Síntesis de Cuadripolos Descargados LC

SÍNTESIS EN CADENA DE MATRICES Z E Y

CEROS FINITOS SOBRE EL EJE $j\omega$

REMOCIONES PARCIALES

Síntesis de Redes LC en cadena

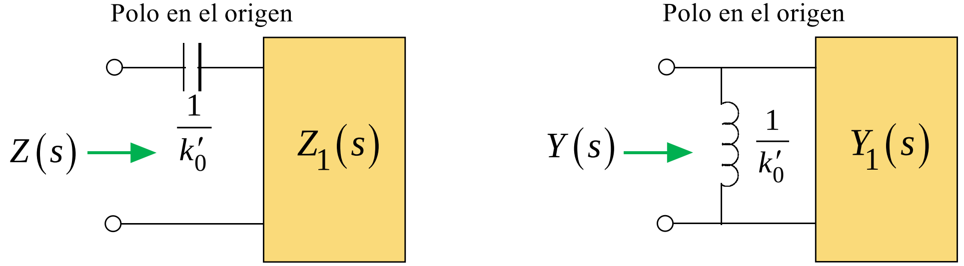
- En las redes hasta aquí analizadas, los ceros en el origen e infinito de la inmitancia de transferencia y_{21} o Z_{21} guardan cierta relación con los polos y ceros de y_{11} e y_{22} o z_{11} e z_{22}.
- Dicha relación corresponde a que, en la posición de los ceros de transferencia, las inmitancias terminales tienen ceros o polos.
- En el caso de ceros sobre el eje imaginario distintos del origen e infinito, tal relación no existe por lo que el desarrollo de las inmitancias terminales en cualquiera de sus formas canónicas no conduce a la obtención de circuitos sintonizados a las frecuencias de interés.
- Por lo tanto, estas frecuencias de interés deben "crearse".
- Para la creación de los polos en la inmitancia terminal que permita sintetizar el cero de transferencia, puede utilizarse el procedimiento de *remoción parcial.*
- La *remoción parcial* consiste en remover parcialmente un polo de la inmitancia de transferencia para trasladar un cero finito adyacente hacia la posición donde y_{21} tiene un cero de transmisión finito.
- Invirtiendo la inmitancia obtenida, el cero obtenido pasa a ser un polo y puede ser removido para realizar el cero de transmisión finito deseado.
- En este proceso, es importante recordar que los ceros que se encuentran en el origen e infinito resultan inamovibles.

Remoción parcial de un polo en el origen

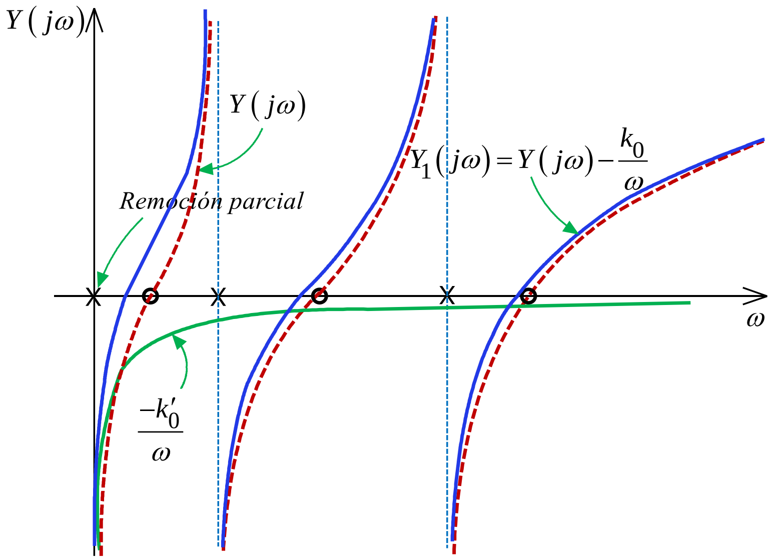
- Supongamos una impedancia de entrada Z(s) o una admitancia de entrada Y(s) que tienen un polo en el origen. La remoción parcial del mismo puede realizarse considerando que

$$Z(s)=\frac{k_0'}{s}+Z_1(s) \Rightarrow Z_1(s)=Z(s)-\frac{k_0'}{s} \qquad Y(s)=\frac{k_0'}{s}+Y_1(s) \Rightarrow Y_1(s)=Y(s)-\frac{k_0'}{s}$$

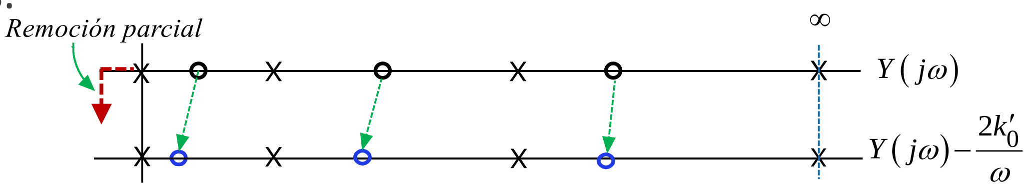
- Donde $k_0' < k_0$ siendo k_0 el residuo correspondiente al polo en el origen.



- La remoción parcial puede interpretarse circuitalmente como que $Z_1(s)$ o $Y_1(s)$ mantendrán el polo en el origen, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía $Z(s)$ o $Y(s)$.



- El efecto sobre el mapa cero polar puede resumirse diciendo que todo resulta como si todos los ceros (excluyendo el eventual cero en infinito) se desplazaran hacia el origen (donde se efectuó la remoción parcial) pero sin alcanzar los polos contiguos.

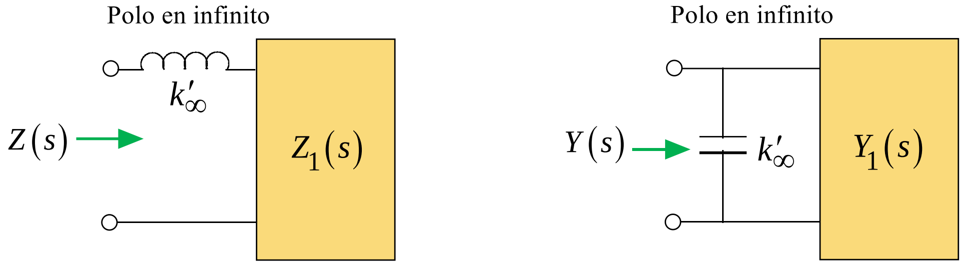


Remoción parcial de un polo en infinito

- Supongamos una impedancia de entrada Z(s) o una admitancia de entrada Y(s) que tienen un polo en infinito. La remoción parcial del mismo puede realizarse considerando que

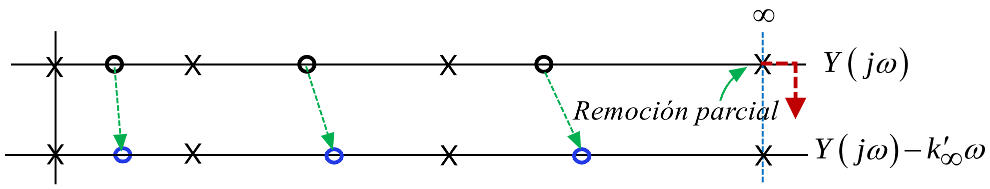
$$Z(s) = Z_1(s) + k'_\infty s \quad \Rightarrow \quad Z_1(s) = Z(s) - k'_\infty s \qquad\qquad Y(s) = Y_1(s) + k'_\infty s \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = Y(s) - k'_\infty s$$

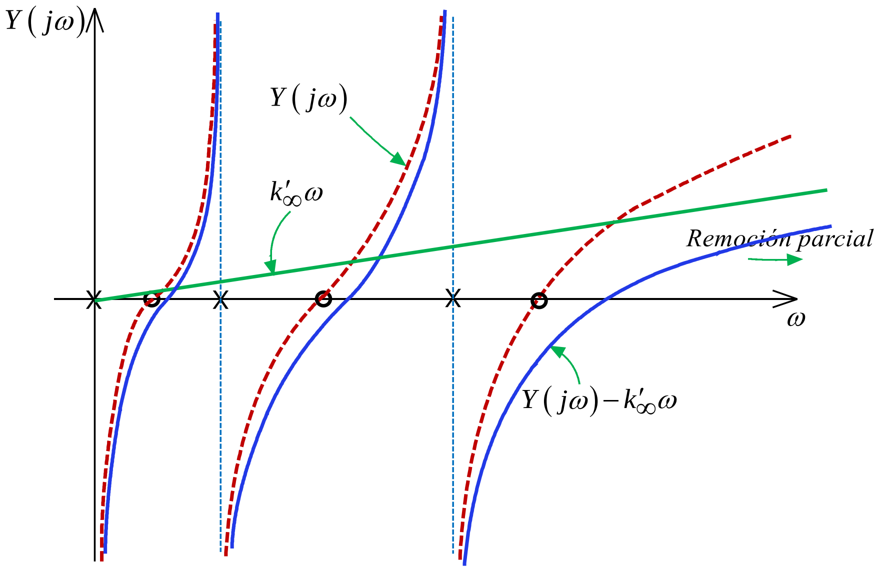
- Donde $k_\infty' < k_\infty$ siendo k_∞ el residuo correspondiente al polo en infinito.



- La remoción parcial puede interpretarse circuitalmente como que $Z_1(s)$ o $Y_1(s)$ mantendrán el polo en infinito, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía $Z(s)$ o $Y(s)$.

- El efecto sobre el mapa cero polar puede resumirse diciendo que todo resulta como si todos los ceros (excluyendo el eventual cero en el origen) se desplazaran hacia el infinito (donde se efectuó la remoción parcial) pero sin alcanzar los polos contiguos.





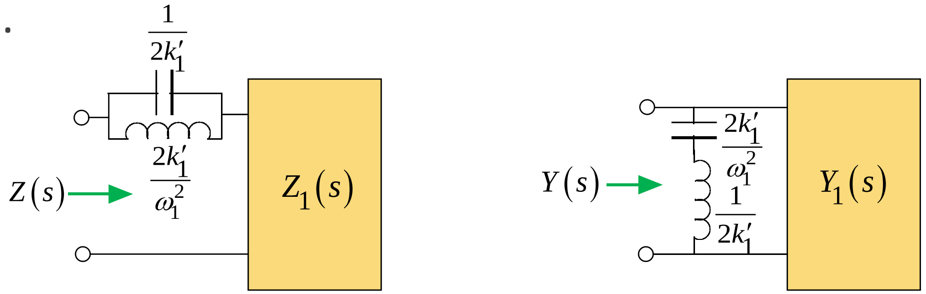
Remoción parcial de un polo finito

- Supongamos una impedancia de entrada Z(s) o una admitancia de entrada Y(s) que tienen un polo finito en $s=\pm j\omega_1$. La remoción parcial del mismo puede realizarse considerando que

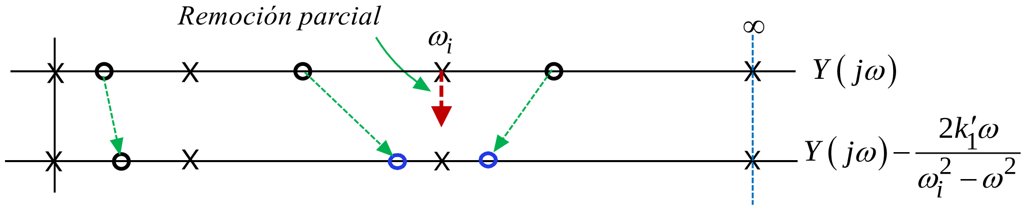
$$Z(s)=Z_1(s)+\frac{2k_1's}{s^2+\omega_1^2} \Rightarrow Z_1(s)=Z(s)-\frac{2k_1's}{s^2+\omega_1^2} \qquad Y(s)=Y_1(s)+\frac{2k_1's}{s^2+\omega_1^2} \Rightarrow Y_1(s)=Y(s)-\frac{2k_1's}{s^2+\omega_1^2}$$

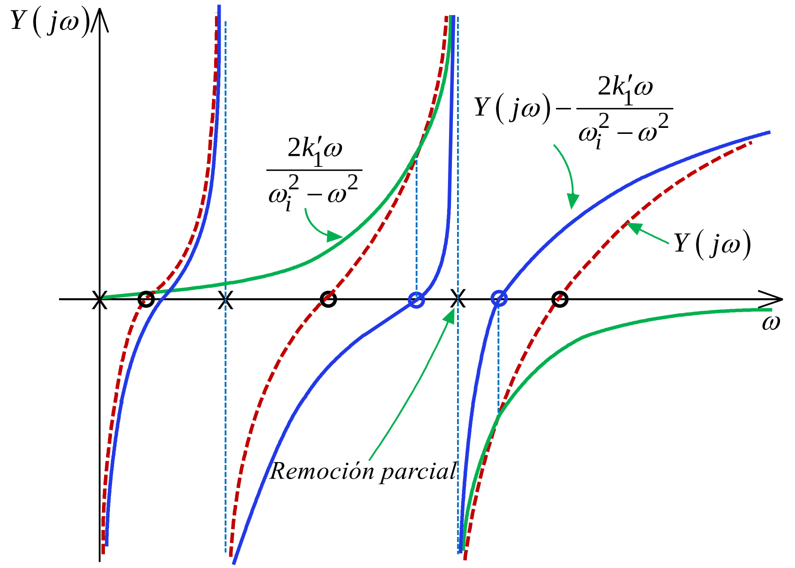
- Donde $k_1' < k_1$ siendo k_1 el residuo correspondiente al polo $s=\pm j\omega_1$.

- La remoción parcial puede interpretarse circuitalmente como que $Z_1(s)$ o $Y_1(s)$ mantendrán el polo en $s=\pm j\omega_1$, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía $Z(s)$ o $Y(s)$.



- El efecto sobre el mapa cero polar puede resumirse diciendo que todo resulta como si todos los ceros (excluyendo los eventuales cero en el origen e infinito) se desplazaran hacia $s=\pm j\omega_1$ (donde se efectuó la remoción parcial) pero sin alcanzar los polos contiguos.





Realización de ceros de transmisión finitos

Ejemplo

- Sintetizar la matriz **Z** cuyos parámetros son

$$z_{21} = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} \qquad\qquad z_{22} = \frac{2s^2+1}{s(s^2+2)}$$

- Si se realiza el Desarrollo de Foster de los parámetros:

$$z_{22} = \frac{2s^2+1}{s(s^2+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{2\frac{3}{4}s}{s^2+2}$$

$$z_{21} = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{2\frac{1}{4}s}{s^2+2}$$

- Se observa que
  - $z_{21}(s)$ tiene un cero de transmisión en infinito y en $s=\pm$ j1
  - $z_{22}(s)$ comparte con $z_{21}(s)$ los polos que se encuentran en el origen y en $s=\pm j\sqrt{2}$.
  - $z_{22}(s)$ no tiene polos propios.

Redes LC con todos ceros en el origen

Ejemplo

- Sintetizar la matriz **Z** cuyos parámetros son

$$z_{21}=\frac{s^2+1}{s(s^2+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{2\frac{1}{4}s}{s^2+2} \qquad z_{22}=\frac{2s^2+1}{s(s^2+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{2\frac{3}{4}s}{s^2+2}$$

- El proceso de síntesis se debe comenzar desde los terminales de salida, ya que el dato es z_{22}
- Como z_{22}(s) no tiene polos propios, la parte interior resulta

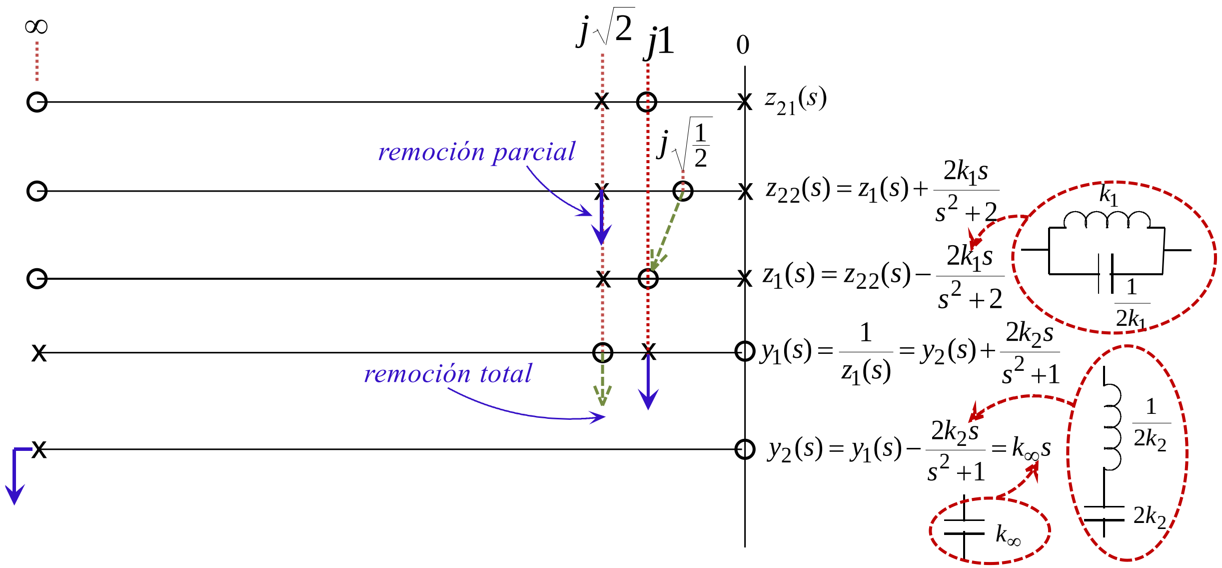
$$z_{\text{int}}=z_{22}=\frac{2s^2+1}{s(s^2+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{2\frac{3}{4}s}{s^2+2}$$

- La parte interior de z_{22}(s) tiene un cero en infinito y otro en $s=\pm j\sqrt{0{,}5}$. Se puede observar que no hay ningún tipo de relación con el cero de z_{21} ubicado en $s=\pm j1$.
- Para poder sintetizar el cero finito de z_{21} resulta necesario entonces desplazar un cero de $z_{22\text{int}}$(s) al lugar apropiado.
- Para realizar el desplazamiento, puede aplicarse el procedimiento de remoción parcial de algún polo.
- Es muy importante remarcar que para este procedimiento, y también en general, resulta de mucha utilidad la utilización del diagrama cero polar.

Redes LC con todos ceros en el origen

Ejemplo

- Dado que hay que realizar un cero de transmisión finito, que no coincide con ninguna singularidad de la parte interior de $z_{22}(s)$, hay que realizar una remoción parcial, para ubicar uno de los ceros de $z_{22}(s)$ en $s=\pm j1$.
- Para que la remoción parcial no afecte a los demás parámetros de la matriz Z, se recomienda realizarla en primer lugar y en la misma instancia que la inmitancia terminal, en este caso impedancia.
- En este caso el cero que se puede correr a $s=\pm j1$ es el que se encuentra en $s=\pm j1/\sqrt{2}$, y para lograrlo hay que efectuar una remoción parcial del polo $z_{22}(s)$ en $s=\pm j\sqrt{2}$



- La remoción se realiza con la condición de obtener un cero en el punto deseado.

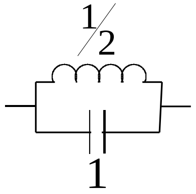
$$z_{22}(s)=z_1(s)+\frac{2k_1 s}{s^2+2} \xrightarrow{k_1 \text{ debe ser tal que } z_1(\pm j1)=0} k_1=\frac{s^2+2}{2s}z_{22}(s)\Big|_{s^2=-1}=\frac{\cancel{s^2+2}}{2s}\frac{2s^2+1}{s\,\cancel{(s^2+2)}}\Bigg|_{s^2=-1}=\frac{1}{2}$$

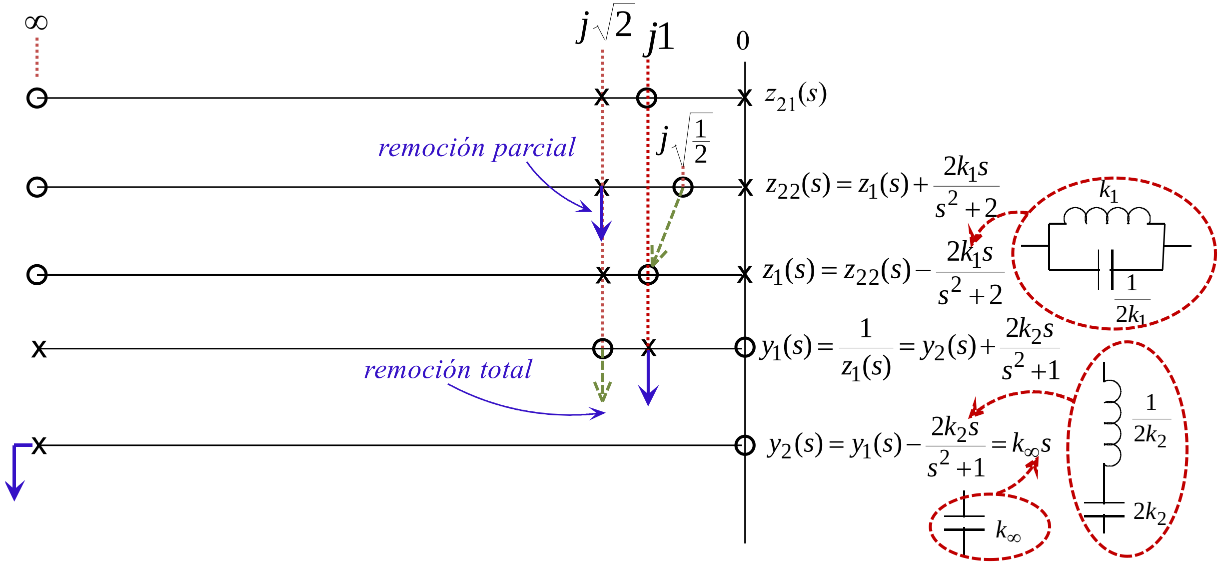
Redes LC con todos ceros en el origen

Ejemplo

- La remoción parcial se sintetiza como una impedancia:

$$Z_A(s)=\frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+2}=\frac{1}{s+\frac{1}{\frac{1}{2}s}}$$





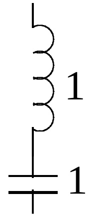
$$z_1(s)=z_{22}(s)-\frac{2k_1 s}{s^2+2}=\frac{2s^2+1}{s(s^2+2)}-\frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+2}=\frac{2s^2+1-s^2}{s(s^2+2)}=\frac{s^2+1}{s(s^2+2)}$$

- Como era de esperar, $z_1(s)$ tiene un cero en $s=\pm j1$
- La inversa de $z_1(s)$ tiene un polo que al removerlo realizará el cero de transmisión deseado.

$$y_1(s)=\frac{1}{z_1(s)}=\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}=y_2(s)+\frac{2k_2 s}{s^2+1}$$

$$k_2=\lim_{s^2\to -1}\frac{s^2+1}{2s}y_1(s)=\lim_{s^2\to -1}\frac{s^2+1}{2s}\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}=\frac{1}{2}$$

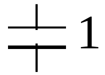
$$Y_B(s)=\frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+1}=\frac{1}{s+\frac{1}{s}}$$



- Una vez removido, la admitancia restante resulta

$$y_2(s)=y_1(s)-\frac{2k_2 s}{s^2+1}=\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}-\frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+1}=\frac{s^3+s}{s^2+1}=s$$

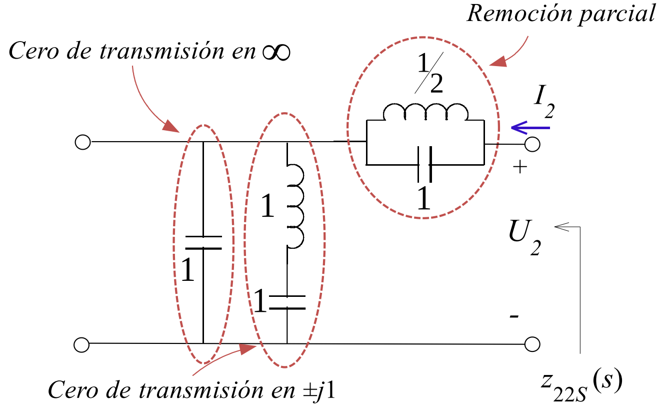
Síntesis de cero en infinito



Redes LC con todos ceros en el origen

Ejemplo

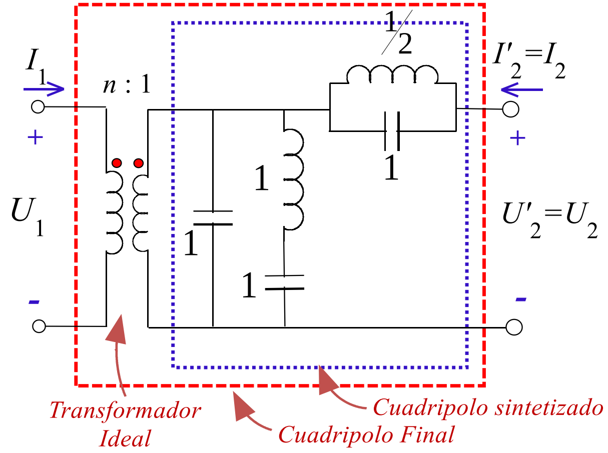
- El cuadripolo resultante es



- Como era de esperar, resta verificar y eventualmente compensar el factor de escala de $z_{21}(s)$.
- Si se postula el circuito con el transformador, puede deducirse que

$$z_{22S}(s) = \left.\frac{U_2'}{I_2'}\right|_{I_1'=0} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = z_{22E}(s) \qquad U_1' = \frac{1}{n} U_1 \qquad I_1' = n\, I_1$$

$$z_{21S}(s) = \left.\frac{U_2'}{I_1'}\right|_{I_2'=0} = \left.\frac{U_2}{n\, I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{n} z_{21E}(s) \qquad n = \frac{z_{21E}(s)}{z_{21S}(s)}$$

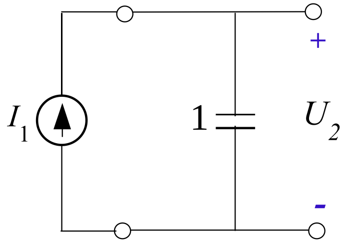


Redes LC con todos ceros en el origen

Ejemplo

Red asintótica para $s \to \infty$

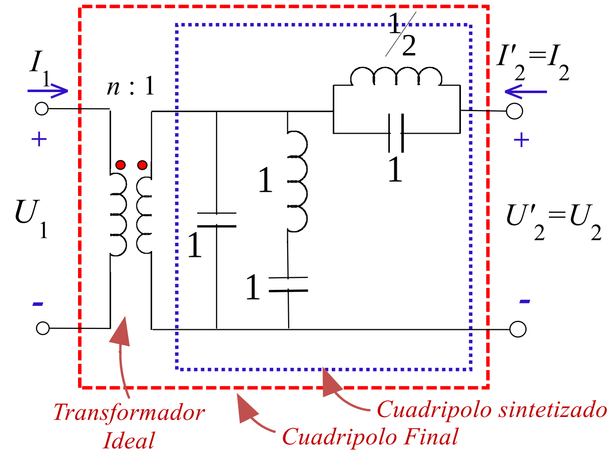
- La red asintótica resulta



$$z_{21S}(s) = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{s}$$

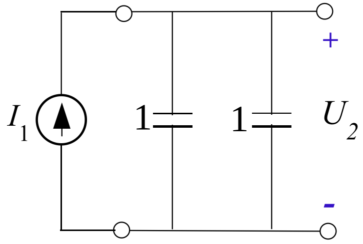
$$z_{21E}(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} \qquad s \to \infty \qquad z_{12E}(s) = \frac{1}{s}$$

$$n = \frac{z_{12E}(s)}{z_{12S}(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}} = 1$$



Red asintótica para $s \to 0$

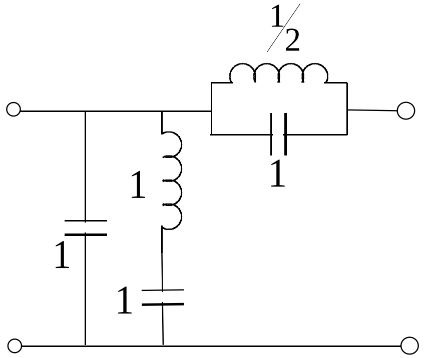
- La red asintótica resulta



$$z_{21S}(s) = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{2s}$$

$$z_{21E}(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} \qquad s \to 0 \qquad z_{12E}(s) = \frac{1}{2s}$$

$$n = \frac{z_{12E}(s)}{z_{12S}(s)} = \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2s}} = 1$$



Síntesis de Transferencias

- En numerosas aplicaciones puede resultar de interés diseñar un cuadripolo LC a partir de la especificación de alguna de las funciones de transferencia del cuadripolo descargado.
- En todos estos casos, es posible partir de las ecuaciones del cuadripolo para obtener la relación entre las variables de interés representadas en la función de transferencia y los parámetros **Z** o **Y** del cuadripolo.
- Una vez obtenida la expresión, se construyen el par de parámetros correspondiente en su forma más simple posible, haciendo cumplir las condiciones de realizabilidad correspondientes.

Ejemplo

$$T(s) = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(s^2+4)(s^2+25)}{(s^2+1)(s^2+100)}$$

- Del conjunto de ecuaciones del cuadripolo

$$\begin{aligned} U_1(s) &= z_{11}(s)\, I_1(s) + z_{12}(s)\, I_2(s) \\ U_2(s) &= z_{21}(s)\, I_1(s) + z_{22}(s)\, I_2(s) \end{aligned} \xrightarrow{I_2=0} T_1(s) = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = \frac{(s^2+4)(s^2+25)}{(s^2+1)(s^2+100)}$$

- Como los polos de $z_{21}(s)$ deben ser también polos de $z_{11}(s)$, pueden construirse ambos parámetros realizables planteando que

$$\frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = -\frac{\dfrac{(s^2+4)(s^2+25)}{D(s)}}{\dfrac{(s^2+1)(s^2+100)}{D(s)}} \xrightarrow{D(s) = s\,(s^2+9)} z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+100)}{s(s^2+9)} \qquad z_{21}(s) = \frac{(s^2+4)(s^2+25)}{s(s^2+9)}$$