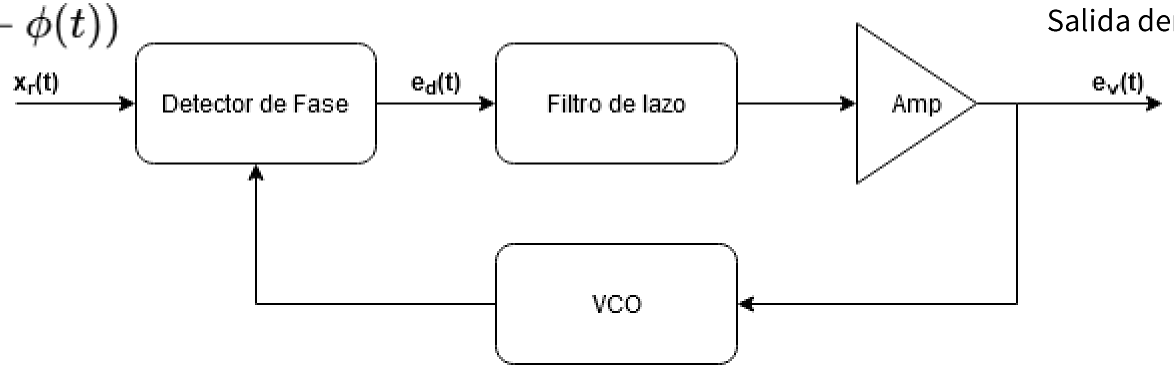
Lazo de Enganche de Fase

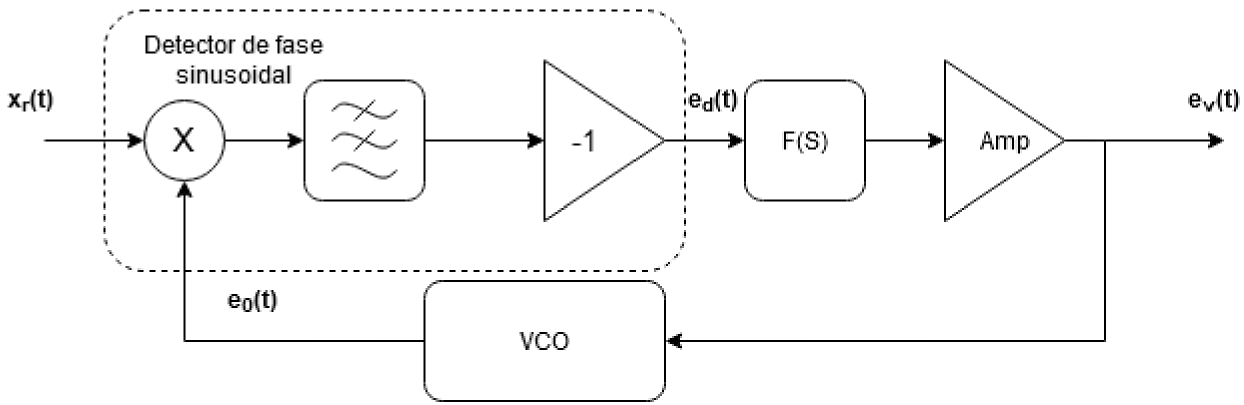
1) El ABC del PLL

PLL genérico, sistema no lineal

$x_r(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$



Detector de fase sinusoidal



$e_0(t) = A_v sen(2pi f_0 t + \theta(t))$

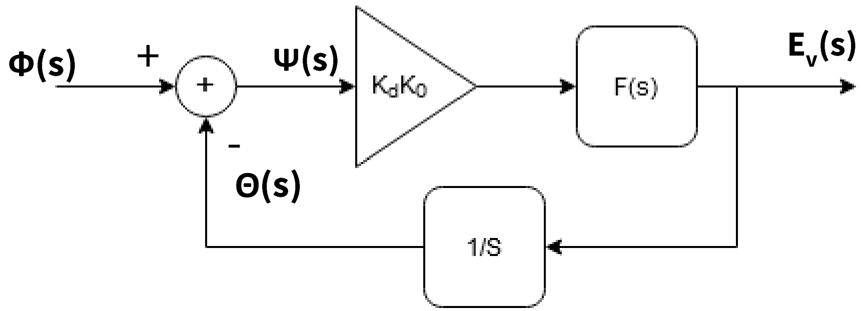
$e_d(t) = \frac{1}{2} A_c A_v sen(\phi(t) - \theta(t))$

$\boxed{K_d = \frac{1}{2} A_c A_v}$

$\theta(t) = K_0 \int^t e_v(\lambda) d\lambda$

Lazo de Enganche de Fase

Aproximación lineal donde suponemos que el error de fase, ψ(t) = ϕ(t)-θ(t), es pequeño



Del esquema vemos la transferencia de lazo cerrado $H(s) = \dfrac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \dfrac{K_d K_0 F(s)}{s + K_d K_0 F(s)}$

Reemplazando para F(s)=1 $H(s) = \dfrac{K_d K_0}{s + K_d K_0}$

Si calculamos la transferencia para el error de fase

$$G(s) = \frac{\Phi(s) - \Theta(s)}{\Phi(s)} = 1 - H(s) = \frac{s}{s + K_d K_0}$$

Lazo de Enganche de Fase

G(s) nos permite conocer el estado estacionario del error de fase $\Psi(s) = \Phi(s) - \Theta(s)$.

$$\Psi_{EE} = \lim_{t\to\infty} \psi(t) = \lim_{s\to 0} s\Psi(s) = \lim_{s\to 0} s\Phi(s)G(s)$$

Si la frecuencia de entrada es exactamente f0, es decir no hay mensaje, no hay desviación de frecuencia

$$\phi(t) = \theta_0,\ \Phi(s) = \frac{\theta_0}{s}$$

$$\boxed{\Psi_{EE} = \lim_{s\to 0} s\ \frac{\theta_0}{s}\ \frac{s}{s+K_d K_0} = 0}$$

Para t suficientemente grande, la diferencia entre la fase esti

Cuando la frecuencia de entrada es distinta a f0, existe una desviación y la fase de entrada se puede m

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta t + \theta_0,\ \Phi(s) = \frac{2\pi f_\Delta}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}$$

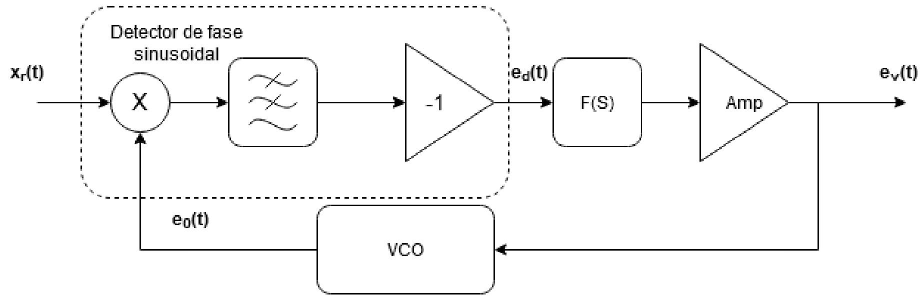
$$\boxed{\Psi_{EE} = \lim_{s\to 0} s\ \left(\frac{2\pi f_\Delta}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}\right)\ \frac{s}{s+K_d K_0} = \frac{2\pi f_\Delta}{K_d K_0}}$$

Vemos en este caso que el error de est

Lazo de Enganche de Fase

Característica no lineal del PLL

En este caso consideramos el modelo no lineal del PLL. La salida del detector de fase no es proporcional



$$e_d(t) = K_d sen(\phi(t) - \theta(t))$$

$$\theta(t) = K_0 \int_{-\infty}^{t} e_v(\lambda) d\lambda$$

$$\theta(t) = K_0 K_d \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\alpha} sen[\phi(\lambda) - \theta(\lambda)]\delta(\alpha - \lambda) d\lambda d\alpha$$

$$\theta(t) = K_d K_0 \int_{-\infty}^{t} sen[\phi(\alpha) - \theta(\alpha)] d\alpha$$

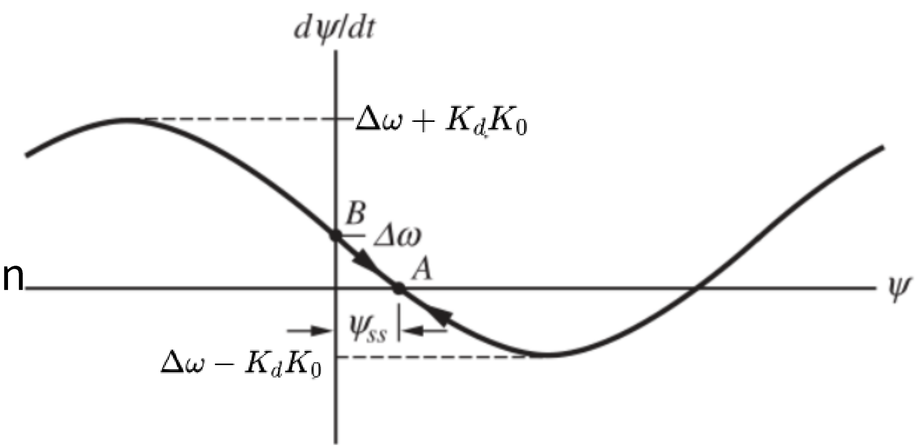
$$\frac{d\theta}{dt} = K_d K_0 sen[\psi(t)]$$

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} = 2\pi f_\Delta - \frac{d\psi}{dt} = \Delta\omega - \frac{d\psi}{dt} = K_0 K_d sen(\psi(t)), \quad t \geq 0$$

Lazo de Enganche de Fase

Característica no lineal del PLL $$\frac{d\psi}{dt} + K_d K_0 sen[\psi(t)] = \Delta\omega$$

Para valores positivos de dψ/dt,
ψ aumenta, y si dψ/dt<0
ψ disminuye, teniendo
al enganche en el punto A.
ψ_{EE} es constante en A y dψ/dt, la desviación
de frecuencia, es nula.



La característica no lineal del PLL nos indica que el enganche de frecuencia solo ocurre si dψ/dt es nula para algún ψ. Entonces para que el enganche suceda, se debe cumplir:

$$\Delta\omega = K_d K_0 sen(\psi_A),\ |\Delta\omega| < K_d K_0$$

Lazo de Enganche de Fase

Ancho de banda equivalente de ruido

Si n(t) es el ruido blanco con amplitud $N_0/2$ a la entrada del PLL, entonces:

$$S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$P_{nout} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} |H(0)|^2 2BW_{ne}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(K_d K_0)^2}{\left(4(\pi f)^2 + (K_d K_0)^2\right)} df = \frac{1}{2\pi} K_d K_0 \tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{K_d K_0}\right) \int_{-\infty}^{\infty}$$

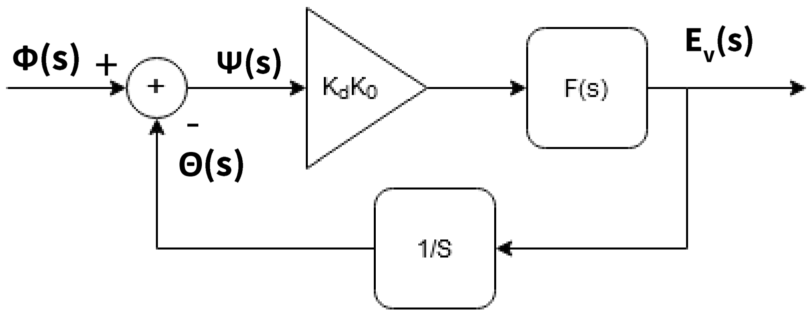
$$\frac{K_d K_0}{2} = |H(0)|^2 2BW_{ne} = 2BW_{ne}$$

$$\boxed{BW_{ne} = \frac{K_d K_0}{4}}$$

Lazo de Enganche de Fase

PLL de 2do orden

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P\left(s + \frac{K_I}{K_P}\right)}{s}$$



$$H(s) = \frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{K_d K_0 (K_P s + K_I)}{s\left(s + \frac{K_d K_0 (K_P s + K_I)}{s}\right)} = \frac{K_d K_0 K_P \left(s + \frac{K_I}{K_P}\right)}{s^2 + K_d K_0 K_P s + K_d K_0 K_I}$$

$$G(s) = \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} = 1 - H(s) = \frac{s2}{s^2 + K_d K_0 K_P s + K_d K_0 K_I}$$

Lazo de Enganche de Fase

Error de fase en estado estacionario

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta t \; + \; \theta_0, \;\; \Phi(s) = \frac{2\pi f_\Delta}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}$$

$$\Psi_{EE} = \lim_{s\to 0} s\Phi(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2\pi f_\Delta}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}\right) \frac{s^2}{s^2+K_dK_0K_Ps+K_dK_0K_I}$$

$$\boxed{\Psi_{EE} = \lim_{s\to 0} \; \frac{(2\pi f_\Delta s+\theta_0 s^2)}{s^2+K_dK_0K_Ps+K_dK_0K_I} = 0}$$

Lazo de Enganche de Fase

¿Qué sucede cuando a la entrada de este PLL de 2° orden tenemos una variación uniforme de frecuenc

$$\frac{df}{dt} = f^{\cdot} = cte,\ f(t) = f^{\cdot}t$$

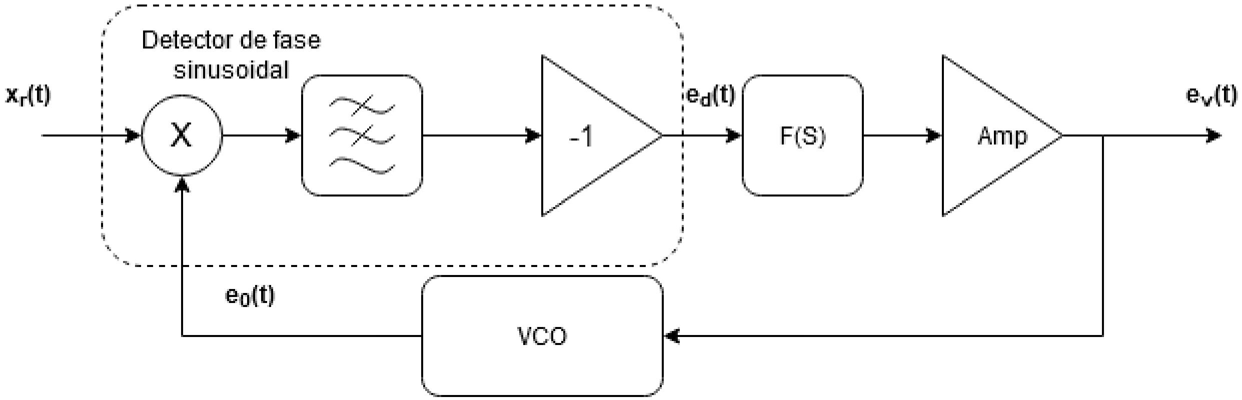
$$\phi(t) = 2\pi f^{\cdot}t^2,\ \Phi(s) = \frac{2\pi f^{\cdot}}{s^3}$$

$$\Psi_{EE} = \lim_{s\to 0} s\Psi(s) = \lim_{s\to 0} s\Phi(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\ \frac{2\pi f^{\cdot}}{s^3}\ \frac{s^2}{s^2+K_dK_0K_ps+K_dK_0K_I}$$

$$\boxed{\Psi_{EE} = \frac{2\pi f^{\cdot}}{K_dK_0K_I}}$$

Lazo de Enganche de Fase

Consideremos la no linealidad del PLL



$$\psi(t) = \phi(t) - \theta(t) = \phi(t) - K_0 \int_{-\infty}^{t} e_v(\lambda)d\lambda$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2} - K_0\ \frac{de_v}{dt}$$

$$e_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_d(\tau)f(t-\tau)d\tau = K_d \int_{-\infty}^{\infty} sen(\psi(\tau))(K_p\delta(t-\tau) + K_I)d\tau$$

$$= K_d\left\{K_p sen(\psi(t)) + K_I \int_{-\infty}^{\infty} sen(\psi(\tau))d\tau\right\}$$

$$\frac{de_v}{dt} = K_d\left\{K_p \cos(\psi(t))\ \frac{d\psi}{dt} + K_I sen(\psi(t))\right\}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = 2\pi f^{\cdot} - K_0K_pK_d\ \frac{d\psi}{dt}\cos(\psi) - K_0K_IK_d sen(\psi),\ K_p\ \frac{d\psi}{dt} << K_I$$

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dt} \approx 2\pi f^{\cdot} - K_0K_IK_d sen(\psi)}$$

Lazo de Enganche de Fase

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} \approx 2\pi f^{\cdot} - K_0 K_I K_d sen(\psi)$$

$$\boxed{f^{\cdot} < \frac{K_0 K_I K_d}{2\pi}}$$