

Notas sobre la representación macroscópica de las propiedades magnéticas de la materia

Introducción:

Los efectos magnéticos en el vacío producidos por una espira de corriente a una distancia r de la misma suficientemente mayor que su diámetro, resultan indistinguibles de aquellos producidos por un dipolo magnético cuyo brazo dipolar sea mucho menor que r , con la condición de que se verifique la siguiente relación:

$$\mu_0 \cdot I \cdot \vec{S} = \vec{p}^* = q^* \vec{d} \quad (1)$$

donde I : intensidad de corriente en la espira.

\vec{S} : superficie de la espira.

q^* : intensidad de polo magnético.

\vec{d} : brazo del dipolo.

\vec{p}^* : momento dipolar magnético.

La presencia de un material magnético afecta el Campo magnético del medio que lo rodea. Consideremos un espacio vacío en el cual existe un Campo de inducción magnética \vec{B} e introduzcamos un trozo de material magnetizado tal como se indica en la figura 1. Los efectos producidos por el material en un punto A suficientemente alejado del mismo, es decir a una distancia r mucho mayor que las dimensiones del contorno del material, modifican el campo previo \vec{B} en forma similar a la que se observaría si existiera un momento dipolar magnético ubicado en el lugar del material.

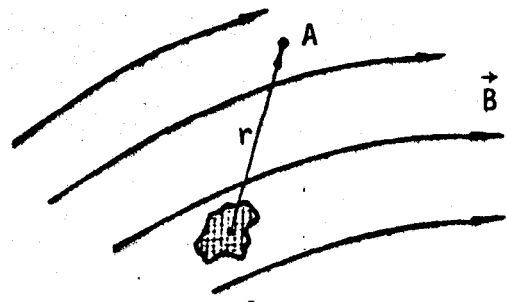


Figura 1

Si el material se divide en partes, cada una de éstas conserva esta propiedad en forma individual, correspondiendo a cada porción de materia un momento bipolar magnético.

A medida que el punto A se acerca al material, la modificación en el campo magnético previamente existente en el punto puede concebirse entonces como la superposición de los efectos producidos por los momentos dipolares de pequeños elementos de volumen que constituyen el material.

Dada la equivalencia indicada por la ec. (1), estos momentos dipolares pueden ser representativos de pequeñas espiras de corrientes, dipolos magnéticos o momentos dipolares intrínsecos del material a nivel microscópico. Los efectos de cada uno de estos modelos son indistinguibles a las

escala macroscópicas, pudiéndoselos utilizar alternativamente según convenga para la interpretación física del problema.

Por ello, en forma general, a los efectos de analizar las propiedades magnéticas de la materia desde un punto de vista macroscópico, consideraremos el medio material como representado por una distribución volumétrica de momentos dipolares magnéticos.

Siendo p_i^* el momento dipolar magnético elemental, se define el vector momento dipolar magnético por unidad de volumen \vec{P}^* como la suma vectorial de momentos dipolares magnéticos elementales de un pequeño elemento de volumen ΔV , dividida por ese volumen:

$$\vec{P}^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i p_i^* \quad (2)$$

La cantidad vectorial \vec{P}^* proporciona una descripción macroscópica completa de la magnetización interna del material y en función de esta magnitud podrán expresarse los efectos producidos por el material sobre el medio que lo rodea.

Los **efectos magnéticos** producidos por las **corrientes de conducción** en el **vacío** se expresan por medio de las siguientes ecuaciones.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4)$$

La presencia de un material magnetizado, hace necesario complementar las ecuaciones anteriores para poder describir el campo magnético tanto en el medio que rodea al material, como en el material mismo. Estos efectos son representados, por funciones de \vec{P}^* .

A continuación se trata de describir el comportamiento de los campos magnéticos para el caso de que las fuentes que lo provocan sean las corrientes de conducción \vec{J} y un material magnetizado. Para el lo será necesario conocer las fuentes totales de rotacional y de divergencia del campo de inducción magnética \vec{B} .

2- El campo de inducción magnética \vec{B} magnetostática

- Fuentes de rotacional \vec{B}

Para el caso en que solo están presentes las corrientes de conducción la expresión de rotacional de \vec{B} es.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \quad (4)$$

Cuando se considera la **presencia de materiales magnéticos** deberá tenerse en cuenta la existencia de **una distribución de volumen de momento dipolar magnético**.

El momento dipolar magnético puede interpretarse como **relacionado con corrientes macroscópicas**, provocadas **por la imperfecta cancelación de órbitas a escala atómica** en la materia magnetizada, que se denominan corrientes de magnetización.

Un **modelo simplificado de materia magnetizada** es útil para comprender el concepto de corriente de magnetización. Consideremos **un trozo de esta materia como compuesto por corrientes atómicas que circulan en circuitos cerrados en el mismo sentido**. Si existe una **distribución uniforme** de estas espiras de corriente (figura 2), lo cual es equivalente a decir que la **magnetización es uniforme**, no habrá **ninguna corriente efectiva en el interior del material** dado que para cada corriente atómica habrá una inmediatamente contigua que la cancela. Si por el contrario **la magnetización no es uniforme la cancelación no será absoluta, resultando una corriente equivalente neta** tal como se indica en la figura 3. Esta corriente es la denominada corriente de magnetización y al igual que la corriente de conducción es fuente de rotacional de \vec{B} , resultando así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{J} + \vec{J}_m) \quad (5)$$

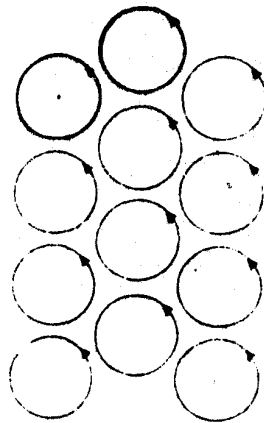


Figura 2

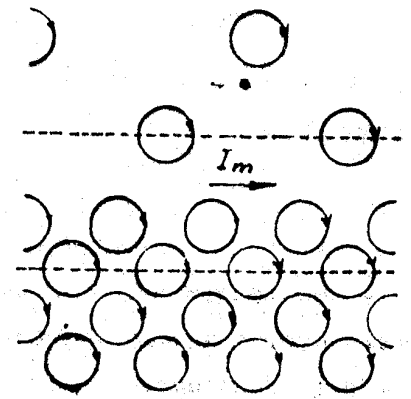


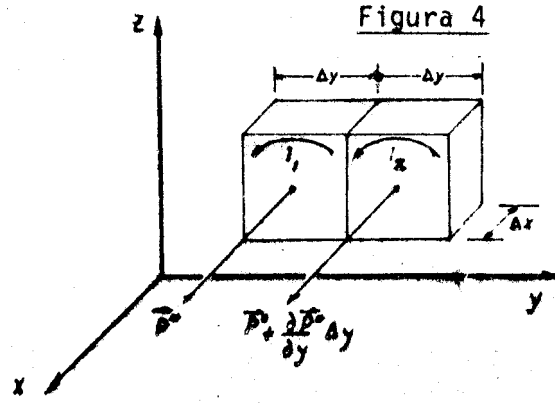
Figura 3

Para expresar el $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ en función del momento dipolar magnético es necesario establecer la relación entre J_m y \vec{P}^*

Para ello se consideran dos pequeños volúmenes, contiguos pertenecientes al interior de un trozo de material magnetizado no uniformemente, tal como se indica en la figura 4. El momento dipolar magnético por unidad de volumen de los elementos 1 y 2 podrán expresarse como:

para elemento 1: \vec{P}^*

para elementos 2: $\vec{P}^* + \frac{\partial \vec{P}^*}{\partial V} \cdot \Delta y + \text{términos de orden superior}$



La componente en la dirección de x del momento dipolar magnético \vec{p}^* correspondiente al primer elemento será:

$$\vec{p}^* = \vec{P} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Utilizando la equivalencia entre el elemento dipolar magnético y una espira de corriente, expresado por la ec. (1), resulta:

$$\text{para el primer elemento: } p_{ix}^* = P_x^* \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \mu_0 \cdot I_1 \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\text{para el segundo elemento } p_{2x}^* = \left(P_x^* + \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \mu_0 \cdot I_2 \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

La diferencia entre las corrientes I_1 e I_2 resulta en una corriente neta en la dirección del eje z en la región intermedia de los dos pequeños volúmenes:

$$I'_z = I_1 - I_2 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Si ahora se consideran dos elementos de volumen contiguos sobre el eje x, de igual manera que en el caso anterior resulta una corriente neta en la dirección del eje z, dada por:

$$I''_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_y^*}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

La corriente total en la dirección de z estará dada por $I'_z + I''_z$ y su densidad J_z será:

$$J_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial P_y^*}{\partial x} - \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \right)$$

Esta expresión se reconoce como una de las tres componentes de un rotacional cuya expresión general es:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \quad (6)$$

De esta expresión resulta que **en una región donde se produzca una discontinuidad de la magnetización resultará una corriente laminar igual al cambio en la componente tangencial de la magnetización.** Suponiendo una barra cilíndrica uniformemente magnetizada, tal discontinuidad aparece en la superficie límite del material, resultando una corriente superficial de magnetización.

De las expresiones (5) y (6) resulta que la expresión del rotacional de \vec{B} para el caso de considerar corrientes de conducción y la presencia de material magnetizado será:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \quad (7)$$

Fuente de divergencia de \vec{B}

La definición del campo de inducción magnética \vec{B} , parte de considerar los efectos de la interacción magnética de corrientes identificando un campo y un campo de fuerzas.

La fuerza entre dos elementos que llevan corrientes (figura 5) está dada por la siguiente relación obtenida experimentalmente:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \oint \oint \frac{\vec{dl}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \quad (8)$$

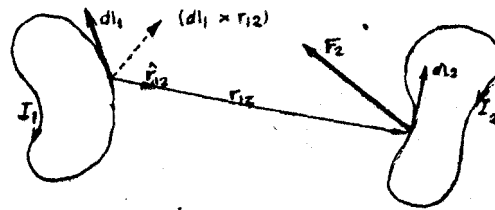


Figura 5

La definición de \vec{B} resulta de expresar la ecuación (8) como:

$$\vec{F}_2 = I_2 \cdot \oint \vec{dl}_2 \times \vec{B}_2$$

donde \vec{F}_2 es el campo de fuerzas y \vec{B}_2 campo de inducción magnética expresado por:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \cdot \oint \frac{\vec{dl}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \quad (9)$$

La definición de \vec{B} contempla como fuente de campo las corrientes, resultando líneas de campo continuas y cerradas, es decir que no existen fuentes de divergencia, lo cual se expresa por la ec. (3).

Al introducir materiales magnetizados la corriente de magnetización equivalente, será fuente del campo \vec{B} , pero como se indicó anteriormente será fuente de rotacional y no de divergencia, es decir que la corriente de magnetización provocará un campo de líneas continuas y cerradas, con lo cual seguirá siendo válida para este caso la expresión:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10) \equiv (3)$$

La ec.(7) junto con la (10) describen completamente el campo \vec{B} . Luego \vec{J}_m definida por la ec.(6) da una descripción completa del comportamiento magnético de la materia y por lo tanto puede reemplazarse el medio magnético por la densidad de corriente equivalente \vec{J}_m .

3.- El campo magnetizante \vec{H} en magnetostática

- Fuente de rotacional de \vec{H} (Ref, 1)

Al tratar los problemas de polarización en medios eléctricos, resulta conveniente separar el campo cuyas fuentes son las cargas eléctricas libres, de aquel cuyas fuentes son las cargas libres más las ligadas, resultando un campo de densidad de flujo eléctrico \vec{D} y el campo eléctrico \vec{E} respectivamente.

De igual manera, para el caso de los campos magnéticos es conveniente separar del campo total, aquella parte cuyo rotacional provenga de las corrientes de magnetización.

Para ello en magnetostática se define:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*) \quad (11)$$

resultando entonces de la ec. (6) que

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \vec{P}^*) = \vec{J} \quad (12)$$

Lo cual equivale a decir que en magnetostática la única fuente de rotacional de \vec{H} , la constituyen las corrientes de conducción, el medio magnetizado no introduce fuente de rotacional de \vec{H} .

\vec{H} se suele llamar campo magnetizante porque parece ocasionado por fuentes que no dependen de las propiedades magnéticas del medio. Pero \vec{J} es sólo fuente de rotacional de \vec{H} , nada se ha dicho hasta aquí de sus fuentes de divergencia.

Estas aparecen al considerar la existencia de polarización magnética, como se describe a continuación.

Fuente de divergencia de \vec{H}

La ec. (11) puede escribirse como

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{P}^* \quad (13)$$

Dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* \quad (14)$$

De donde resulta que será fuente de divergencia de \vec{H} la divergencia negativa de la magnetización.

Así pues el campo \vec{H} queda enteramente determinado por las ecs. (12) y (14); fuentes de rotacional son sólo las corrientes de conducción (ec.12), mientras que fuentes de divergencia provienen exclusivamente de la presencia de material magnético (ec.(14)).

Por lo tanto puede tratarse separadamente las contribuciones al campo \vec{H} total de ambos tipos de fuentes definiendo:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \quad (15)$$

tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_1 = 0 \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* \quad (17)$$

donde \vec{H}_1 es la componente de \vec{H} atribuible a \vec{J} .

\vec{H}_2 es la componente de \vec{H} atribuible a la presencia del material magnético a través de \vec{P}^* .

Podemos ahora interpretar, la ec. (17). Consideremos un trozo de material magnetizado el cual presenta una distribución en volumen de momentos dipolares magnéticos dada por \vec{P}^* . Como rotacional de \vec{H}_2 es nulo, el campo \vec{H}_2 podrá ser derivado de un potencial magnético escalar V^* ,

$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla} V^* \quad (18)$$

El potencial resultante de una distribución en volumen de momentos dipolares es (ver Ref. 2):

$$V^* = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\iiint \frac{\vec{P}^* \cdot \vec{ds}'}{r} - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{r} dv' \right)$$

Con (') se indica que las integraciones se realizan sobre las coordenadas de las fuentes.

Sustituyendo

$$\vec{P}^* \cdot d\vec{s}' = \rho_n^* \cdot ds' = q^* ds' ; -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* = \rho^*$$

se obtiene:

$$V^* = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\oint \frac{q^*}{r} ds' + \iiint \frac{\rho^*}{r} dv' \right) \quad (19)$$

Lo cual significa que la distribución en volumen de dipolos contribuye con \vec{H}_2 al campo \vec{H} , de igual forma que la suma de los efectos provocados por una densidad superficial de carga magnética q^* más una densidad volumétrica de carga magnética ρ^* . A una unidad de esta "densidad de carga magnética" se la denomina unidad de polo magnético.

Por lo tanto el comportamiento magnético del material queda completamente descripto por las densidades de polos magnéticos ρ^* y q^* pudiendo entonces reemplazarse el medio magnético por esas densidades.

4.- Ecuaciones de la magnetostática

Resumiendo, en magnetostática los efectos magnéticos de las corrientes eléctricas estacionarias y de la materia en reposo pueden describirse, alternativamente, por medio de uno de los campos \vec{B} o \vec{H} , definidos a partir de una de los siguientes dos sistemas de ecuaciones:

* Campo	de inducción: \vec{B}	Magnetizante: \vec{H}
* divergencia	(20a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	(21a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho^* / \mu_0$
* rotor	(20b) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$	(21b) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
* fuentes equivalentes al material magnetizado	(20b) $\vec{J}_m = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{P}^*$	(21c) $\rho^* = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$

A éstas hay que agregar la llamada ecuación constitutiva,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*) \quad \text{ó} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}^*$$

Cualquiera de los dos sistemas de ecuaciones que se elija, implica que, aparte del campo \vec{J} de las corrientes de conducción puede especificarse arbitrariamente uno (y sólo uno) de los tres campos magnéticos involucrados: \vec{B} o \vec{H} o \vec{P}^* .

En el análisis desarrollado hasta ahora no ha sido necesario aclarar cual de las tres ha de considerarse como dado y cuales como derivados.

En lo que sigue se presenta un ejemplo para ilustrar la aplicación de las relaciones encontradas.

En él se suponen conocidos \vec{J} y \vec{P}^* y de ellos se deducen \vec{B} y \vec{H} . Se advierte sin embargo que, como se explicará más adelante, cuando se trata de materiales magnéticos reales existe una

relación funcional adicional entre los tres campos magnéticos que impone otra ecuación restrictiva a cualquiera de los dos sistemas alternativos presentados.

Esa relación funcional es una característica intrínseca de las propiedades magnéticas del material. Así pues, en la práctica no puede considerarse ninguno de los tres campos magnéticos como independiente. Dados \vec{J} , la distribución espacial de la materia presente y sus propiedades magnéticas particulares quedaran completamente definidos los campos magnéticos \vec{B} o \vec{H} o \vec{P}^* .

4.1.- Ejemplo 1:

Imán Permanente

Sea un trozo de material magnetizado que presenta una magnetización \vec{P}^* no existiendo corrientes de conducción cercanas. Supongamos que se trata de una barra cilíndrica con magnetización uniforme en dirección axial, tal como la indicada en la figure 6a.

Las fuentes de campo son:

$$\vec{J} = 0 ; \quad \vec{P}^* \text{ con } \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* .$$

Reemplazando estas condiciones en las expresiones alternativas de \vec{B} y \vec{H} resultarán:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \\ \vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{P}^*}{\mu_0} \end{array} \right| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}^* \end{array}$$

La única fuente de \vec{B} será el rotacional de \vec{P}^* que toma valores donde se produce una variación de la componente tangencial de \vec{P}^* . En este caso se produce una discontinuidad de esta componente tangencial en la superficie de la barra, paralela a la dirección de la magnetización. Sólo sobre esta superficie tendremos $\vec{\nabla} \times \vec{P}^* \neq 0$

Tal como se indicó anteriormente esta variación de \vec{P}^* produce el mismo efecto que el de una corriente de magnetización equivalente sobre la superficie indicada, de valor:

$$\vec{J}_m = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{P}^*}{\mu_0} \quad (22)$$

Por lo cual, a los efectos de la determinación de \vec{B} , el material magnético puede representarse por una distribución de corriente superficial con densidad \vec{J}_m tal como se indica esquemáticamente en la figura 6.b.

Por otra parte, en lo que le refiere a \vec{H} , la única fuente será la de divergencia, que es proporcional a la divergencia negativa de \vec{P}^* . Este efecto se presenta en las superficies perpendiculares a \vec{P}^* , resultando equivalente al de una densidad de carga magnética aparente q^*

igual a la componente normal \vec{P}^* y cuyo signo es positivo cuando las líneas de \vec{P}^* llegan a la superficie y negativo cuando salen de ella. Esta densidad de carga equivalente se muestra en la figura 6.b.

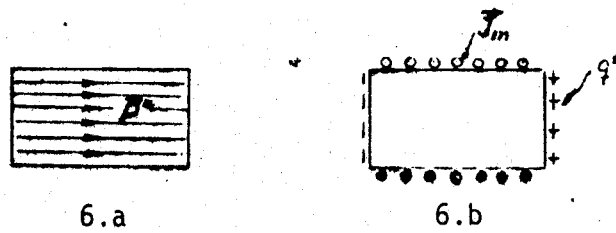


Figura 6

En base a estas consideraciones resulta conveniente reemplazar el material magnetizado por una corriente de magnetización equivalente para determinar \vec{B} y por una densidad de carga magnética equivalente para determinar \vec{H} .

El campo \vec{B} resultará como el campo de un solenoide con densidad de corriente \vec{J}_m ; este campo se grafica en la figura 7.

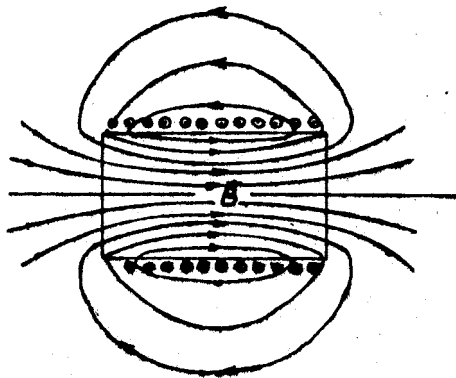


Figura 7

El campo \vec{H} resulta como el campo de dos placas paralelas de dimensiones finitas con densidad de carga superficial q^* (análogo al campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas con efecto de borde). El campo \vec{H} se grafica en la figura 8.

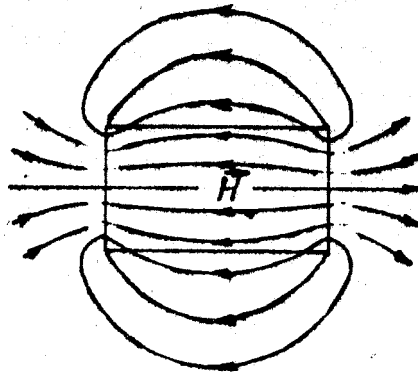


Figura 8

Por supuesto, aunque \vec{B} y \vec{H} han sido derivados utilizando diferentes equivalentes del material magnetizado, la ecuación constitutiva $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}$ se cumple necesariamente, pues es una definición.

Obsérvese que los Campos \vec{B} y \vec{H} así determinados presentan la siguiente vinculación:

Para el espacio externo al material, donde $\vec{P}^* = 0$, resulta:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Los Campos \vec{B} y \vec{H} son idénticos en forma y están relacionados por la constante μ_0 (ver figuras 7 y 8).

-Para el interior del material

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*)$$

resultando de una composición vectorial de los campos \vec{B} y \vec{P}^* indicados en las figuras 7.a y 8. Esta composición se esquematiza en la figura 9.

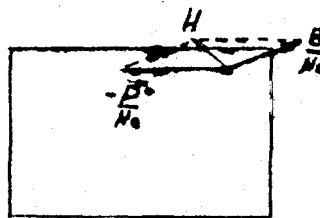


Figura 9

5.- Característica de magnetización de los materiales

Como se dijo anteriormente, los materiales magnéticos reales imponen una relación funcional entre \vec{B} , \vec{H} y \vec{P}^* en su seno, que es característica del material. Esta relación se puede escribir simbólicamente en forma implícita mediante alguna de las siguientes expresiones:

$$f(\vec{B}, \vec{H}) = 0 \quad (23)$$

$$f(\vec{H}, \vec{P}^*) = 0 \quad (24)$$

$$f(\vec{B}, \vec{P}^*) = 0 \quad (25)$$

De las tres, las dos primeras son las más frecuentemente utilizadas cualquiera de ellas expresa una vinculación funcional entre dos campos vectoriales que puede presentar, según el material, diferentes grados de complejidad: desde una simple relación de proporcionalidad, hasta relaciones alinéales de tipo tensorial.

Un tratamiento totalmente general sería excesivamente complicado, por ello nos limitaremos a considerar sólo los casos de mayor importancia práctica.

5.1.- Materiales-magnéticamente isotrópicos y lineales-

En estos materiales la característica de magnetización es del tipo

$$\vec{P}^* = \chi_m \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = 0 \quad (26)$$

Donde χ_m es una cantidad escalar adimensional llamada susceptibilidad magnética. Su valor absoluto es generalmente muy pequeño ($\chi_m \ll 1$, del orden de 10^{-5} 10^{-8}). El material se llama paramagnético si χ_m es positiva y diamagnético si χ_m es negativa.

Si eliminamos \vec{P}^* entre las ecuaciones (13) y (26) encontramos que la característica de magnetización del material también puede expresarse como:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = 0 \quad (27)$$

Donde $\mu = 1 + \chi_m$ se denomina permeabilidad magnética relativa del material y, al igual que χ_m , también es una magnitud escalar adimensional.

Si combinamos ahora las ecs. (20) y (21) con la (27) eliminando, alternativamente \vec{B} y \vec{H} , obtendremos expresiones diferenciales completas de ambos campos en la forma:

* Campo	de inducción: \vec{B}	Magnetizante: \vec{H}
* divergencia	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (28a)	$\vec{\nabla} \cdot \mu \cdot \vec{H} = 0$ (29a)
* rotor	$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \mu_0 \cdot \vec{J}$ (28b)	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ (29b)

A iguales resultados se llega, aunque en forma más laboriosa, si en las ecs. (20) y (21) se elimina directamente \vec{P}^* , utilizando la ec. (24).

Debe insistirse en que ambos sistemas de ecuaciones constituyen descripciones diferenciales completas alternativas de la magnetostática, cuya solución (el campo \vec{B} o \vec{H} resultante) dependerá sólo de las condiciones de contorno particulares del problema, es decir, de su geometría, de las propiedades magnéticas de la materia en todos los puntos del espacio, interpretadas por μ , y del campo de corrientes estacionarias impuesto \vec{J} .

No cabe duda que las ecs. (28) y (29) presentan una llamativa sencillez formal. Pero no debemos engañarnos. Esta sencillez es aparente pues sintetizan una fenomenología física cuyas manifestaciones son casi siempre tan complejas que la solución analítica de las ecuaciones diferenciales planteadas es rara vez posible, aún para geometrías muy sencillas.

Obsérvese que μ aparece bajo el signo de derivación espacial, ya sea como divergencia o como rotor, Aunque los cuerpos de material magnético que se hallen presentes sean completamente homogéneos, con $\mu \neq 1$ y constante en su seno, en las regiones vacías del espacio y en la materia magnetizable será $\mu \approx 1$; de modo que la variación de μ en las superficies límites tendrá, naturalmente, una influencia decisiva sobre la solución final de las ecuaciones diferenciales planteadas.

Por ello la solución de los problemas prácticos de magnetostática son en general difíciles y se cometen a menudo gruesos errores al tratar de simplificarlos.

Las dificultades que comentamos se percibirán mejor analizando el ejemplo del imán permanente cilíndrico presentado anteriormente. En él había sido dado \vec{P}^* , resultando las configuraciones de los campos \vec{B} y \vec{H} que ilustran las figuras 7 y 8. La ecuación constitutiva que liga los tres campos

$$\vec{B} - \vec{P}^* - \mu_0 \cdot \vec{H} = 0$$

es vectorial, y en el interior del imán, salvo a lo largo de su eje, las direcciones de los tres no son coincidentes. No puede en consecuencia establecerse una relación escalar entre dos de los campos al estilo de las ecs. (26) ó (27). Es mas, evidentemente no existe una relación funcional implícita genérica del tipo de las ecs. (23) a (25) que sea valida en todos los puntos del imán. Se debe interpretar que el material de que tal imán estaría formado debe variar su característica magnética punto a punto de modo que resulte un campo \vec{P}^* uniforme. De mas está decir que los materiales reales están muy lejos de comportarse de tal manera.

Inversamente, si por ejemplo fijáramos una determinada relación funcional entre \vec{P}^* y \vec{H} uniformemente válida en toda la barra magnetizada (material magnéticamente homogéneo), ni \vec{P}^* será uniforme, ni \vec{B} ni \vec{H} serán tan fácilmente calculables como en el ejemplo.

Como se ve, el ejemplo es "irreal", pues fue elegido por su "sencillez". En cambio la "realidad" es rara vez "sencilla", aunque lo parezca.

Algo más parecido a lo que en verdad sucede se esquematiza en la figura 10.

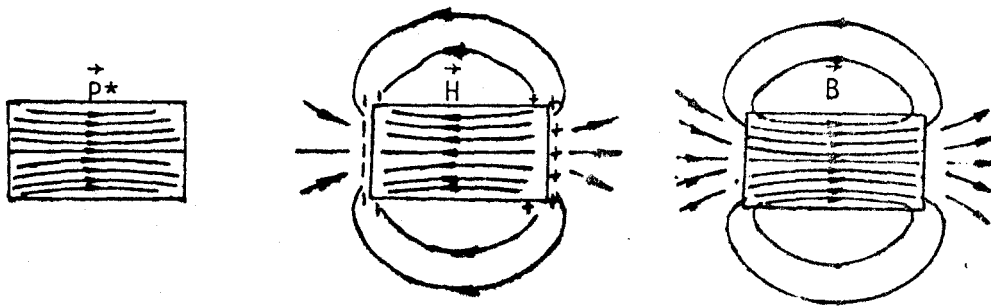


Figura 10

5.2.- Materiales magnéticamente isotrópicos y alineales

Son materiales típicos de esta clase los llamados ferromagnéticos, cuya característica magnética es del tipo:

$$\vec{B} = f(\vec{H}) \quad \text{con} \quad \vec{B} \times \vec{H} = 0$$

Es decir, que los campos \vec{B} y \vec{H} (y también \vec{P}^*) tienen en todo punto igual dirección y que sus módulos B , H tienen una relación funcional alineal, la cual ni siquiera es en general expresable por fórmulas matemáticas sencillas, por lo que es usual presentarla en forma de curvas o tablas determinadas experimentalmente.

Por similitud con la ec. (27) válida para materiales con característica magnética lineal, es frecuente escribir en el caso alineal:

$$\vec{B} = \mu(H) \cdot \mu_0 \vec{H}$$

donde $\mu(H)$ es una magnitud escalar adimensional que es función del módulo de H .

Utilizando $\mu(H)$ en las ecs. (28) y (29) puede formalizarse la expresión diferencial de los campos, pero las formulas resultantes no aportan mayor claridad conceptual y no ofrecen ventajas prácticas en su aplicación.

Es por ello práctica común utilizar una forma mixta en que aparecen tanto \vec{B} como \vec{H} . Esto es:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} \\ B &= f(H) \quad \text{con} \quad \vec{B} \times \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

Aquí debe interpretarse $f(H)$ en forma genérica, siendo por supuesto $f(H) = \mu_0 H$ en ausencia de material magnetizante.

Al utilizar esta forma de las ecuaciones diferenciales de la magnetostática, debe cuidarse no olvidar que los campos \vec{B} y \vec{H} son descripciones alternativas equivalentes. Ninguno de ellos es causa o efecto del otro. Si se los usa a ambos es que, por razones prácticas, a veces es más sencillo trabajar con uno que con el otro o, como en este caso, con ambos a la vez.

5.3.- Ejemplo 2:

Anillo de material isotrópico magnetizado con arrollamiento de excitación uniformemente distribuido.

Consideremos un anillo de material isotrópico (por ej. Hierro) sobre el cual está arrollada una bobina con N vueltas contiguas, recorridas por una corriente estacionaria I.

Este caso puede idealizarse considerando que la corriente circula en una lámina superficial adherida alrededor del anillo, con una densidad lineal de corriente cuyo modulo debe verificar la relación

$$2\pi r \cdot J = NI$$

donde r es la distancia entre un punto de la superficie y el eje del anillo, tal como se indica en la figura 11. En esta misma figura puede notarse la dirección de J en distintos puntos sobre la superficie del anillo, tangencial al contorno de la sección transversal del anillo.

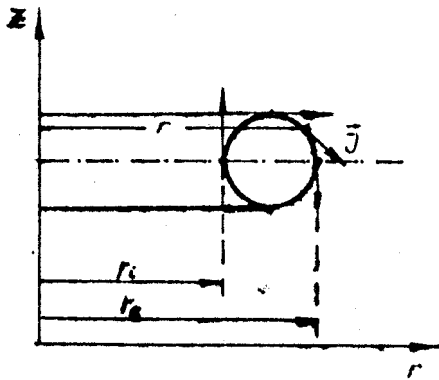


Figura 11

Por el tipo de simetría que se presenta, las líneas de campo, tanto de \vec{B} y \vec{H} como de \vec{P}^* , serán circunferencias concéntricas. No existirán entonces puntos de divergencia para ninguno de ellos. En particular el campo \vec{H} quedará entonces definido por:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}\end{aligned}$$

mientras que a \vec{B} le corresponde

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{P}^*\end{aligned}$$

A estas ecuaciones habrá que agregar la característica de magnetización del material, que vincula \vec{P}^* con \vec{B} .

Evidentemente es mucho más fácil en este caso resolver \vec{H} , ya que la expresión diferencial depende sólo de J y no depende en absoluto del material que construye el anillo.

Dicho de otra manera, no existe densidad de polos magnéticos equivalentes ρ^* en ninguna parte del anillo ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ en todo el espacio.

Una vez conocido \vec{H} se podrán encontrar \vec{B} y \vec{P}^* en función de \vec{H} basándose directamente en la característica magnética del material, aunque ésta sea alineal.

Este tipo particular de simetría es el único caso en que no hay contribución alguna del material magnetizable al campo \vec{H} . Y es justamente por este motivo que esta configuración se utiliza para determinar experimentalmente la curva de magnetización de los materiales ferromagnéticos.

Volviendo al caso real, sea NI la fuerza magnetomotriz del arrollamiento uniformemente distribuido; el campo que cumple con la condición $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ puede obtenerse la integral de Ampere.

Considerando la simetría del caso, el campo \vec{H} tendrá valor constante sobre circunferencias con centros en el eje del anillo. Si el camino de integración se toma sobre una de estas circunferencias con $r < r_i$ (camino en aire) resultará:

$$2\pi \oint H_r \cdot dr = 0$$

y por la condición de simetría será $H_r = 0$.

Si el camino de integración se toma en el interior del material con un valor r comprendido entre r_i y r_o , resulta:

$$2\pi \oint H_r \cdot dr = NI \text{ donde } H_r = \frac{NI}{2\pi r}$$

Con H_r y las características magnéticas del material $F(\vec{H}, \vec{B}) = 0$ ó $F(\vec{H}, \vec{P}^*) = 0$ se obtienen $\vec{B}(r)$ y/o $\vec{P}^*(r)$. El campo resultante se grafica en la figura 12.

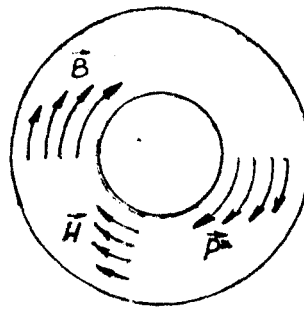


Figura 12

5.4.- Ejemplo 3

Anillo de material magnetizado con arrollamiento de excitación concentrado

En el caso anterior, el hecho de que el campo \vec{H} producido por el arrollamiento externo no tenga componentes perpendiculares a la superficie del anillo se traduce en que no existe densidad superficial de carga magnética

Para el caso del arrollamiento concentrado (figura 13.a el campo producido por tal arrollamiento en el vacío es de tal forma que si introducimos el anillo de hierro, las líneas de campo incidirán

sobre su superficie con un cierto ángulo, indicativo de una componente perpendicular, de P^* sobre la superficie del anillo. Esto equivale a una distribución de carga magnética distribuida no uniformemente en el anillo, mostrada esquemáticamente en la figura 13.b. **Esta carga superficial es fuente de un campo \vec{H} tal que disminuye el producido por la corriente externa en el lugar donde está ubicado el arrollamiento excitador y lo aumenta en el lado opuesto del anillo. El resultado es que el campo H que aparece en el interior del anillo es casi uniforme y su magnitud es aproximadamente igual a la que existe cuando se lo excita con un arrollamiento distribuido uniformemente de igual valor de f.m.m.**

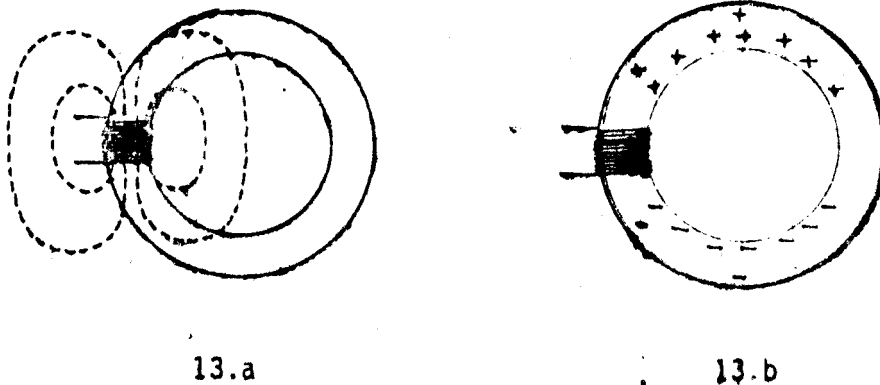


Figura 13

Esto permite aproximar los cálculos de campo en el anillo de hierro con arrollamiento concentrado con aquellos obtenidos considerando el arrollamiento distribuido uniformemente, aunque debe quedar claro que no son las mismas las fuentes de campo que aparecen en uno y otro caso.

5.5.- Ejemplo 4:

Electroimán

En el electroimán se superponen los efectos de una corriente de conducción externa y el del material magnetizado.

Para tal caso las fuentes de campo serán \vec{J} y \vec{P}^* con $\vec{\nabla} \times \vec{P}^* = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$

Las ecuaciones de campo resultan

$$\begin{array}{l|l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{P}^* & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{array}$$

$$F(\vec{H}, \vec{P}^*) = 0 \text{ (o cualquiera de sus equivalentes)}$$

De la misma manera que para el caso del imán permanente, la materia magnetizada puede ser reemplazada por una corriente de magnetización a una densidad superficial de carga magnética equivalentes.

Para hallar \vec{B} y \vec{H} separamos los efectos de la corriente de conducción y los de la materia magnetizada, componiéndolos a posteriori para hallar los campos totales.

Si se denominan con \vec{B}_1 y \vec{H}_1 los campos provocados por la corriente de conducción y con \vec{B}_2 y \vec{H}_2 los debidos a la material tendremos:

$$\begin{array}{l|l} \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 & \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \\ \text{Con } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J} & \text{Con } \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_1 = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J} \\ & \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = 0 \\ \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 & \\ F(\vec{B}_2, \vec{H}_2) = 0 \text{ (o cualquiera de sus equivalentes)} & \end{array}$$

Así los campos \vec{B}_1 y \vec{H}_1 serán campos de un solenoide con densidad de corriente \vec{J} , siendo la relación entre ellos $\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1$

Los campos \vec{B}_2 y \vec{H}_2 serán del mismo tipo que los del imán permanente tal como se graficaron en las figuras 7 y 8 respectivamente.

Las sumas vectoriales \vec{B}_1 y \vec{B}_2 y de \vec{H}_1 y \vec{H}_2 darán los campos \vec{B} y \vec{H} respectivamente.

Conclusiones

- 1.- La representación, macroscópica de las propiedades magnéticas de la materia puede describirse totalmente a través, del momento dipolar magnético por unidad de volumen \vec{P}^* .
- 2.- Dos funciones diferenciales de este momento dipolar \vec{P}^* , su rotacional y su divergencia, permiten expresar individualmente las fuentes de los campos magnéticos \vec{B} y \vec{H} debidas a la materia magnetizada.
- 3.- El conocimiento y la individualización de las fuentes que contribuyen a los campos permite analizar en forma sistemática distintos casos típicos, comprendiendo las causas que determinan el comportamiento de los campos \vec{B} y \vec{H} cuando hay materia magnetizada.

Referencias

- I- W.K.H. Panofsky, M. Phillips: "Classical Electricity and Magnetism". Editorial Addison - Wesley Publishing Company. Inc. Segunda Edición, 1962.
- II - P. Hammond: "Electromagnetismo aplicado". Editorial Labor. Barcelona, 1976.