
Magnetostática

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

- El Magnetismo y Electricidad se desarrollaron más o menos independientes aunque hubo algunos intereses cruzados. Por ejemplo las tormentas eléctricas influían en las brújulas.
- En 1750 se descubre que la fuerza entre imanes respondía a la ley del inverso cuadrado, 17 años antes del mismo descubrimiento para cargas eléctricas. La ley del inverso cuadrado es aplicable a la gravitación, a las cargas eléctricas y a las magnéticas. Con lo cual se dispone de una teoría única.
- Pero como diferencia hace siglos que se sabe que los polos magnéticos no pueden existir aislados y en el siglo XVIII cuando los experimentadores logran transportar la electricidad de un lugar a otro nadie pudo hacer lo mismo con el magnetismo.
- Se tardó más de medio siglo en resolver el problema del magnetismo, y la solución aparece cuando disminuyó la teoría de los polos magnéticos, debido a que el magnetismo no era un fenómeno aislado sino asociado a las cargas en movimiento.

- Orested en 1820 observó el efecto magnético cerca de una corriente eléctrica, y luego Ampere extendió este trabajo y presentó una teoría completa .
- Faraday halló el efecto complementario de que un campo magnético variable produce una corriente eléctrica
- Maxwell extendió la teoría de Ampere a los campos variables.

La experiencia muestra que los efectos externos de una pequeña espira de corriente a suficiente distancia son exactamente los mismos que lo de un pequeño dipolo, así que la magnetostática está ligada a las corrientes eléctricas.

- Además la teoría atómica demuestra que el magnetismo se origina a partir de cargas móviles.

- Estas investigaciones mostraron que los fenómenos de electricidad y magnetismo no pueden separarse.
- Se demostró que el magnetismo estaba siempre asociado con cargas eléctricas móviles. Incluso en los imanes permanentes como lo planteo Ampere mucho antes de la teoría atómica, aunque no consideró el spin del electrón.
- Se halló que la energía magnética era *cinética* , en contraste con la energía *potencial* de la electrostática.
- El magnetismo se puede plantear como la *Electrodinámica* y la necesidad de separar el fluído magnético desaparece. También se aclaró por qué no habían hallado polos individuales, pues las cargas en movimiento producen un dipolo equivalente.
- Maxwell presenta simetría entre los dos tipos de energía y una correspondiente transformación de una en otra aunque parezcan de naturaleza distinta.

- **Magnetostática:**

Efecto de las cargas eléctricas que se mueven a módulo de velocidad constante, aunque no de dirección.

No se pone en juego la variación de energía cinética.

Aunque uno conozca que el magnetismo proviene de cargas en movimiento, en un primer paso podríamos partir de los polos magnéticos y usar la teoría del inverso cuadrado y ayudarnos de lo que aprendimos de los campos electrostáticos

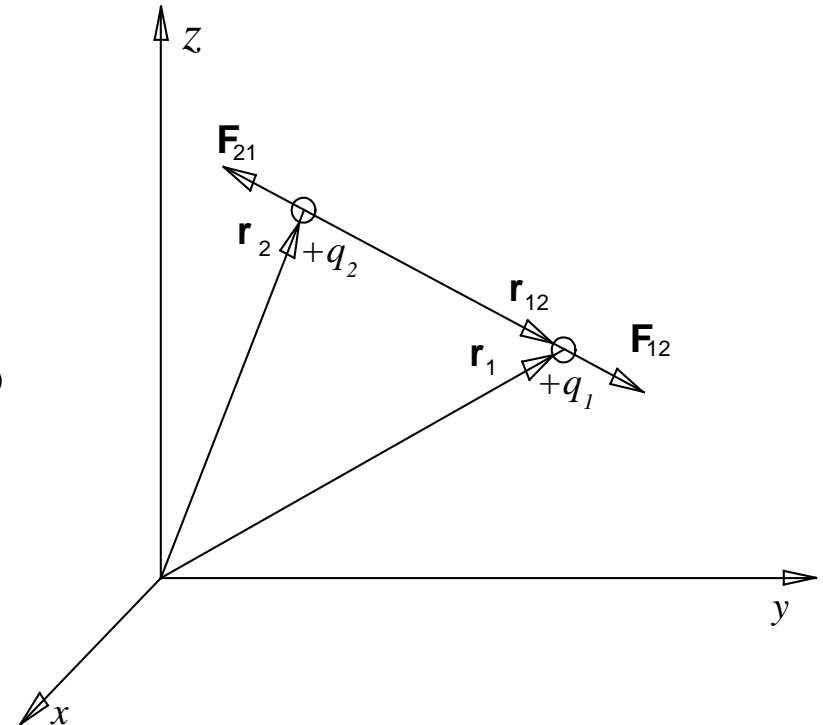
- Ley del Inverso cuadrado (Coulomb)

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 * Q_2}{4\pi \cdot \mu_o \cdot |\mathbf{r}_{21}|^2} \mathbf{r}_{21} \text{ [N]}$$

$\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$ Permeabilidad del vacío
En el sistema SI

\mathbf{F}_{12} es la fuerza que actúa sobre la carga Q_1^* en presencia de la carga Q_2^* .

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es el vector que va desde el punto donde se ubica la carga Q_1^* hasta la carga Q_2^*



versor que se expresa a través de $\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$

La Intensidad de Campo Magnético es

$$\mathbf{H} = \frac{Q^*}{4\pi \cdot \mu_o \cdot |\mathbf{r}|^2} \mathbf{r}$$

La densidad de flujo Magnético en el vacío es

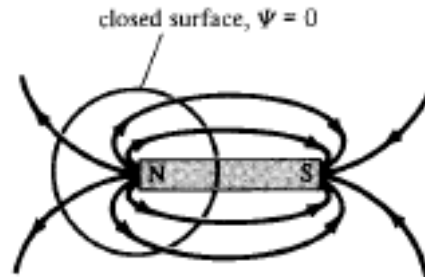
$$\mathbf{B} = \mu_o \cdot \mathbf{H}$$

El flujo Magnético es

$$\phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Todos los imanes constan de dipolos, por lo tanto la Ley de Gauss:

$$\phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



La densidad de flujo Magnético en un material polarizable es:

$$\mathbf{B} = \mu_o \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}$$

La diferencia de potencial Magnética es:

$$V^* = - \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Todos los imanes constan de dipolos, por lo tanto la Ley de Gauss:

$$\phi = \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

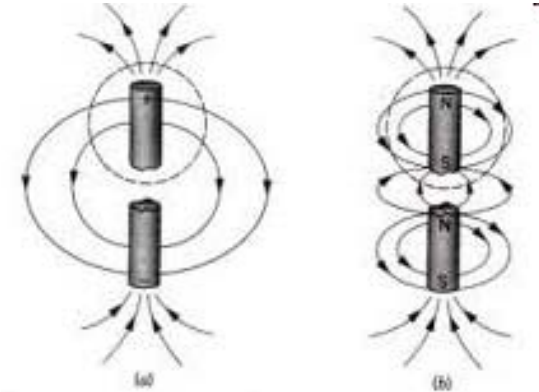
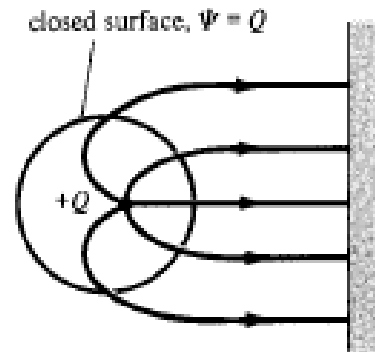
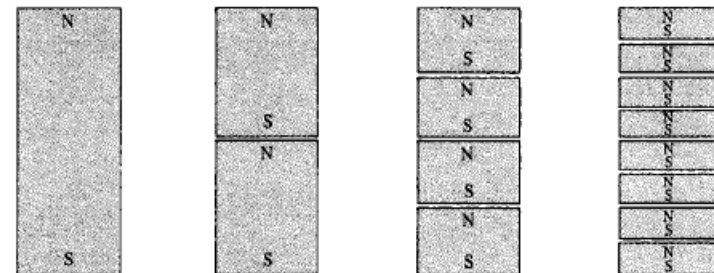
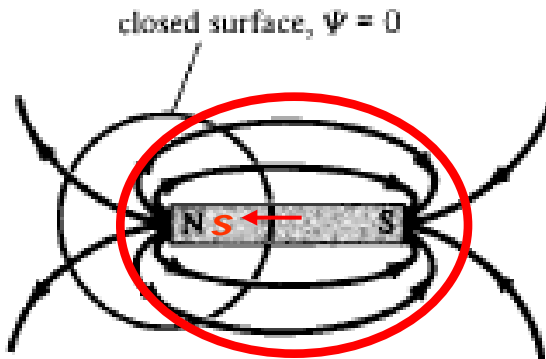


Figura 2 (a) Cuando el dipolo eléctrico de la figura 1a se corta a la mitad, la carga positiva se aísla en una pieza y la carga negativa en la otra. (b) Cuando el dipolo magnético de la figura 1b se corta a la mitad, aparece un nuevo par de polos norte y sur. Nótese la diferencia en los patrones del campo.



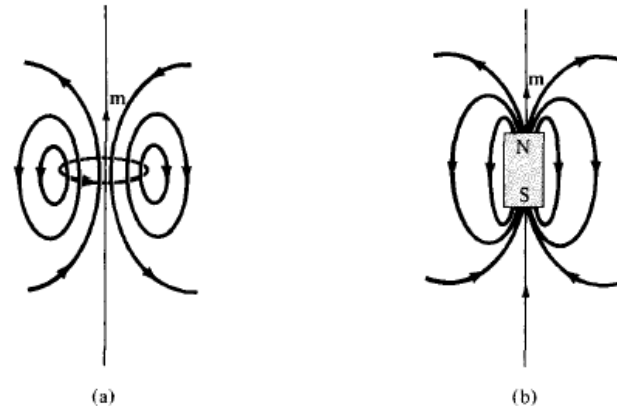
Es imposible separar un polo Norte de un Sur,
CARGAS MAGNÉTICAS LIBRES NO EXISTEN

Hasta aca parecen dos sistemas independientes :
Eléctrostática y Magnétostática , pero...

Se encuentra que los efectos de una pequeña espira de corriente a una suficiente distancia es equivalente al efecto de un dipolo magnético,

La Magnetostática está ligada a las corrientes eléctricas

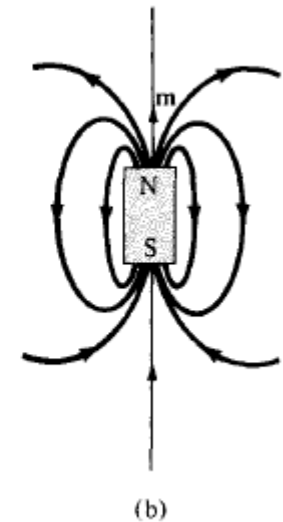
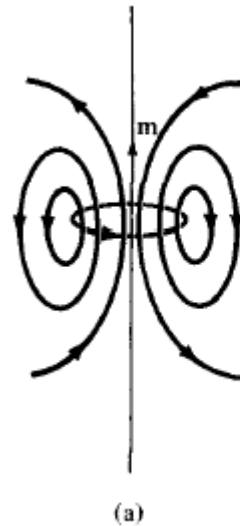
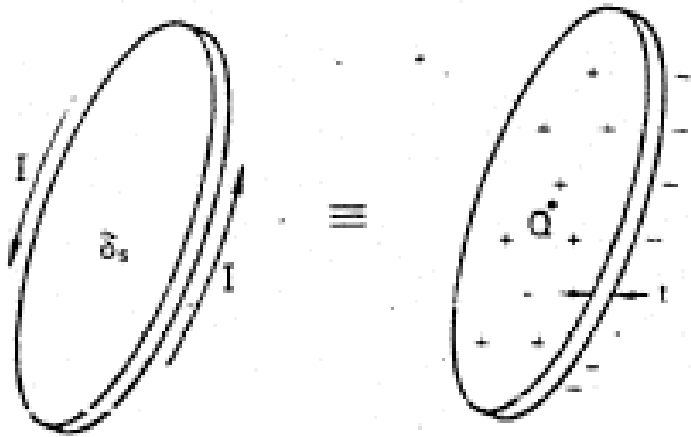
La teoría atómica muestra que el magnetismo se origina a través de cargas móviles.



La intensidad de la corriente de una pequeña espira eléctrica por su área es equivalente a los efectos de un dipolo de momento dipolar $Q^* \cdot t$

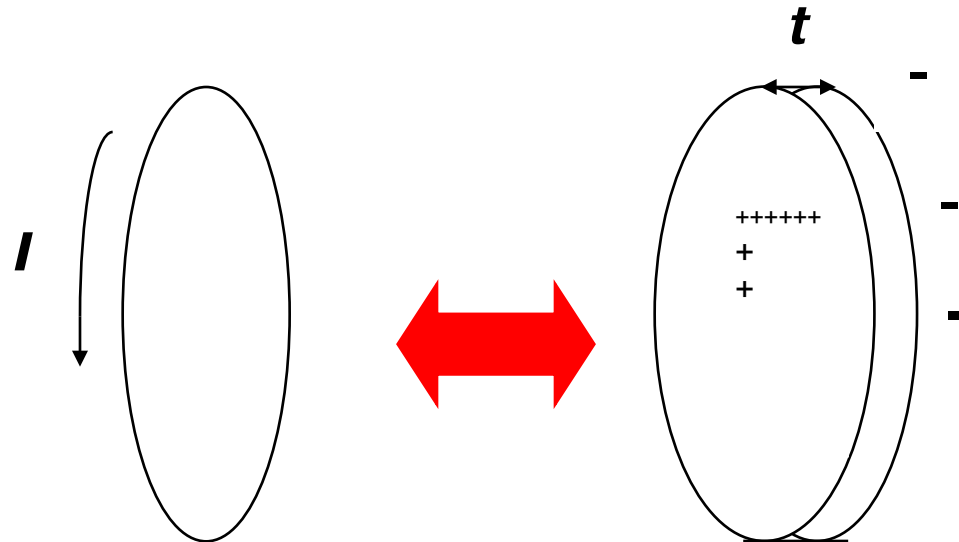
$$I \cdot \delta s \cdot \mu_0 = Q^* \cdot t$$

Equivalencia entre un espira y un dipolo



Equivalencia entre un espira y un dipolo

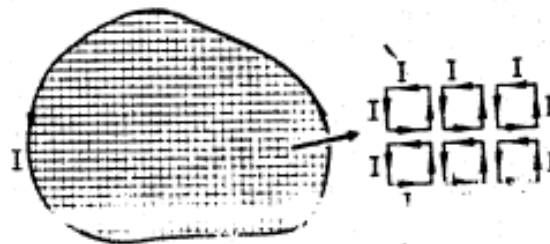
$$I \cdot \vec{A} = \vec{p}$$



La superficie de cara al lector tiene intensidad positiva (+) y la de atrás negativa(-), cuando la corriente circula en sentido contrario a las agujas del reloj.

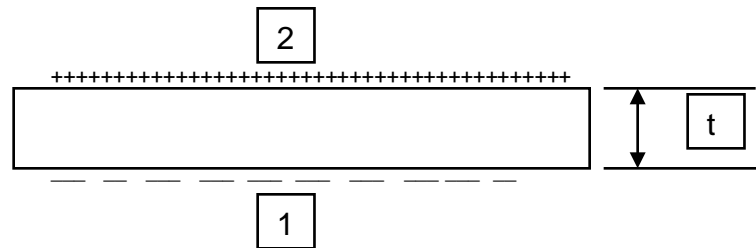
Las unidades se eligen de modo que se logra la igualdad
De los momentos

- Una gran espira recorrida por una corriente puede dividirse en un gran número de pequeñas espiras y cada pequeña espira se sustituye por un dipolo magnético; el resultado es una doble capa de intensidades de polos magnéticos, en un lado positiva y en otro negativa a tal distribución se la llama "Hoja Magnética"
- La hoja magnética no necesariamente debe ser plana, puede tener cualquier forma, siempre que su perímetro coincida con el camino de la corriente.,
- La estructura interna de una hoja magnética es diferente a una *"Espira de Corriente"* pero los efectos magnéticos externos son los mismos.



Hoja Magnética

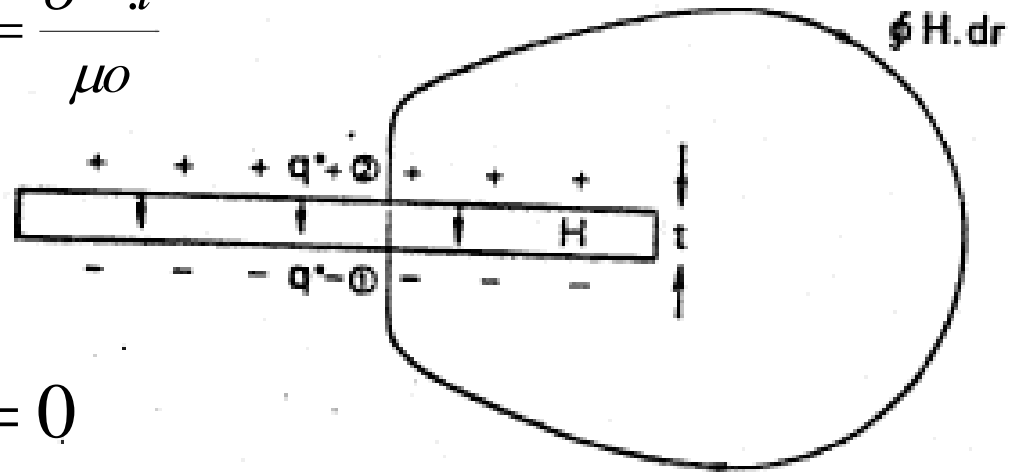
- La relación entre la intensidad de campo **H** y la corriente estacionaria **I** (ley de Ampere) puede obtenerse a partir de la hoja magnética: examinemos el potencial magnético en torno a una **Hoja Magnética**



Si la densidad superficial de dipolos es σ^* y el espesor de la placa **t**, se puede asumir un campo **H** aproximadamente constante dentro de la placa de valor $H = \sigma^* / \mu_0$

La diferencia de potencial entre las superficies de la hoja es

$$V_2^* - V_1^* = - \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot t = \frac{\sigma^* \cdot t}{\mu_0}$$



Pero en la Hoja: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$

Pues para campos Conservativos, donde el sistema depende de fuentes de divergencia, ley inverso con el cuadrado de r . Esto significa que el trabajo efectuado por el polo unidad al atravesar la hoja se recobra por el polo unidad al recorrer el exterior de la hoja

El trabajo efectuado al pasar **en torno a la espira recorrida** por corriente I , por la parte exterior es igual al del caso de la hoja magnética:

$$V_2^* - V_1^* = H \cdot t = \frac{\sigma^* \cdot t}{\mu_0}$$

y usando la relación $I \cdot \delta S \cdot \mu_0 = Q^* \cdot t$,

$$I = Q^* \cdot t / (\delta S \cdot \mu_0) = \sigma^* t / \mu_0$$

$$H \cdot t = \frac{\sigma^* \cdot t}{\mu_0} = \frac{Q^* \cdot t}{\delta S \cdot \mu_0} = I$$

El trabajo efectuado al atravesar la Espira no existe pues no hay espesor y por lo tanto (1)=(2).

POR LO TANTO EN LA ESPIRA

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

FMM: FUERZA MAGNETO MOTRIZ DE LA CORRIENTE
LEY de AMPER

El trabajo se efectúa al recorrer en torno a un circuito cerrado abrazando la corriente, este valor de trabajo por unidad de carga magnética no tiene un valor único en cada punto

$$V_2^* = V_1^* + nI$$

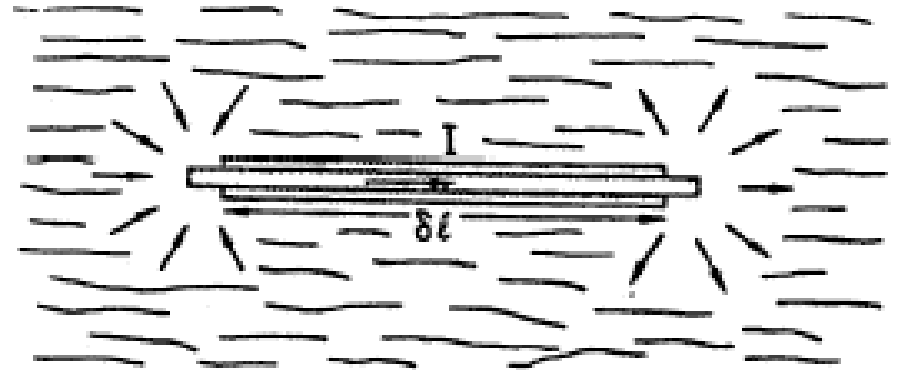
La energía magnética no puede ser energía potencial como la de los sistemas electrostáticos, en realidad es energía cinética o de movimiento de cargas.

La noción de diferencia de potencial magnético debe restringirse a problemas donde no sea posible rodear completamente una corriente, en estos lugares puede usarse la soluciones de los campos usando Laplace.

La ecuación de Ampere encontrada $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$

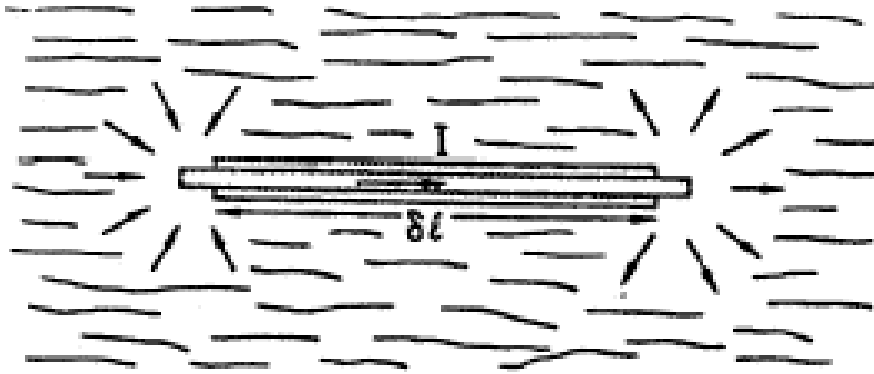
Puede usarse para obtener la **ecuación de un elemento de corriente**

Un elemento con una funda aislante sumergido en un fluido conductor y entonces podrá circular una corriente que entre por un extremo y salga radialmente por el otro extremo

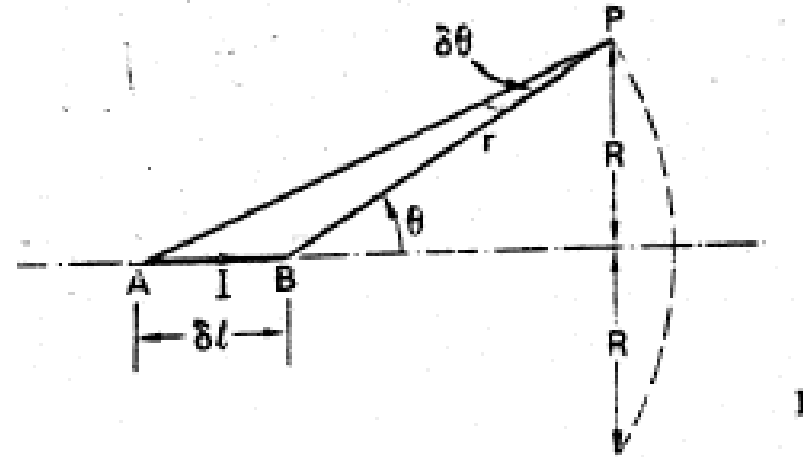


Podrían colocarse porciones tales que cada elemento se concatene con el próximo formando un circuito cerrado y el fluido conductor podría suprimirse. Así el fluido conductor no entra en ninguna ecuación . Su introducción solo facilita el cálculo de la contribución de cada elemento del circuito, este fluido fue propuesto por Heavside .

CAMPO MAGNÉTICO. Ley de Biot y Savart



$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{encerrada}}$$



Para calcular \mathbf{H} producido por el elemento de corriente en el punto \mathbf{P} , tenemos que evaluar cual es la fracción de corriente del elemento $\delta \mathbf{l}$ que atraviesa el casquete esférico.

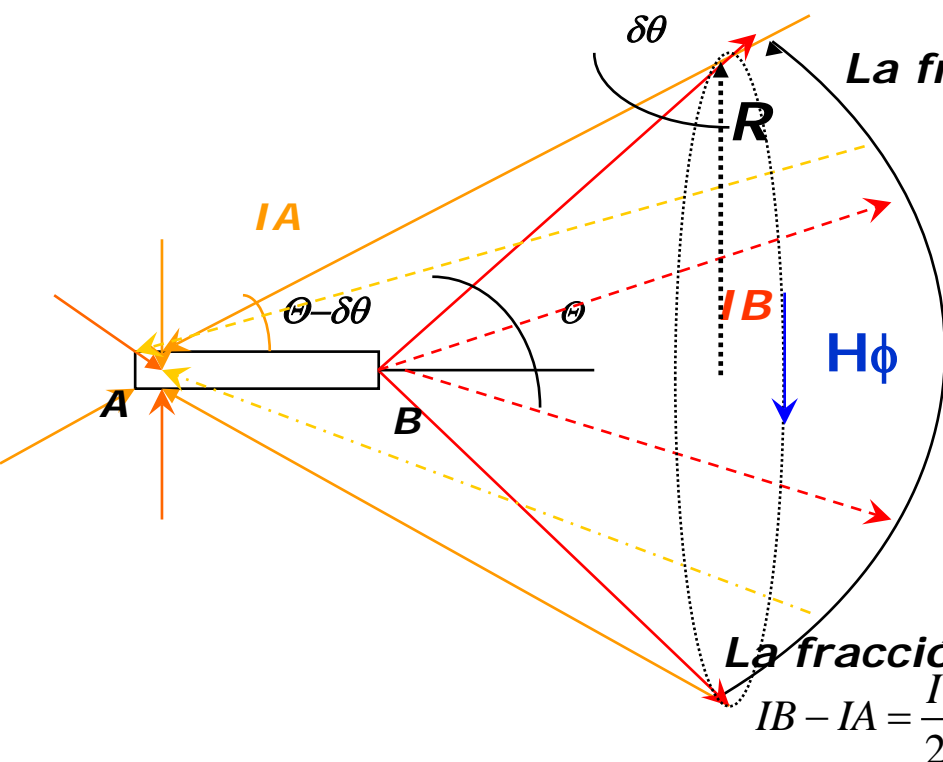
La corriente I entra por A y sale por B

$$\frac{I}{4\pi r^2} = J$$

Densidad de corriente

$$2\pi r^2 [1 - \cos(\theta)]$$

Superficie del casquete



La fracción de I que sale del casquete

$$IB = \frac{I \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} [1 - \cos(\theta)]$$

La fracción de I que entra al casquete

$$IA = \frac{I \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} [1 - \cos(\theta - \delta\theta)]$$

La fracción de I neta que atraviesa el casquete:

$$IB - IA = \frac{I}{2} [1 - \cos(\theta) - 1 + \cos(\theta - \delta\theta)] = \frac{I}{2} \sin(\theta) \cdot \delta\theta$$

$$IB - IA = \frac{I}{2} [1 - \cos(\theta) - 1 + \cos(\theta) \cdot \cos(\delta\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\delta\theta)] = \frac{I}{2} [\sin(\theta) \cdot (\delta\theta)]$$

$H\phi$ es el campo en la dirección de la coordenada ϕ , por simetría esta componente es constante a lo largo de la trayectoria de la circunferencia de radio R

$$\int_0^{2\pi} H\phi \cdot R \cdot d\phi = H\phi \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = I_{\text{encerrada}} = IB - IA = \frac{I}{2} \sin(\theta) \cdot \delta\theta$$

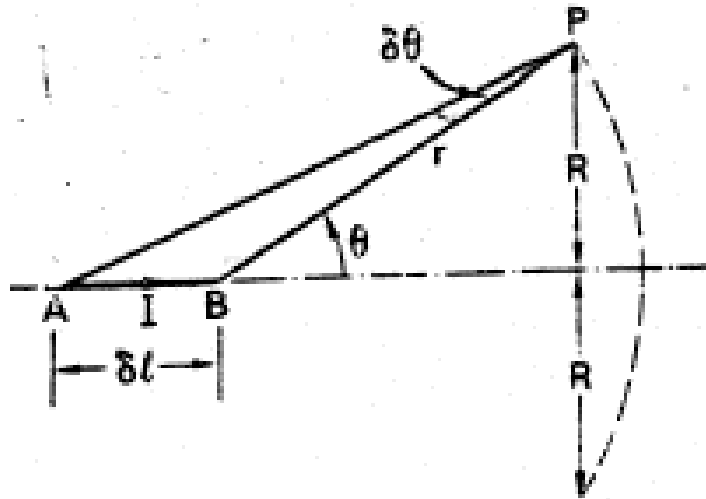
$$\int_0^{2\pi} H\phi \cdot R \cdot d\phi = H\phi \cdot 2\pi \cdot R = \frac{I}{2} \sin(\theta) \cdot \delta\theta$$

$$H\phi = \frac{I}{2} \frac{\sin(\theta) \cdot \delta\theta}{2\pi \cdot R}$$

$$R = r \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{\delta l}{\delta\theta} = \frac{r}{\sin(\theta)}$$

$$\delta\theta = \frac{\delta l}{r} \cdot \sin(\theta)$$



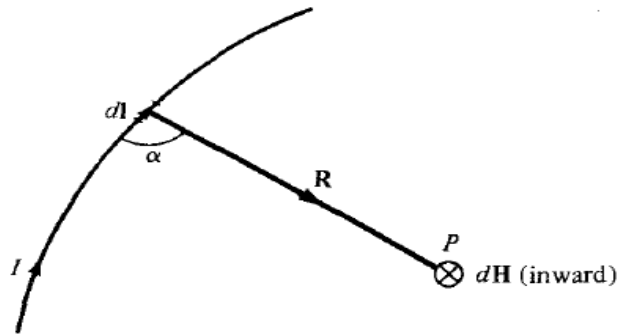
$$H\phi = \frac{I}{2} \frac{\sin(\theta) \cdot \delta l \cdot \sin(\theta)}{2\pi \cdot r \cdot r \cdot \sin(\theta)}$$

$$H\phi = \frac{I \sin(\theta) \cdot \delta l}{4\pi \cdot r^2}$$

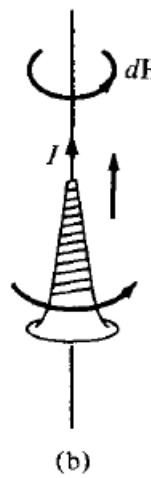
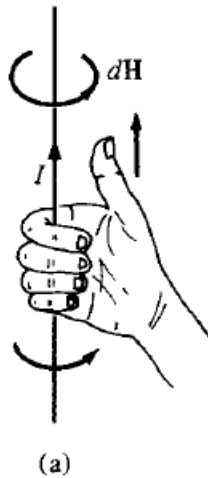
Generalizando la expresión con notación vectorial se tiene:

$$\mathbf{H} = \frac{I \delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi \cdot r^2}$$

Biot y Savart



$$d\mathbf{H} = \frac{I \delta \mathbf{l} \times \mathbf{\hat{r}}}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$



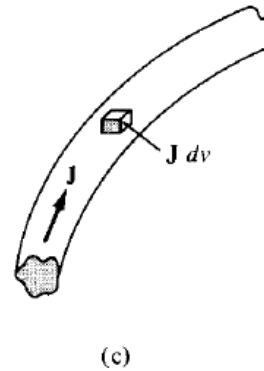
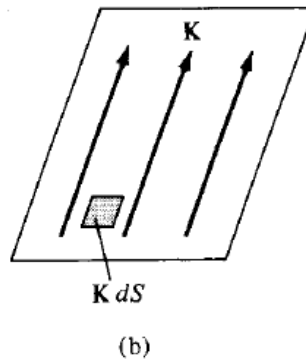
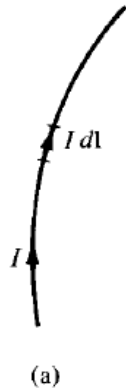
Determinación de la dirección de H

Regla de la mano derecha o del tornillo derecho

Biot y Savart

Campo producido por distintos tipos de densidades de corriente

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4.\pi.r^2}$$



$$d\mathbf{H} = \frac{\mathbf{J} dv \times \hat{\mathbf{r}}}{4.\pi.r^2}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{\mathbf{K} ds \times \hat{\mathbf{r}}}{4.\pi.r^2} = \frac{\mathbf{J} s ds \times \hat{\mathbf{r}}}{4.\pi.r^2}$$

La ecuación de Ampere

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

El campo de un elemento de Corriente

$$\mathbf{H} = \frac{I \delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Aplicamos Teorema de Stoke

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

El campo de un circuito de Corriente

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \oint \nabla \cdot \left(\frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \right) = 0$$

La Fuente de los Campos en corrientes estacionarias

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

El campo B no tiene divergencia, se puede definir como el rotor de un vector, denominado Potencial vector magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{Laplaciano} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Ecuación diferencial del vector Potencial magnético

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

En magnetostática la div (A) se adopta igual a cero

La Ecuación vectorial estará compuesta por las tres componentes

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial^2 z} = -\mu_0 J_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial^2 z} = -\mu_0 J_y$$



$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 z} = -\mu_0 J_z$$

La Ecuación es análoga a la de potencial escalar eléctrico para cada componente

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La solución para esta ecuación es la integral sobre las coordenadas de la fuente

$$U = \iiint_v \frac{\rho}{4.\pi.\epsilon_0.r} dv'$$

La solución para estas ecuaciones serán:

$$Ax = \iiint_v \mu_0 \frac{Jx}{4.\pi.r} dv'$$

Vectorialmente podemos escribir

$$Ay = \iiint_v \mu_0 \frac{Jy}{4.\pi.r} dv'$$

$$\mathbf{A} = \iiint_v \mu_0 \frac{\mathbf{J}}{4.\pi.r} dv'$$

$$Az = \iiint_v \mu_0 \frac{Jz}{4.\pi.r} dv'$$

$$\mathbf{A} = \frac{I\mu_0}{4.\pi.} \int_l \frac{d\mathbf{l}'}{r}$$

Evaluamos si pueden existir mas de un potencial Vector Magnético A

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = 0$$

Por lo tanto $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ es una función irrotacional, es un Gradiente de un escalar

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \psi$$

A difiere de A' en el gradiente de una función escalar

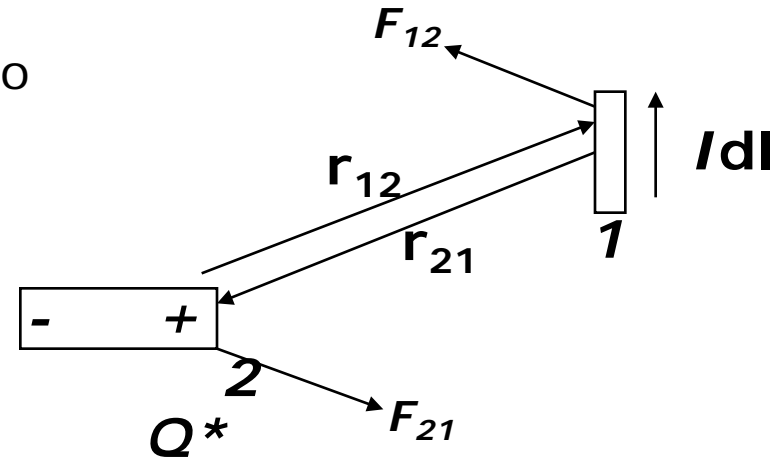
- Interacción entre campos producidos por corrientes y cargas magnéticas de polos "imanes", y entre cargas en movimiento y campos

F_{21} = La Fuerza producida sobre un polo Q^* , por el campo H de un elemento de corriente

$$dF_{21} = dH \cdot Q^* = \frac{Idl \times \hat{r}_{21}}{4\pi \cdot r_{21}^2} Q^*$$

F_{12} = La Fuerza producida sobre un elemento de corriente por un polo Q^* , asociado a un campo B

$$dF_{12} = Idl \times \left(\frac{\hat{r}_{12} \cdot Q^*}{4\pi \cdot r_{12}^2} \right) \rightarrow B$$



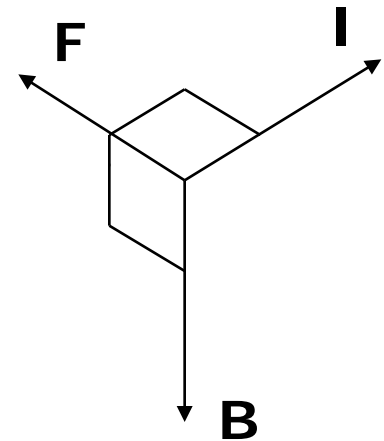
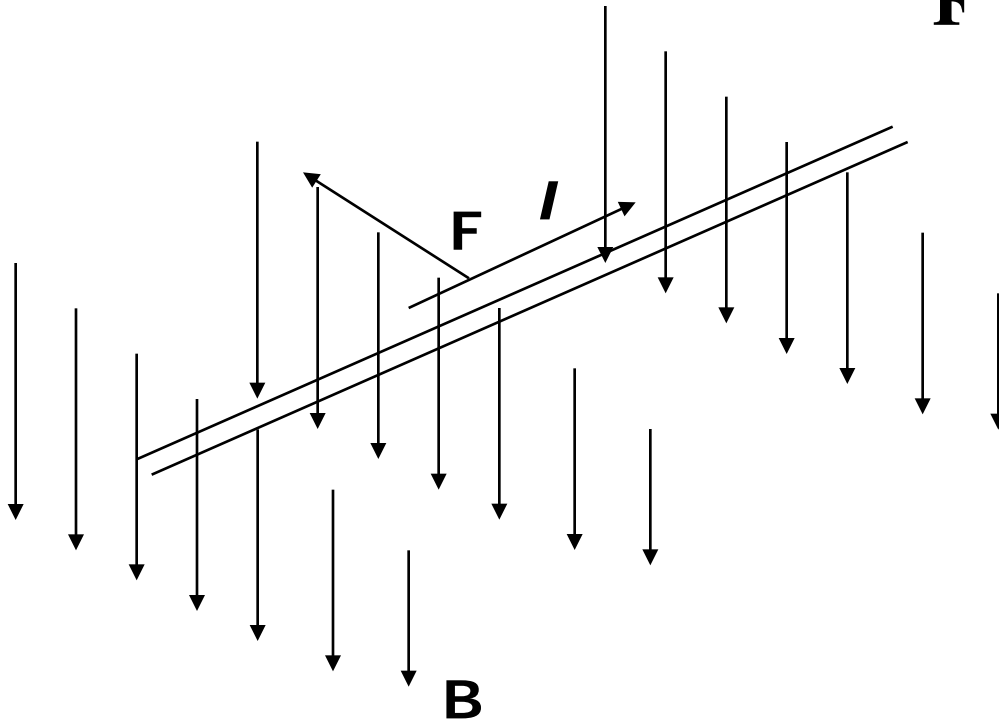
$$dF_{12} = Idl \times B$$

- Fuerza en un elemento de corriente en un campo magnético

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Fuerza en un conductor de longitud \mathbf{L} con corriente en un campo magnético \mathbf{B}

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

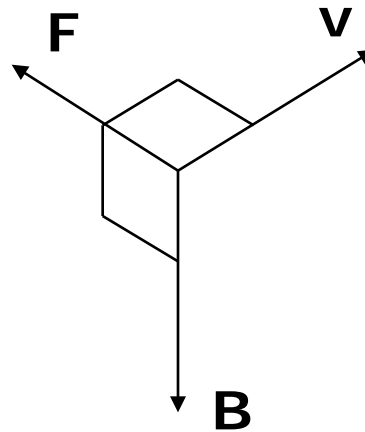


Un elemento de corriente puede considerarse como una carga en movimiento

Fuerza en una carga eléctrica moviéndose a velocidad \mathbf{v} en un campo \mathbf{B}

$$I d\mathbf{l} = q\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Fuerza sobre una carga eléctrica en movimiento

Aparece una nueva fuerza que se suma a la del campo eléctrico

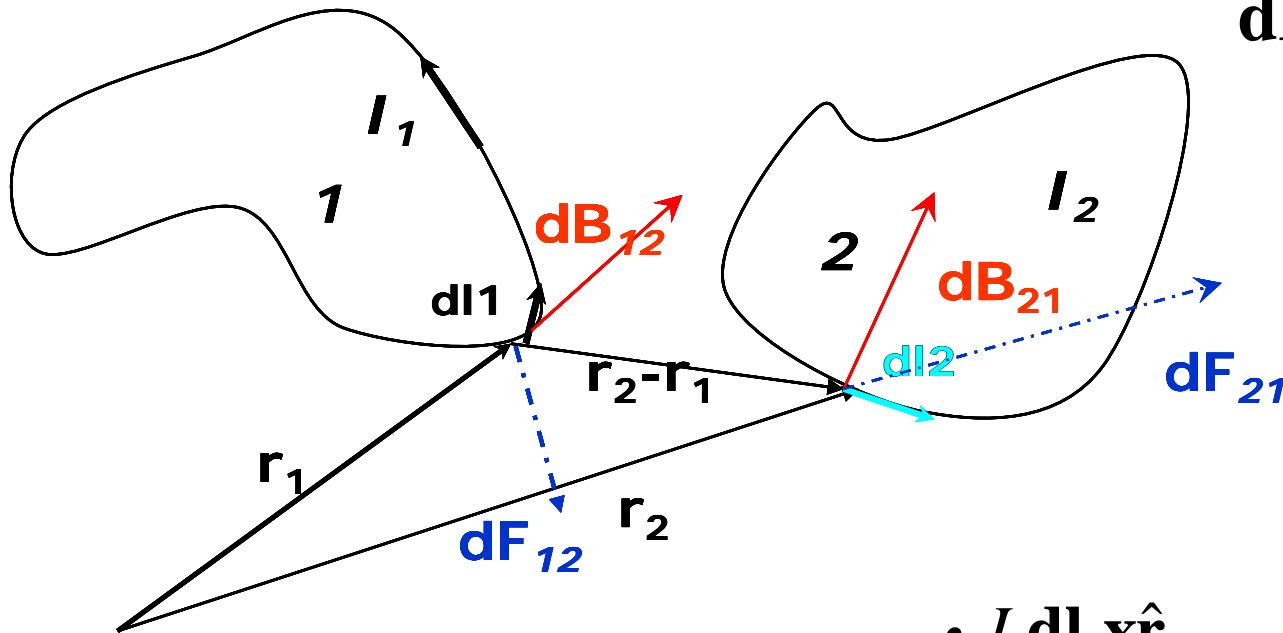
Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Dos espiras de corrientes 1 y 2 ejercerán entre ellas una Fuerza de acuerdo con los resultados anteriores. La Fuerza sobre la espira 2 es:

$$d\mathbf{B}_{21} = \mu_0 \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{21}}{4.\pi.r_{21}^2}$$

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_{21}$$



El campo para un r_2 fijo

$$\mathbf{B}_{21} = \mu_0 \oint_1 \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{21}}{4.\pi.r_{21}^2}$$

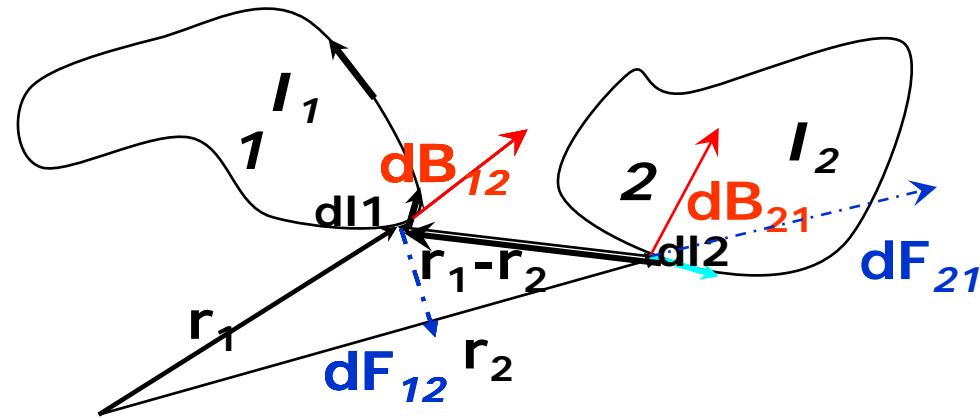
La fuerza sobre la espira 2

$$\mathbf{F}_{21} = \mu_0 \oint_2 \oint_1 \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{21})}{4.\pi.r_{21}^2}$$

La Fuerza sobre la espira 1 es:

$$d\mathbf{B}_{12} = \mu_0 \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{4.\pi.r_{12}^2}$$

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_{12}$$



$$\mathbf{B}_{12} = \mu_0 \oint_1 \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{4.\pi.r_{12}^2}$$

El campo para un \mathbf{r}_1 fijo

$$\mathbf{F}_{12} = \mu_0 \oint_1 \oint_2 \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{4.\pi.r_{12}^2}$$

La fuerza sobre la espira 1

Aparentemente en estas expresiones de la fuerza no aparece la simetría de la expresión de Fuerza de Coulomb, donde al intercambiar r_{12} por r_{21} se muestra que F_{12} , es igual a $-F_{21}$

Pareciera que esta expresión viola el principio de acción y reacción. Sin embargo al plantear la Fuerza total de un lazo sobre el otro se está planteando la integral cerrada y esto permite mostrar la simetría de ambas expresiones ...

$$\mathbf{F}_{12} = \mu_0 \oint_1 \oint_2 \frac{I_1 \mathbf{dl}_1 \mathbf{x} (I_2 \mathbf{dl}_2 \mathbf{x} \hat{\mathbf{r}}_{12})}{4\pi r_{12}^2}$$

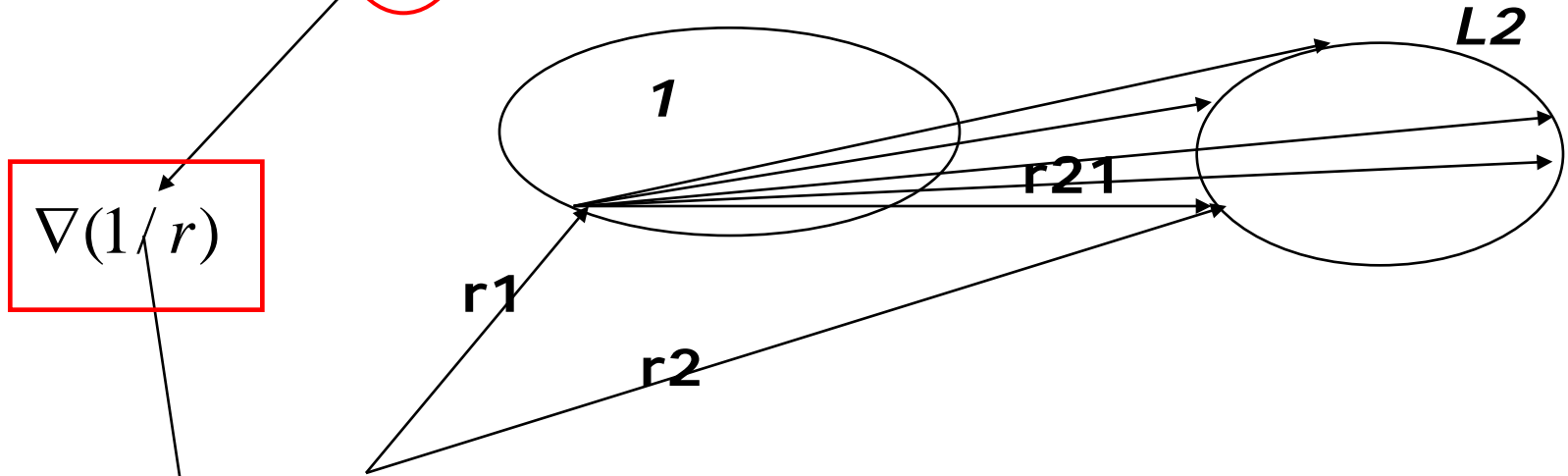
$$\mathbf{F}_{21} = \mu_0 \oint_2 \oint_1 \frac{I_2 \mathbf{dl}_2 \mathbf{x} (I_1 \mathbf{dl}_1 \mathbf{x} \hat{\mathbf{r}}_{21})}{4\pi r_{21}^2}$$

La simetría de estas expresiones puede mostrarse como sigue

$$\mathbf{A} \mathbf{x} (\mathbf{B} \mathbf{x} \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

$$\mathbf{dl}_2 \mathbf{x} (\mathbf{dl}_1 \mathbf{x} \hat{\mathbf{r}}_{21}) = (\mathbf{dl}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{21}) \mathbf{dl}_1 - (\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{dl}_1) \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \mu_0 \oint_2 \oint_1 \frac{(\mathbf{dl}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{21}) \mathbf{dl}_1}{4\pi r_{21}^2} - \mu_0 \oint_2 \oint_1 \frac{(\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{dl}_1) \hat{\mathbf{r}}_{21}}{4\pi r_{21}^2}$$



Es la Integral de un gradiente en un camino cerrado L_2 es cero.

Se fija r_1 y se varía r_2 , la función a integrar es el gradiente de $1/r_2$ tomando de referencia cada r_1

$$\mathbf{F}_{21} = -\mu_0 \oint_2 \oint_1 \frac{(\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{dl}_1) \hat{\mathbf{r}}_{21}}{4\pi r_{21}^2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mu_0 \oint_1 \oint_2 \frac{(\mathbf{dl}_1 \cdot \mathbf{dl}_2) \hat{\mathbf{r}}_{12}}{4\pi r_{12}^2}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

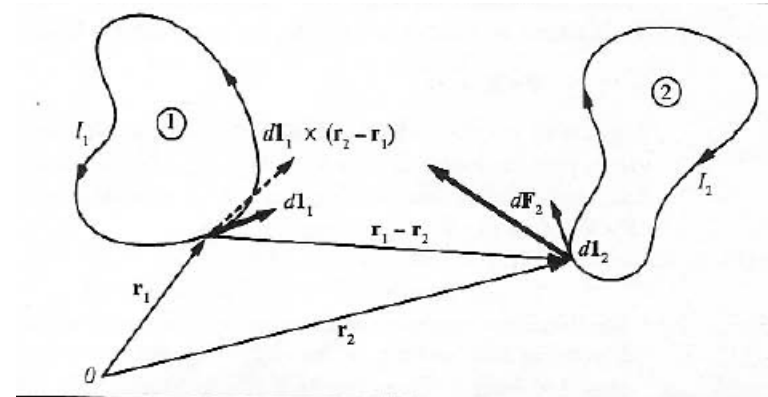
$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

Sin embargo, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ es el gradiente de $-1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ con respecto a \mathbf{r}_2 . Y debido a que el rotacional de un gradiente es cero, se deduce que

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0$$