Estimación práctica de DEP

Comunicaciones - 2018*

1. Objetivo

Dado un proceso continuo $X(t)$, se desea estimar su DEP $S_{xx}(f)$ a partir del muestreo de dicho proceso.

2. Desarrollo

Si se toman muestras de $X(t)$ se obtiene una secuencia $X[n]$ que en principio se puede definir en $-\infty < n < \infty$. Dicha secuencia tendrá una densidad espectral $S_{xx}(e^{j2\pi s})$, que por definición es

$$S_{xx}(e^{j2\pi s}) = \lim_{A\to\infty} \frac{\mathrm{E}\{|X_A(e^{j2\pi s})|^2\}}{A} \qquad X_A(e^{j2\pi s}) = TFTD\{X[n] \sqcap_A[n]\},\ A = 2J+1\ J \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Una aplicación práctica de estimación de DEP conlleva distintas limitaciones:

- Sólo se tiene disponible una realización del proceso, por lo que para que la estimación de la DEP sea válida el proceso deberá ser (o tendremos que suponerlo) ergódico en correlación.
- De la realización disponible del proceso no pueden tomarse infinitas muestras, sino que solo podrán tomarse N.
- Debido a la limitación anterior no es posible observar todo el continuo de frecuencias s, sino que sólo se obtendrá información de las frecuencias $s = k/N$ con $k = 0, ..., N-1$. De esta consideración y la anterior se desprende que deberá utilizarse la TDF para poder calcular el espectro de la realización del proceso.

Con estas consideraciones la densidad espectral resulta

$$S_{xx}(e^{j2\pi k/N}) \approx \frac{|X_{[0..N-1]}(e^{j2\pi k/N})|^2}{N} = \frac{|TDF(X[n],N)|^2}{N} \tag{2}$$

Hasta aquí se obtuvo una expresión para estimar la DEP de un proceso $X[n]$ ergódico en correlación a partir de tomar N puntos de una realización. A continuación se relacionará esta expresión con la DEP del proceso continuo original $X(t)$.

Si $X(t)$ es ESA y se muestrea cada T segundos es posible utilizar el teorema de muestreo para relacionar la DEP del proceso continuo y del discreto

$$S_{xx}(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{xx}(f - \frac{m}{T}) \tag{3}$$

En caso de que se respete el teorema del muestreo y no haya aliasing se puede considerar que en $|s| < 1/2$

$$S_{xx}(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{T}S_{xx}(f) \ \rightarrow\ S_{xx}(f) = TS_{xx}(e^{j2\pi s}) \tag{4}$$

Finalmente sólo queda considerar que en realidad no se tienen infinitas muestras sino N y que las frecuencias de observación son $f = \frac{s}{T} = \frac{k}{NT}$. El hecho de *recortar* en el tiempo a $X[n]$ provoca que el ancho de banda de su DEP sea infinito, por lo que lo supuesto en la ecuación (4) no es una igualdad exacta, sino una aproximación. Por lo tanto:

$$S_{xx}(k/NT) \approx TS_{xx}(e^{j2\pi k/N}) \approx \frac{T}{N}|TDF(X[n],N)|^2 \tag{5}$$

Como comentario final se destaca que en caso de que adquieran M realizaciones de N muestras cada una de $X(t)$ puede utilizarse la ergodicidad en correlación del proceso para refinar la estimación de la DEP promediando las DEPs individuales de cada realización:

$$\hat{S}_{xx}(k/NT) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \hat{S}_{xx}^{(m)}(k/NT) \tag{6}$$

*Apunte extraído de notas de clases dadas por P. A. Roncagliolo y digitalizado por S. Rodríguez.