

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE INGENIERIA

IITREE - Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos

Cátedra de Campos y Ondas

Notas sobre Radiación y Antenas

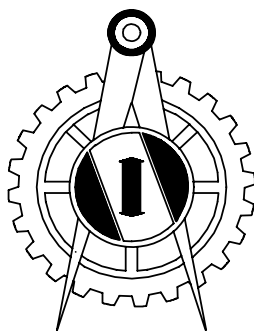
Por los Ings.

Roberto H. Frediani

Jorge L. Agüero

Juan C. Barbero

M. Beatriz Barbieri



C.E.I.L.P.

1. Potenciales Dinámicos

El conjunto de ecuaciones diferenciales o puntuales conocidas como ecuaciones de Maxwell, junto con ciertas relaciones auxiliares (ecuaciones constitutivas de campo eléctrico y magnético, Ley de Ohm), contienen la información necesaria y suficiente para obtener los campos eléctricos y magnéticos producidos por cargas y corrientes.

Algunas veces es conveniente poner la información disponible en una forma diferente. En el caso de campos estáticos, resultó útil el uso de nuevas funciones conocidas como potenciales para la resolución de problemas. Pareciera conveniente el empleo de estas funciones potenciales para resolver problemas más generales, que involucren cargas y corrientes variables en el tiempo.

Las funciones potenciales para campos estáticos fueron dadas en términos de expresiones integrales de cargas y corrientes, y, a partir de su derivación, se determinaron los campos estáticos correspondientes. Se podría pensar en funciones potenciales más generales, denominados dinámicos, como integrales de cargas y corrientes variables en el tiempo, a partir de los cuales, derivación mediante, se podrían obtener los respectivos campos variables en el tiempo.

Especulando sobre la forma que podría adoptar la función potencial para el campo eléctrico, se podría pretender, para simplificar el problema, que la misma sea el gradiente de un escalar o el rotor de un vector. Desafortunadamente, el campo eléctrico en condiciones de variación con el tiempo, no puede ser derivado solamente del gradiente de un potencial escalar, dado que esto requeriría que el rotor del campo eléctrico fuera nulo, y no finito como lo establece la Ley de Faraday. Además, el campo eléctrico tampoco podría ser derivado de un potencial vectorial, ya que esto requeriría de un valor nulo de divergencia del campo eléctrico, y no finito como lo establece la Ley de Gauss.

Por otra parte, para el caso de campos variables en el tiempo, la divergencia del campo inducción magnética, sigue siendo nula como en el caso estático. Esto permite decir que el campo inducción magnética puede seguir siendo igual al rotor de un potencial vectorial, como en el caso estático.

Si en la ecuación de Maxwell que da las fuentes de rotacional del campo eléctrico, Ley de Faraday puntual, se reemplaza al campo inducción magnética por el rotor del potencial vectorial, se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

es decir:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad [1]$$

Esta ecuación establece que el rotor de un cierto vector es nulo. Esta es condición suficiente para que dicho vector pueda ser derivado del gradiente de un potencial escalar, es decir:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad [2]$$

O, lo que es equivalente:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad [3]$$

En definitiva, se ha obtenido el campo eléctrico a partir de funciones potenciales escalar y vectorial.

Si ahora se sustituye la expresión [3] en otra de las ecuaciones de Maxwell, la que corresponde a la Ley de Gauss en forma puntual, se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

es decir:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [4]$$

Sustituyendo en la expresión de la Ley de Ampere modificada en su forma puntual al campo inducción magnética por el rotor del potencial vectorial, y al campo eléctrico por la expresión dada en [3], se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

O sea que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \left(-\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad [5]$$

Utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

La expresión [5] resulta:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad [6]$$

Las ecuaciones [4] y [6], en las que sólo intervienen los potenciales escalar y vectorial y las fuentes (densidades de carga y corriente), aparentan no ser simples de resolver. Por otra parte, el vector potencial que satisface las anteriores ecuaciones no es único, ya que pueden existir cualquier número de vectores con el mismo rotor. Es necesario especificar el valor de la divergencia del vector potencial para que éste sea único, y esta divergencia puede ser adoptada según convenga. Si se adopta la siguiente expresión para la divergencia del vector potencial (conocida como *condición de Lorentz*, una de cuyas finalidades es aportar simetría a las expresiones [7] y [8]):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Esta expresión de la divergencia del vector potencial no se contrapone con aquella empleada para el caso estático, de valor nulo, ya que este sería el resultado de la anterior expresión si no existe variación del potencial escalar con el tiempo.

Las ecuaciones [4] y [6] se simplifican de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad [7]$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad [8]$$

Quedando de esta manera expresados cada uno de los potenciales escalar y vectorial como funciones exclusivas de las densidades de cargas y corrientes respectivamente, es decir de las fuentes que los originan. Cabe indicar que las ecuaciones anteriores determinan potenciales escalar y vectorial que se *propagan con velocidad finita*, tal cual lo hacen los campos como se vio cuando se desarrolló el tema PROPAGACION. Por otra parte, estas funciones potenciales determinan los campos eléctrico y magnético, según ya se ha visto, a través de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [9]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad [10]$$

Es fácil deducir que las expresiones más generales de las funciones potenciales y de los campos, halladas para cargas y corrientes variables en el tiempo se convierten en aquellas deducidas para campos estáticos, haciendo nulas las derivadas temporales. Es decir

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad [11]$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad [12]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad [13]$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [14]$$

2. Potenciales Retardados

Para hallar la expresión de las funciones potenciales escalar y vectorial se deben resolver las ecuaciones diferenciales dadas por las expresiones [7] y [8], en el caso más general de cargas y corrientes variables en el tiempo. Para el caso estático, expresiones [11] y [12], las soluciones halladas tienen la siguiente forma:

$$\phi = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon r} dv \quad [15]$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}}{4\pi r} dv \quad [16]$$

El desarrollo matemático para hallar las soluciones integrales para el caso de campos variables en el tiempo contiene cierto grado de dificultad, y en definitiva no aporta a la comprensión del fenómeno físico. Por consiguiente dicha resolución se deja para el lector, la cual arroja el siguiente resultado:

$$\phi = \int \frac{\rho(t-r/v)}{4\pi\epsilon r} dv \quad [17]$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}(t-r/v)}{4\pi r} dv \quad [18]$$

Comparando las expresiones [15] y [16] con [17] y [18] se nota la aparición de un argumento en las expresiones de las densidades de carga y de corriente. Este argumento indica que para una evaluación de la función potencial (escalar o vectorial) en un dado tiempo t , se debe utilizar el valor de la fuente (densidad de carga o de corriente) en un tiempo $t-r/v$, r es la distancia desde la fuente al punto donde se considera el potencial y v es la velocidad de propagación *finita* de los potenciales en el medio. Esto significa por ejemplo que, para cada elemento de la fuente (densidad de carga o de corriente, por dv), la contribución al potencial de un punto del espacio es la misma que en el caso estático, excepto la existencia de un tiempo de propagación finito del efecto de la fuente sobre el punto en cuestión, alejados entre sí una distancia r . Este efecto viaja con una velocidad v , la cual, como ya se ha visto, es la velocidad de propagación de una onda plana en un medio homogéneo. Así, para computar la contribución total al potencial (escalar o vectorial) de un punto en el espacio, separado de las fuentes (densidad de cargas o de corriente) una distancia r , en un dado instante t , se deben usar los valores de estas fuentes en un instante $t-r/v$, ya que éste será el efecto que alcance al punto en cuestión en un instante t . Debido a este efecto de *retardo* entre causa y efecto, es que a los potenciales dinámicos (escalar o vectorial) se los denomina *potenciales retardados*. Una vez conocido el fenómeno de propagación predicho por las ecuaciones de Maxwell, las expresiones de los potenciales retardados, ecuaciones [17] y [18], constituyen la más simple adecuación esperable de los potenciales definidos para el *caso estático*, ecuaciones [15] y [16].

Cuando los campos varían lentamente con el tiempo, es decir cuando $r \ll vt$, se pueden seguir usando los potenciales estáticos. En estas condiciones se dice estar tratando con campos (o potenciales) *cuasiestacionarios*, como es el caso de problemas con frecuencia industrial, cuando las dimensiones de los circuitos son pequeñas comparadas con la longitud de onda.

2.1. Potenciales retardados para el caso senoidal

Para el caso que las cantidades electromagnéticas de interés sean senoidales en el tiempo, el conjunto de ecuaciones que expresan a las funciones potenciales (escalar y vectorial) y los campos eléctrico y magnético devienen en:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [19]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - j\omega\mathbf{A} \quad [20]$$

$$\phi = \int \frac{\rho e^{-j\beta r}}{4\pi\epsilon r} dv \quad [21]$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J} e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv \quad [22]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon j\omega\phi \quad [23]$$

Donde

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Y la variación temporal está dada por el factor:

$$e^{j\omega t}$$

implícito en las anteriores ecuaciones.

En este caso el retardo debido al tiempo finito de propagación esta tenido en cuenta por el factor

$$e^{-j\beta r}$$

Este factor aportará un desfase para la contribución de cada elemento diferencial de la fuente (carga o corriente) al potencial de un punto en el espacio, de acuerdo a la distancia r entre dicho punto y el elemento considerado de la fuente.

Es evidente que para el caso de tratarse de análisis de estado estacionario con señales senoidales, la relación entre el potencial escalar y el vectorial dado por la expresión [23], determina que conocido uno de ellos el otro queda determinado, lo que hace innecesario resolver ambos a través del empleo de las expresiones [21] y [22]. De este modo, resuelto el potencial vectorial, se pueden calcular los campos eléctrico y magnético a partir del mismo con las siguientes expresiones:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [24]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{j\omega}{\beta^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega\mathbf{A} \quad [25]$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J} e^{-j\beta r}}{4\pi r} dv \quad [26]$$

De esta forma, solamente es necesario conocer la distribución de corriente en el sistema considerado, calcular el vector potencial con la expresión [26], y luego encontrar los campos eléctrico y magnético con las expresiones [25] y [24] respectivamente.

Puede parecer que se ha dejado de lado el efecto de la distribución de cargas del sistema, pero si se recuerda la ecuación de continuidad, se notará que existe una relación entre carga y corriente

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad [27]$$

En efecto, para este caso de estado estacionario con variaciones senoidales, fijada la corriente, queda unívocamente determinada la carga, y viceversa.

Un procedimiento más complicado indica la resolución de ambas funciones potenciales (escalar y vectorial), y, a partir de ellos los campos eléctrico y magnético, procedimiento que resulta innecesario.

3. Radiación

Para los ingenieros, la radiación de energía electromagnética es importante en al menos dos casos. El primer caso corresponde a la necesidad de transferir energía desde un transmisor a ondas electromagnéticas mediante el uso de un adecuado sistema de antenas. El segundo caso corresponde a la necesidad de acotar a valores razonables la pérdida de energía por radiación, de circuitos con blindajes inadecuados, o de líneas de transmisión de energía, o, en general, de otros elementos de circuitos.

Para lograr éxito en la resolución de problemas que involucren al fenómeno de radiación, primero es necesario entender físicamente el tema. La radiación no es un enlace misterioso o desconocido entre un transmisor y uno o varios receptores, sino que es un fenómeno naturalmente comprensible con el conocimiento previo de la propagación de ondas, la reflexión de ondas, etc, y está emparentado de algún modo con las características de funcionamiento de líneas de transmisión y de guías de ondas.

Es deseable que esta comprensión del fenómeno de la radiación permita encontrar respuestas cualitativas a sus distintas manifestaciones. Por supuesto que también es necesario obtener información cuantitativa acerca de la cantidad de radiación y los efectos de los sistemas radiantes, mediante la utilización de los modelos que mejor describan al fenómeno, los cuales se obtendrán mediante la correcta aplicación de las ecuaciones de Maxwell y de los potenciales retardados.

Si la radiación es el fenómeno deseado, se deben satisfacer todas o algunas de las siguientes cuestiones:

- 1) Determinación de las intensidades de los campos eléctrico y magnético, a una dada distancia y en una dada dirección, provocadas por un radiador excitado con una cierta tensión. Esto implica conocer el diagrama de irradiación o la directividad de la antena, conceptos que más adelante serán explicitados.
- 2) Determinación de la potencia total irradiada por el sistema de antenas cuando es excitado por una tensión o corriente conocidos. Esto implica conocer la resistencia de irradiación, como se verá en el desarrollo del tema.
- 3) Determinación de la impedancia que ofrece el radiador al generador que lo excita. Esto implica conocer la impedancia de entrada del radiador, la cual será tratada oportunamente.
- 4) Determinación del ancho de banda (en frecuencia) en donde el radiador es útil. Esto implica conocer el comportamiento de la impedancia de entrada o del diagrama de irradiación, en función de la frecuencia.
- 5) Determinación de la potencia disipada por pérdidas óhmicas en el sistema irradiante. Esto implica conocer el rendimiento del sistema de radiación.

El fenómeno de radiación se vuelve más importante a medida que el circuito analizado se hace grande con respecto a la longitud de onda, sugiriendo la conclusión obvia que un sistema de antenas bien diseñado es un circuito hecho a propósito con dimensiones comparables con la longitud de onda para incrementar la importancia de la radiación.

Para resolver problemas en donde estén involucrados fenómenos de radiación basta con resolver las ecuaciones de Maxwell, sujetas a las condiciones de contorno impuestas por el sistema de antenas. Esto es, se deberá tener en cuenta, además del sistema de antenas, al generador y a todo el espacio circundante, incluido efectos de objetos conectados a tierra o acoplamientos con otros sistemas de antenas cercanos. Por la gran multiplicidad de posibles complicaciones, y debido fundamentalmente a las formas geométricas de las antenas prácticas, no son posibles de hallar los detalles de una solución exacta, con excepción de unos pocos casos simples.

4. Dipolo de Hertz

Para computar la potencia radiada y la distribución de campo alrededor de una antena constituida por un conductor, sobre el cual existe una distribución de corriente conocida, es necesario primero conocer lo que sucede con un pequeño trozo del mismo conductor sobre el cual puede suponerse que la corriente es constante en toda su longitud. A este pequeño trozo de conductor se lo conoce como *dipolo de Hertz*, *dipolo elemental*, *dipolo infinitesimal* o simplemente *dipolo*. Otras antenas más complejas, entre ellas las denominadas lineales, pueden ser consideradas como constituidas por un gran número de tales dipolos, cada uno con los valores correspondientes de corriente, en amplitud y fase. Lo anterior pone de manifiesto la importancia de conocer el comportamiento del dipolo de Hertz.

En lo que sigue se supondrá una variación senoidal de la corriente, por consiguiente esta será igual a:

$$I_0 e^{j\omega t}$$

O más simplemente, se expresará la corriente por su valor pico o cresta, dando por sobreentendido la variación senoidal de la misma, o sea:

$$I_0$$

En la **Figura 1** se muestra al dipolo de Hertz, el cual tiene un diámetro d despreciable respecto a su longitud l , o sea $d \ll l$.

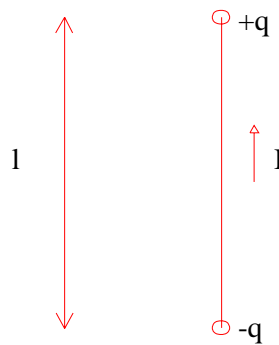


Figura 1: Dipolo de Hertz.

En esta figura está indicada la corriente i , y además dos cargas de signos opuestos, ubicadas en ambos extremos del dipolo. La corriente y la carga están vinculadas por:

$$i = \frac{\partial q}{\partial t} = I_0 e^{j\omega t}$$

O sea que el dipolo de Hertz consiste en un trozo l de conductor muy delgado ($d \ll l$), con una corriente i senoidal de amplitud constante, y una carga puntual q en ambos extremos. Esta carga puntual en los extremos es la que da origen al nombre de dipolo (eléctrico).

En la **Figura 2** se ubican espacialmente al dipolo y a un punto genérico P en donde se desea conocer los campos eléctrico y magnético producidos por el dipolo. En esta figura se indican los distintos sistemas de coordenadas, y las distintas componentes, en coordenadas esféricas, del campo eléctrico en el punto P .

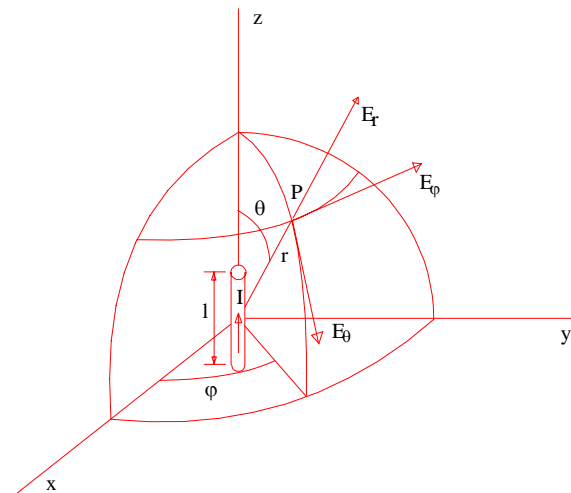


Figura 2: Dipolo de Hertz. Ubicación espacial relativa del dipolo y del campo eléctrico en un punto.

Como se observa en **Figura 2**, el dipolo está dispuesto sobre el eje z , con centro en el origen de coordenadas.

Como ya se ha visto, es posible calcular los campos eléctrico y magnético a partir de los potenciales escalar y vectorial, por medio de las expresiones [9] y [10], las cuales se transcriben a continuación.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [9]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad [10]$$

O, si los campos varían senoidalmente

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [19]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \quad [20]$$

Dado que interesa conocer los campos eléctrico y magnético en cualquier punto P del espacio, ya sea este punto P cercano o lejano al dipolo (varias longitudes de onda separados entre sí), se utilizarán los potenciales retardados, calculados con las expresiones [17] y [18] ya vistas, para tener en cuenta la velocidad finita de propagación del fenómeno.

$$\phi = \int \frac{\rho(t-r/v)}{4\pi\epsilon r} dv \quad [17]$$

$$\mathbf{A} = \mu \int \frac{\mathbf{J}(t-r/v)}{4\pi r} dv \quad [18]$$

O, si las fuentes varían senoidalmente

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dv \quad [28]$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dv \quad [29]$$

Por otra parte, no resulta necesario calcular ambos potenciales a partir de las ecuaciones integrales que los vinculan con sus fuentes, cargas o corrientes, ya que, según se ha visto, existe la siguiente relación entre ellos:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon j\omega \phi \quad [23]$$

Por lo tanto, para hallar los campos eléctrico y magnético, primero se hallará el potencial vectorial.

En la **Figura 3** se muestra nuevamente al dipolo dispuesto sobre el eje z , y las distintas distancias al punto P , desde el centro y los extremos del dipolo, y desde un punto genérico del mismo.

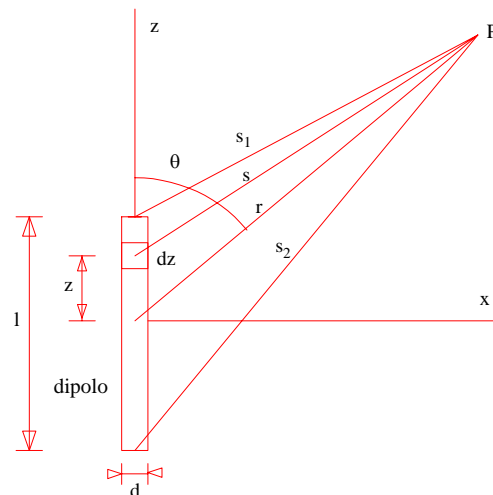


Figura 3: Dipolo de Hertz. Contribución de un dz de corriente al campo en el punto P .

De acuerdo con la **Figura 3**, la corriente también está dirigida según el eje z . Por lo tanto el vector potencial tiene una única componente espacial, la correspondiente a z . O sea:

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dz \quad [30]$$

En donde se ha descompuesto la integral de volumen de la densidad de corriente, por una parte en una integral lineal sobre el eje z , y por otra parte en una integral de superficie sobre la normal al eje z . Esta última integral de superficie de la densidad de corriente arroja como resultado obvio la corriente que atraviesa a dicha superficie normal. Siendo la amplitud de esta corriente constante sobre todo el dipolo, se extrae de la integral. En la expresión anterior del potencial escalar, se ha introducido la constante de fase β .

Para el cálculo del potencial escalar en todo punto del espacio practicamente se cumple que $r \gg l$ y que $l \ll \lambda$, ya que l es un diferencial de longitud. De lo anterior se desprende que r es prácticamente una constante para cada punto del espacio, y por lo tanto puede desprejarse las diferencias en magnitud y fase de las contribuciones al potencial vectorial, de cada elemento diferencial de longitud del dipolo, dando por resultado:

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \quad [31]$$

Es conveniente trabajar con coordenadas esféricas como se verá más adelante. Por consiguiente, el potencial vectorial tiene las siguientes componentes en dicho sistema de coordenadas:

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} \quad [32a]$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r} \quad [32b]$$

$$A_\phi = 0 \quad [32c]$$

Ahora se puede calcular el campo magnético, ya que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

Resulta ser:

$$H_r = 0 \quad [33a]$$

$$H_\theta = 0 \quad [33b]$$

$$H_\phi = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \quad [33c]$$

También se puede calcular el campo eléctrico, el cual, como ya se ha visto, está dado por:

$$\mathbf{E} = -\frac{j\omega}{\beta^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega \mathbf{A} \quad [25]$$

O, lo que es equivalente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega \mathbf{A} \quad [25a]$$

Lo que arroja como resultado:

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos \theta \quad [34a]$$

$$E_\theta = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin \theta \quad [34b]$$

$$E_\phi = 0 \quad [34c]$$

Por lo tanto, las componentes de campo eléctrico y magnético generadas por el dipolo de Hertz en un punto P del espacio son:

$$H_\phi = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \quad [33c]$$

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos \theta \quad [34a]$$

$$E_\theta = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right] \sin \theta \quad [34b]$$

Para la región muy cercana al dipolo (en donde r es muy pequeño), predominan los términos en que intervienen las inversas de las mayores potencias de r . Es decir:

$$H_{\phi} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \quad [35a]$$

$$E_r = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{2}{j\omega \epsilon_0 r^3} \right] \cos \theta \quad [35b]$$

$$E_{\theta} = \frac{I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{j\omega \epsilon_0 r^3} \right] \sin \theta \quad [35c]$$

De esta manera, en la región *cercana* al dipolo, el campo magnético está prácticamente en fase con la corriente que lo genera, y la componente H_{ϕ} puede ser identificada con el campo magnético *de inducción* obtenido por la Ley de Ampere. Del mismo modo, el campo eléctrico en esta región puede ser identificado con aquél calculado para un *dipolo electrostático*.

Por otra parte, los campos eléctrico y magnético en esta región cercana están en cuadratura temporal (a 90 grados), de modo tal que no presentan un flujo promedio temporal de energía, es decir que no transportan energía activa.

A estos campos se los denomina entonces, campos *cercanos* o *de inducción*.

A distancias *muy grandes* desde el dipolo, los términos dominantes de los campos eléctrico y magnético son aquéllos que dependen inversamente de la distancia al dipolo, o sea:

$$H_{\phi} = \frac{j\omega I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi v r} e^{-j\beta r} \sin \theta \quad [36a]$$

$$E_{\theta} = \frac{j\omega \mu_0 I_0 e^{j\omega t} l}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta \quad [36b]$$

A estos campos se los llama campos *lejanos* o *de radiación*.

A distancias muy grandes del dipolo, cualquier porción de la onda esférica generada por el dipolo, puede ser considerada como una onda plana que se propaga en dirección radial, alejándose del dipolo. Las componentes de los campos eléctrico y magnético, E_{ϕ} y H_{ϕ} , están en fase temporalmente, dando como resultado un flujo promedio de energía activa, cual es el caso de una onda plana progresiva.

Puede decirse que el campo lejano es generado por el campo cercano, mientras que el campo cercano es generado por las fuentes, cargas y corrientes.

En la **Figura 4** se muestran las líneas de campo eléctrico y magnético, cerca y lejos del dipolo. En esta figura se aprecia la característica de onda esférica. Además se visualiza que las líneas de campo magnético son siempre circulares alrededor del eje del dipolo, mientras que las líneas de campo eléctrico cercano terminan en los extremos del dipolo, en donde están las fuentes de divergencia, y las líneas de campo eléctrico lejano son cerradas, revelando que son debidas a una fuente rotacional (variación temporal del campo magnético).

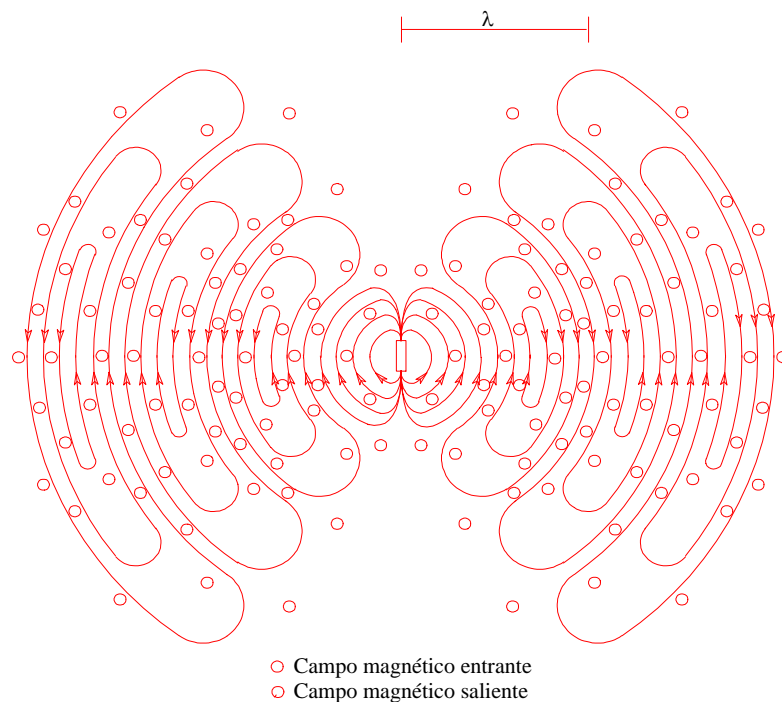


Figura 4: Líneas de campo eléctrico y magnético generadas por el dipolo de Hertz..

Ambos campos lejanos son proporcionales al $\sin \theta$, esto significa que ambos son máximos cuando $\theta=90^\circ$ y mínimos cuando $\theta=0^\circ$ (en la dirección del eje del dipolo). En la **Figura 5** se muestra el diagrama de radiación del dipolo de Hertz, donde la magnitud del radiovector da cuenta de la intensidad del campo en esa dirección.

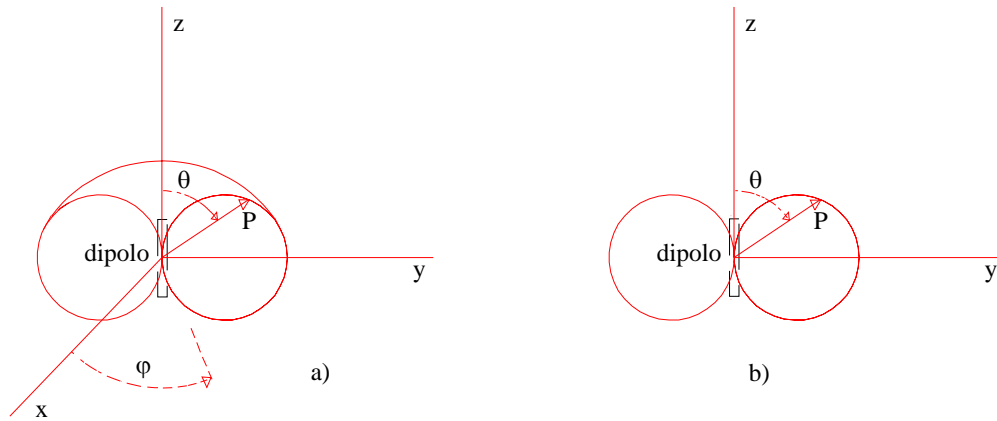


Figura 5: Diagramas de campo lejano del dipolo de Hertz (E_θ y H_ϕ).
a) Diagrama de campo tridimensional. **b)** Diagrama de campo bidimensional.

El vector de Poynting en esta región lejana es radial y en el sentido de la propagación de la onda. Dado que el promedio temporal del producto de dos sinusoides de igual frecuencia y fase es igual a 1/2 del producto de sus magnitudes, el promedio temporal resultante es:

$$P_r = E_\theta \times H_\phi = \frac{\eta \beta^2 I_0^2 l^2}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \theta \quad [\text{W/m}^2] \quad [37]$$

Donde se han utilizado los siguientes factores:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \text{Impedancia intrínseca del medio}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \text{Constante de fase, parte imaginaria de la constante de propagación}$$

El flujo total de energía emitida por el dipolo se calcula por medio de la integral de superficie cerrada del vector de Poynting promedio, con la superficie encerrando al dipolo. Tomando como superficie de integración la de una esfera de radio r , se obtiene:

$$W_{promedio} = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi P_r 2 \pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\eta \beta^2 I_0^2 l^2}{16 \pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$W_{promedio} = \frac{\eta \pi I_0^2}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 40 \pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

Se puede definir la resistencia de radiación como aquella resistencia sobre la cual se disipa la potencia radiada, cuando sobre ella circula la misma corriente eficaz máxima que en la antena (para el dipolo de Hertz esta corriente eficaz es constante en toda la longitud del mismo). O sea:

$$R_{radiación} = \frac{2W_{promedio}}{I_0^2} = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

4.1. Dipolo corto

El dipolo de Herzt no constituye una antena de uso práctico, pero el conocimiento de las ecuaciones que rigen su funcionamiento permite determinar el comportamiento de otras antenas, particularmente aquéllas denominadas lineales o dipolos, constituidas por un trozo de alambre, por lo general delgado respecto a la longitud de onda, y con una dada distribución de corriente en su longitud. Este es el caso del denominado dipolo corto. El nombre de este dipolo corto deriva del hecho de que, si bien su longitud no es infinitesimal como en el dipolo de Hertz, es lo suficientemente corto comparado con la longitud de onda.

Para este caso se puede suponer que la distribución de corriente sigue una ley lineal con respecto a la longitud del dipolo, siendo máxima en el centro por donde se lo excita, y nula en ambos extremos. Esta distribución de corriente sobre la antena es similar a aquélla que se produce sobre una línea muy corta cuyos extremos (extremos de la antena) están a circuito abierto. En tales condiciones, sobre la línea se establece una onda estacionaria de corriente, de variación senoidal en función de la distancia sobre la línea, con un cero de corriente en el extremo abierto de la línea. Si la línea

es muy corta respecto de la longitud de onda, la onda senoidal de corriente, cuyo cero está en el extremo de la línea (antena) parece tener una variación lineal, como lo es la de un seno desde 0 grados hasta aproximadamente 30 grados.

En la **Figura 6-a** se muestra el diagrama de corriente de esta antenna.

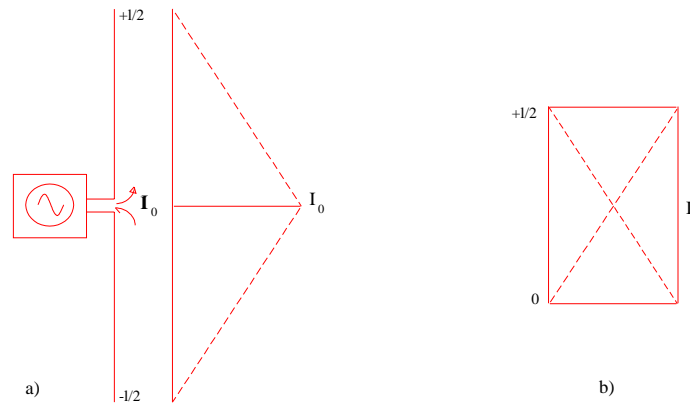


Figura 6: a) Dipolo corto de longitud l , excitado por su centro, y su distribución de corriente lineal. b) Distribución de corriente equivalente.

Dado que la longitud de la antenna es muy corta respecto de la longitud de onda, se pueden suponer despreciables las diferencias de fase debido a diferencias de camino recorrido, en las contribuciones de cada elemento diferencial de longitud.

Por lo tanto, las expresiones de los campos magnético y eléctrico producidos por el dipolo corto son similares a aquéllas del dipolo de Hertz, con una corriente igual a la máxima y una longitud del dipolo corto igual a la mitad de la real. Esto puede visualizarse mejor trasladando una mitad del diagrama de corriente sobre la otra como lo sugiere la **Figura 6-b**, quedando una antenna de longitud mitad y corriente igual a la máxima del diagrama respectivo. Este traslapamiento de ambas mitades de la antenna no altera los valores de los campos eléctrico y magnético porque, como ya ha sido explicado, no hay diferencia de fase, debido a la posición espacial, en la contribución de cada diferencial de corriente de la antenna.

Por lo tanto, los valores de los campos son iguales a la mitad de aquéllos calculados para el dipolo de Hertz, con una longitud mitad de la real. Por este motivo se dice que este dipolo corto y aislado tiene una longitud equivalente o efectiva igual a la mitad de su longitud real.

Los campos eléctrico y magnético para este dipolo resultan ser:

$$H_{\phi} = \frac{j\omega I_0 e^{j\omega t} l_e}{4\pi\omega r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad [38a]$$

$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu_0 I_0 e^{j\omega t} l_e}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \quad [38b]$$

Siendo $l_e = l/2$, la *longitud efectiva* del dipolo, y l la longitud real del dipolo corto.

Se ha introducido el concepto de *longitud efectiva* cuya definición es el de aquella longitud de una antenna dipolo equivalente, con una distribución de corriente constante, que produce el mismo campo en un punto cualesquiera del espacio, en la dirección del máximo del diagrama de radiación real, que la antenna real con su propia longitud y distribución de corriente.

4.2. Dipolo Largo

Si la antenna lineal tiene una longitud comparable con la longitud de onda, que es el caso de las antenas prácticas, la corriente no puede ser considerada constante ni con variación lineal, sobre la longitud de la antenna. Sin embargo, la antenna puede ser descompuesta en un gran número de elementos diferenciales (dipolos de Hertz), cuyos efectos, en un punto cualesquiera del espacio, pueden ser sumados. Lo anterior es válido para los potenciales o los campos, los cuales son proporcionales a la corriente, y sus efectos pueden ser superpuestos, pero lo propio no acontece con la potencia, la cual varía con el cuadrado de la corriente. Esto implica que la potencia deberá ser calculada integrando la potencia promedio por unidad de área, o vector de Poynting, sobre una superficie que encierre al radiador.

Se puede suponer, y esto es válido para algunos casos prácticos, que el dipolo largo está excitado por su centro, y que la distribución de corriente a lo largo del mismo es senoidal, estando el dipolo aislado, y sin ningún plano de tierra cercano. La explicación de la variación senoidal del diagrama de corrientes es la misma que se dio para el caso del dipolo corto. De esta manera, la distribución de corriente es nula en los extremos de la antenna, siguiendo una ley de variación senoidal a lo largo de la antenna, alcanzando el máximo a una distancia $l = \lambda/4$ desde los extremos, como puede visualizarse en **Figura 7**.

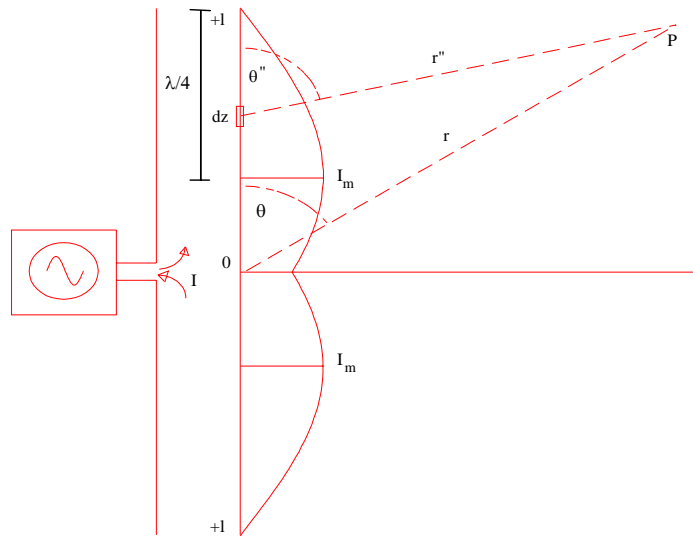


Figura 7: Dipolo largo con su distribución de corriente.

Por lo tanto, la expresión de la corriente en la antena es la siguiente:

$$I = \begin{cases} I_m \sin[\beta(l-z)], & \text{para } z > 0 \\ I_m \sin[\beta(l+z)], & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad [39]$$

El campo eléctrico en un punto P distante una gran distancia r'' debido a un elemento diferencial de corriente de longitud dz , ya han sido calculados (ver dipolo de Hertz, ecuación [36a]), y su valor es:

$$dE_\theta = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t} dz}{4\pi r''} e^{-j\beta r''} \sin \theta' \quad [36b]$$

La distancia r'' está medida desde el elemento de corriente dz hasta el punto P , mientras que la distancia r está medida desde el origen o centro de la antena dipolo largo y el punto P . Ambas distancias son lo suficientemente grandes de modo que la pequeña diferencia entre ellas solo afecta la fase y no la magnitud. Lo propio acontece con la diferencia entre los ángulos θ' y θ .

La relación entre r'' y r , a los efectos de computar la diferencia de fase debido a diferencias de caminos recorridos, es:

$$r'' = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta} \cong r - z \cos \theta$$

Además de cumplirse que:

$$r'' \cong r \text{ y } \theta' \cong \theta$$

El campo eléctrico total en el punto P , generado por el dipolo largo será:

$$E_\theta = \int_{-l}^{+l} dE_\theta = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t}}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r} \left\{ \int_{-l}^0 e^{j\beta z \cos \theta} \sin[\beta(l+z)] dz + \int_0^l e^{j\beta z \cos \theta} \sin[\beta(l-z)] dz \right\} \quad [40]$$

Siendo la integral

$$\int e^{ax} \sin(bx+c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin(bx+c) - b \cos(bx+c)]$$

El campo eléctrico resulta:

$$E_\theta = \frac{j\eta\beta I_0 e^{j\omega t}}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r} \left\{ \frac{2}{\beta \sin^2 \theta} [\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)] \right\} = \frac{j\eta I_0 e^{j\omega t}}{2\pi r} e^{-j\beta r} \left[\frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)}{\sin \theta} \right] \quad [41]$$

Por otra parte, el campo magnético será:

$$H_\phi = \frac{1}{\eta} E_\theta \quad [42]$$

Ya que, como se vió para el dipolo de Hertz o el dipolo corto, ambos campos, eléctrico y magnético, están en fase temporal y en cuadratura espacial, sobre un plano normal a la dirección de propagación, y la relación entre ambos es la impedancia intrínseca del medio.

En este caso, al igual que en el dipolo de Hertz, el promedio temporal del vector de Poynting es igual a 1/2 del producto de las magnitudes de los campos, o sea:

$$P_r = \frac{1}{2} |E_\theta| |H_\phi| = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)}{\sin \theta} \right]^2 \quad [43]$$

Y la potencia total radiada por el dipolo largo será:

$$W = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi P_r 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\eta I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos(\beta l)}{\sin \theta} \right]^2 d\theta \quad [44]$$

La resistencia de radiación, que por definición es la relación entre la potencia radiada y la corriente máxima del diagrama de corriente, resulta ser:

$$R_{\text{radiación}} = \frac{2W}{I_0^2} = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos \beta l}{\sin \theta} \right]^2 d\theta \quad [45]$$

Para el caso de un dipolo de media longitud de onda, para el cual $l=\lambda/4$, se obtiene el siguiente valor para esta resistencia:

$$R_{\text{radiación}} = 73.09 \text{ } [\Omega]$$

Mientras que el campo eléctrico resulta:

$$E_\theta = \frac{j\eta I_0 e^{j\omega t}}{2\pi r} e^{-j\beta r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]$$

En la **Figura 8** se dan los diagramas de radiación de un dipolo de media longitud de onda y de un dipolo corto. Por comparación se nota que el dipolo de media longitud concentra más el campo eléctrico (y la energía), en la dirección normal, que el dipolo corto.

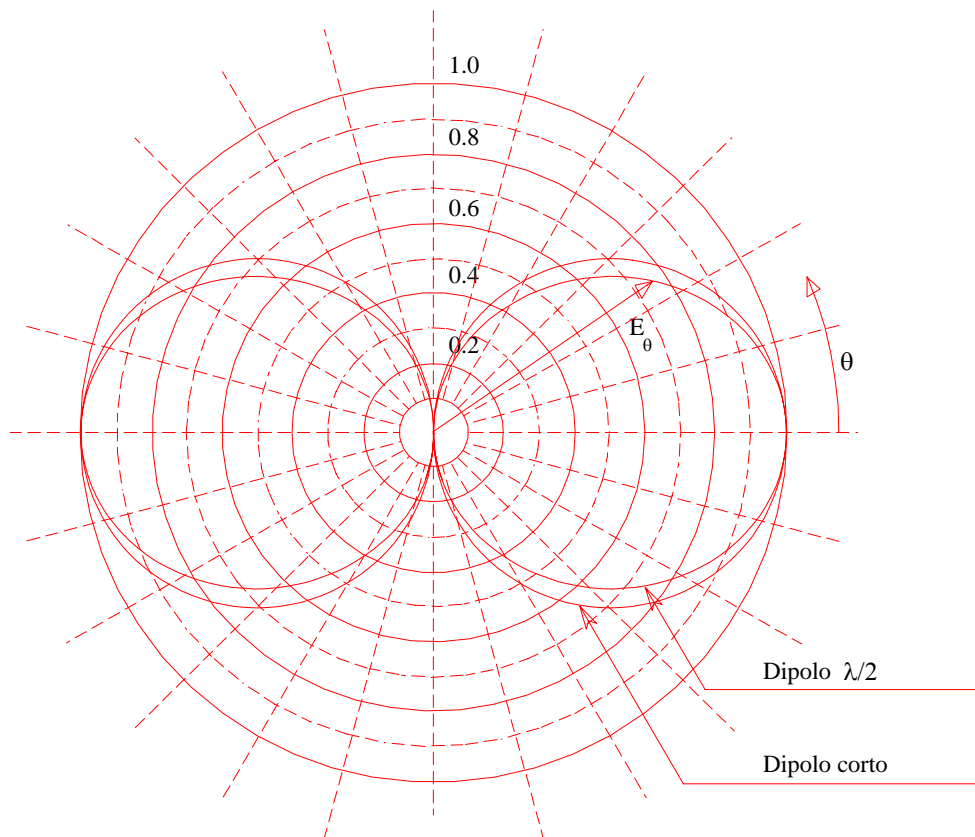


Figura 8: Diagramas de directividad del dipolo corto y del dipolo de $\lambda/2$.

5. Directividad y Ganancia

A menudo es necesario concentrar la energía radiada por una antena en una determinada dirección de interés. Esto permite ahorrar potencia, ya que, comparando la antena en cuestión con un radiador isotrópico (radiador que emite la misma cantidad de energía en cualquier dirección), se requiere menor potencia para lograr la misma energía en la dirección preferencial.

La cantidad de energía ahorrada es expresada como la directividad de la antena, definida como la relación entre la potencia de un radiador isotrópico, para producir una dada intensidad de campo eléctrico en la dirección deseada y a una distancia determinada, y la potencia de la antena en cuestión para lograr el mismo objetivo. O sea:

$$D = \frac{4\pi r^2 P_r}{W} \quad [46]$$

La *directividad* puede ser definida en una forma más precisa que la anteriormente expresada y toma valores distintos para cada dirección, y es frecuente darla para la dirección del máximo del diagrama de radiación.

Siendo la intensidad de radiación el producto del vector de Poynting promedio en la dirección radial por el cuadrado de la distancia, dando así un factor que no depende de la distancia, se define la directividad como la *relación* entre la intensidad de radiación *máxima* y la intensidad de radiación *promedio*.

Por ejemplo, para el dipolo de media longitud de onda, en la dirección $\theta=\pi/2$, la directividad será:

$$D = 4\pi r^2 \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \frac{2}{73.09 I_0^2} \approx 1.64 \quad [47]$$

Mientras que para el dipolo de Hertz será:

$$D = 4\pi r^2 \frac{\eta I_0^2 l^2}{8 r^2 \chi^2} \frac{3 \chi^2}{\eta \pi I_0^2 l^2} = \frac{3}{2} \quad [48]$$

El concepto de directividad se basa exclusivamente en propiedades del diagrama de radiación de la antena, y no tiene en cuenta la *eficacia* de la antena. Por ello se introduce otro parámetro de mérito denominado *ganancia de potencia* o simplemente *ganancia*, que consiste en la relación entre la intensidad de radiación máxima *de la antena en cuestión*, y la intensidad de radiación máxima *de una antena isotrópica* (u otra que se tome como referencia), para la *misma* potencia de entrada en *ambas* antenas.

Ambos conceptos, directividad y ganancia, están vinculados por el *rendimiento* de la antena, el cual está vinculado a las pérdidas en la antena; siendo la ganancia menor, o a lo sumo, igual a la directividad. este último caso se da cuando el rendimiento o eficiencia de la antena es igual al 100%, o sea cuando la antena *no tiene pérdidas*.

6. Antenas sobre tierra perfecta

Si se tiene una antena cercana a un plano de tierra, se deben resolver dos dificultades. La primera es el efecto de la conductividad finita del terreno o plano de tierra. La segunda el efecto de la curvatura terrestre. Para evitar este último inconveniente es normal considerar que la tierra es plana, mientras que para evitar el primero, se supone que la conductividad del plano de tierra o del terreno es infinita. En las tales condiciones, es posible tener en cuenta la presencia de la tierra mediante una antena imagen. Para cumplir las condiciones de contorno en la superficie de separación (aire-plano conductor o tierra), esta antena imagen debe tener una corriente cuya componente vertical debe ser igual, y la componente horizontal debe ser opuesta a la de la antena original, como puede visualizarse en **Figura 9**.

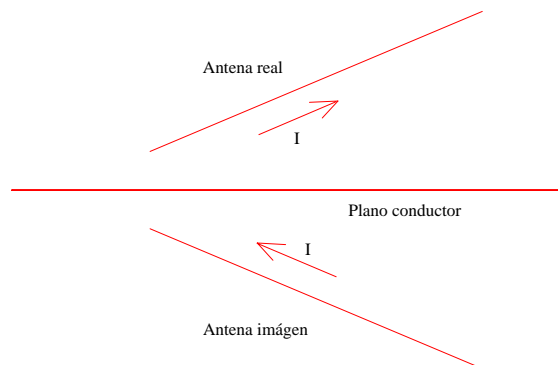


Figura 9: Antena real y su imagen

Esta técnica de reemplazar la presencia de la tierra por una antena imagen da el resultado correcto de los campos calculados por sobre el plano de tierra. El valor correcto debajo del plano conductor o tierra será obviamente nulo.