Síntesis de Dipolos

REALIZABILIDAD

DESARROLLO DE FOSTER

FORMAS CANÓNICAS DE FOSTER Y CAUER

Características generales

- La *síntesis* es el proceso de obtener un modelo de un sistema que, actuando sobre las variables de entrada, las transforme en las de salida, dentro de un margen de tolerancia.
- En este contexto, para denominar indistintamente a impedancias y admitancias, se las denominará *inmitancias*.
- En particular, las inmitancias terminales (funciones que vinculan tensiones y corrientes en un mismo punto de la red) se las denomina *inmitancias de punto impulsor.*
- En general, se parte de una expresión algebraica de una inmitancia en el dominio de Laplace, aunque también se puede partir de señales de entrada y salida en el dominio del tiempo, dada la dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia.
- A partir de dicha expresión, y en base al estudio de sus propiedades, se busca traducirla en estructuras circuitales denominadas *dipolos* o *redes monopuerta*.
- Se tratará de descomponer las funciones inmitancia en elementos simples (L, C o R) dándole a la red obtenida las propiedades deseadas mediante la agrupación adecuada de los elementos.

Realizabilidad RLC

- Toda función inmitancia terminal de una red pasiva compuesta por elementos RLC es un cociente de polinomios en s (frecuencia compleja) cuyos coeficientes están determinados por los valores R, L y C del circuito, y por lo tanto son positivos.
  - *Una función inmitancia terminal de una red pasiva RLC es una función racional real, real-positiva.*

- Una función *F*(*s*) es una *función racional real* si y sólo si es una función racional con coeficientes reales.

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} a_j \in \Re \ \forall \ j = 0, \ldots, m \\ b_i \in \Re \ \forall \ i = 0, \ldots, n \end{cases}$$

- Una función *F*(*s*) es una *función real positiva* si y sólo si para cualquier valor de la variable compleja con parte real no-negativa, el valor de la función también tiene parte real no-negativa.

$$\operatorname{Re}\left[F(s)\right] \geq 0 \quad \forall \, s \, / \, \operatorname{Re}[s] \geq 0$$

Estas condiciones necesarias y suficientes para una función real positiva tienen su corolario alternativo:

$$\operatorname{Re}\left[F(j\omega)\right] \geq 0 \quad \forall \, \omega \in \Re$$

La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el semiplano derecho cerrado

Todos los polos de F(s) están en el semiplano izquierdo cerrado, y los polos que haya en el eje imaginario son simples y sus residuos asociados son reales y positivos

Inmitancias RLC de punto impulsor. Propiedades

- Toda función de inmitancia terminal de una red *RLC* es una función real positiva y, antes de proceder a la síntesis, debe analizarse si es real positiva (condición de realizabilidad).
- Es posible enunciar las siguientes propiedades:
  - Son funciones racionales en *s*, con coeficientes reales y positivos.
  - Los grados del numerador y denominador no difieren en más de uno.
  - Su parte real (evaluada sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja *s*) es no negativa.
  - No tienen polos ni ceros en el semiplano derecho de la variable frecuencia compleja *s*, y los que están sobre el eje imaginario son simples.
  - Los residuos en los polos sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja *s*, son reales y positivos.
  - Las derivadas en los ceros, evaluadas sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja *s*, son reales y positivas (consecuencia de la propiedad anterior).

Realizabilidad LC. Propiedades

- Las inmitancias realizables *LC* son un subconjunto de las inmitancias realizables *RLC.* Por lo tanto, las condiciones de realizabilidad *LC* son algo más restrictivas que las de realizabilidad *RLC*

- Una función de inmitancia *F*(*s*) es *realizable LC* si y sólo si se dan las siguientes condiciones:
  - *F*(*s*) es una *función racional real*
  - La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el eje imaginario. Con lo cual F(s) es una *función impar*.

$$\mathrm{Re}\left\{F\left(j\omega\right)\right\} = \mathrm{Par}\left\{F\left(\omega\right)\right\} = 0 \quad \forall \omega \in \Re$$

  - Todos los polos de F(s) están en el eje imaginario, son simples y sus residuos asociados son reales y positivos

Propiedades de inmitancias LC de punto impulsor

- Son funciones racionales reales, impares en *s*, con coeficientes reales y positivos.
- Cuando *s* tiende a infinito, se comportan como *ks* o *k/s.*
- Su parte real es nula en todo el eje imaginario, o sea: *Re[F(jω)]=0*
- Sus polos y ceros están sobre el eje imaginario.
- Todos sus polos y ceros son simples, conjugados dos a dos, y sus residuos son reales y positivos.
- Solo pueden tener en el origen o en el infinito, un polo simple o un cero simple (consecuencia de la propiedad anterior).

Teorema de Foster

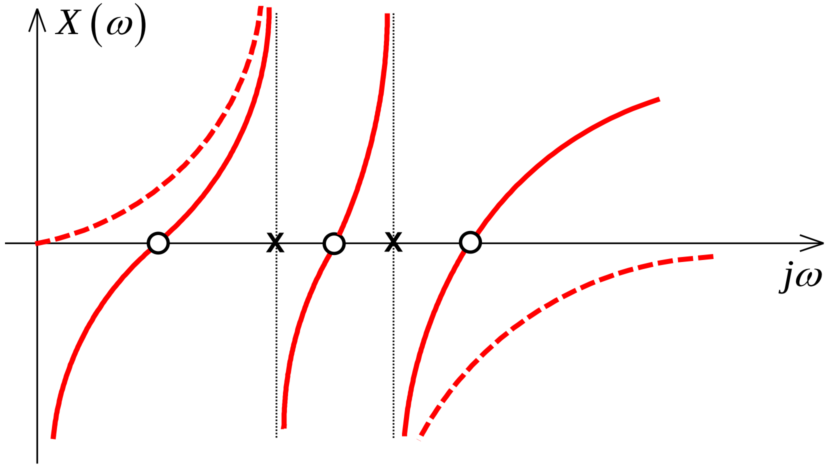
- En base a que todos los polos y ceros deben estar sobre el eje imaginario, deben ser simples, conjugados de a dos y con residuos reales y positivos, es posible desarrollar la función de la siguiente manera:

$$F(s)=\frac{K_0}{s}+\frac{K_1}{s-j\omega_1}+\frac{K_1^*}{s+j\omega_1}+\frac{K_2}{s-j\omega_2}+\frac{K_2^*}{s+j\omega_2}+\dots\dots\dots+K_\infty s$$

Agrupando los polos complejos conjugados:

$$F(s)=\frac{K_0}{s}+\frac{2K_1 s}{s^2+\omega_1^2}+\frac{2K_2 s}{s^2+\omega_2^2}+\dots\dots\dots+K_\infty s$$

- La gráfica de estas funciones en función de *jω,* o *curvas de reactancia o susceptancia,* tienen la siguiente forma:



El Teorema de Foster expresa que una función de inmitancia terminal LC (de entrada o salida), queda determinada por sus polos y ceros, excepto un factor de escala H

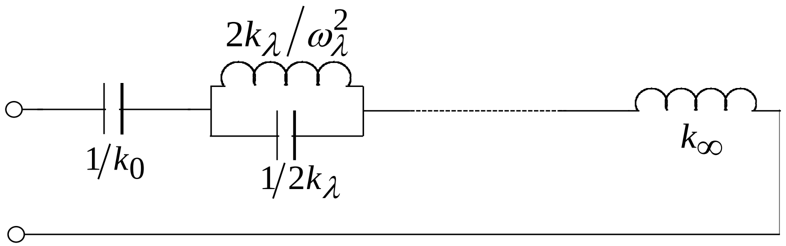
Síntesis de dipolos – Foster 1 y 2

- La representación dada por Foster para las funciones reales positivas impares resulta:

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \sum_\lambda \frac{2k_\lambda s}{s^2 + \omega_\lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{k_0} s} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2k_\lambda} s + \frac{1}{\frac{2k_\lambda}{\omega_\lambda^2} s}} + k_\infty s$$

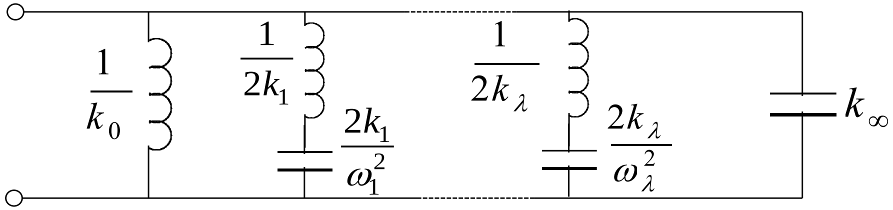
- Esta forma de realizar funciones se basa en expresar en la forma de Foster la impedancia o admitancia terminal dada.
  - *Primera Forma Canónica* o *Foster I:* desarrollo en forma de Foster de la impedancia terminal.
  - *Segunda Forma Canónica* o *Foster II:* desarrollo en forma de Foster de la admitancia terminal.

- Es posible obtener entonces dos topologías de realización, en función de la forma utilizada.



Primera Forma Canónica o *Foster I*

Impedancia terminal

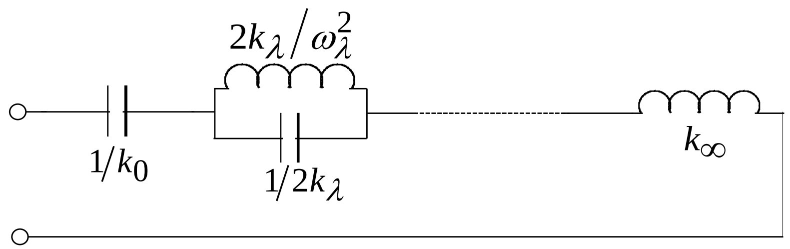


Segunda Forma Canónica o *Foster II*

Admitancia terminal

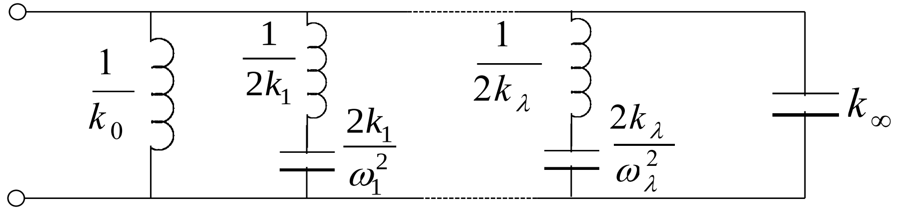
Síntesis de dipolos – Foster 1 y 2

- Es posible obtener entonces dos topologías de realización, en función de la forma utilizada.



Primera Forma Canónica o Foster I

Impedancia terminal



Segunda Forma Canónica o Foster II

Admitancia terminal

- Las formas obtenidas se denominan formas canónicas porque tienen el número mínimo de elementos en su realización.
- El número mínimo de elementos, para síntesis de dipolos LC, resulta igual a:
  - El orden de *F(s)*
  - El número total de polos simples de *F(s)*
  - El número total de ceros simples de *F(s)*
  - El número de frecuencias críticas finitas + 1

Síntesis de dipolos – Foster 1 y 2

Se desea sintetizar un dipolo LC mediante Foster II cuya función de impedancia es:

$$Z(s)=\frac{s(s^2+4)}{(s^2+2)(s^2+9)}$$

<u>Número de elementos de las realizaciones canónicas:</u>

- Grado de z(s) (la mayor potencia de *s*, ya sea en el numerador o en el denominador): 4
- 1 + Número de frecuencias de singularidades finitas, excluído el origen: 1 + 3 = 4
- Número de ceros simples, incluído el eventual en ∞: s=0; s=+j2; s=-j2; s= ∞. 4
- Número de polos simples, incluído el eventual en ∞: s=+j√2; s=-j √2; s=+j3; s=-j3. 4

<u>Forma canónica. Foster II.</u>

Como Foster I es para sintetizar impedancias y Foster II es para sintetizar admitancias, directamente se trabaja sobre la inversa de la expresión dada para Z(s)

$$y(s)=\frac{k_0}{s}+\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{2k_\lambda s}{s^2+\omega_\lambda^2}+k_\infty s \qquad y(s)=\frac{1}{z(s)}=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

Ya se podría adelantar la topología que tendrá el dipolo, al tener polos en cero y en infinito, y con 1 par de polos conjugados de frecuencias finitas.

Síntesis de dipolos – Foster 1 y 2

Se desea sintetizar un dipolo LC cuya función de impedancia es:

$$Z(s)=\frac{s(s^2+4)}{(s^2+2)(s^2+9)}$$

En el polo en el orígen

$$k_0=\lim_{s\to 0} s\,y(s)=\lim_{s\to 0} s\,\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}=\frac{9}{2}$$

$$Y_A=\frac{k_0}{s}=\frac{\frac{9}{2}}{s}=\frac{1}{\frac{2}{9}s}$$

En el polo en infinito

$$k_\infty=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}y(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s\,(s^2+4)}=1$$

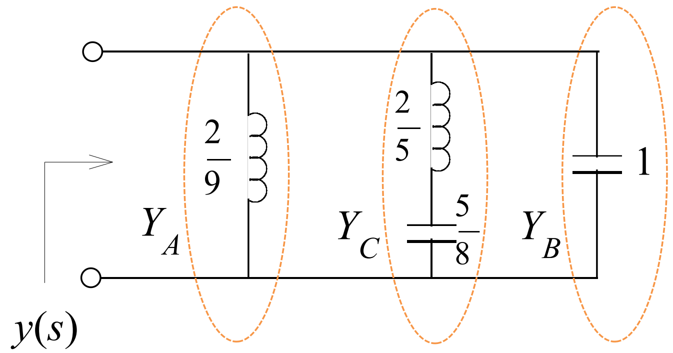
$$Y_B=k_\infty s=1s$$

En el polo en $s=\pm j2$

$$k_1=\lim_{s^2\to -4}\frac{\left(s^2+4\right)}{2s}y(s)=\lim_{s^2\to -4}\frac{(s^2+4)}{2s}\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s\,(s^2+4)}$$

$$=\frac{(-2)\,5}{2\,(-4)}=\frac{5}{4}$$

$$Y_C=\frac{2k_1s}{s^2+4}=\frac{2\frac{5}{4}s}{s^2+4}=\frac{1}{\frac{2}{5}s+\frac{1}{\frac{5}{8}s}}$$



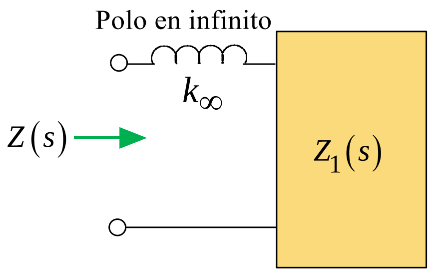
Remoción de un polo en infinito

- Si $F(s)$ es una impedancia de entrada $Z(s)$, la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:

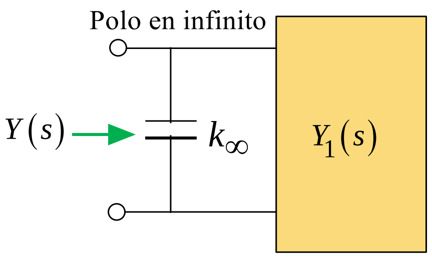
$$Z(s)=Z_1(s)+k_\infty s \quad \Rightarrow \quad Z_1(s)=Z(s)-k_\infty s$$

- Si $F(s)$ es una admitancia de entrada $Y(s)$, la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:

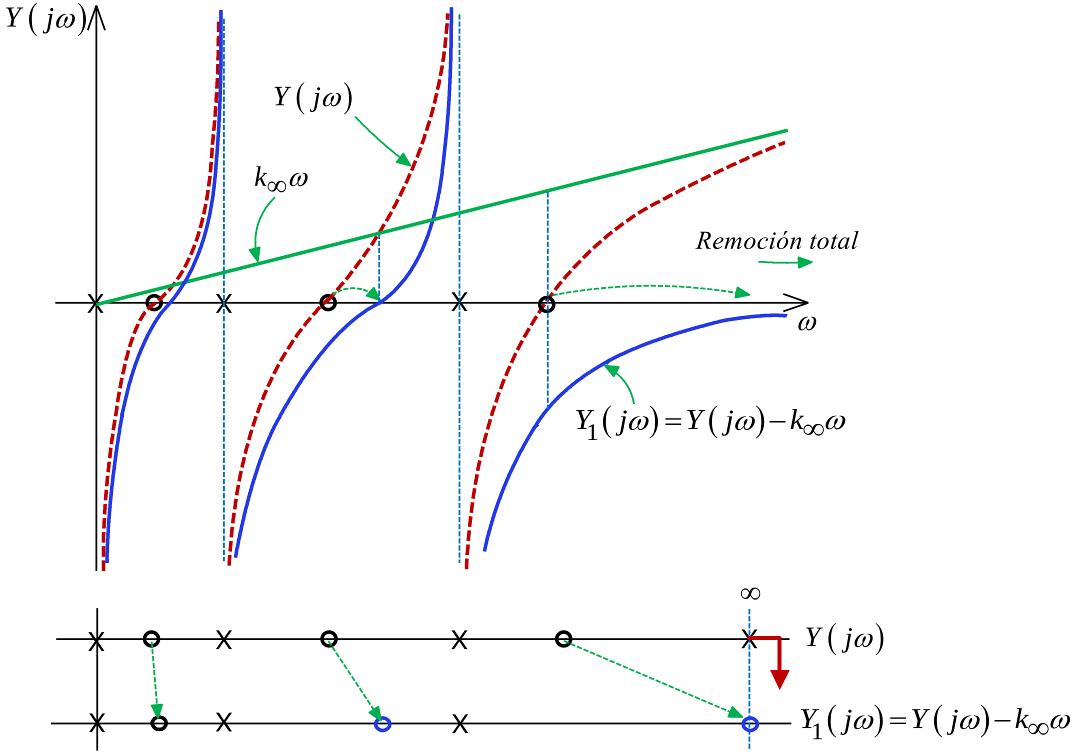
$$Y(s)=Y_1(s)+k_\infty s \quad \Rightarrow \quad Y_1(s)=Y(s)-k_\infty s$$



(a)



(b)



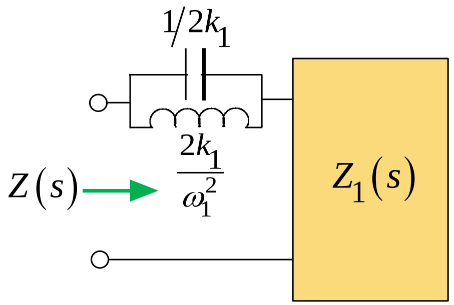
Remoción de un polo finito

- Si $F(s)$ es una impedancia de entrada $Z(s)$, la remoción del polo en s=±jω$_1$ puede realizarse considerando:

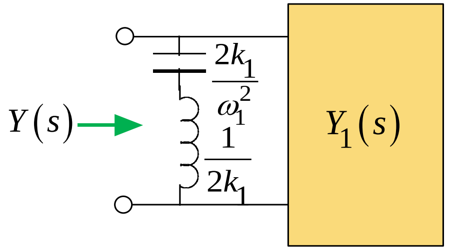
$$Z(s) = Z_1(s) + \frac{2k_1 s}{s^2+\omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad Z_1(s) = Z(s) - \frac{2k_1 s}{s^2+\omega_1^2}$$

- Si F(s) es una admitancia de entrada Y(s), la remoción del polo en s=±jω$_1$ puede realizarse considerando:

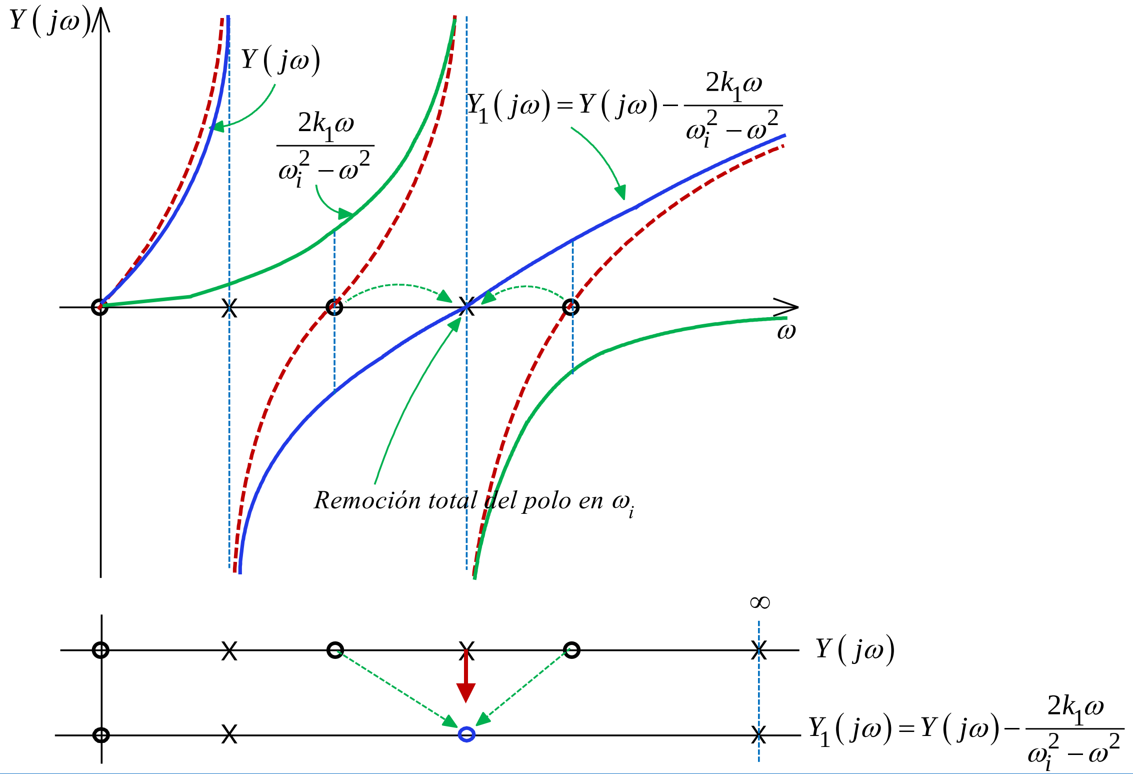
$$Y(s) = Y_1(s) + \frac{2k_1 s}{s^2+\omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = Y(s) - \frac{2k_1 s}{s^2+\omega_1^2}$$



(a)



(b)



Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta

- El desarrollo de Foster abre otra posibilidad para la realización de funciones reales positivas impares, como impedancias o admitancias.
- Toda función racional real, real positiva impar, tiene en el infinito un cero simple o un polo simple. Si la función original tiene un cero simple en infinito, su inversa tendrá un polo en infinito.
- Si F(s) es la instancia en la cual se tiene un polo simple en el infinito, la función resultante al extraer dicho polo es:

$$F_1(s) = F(s) - k_\infty^{(1)} s = \frac{k_0}{s} + \sum_\lambda \frac{2k_\lambda s}{s^2 + \omega_\lambda^2}$$

- La función $F_1(s)$ será también real positiva impar, pero sin el polo en infinito. En efecto, dicha función tendrá un cero allí, por lo que su inversa tendrá un polo el cual también podrá extraerse.

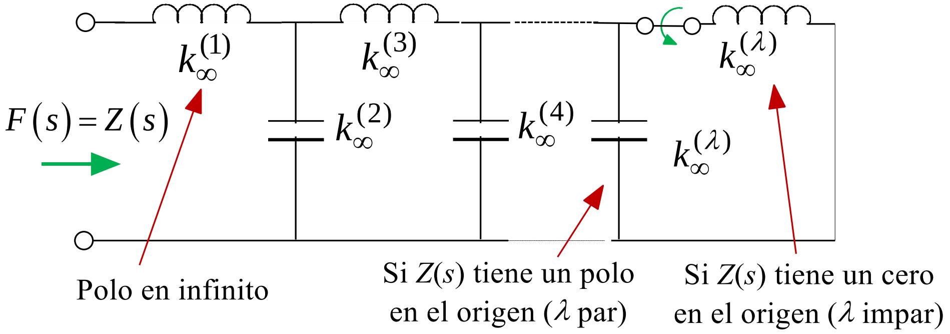
$$F_2(s) = \frac{1}{F_1(s)} - k_\infty^{(2)} s$$

- Generalizando,

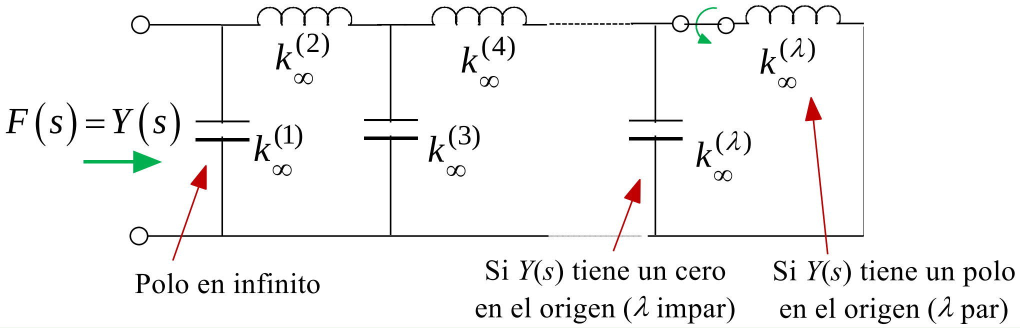
$$F(s) = k_\infty^{(1)} s + \cfrac{1}{k_\infty^{(2)} s + \cfrac{1}{k_\infty^{(3)} s + \cfrac{\vdots}{\quad + \cfrac{1}{k_\infty^{(\lambda)} s}}}}$$

Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta

- Si $F(s)$ es una impedancia, entonces: $k_\infty^{(1)} = L \quad k_\infty^{(2)} = C \quad \text{etc.}$
- Esta forma de realización da una red tipo escalera de la siguiente forma.



- Si $F(s)$ es una admitancia, entonces: $k_\infty^{(1)} = C \quad k_\infty^{(2)} = L \quad \text{etc.}$
- Esta forma de realización da una red tipo escalera de la siguiente forma.



Esta realización, extracción de polos en el infinito, debida a Cauer se denomina Tercera Forma Canónica o Primera Forma de Cauer o Cauer I

Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta

- Si F(s) es la instancia en la cual se tiene un polo simple en el origen, la función resultante al extraer dicho polo es:

$$F_1(s) = F(s) - \frac{k_0^{(1)}}{s} = k_\infty s + \sum_\lambda \frac{2k_\lambda s}{s^2 + \omega_\lambda^2}$$

- La función $F_1(s)$ será también real positiva impar, pero sin el polo en el origen. En efecto, dicha función tendrá un cero allí, por lo que su inversa tendrá un polo el cual también podrá extraerse.

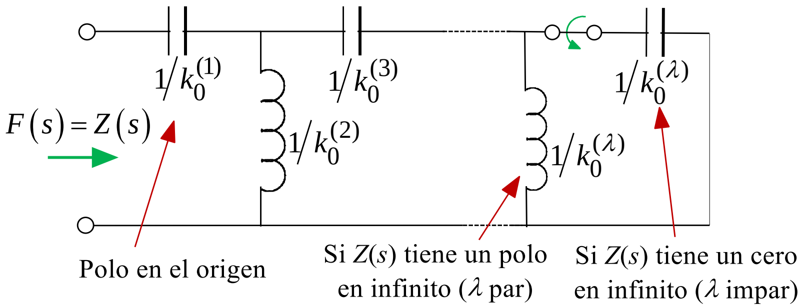
$$F_2(s) = \frac{1}{F_1(s)} - \frac{k_0^{(1)}}{s}$$

- Generalizando,

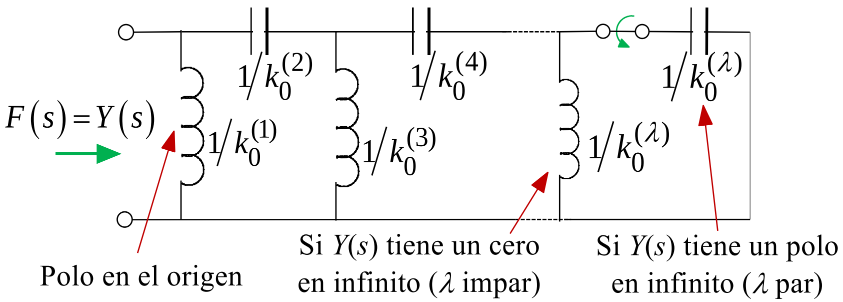
$$F(s) = k_0^{(1)}\frac{1}{s} + \cfrac{1}{k_0^{(2)}\frac{1}{s} + \cfrac{1}{k_0^{(3)}\frac{1}{s} + \cfrac{1}{k_0^{(4)}\frac{1}{s} + \ldots}}}$$

Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta

- Si $F(s)$ es una impedancia, entonces: $\dfrac{1}{k_0^{(1)}} = C \qquad \dfrac{1}{k_0^{(2)}} = L \qquad \text{etc.}$
- Esta forma de realización da una red tipo escalera de la siguiente forma.



- Si $F(s)$ es una admitancia, entonces: $\dfrac{1}{k_0^{(1)}} = L \qquad \dfrac{1}{k_0^{(2)}} = C \qquad \text{etc.}$
- Esta forma de realización da una red tipo escalera de la siguiente forma.



Esta realización, extracción de polos en el origen, debida a Cauer se denomina Cuarta Forma Canónica o Segunda Forma de Cauer o Cauer II

Síntesis de dipolos – Cauer 1 y 2

Se desea sintetizar el mismo dipolo LC del ejemplo anterior

$$Z(s) = \frac{s(s^2+4)}{(s^2+2)(s^2+9)}$$

<u>Tercera forma canónica. Cauer I.</u>

Como Cauer I es para remover polos en infinito, directamente se trabaja sobre la inversa de la expresión dada para z(s)

$$y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

Para obtener los 4 elementos que sinteticen la función, se realizarán 4 iteraciones del procedimiento.

Síntesis de dipolos – Cauer 1 y 2

$$y(s)=\frac{1}{z(s)}=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

$$y(s)=y_1(s)+k_{\infty(1)}s \qquad k_{\infty(1)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}y(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}=1$$

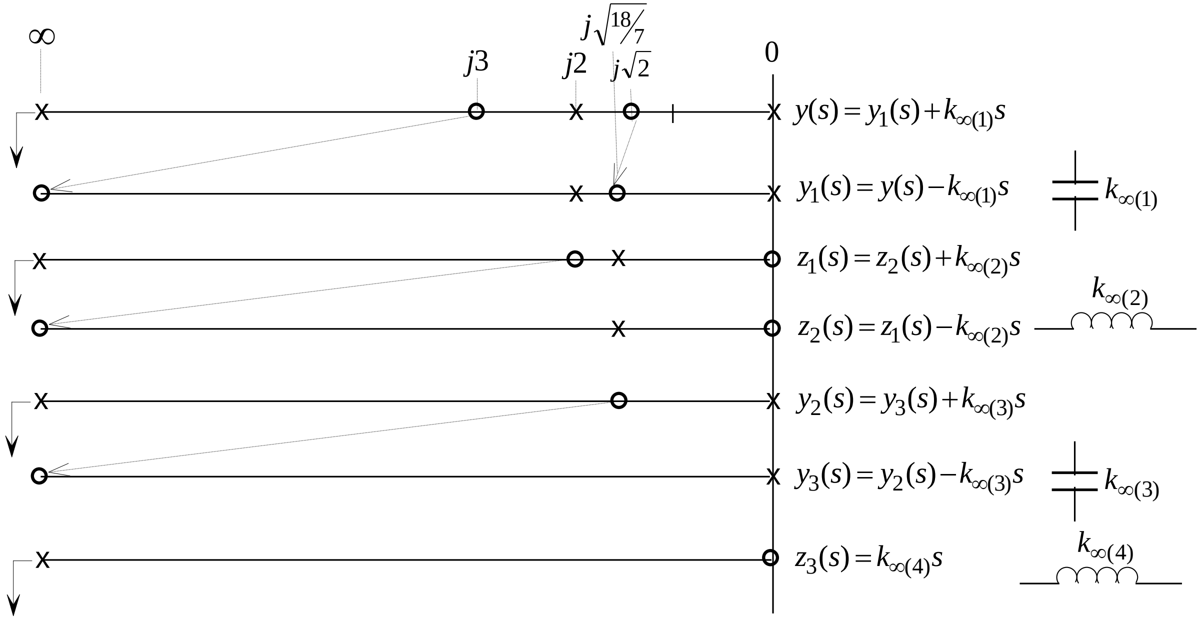
$$y_1(s)=y(s)-k_{\infty(1)}s=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}-s=\frac{7\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}{s\left(s^2+4\right)} \qquad z_1(s)=\frac{1}{y_1(s)}=\frac{s\left(s^2+4\right)}{7\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}$$

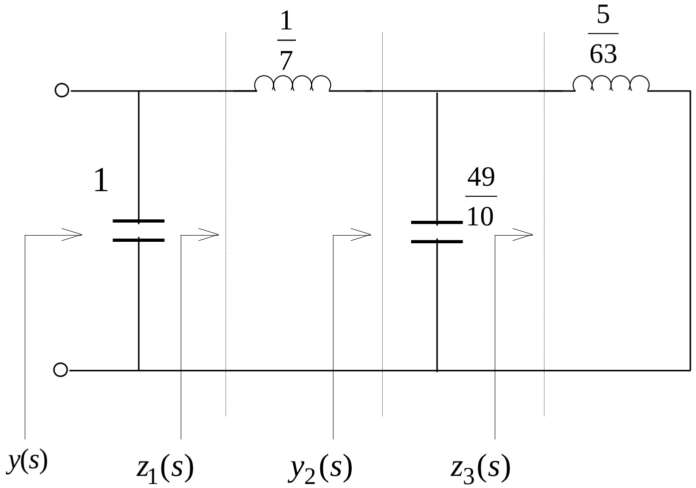
$$z_1(s)=z_2(s)+k_{\infty(2)}s \qquad k_{\infty(2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}z_1(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\frac{s\left(s^2+4\right)}{7\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}=\frac{1}{7}$$

$$z_2(s)=z_1(s)-k_{\infty(2)}s=\frac{s\left(s^2+4\right)}{7\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}-\frac{1}{7}s=\frac{10\,s}{49\left(s^2+\frac{18}{7}\right)} \qquad y_2(s)=\frac{1}{z_2(s)}=\frac{49\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}{10\,s}$$

$$y_2(s)=y_3(s)+k_{\infty(3)}s \qquad k_{\infty(3)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}y_3(s)=\frac{1}{s}\frac{49\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}{10s}=\frac{49}{10}$$

$$y_3(s)=y_2(s)-k_{\infty(3)}s=\frac{49\left(s^2+\frac{18}{7}\right)}{10\,s}-\frac{49}{10}s=\frac{63}{5}\frac{1}{s} \qquad z_3(s)=\frac{1}{y_3(s)}=k_{\infty(4)}s$$





Síntesis de dipolos – Cauer 1 y 2

Se desea sintetizar el mismo dipolo LC del ejemplo anterior

$$Z(s)=\frac{s(s^2+4)}{(s^2+2)(s^2+9)}$$

Cuarta forma canónica. Cauer II.

Como Cauer II es para remover polos en el origen, directamente se trabaja sobre la inversa de la expresión dada para z(s)

$$y(s)=\frac{1}{z(s)}=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

Para obtener los 4 elementos que sinteticen la función, se realizarán 4 iteraciones del procedimiento.

Síntesis de dipolos – Cauer 1 y 2

$$y(s)=\frac{1}{z(s)}=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

$$y(s)=y_1(s)+k_{0(1)}\frac{1}{s} \qquad k_{0(1)}=\lim_{s\to 0} s\,y(s)=\lim_{s\to 0} s\,\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s\,(s^2+4)}=\frac{9}{2}$$

$$y_1(s)=y(s)-k_{0(1)}\frac{1}{s}=\frac{(s^2+2)(s^2+9)}{s\,(s^2+4)}-\frac{9}{2}\frac{1}{s}=\frac{s\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}{\left(s^2+4\right)} \qquad z_1(s)=\frac{1}{y_1(s)}=\frac{\left(s^2+4\right)}{s\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}$$

$$z_1(s)=z_2(s)+k_{0(2)}\frac{1}{s} \qquad k_{0(2)}=\lim_{s\to 0} s\,z_1(s)=\lim_{s\to 0} s\,\frac{\left(s^2+4\right)}{s\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}=\frac{8}{13}$$

$$z_2(s)=z_1(s)-k_{0(2)}\frac{1}{s}=\frac{\left(s^2+4\right)}{s\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}-\frac{8}{13}\frac{1}{s}=\frac{10\,s}{26\left(s^2+\frac{13}{2}\right)} \qquad y_2(s)=\frac{1}{z_2(s)}=\frac{26\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}{10\,s}$$

$$y_2(s)=y_3(s)+k_{0(3)}\frac{1}{s} \qquad k_{0(3)}=\lim_{s\to 0} s\,y_2(s)$$

$$y_3(s)=y_2(s)-k_{0(3)}\frac{1}{s}=\frac{26\left(s^2+\frac{13}{2}\right)}{10\,s}-\frac{169}{10}\frac{1}{s}=\frac{13}{5}s \qquad z_3(s)=\frac{1}{y_3(s)}=\frac{5}{13\,s}$$