# Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

## TP Nº 0. *Análisis de Circuitos en Régimen Permanente*

***Sugerencia:*** *Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.*

### Ejercicio 1a)

Encontrar la tensión $u_C$ indicada en la figura, aplicando tanto el método de *corrientes de malla* como el método de *tensiones de nodos*. La tensión del generador es $u_G(t)=12\ \mathrm{sen}(20t)$.

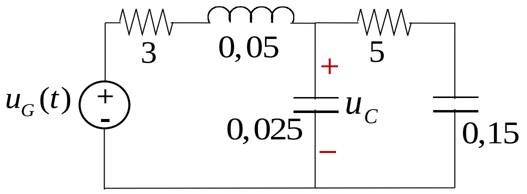



**Figura 1**

### Resolución

Aplicando la transformación fasorial $e^{j20t}$, puede hacerse:

$$\mathbf{U}_G = 12e^{j20t} = 12\cdot\left[\cos(20t) + j\cdot\mathrm{sen}(20t)\right]$$

Entonces

$$u_G(t) = \mathrm{Im}\left\{12\cdot e^{j20t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{12\cdot\left[\cos(20t)+j\cdot\mathrm{sen}(20t)\right]\right\} = 12\cdot\mathrm{sen}(20t)$$

Con lo cual la solución puede obtenerse operando con el fasor 12 $e^{j20t}$ y obtener al final la parte imaginaria del fasor $\mathbf{U}_C$ obtenida.

Para el generador considerado, las impedancias del circuito son las indicadas en la Figura 2.

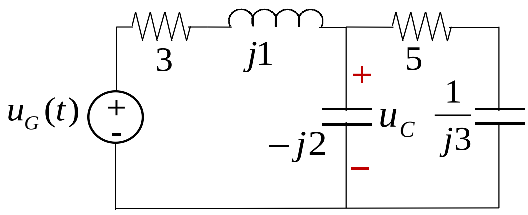



**Figura 2**

<u>*Método de las corrientes de malla*</u>.

Con la elección de las mallas del circuito indicada en la Figura 3, la tensión en el capacitor requerida es:

$$\mathbf{U}_C = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)(-j2)$$

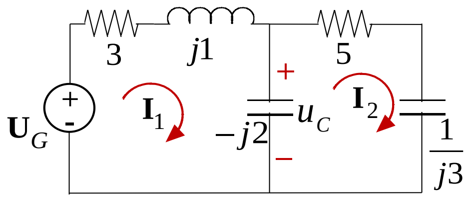



**Figura 3**

El sistema de ecuaciones de malla resulta:

$$\begin{cases} 12e^{j20t} = (3-j1)\,\mathbf{I}_1 + j2\,\mathbf{I}_2 \\ 0 \qquad = +j2\,\mathbf{I}_1 \quad + \left(5 - j\dfrac{7}{3}\right)\mathbf{I}_2 \end{cases}$$

Y la tensión en el capacitor $\dot{U}_C$ deseado resulta:

$$\mathbf{U}_C = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)(-j2)$$

Se resolverá el sistema de ecuaciones de malla por la Regla de Cramer o *método de los determinantes*.

$$\Delta = (3-j1)\left(5 - j\frac{7}{3}\right) - (j2)(j2) = \frac{50}{3} - j12$$

$$\Delta_1 = 12e^{j20t}\left(5 - j\frac{7}{3}\right) + 0 = (60 - j28)e^{j20t}$$

$$\Delta_2 = 0 - j24e^{j20t}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{60-j28}{\frac{50}{3} - j12}e^{j20t} = \frac{(60-j28)\left(\frac{50}{3}+j12\right)}{\left(\frac{50}{3}\right)^2 + 12^2}e^{j20t} = \frac{12024 + j2280}{3796}e^{j20t}$$

$$\mathbf{I}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\left(-j24e^{j20t}\right)\left(\frac{50}{3}+j12\right)}{\left(\frac{50}{3}\right)^2+12^2}=\frac{2592-j3600}{3796}e^{j20t}$$

$$\mathbf{U}_C=\left(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_1\right)(-j2)=\frac{12024+j2280-2592+j3600}{3796}e^{j20t}(-j2)=(3{,}1-j4{,}97)e^{j20t}$$

$$\mathbf{U}_C=5{,}85e^{-j58^{o}}e^{j20t}=5{,}85e^{j\left(20t-58^{o}\right)}$$

$$u_C(t)=5{,}85\cdot\operatorname{sen}\left(20t-58^{o}\right)$$

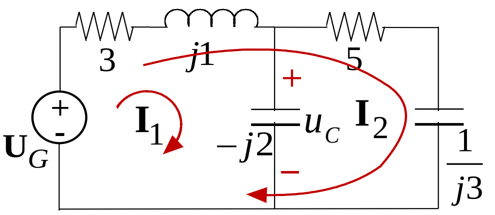


**Figura 4**

*<u>Método de las corrientes de malla (otra forma)</u>*.

Una elección más inteligente de las mallas del circuito es indicada en la Figura 4, dado que en este caso, la tensión en el capacitor requerida es:

$$\mathbf{U}_C=\mathbf{I}_1(-j2)$$

Con lo cual sólo se requiere determinar la corriente de la malla 1. El sistema de ecuaciones de malla resulta:

$$\begin{cases}12e^{j20t}=(3-j1)\,\mathbf{I}_1+(3+j1)\,\mathbf{I}_2\\12e^{j20t}=(3+j1)\,\mathbf{I}_1+\left(8+j\frac{2}{3}\right)\mathbf{I}_2\end{cases}$$

$$\Delta=(3-j1)\left(8+j\frac{2}{3}\right)-(3+j1)(3+j1)=24+j2-j8+\frac{2}{3}-(9-1+j3+j3)=\frac{50}{3}-j12$$

$$\Delta_1=12e^{j20t}\left(8+j\frac{2}{3}\right)-12e^{j20t}(3+j1)=(60-j4)e^{j20t}$$

$$\mathbf{I}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{60-j4}{\frac{50}{3}-j12}e^{j20t}=\frac{(180-j12)}{50-j36}e^{j20t}$$

$$\mathbf{U}_C=\mathbf{I}_1(-j2)=\frac{(180-j12)}{50-j36}e^{j20t}(-j2)=\frac{-24-j360}{50-j36}e^{j20t}=\frac{(-24-j360)(50+j36)}{50^2+36^2}e^{j20t}$$

$$\mathbf{U}_C=\frac{-1200-j864-j18000+12960}{3796}e^{j20t}=(3{,}1-j4{,}97)e^{j20t}=5{,}85e^{-j58^{o}}e^{j20t}=5{,}85e^{j\left(20t-58^{o}\right)}$$

$$u_C(t)=5{,}85\cdot\operatorname{sen}\left(20t-58^{o}\right)$$

*<u>Método de las tensiones de nodo</u>*.

La única ecuación de tensiones de nodo del circuito, para la tensión del Nodo 1 de la Figura 5 resulta:

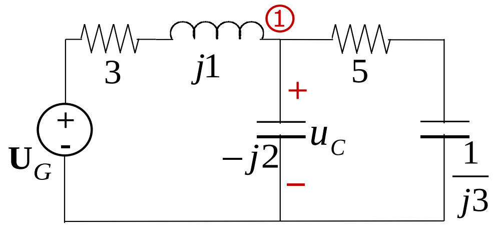


**Figura 5**

$$\frac{12e^{j20t}}{3+j1}=\mathbf{U}_C\left(\frac{1}{3+j1}+j\frac{1}{2}+\frac{1}{5-j\frac{1}{3}}\right)$$

$$\mathbf{U}_C=\left(\frac{1}{3+j1}+j\frac{1}{2}+\frac{1}{5-j\frac{1}{3}}\right)=\frac{\dfrac{12e^{j20t}}{\cancel{(3+j1)}}}{\dfrac{2\left(5-j\frac{1}{3}\right)+j(3+j1)\left(5-j\frac{1}{3}\right)+2\cdot(3+j1)}{\cancel{(3+j1)}\cdot 2\cdot\left(5-j\frac{1}{3}\right)}}$$

$$\mathbf{U}_C = \frac{24\cdot\left(5-j\frac{1}{3}\right)\cdot e^{j20t}}{10-j\frac{2}{3}-j\frac{46}{3}-4+6+j2} = \frac{(120-j8)\cdot e^{j20t}}{12+j\frac{50}{3}} = \frac{3\cdot(120-j8)\cdot(36-j50)\cdot e^{j20t}}{36^2+50^2}$$

$$\mathbf{U}_C = \frac{3\cdot(4320-j6000-j288-400)}{3796}e^{j20t} = (3{,}1-j4{,}97)e^{j20t} = 5{,}85e^{-j58^{\circ}}e^{j20t} = 5{,}85e^{j\left(20t-58^{\circ}\right)}$$

$$u_C(t) = 5{,}85\cdot \operatorname{sen}\left(20t-58^{\circ}\right)$$

<u>*Conclusiones*</u>

Es evidente que cualquier camino, si se procede correctamente, conduce al resultado buscado. Sin embargo es importante desarrollar la habilidad de elegir el que ofrezca menos complicaciones.

A tal fin, debe hacerse un análisis preliminar muy simple que consiste en determinar el número de *nodos* y el número de *mallas* del circuito. En este análisis preliminar, entenderemos por *nodos* los puntos de concurrencia de 3 ó más elementos del circuito. A fin de obtener un sistema de ecuaciones con el menor número de ecuaciones, conviene tener en cuenta lo siguiente:

Si el número de nodos es el *menor*, conviene plantear las *ecuaciones de tensiones de nodos*.

Si el número de mallas es el *menor*, conviene plantear las *ecuaciones de corrientes de mallas*.

Si la cantidad de nodos coincide con la cantidad de mallas, proceder con cualquiera de los dos métodos.

## Ejercicio 1c)

Encontrar la expresión de la variable indicada en cada caso, aplicando tanto el método de *corrientes de malla* como el método de *tensiones de nodos*.

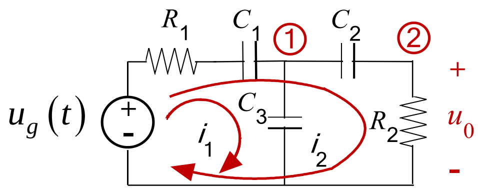



**Figura 1**

## Resolución

<u>*Método de las corrientes de malla*</u>.

La elección más conveniente de las mallas del circuito es la indicada en la Figura 1, ya que para determinar la tensión $u_0(t)$ requerida, sólo sería necesario obtener la corriente de la malla 2, siendo:

$$u_0(t) = R_2 \cdot i_2(t)$$

La forma matricial de las ecuaciones de malla, para las mallas 1 y 2 consideradas resultan:

$$\begin{vmatrix} u_g(t) \\ u_g(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{1}{j\omega C_3} & R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} \\ R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} & R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{1}{j\omega C_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{vmatrix}$$

La corriente de la malla 2 resulta:

$$i_2(t) = \frac{\begin{bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_3}{C_3}\right) & u_g(t) \\ R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} & u_g(t) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_3}{C_3}\right) & R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} \\ R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1} & R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}\right) \end{bmatrix}}$$

$$i_2(t) = \frac{\dfrac{u_g(t)}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_3}{C_3} - 1\right)}{\left[R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_3}{C_3}\right)\right]\left[R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}\right)\right] - \left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right)^2}$$

$$i_2(t) = \frac{\dfrac{u_g(t)}{j\omega C_3}}{\left[R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1}{C_3} + 1\right)\right]\left[R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1}{C_2} + 1\right)\right] - \left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right)^2}$$

$$i_2(t) = \frac{u_g(t)}{\left[j\omega C_3 R_1 + \dfrac{C_3}{C_1}\left(\dfrac{C_1}{C_3} + 1\right)\right]\left[R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1}{C_2} + 1\right)\right] - j\omega C_3\left(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\right)^2}$$

$$i_2(t) = \frac{u_g(t)}{\left(1 + \dfrac{C_3}{C_1} + j\omega C_3 R_1\right)\left[R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_1}\left(\dfrac{C_1}{C_2} + 1\right)\right] - j\omega C_3\left(R_1^2 - \dfrac{1}{(\omega C_1)^2} + 2\dfrac{R_1}{j\omega C_1}\right)}$$

$$i_2(t)=\frac{u_g(t)}{R_1\left(1+\frac{C_3}{C_2}+2\cancel{\frac{C_3}{C_1}}\right)+R_2\left(1+\frac{C_3}{C_1}\right)+j\omega C_3R_1\left(\cancel{R_1}+R_2\right)+\frac{1}{j\omega C_1}\left(1+\frac{C_1}{C_2}+\cancel{\frac{C_3}{C_1}}+\frac{C_3}{C_2}\right)-\cancel{j\omega C_3R_1^2}-2\cancel{\frac{C_3R_1}{C_1}}+j\cancel{\frac{C_3}{\omega C_1^2}}}$$

$$i_2(t)=\frac{u_g(t)}{R_1\left(1+\frac{C_3}{C_2}\right)+R_2\left(1+\frac{C_3}{C_1}\right)+j\omega C_3R_1R_2+\frac{1}{j\omega C_1}\left(1+\frac{C_1}{C_2}+\frac{C_3}{C_2}\right)}$$

Entonces:

$$u_0(t)=\frac{u_g(t)R_2}{R_1\left(1+\frac{C_3}{C_2}\right)+R_2\left(1+\frac{C_3}{C_1}\right)+j\omega C_3R_1R_2+\frac{1}{j\omega C_1}\left(1+\frac{C_1}{C_2}+\frac{C_3}{C_2}\right)}$$

*Método de las tensiones de nodo*.

Las ecuaciones de nodos del circuito, planteadas en forma matricial, y teniendo presente el equivalente Norton del generador de tensión (Figura 2)[1] resultan:

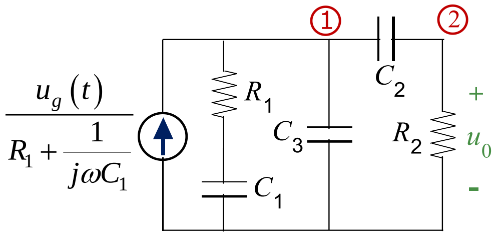



**Figura 2**

Ahora se puede escribir directamente la expresión para el nodo (1):

$$\begin{vmatrix}\dfrac{u_g(t)}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}\\ \\ 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}+j\omega C_3+j\omega C_2 & -j\omega C_2\\ \\ -j\omega C_2 & \dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{j\omega C_2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u_1(t)\\ \\ u_2(t)\end{vmatrix}$$

Y la tensión $u_0(t)$ requerida, que es igual a la tensión $u_2(t)$ del nodo 2 resulta:

$$u_0(t)=\frac{\dfrac{j\omega C_2}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}u_g(t)}{\left(\dfrac{1}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}+j\omega C_3+j\omega C_2\right)\left(\dfrac{1}{R_2}+j\omega C_2\right)+\left(\omega C_2\right)^2}$$

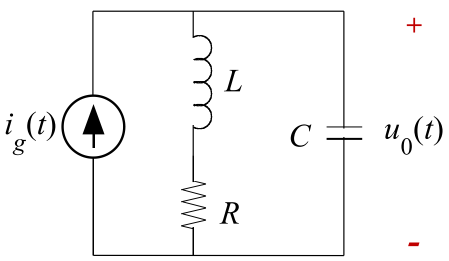
$$u_0(t)=\frac{u_g(t)R_2}{\left[\frac{1}{j\omega C_2}+\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(\frac{C_3}{C_2}+1\right)\right]\left(1+j\omega C_2R_2\right)-j\omega C_2R_2\left(R_1+\frac{1}{j\omega C_1}\right)}$$

$$u_0(t)=\frac{u_g(t)R_2}{R_1\left(1+\frac{C_3}{C_2}\right)+R_2\left(1+\frac{C_3}{C_1}\right)+j\omega C_3R_1R_2+\frac{1}{j\omega C_1}\left(1+\frac{C_1}{C_2}+\frac{C_3}{C_2}\right)}$$

Que resulta idéntica a la obtenida por el método de las corrientes de malla.

[1] Un entrenamiento adecuado haría innecesario dibujar el nuevo circuito, al menos para los casos más sencillos como éste, pudiéndose tener en cuenta mentalmente la equivalencia

## Ejercicio 3




En el circuito de la figura $R = 6\ \Omega$; $L = 1$ H; $C = 0{,}1$ F.

a) Obtener la expresión analítica de la función de transferencia definida como $T(s)=U_0(s)/I_g(s)$.

b) Calcular los valores de cada polo y cada cero de la función de transferencia.

c) Graficar los polos y ceros en un diagrama cero-polar.

d) Sea la fuente de corriente de valor $i_g(t)=3\cdot\cos 2t$. Obtener la expresión de $u_0(t)$ en **estado permanente**, *empleando los diagramas de Bode*.

## Resolución

(a) Expresión analítica de la función de transferencia $T(s)=U_0(s)/I_g(s)$

$$U_0(s)=I_g(s)\frac{1}{\dfrac{1}{R+sL}+sC}=I_g(s)\frac{\dfrac{1}{C}\left(s+\dfrac{R}{L}\right)}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}$$

$$T(s)=\frac{U_0(s)}{I_g(s)}=\frac{\dfrac{1}{C}\left(s+\dfrac{R}{L}\right)}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}=\frac{10(s+6)}{s^2+6s+10}$$

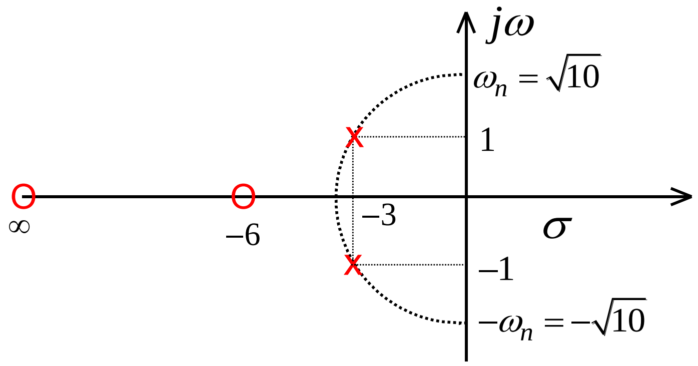
(b) Los ceros de la función de transferencia $T(s)$ son:

1 cero simple real en $s=-6$ y un cero en $s=\infty$

Los polos de la función de transferencia $T(s)$ son:

$$s_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=-3\pm j1$$

(c) Diagrama cero-polar:




(d) Empleo de Diagramas de Bode:

$$T(s)=\frac{6\left(\dfrac{s}{6}+1\right)}{\left(\dfrac{s}{\sqrt{10}}\right)^2+0{,}6s+1}\qquad T(j\omega)=\frac{6\left(1+j\dfrac{\omega}{6}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\omega_n=\sqrt{10}=3{,}16\qquad \frac{2\xi}{\omega_n}=0{,}6\qquad \Rightarrow \xi=\frac{1}{2}\omega_n=\frac{1}{2}0{,}6\cdot 3{,}16=0{,}95$$

Diagrama de Módulo

$$\left|T(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log 6 + 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{6}\right| - 20\log\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right|$$

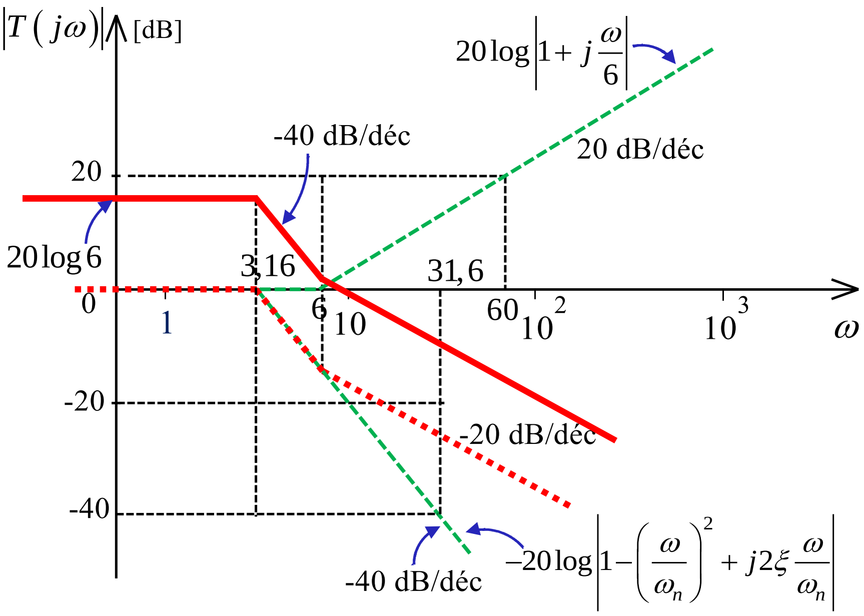
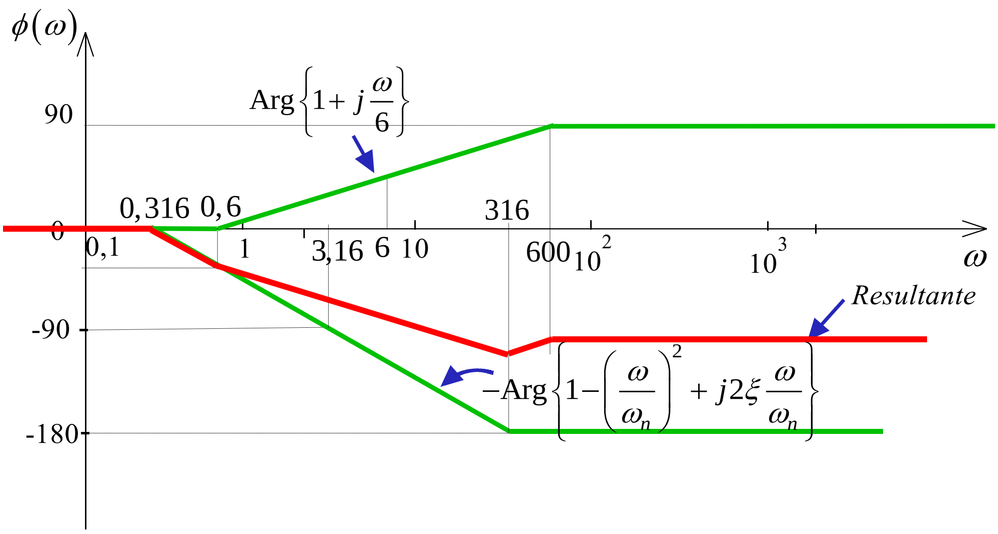



Diagrama de Fase

$$\mathrm{Arg}\{T(j\omega)\} = \mathrm{Arg}\{6\} + \mathrm{Arg}\left\{1 + j\frac{\omega}{6}\right\} - \mathrm{Arg}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right\}$$




Si la señal de entrada a la función de transferencia es:

$$i_g(t) = 3\cdot\cos 2t$$

La respuesta o señal de salida será:

$$r(t) = 3\cdot M\cos(2t+\theta)$$

Donde $M$ se obtiene del diagrama de Bode de módulo, para $\omega = 2$ (se debe expresar en veces) y $\theta$ se obtiene del diagrama de Bode de fase, para $\omega = 2$ (se debe expresar en radianes). De este modo, resulta:

$$r(t) = 3\cdot 6\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right) = 18\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$