de propagación, puede ser obtenida *por definición* a partir de observar el movimiento de un punto de fase constante. Es decir haciendo el cociente entre el desplazamiento a lo largo del eje x , que sufre dicho punto y el tiempo transcurrido para que dicho desplazamiento tenga lugar.

Para una onda que se desplace en la dirección de las x positivas, un punto de fase constante será aquel que satisfaga:

$\omega t - \beta x = Cte.$ Por lo tanto:
$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta}$$
 Esta velocidad de un punto de una onda senoidal recibe el nombre de **velocidad de fase**.

Recordando que $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ (**constante de fase**) la velocidad de fase será:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Siendo para el espacio libre:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H / m]} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}$$

resulta:

$$c = v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

donde c es la velocidad de la luz.

ECUACIONES DE MAXWELL, PARA EL CASO DE MEDIOS LINEALES, ISOTROPICOS Y HOMOGENEOS, PARA CAMPOS CON VARIACION ARMONICA.

Hipótesis

- medios homogéneos, isotrópicos y lineales
- medio no acotado espacialmente.
- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo

Considerando que no hay cargas libres en el espacio

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Considerando fasores

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \qquad \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega \dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0 \qquad \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon \dot{\mathbf{E}}$$

Si se aplica el operador rotor a la ecuación que expresa el rotacional del campo eléctrico \mathbf{E} , se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\nabla \times \dot{\mathbf{E}} \right) &= \nabla \times \left(-j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \right) = -j\omega\mu \left(\nabla \times \dot{\mathbf{H}} \right) = \\ &= -j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$

Si se usa la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Se obtiene el siguiente resultado:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \dot{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \Upsilon^* \dot{\mathbf{E}}$$

Siendo Υ^* la **constante de propagación**, un número complejo

$$\Upsilon^* = \sqrt{j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]}$$

α : coeficiente de atenuación

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]}$$

β : constante de fase

Para ondas planas será:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \Upsilon^2 \dot{E}_y(x)$$

y la solución para el fasor será:

$$\dot{E}_y(x) = \dot{E}_0 e^{-\Upsilon^* x} = E_0 e^{-\alpha x - j\beta x + j\varphi}$$

La solución para la onda viajando por el medio infinito será:

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi)$$

PROPAGACIÓN CON ATENUACIÓN

IMPEDANCIA INTRÍNSECA DEL MEDIO

Para conocer el campo magnético volvemos a la notación fasorial y a la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{E}_y(x) & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{\partial \dot{E}_y(x)}{\partial x} \hat{k} = -j\omega\mu \dot{H}_z \hat{k}$$

$$-\Upsilon^* \dot{E}_y \hat{k} = -j\omega\mu \dot{H}_z \hat{k}$$

$$\dot{E}_y \hat{k} = \frac{j\omega\mu}{\Upsilon^*} \dot{H}_z \hat{k}$$

De acá es posible obtener dos conclusiones:

- ✚ Para una onda plana donde el campo eléctrico sólo tiene componente en y (viajando en el sentido de x) se deduce que el campo magnético sólo puede tener componente en z. **En una onda plana E y H están en cuadratura espacial y son perpendiculares a la dirección de propagación.**
- ✚ La relación entre campo eléctrico y campo intensidad magnética (entre los fasores), está impuesta y a esta

relación se la denomina

impedancia intrínseca del medio η^*

$$\eta^* = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}$$

Volviendo al resultado de la ecuación de Maxwell:

$$\dot{E}_y \hat{k} = \frac{j\omega\mu}{\Upsilon^*} \dot{H}_z \hat{k}$$

la impedancia intrínseca del medio η^* será:

$$\eta^* = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_z} = \frac{j\omega\mu}{\Upsilon^*} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}}$$

En el caso general de la propagación en un medio cualquiera (LIH) la **impedancia intrínseca** será un **número complejo**.

$$\eta^* = \left| \eta^* \right| e^{j\theta_\eta}$$

$\left| \eta^* \right|$ me da la relación de módulos entre los fasores E y H

θ_η me da el desfasaje temporal que hay entre ambas ondas.

Conocida la onda de campo eléctrico es posible obtener la de campo magnético a través de la impedancia intrínseca.

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi)$$

A partir de

$$\dot{H}_z = \frac{\dot{E}_y}{\eta} = \frac{E_0 e^{j\varphi} e^{-\gamma x}}{\left| \eta \right| e^{j\theta_\eta}} = \frac{E_0 e^{-\alpha x - j(\beta x - \varphi)} e^{-j\theta_\eta}}{\left| \eta \right|}$$

magnético:

Es posible reconstruir la onda de campo

$$H_z(x, t) = \frac{E_0}{\left| \eta \right|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi - \theta_\eta)$$

CASO: MEDIO DIELECTRICO PERFECTO

Para un dieléctrico perfecto ($\sigma=0$), la impedancia intrínseca resulta ser un número real igual a:

$$\eta^* = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(0 + j\omega\epsilon)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Esto implica que en un un dieléctrico perfecto los campos eléctrico **E** y de intensidad magnética **H** se encuentran en fase temporal.

Para el espacio libre (vacío, $\sigma=0$)

$$\eta = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \quad [\Omega]$$

Para un dieléctrico perfecto la impedancia intrínseca puede expresarse en función de la impedancia intrínseca del vacío como:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad [\Omega]$$

La constante de propagación Υ^* para un dieléctrico perfecto, resulta ser un número imaginario puro:

$$\Upsilon^* = \sqrt{j\omega\mu(0 + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\beta$$

Esto implica que en un dieléctrico perfecto los campos eléctrico \mathbf{E} y de intensidad magnética \mathbf{H} viajan sin atenuación $\alpha=0$ (consecuencia de que no hay pérdidas, no hay disipación).

RESUMEN PARA EL CASO GENERAL (PARA TODO MEDIO LIH)

Recordando las hipótesis

- medios homogéneos, lineales e isotrópicos
- medio no acotado espacialmente.
- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo

la ecuación diferencial será:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \Upsilon^{*2} \dot{E}_y(x)$$

siendo la constante de propagación:

$$\Upsilon^* = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$$

y la solución será: $E_y(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_E)$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]}$$

coeficiente de atenuación

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]}$$

constante de fase

Conocido el campo eléctrico puedo obtener el campo magnético a través de la impedancia intrínseca:

$$\eta^* = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_z} = \frac{j\omega\mu}{\Upsilon^*} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}} \quad \text{impedancia intrínseca} \quad \eta^* = |\eta| e^{j\phi_\eta}$$

El campo magnético será:

$$H_z(x, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_E - \phi_\eta)$$

CLASIFICACION DE LOS MATERIALES SEGUN SU COMPORTAMIENTO A LA FRECUENCIA DE INTERÉS

Recordando que $\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_c + \dot{\mathbf{J}}_d = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}}$

Volviendo a la definición del factor de pérdida fp que mide la relación entre los módulos de la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento

factor de pérdida $f_P = \frac{J_C}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$

Dependiendo del factor de pérdida podemos clasificar a los medios según su comportamiento a una dada frecuencia en tres tipos, a saber:

. Buenos conductores:

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 100$$

. Cuasiconductores:

$$0,01 < f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100$$

. Dieléctricos:

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0,01$$

En condiciones ideales podemos definir al conductor perfecto y al dieléctrico perfecto (o vacío):

. Conductor perfecto:

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \infty$$

. Dieléctrico ideal (vacío):

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0$$

Sin importar la frecuencia se puede decir que los buenos conductores (cobre, aluminio, etc.) siempre se comportan como buenos conductores.

Sin importar la frecuencia se puede decir que el aire y el vacío se comportan casi como dieléctricos perfectos.

Sin embargo algunos materiales como la tierra, el agua dulce, el agua salada, su comportamiento depende de la frecuencia, habrá un rango donde se comporten como buenos conductores, otro como cuasi conductores y otro como dieléctrico:

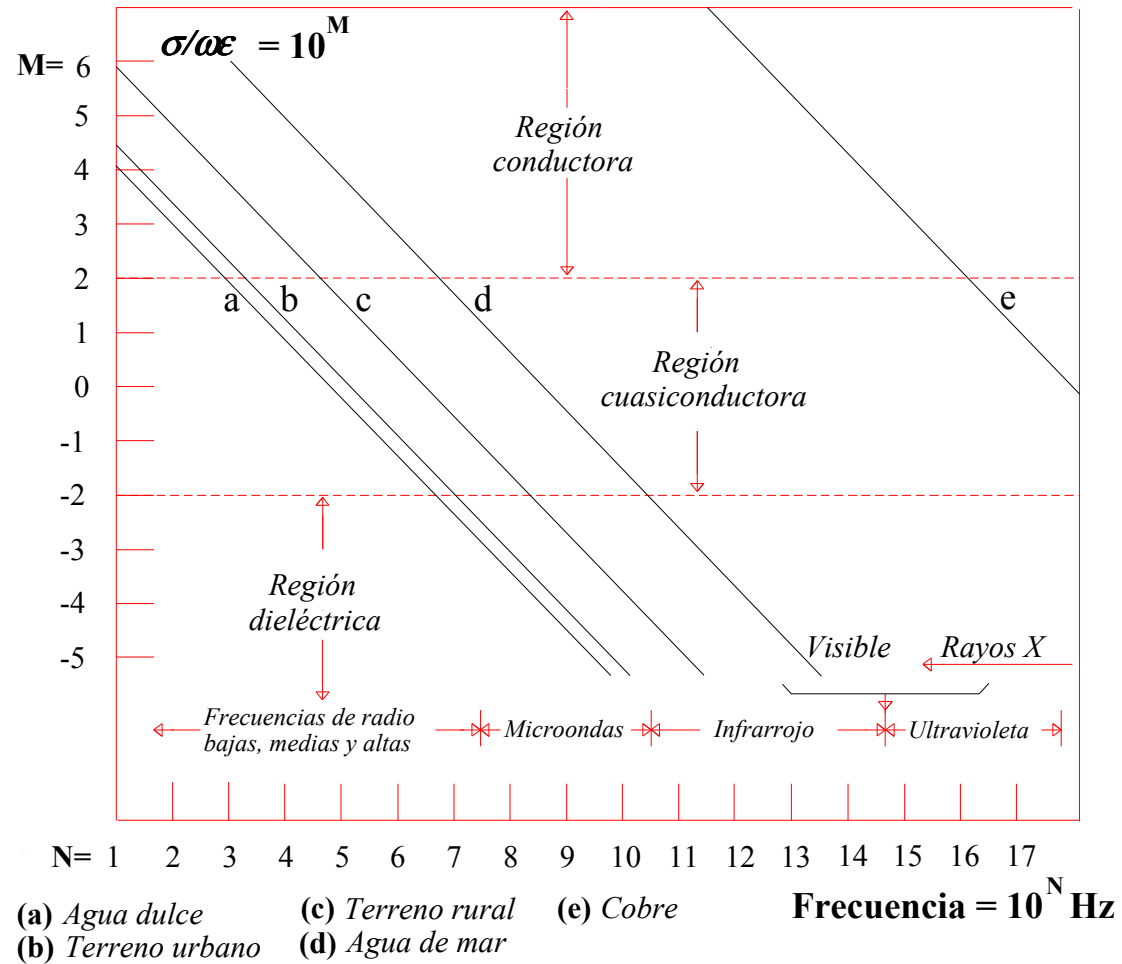


Figura - Relación entre las densidades de corrientes de conducción y de desplazamiento, para distintos materiales, en función de la frecuencia.

CASO BUENOS CONDUCTORES

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 100$$

El factor de pérdida es muy alto entonces la corriente de desplazamiento es despreciable frente a la de conducción. El fenómeno resultante es de DIFUSIÓN:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = \Gamma^2 \dot{\mathbf{J}} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^* = \sqrt{j\omega\sigma\mu_0\mu_r} = 1/\delta + j 1/\delta$$

Puede demostrarse que $\Upsilon^* = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \simeq \Gamma^*$ por lo tanto resulta

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi\mu\sigma f} \Rightarrow \text{efecto pelicular por difusión.}$$

Hay disipación ($\alpha \neq 0$), y la impedancia intrínseca tal como se la definió para un medio LIH coincide con la Impedancia interna unitaria definida para los buenos conductores semi-infinitos:

$$\eta^* = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_z} = \frac{j\omega\mu}{\Upsilon^*} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}} \simeq \frac{1}{\sigma\delta} + j \frac{1}{\sigma\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} e^{j\pi/4} = Z_{INTu}$$

Hay desfase temporal entre E y H de ($\theta_\eta = \pi/4$)

CASO CONDUCTOR IDEAL($\sigma=\infty$)

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \infty$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \frac{1}{\infty}$$

O sea $\delta = 0$, por lo tanto **el conductor ideal no deja penetrar a los campos**

Dentro del conductor no podrá haber ningún tipo de campo (ojo en la superficie del conductor para $x = 0$ no sé cuanto vale el campo, aún)

Para $x > 0$ es decir adentro del conductor ideal

$E = 0$ para $x > 0$; $H = 0$ para $x > 0$; $J = 0$ para $x > 0$

CASO CUASICONDUCTORES:

$$0,01 < f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]}$$

coeficiente de atenuación

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]}$$

constante de fase

CASO DIELECTRICOS

$$f_p = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 0,01$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]}$$

Para buenos dieléctricos (bajas pérdidas), se cumple que:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$$

y en tales casos es posible realizar la siguiente aproximación binómica:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \cong 1 + \frac{\sigma^2}{2 \omega^2 \epsilon^2}$$

$$\alpha \cong \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{2 \omega^2 \epsilon^2} \right) - 1 \right]} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\beta \cong \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2 \omega^2 \epsilon^2} \right)} + 1 = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8 \omega^2 \epsilon^2} \right)$$

CASO DIELECTRICO PERFECTO ($\sigma=0$)

$$f_P = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0$$

No hay corriente de conducción es toda corriente de desplazamiento.

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} (0) = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} 2 = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

o sea:

$$\boxed{\alpha = 0} \text{ y } \boxed{\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}}$$

No hay atenuación (pues no hay disipación por corriente de conducción)

Siendo la velocidad de propagación:

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta}} \text{ o sea } \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}}$$

