UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE INGENIERIA

Cátedra de Campos y Ondas

Resumen de Fórmulas sobre Reflexión y Refracción de Ondas Planas y Vector de Poynting [1]

[1] Resumen de fórmulas del apunte de la Cátedra: "Notas sobre Ecuaciones de Maxwell, Propagación de Ondas Planas y Vector de Poynting "

ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS LINEALES, ISOTROPICOS Y HOMOGENEOS, PARA CAMPOS CON VARIACION ARMONICA.

Hipótesis

- medios homogéneos, isotrópicos y lineales
- medio acotado espacialmente.
- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo

Considerando que no hay cargas libres en el espacio

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Considerando fasores

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \qquad \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega \dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0 \qquad \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon \dot{\mathbf{E}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)\dot{\mathbf{E}}} \Longrightarrow \boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2 \dot{\mathbf{E}}}$$

Siendo $\overset{*}{\gamma}$ la constante de propagación, un número complejo

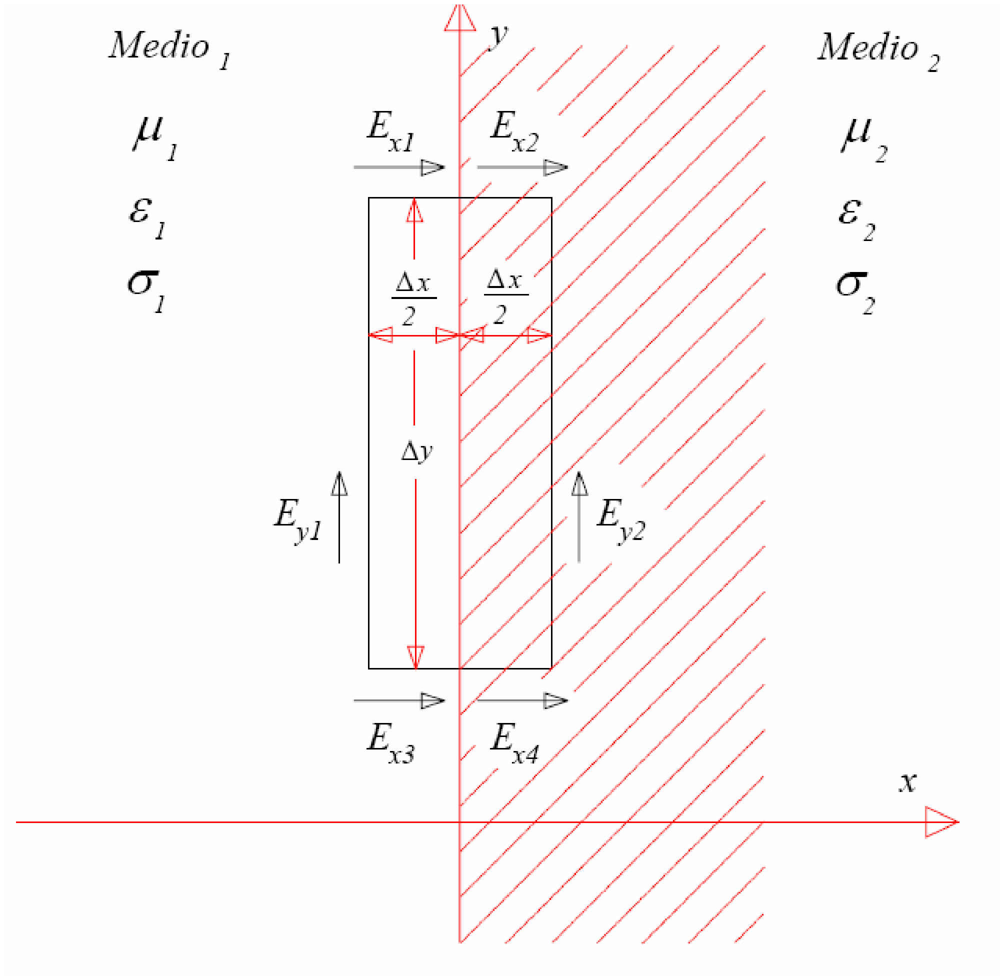
$$\boxed{\overset{*}{\Upsilon} = \sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)} = \alpha + j\beta}$$

Para ondas planas será: $\boxed{\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2 \dot{\mathbf{E}}} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 \dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}{}^2 \dot{E}_y(x)}$

y la solución para el fasor será:

$$\boxed{\dot{E}_y(x) = \overset{*}{C}_1 e^{-\overset{*}{\Upsilon} x} + \overset{*}{C}_2 e^{+\overset{*}{\Upsilon} x} = \dot{E}_i(x) + \dot{E}_r(x)}$$

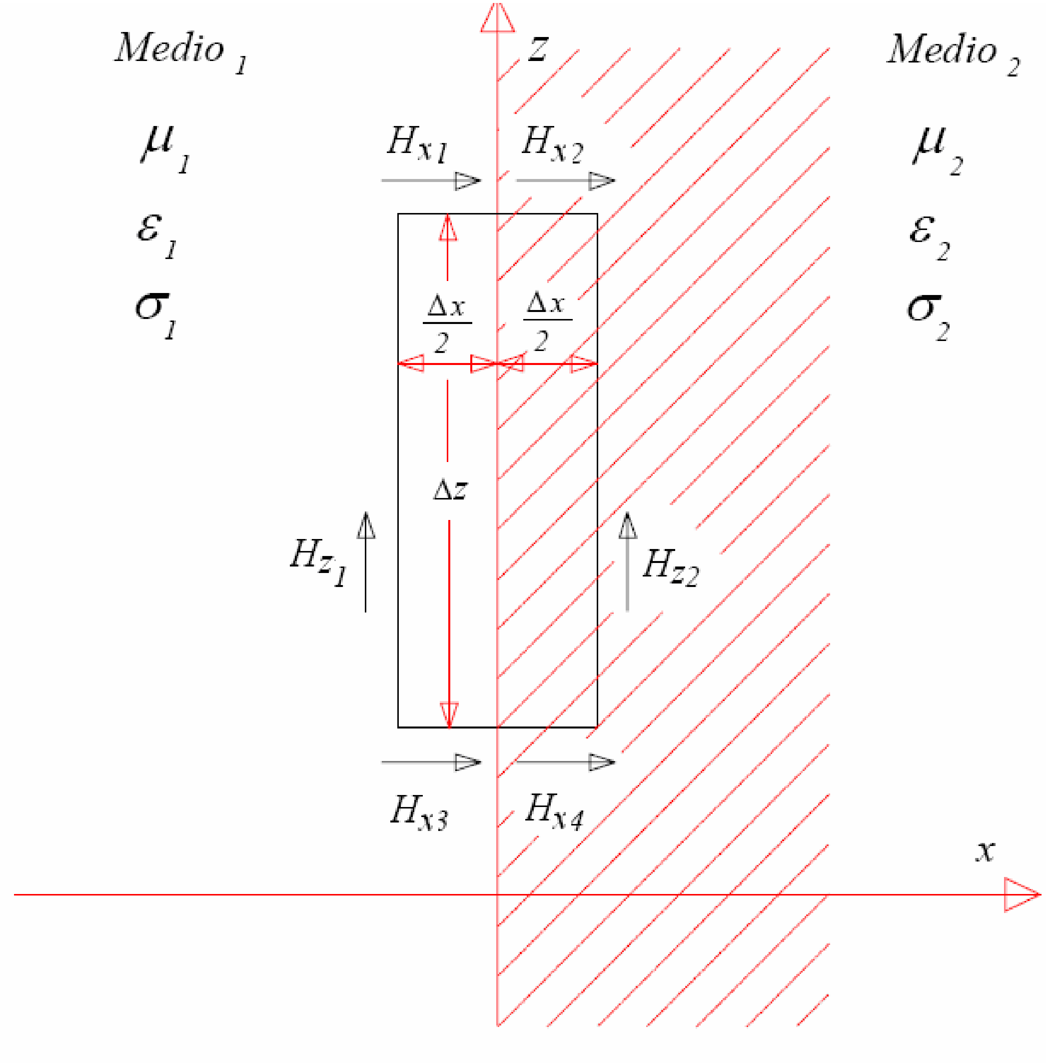
CONDICIONES DE CONTORNO



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq \infty \rightarrow Ey_1 = Ey_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{Et_1 = Et_2}$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq \infty$$

¿puedo asegurar que $\mathbf{J} \neq \infty$???

1) J finita $Hz_1 = Hz_2 \rightarrow Ht_1 = Ht_2$

2) J infinita $Hz_1 \Delta z - Hz_2 \Delta z = \lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x \Delta z$

$$Hz_1 \Delta z - Hz_2 \Delta z = (\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x) \Delta z = i_{ly} \Delta z$$

i_{ly} *corriente laminar,* corriente por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético [A/m]

$$\boxed{Hz_1 - Hz_2 = i_{ly}}$$

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS CON INCIDENCIA NORMAL.

Hipótesis

- dos medios diferentes $\sigma_1 \neq \sigma_2$; $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$; $\mu_1 \neq \mu_2$ (ambos LIH)
- ondas planas
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite

CASO 1: MEDIO 1 DIELECTRICO PERFECTO / MEDIO 2 CONDUCTOR PERFECTO

- $\sigma_1 = 0$ (ε_1 ; $\mu_1 = \mu_0$)
- $\sigma_2 = \infty$; ($\varepsilon_2 = \varepsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$)

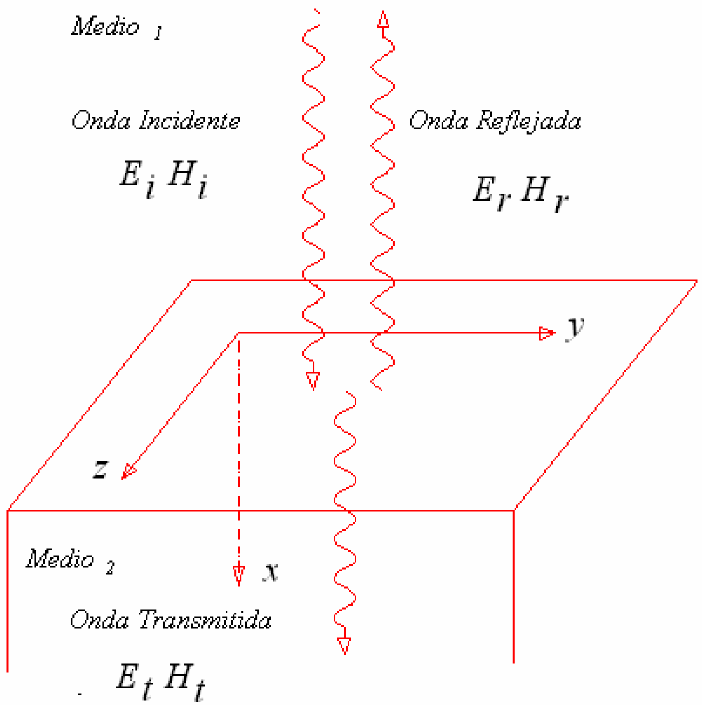


Figura. Reflexión y refracción de ondas planas.

Ecuación diferencial en el medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_y(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_1^{\,2}\, \dot{E}_y(x)}$$

y la solución para el fasor será:

$$\boxed{\dot{E}_y(x) = \overset{*}{C}_1\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} + \overset{*}{C}_2\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = \dot{E}i(x) + \dot{E}r(x)}$$ **<u>medio 1</u>**

Donde $\overset{*}{\Upsilon}_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = \sqrt{j\omega\mu_1(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)} = \sqrt{j\omega\mu_0(0 + j\omega\varepsilon_1)} = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$,

$$\overset{*}{\Upsilon}_1 = 0 + j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$$

es decir $\alpha_1 = 0$ y $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$

El medio 1 no tiene pérdidas por lo tanto no tiene atenuación(α_1=0)

Supongamos conocida la onda incidente y deduzcamos la onda reflejada a partir de las condiciones de contorno. Al ser la incidencia normal, sólo habrá componente tangencial:

Componente tangencial de campo eléctrico siempre se conserva: $E_{tang1} = E_{tang2}$

Componente tangencial de campo magnético ¿se conserva???? $H_{tang1} = ? \neq ?\, H_{tang2}$

El medio 2 es un conductor ideal por lo tanto no deja penetrar al campo, $\delta_2 = 0$

En el medio 2, para x > 0 o sea adentro del conductor ideal =► E = 0

$$\Rightarrow E_2 = 0; \text{o sea } E_{transmitida} = 0$$

en x = 0 ══► $E_2 = 0 \Leftrightarrow E_1 = 0$ por condición de contorno

$$E_1 = 0 = Ei(0) + Er(0)$$

$$Er(0) = -Ei(0)$$

Sea la onda incidente (por simplicidad asumimos $\varphi_{Ei}=0$)

$$\boxed{Ei_y(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x)}$$

La parte compleja del fasor correspondiente al campo eléctrico será :

$$\boxed{\dot{E}\, i(x) = \dot{E}_i\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_0 e^{-0x - j\beta_1 x + 0}}$$

De la onda reflejada sabemos que viaja en el medio1, $\overset{*}{\Upsilon}_1$ y en sentido negativo de x

$$\boxed{\dot{E}\, r(x) = \overset{*}{E}_r\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_{r0} e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x + j\rho_{RE}}}$$

en x =0

$$\dot{E}\,i(0) = E_0\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 0} = E_0 = -\dot{E}\,r(0)$$

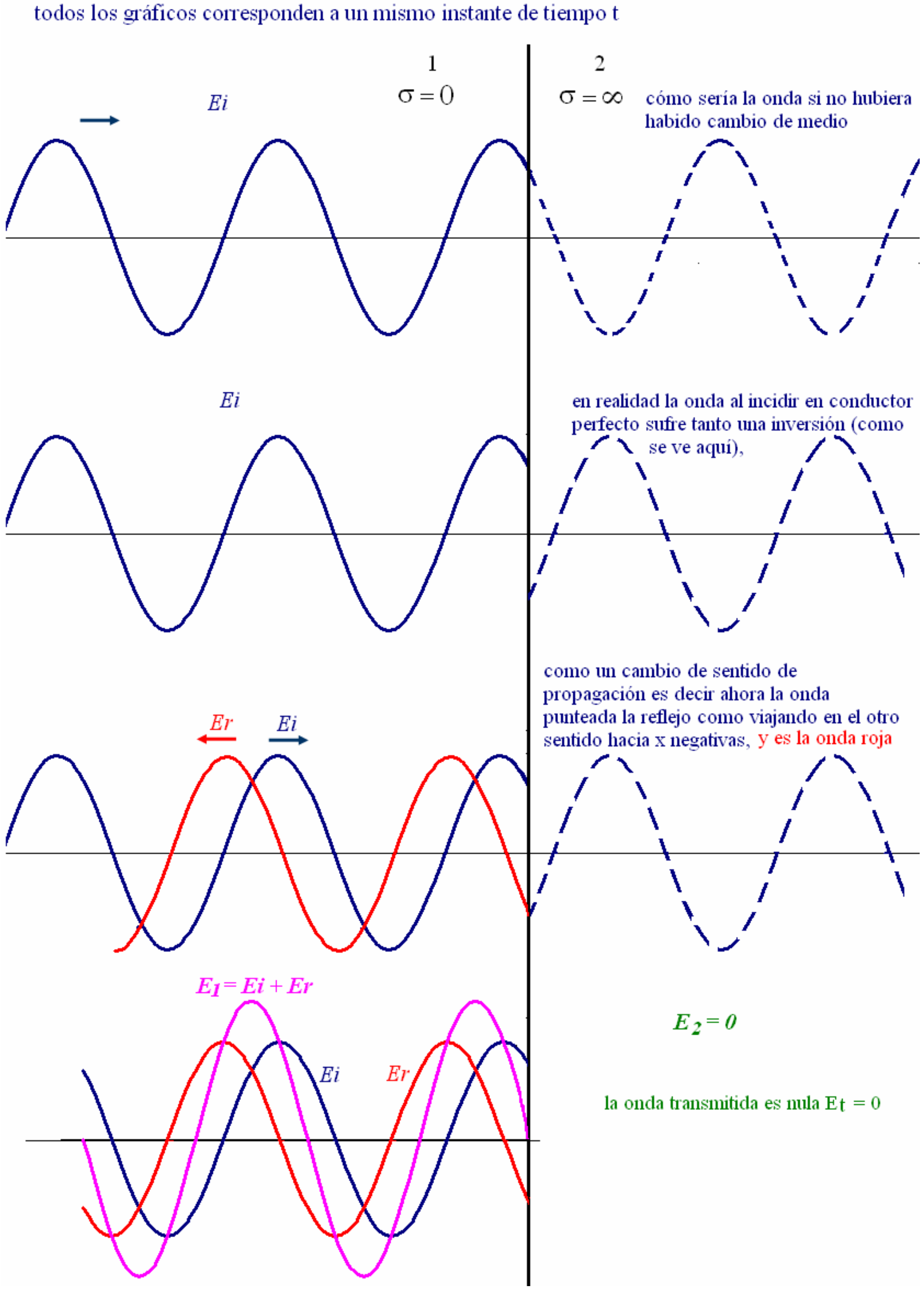
$$\boxed{\dot{E}\,r(0) = E_{r0} e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 0 + j\varphi_{RE}} = -E_0}$$

$$\boxed{\dot{E}r(x) = -E_0 e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x}}$$

La solución para la onda reflejada será:

$$\boxed{Er(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$

$$\boxed{E_1(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 x) - E_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$



$$\dot{E}_1 = \dot{E}_i + \dot{E}_r = E_0 e^{-j\beta_1 x} - E_0 e^{j\beta_1 x} = E_0\left(e^{-j\beta_1 x} - e^{j\beta_1 x}\right)$$

$$\dot{E}_1 = -E_0 2j \frac{\left(e^{j\beta_1 x} - e^{-j\beta_1 x}\right)}{2j} \quad E_1(x,t) = \mathrm{Re}\,al\left[-E_0 2j \frac{\left(e^{j\beta_1 x} - e^{-j\beta_1 x}\right)}{2j} e^{j\omega t}\right]$$

Reconociendo la expresión exponencial del seno trigonométrico:

$$E_1(x,t) = \mathrm{Re}\,al\left[-2jE_0\, e^{j\omega t}\,\mathrm{sen}\left(\beta_1 x\right)\right] = \mathrm{Re}\,al\left[2E_0\, e^{j(\omega t - \pi/2)}\,\mathrm{sen}\left(\beta_1 x\right)\right]$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo eléctrico en el medio 1 (vacío) resulta ser:

$$\boxed{E_{1y}(x,t) = 2E_0\,\mathrm{sen}\left(\beta_1 x\right)\mathrm{sen}\left(\omega t\right)} \text{ ONDA ESTACIONARIA}$$

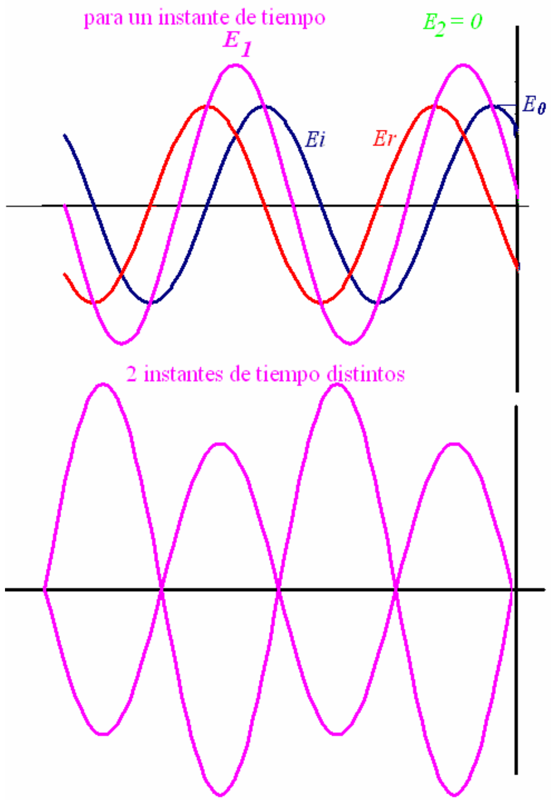
$$E_x = E_z = 0$$

Onda estacionaria de campo eléctrico: no transporta energía

Vientres : máxima amplitud $2E_0$

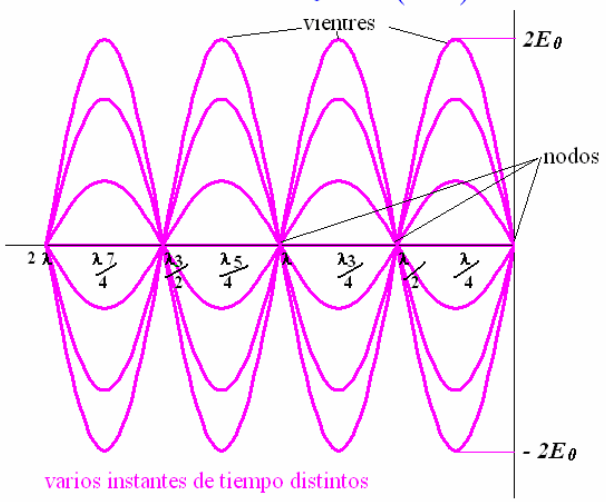
Envolvente de la onda estacionaria (lugar geométrico de los máximos en cada punto del espacio):

$$Envolvente \Rightarrow \pm 2E_0\,\mathrm{sen}\left(\beta x\right)$$



Onda estacionaria

$$Envolvente = 2E_0 \,\text{sen}(\beta x)$$



Onda estacionaria

$$E_{1y} = 2E_0 \,\text{sen}(\beta x)\,\text{sen}(\omega t)$$

nodos:

$\text{sen}(\beta x) = 0$

$(\beta x) = n\pi$

$x = \dfrac{n\pi}{\beta}$ $\qquad \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{x = \frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\lambda = \frac{n\lambda}{2}\ ;\ n = 0,1,2..}$$

vientres

$\text{sen}(\beta x) = +/-1$

$(\beta x) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}\ ;\ n = 0,1,2..}$$

Conocida la onda incidente así como la reflejada, del campo eléctrico, cómo puedo ahora conocer tanto la onda incidente como la reflejada del campo magnético???

Sabemos que una vez conocida la onda del campo eléctrico, la onda del campo magnético se puede obtener a través de la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega \dot{\mathbf{H}}$$

Recordemos que cuando teníamos una onda plana viajando por un medio ilimitado esta misma ecuación es la que nos permitió definir la impedancia intrínseca del medio $\overset{*}{\eta}$ como:

$$\overset{*}{\eta} = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}$$ la cual resultaba $$\overset{*}{\eta} = \frac{j\omega\mu}{\overset{*}{\Upsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}$$

Veremos que aplicando nuevamente $\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\mu\omega \dot{\mathbf{H}}$ para la onda incidente obtendremos el mismo resultado:

$$\boxed{\frac{\dot{Ei}_y}{\dot{Hi}_z} = \frac{j\omega\mu_1}{\overset{*}{\Upsilon}_1} = \overset{*}{\eta}_1}$$

Pero al deducir la onda reflejada del campo magnético por medio de la ecuación de Maxwell y realizar el cociente entre el fasor H y el fasor E obtendremos el valor negativo de la impedancia intrínseca del medio :

$$\boxed{\frac{\dot{Er}_y}{\dot{Hr}_z} = -\frac{j\omega\mu_1}{\overset{*}{\Upsilon}_1} = -\overset{*}{\eta}_1}$$

Por lo tanto es posible obtener las dos ondas de campo magnético (incidente y reflejada) a partir de las ondas de campo eléctrico (incidente y reflejada) y $\overset{*}{\eta}$ según las siguientes relaciones:

$$\boxed{\frac{\dot{E}i_y}{\dot{H}i_z} = \overset{*}{\eta}_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{E}r_y}{\dot{H}r_z} = -\overset{*}{\eta}_1}$$

A partir de la impedancia intrínseca del medio 1 (dieléctrico sin pérdidas)

$$\overset{*}{\eta}_1 = \frac{j\omega\mu_0}{\sqrt{j\omega\mu_0(0 + j\omega\varepsilon_1)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \text{ es un número real}$$

$$\frac{\dot{E}i_y}{\dot{H}i_z} = \overset{*}{\eta}_1$$

$$\dot{H}\, i(x) = \frac{\dot{E}\, i(x)}{\overset{*}{\eta}_1} = \frac{E_0}{|\eta_1|} e^{-j\beta_1 - \varphi_{\eta 1}}$$

$$\boxed{Hi(x,t) = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_1}} \cos(\omega t - \beta_1 x) = H_0 \cos(\omega t - \beta_1 x)}$$

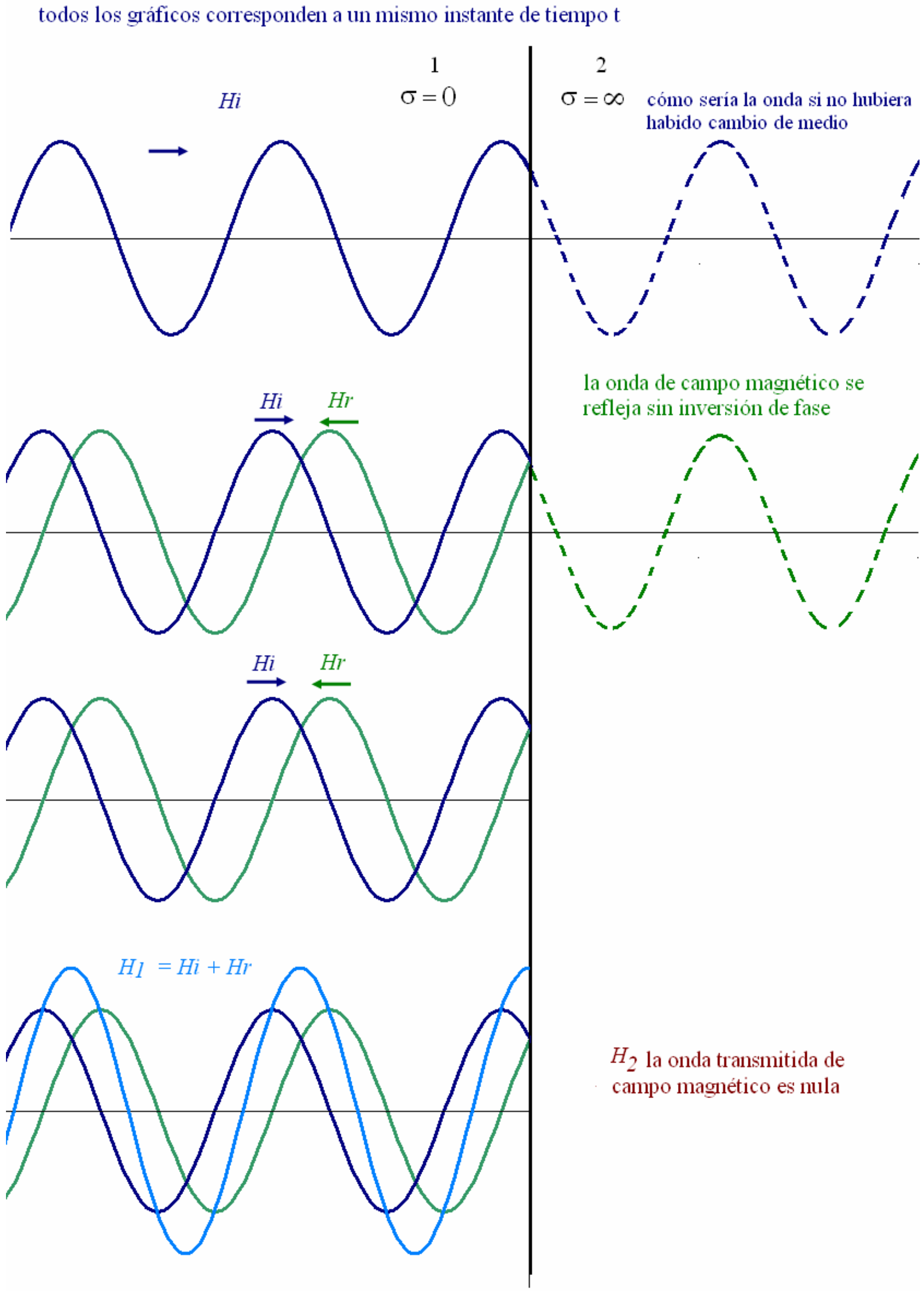
$$\frac{\dot{Er}_y}{\dot{Hr}_z} = -\overset{*}{\eta}_1$$

$$\dot{H}\, r(x) = \frac{\dot{E}\, r(x)}{-\overset{*}{\eta}_1} = \frac{-E_0}{-|\eta_1|} e^{+j\beta_1 - \varphi_{\eta 1}}$$

$$\boxed{Hr(x,t) = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_1}} \cos(\omega t + \beta_1 x) = H_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$

$$H_1(x,t) = Hi(x,t) + Hr(x,t)$$

$$\boxed{H_1(x,t) = H_0 \cos(\omega t - \beta_1 x) + H_0 \cos(\omega t + \beta_1 x)}$$



$$\dot{H}_1 = \dot{H}_i + \dot{H}_r = H_0 e^{-j\beta_1 x} + H_0 e^{j\beta_1 x} = H_0 \left(e^{-j\beta_1 x} + e^{j\beta_1 x} \right)$$

$$\dot{H}_1 = H_0 2 \frac{\left(e^{j\beta_1 x} + e^{-j\beta_1 x} \right)}{2}$$

Reconociendo la expresión exponencial del coseno trigonométrico:

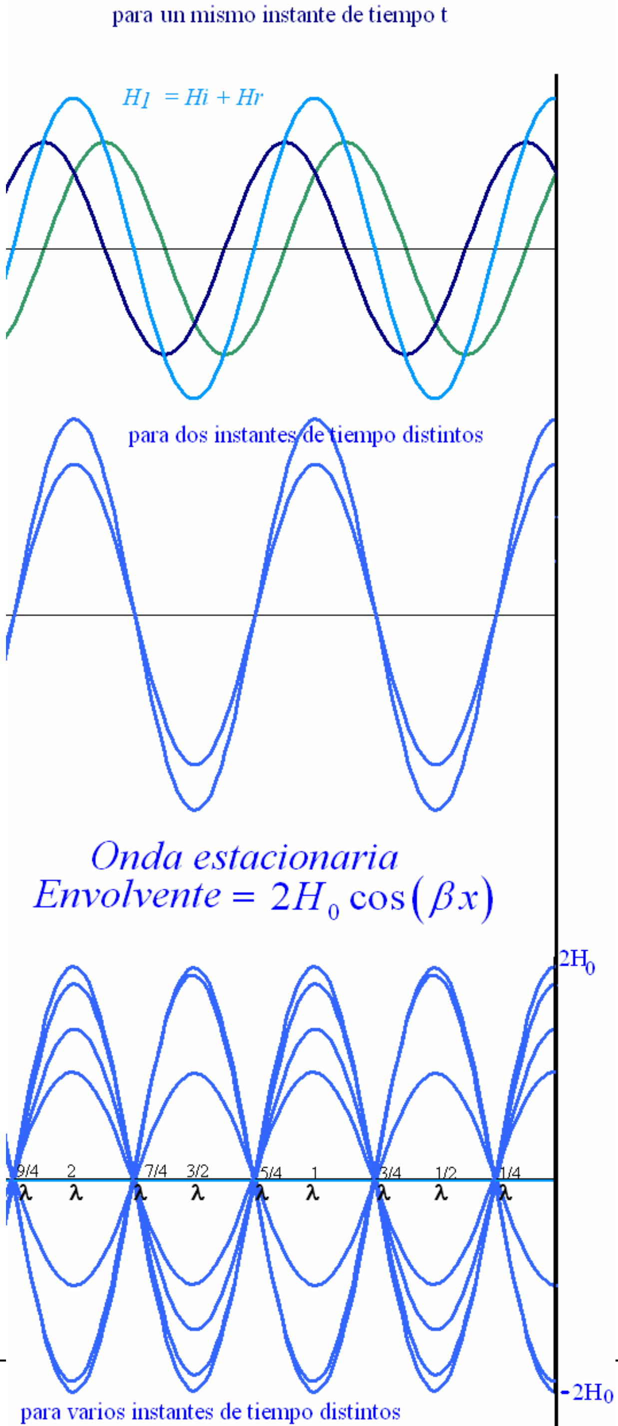
$$H_1(x,t) = \mathrm{Re}\,al\left[2H_0\, e^{j\omega t} \cos\left(\beta_1 x\right) \right] =$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo magnético en el medio 1 (vacío) resulta ser:

$$\boxed{H_{1z} = 2H_0 \cos\left(\beta_1 x\right) \cos\left(\omega t\right)}$$ ONDA ESTACIONARIA

$$H_x = H_y = 0$$

$$Envolvente \Rightarrow \pm 2H_0 \cos\left(\beta x\right)$$



Onda estacionaria

$$Envolvente = 2H_0 \cos(\beta x)$$

nodos:

$$\cos(\beta x) = 0$$

$$(\beta x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad ; \quad n=0,1,2..}$$

vientres

$$\cos(\beta x) = +/-1$$

$$(\beta x) = n\pi$$

$$x = \frac{n\pi}{\beta} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\boxed{x = \frac{n\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\lambda = \frac{n\lambda}{2} ; n=0,1,2..}$$

Observará el alumno que NO hemos obtenido el valor de la onda reflejada de campo magnético a partir de la incidente y las condiciones de contorno. Y esto es así pues la condición de contorno para la componente tangencial del campo magnético implicaba que esta componente se **conservaba si y sólo si se podía asegurar que la densidad de corriente NO ERA INFINITA,** sin embargo estamos frente al único caso en el cual no es posible asegurar esto, pues no es posible asegurar que J sea finita. En este caso en el cual el material sobre el que se refleja la onda de campo magnético es un conductor ideal de conductividad infintia (σ = ∞) no es posible resolver la ecuación de la ley de Ohm puntual (J = σ E) en la superficie de separación.

Es decir por ser un conductor ideal sé que es imposible que los campos lo penetren (δ=0) es decir tanto E como J y H serán cero en el interior o sea para x > 0, pero aún no sé cuanto valdrán en x = 0. De la condición de contorno de la componente tangencial del campo eléctrico sé que esta se conserva SIEMPRE, por lo tanto si E es cero para x > 0 también será cero en x = 0.

Entonces cuando pretenda resolver la ley de Ohm puntual (J = σ E) en la superficie de separación tendré una indefinición:

J = ∞ . 0 = ?? indefinido ; en x = 0

Es por ello que este camino no me permite resolver la condición de contorno y poder deducir cuánto vale el campo magnético reflejado a partir de conocer el incidente. Sino el camino correcto es el que ya realizamos, es decir conociendo el campo eléctrico reflejado y aplicando la relación $\frac{\dot{Er}_y}{\dot{Hr}_z} = -\overset{*}{\eta}$ obtenemos el campo magnético reflejado.

Ahora que conocemos tanto la onda incidente como la reflejada de campo magnético, entonces para x = 0 podremos ver qué condición de contorno se cumple:

$$Hz_1 \underset{=}{?} Hz_2$$

$$H_1(0,t) = 2H_0 \cos(\omega t)$$

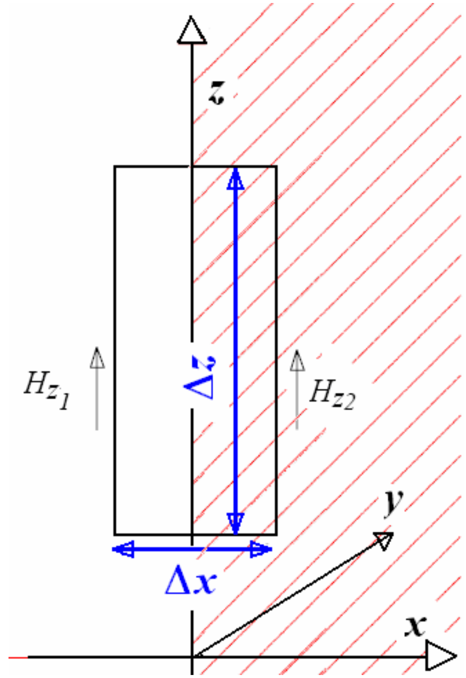
$$H_2(0,t) = 0$$

$$H_1(0,t) \neq H_2(0,t)$$

Entonces si H no se conserva es porque hay una densidad de corriente $\boldsymbol{J_y}$ infinita, es decir una corriente que fluye por un **área de espesor nulo**. Es posible definir entonces una corriente laminar i_{ly} como :

$$\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x) = i_{ly}$$

i_{ly} *corriente laminar,* corriente por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético [A/m]



Recordando las condiciones de contorno dicha corriente laminar es igual a la diferencia entre los campos magnéticos a uno y otro lado de la superficie de separación:

$$Hz_1 \Delta z - Hz_2 \Delta z = (\lim_{\Delta x \to 0} J_y \Delta x)\Delta z = i_{ly} \Delta z$$

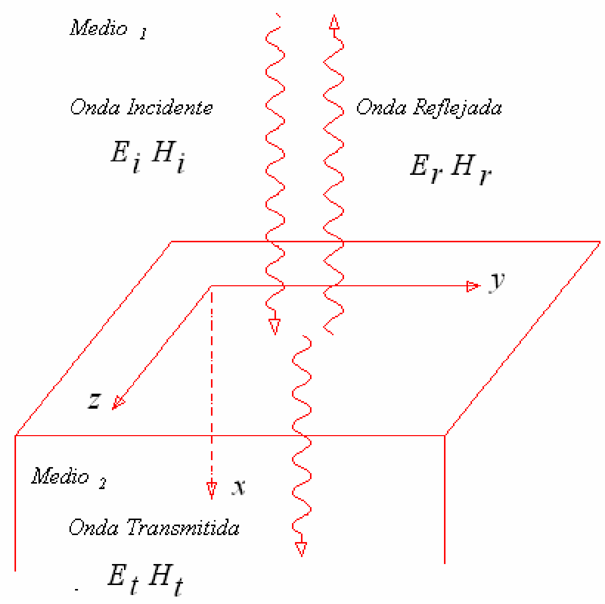
$$H_1 - H_2 = i_{ly}$$

$$H_1 - 0 = i_{ly} = 2H_0 \cos(\omega t) \quad \boxed{\text{corriente laminar } i_{ly} = 2H_0 \cos(\omega t) \text{ [A/m]}}$$

CASO 2 (GENERAL): MEDIO 1 / MEDIO 2

Hipótesis

- dos medios diferentes , ambos LIH
- $(\sigma_1 ; \varepsilon_1 ; \mu_1); (\sigma_2 ; \varepsilon_2 ; \mu_2)$
- ondas planas [$E_x=E_z=0$; $E_y(x,t)$ se propaga en la dirección de x]
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite



$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{1y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_1^2\, \dot{E}_{1y}(x)}$$

Medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{2y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_2^2\, \dot{E}_{2y}(x)}$$

Medio 2

La solución en el Medio 1 implicará una onda incidente Ei y una reflejada Er

La solución en el Medio 2 implicará una onda transmitida Et

$$\boxed{\dot{E}_{1y}(x) = \overset{*}{\mathrm{A}}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} + \overset{*}{\mathrm{B}}\, e^{+\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = \dot{E}i(x) + \dot{E}r(x)}$$

$$\boxed{\dot{E}_{2y}(x) = \overset{*}{C}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_2 x} = \dot{E}t(x)}$$

Supongamos conocida ***Ei***(x,t):

$$\boxed{Ei(x,t) = E_m e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x + 0)}$$

Su forma fasorial será:

$$\dot{E}i(x) = \overset{*}{A}\, e^{-\overset{*}{\Upsilon}_1 x} = E_m e^{-\alpha_1 x - j\beta_1 x + 0}$$

A partir de la onda incidente de campo eléctrico $\dot{E}i(x)$, más las condiciones de contorno y las impedancias intrínsecas de ambos medios $\overset{*}{\eta}_1$ y $\overset{*}{\eta}_2$, es posible obtener el resto de las ondas es decir:

- onda reflejada de campo eléctrico $\dot{E}r(x)$
- onda transmitida de campo eléctrico $\dot{E}t(x)$
- onda incidente de campo magnético $\dot{H}i(x)$
- onda reflejada de campo magnético $\dot{H}r(x)$
- onda transmitida de campo magnético $\dot{H}t(x)$

CONDICIONES DE CONTORNO

$$\boxed{E_{\text{tang}1} = E_{\text{tang}2}}$$

$\boxed{H_{\text{tang}1} = H_{\text{tang}2}}$ siempre y cuando ninguno de los medios sea un conductor ideal

en x = o que es donde se ubica la superficie de separación de los dos medios:

$$\dot{E}i(0) + \dot{E}r(0) = \dot{E}t(0) \Rightarrow \overset{*}{\eta}_1 \dot{H}i(0) - \overset{*}{\eta}_1 \dot{H}r(0) = \overset{*}{\eta}_2 \dot{H}t(0)$$

$$\dot{H}i(0) + \dot{H}r(0) = \dot{H}t(0) \Rightarrow \frac{\dot{E}i(0)}{\overset{*}{\eta}_1} - \frac{\dot{E}r(0)}{\overset{*}{\eta}_1} = \frac{\dot{E}t(0)}{\overset{*}{\eta}_2}$$

coeficientes me dan relaciones entre las componentes reflejada y/o transmitida, respecto de la incidente:

$$\boxed{\overset{*}{\rho}_{RE} = \frac{\dot{E}r(0)}{\dot{E}i(0)} = \frac{\overset{*}{\eta}_2 - \overset{*}{\eta}_1}{\overset{*}{\eta}_2 + \overset{*}{\eta}_1}} \qquad \boxed{\overset{*}{\rho}_{TE} = \frac{\dot{E}t(0)}{\dot{E}i(0)} = \frac{2\overset{*}{\eta}_2}{\overset{*}{\eta}_2 + \overset{*}{\eta}_1}}$$

$$\boxed{\overset{*}{\rho}_{RH} = \frac{\dot{H}r(0)}{\dot{H}i(0)} = \frac{\overset{*}{\eta}_1 - \overset{*}{\eta}_2}{\overset{*}{\eta}_2 + \overset{*}{\eta}_1}} \qquad \boxed{\overset{*}{\rho}_{TH} = \frac{\dot{H}t(0)}{\dot{H}i(0)} = \frac{2\overset{*}{\eta}_1}{\overset{*}{\eta}_2 + \overset{*}{\eta}_1}}$$

´

$\overset{*}{\rho}_{RE} = |\rho_{RE}| e^{j\varphi_{RE}}$, a partir de $\dot{E}i(0) = E_m e^{-\alpha_1 0 - j\beta_1 0} = E_m$

$$\dot{E}r(0) = \dot{E}i(0)|\rho_{RE}| e^{j\varphi_{RE}} = |\rho_{RE}| E_m e^{j\varphi_{RE}}$$

$$\dot{E}r(x) = \overset{*}{\mathrm{B}}\, e^{+\overset{*}{\gamma}_1 x} = |\rho_{RE}| E_m e^{\alpha_1 x + j(\beta_1 x + \varphi_{RE})}$$

$$\boxed{Er(x,t) = |\rho_{RE}| E_m e^{\alpha_1 x} \cos(\omega t + \beta_1 x + \varphi_{RE})}$$

$$\boxed{Et(x,t) = |\rho_{TE}| E_m e^{-\alpha_2 x} \cos(\omega t - \beta_2 x + \varphi_{TE})}$$

$$\boxed{Hi(x,t) = \frac{E_m}{|\eta_1|} e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x - \phi_\eta) = H_m e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega t - \beta_1 x - \phi_\eta)}$$

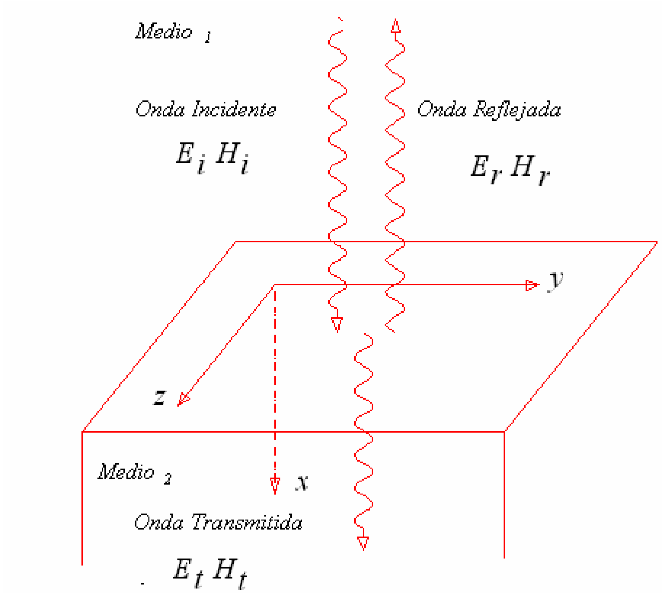
$$\boxed{Hr(x,t) = |\rho_{RH}| H_m e^{\alpha_1 x} \cos(\omega t + \beta_1 x - \phi_\eta + \varphi_{RH})}$$

$$\boxed{Ht(x,t) = |\rho_{TH}| H_m e^{-\alpha_2 x} \cos(\omega t - \beta_2 x - \phi_\eta + \varphi_{TH})}$$

CASO 3: MEDIO 1 DIELECTRICO sin pérdidas / MEDIO 2 DIELECTRICO sin pérdidas

Hipótesis

- dos medios diferentes , ambos LIH
- $\sigma_1 = 0$; $(\varepsilon_1\ ;\ \mu_1)$; $\sigma_2 = 0$; $(\varepsilon_2\ ;\ \mu_2)$
- ondas planas [E_x=E_z=0; $E_y(x,t)$ se propaga en la dirección de x]
- campos armónicos en el tiempo
- incidencia normal a la superficie límite



$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{1y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_1^{\,2}\, \dot{E}_{1y}(x)}$$

Medio 1

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{E}_{2y}(x)}{\partial x^2} = \overset{*}{\Upsilon}_2^{\,2}\, \dot{E}_{2y}(x)}$$

Medio 2

La solución en el Medio 1 implicará una onda incidente Ei y una reflejada Er

$$\boxed{E_1(x,t) = Ei(x,t) + Er(x,t)}$$

La solución en el Medio 2 implicará una onda transmitida Et

$$\boxed{E_2(x,t) = Et(x,t)}$$

Para medios sin pérdidas (σ = 0)

$\overset{*}{\Upsilon}_1$ y $\overset{*}{\Upsilon}_2$ son números reales

Medio 1:

$$E_1(x,t) = \mathrm{Real}\left\{Ei_m \; e^{j(\omega t - \beta_1 x + 0)} + Er_m \; e^{j(\omega t + \beta_1 x + \varphi_{Er})}\right\}$$

Tratamiento fasorial

$$\dot{E}_1(x) = Ei_m \; e^{j(-\beta_1 x + 0)} + Er_m \; e^{j(+\beta_1 x + \varphi_{Er})}$$

Medio 2:

$$\dot{E}_2(x) = Et_m \; e^{j(-\beta_2 x + \varphi_{tE})}$$

Aplicando condiciones de contorno (en x = 0)

- Componente tangencial de campo eléctrico se conserva

$$\dot{E}_1(0) = \dot{E}_2(0)$$

$$Ei_m e^{j0} + Er_m e^{j(0+\varphi_{rE})} = Et_m e^{j(0+\varphi_{tE})}$$

Para medios sin pérdidas (σ = 0)

$\overset{*}{\eta}_1$ y $\overset{*}{\eta}_2$ son números reales $\therefore$ $\overset{*}{\rho}_{RE}$; $\overset{*}{\rho}_{TE}$; $\overset{*}{\rho}_{RH}$; $\overset{*}{\rho}_{TH}$ son números reales

Superposición de ondas viajeras en el medio 1

$$\dot{E}_1(x) = Ei_m \; e^{-j\beta_1 x} + Er_m \; e^{+j\beta_1 x} =$$

$$= Ei_m \; e^{-j\beta_1 x} - Er_m \; e^{-j\beta_1 x} + Er_m \; e^{-j\beta_1 x} + Er_m \; e^{+j\beta_1 x} =$$

$$= (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + Er_m \; (e^{-j\beta_1 x} + e^{+j\beta_1 x}) =$$

$$= (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + 2Er_m \; \frac{(e^{-j\beta_1 x} + e^{+j\beta_1 x})}{2} =$$

$$= (Ei_m - Er_m)e^{-j\beta_1 x} + 2Er_m \; \cos(\beta_1 x)$$

Multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando parte real:

$$\boxed{E_1(x,t) = (Ei_m - Er_m)\cos(\omega t - \beta_1 x) + 2Er_m \; \cos(\omega t)\cos(\beta_1 x)}$$

PROGRESIVA + ESTACIONARIA

RELACIÓN DE ONDA ESTACIONARIA (ROE)

la relación entre las intensidades de campo (eléctrico o magnético) en los vientres y valles.

$$ROE = \frac{|Vientres|}{|Valles|} = \frac{|Ei_m| + |Er_m|}{|Ei_m| - |Er_m|} = \frac{1 + |\rho_{RE}|}{1 - |\rho_{RE}|}$$

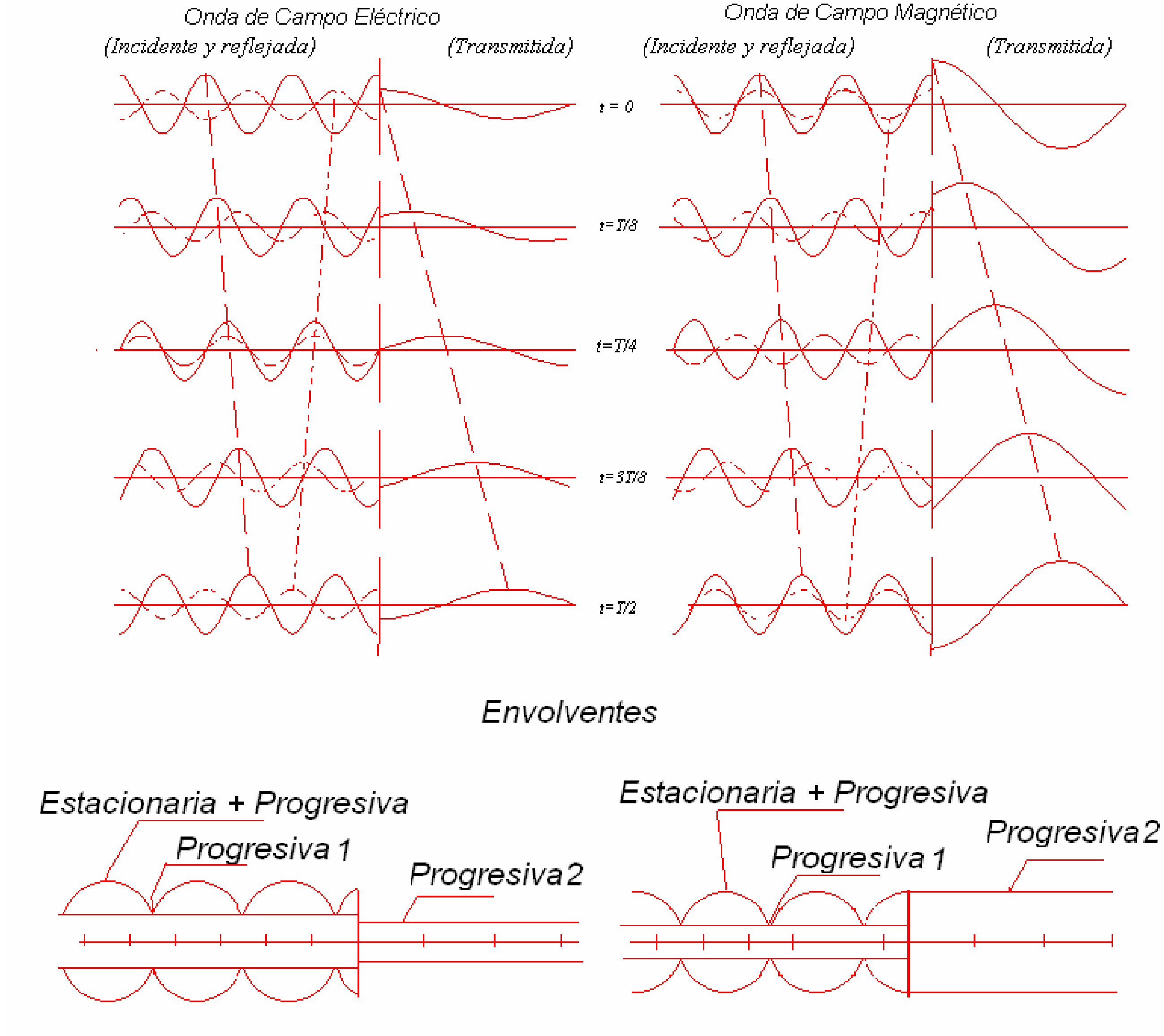
$$\boxed{1 \leq |ROE| < \infty}$$

ROE = 1 para onda PROGRESIVA PURA

ROE = ∞ para onda ESTACIONARIA PURA

ROE = 1, cuando el coeficiente de reflexión es nulo (medios completamente adaptados).

ROE = ∞, cuando el coeficiente de reflexión es unitario (medios completamente desadaptados).



Reflexión y refracción de ondas planas sobre superficie dieléctrica perfecta.

Onda progresiva y onda estacionaria en distintos instantes de tiempo