

---

# **REPASO DE ALGEBRA Y ANÁLISIS VECTORIAL**

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

- **1. Álgebra vectorial: suma, resta y multiplicación de vectores.**
- **2. Sistemas de coordenadas ortogonales: cartesianas, cilíndricas, esféricas.**
- **3. Cálculo vectorial: diferenciación e integración de vectores.**
  - **Operaciones:**
    - » **Gradiente (escalar- $\rightarrow$ vector)**
    - » **Divergencia (vector- $\rightarrow$ escalar)**
    - » **Rotacional (vector- $\rightarrow$ vector)**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

where  $\nabla$  = the vector differential operator  
 $\mathbf{D}$  = the electric flux density  
 $\mathbf{B}$  = the magnetic flux density  
 $\mathbf{E}$  = the electric field intensity  
 $\mathbf{H}$  = the magnetic field intensity  
 $\rho_v$  = the volume charge density  
and  $\mathbf{J}$  = the current density.

- Escalar: Magnitud
- Vector: Magnitud y dirección
- Campo es una función que indica una cantidad particular (magnitud, y/o dirección) en una región
  - ✓ Escalares ( $U, T, \dots$ )
  - ✓ Vectoriales ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}, \dots$ )

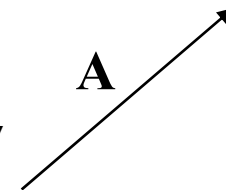
- **Vector Unitario**

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

$|\mathbf{A}|$ : Es el módulo de  $\mathbf{A}$  y tiene unidades y dimensión

$\mathbf{a}_A$ : es un vector sin dimensión de magnitud 1. y especifica la dirección de  $\mathbf{A}$

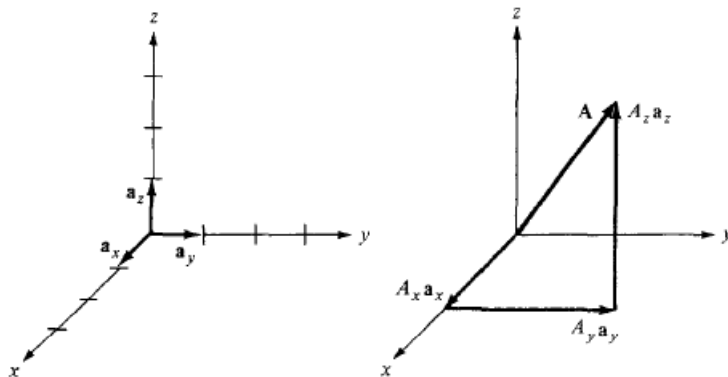
- Se puede representar gráficamente con un segmento
- Dos vectores son iguales si tienen igual dirección y magnitud, aunque pueden estar desplazados en el espacio



- Representación en coordenadas cartesianas

*Componentes de  $\mathbf{A}$*

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{or} \quad A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

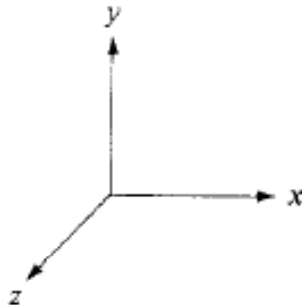


$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

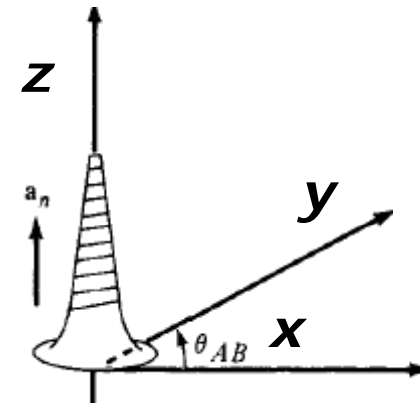
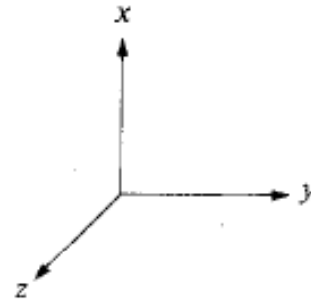
$$\mathbf{a}_A = \frac{A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

***Orientación del espacio:***  
***dos sistemas donde si superponemos  $x$  e  $y$  ,  $z$  queda opuesto***

***Sistema positivo,  
directo o derecho***



***Sistema negativo o  
inverso***

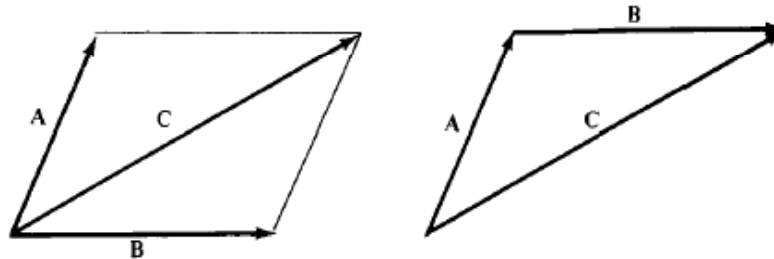


Un triedro  $O, x, y, z$  se dice positivo o dextrógiro cuando colocando un tornillo normalmente al plano  $(x, y)$  , girando de la parte positiva de  $X$ , hacia la parte positiva de  $y$  el tornillo de rosca derecha avanza hacia la parte positiva del eje  $Z$

## • Adición y sustracción de vectores

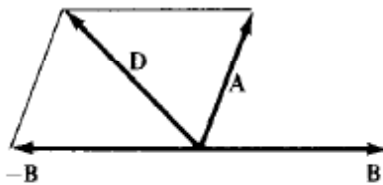
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = (A_x + B_x)\mathbf{a}_x + (A_y + B_y)\mathbf{a}_y + (A_z + B_z)\mathbf{a}_z$$

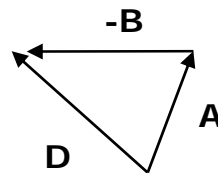


$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

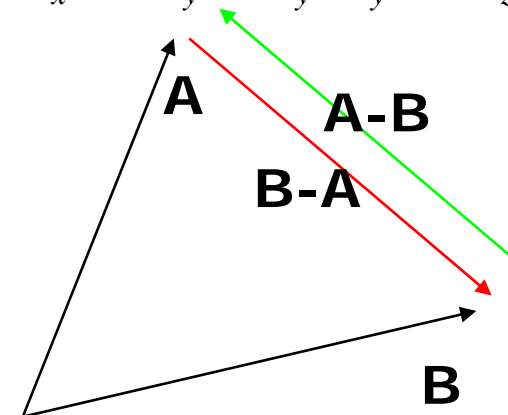
$$\mathbf{D} = (A_x - B_x)\mathbf{a}_x + (A_y - B_y)\mathbf{a}_y + (A_z - B_z)\mathbf{a}_z$$



*Regla paralelogramo*



*Regla triángulo*



- La suma de vectores cumple con las leyes:
- Conmutativa:  $A+B=B+A$
- Asociaiva:  $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Distributiva:  $k(A+B)=kA+ kB$

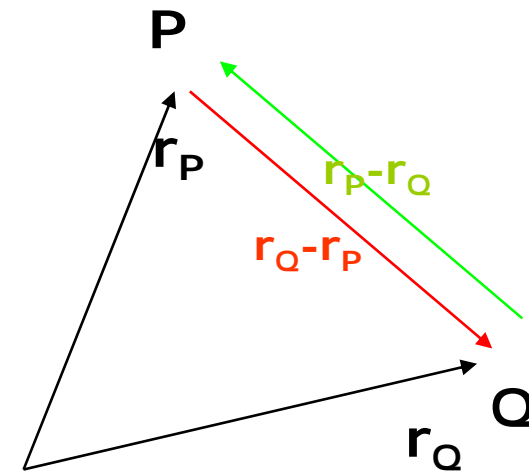
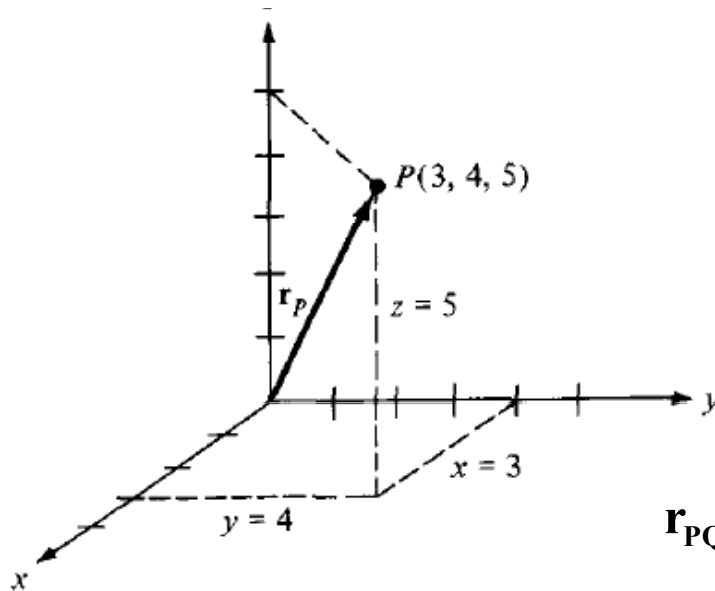


## • Vector de posición y distancia

- $\mathbf{r}_P$ : radiovector, es la distancia del origen O al punto P .
- Vector distancia entre dos puntos  $\mathbf{r}_{PQ}$ . Desplazamiento entre dos puntos

$$\mathbf{r}_P = OP = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_P = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = (x_P - x_Q)\mathbf{a}_x + (y_P - y_Q)\mathbf{a}_y + (z_P - z_Q)\mathbf{a}_z$$

- El punto P no es un vector, su posición se indica con un vector  $\mathbf{r}_p (x_p, y_p, z_p)$
- Un vector A es una magnitud que en cada punto P puede tener un valor distinto o no y que puede depender de la posición
- $\mathbf{A} (A_x, A_y, A_z)$

$$A_x = K \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

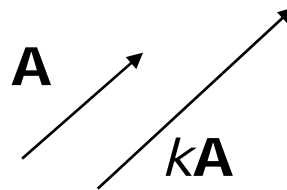
$$A_y = K \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$A_z = K \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

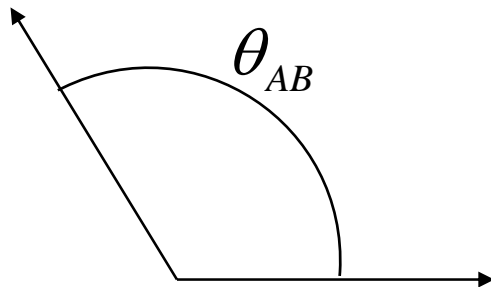
***Un campo uniforme no depende de las variables  $x, y, z$***

### Multiplicación de Vectores

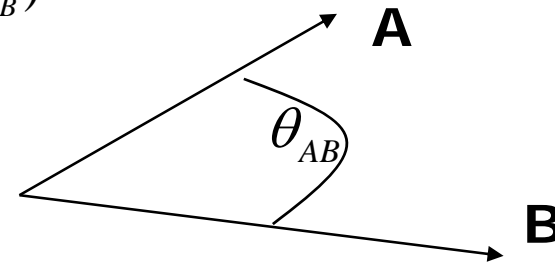
- Por un escalar  $k \cdot \mathbf{A}$ : cambia solo la magnitud de  $\mathbf{A}$



- Producto escalar o punto de dos vectores : resultado es un escalar

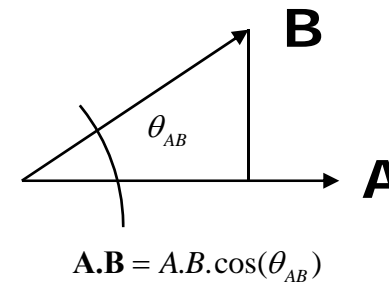


$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cdot \cos(\theta_{AB})$$



$\theta_{AB}$  es el ángulo más pequeño entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$

- El producto escalar de dos vectores resulta:
  - Menor o igual al producto de sus magnitudes
  - Puede ser una cantidad +o – dependiendo de  $\theta_{AB}$  (mayor o menor que  $90^\circ$ )
  - Es igual a la magnitud de un vector por la proyección del otro en el primero



- El producto de dos vectores perpendiculares es igual a cero
- El producto es conmutativo:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$

El producto punto da como resultado un escalar,

En cualquier sistemas de coordenadas  $|\mathbf{A}| = \sqrt{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}$

- **Propiedades de la suma y producto por un escalar :**

Law	Addition	Multiplication
Commutative	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$
Associative	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	$k(\ell\mathbf{A}) = (k\ell)\mathbf{A}$
Distributive	$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$	

- **Propiedades del producto punto o escalar :**

(i) *Commutative law:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(ii) *Distributive law:*

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2$$

$$\mathbf{A} = (Ax, Ay, Az) = \mathbf{a}_x Ax + \mathbf{a}_y Ay + \mathbf{a}_z Az$$

$$\mathbf{B} = (Bx, By, Bz) = \mathbf{a}_x Bx + \mathbf{a}_y By + \mathbf{a}_z Bz$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (Ax + Bx, Ay + By, Az + Bz)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a}_x(Ax + Bx) + \mathbf{a}_y(Ay + By) + \mathbf{a}_z(Az + Bz)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A.B.\cos(\theta_{AB})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x.Ax + \mathbf{a}_y.Ay + \mathbf{a}_z.Az).(\mathbf{a}_x.Bx + \mathbf{a}_y.By + \mathbf{a}_z.Bz)$$

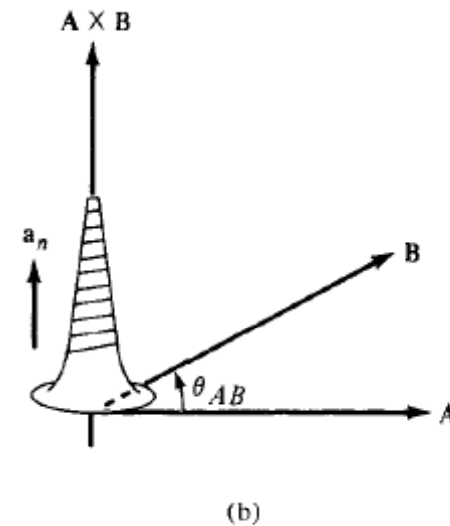
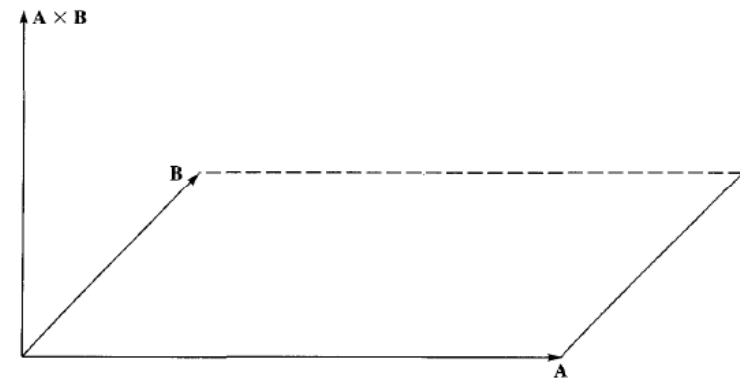
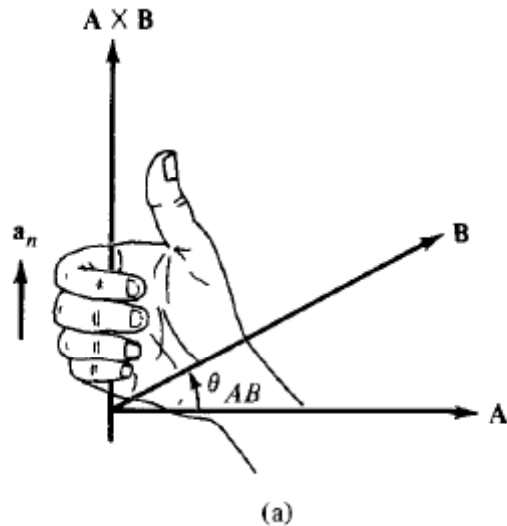
$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x.\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_x.\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y.\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z.\mathbf{a}_z = 1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = Ax.Bx + Ay.By + Az.Bz$$

- **Producto cruz o vectorial:**
  - $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$  (otro vector)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_n \cdot A \cdot B \cdot \sin(\theta_{AB})$$



- La magnitud es el área del paralelogramo
- La dirección  $\mathbf{a}_n$  es normal al plano determinado por A y B
- El sentido tal de avance de un tornillo de rosca derecha cuando A se hace girar hasta B (b), o regla mano derecha (a), en un triedro positivo.

## *Producto Cruz o vectorial*

---

(i) It is not commutative:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

It is anticommutative:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

(ii) It is not associative:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

(iii) It is distributive:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

(iv)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A.B.\sin(\theta_{AB})$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$



## Producto Cruz o vectorial

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A.B.\text{sen}(\theta_{AB})$$

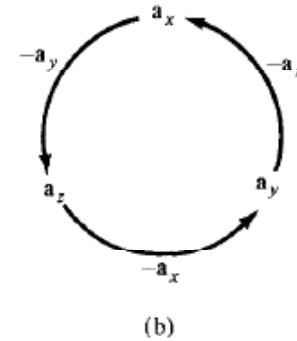
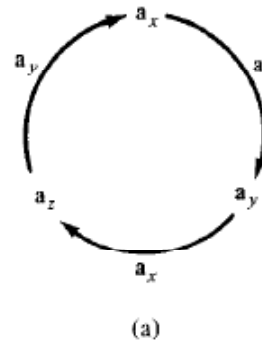
$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$$



*Aplicando Distributiva y con las igualdades anteriores se obtiene*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_z A_x B_y - \mathbf{a}_y A_x B_z - \mathbf{a}_z A_y B_x + \mathbf{a}_x A_y B_z + \mathbf{a}_y A_z B_x - \mathbf{a}_x A_z B_y)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z$$

- Triple Producto escalar, se define

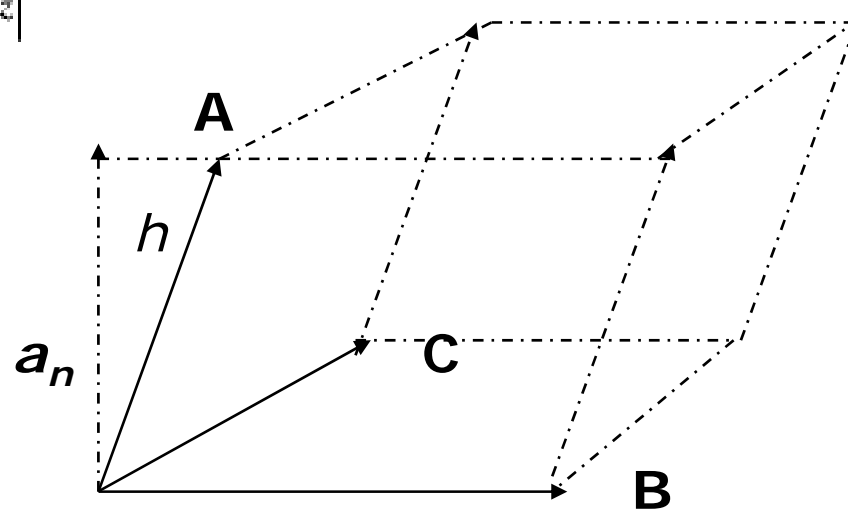
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

- Permutaciones cíclica.
- Es el volumen de un paralelepípedo de aristas  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Área:módulo  
Dirección  $\mathbf{a}_n$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n = \text{altura} = h$



- Triple producto vectorial= vector

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

*Regla (bac-cab)*

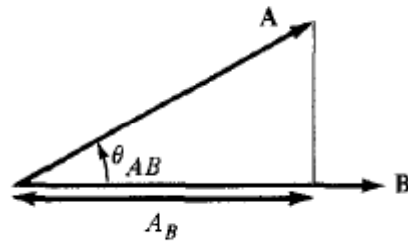
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

- La división por un vector no está definida

- Componentes de un vector o proyecciones

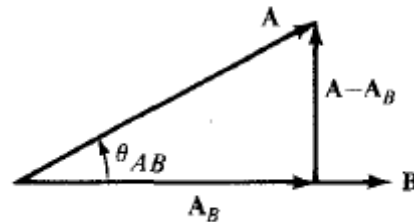
### *Proyección escalar de A sobre B*



(a)

$$A_B = A \cos \theta_{AB} = |\mathbf{A}| |\mathbf{a}_B| \cos \theta_{AB}$$

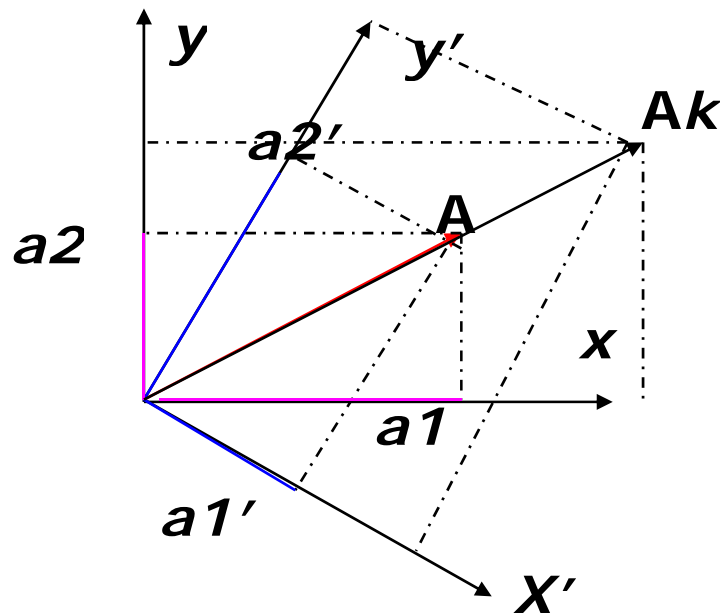
### *Componentes vectoriales de A sobre B, y otra perpendicular A-A\_B*



(b)

$$\mathbf{A}_B = A_B \mathbf{a}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B) \mathbf{a}_B$$

- Las leyes físicas son independientes del sistema de coordenadas.
- **Teorema** : La condición necesaria y suficiente para que tres escalares  $(a_1, a_2, a_3)$  sean componentes de un vector , es que por un cambio de coordenadas ortogonales de origen fijo, ellas se transformen según las mismas fórmulas que las coordenadas del punto.



*Si definimos un nuevo vector por sus componentes???*

**K:** es un número fijo independiente del sistema de coordenadas

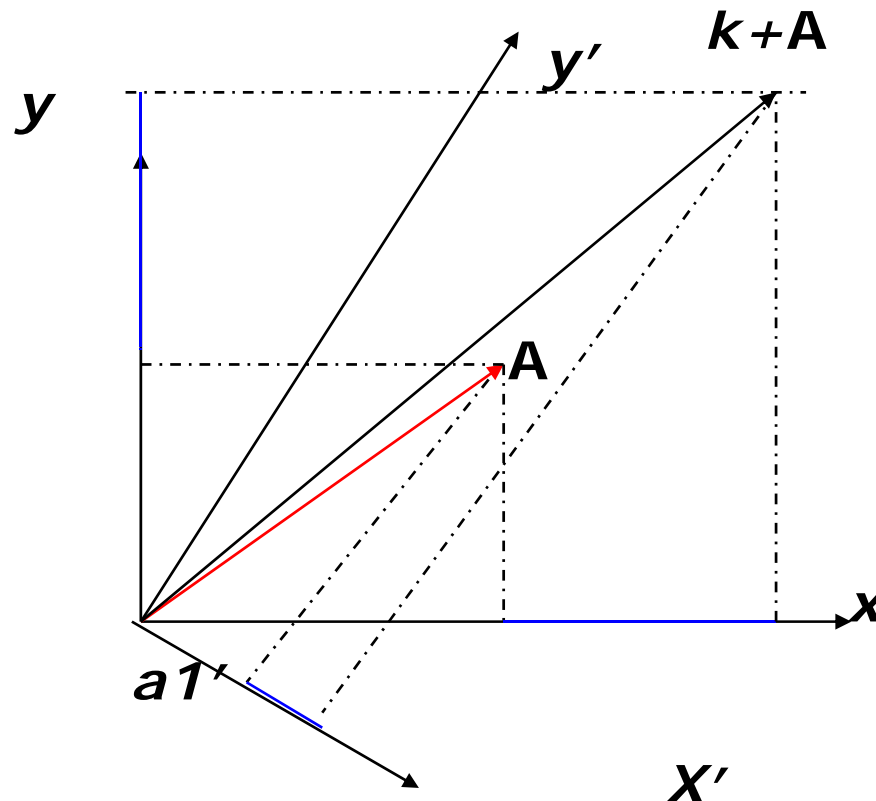
sus componentes  $k.a_1, k.a_2, k.a_3$   
en otro sistema serán  
 $k.a_1', k.a_2', k.a_3'$

*La definición es independiente del sistema de referencia*

*Si definimos un nuevo vector:*

- sus componentes  $k+a_1, k+a_2, k+a_3$
- en otro sistema NO serán  $k+a_1', k+a_2', k+a_3'$
- Esta definición NO es independiente del sistema de referencia.
- $k+A$ : NO es un VECTOR

**La definición analítica de un vector por sus componentes puede NO ser admitida**



*Las operaciones de  
vectores definidas como*

***Suma, producto escalar,  
producto vectorial (salvo  
orientación del sistema)***

*son independiente del  
sistema de coordenadas*

- *Las operaciones de vectores definidas son independiente del sistema de coordenadas*
- *Suma*
- *producto escalar*
- *producto vectorial (orientación del sistema)*
- *Vector desplazamiento: independiente del sistema*

$$dP = dx \cdot a_x + dy \cdot a_y + dz \cdot a_z$$

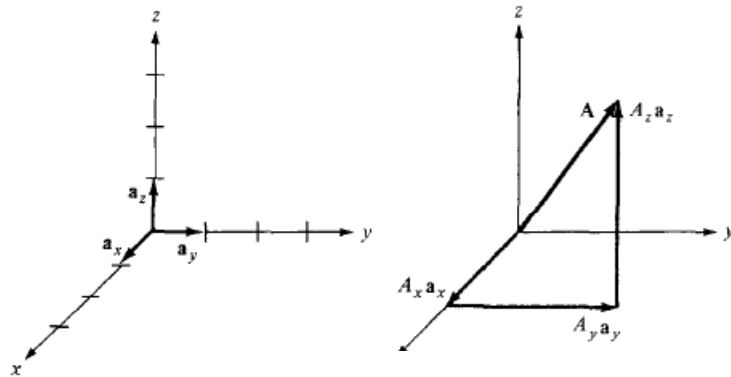
- 
- **Sistema de coordenadas ortogonal : son perpendiculares entre si.**
  - **Los mas usados son:**
    - **Cartesiano o rectangular**
    - **Cilíndrico**
    - **Esférico**
  - **Para la resolución de problemas prácticos se requiere que las expresiones derivadas de las leyes se expresen en el sistema apropiado**



- *Un punto en puede localizarse en el espacio como la intersección de 3 superficies*
- *Si las superficies son*
  - ✓  $u_1 = \text{constante}$
  - ✓  $u_2 = \text{constante}$
  - ✓  $u_3 = \text{constant}$
- *Donde los  $u_i$ , pueden ser longitudes , o ángulos*
- *Sistema coordenadas cartesiana*
  - ✓  $u_1 = x$
  - ✓  $u_2 = y$
  - ✓  $u_3 = z$

## Coordenadas Cartesianas

*Un punto en coordenadas cartesianas resulta de la intersección de tres planos*

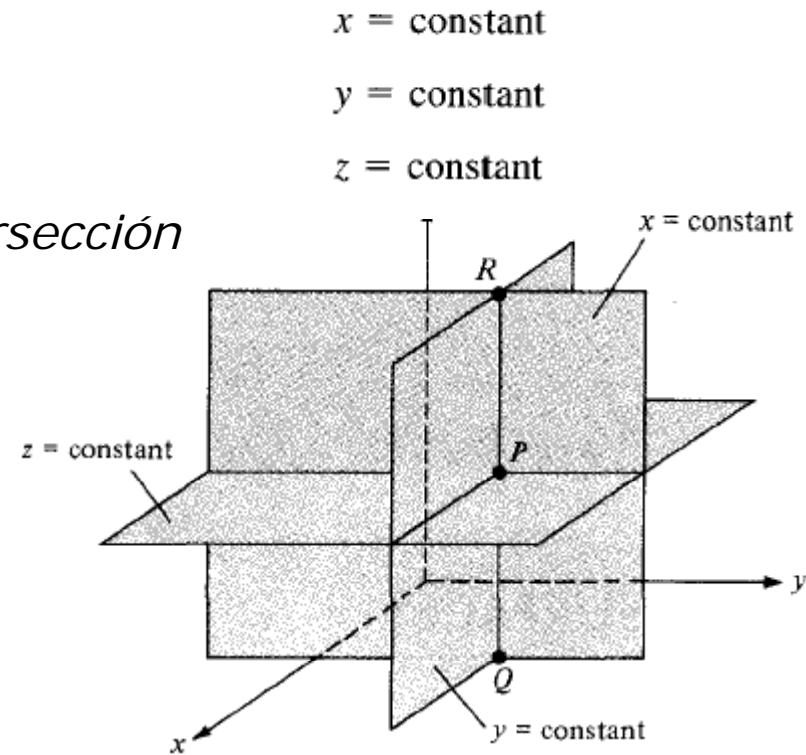


$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

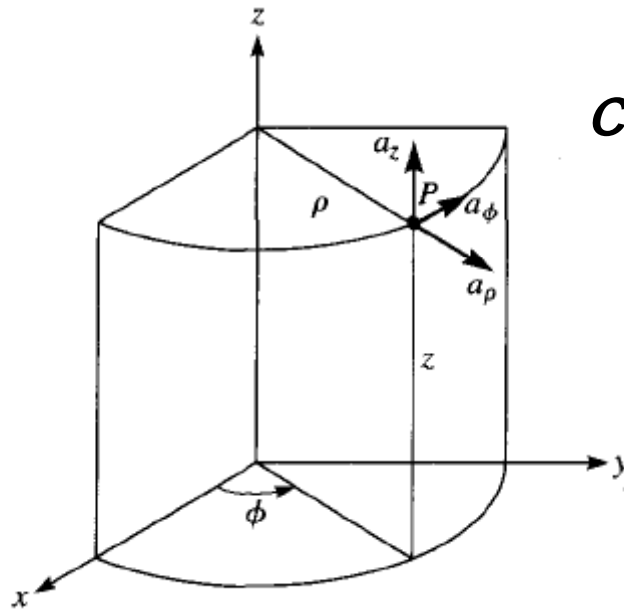
$$-\infty < z < \infty$$

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{or} \quad A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$



## Coordenadas curvilíneas ortogonales

### Coordenadas Cilíndricas



$\rho = \text{constante}$   
 $\Phi = \text{constante}$   
 $z = \text{constante}$

$\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$ , and  $\mathbf{a}_z$  are unit vectors in the  $\rho$ -,  $\phi$ -, and  $z$ -directions

$$0 \leq \rho < \infty$$

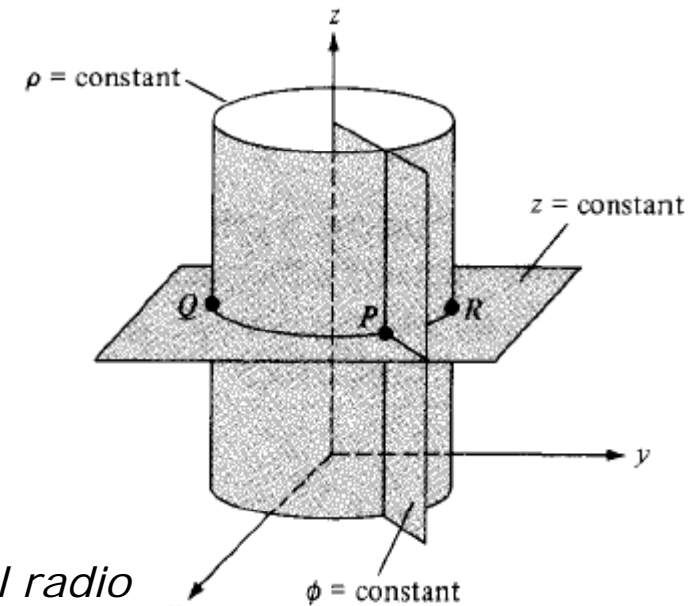
$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

$$|\mathbf{A}| = (A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2)^{1/2}$$

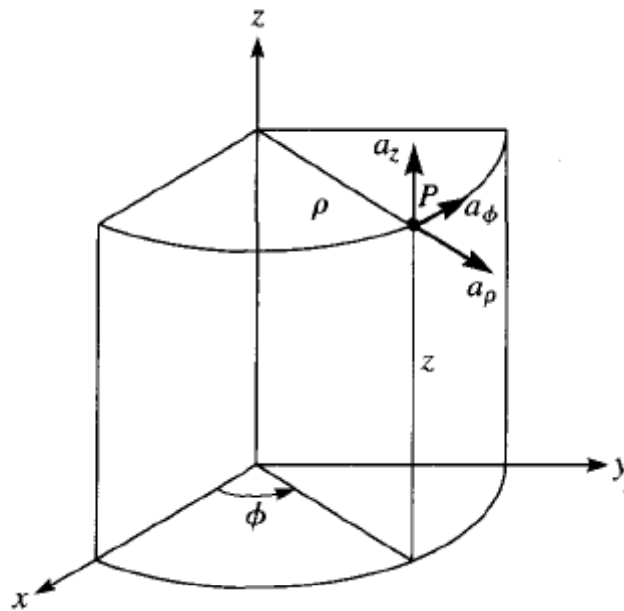
$\mathbf{a}_\rho$  = vector unitario en la dirección del radio  
 $\mathbf{a}_\phi$  = vector unitario en la dirección del ángulo azimutal

$\mathbf{a}_z$  = vector unitario en la dirección de  $z$



## Coordenadas Cilíndricas

- $\mathbf{a}_\rho$  = vector unitario en la dirección del radio
- $\mathbf{a}_\phi$  = vector unitario en la dirección del ángulo azimutal
- $\mathbf{a}_z$  = vector unitario en la dirección de  $z$



$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

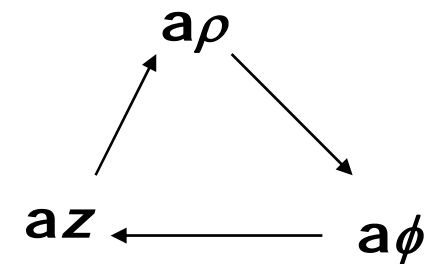
$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$$

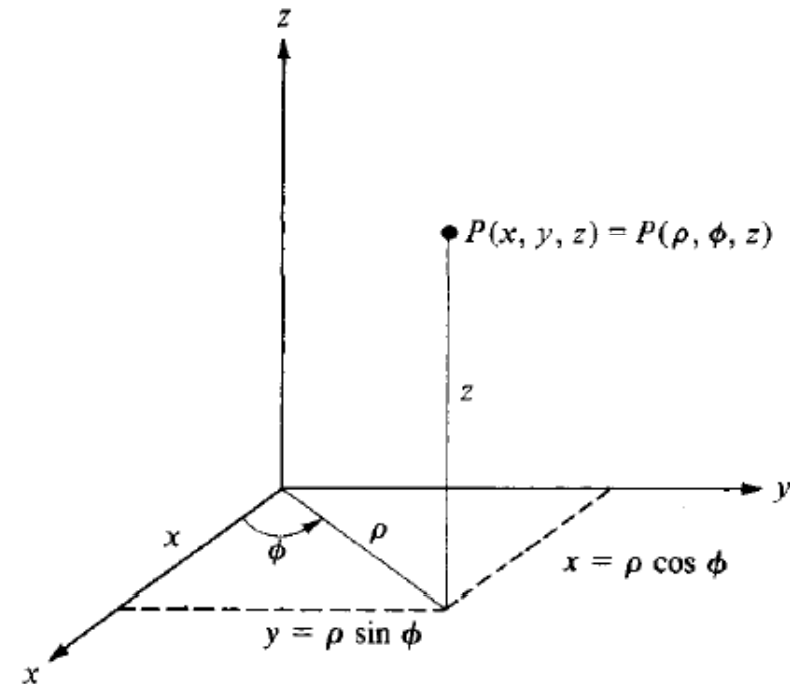
Permutaciones cíclicas



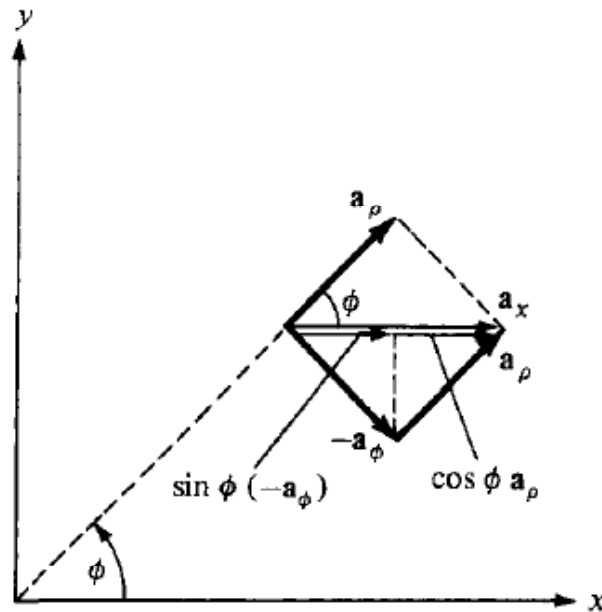
- Relaciones entre las variables cartesianas y cilíndricas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$



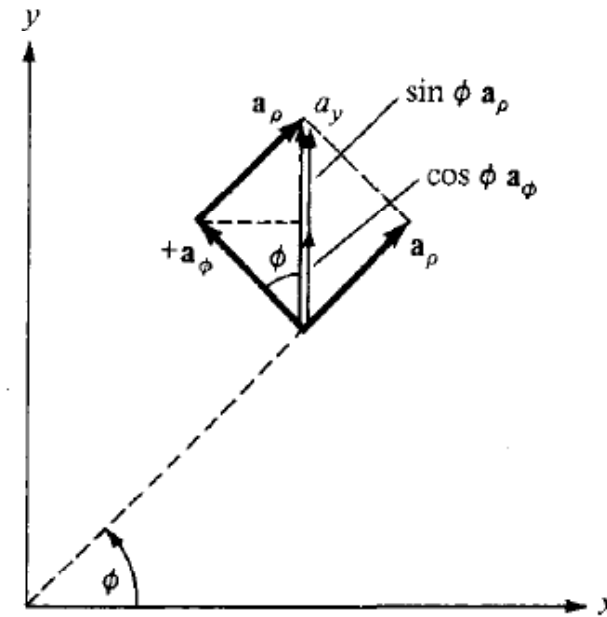
- Relaciones entre los vectores unitarios o versores



$$\mathbf{a}_x = \cos \phi \mathbf{a}_\rho - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} = (A_x \cos \phi + A_y \sin \phi) \mathbf{a}_\rho + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

$$A_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$A_z = A_z$$

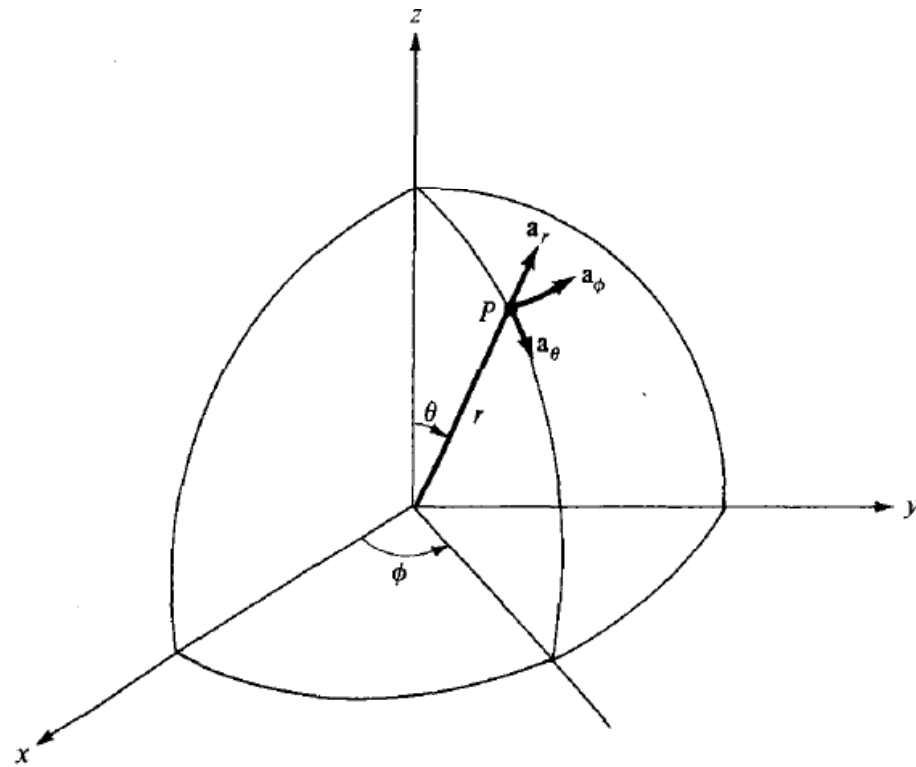
$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

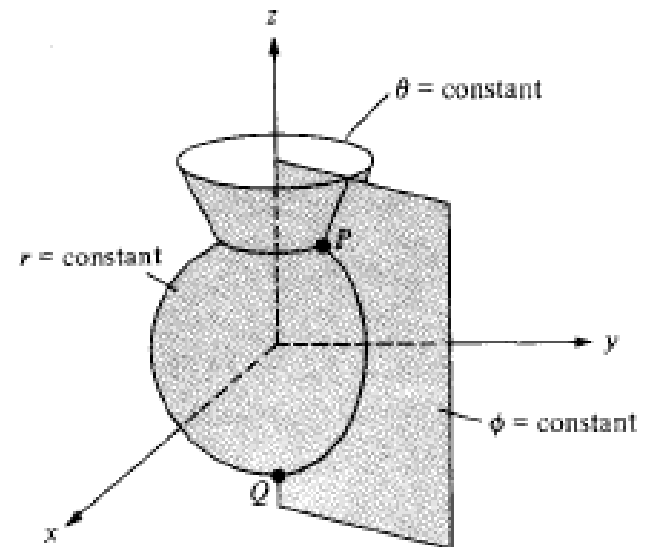
- Coordenadas esféricas



$r = \text{constant}$

$\theta = \text{constant}$

$\phi = \text{constant}$





## Coordenadas esféricas

the ranges of the variables are

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

vector **A** in spherical coordinates

$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \quad \text{or} \quad A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$|\mathbf{A}| = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2)^{1/2}$$

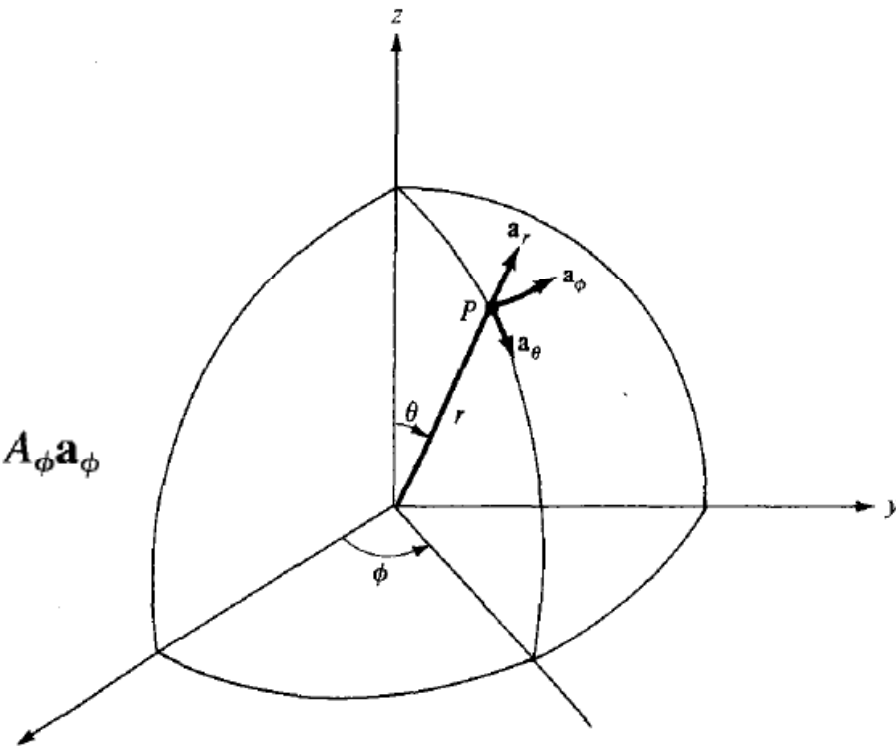
$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0$$

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$$



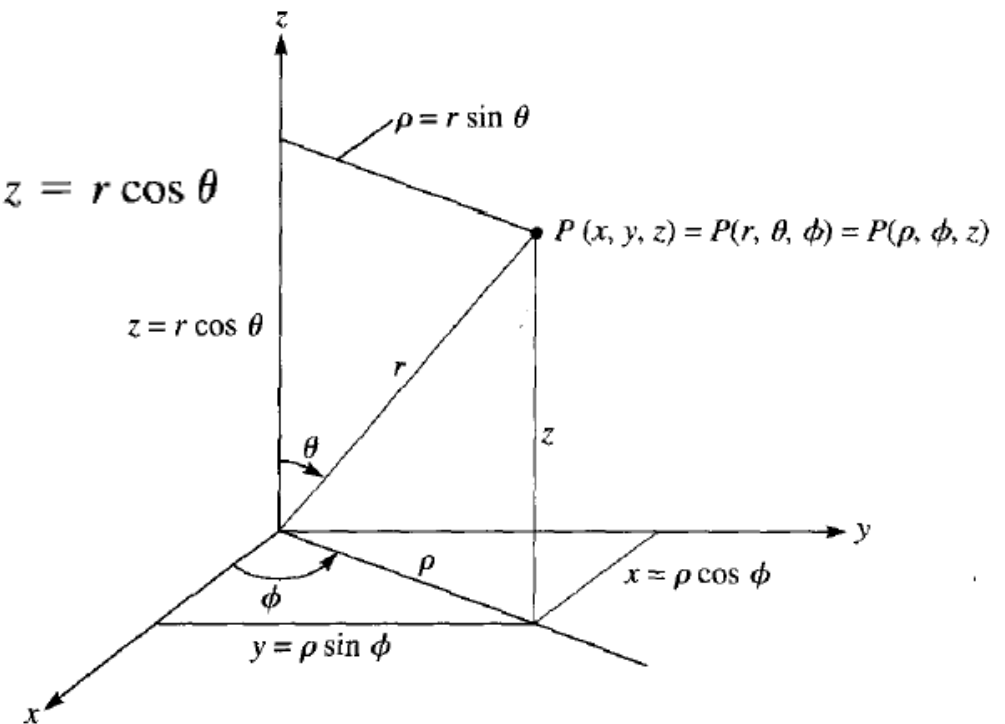
*Dirección de los vectores unitarios*

- Relaciones entre las variables cartesianas y esféricas

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$



Relationships between space variables  $(x, y, z)$ ,  $(r, \theta, \phi)$ , and  $(\rho, \phi, z)$ .

- Vectores unitarios se relacionan de la siguiente manera

$$\mathbf{a}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

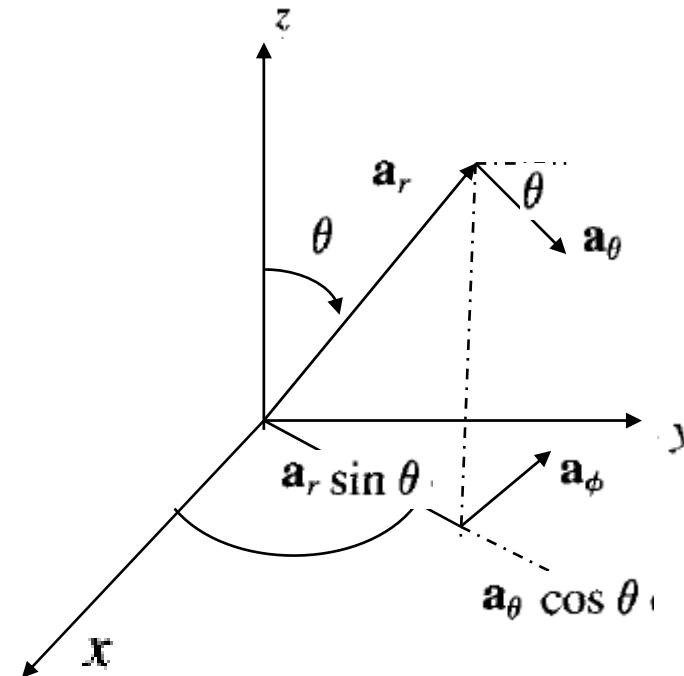
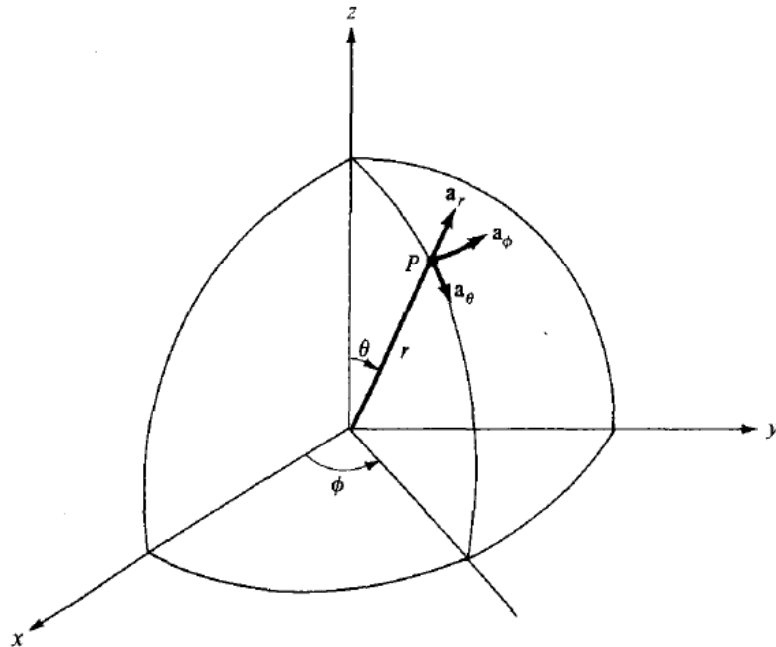
$$\mathbf{a}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$



- Transformación de vectores de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{A} = (A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta) \mathbf{a}_r + (A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta) \mathbf{a}_\theta + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi$$

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$(A_x, A_y, A_z) \rightarrow (A_r, A_\theta, A_\phi)$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$(A_x, A_y, A_z) \rightarrow (A_r, A_\theta, A_\phi)$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

- **Transformación de vectores de coordenadas esféricas a cartesianas**

$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

- 
- Transformación de vectores de coordenadas esféricas a cilíndricas

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z}, \quad \phi = \phi$$

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \phi = \phi$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

## Resumen de cambio de coordenadas

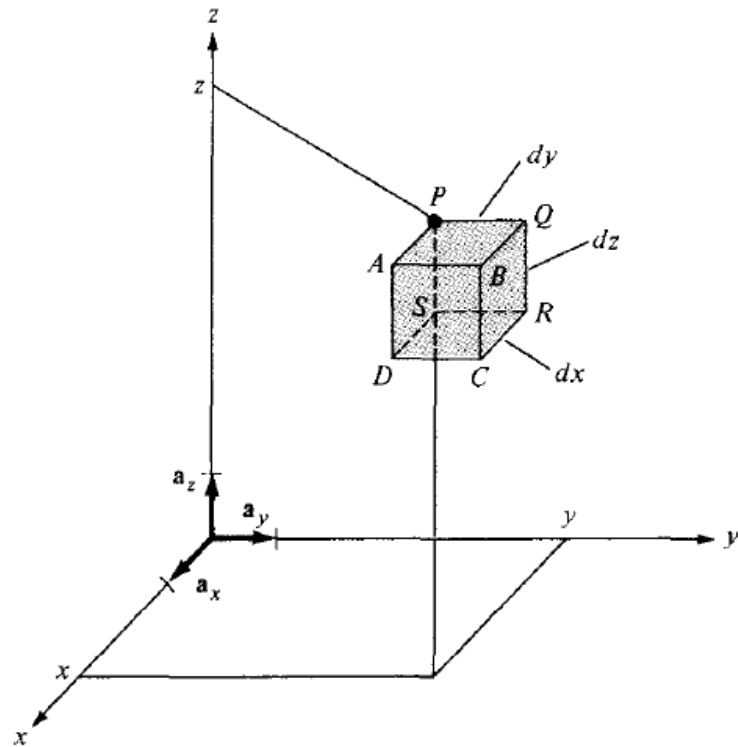
	COORDENADAS	VECTORES UNITARIOS
rect $\leftrightarrow$ cil	$\begin{array}{l l} x = \rho \cos \varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho \sin \varphi & \varphi = \arctg(y/x) \\ z = z & z = z \end{array}$	$\begin{array}{l l} x = x \cos \varphi \rho - \sin \varphi \rho & \rho = \cos \varphi x + \sin \varphi y \\ y = \sin \varphi \rho + \cos \varphi \rho & \varphi = -\sin \varphi x + \cos \varphi y \\ z = z & z = z \end{array}$
rect $\leftrightarrow$ esf	$\begin{array}{l l} x = r \sin \theta \cos \varphi & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = r \sin \theta \sin \varphi & \theta = \arctg(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ z = r \cos \theta & \varphi = \arctg(y/x) \end{array}$	$\begin{array}{l l} x = \sin \theta \cos \varphi r + \cos \theta \cos \varphi \theta - \sin \varphi \rho & r = \sin \theta \cos \varphi x + \sin \theta \sin \varphi y + \cos \theta z \\ y = \sin \theta \sin \varphi r + \cos \theta \sin \varphi \theta + \cos \varphi \rho & \theta = \cos \theta \cos \varphi x + \cos \theta \sin \varphi y - \sin \theta z \\ z = \cos \theta r - \sin \theta \theta & \varphi = -\sin \varphi x + \cos \varphi y \end{array}$
cil $\leftrightarrow$ esf	$\begin{array}{l l} \rho = r \sin \theta & r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi & \theta = \arctg(y/z) \\ z = r \cos \theta & \varphi = \varphi \end{array}$	$\begin{array}{l l} \rho = \sin \theta r + \cos \theta \theta & r = \sin \theta \rho + \cos \theta \theta \\ \varphi = \varphi & \varphi = \varphi \\ z = \cos \theta r - \sin \theta \theta & \theta = \cos \theta \rho - \sin \theta \theta \end{array}$

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$x$	$= \rho \cos \phi$	$= r \sin \theta \cos \phi$
$y$	$= \rho \sin \phi$	$= r \sin \theta \sin \phi$
$z$	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{x}$	$= \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}$	$= \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$
$\hat{y}$	$= \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}$	$= \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$
$\hat{z}$	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
CILINDRICAS	CARTESIANAS	ESFERICAS
$\rho$	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \sin \theta$
$\phi$	$= \tan^{-1}(y / x)$	$= \phi$
$z$	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\rho}$	$= \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$	$= \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$
$\hat{\phi}$	$= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$
$\hat{z}$	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
ESFERICAS	CARTESIANAS	CILINDRICAS
$r$	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
$\theta$	$= \cos^{-1}(z / r)$	$= \cos^{-1}(z / r)$
$\phi$	$= \cotan^{-1}(x / y)$	$= \phi$
$\hat{r}$	$= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$	$= \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$
$\hat{\theta}$	$= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z}$
$\hat{\phi}$	$= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$



# Diferenciales de longitud, área y volumen

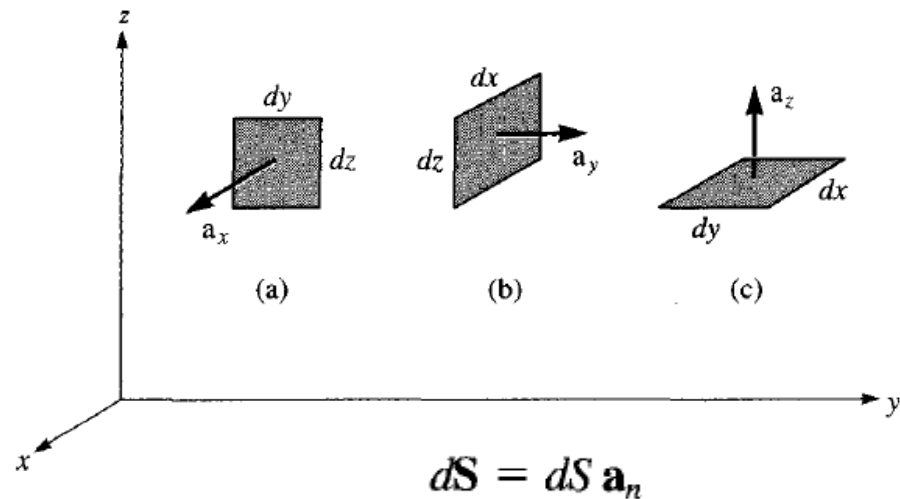
## Coordenadas cartesianas, eje derecho



$$dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \Rightarrow \text{longitud}$$

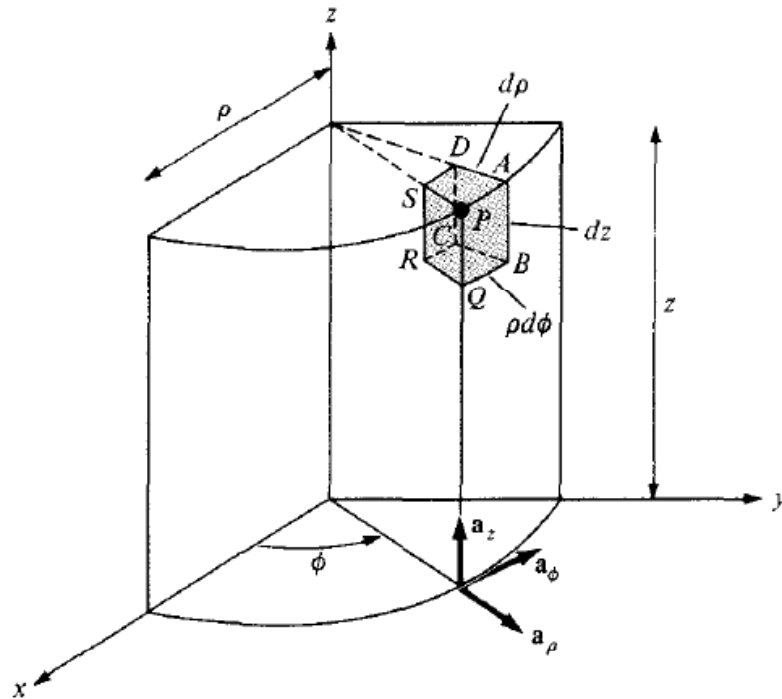
$$d\mathbf{S} = \begin{matrix} dy \, dz \, \mathbf{a}_x \\ dx \, dz \, \mathbf{a}_y \\ dz \, dy \, \mathbf{a}_z \end{matrix} \Rightarrow \text{área}$$

$$dv = dx \, dy \, dz \Rightarrow \text{volumen}$$



## Diferenciales de longitud, área y volumen

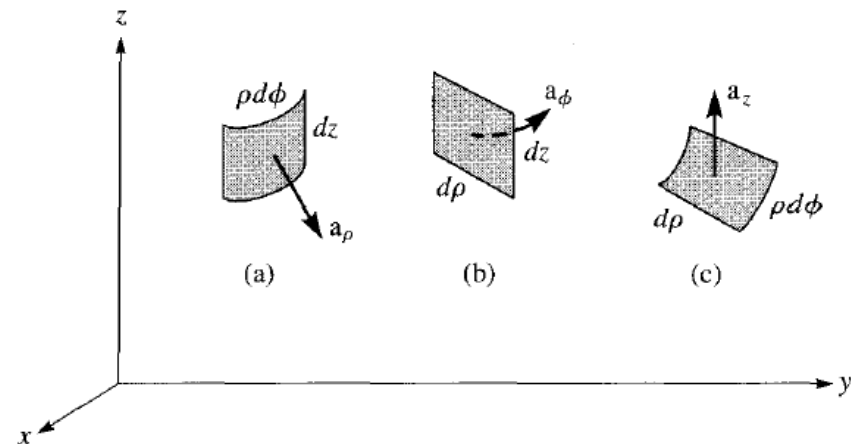
### Coordenadas cilíndricas



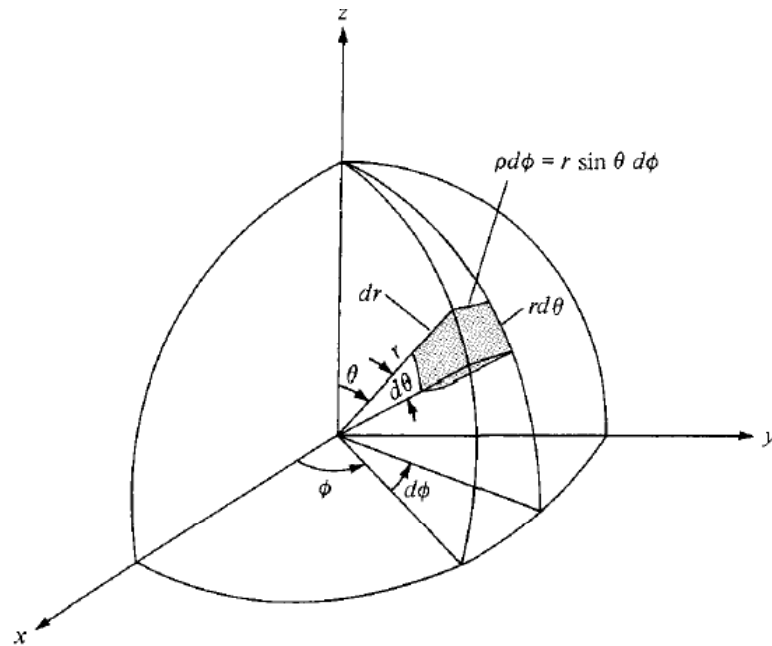
$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho \\ d\rho dz \mathbf{a}_\phi \\ \rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$$



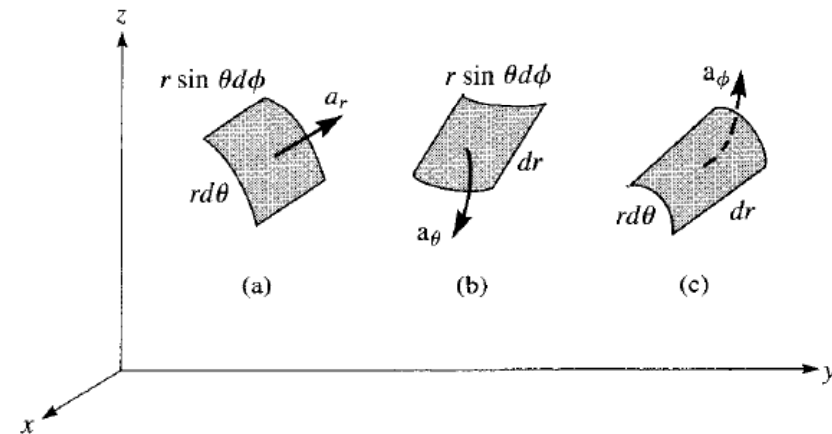
## Diferenciales de longitud, área y volumen



$$dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$d\mathbf{l} = dr \, \mathbf{a}_r + r \, d\theta \, \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta \, d\phi \, \mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r \\ r \sin \theta \, dr \, d\phi \, \mathbf{a}_\theta \\ r \, dr \, d\theta \, \mathbf{a}_\phi$$



## ***Diferenciales de longitud, área y volumen***

---

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3$$

*hi: son coeficientes métricos o de longitud, convierten los diferenciales en longitudes*

*Cartesianas (x,y,z) :  $h_1=h_2=h_3=1$*

*Cilíndricas ( $\rho, \phi, z$ ):  $h_1=1, h_2=\rho, h_3=1$*

*Esféricas ( $r, \theta, \phi$ ):  $h_1=1, h_2=r; h_3=r \cdot \sin \theta$*

### **CARTESIANAS**

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$dS_x = dy dz$$

$$dS_y = dx dz$$

$$dS_z = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

### **CILINDRICAS**

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$dS_\rho = \rho d\phi dz$$

$$dS_\phi = d\rho dz$$

$$dS_z = \rho d\rho d\phi$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

### **ESFERICAS**

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

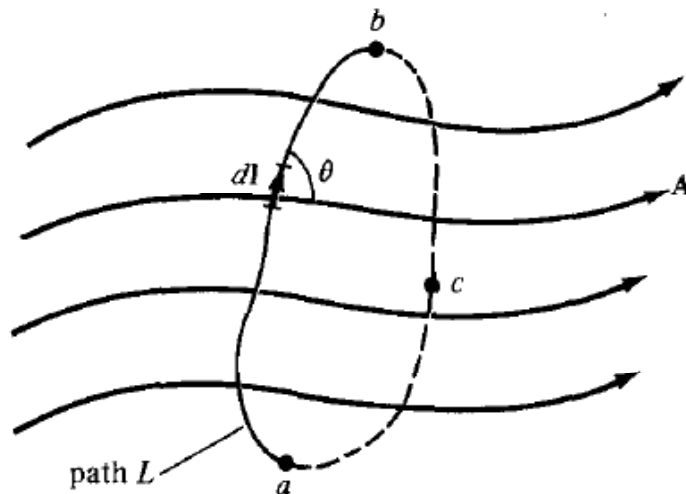
$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$$

$$dS_\phi = r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

- Integral de línea
  - Dado un vector  $\mathbf{A}$
  - Una curva  $L$
  - Producto escalar



$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |\mathbf{A}| \cos \theta \, dl$$

$$\int_{a(C)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Es importante observar que la integral de línea depende generalmente no sólo de los extremos  $a$  y  $b$ , sino también de la curva  $C$  sobre la que se efectúa la integración, ya que la magnitud y dirección de  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  y la dirección de  $d\mathbf{l}$  dependen de  $C$  y de su tangente, respectivamente. La integral de línea alrededor de una curva cerrada tiene tanta importancia que se ha empleado una notación especial para ella; ésta es

La integral alrededor de una curva cerrada generalmente es distinta de cero; el tipo de vectores para los que la integral de línea alrededor de *cualquier* curva cerrada es cero, es de importancia considerable. Por esta razón a menudo se encuentran integrales de línea alrededor de trayectorias cerradas no especificadas. Por ejemplo,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Esta notación es útil sólo en aquellos casos donde la integral es independiente del contorno  $C$  dentro de límites bastantes amplios. Si hay posibilidad de ambigüedad, conviene especificar el contorno. El enfoque básico para la evaluación de integrales de línea es obtener un parámetro de descripción de la curva y entonces usar esta descripción para expresar la integral de línea como la suma de tres integrales unidimensionales ordinarias. En todos los casos, salvo los más sencillos, éste es un procedimiento largo y tedioso. Afortunadamente, muy pocas veces es necesario evaluar las integrales de esta forma. Como veremos posteriormente, a menudo es posible demostrar que la integral de línea no depende de la trayectoria entre los extremos. En este último caso, se escoge una trayectoria sencilla para simplificar la integración.

## Integral de Superficie

Si  $\mathbf{F}$  es de nuevo un vector, una integral de superficie  $\mathbf{F}$  se escribe como

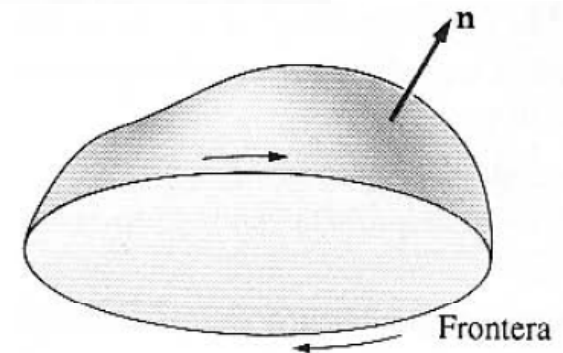
$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

### Flujo

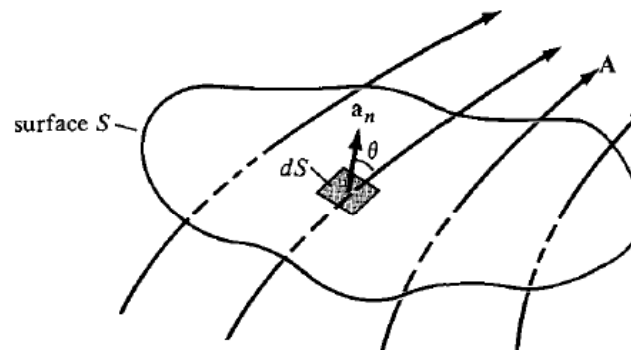
$$\Psi = \int_S |\mathbf{A}| \cos \theta dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n dS$$

$$\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$



Relación de la normal  $\mathbf{n}$  con una superficie y el sentido de recorrido en la frontera.





Si  $\mathbf{F}$  es un vector y  $\phi$  un escalar, entonces las dos integrales de volumen que nos interesan son

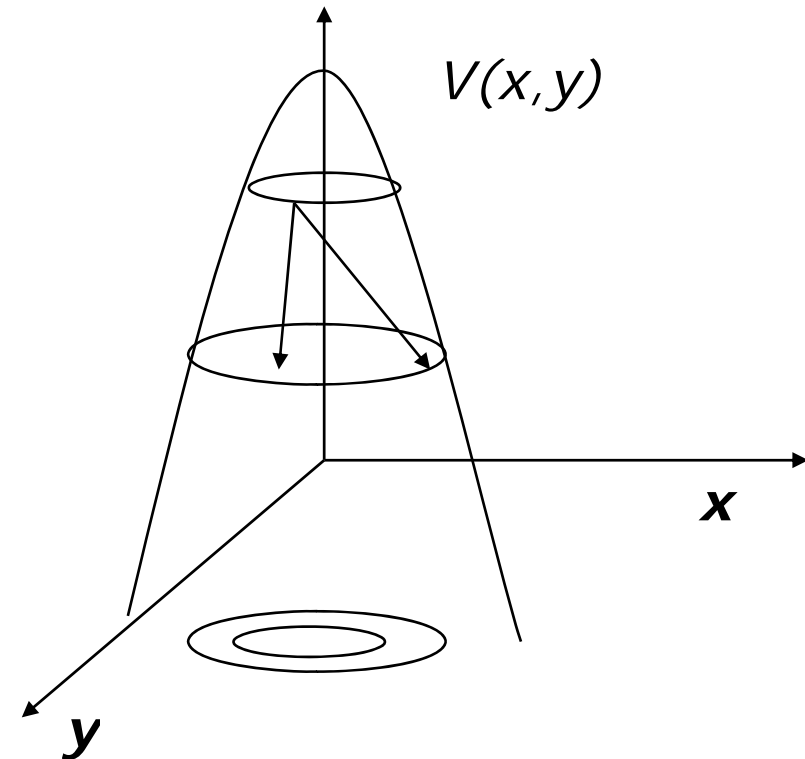
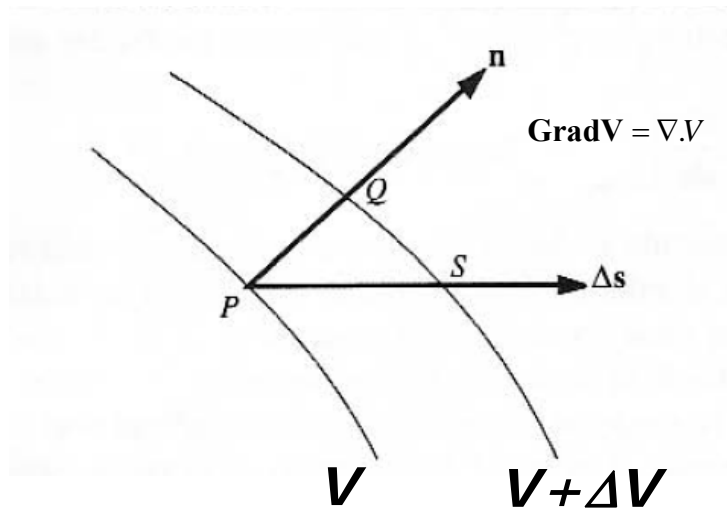
$$J = \int_V \phi \, dv \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} \, dv \quad (1-28)$$

Evidentemente,  $J$  es un escalar y  $\mathbf{K}$  es un vector. Las definiciones de estas integrales se reducen rápidamente a la integral de Riemann en tres dimensiones, excepto que en  $\mathbf{K}$  se debe observar que hay una integral para cada componente de  $\mathbf{F}$ . Estas integrales son suficientemente conocidas, de modo que no se necesita hacer ningún otro comentario.



## Gradiente

- Para analizar como cambia un campo escalar en el espacio es necesario derivadas parciales en tres direcciones.
- La derivada depende de cual es la dirección en que nos movemos,
- El gradiente de un campo escalar  $V$  es un vector que representa la magnitud y la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de  $V$



$$\left. \frac{dV}{dl} \right|_{\max} = \frac{dV}{dn}$$

- La derivada es mas grande a lo largo de la normal (PQ), porque es la distancia mas corta entre ambas curvas (superficies) de nivel
- El gradiente es perpendicular a la curva de nivel
- Las derivadas en otras direcciones puede escribirse como el gradiente proyectado en esta dirección

$$\frac{dV}{dl} = \frac{\Delta V}{PS} = \frac{\Delta V}{PQ} \cos \theta = \nabla V \cdot \tilde{\mathbf{l}}$$

- El diferencial de V se puede expresar con el producto escalar de

$$dV = (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

- Esta expresión se puede usar para obtener el gradiente en distintas coordenadas

- $dV$  es el diferencial total de  $V$  como resultado de un cambio de posición de  $P$  a  $S$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1} .dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} .dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} .dl_3 = \vec{\nabla} V .d\vec{l}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1} .dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} .dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} .dl_3 = \nabla V_1 .dl_1 h_1 + \nabla V_2 .dl_2 h_2 + \nabla V_3 .dl_3 h_3$$

$$\nabla V_i .dl_i h_i = \frac{\partial V}{\partial l_i} .dl_i$$

$$\nabla V_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial l_i}$$

$$\nabla = \left( \mathbf{a}u_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial l_1} + \mathbf{a}u_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial l_2} + \mathbf{a}u_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial l_3} \right) \quad \text{Operador gradiente}$$

- **Coordenadas cartesianas**

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\&= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

- **Coordenadas cilíndricas**  $dV = \nabla V_\rho d\rho + \nabla V_\phi \rho d\phi + \nabla V_z dz$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \nabla V (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

- **Coordenadas esféricas**

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

- Fórmulas de cálculo, fácilmente comprobables

$$(a) \quad \nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$$

$$(b) \quad \nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$$

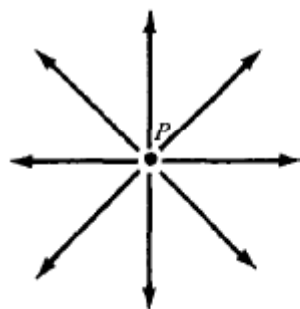
$$(c) \quad \nabla\left[\frac{V}{U}\right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$$

$$(d) \quad \nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V$$

- **Derivadas espaciales de campos vectoriales**
  - Divergencia
  - Rotacional
- **Los campos vectoriales se pueden representar con *líneas de flujo***
  - *Curvas que indican en cada punto su dirección*
  - *La magnitud se puede indicar con la densidad o la longitud de las líneas*
  - *El flujo de un campo vectorial es análogo al flujo de un líquido incompresible*
  - *Si el volumen es encerrado por una superficie habrá exceso de flujo si sale por la superficie 'fuentes', y si entra es 'sumideros'*
- **Divergencia:** de  $\mathbf{A}$  en el punto P como el flujo neto de salida de A por unidad de volumen , conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero

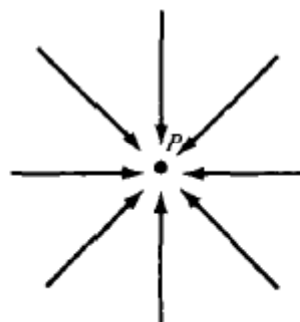
- Divergencia de un Campo vectorial:

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$



(a)

*Fuente,  
diverge,  
+*



(b)

*Sumidero,  
converge,  
-*



(c)

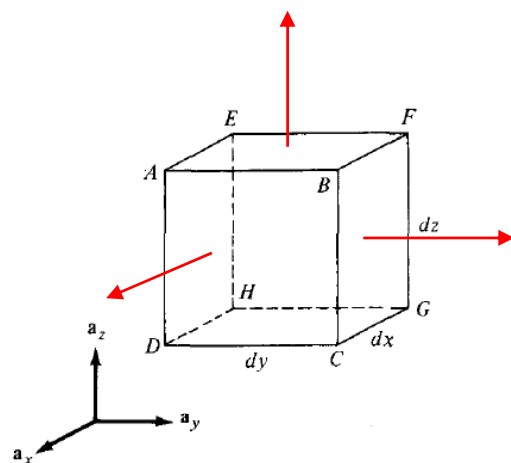
*Divergencia nula,  
0*

Encontremos la expresión en coordenadas cartesianas

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left( \int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

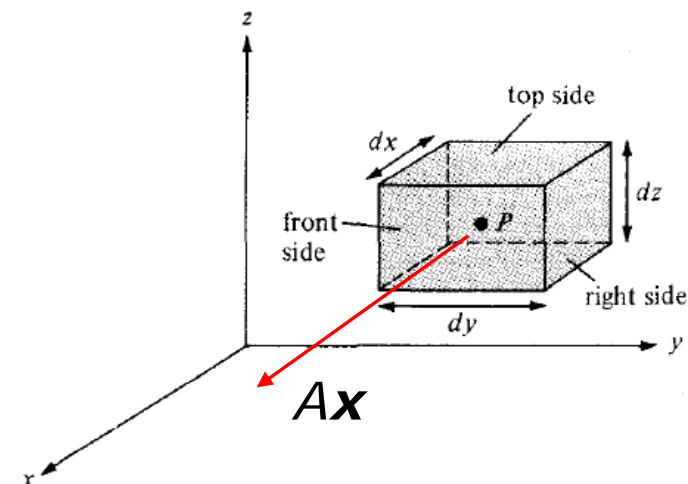
Desarrollo de  $A_x$  alrededor de  $P$  con series de Taylor

$$A_x(x, y, z) = A_x(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_P + (y - y_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_P \\ + (z - z_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_P + \text{higher-order terms}$$



front side.  
 $x = x_0 + dx/2$

$$d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{a}_x.$$



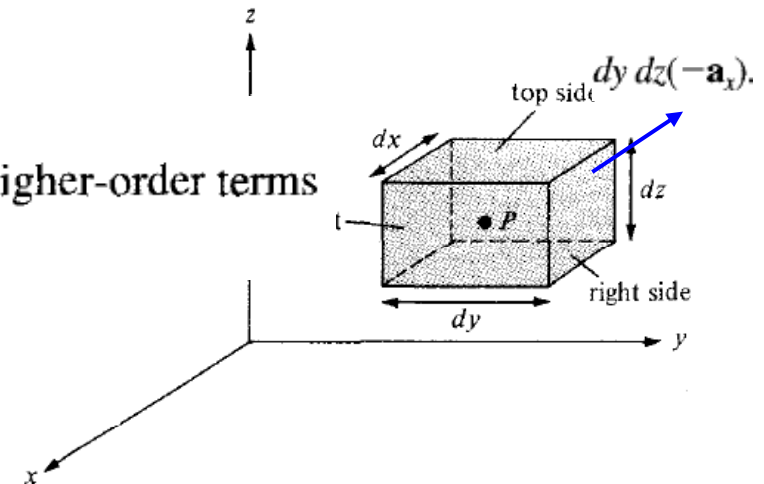


## Divergencia

$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy dz \left[ A_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{higher-order terms}$$

back side,  $x = x_o - dx/2$ ,  $d\mathbf{S} = dy dz(-\mathbf{a}_x)$

$$\int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy dz \left[ A_x(x_o, y_o, z_o) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{higher-order terms}$$



$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\int_{\text{left}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{right}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx \, dy \, dz \left. \frac{\partial A_y}{\partial y} \right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx \, dy \, dz \left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\Delta v = dx \, dy \, dz$$

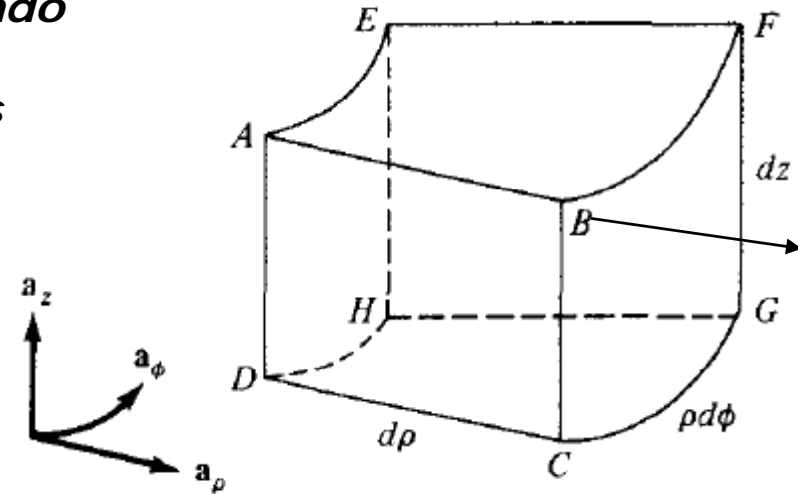
$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{\text{at } P}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

## La expresión en coordenadas cilíndricas

*Se aplica la definición pero considerando que las superficies también varían, Entonces lo que se debe diferenciar es  $A_i \Delta s_i$ , en cada componente*

$$\frac{A\rho.(dz.\rho d\phi)|_{(\rho+\Delta\rho)} - A\rho.(dz.\rho d\phi)|_{(\rho-\Delta\rho)}}{\rho dz.d\phi.d\rho}$$



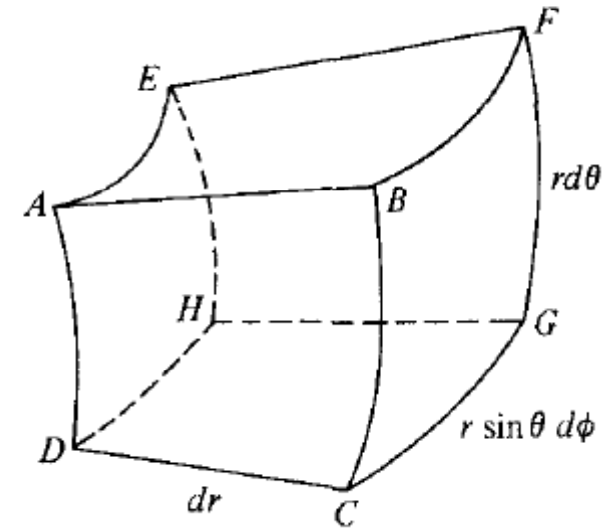
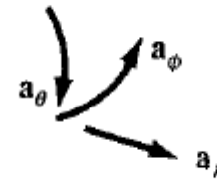
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_2 h_1 A_3)}{\partial u_3} \right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

## La expresión en coordenadas esféricas

Esféricas  $h_1=1, h_2=r; h_3=r \cdot \sin \theta$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left[ \frac{\partial (h_2 \cdot h_3 \cdot A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 \cdot h_3 \cdot A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_2 \cdot h_1 \cdot A_3)}{\partial u_3} \right]$$

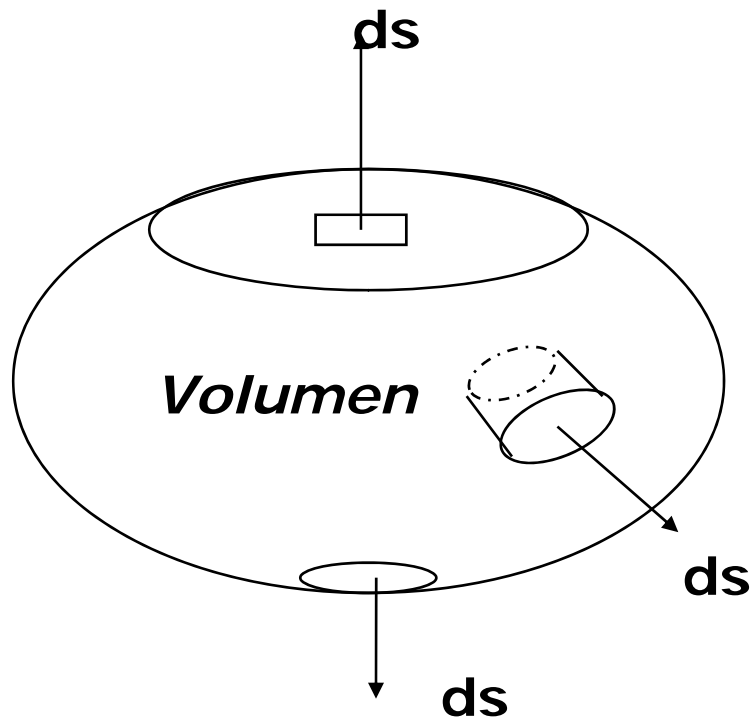


$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

1. It produces a scalar field (because scalar product is involved).
2. The divergence of a scalar  $V$ ,  $\text{div } V$ , makes no sense.
3.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4.  $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

- **Teorema de la divergencia:** el flujo hacia fuera de un campo vectorial **A** a través de una superficie cerrada **S**, equivale a la integral de volumen (encerrado por la **S**) de la divergencia de **A**

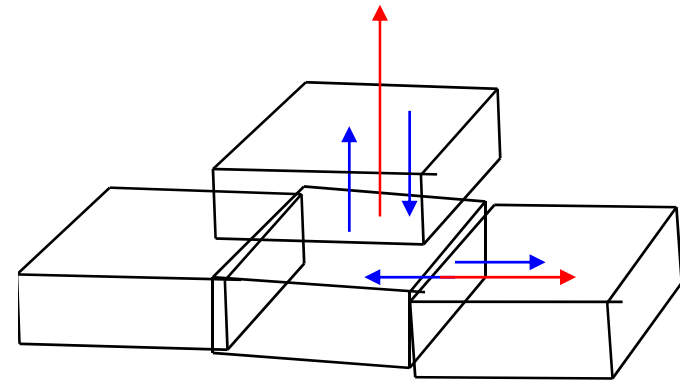


$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

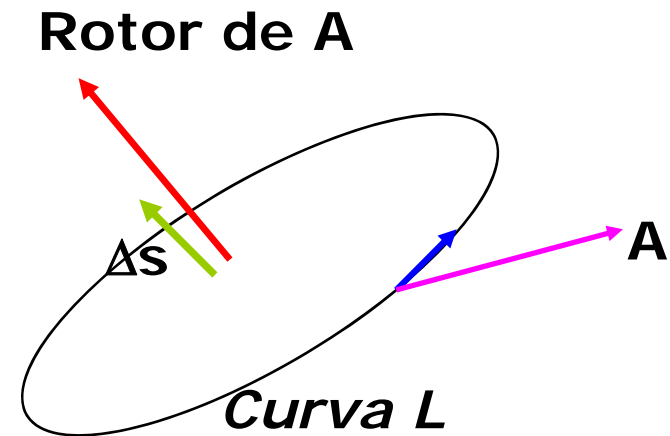
- Un volumen arbitrario lo dividimos en  $N\Delta V_k$ ,
- La celda  $k$  tiene el  $\Delta V_k$ , y  $S_k$
- Aplicamos la definición de divergencia
- Considerando que los flujos en las celdas vecinas se anulan pues las superficies apuntan en sentido contrario
- Solo queda las integrales en las superficies de los elementos exteriores, superficie  $S$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v_k} \Delta v_k$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$



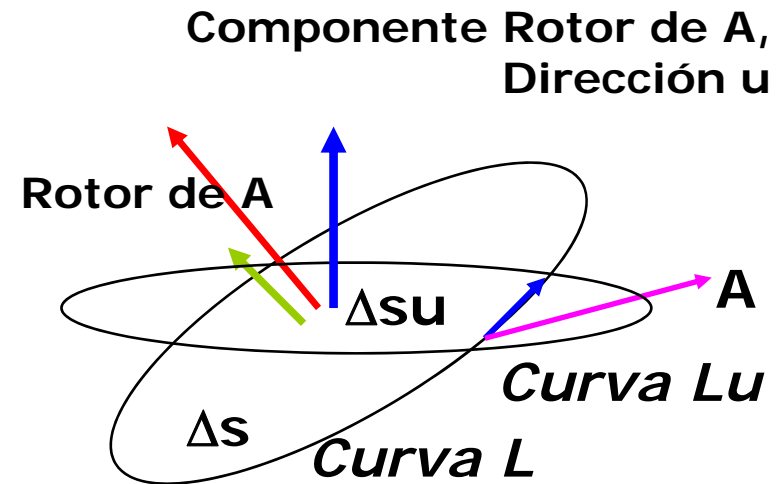
- Otro tipo de fuentes de los campos llamadas de 'vórtice' que ocasionan la circulación de un campo vectorial alrededor de una trayectoria cerrada
- El rotacional es un vector cuya magnitud es la circulación máxima de  $\mathbf{A}$  por unidad de área conforme el área tiende a cero. La orientación sigue la regla de la mano derecha



$$\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_n$$

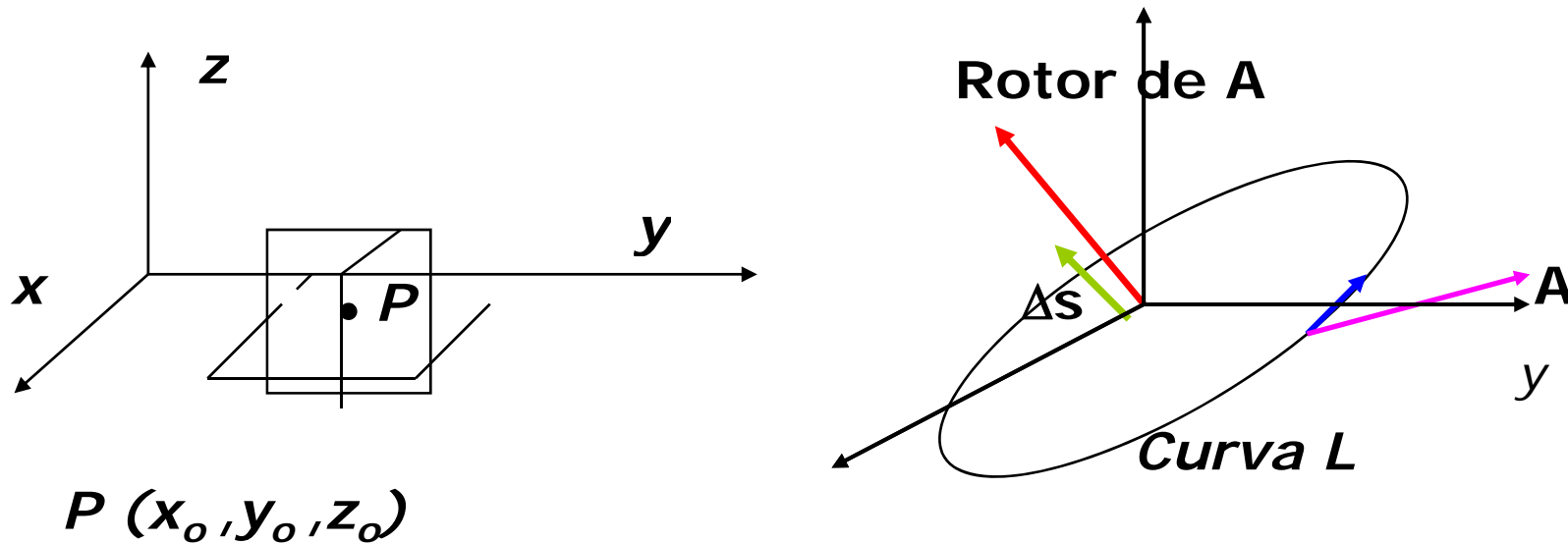


- El rotacional es una función vectorial puntual, su componente en cualquier otra dirección es la proyección del rotacional sobre estas.
- Se puede obtener como la circulación por unidad de área normal a esta y tendiendo a cero
- Componente en otra dirección puede determinarse:



$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left( \oint_{L_u} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

- Expresión del rotacional en coordenadas  $x, y, z$



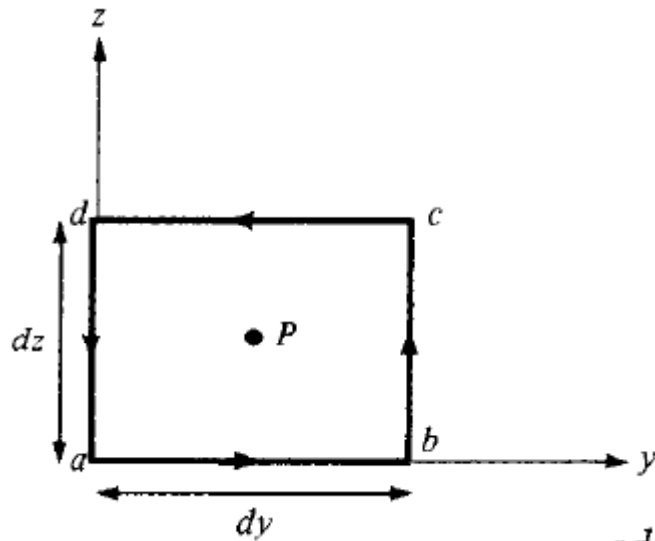
## Desarrollo en series de Taylor

$$A_x = A_x(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o) \frac{\partial A_x}{\partial z} + (y - y_o) \frac{\partial A_x}{\partial y} + (x - x_o) \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$A_y = A_y(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o) \frac{\partial A_y}{\partial z} + (y - y_o) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (x - x_o) \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

$$A_z = A_z(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o) \frac{\partial A_z}{\partial z} + (y - y_o) \frac{\partial A_z}{\partial y} + (x - x_o) \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$A_y = A_y(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o) \frac{\partial A_y}{\partial z} + (y - y_o) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (x - x_o) \frac{\partial A_y}{\partial x}$$



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left( \int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$ab, d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y \quad z = z_o - dz/2,$$

$$\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[ A_y(x_o, y_o, z_o) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right]$$

$$cd, d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y \text{ and } z = z_o + dz/2, \text{ so}$$

$$\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[ A_y(x_o, y_o, z_o) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right]$$

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} dz \cdot dy$$

- Para los lados bc y da

$bc, d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$  and  $y = y_o + dy/2$ , so

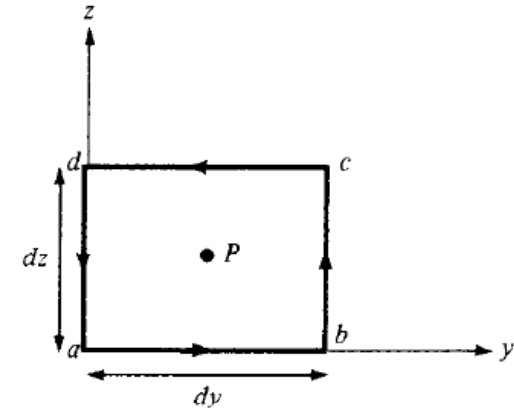
$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[ A_z(x_o, y_o, z_o) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right]$$

$da, d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$  and  $y = y_o - dy/2$ , so

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[ A_z(x_o, y_o, z_o) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial A_z}{\partial y} dz \cdot dy}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\frac{\partial A_z}{\partial y} dz \cdot dy - \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \cdot dy}{dz \cdot dy} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$



$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z$$

***El rotacional expresado para las variables  $u_1, u_2, u_3$***

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{u1} h_1 & \mathbf{a}_{u2} h_2 & \mathbf{a}_{u3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \cdot A_1 & h_2 \cdot A_2 & h_3 \cdot A_3 \end{pmatrix}$$

*Cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ :*  
 $h_1=1, h_2=\rho, h_3=1$

*Esféricas  $(r, \theta, \phi)$ :*  
 $h_1=1, h_2=r, h_3=r \cdot \sin \theta$

- Para coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad \text{Cilíndricas } (\rho, \phi, z): h1=1, h2=\rho, h3=1$$

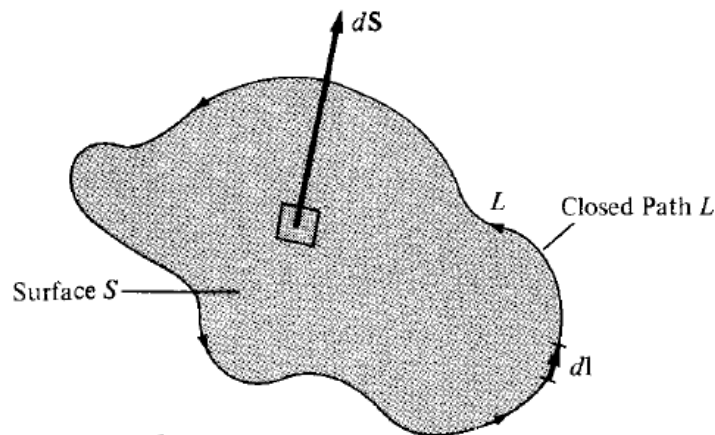
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

- Para coordenadas esféricas

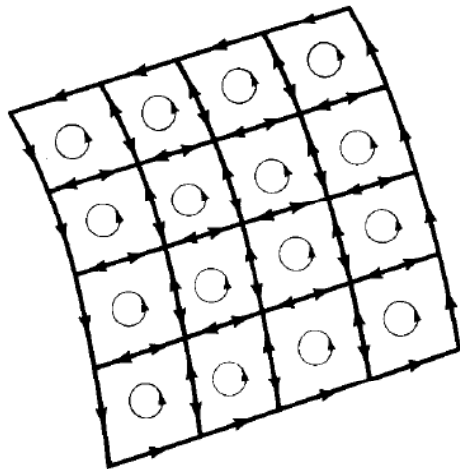
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

*Esféricas*  $(r, \theta, \phi): h1=1, h2=r; h3=r \cdot \sin \theta$

- **Teorema de Stoke:** la circulación de un campo **A** alrededor de una trayectoria cerrada **L** es igual a la integral de superficie del rotacional de **A** sobre la superficie **S** circunscripta por **L**, siempre que **A** y **rotA** sean continuos en **S**



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$



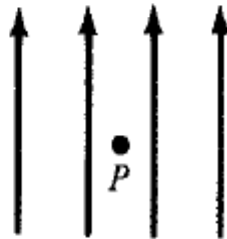
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_n$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k} \Delta S_k$$

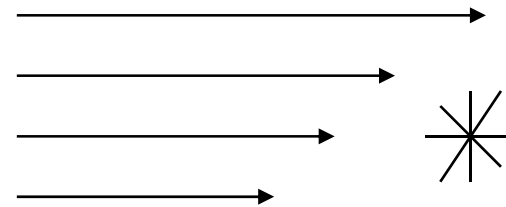
- Características de campos Rotacionales



(a)



(b)



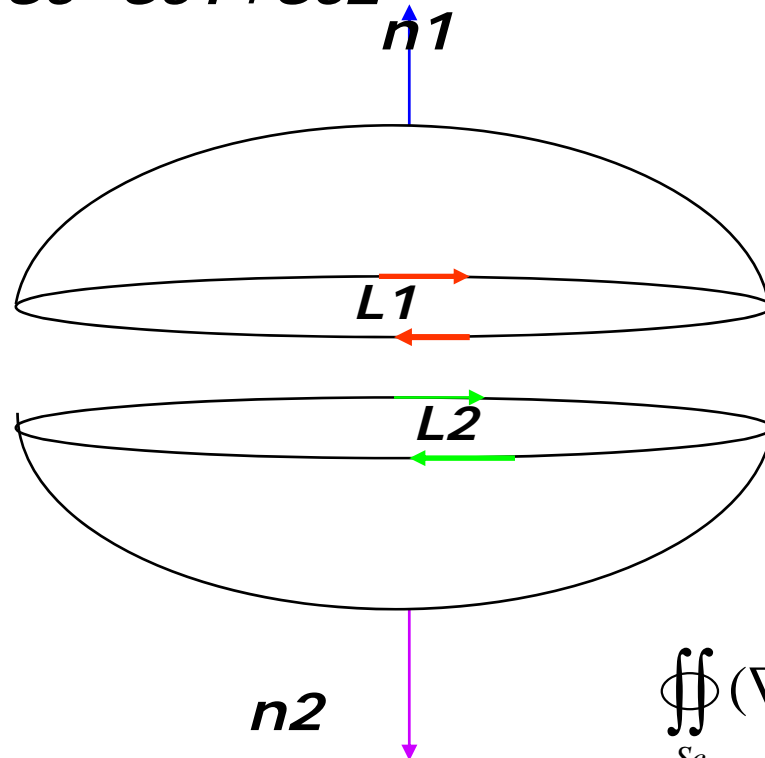
*Poniendo una ruedita en los distintos puntos un campo, ella tendrá que girar en los puntos que el Rotor sea distinto de cero*



- Identidad Nula. Divergencia de un rotor

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$S_c = S_{c1} + S_{c2}$$



*Gauss*

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \oiint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

- La integral de superficie se Divide en dos, conectadas por una frontera comun L1 y L2.

- Se aplica Stoke

$$\oiint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oiint_{S_{c1}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}_1 + \oiint_{S_{c2}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}_2$$

$$\oiint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{L1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{L2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Si la divergencia de un campo vectorial es nula , el campo es solenoidal y se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

- **Identidad Nula. Rotor de un gradiente**

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla V) = 0$$

- **Aplicamos Stoke en cualquier superficie**

$$\iint_S \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla V) \cdot d\mathbf{s} = \oint \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_P^P dV = V(P) - V(P) = 0$$

- ***Si el rotacional de un campo es nulo este campo se puede expresar como el gradiente de una función escalar.***
- ***Un campo vectorial irrotacional es conservativo, y se puede expresar como el gradiente de un campo escalar***

---

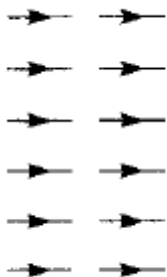
- **Clasificación de Campos Vectoriales según sus fuentes de rotor y divergencia**

(a)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$

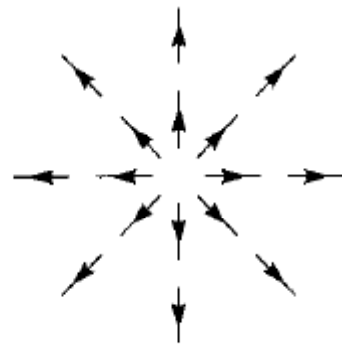
(b)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(c)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

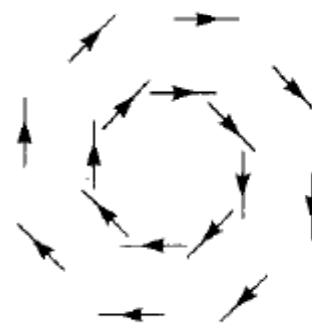
(d)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$



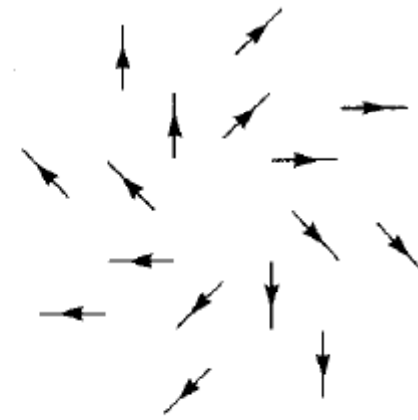
(a)



(b)



(c)



(d)

## *Teorema de Helmholtz*

---

- Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todo punto
  - En el infinito debe anularse
  - O bien si está limitado a una región, se debe conocer la componente normal en la superficie límite

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \rho_s$$

- Un campo vectorial puede expresarse como la suma de dos vectores uno irrotacional y otro solenoidal de divergencia nula.

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_i = -\nabla V \qquad \mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_i = 0 \quad \textit{Irrotacional}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_s = 0 \quad \textit{Solenoidal}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_s$$

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

*Laplaciano del vector A se define como*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

*Ecuación diferencial de A en función de sus fuentes*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\rho_v) - \nabla \times (\boldsymbol{\rho}_s)$$

*Densidad de origen o ´carga´*

*Vector: densidad de circulación*

- Divergencia (Gradiente)-->Laplaciano de un Escalar

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \longrightarrow \quad \text{Operador nabla en rectangulares}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \quad \longrightarrow \quad \text{Laplaciano en rectangulares}$$

- Rotor de Un Rotor= Gradiente(divergencia)-Laplaciano del vector

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

