Análisis de Sistemas y Señales
Curso 2023

Tema 5 - Análisis en Frecuencia de Señales y Sistemas Discretos

Santiago Rodríguez

Introducción

Análisis Frecuencial

Transformadas:

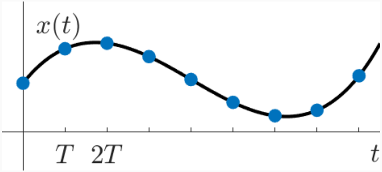
Señales	Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
A-Periódicas	Transformada de Fourier (TF)	Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)
Periódicas	Serie de Fourier (SF) & TF	Serie Discreta de Fourier (SDF) & TFTD

Motivación:

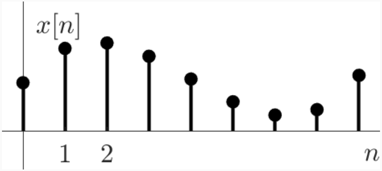
- Análisis Espectral de Señales
- Análisis de la Respuesta de Sistemas

Análisis Frecuencial SVID

- Desde el punto de vista computacional (no-simbólico) no es posible trabajar con funciones de variable independiente continua.
- En general se trabaja con secuencias (funciones de VI discreta).
- Secuencia $x[n]$, con $n \in \mathbb{Z}$, es un conjunto ordenado (sucesión) de valores.
- Dada $x(t)$ real o compleja



  - $x[n] \triangleq x(nT), \quad n \in \mathbb{Z}$
  - *Intervalo de muestreo*: T.
  - *Frec. de muestreo*: $f_s = \dfrac{1}{T}$.



Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

Definición:

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) directa (ecuación de análisis):

$$\boxed{X(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{x[\cdot]\}(e^{j2\pi s}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn}}$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto inversa (o ecuación de síntesis):

$$\boxed{x[n] = \text{TFTD}^{-1}\{X(\cdot)\}[n] \triangleq \int_{-1/2}^{+1/2} X(e^{j2\pi s})e^{j2\pi sn}ds}$$

Propiedades

Propiedades 1

Periodicidad (con período 1 -no necesariamente el fundamental-):

$$X(e^{j2\pi(s+1)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi(s+1)n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn}\cancelto{1}{e^{-j2\pi 1n}} = X(e^{j2\pi s})$$

Linealidad:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X_1(e^{j2\pi s})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X_2(e^{j2\pi s})$$

$$a\,x_1[n] + b\,x_2[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} a\,X_1(e^{j2\pi s}) + b\,X_2(e^{j2\pi s})$$

Propiedades 2

Desplazamiento en Tiempo y en Frecuencia:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} e^{-j2\pi s n_0} X(e^{j2\pi s})$$

$$e^{j2\pi s_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{j2\pi(s-s_0)})$$

Simetrías:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X^*(e^{-j2\pi s})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{-j2\pi s})$$

Propiedades 3

Diferenciar

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} (1 - e^{-j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

Acumular

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} Y(e^{j2\pi s}) = \frac{X(e^{j2\pi s})}{1 - e^{-j2\pi s}} + \underbrace{\frac{1}{2}X(e^{j0})\,\text{Ш}(s)}_{\text{valor medio}}$$

Derivar en frecuencia

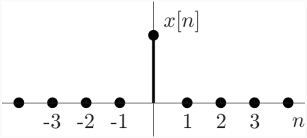
$$n\,x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \frac{j}{2\pi}\frac{dX(e^{j2\pi s})}{ds}$$

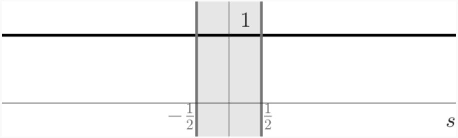
Pares Transformados

Delta de Kronecker

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi ns} = 1$$

$$\delta[n] \supset 1$$

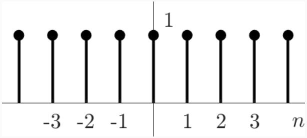


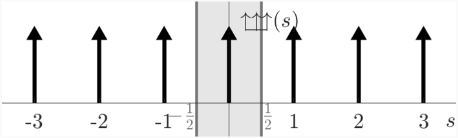


Constante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 e^{-j2\pi ns} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s-k) = ШШ(s)$$

$$1 \supset ШШ(s)$$

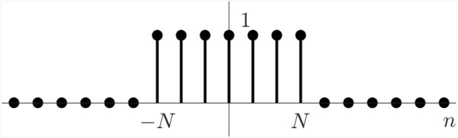




Algunos Pares Transformados 3

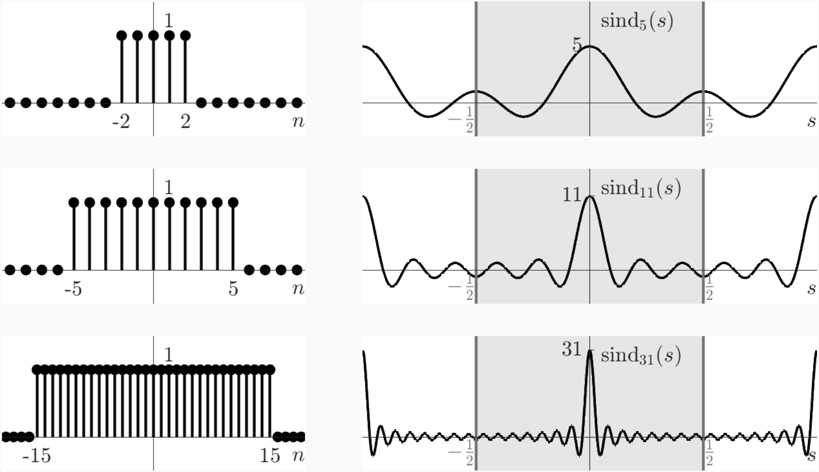
Cajón

$$x[n] = \sqcap_{2N+1}[n]$$



$$\begin{aligned}
X\left(e^{j2\pi s}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j2\pi sn} \\
&= \frac{e^{j2\pi sN} - e^{-j2\pi s(N+1)}}{1 - e^{-j2\pi s}} \\
&= \frac{e^{-j\pi s}}{e^{-j\pi s}} \frac{e^{j2\pi s(N+1/2)} - e^{-j2\pi s(N+1/2)}}{e^{j\pi s} - e^{-j\pi s}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi s)}{\operatorname{sen} \pi s} \\
&= \operatorname{sind}_{2N+1}(s)
\end{aligned}$$

Algunos ejemplos de Cajones y sus transformadas



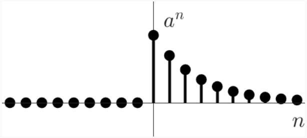
Algunos Pares Transformados 4

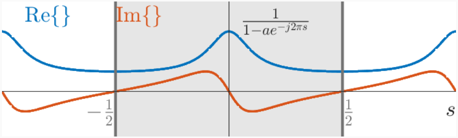
Exponencial unilateral $x[n] = a^n u[n]$ con $|a| < 1$

$$X\left(e^{j2\pi s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi sn}$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}}$$

$$a^n u[n] \supset \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}}$$

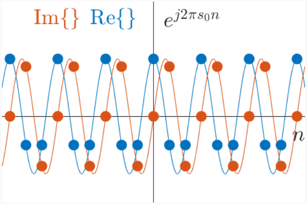


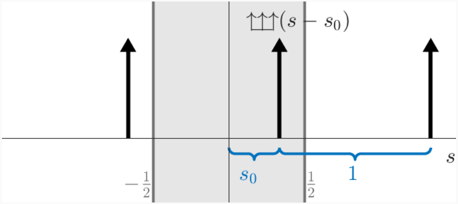


Pares con propiedades: Desplazamiento en frecuencia

Exponencial imaginaria

$$e^{-j2\pi s_0 n} \supset \text{Ш}(s - s_0)$$

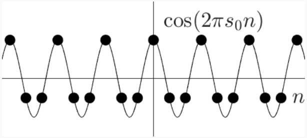


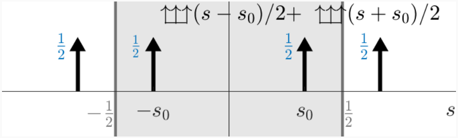


Pares con propiedades: Desplazamiento en frecuencia

Coseno

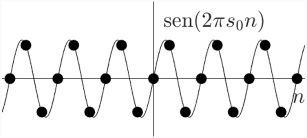
$$\cos(2\pi s_0 n) \supset \frac{1}{2}\,\text{Ш}(s + s_0) + \frac{1}{2}\,\text{Ш}(s - s_0)$$

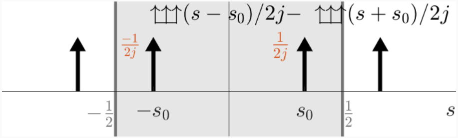




Seno

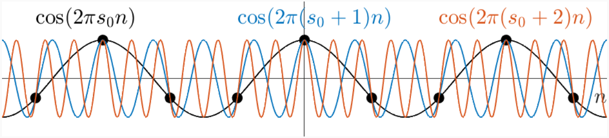
$$\operatorname{sen}(2\pi s_0 n) \supset \frac{j}{2}\,\text{Ш}(s + s_0) - \frac{j}{2}\,\text{Ш}(s - s_0)$$





Frecuencia máxima

$$e^{j2\pi s_0 n} = e^{j2\pi(s_0+N)n} \qquad N \in \mathbb{Z} \text{ y } |s_0| < 1/2$$



$$\begin{aligned}
e^{j2\pi(s_0+N)n} \supset\ & Ш(s - s_0 - N) \\
=\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s - s_0 - N - k) \\
=\ & \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \delta(s - s_0 - k') \\
=\ & Ш(s - s_0)
\end{aligned}$$

Pares con propiedades: Utilizando diferencias

Escalón señal con media

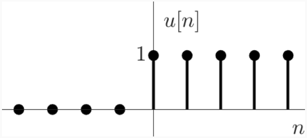
$$u[n] = \bar{u} + \tilde{u}[n] = \frac{1}{2} + \tilde{u}[n]$$

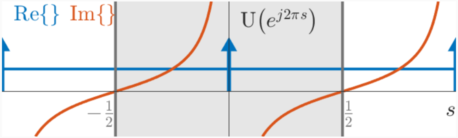
$$U\left(e^{j2\pi s}\right) = \frac{1}{2}\,Ш(s) + \widetilde{U}\left(e^{j2\pi s}\right)$$

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

$$\widetilde{U}\left(e^{j2\pi s}\right) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi s}}$$

$$u[n] \supset \frac{1}{2}\,Ш(s) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi s}}$$





Convolución y producto de secuencias

TFTD de la Convolución de secuencias

Si $x[n] \supset X\left(e^{j2\pi s}\right)$, $y[n] \supset Y\left(e^{j2\pi s}\right)$

$$\{x * y\}[n] \supset X\left(e^{j2\pi s}\right) Y\left(e^{j2\pi s}\right)$$

$$\{x * y\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} X\left(e^{j2\pi s}\right) e^{j2\pi ks}\, ds\, y[n-k]$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X\left(e^{j2\pi s}\right) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi(n-k)s} \right\} e^{j2\pi ns} ds$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X\left(e^{j2\pi s}\right) Y\left(e^{j2\pi s}\right) e^{j2\pi ns} ds = \text{TFTD}^{-1} \left\{ X\left(e^{j2\pi s}\right) Y\left(e^{j2\pi s}\right) \right\}$$

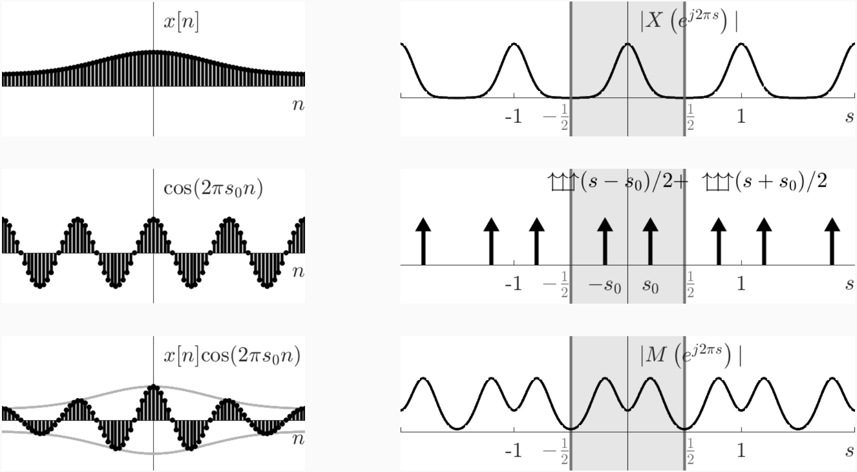
TFTD de la Multiplicación de secuencias

Sea $z[n] = x[n]y[n]$

$$
\begin{aligned}
Z\left(e^{j2\pi s}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k]e^{-j2\pi sk} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} Y\left(e^{j2\pi\lambda}\right) e^{j2\pi k\lambda}\, d\lambda \right\} e^{-j2\pi sk} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} Y\left(e^{j2\pi\lambda}\right) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi(s-\lambda)k} \right\} d\lambda \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} Y\left(e^{j2\pi\lambda}\right) X\left(e^{j2\pi(s-\lambda)}\right) d\lambda = \{X \circledast Y\}\left(e^{j2\pi s}\right)
\end{aligned}
$$

que es una **Convolución Circular** (debido a la periodicidad de X e Y), denotada con $\circledast$.

TFTD de la Multiplicación de secuencias: Modulación



Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teorema de Rayleigh

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(e^{j2\pi s})Y^*(e^{j2\pi s})ds$$

Teorema de Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} |X(e^{j2\pi s})|^2 ds$$

Respuesta en frecuencia de un SLID

Respuesta de un SLID a una exponencial compleja

En forma similar a como hicimos para sistemas LIT, podemos calcular la respuesta de un SLID con respuesta impulsional $h[n]$ a una exponencial compleja de entrada

$$x[n] = e^{j2\pi s_0 n}$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi s_0 (n-m)} h[m]$$

$$y[n] = e^{j2\pi s_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi s_0 m} h[m]$$

$$y[n] = H(e^{j2\pi s_0}) e^{j2\pi s_0 n}$$

Respuesta de un SLID a una exponencial compleja

Tenemos entonces, un resultado similar al que obtuvimos para SLIT

Conclusión:

En un SLID, cuando entra una exponencial compleja, sale una exponencial compleja de la misma frecuencia. Pero su amplitud y fase cambian de acuerdo a $H(e^{j2\pi s_0})$.

Las exponenciales complejas son autofunciones de los SLID y los correspondientes valores $H(e^{j2\pi s_0})$ son los autovalores.

Respuesta en frecuencia de un SLID

Nuevamente, podemos definir la respuesta en frecuencia de un SLID (siempre y cuando este sea estable)

$$H(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi sn}$$

que es la TFTD de la respuesta impulsional.

Respuesta en frecuencia de un SLID

También podemos encontrar una relación entre la respuesta en frecuencia y las transformadas de las señales de entrada y salida. Si suponemos un SLID con respuesta impulsional $h[n]$, tenemos que

$$y[n] = \{x * h\}[n]$$

Y por la propiedad de la transformada de la convolución

$$Y(e^{j2\pi s}) = H(e^{j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

donde $H(e^{j2\pi s})$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Un ejemplo

Supongamos que tenemos un SLID descripto por la ecuación en diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados

$$Y(e^{j2\pi s}) - ae^{-j2\pi s}Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})$$

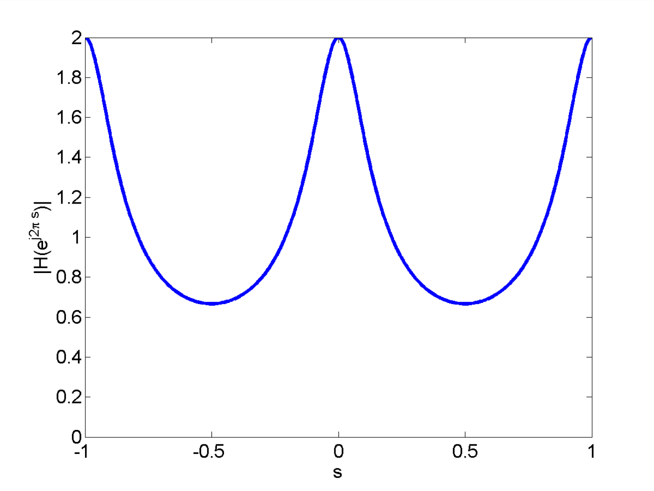
y reacomodando

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}}$$

¿Cuál será la respuesta impulsional?

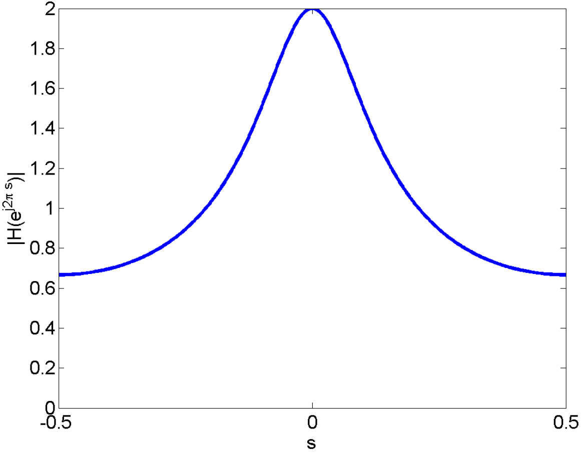
Un ejemplo

Graficamos el módulo de la respuesta en frecuencia para $a = 0{,}5$



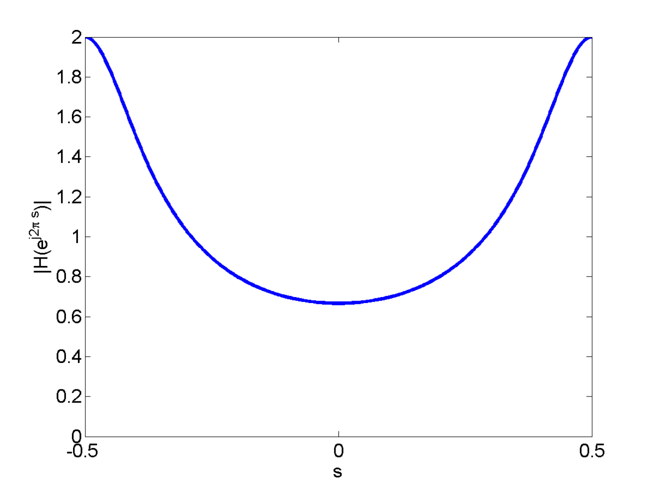
Un ejemplo

Si sólo lo miramos para $s \in [-0{,}5; 0{,}5]$



Un ejemplo

Ahora hacemos lo mismo para $a = -0{,}5$



Serie Discreta de Fourier

Serie Discreta de Fourier (SDF)

Definición:

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n+N]$, $N \in Z$), se puede representar como:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}}$$

donde c_k son los coeficientes de la serie y se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

Teorema útil

Teorema

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = N\delta[(k)_N] = \begin{cases} N & \text{si } (k)_N = 0 \\ 0 & \text{si } (k)_N \neq 0 \end{cases}$$

donde $(k)_N$ denota k *mod* N, el resto de dividir a k por N

- Si $k = mN \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mNn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$.
- Si $k \neq mN$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \frac{e^{j0} - e^{j2\pi kN/N}}{1 - e^{j2\pi k/N}} = \frac{1-1}{1 - e^{j2\pi k/N}} = 0$$

Serie Discreta de Fourier (SDF)

Demostración:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi mk/N} \right) e^{j2\pi nk/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-m)k/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \; N \; \delta[(n-m)_N]$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\delta[(n-m)_N] = x[n]$$

Vinculación con la TFTD

Vinculación de la SDF con la TFTD

Al igual que en el caso de TF, ¿habrá alguna vinculación entre los c_k y la TFTD de un período de la señal?
Podemos pensar que $x[n]$ puede representarse como:

$$x[n] = \{x_1 * \ p_N\}[n]$$

con

$$p_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

Entonces,

$$x_1[n] = \left\{ \begin{array}{ll} x[n] & n = 0 \ldots N-1 \\ 0 & c.c. \end{array} \right\}$$

Vinculación de la SDF con la TFTD

$$X_1(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]e^{-j2\pi sn}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

$$X_1(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]e^{-j2\pi sn}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{N}X_1(e^{j2\pi s})\big|_{s=k/N}}$$

Conclusión

Los c_k pueden obtenerse a partir de la TFTD de UN PERÍODO.

TFTD de una señal periódica

¿Cómo resulta la TFTD de una señal periódica?

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n+N]$, $N \in Z$)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

Por linealidad

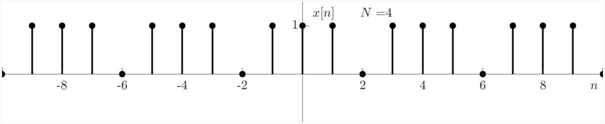
$$\text{TFTD}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \text{TFTD}\{e^{j2\pi nk/N}\}$$

$$\text{TFTD}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \Sha(s - k/N)$$

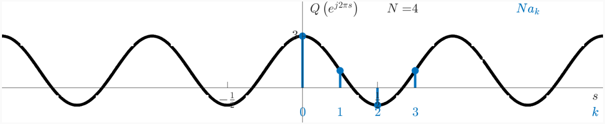
Que también puede demostrarse (camino más largo) a partir de $x[n] = \{x_1 * p_N\}[n]$

Ejemplo de SDF

Ejemplo $\quad q[n] = \sqcap_3[n]$ con período $N = 4, 5, 6, \ldots$

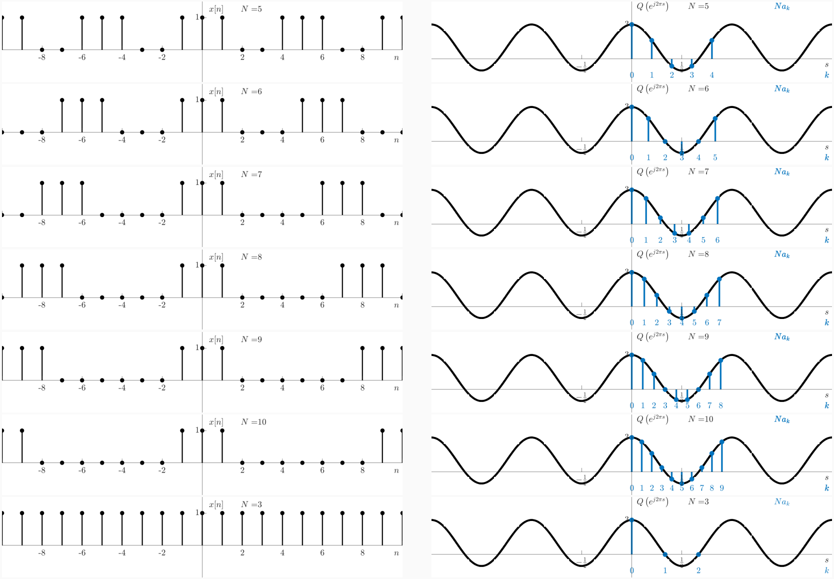


$$Q\left(e^{j2\pi s}\right) = \frac{\operatorname{sen}(3\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)}$$



$$c_k = \frac{1}{N}\frac{\operatorname{sen}(3\pi k/N)}{\operatorname{sen}(\pi k/N)}$$

Señales Periódicas



Ejemplo de SDF

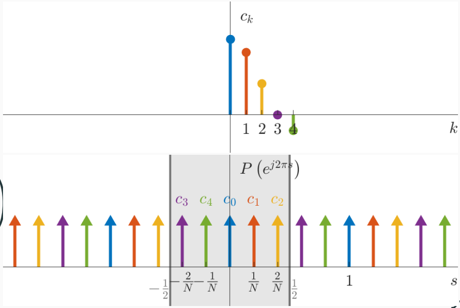
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n] \sqcap_N (n - N/2)\, e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \frac{1}{N} Q\left(e^{j2\pi s}\right)\Big|_{s=\frac{k}{N}}$$

$$P\left(e^{j2\pi s}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k ш\left(s - \frac{k}{N}\right)$$



Señales Periódicas a Través de SLIDs

Señales periódicas a través de SLIDs

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n+N]$, $N \in Z$)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

e ingresa a un SLID con respuesta impulsional $h[n]$, siendo $H(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{h[n]\}$

Por linealidad

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi nk/N}$$

$$\therefore \boxed{d_k = c_k H(e^{j2\pi k/N})}$$