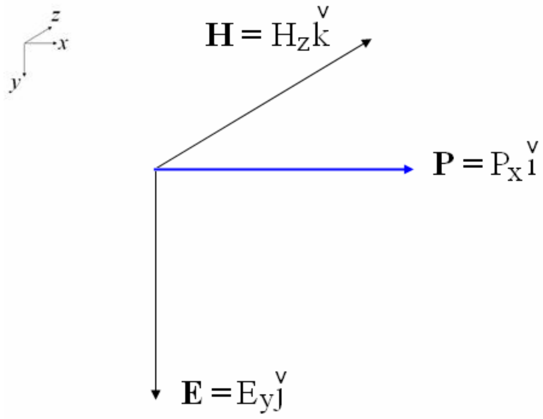
VECTOR DE POYNTING

Los campos electromagnéticos en general tienen asociados a ellos energía. Una onda electromagnética transporta energía.

El vector de Poynting:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\mathrm{W/m^2}]$$



El vector de Poynting es el flujo de potencia por unidad de área

$$\mathrm{P} = \oiint_{SC} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

La dirección de **P** es la dirección del flujo de energía, y es perpendicular a **E** y **H**

El producto vectorial de **E** por **H** sobre una superficie cerrada, es igual a la velocidad del flujo energético a través de tal superficie.

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)\hat{j} \quad ; \quad \mathbf{H} = \frac{E_0}{|Zi|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \theta_{Zi})\hat{k}$$

$$\mathrm{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \left[\frac{E_0^2}{Z_i} \cos\theta_{Zi} e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x) + \frac{E_0^2}{Z_i} \frac{sen\theta_{Zi}}{2} e^{-2\alpha x} sen(2\omega t - 2\beta x) \right] \hat{i}$$

VALOR MEDIO DEL VECTOR DE POYNTING

ADVERTENCIA: El producto de funciones armónicas, no se corresponde con el producto de los fasores.

NO ES POSIBLE usar fasores para el cálculo del Vector de Poynitng, salvo para el cálculo del VALOR MEDIO

$\overline{\mathbf{P}}$ es un valor medio, no instantáneo: $\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{T}\int \mathrm{P_x}\,dt$

$$\mathrm{P_x} = [\frac{E_0^2}{|Zi|}\cos\theta_{Zi} e^{-2\alpha x}\cos^2(\omega t - \beta x) + \frac{E_0^2}{|Zi|}\frac{sen\theta_{Zi}}{2} e^{-2\alpha x}\mathrm{sen}(2\omega t - 2\beta x)]$$

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{T}\int P dt = \frac{E_0^2}{|Zi|}\cos\theta_{Zi} e^{-2\alpha x}\frac{1}{2} + 0$$

Si quiero calcular el VALOR MEDIO usando fasores, debo usar la siguiente definición (donde $\overline{\dot{\mathrm{H}}}$ es el conjugado de $\dot{\mathrm{H}}$):

$$\overline{\mathbf{P}} = real\left\{\frac{\dot{\mathrm{E}}\times\overline{\dot{\mathrm{H}}}}{2}\right\} = real\left\{\frac{1}{2}E_0 e^{-\alpha x - j\beta x}\cdot\frac{E_0}{|Zi|}e^{-\alpha x + j\beta x + j\theta_{Zi}}\right\} = \boxed{\overline{\mathbf{P}} = \frac{E_0^2}{2|Zi|}\cos\theta_{Zi} e^{-2\alpha x}}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA ENERGÍA

Si se divide al vector de Poynting por la densidad de energía, se obtiene una cantidad que dimensionalmente es una velocidad, y cuyo significado físico es el de ser la velocidad con que se propaga o transmite la energía.

$$\boxed{v_{energía} = \frac{Vector\ de\ Poynting}{Densidad\ de\ energía\ de\ la\ onda\ electromag}}$$

$$v = \frac{\mathrm{P}}{w_{electromagnética}} = \frac{\mathrm{P}}{w_{eléctrica} + w_{magnética}} = \frac{\mathrm{P}}{\left(\dfrac{\varepsilon E^2}{2} + \dfrac{\mu H^2}{2}\right)}$$

Un hecho importante para resaltar <u>en los medios sin pérdidas</u> es que ambas densidades de energía, las correspondientes al campo eléctrico y al campo magnético respectivamente, son iguales entre sí:

$$\frac{\dot{\mathrm{E}}}{\dot{\mathrm{H}}} = \overset{*}{Zi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{E^2}{H^2} = \frac{\left[E_0 \cos(\omega t - \beta x)\right]^2}{\left[\dfrac{\mathrm{E}_0}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \cos(\omega t - \beta x)\right]^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon E^2 = \mu H^2$$

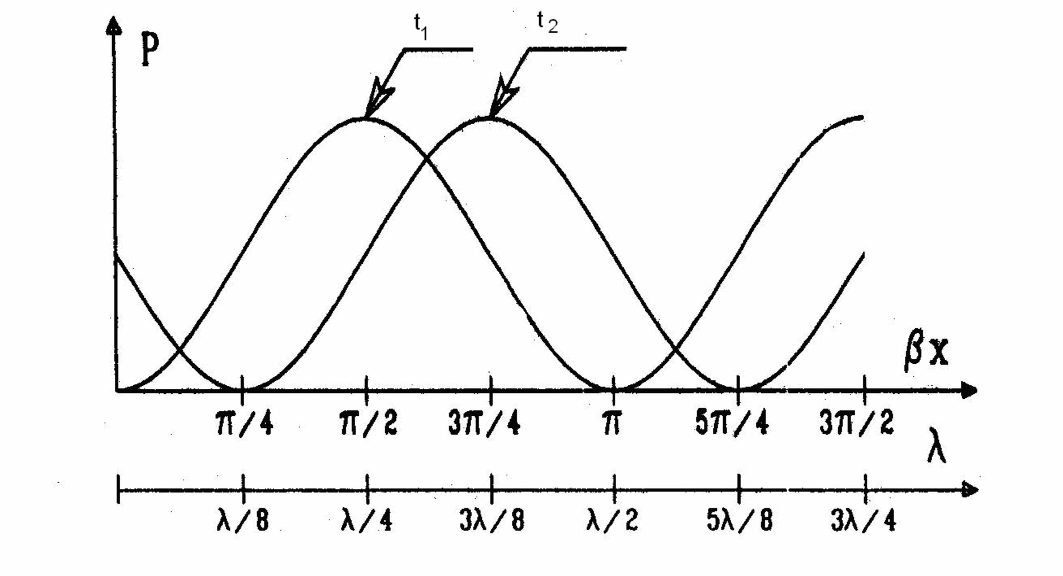
$$\boxed{w_{eléctrica} = w_{magnética}} \qquad w_{electromagnética} = \mu H^2 = \varepsilon E^2 = 2 w_{eléctrica} = 2 w_{magnética}$$

CASO 1: VECTOR DE POYNTING DE UNA ONDA PROGRESIVA PURA (onda que viaja por medio sin pérdidas).

En un medio sin pérdidas ($\sigma = 0$) la onda progresiva no se atenúa, $\alpha=0$

La **impedancia intrínseca** del medio es un número real: $Zi = \sqrt{\mu/\varepsilon}$

$$P(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta x).\frac{E_0}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos(\omega t - \beta x) = \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos^2(\omega t - \beta x)$$



POYNTING PARA UNA ONDA PROGRESIVA PURA

(medio sin pérdidas)

$$\boxed{P(x,t) = \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos^2(\omega t - \beta x)}$$

El vector de Poynting es una entidad pulsante, con dos pulsos por cada longitud de onda.

Valor medio del Vector de Poynting EN UNA ONDA PROGRESIVA PURA

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{T}\int \mathrm{P_x}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos^2(\omega t - \beta x)\,dt = \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\,\frac{1}{2}$$

O usando notación fasorial:

$$\overline{\mathbf{P}} = real\left\{\frac{\dot{\mathrm{E}}\times\overline{\dot{\mathrm{H}}}}{2}\right\} = real\left\{\frac{1}{2}E_0 e^{-0x-j\beta x}\cdot\frac{E_0}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}e^{-0x+j\beta x+j0}\right\} = \frac{E_0^2}{2\sqrt{\mu/\varepsilon}}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}E_0^2\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = E_{eficaz}^2\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}$$

Velocidad del flujo de energía en una onda progresiva pura

$$v_{energía} = \frac{Vector\ de\ Poynting}{w_{electromagnética}} = \frac{\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos^2(\omega t - \beta x)}{2w_{elec}} = \frac{\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\cos^2(\omega t - \beta x)}{2\frac{\varepsilon E_0^2}{2}\cos^2(\omega t - \beta x)} = \frac{\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}}{\varepsilon E_0^2} = \frac{E_0^2}{\varepsilon E_0^2\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- recordando que la velocidad de fase de la onda plana, que se calcula como $v_f=\omega/\beta$, cuando el medio no tiene pérdidas ($\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$) es independiente de la frecuencia (medio <u>no dispersivo</u>), la misma es igual a: $v_{fase} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

- Entonces <u>en este caso</u> es decir una onda plana en un medio <u>no dispersivo</u> se verifica que: $\boxed{v_{energía} = v_{fase}}$ la velocidad de propagación de la energía es igual a la velocidad de fase

NOTA:un medio <u>no dispersivo</u> es aquel en el cual la velocidad de fase de una onda es independiente de la frecuencia. Por el contrario, un medio <u>dispersivo</u> es aquel medio en el cual la velocidad de fase de una onda depende de la frecuencia.

CASO 2: VECTOR DE POYNTING DE UNA ONDA ESTACIONARIA PURA

Supongamos tener una onda estacionaria pura, producto de la suma de dos ondas planas progresivas polarizadas linealmente en el mismo eje, de igual amplitud pero viajando en sentidos opuestos, en un medio dieléctrico ideal (espacio libre por ejemplo). Supongamos que el campo eléctrico tiene componente según el eje y solamente, y que viajan una en el sentido del eje x con amplitud $\mathbf{E}_0$. El valor instantáneo de la onda compuesta $\mathbf{E}_y$ resultará ser:

$$E_y = 2E_0 sen(\omega t)\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

$$H_z = 2H_0 \cos(\omega t)\cos(\beta x)$$

$$\mathrm{P{=}E{\times}H{=}}P_x\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$P_x = E_y H_z = 2E_0\, sen(\omega t)\,sen(\beta x).2H_0\cos(\omega t)\cos(\beta x)$$

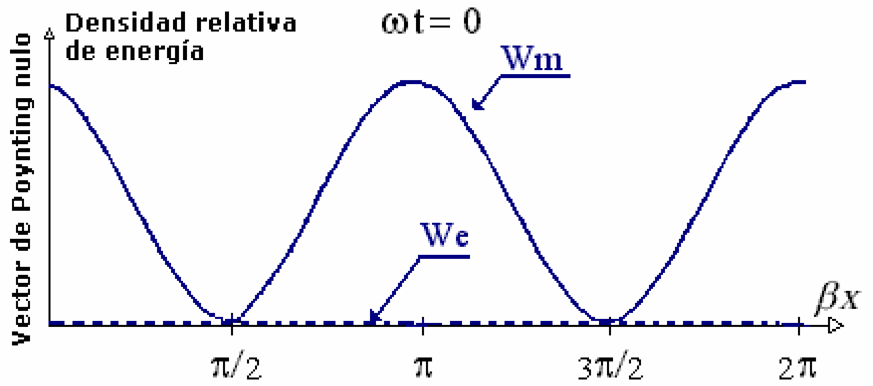
$$P_x = E_0 H_0 sen(2\beta x)\,sen(2\omega t)$$

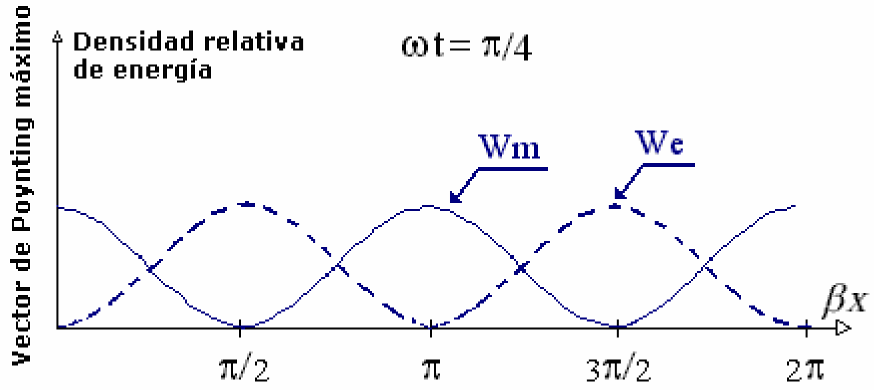
$\overline{P_x} = 0$ para la onda estacionaria

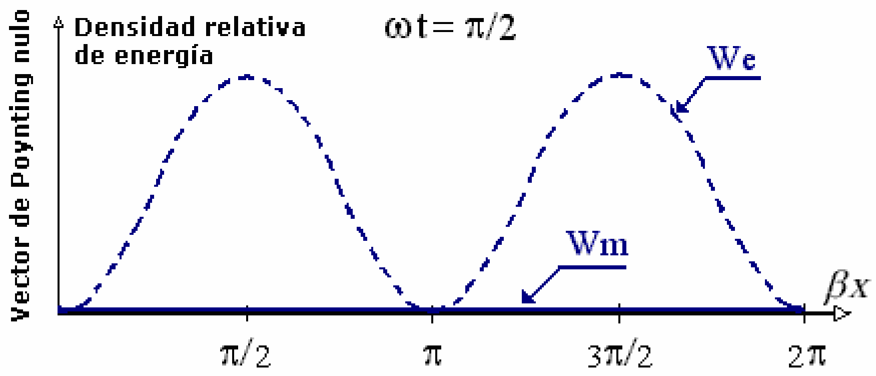
$$w_{eléctrica} = 2\varepsilon\, E_0^2 sen^2\omega t\,.\mathrm{sen}^2\,\beta x$$

$$w_{magnética} = 2\mu\, H_0^2 \cos^2\omega t\,.\cos^2\beta x$$

En una onda estacionaria, la energía electromagnética no avanza en promedio. Pasa de ser energía eléctrica a energía magnética y viceversa, en un movimiento de vaivén, pero no hay un flujo uniforme de energía.







ONDA ESTACIONARIA PURA

$$\textit{Vientres}\ (\mathbf{E}) = (2n+1)\lambda/4$$

$$\textit{Vientres}\ (\mathbf{H}) = (n)\lambda/2$$

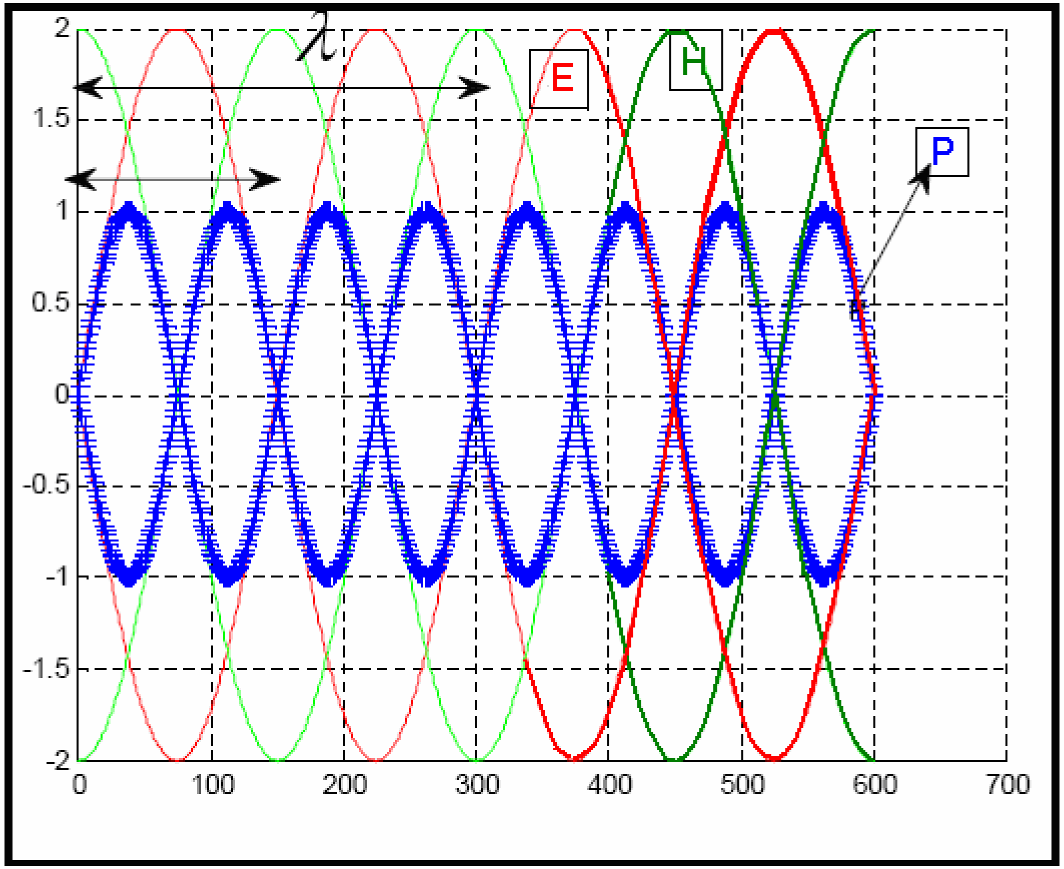
$$\textit{Vientres}\ (\mathbf{P}) = (2n+1)\lambda/8$$

$$\textit{Nodos}\ (\mathbf{E}) = (n)\lambda/2$$

$$\textit{Nodos}\ (\mathbf{H}) = (2n+1)\lambda/4$$

$$\textit{Nodos}\ (\mathbf{P}) = (n)\lambda/4$$

$n = 0, 1, 2, 3...$



$$\boxed{E_y = 2E_0 sen(\omega t)\,\mathrm{sen}(\beta x)}$$

$$\boxed{H_z = 2H_0 \cos(\omega t)\cos(\beta x)}$$

$$\boxed{P_x = E_0 H_0 sen(2\beta x)\,sen(2\omega t)}$$

VECTOR DE POYNTING

* Vector de Poynting

$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ $[\mathrm{W/m^2}]$ flujo de potencia por unidad de área, da la dirección en que se propaga la energía

velocidad con que se propaga o transmite la energía $v = \dfrac{\mathrm{P}}{w_{electromagnética}}$

NO ES POSIBLE usar fasores para el cálculo del Vector de Poynitng, salvo para el cálculo del VALOR MEDIO

$$\overline{\mathbf{P}} = real\left\{ \frac{\dot{\mathrm{E}} \times \overline{\dot{\mathrm{H}}}}{2} \right\}$$ valor medio

- CASO 1: Vector de Poynting de una Onda Progresiva Pura

$P(x,t) = \dfrac{E_0^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \cos^2(\omega t - \beta x)$; VALOR MEDIO $\overline{P} = \dfrac{1}{2} E_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = E_{eficaz}^2 \dfrac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}$

$$v_{energía} = \frac{P}{w_{electromagnética}} \text{ coincide con } v_{fase} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- CASO 2: Vector de Poynting de una Onda Estacionaria Pura

$P_x = E_0 H_0 sen(2\beta x) sen(2\omega t)$; $\overline{P_x} = 0$, la energía electromagnética no avanza en promedio