

ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 4

Transformada de Fourier (TF), Sistemas Lineales y TF, Serie de Fourier (SF), Sistemas Lineales y SF

1. TF y sus propiedades

- a) Sea $v(t) = \wedge(t)$ una función par y real, y $V(f)$ su TF dada por:

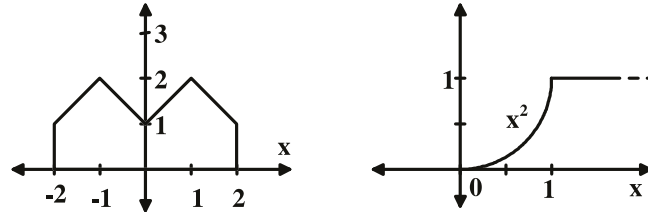
$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos(2\pi ft) dt$$

- I. Grafique el integrando de la ecuación anterior para $f = 0, 5; 1; 3; 5$.
 - II. ¿Dónde aparece reflejado el contenido frecuencial de la señal $v(t)$?
 - III. ¿Qué sucede cuando $f \rightarrow \infty$?
 - IV. Calcule y grafique $V(f)$. Indique en el gráfico los resultados previamente obtenidos.
- b) Dada la función $x(t) = e^{-t} \square(t - 1/2)$
- I. Calcule la TF de $x(t)$.
 - II. Halle la parte par e impar de $x(t)$, luego calcule sus TFs.
 - III. Obtenga las transformadas del inciso anterior por propiedades y verifique que coinciden.
- c) Demuestre que si $x(t)$ es una señal real y $X(f)$ su TF, entonces $X(-f) = X^*(f)$ (simetría Hermítica). A partir de esto demuestre que $\text{Re}\{X(f)\}$ es par, $\text{Im}\{X(f)\}$ es impar, $|X(f)|$ es par y $\angle X(f)$ es impar (salvo número entero de ciclos, o sea $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).
- d) Sea $x(t) = A + \cos(2\pi f_0 t)$, con A y f_0 constantes reales, y llamemos $y(t)$ a su derivada.
- I. Calcule $X(f)$ e $Y(f)$.
 - II. Pruebe la propiedad de derivación en el tiempo de la TF y vea que $X(f)$ e $Y(f)$ la cumplen.
 - III. ¿Qué sucede con el valor medio de la señal al derivar? ¿Cómo aparece reflejado este hecho en el dominio transformado?
 - IV. ¿Son $x(t)$ e $y(t)$ señales de energía o de potencia? ¿Cómo vemos esto en sus transformadas?
- e)
- I. Halle la TF de $x(t) = u(t)$, usando la propiedad de derivación en el tiempo. ¿Cuánto vale el valor medio de $x(t)$? ¿Cómo se ve en su transformada?
 - II. ¿Cuál es la TF de $y(t) = \text{sgn}(t)$?
 - III. Demuestre la propiedad de integración en el tiempo recordando que $\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda = \{f * u\}(t)$. ¿Qué sucede si $f(t)$ tiene valor medio?
- f) Sea $x(t) = 2 \square(t/4 - 1/4) - \square(t - 1)$. Grafíquela. Sin calcular su TF, $X(f)$, encuentre:
- I) $X(0)$ II) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$ III) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

2. Al derecho y al revés.

- a) Hallar la TF y graficar esquemáticamente:

- | | |
|---|--|
| I. $x(t) = \square(t/4 - 5)$ | II. $x(t) = \square(t - 1) + \wedge((t + 1)/2)$ |
| III. $x(t) = e^{-3t^2 + 2t}$ | IV. $x(t) = e^{-j\pi t}$ (señal compleja) |
| V. $x(t) = 1 + \cos(\pi t)$ | VI. $x(t) = \text{sinc}^2(t) \text{sinc}(t)$ |
| VII. $x(t) = \delta(5t - 2)$ | VIII. $x(t) = \wedge(t - 2) * \square(t) * \delta(3t)$ |
| IX. $x(t) = \text{sen}(\pi t) \square(t/2)$ | X. $x(t) = \cos(\pi t) \square(t/2)$ |
| XI. $x(t) = (e^{-(t-1)} u(t - 1)) * \square(t - 3)$ | XII. Para las señales de la figura: |



b) Halle las antitransformadas de Fourier de las siguientes señales.

I. $X(f) = \square(2f) + j f \square(f)$

II. $X(f) = \text{sinc}(2f - 1)$

III. $X(f) = 2\delta(f + 1) + 2\delta(f - 1) + 4\delta(f)$

IV. $X(f) = \cos(8\pi f + \pi/3)$

v. $X(f) = j(\wedge(f + 10) + \wedge(f - 10))$

3. Respuesta en frecuencia de un SLIT

Consideremos un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$, cuya TF es $H(f)$. Si llamamos $x(t)$ a su entrada e $y(t)$ a su salida, sabemos que se verifica que $y(t) = \{x * h\}(t)$.

- Operando en el dominio del tiempo, pruebe que si $x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$, entonces la salida es $y(t) = A H(f_0) e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ (por esto $H(f)$ es llamada la respuesta en frecuencia).
- Halle una expresión que vincule la TF de la salida, $Y(f)$, con la TF de una entrada cualquiera, $X(f)$. Asumiendo que $X(f)$ existe, ¿qué característica del sistema es necesaria para que exista $Y(f)$?
- Obtenga el resultado de 3a operando en el dominio de la frecuencia.
- Considerando que $h(t)$ es real (como será en general para todos los sistemas que veamos), y utilizando los resultados anteriores demuestre que la salida a la entrada $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ se puede expresar como $y(t) = B \cos(2\pi f_0 t + \phi)$. ¿Cuánto valen B y ϕ ?
- Si la entrada $x(t) = 1 + 4 \cos(2\pi t) + 8 \sin(3\pi t - \pi/2)$ produce la salida $y(t) = 2 - 2 \sin(2\pi t)$, ¿Qué valores de $H(f)$ es posible determinar? ¿Cuánto valen?
- Explique por qué no se puede caracterizar al sistema con un par entrada-salida como el anterior y sí cuando la entrada es un impulso o un escalón.
- Suponga que la ecuación diferencial que describe al SLIT es $y'(t) + 3 y(t) = x(t)$. Halle $H(f)$ aplicando TF directamente a la ecuación. Halle $h(t)$ antitransformando. Obtenga la salida del sistema cuando la entrada es:

I. $x(t) = \cos(2\pi t)$

II. $x(t) = \cos(3\pi t) + \sin(5\pi t)$

III. $x(t) = e^{-2t}u(t)$

IV. $x(t) = e^{-3t}u(t)$

v. $x(t) = \square(t)$

VI. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k)$

4. TF de señales periódicas y SF

Sea $p(t)$ una señal periódica de período T y $q(t) = p(t)\square\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, arbitrario. Es decir, $q(t)$ es igual a $p(t)$ en un período y cero en los restantes valores de t . La señal $p(t)$ puede escribirse como $p(t) = \{q * p_T\}(t)$, donde $p_T(t) = \frac{1}{T} \uparrow\uparrow\uparrow\left(\frac{t}{T}\right)$.

- Utilizando este hecho escriba cómo resultaría la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de la TF de $q(t)$, $Q(f)$.
- Expresa los coeficientes de la SF de $p(t)$, $c[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), en función de $Q(f)$.
- En base a los dos incisos anteriores, exprese la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de los coeficientes de su SF, $c[n]$.
- Sea $r(t) = p(t - t_1)$, con $t_1 \in \mathbb{R}$. ¿Cómo resultan los coeficientes de la SF de $r(t)$ en términos de los $c[n]$? ¿Qué sucede en el caso $t_1 = T/2$?

- e) Calcule la potencia de $p(t)$ en función de los $c[n]$. ¿Cuál es el valor medio de $p(t)$?
- f) Obtener la SF para las siguientes señales. Graficar los $c[n]$ en módulo y fase. Hallar su potencia.
- | | |
|--------------------------------------|---|
| I. $p(t) = e^{-j10\pi t}$ | II. $p(t) = \cos(\pi t + \pi/4)$ |
| III. $q(t) = \square(t/4)$ y $T = 8$ | IV. $q(t) = \square(t/4 - 1)$ y $T = 8$ |
| V. $q(t) = \square(t/4)$ y $T = 12$ | VI. $q(t) = \wedge(t/4)$ y $T = 8$ |
- g) Halle la TF de las señales del inciso anterior.

5. Señales periódicas a través de sistemas

- a) Demuestre que si a la entrada de un SLIT se aplica una señal periódica $x(t)$, la señal de salida, $y(t)$, resulta también periódica. ¿Cómo resulta la SF de $y(t)$ en términos de la SF de $x(t)$? **Ayuda:** En el ejercicio 3 analizamos cómo resulta la salida de un SLIT con respuesta en frecuencia $H(f)$ cuando a su entrada se aplica la señal $x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$.
- b) Considere el sistema SLIT con respuesta impulsional $h(t)$, al que se aplican las señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ donde:
- $$h(t) = \square(5/2(t - 1/5))$$
- $$x_1(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$$
- $$x_2(t) = \{q * p_T\} \text{ con } q(t) = \square(\frac{5t}{2}) \text{ y } T = 4/5$$
- Halle el período fundamental de la señal $x_1(t)$ (puede serle de utilidad revisar lo hecho en la Práctica 1). Calcule su SF, su TF y grafique esta última ¿dónde aparece reflejado el período fundamental?
 - Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_1(t)$. Halle la TF y gráfiquela. ¿Cuál es el período fundamental de esta señal?
 - Halle la SF y la TF de $x_2(t)$.
 - Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_2(t)$. Trate de explicar el resultado pensando qué ocurre en el dominio del tiempo.
- c) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descrito por $y(t) = \cos(\pi t)x(t)$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.
- d) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descrito por $y(t) = (x(t))^2$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.

Cuidado: Estos dos últimos incisos son sólo ejemplos de lo que sucedería al aplicar señales periódicas a sistemas que no son SLIT. A partir de estos ejemplos no es posible generalizar sobre el comportamiento de sistemas que no son SLIT.

6. TF y SF con MATLAB

- a) Calcule en forma analítica y grafique en MATLAB la TF de la señal $x(t) = \wedge(t/2)$.
- b) La integral que define la TF puede calcularse numéricamente, para cada valor de frecuencia, utilizando la suma de Riemman. Para subintervalos de longitud ΔT se tiene:

$$X(f) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta T \wedge(n\Delta T/2) e^{-j2\pi f n \Delta T}$$

En una implementación numérica, la sumatoria no puede realizarse de $-\infty$ a ∞ , sino de un determinado valor N_1 a N_2 :

$$X(f) \approx \sum_{n=-N_1}^{N_2} \Delta T \wedge (n\Delta T/2) e^{-j2\pi f n\Delta T}$$

Cuando la función a integrar es de soporte finito, como es el caso del triángulo, eligiendo adecuadamente los valores de N_1 y N_2 esta aproximación es similar a la anterior. Para funciones de soporte infinito habrá una aproximación adicional debido a la elección de estos valores.

Calcule la TF de la señal $x(t)$ utilizando esta aproximación, para lo cual deberá ejecutar las sentencias siguientes, previa implementación de la función `tri` en un archivo `*.m`:

```
dt = .2; t = [-2:dt:2]; x = tri(t/2);
df = 0.125; f = -2:df:2; X=zeros(size(f));
for k=1:length(f)
    X(k) = sum(dt*x.*exp(-1i*2*pi*f(k)*t));
end
```

Compare con la TF analítica graficando módulo y fase. Repita para diferentes valores de dt , como por ejemplo 0.4, 0.5, 0.02, etc. ¿Qué sucede al tomar $dt = 0,5$? Puede modificar también el paso de evaluación de frecuencia, df .

- c) Con un enfoque similar puede obtenerse una aproximación de los coeficientes de la SF de una señal periódica de período T :

$$c_k \approx \frac{\Delta T}{T} \sum_{n=-T/2\Delta T}^{T/2\Delta T} x(n\Delta T) e^{-j2\pi k n\Delta T/T}$$

Calcule y grafique los coeficientes de la SF (truncada) de la señal periódica (iii) del ejercicio 4f, para lo cual deberá ejecutar las sentencias siguientes, previa definición de la función `caj` en un archivo `*.m`:

```
T = 8; dt = T/1000; t = -.5*T:dt:.5*T;
K = 19; ks = [-K:K];
q = caj(t/4); c = zeros(1,2*K+1);
for k = ks
    c(K+1+k) = dt/T*sum(q.*exp(-1i*2*pi*k*t/T));
end
```

Compare con la SF analítica graficando módulo y fase.

- d) A partir de los coeficientes de la SF truncada, reconstruya la señal utilizando las sentencias siguientes:

```
y = zeros(size(t));
for k = ks
    y = y+exp(1i*2*pi*k*t/T)*c(K+1+k);
end
```

Compare este resultado con la señal original $q(t)$. Analice qué sucede para diferentes valores de K .

- e) Suponga que esta señal periódica es aplicada a la entrada de un SLIT con respuesta en frecuencia:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{(j2\pi f)^2 + 2j2\pi f + 1}$$

Obtenga la SF de la señal de salida utilizando la SF (truncada) de la señal de entrada, previamente calculada. A partir de ella, reconstruya la señal de salida. Analice qué sucede para diferentes valores de K .

Algunos resultados

2. a) I. $4 \operatorname{sinc}(4f) e^{-j40\pi f}$ II. $\operatorname{sinc}(f) e^{-j2\pi f} + 2 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{j2\pi f}$
 III. $e^{1/3} \sqrt{\pi/3} e^{-j2\pi f/3} e^{-\pi^2 f^2/3}$ IV. $\delta(f + 0,5)$
 V. $\delta(f) + \frac{1}{2} \{ \delta(f + 0,5) + \delta(f - 0,5) \}$ VI. $\square(f)(\frac{3}{4} - f^2) + \square(|f| - 1)(\frac{f^2}{2} - \frac{3|f|}{2} + \frac{9}{8})$
 VII. $e^{-j4\pi f/5}/5$ VIII. $\operatorname{sinc}^3(f) e^{-j4\pi f/3}$
 IX. $j \{ \operatorname{sinc}(2f + 1) - \operatorname{sinc}(2f - 1) \}$ X. $\operatorname{sinc}(2f + 1) + \operatorname{sinc}(2f - 1)$
 XI. $\operatorname{sinc}(f) e^{-j8\pi f} / (1 + j2\pi f)$ XII. i) $2 \operatorname{sinc}^2(f) \cos(2\pi f) + 4 \operatorname{sinc}(4f)$
 XII. ii) $(\delta(f) - \operatorname{sinc}(f) e^{-j\pi f} / (\pi f)^2 + e^{-j2\pi f} / (\pi f)^2) / 2$
- b) I. $\operatorname{sinc}(t/2)/2 + \operatorname{sinc}'(t)/2\pi$ II. $\square(t/2) e^{j\pi t}/2$
 III. $4(1 + \cos(2\pi t))$ IV. $0,5 * (\delta(t + 4) e^{j\pi/3} + \delta(t - 4) e^{-j\pi/3})$
 V. $2j \operatorname{sinc}^2(t) \cos(20\pi t)$
3. e) $H(0) = 2, H(1) = H(-1)^* = 0,5j$ y $H(1,5) = H(-1,5) = 0$
- g) I. $\frac{\cos(2\pi t - \operatorname{tg}^{-1}(2\pi/3))}{\sqrt{9 + 4\pi^2}}$ II. $\frac{\cos(3\pi t - \operatorname{tg}^{-1}(\pi))}{3\sqrt{1 + \pi^2}} + \frac{\operatorname{sen}(5\pi t - \operatorname{tg}^{-1}(5\pi/3))}{\sqrt{9 + 25\pi^2}}$
 III. $(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ IV. $te^{-3t}u(t)$
 V. $\frac{(1 - e^{-3(t+0,5)})\square(t)}{3} + \frac{(1 - e^{-3})e^{-3(t-0,5)}u(t-0,5)}{3}$
 VI. $\frac{1}{9} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kt/3 - \operatorname{tg}^{-1}(2\pi k/9))}{\sqrt{81 + 4\pi^2 k^2}}$
4. f) I. $c[n] = \delta[n + 1] \ (P = 1 \text{ y } T = \frac{1}{5})$
 II. $c[n] = e^{j\pi n/4} (\delta[n + 1] + \delta[n - 1]) / 2 \ (P = \frac{1}{2} \text{ y } T = 2)$
 III. $c[n] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(\frac{n}{2}) \ (P = \frac{1}{2})$ IV. $c[n] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(\frac{n}{2}) (-1)^n \ (P = \frac{1}{2})$
 V. $c[n] = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}(\frac{n}{3}) \ (P = \frac{1}{3})$ VI. $c[n] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(\frac{n}{2}) \ (P = \frac{1}{3})$