

---

# Dieléctricos

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

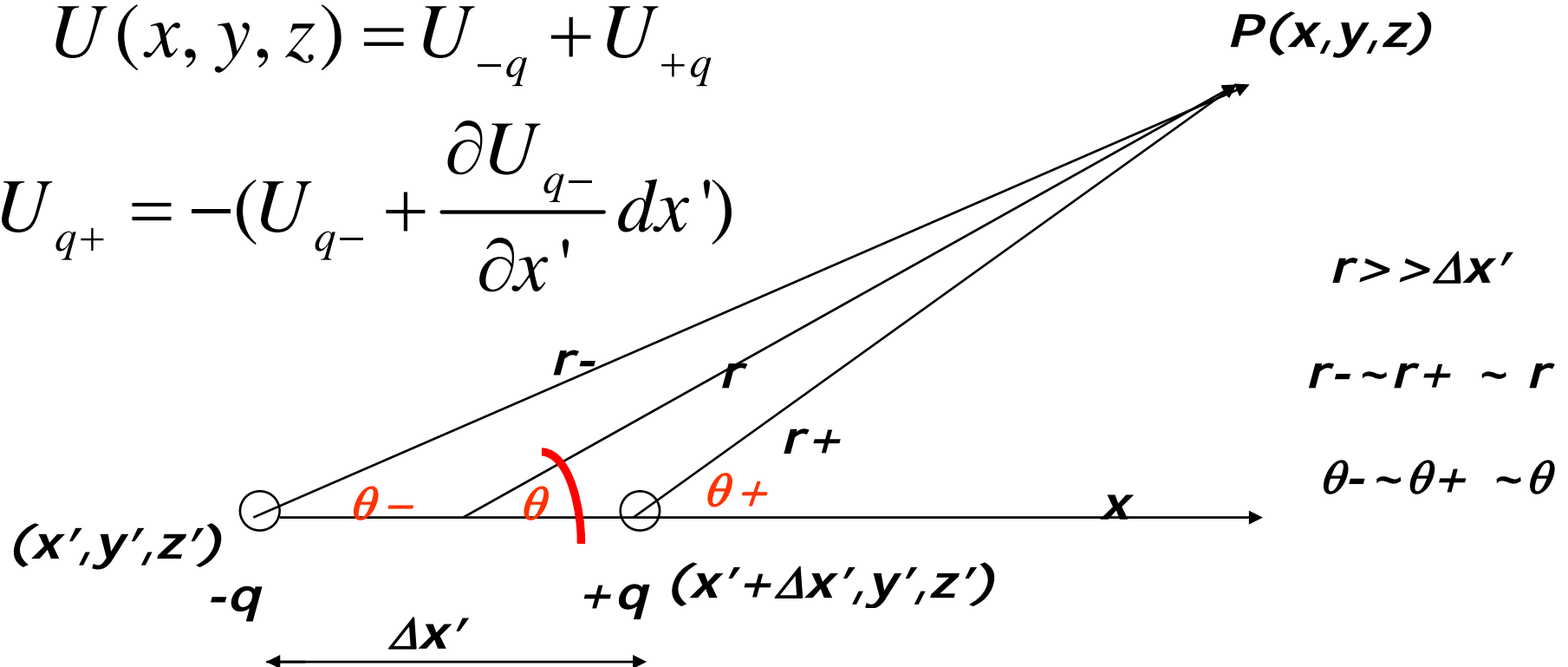
## Potencial de un dipolo

$x, y, z$   *Coordenadas del campo*

$x', y', z'$   *Coordenadas de la fuente*

$$U(x, y, z) = U_{-q} + U_{+q}$$

$$U_{q+} = -(U_{q-} + \frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} dx')$$



# Potencial de un dipolo

$$U_{dipolo} = U_{q-} + U_{q+} = U_{q-} - (U_{q-} + \frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} \Delta x') = -\frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} \Delta x'$$

$$U_{-q} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$\frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-q \cdot (-2) \cdot (x-x')}{4\pi\epsilon_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} = \frac{-q \cdot (x-x')}{4\pi\epsilon_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U_{q-}}{\partial x'} = \frac{-q \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$

$$U_{dipolo}(x, y, z) = \frac{q \cdot \Delta x' \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$

## Potencial de un dipolo

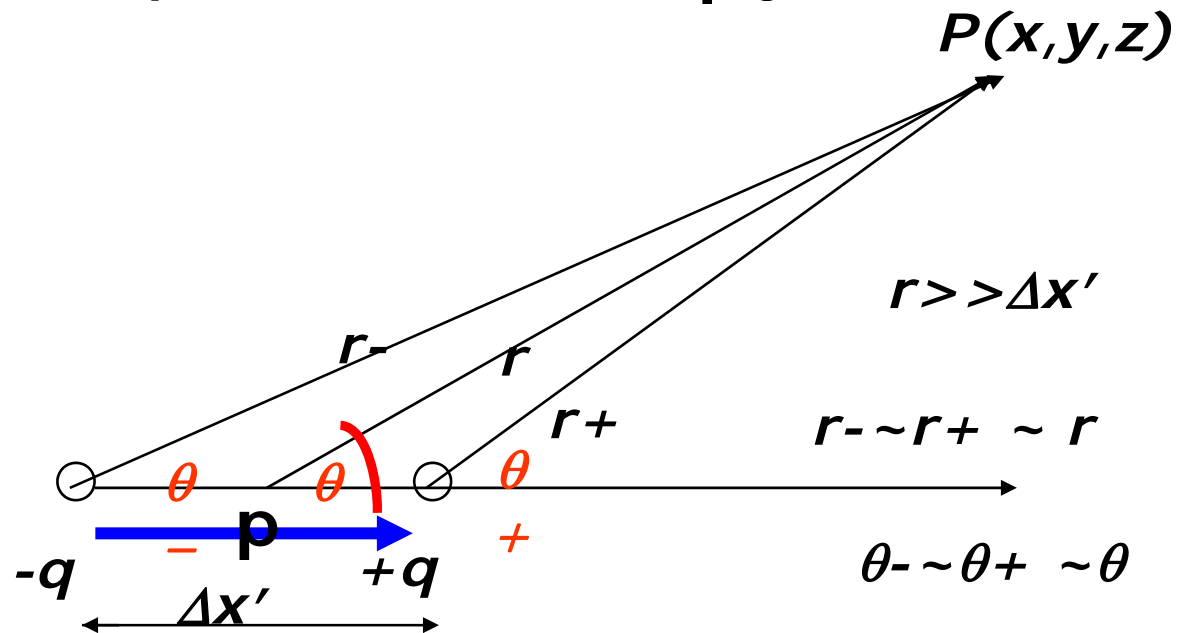
$$U_{dipolo}(x, y, z) = \frac{q \cdot \Delta x' \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$

$$\mathbf{p} = (q \cdot \Delta x') \mathbf{a}_x$$

**Definimos un vector  $\mathbf{p}$** , cuyo modulo es el valor del módulo de una de las cargas del dipolo multiplicada por la separación entre ambas y la dirección es de la carga negativa a la positiva .

Sustituimos el  $\cos(\theta)$ , por el producto escalar de  $\mathbf{p}$  y el vector  $\mathbf{r}$

$$U_{dipolo} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$



## ***Potencial de un dipolo***

---

$$U_{dipolo} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$

$$\frac{\mathbf{a}_r}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$U_{dipolo} = \frac{\mathbf{p} \cdot}{4\pi\epsilon_0} \nabla'\left(\frac{1}{r}\right)$$



***Derivamos respecto de la coordenadas de la fuente***

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{(r)^2} \right]$$

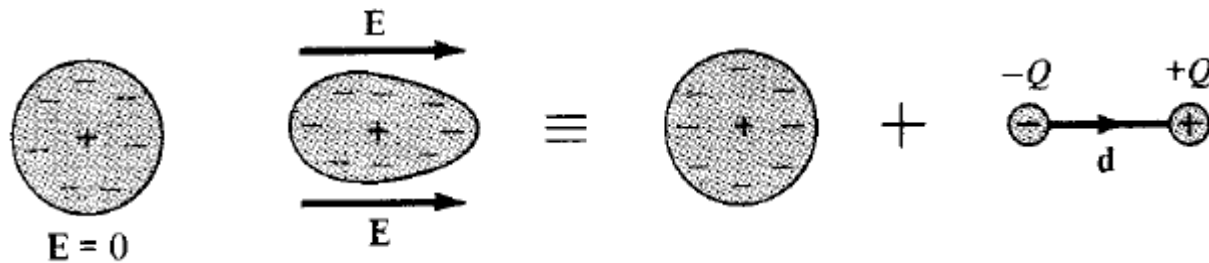


***Derivamos respecto de la coordenadas del campo***

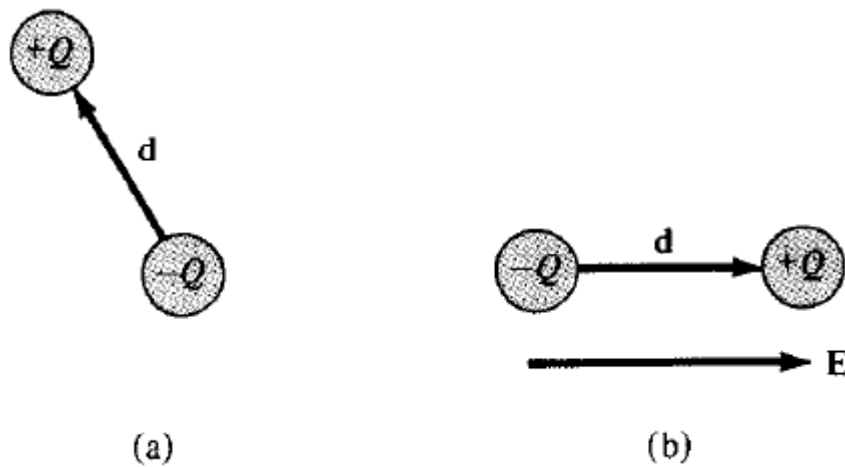
***El potencial de un dipolo varia con el cuadrado de la distancia y el campo con el cubo de la distancia.  
La acción de un dipolo es mucho menos intensa que la de la carga puntual***

- Los materiales dieléctricos no tienen cargas libres
- Las moléculas de estos materiales son afectadas por campos Eléctricos de modo que se forman dipolos que se orientan.
- Los dieléctricos tienen cargas ligada, esta no son libres como la de los conductores, sino que aparecen de a pares  $+$  - dentro de la escala molecular.
- El efecto macroscópico es un desplazamiento de cargas positivas  $+$  respecto de las negativas  $-$ , polarización.
- Un dieléctrico polarizado, aún cuando sea eléctricamente neutro en promedio produce un campo eléctrico en puntos exteriores o interiores al dieléctrico.
- Nuestro estudio no es de escala atómica, el efecto que analizaremos es MACROSCÓPICO (dimensiones mucho mayores que la del átomo y la molécula).

- Polarización moléculas No polares



- Polarización moléculas Polares

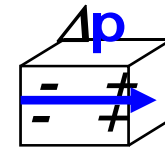
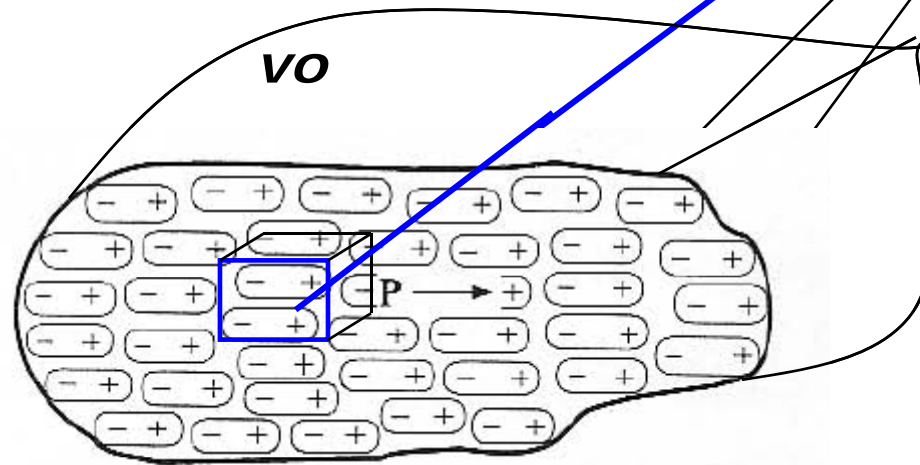


# Campo de una Distribución cúbica de Dipolos

- Momento dipolar por Unidad de volumen

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{\Delta v}$$

$\mathbf{p}_i$ : dipolos en el volumen



$$\Delta \mathbf{p}_j = \mathbf{P} \cdot \Delta v_j$$

$$U(x, y, z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Delta \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 [r]^2}$$

$$vO = \sum_{j=1}^M \Delta v_j$$



## *Campo de una Distribución cúbica de Dipolos*

- Se calcula el potencial en un punto, como contribución de la distribución de todos los dipolos.
- Se mueve el punto de la fuente para integrar el efecto de las fuentes

$$dU = \frac{\mathbf{P} \cdot \Delta v' \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 [r]^2} = \frac{\mathbf{P} \cdot \Delta v'}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$U = \int dU = \iiint_{vo} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 [r]^2} dv' = \iiint_{vo} \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) dv'$$

## *Campo de una Distribución cúbica de Dipolos*

$$\text{div } (u.P) = (\text{Grad } u).P + u.(\text{div } P) \qquad u = \frac{1}{r}$$

$$(\text{Grad } u).P = \text{div } (u.P) - u.(\text{div } P)$$

$$U = \iiint_{vo} \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) dv' = \iiint_{vo} \nabla' \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \right) dv' - \iiint_{vo} \left( \frac{1}{r} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \right) dv'$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{so} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}'}{r} - \iiint_{vo} \left( \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} \right) dv' \right]$$

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}' = P_n ds'$$

$$P_n = \sigma \text{ lig} \quad \longrightarrow \text{Densidad de carga superficial}$$

$$-\nabla' \cdot \mathbf{P} = \rho \text{ lig} \quad \longrightarrow \text{Densidad de carga volumétrica}$$

## ***Campo de una Distribución cúbica de Dipolos***

---

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{so} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}'}{r} + \iiint_{vo} \left( \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} \right) dv' \right]$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{so} \frac{\sigma_{lig}}{r} ds' + \iiint_{vo} \left( \frac{\rho_{lig}}{r} \right) dv' \right]$$

### ***Funciones escalares Obtenidas a partir de P***

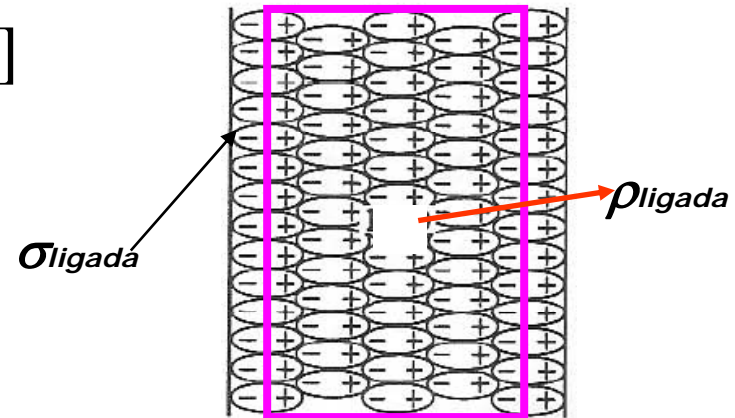
$$P_n = \sigma_{lig}$$

$$-\nabla' \cdot \mathbf{P} = \rho_{lig}$$

***Es una medida de la no uniformidad de  
La polarización dentro del material***

## ***Campo de una Distribución cúbica de Dipolos***

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iint_{so} \frac{\sigma_{lig}}{r} ds + \iiint_{vo} \left( \frac{\rho_{lig}}{r} \right) dv \right]$$



***El efecto de la densidad cúbica puede expresarse como función de simples fuentes equivalentes :***

- ***Una distribución superficial de carga***
- ***Una carga volumétrica***
- ***En muchos materiales no existe divergencia interna de momentos dipolares así que solo se representa con la distribución superficial de carga***

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{lig}$$

- ***El signo negativo es por la definición de  $\mathbf{P}$  de las cargas negativas a las positivas***

- 
- La contribución de cada elemento de volumen se transforma en un término de volumen diferente y un término de superficie
  - La carga total del volumen y la superficie es cero
  - Queda la contribución superficial de la frontera y elementos de volumen cargados, si el material no fuera totalmente uniforme

$$Q = \left[ \oint_{SO} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} - \iiint_{VO} \nabla \mathbf{P} dv \right] = 0$$

- La electrostática se puede ver como la acción de cargas libres o ligadas, sin importar de donde provengan.
- La ley de Coulomb se aplica independiente del material .
- La acción de los materiales se describe con su distribución de cargas
- Macroscopicamente es útil distinguir entre cargas libres y *ligadas* que especifican los procesos de polarización (dipolos de los dieléctricos).
- Las cargas que producen el campo eléctrico son todas las *libres* y las *ligadas*

$$\rho_{total} = \rho_{libre} + \rho_{ligada}$$

- Las fuentes de divergencia del campo eléctrico son todas las cargas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$$

- Hemos encontrado en los materiales polarizados que

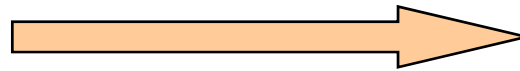
$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{ligada}$$

- De donde

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{total} - \rho_{ligada} = \rho_{libre}$$

- Es conveniente definir a  $\mathbf{D}$  como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$



*Ecuación  
constitutiva*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{libre}$$

- Esta definición esta de acuerdo con la definición de  $\mathbf{D}$  en el vacío

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre}$$

- $\mathbf{D}$  es un campo parcial pues solo depende de las cargas libres



- En muchos materiales (gases, líquido, sólidos amorfos, cristales del sistema cúbico), la polarización es proporcional al campo eléctrico  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

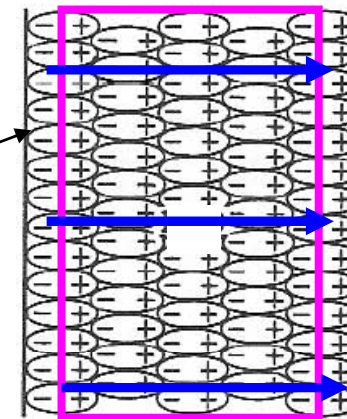
*Suceptibilidad eléctrica*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

*Permitividad relativa eléctrica*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E})$$

- Si no hay cargas libres y  $\epsilon_r$  es constante el material se puede reemplazar por capas superficiales de carga



$$(1 + \chi_e) = \epsilon_r \geq 1$$

$\chi_e, \epsilon_r$   *adimensional*

$\epsilon_o, \epsilon$   *Farads/m*

$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$   *Universal*

$\mathbf{D} = \epsilon_o \epsilon_r \mathbf{E}$   
 $\mathbf{P} = \epsilon_o \chi_e \mathbf{E}$   *Materiales lineales, homogéneos e isotrópicos*

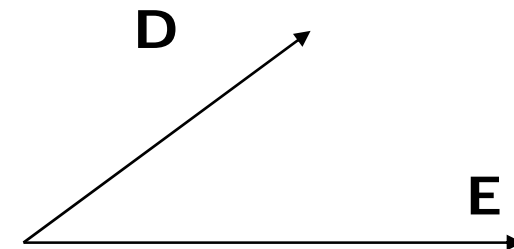
- **Materiales isotrópicos:** la constante dielectrica es la misma para todas las direcciones.  $D$  ,  $E$  y  $P$  son paralelas.
- **En los materiales Anisotrópicos** la permitividad y la susceptibilidad poseen en este caso nueve componentes llamado **TENSOR**

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

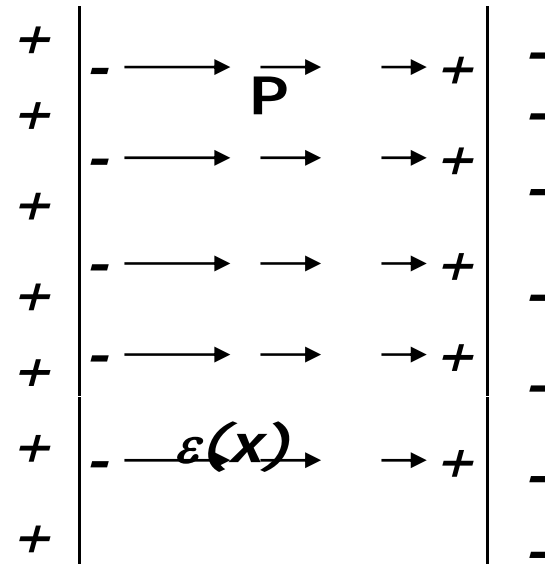
$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z$$

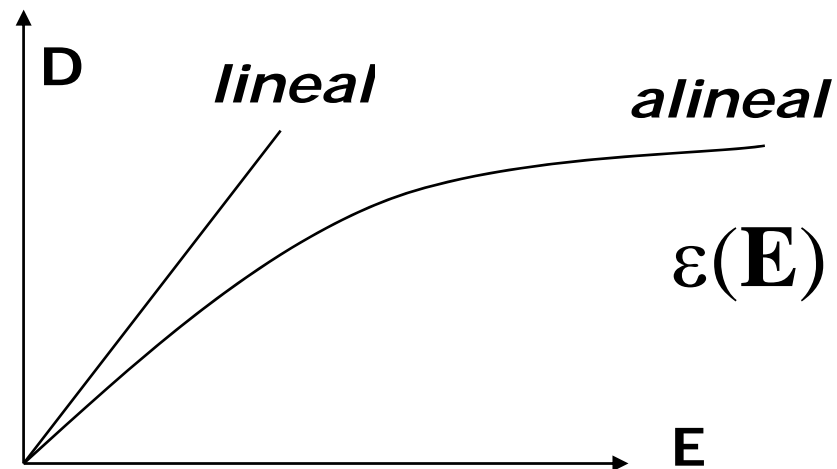
$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z$$



- **Materiales Homogéneos:** la constante dieléctrica no depende de la posición espacial
- **En los materiales NO Homogéneos** la constante dieléctrica depende de la posición



- Material lineal  $\epsilon$  no depende del valor de  $E$



---

## **Rigidez dieléctrica**

- **En la práctica los dieléctricos no son ideales y ante la aplicación de campos intensos comienzan a desprenderse electrones de las moléculas y el dieléctrico pasa a ser conductor.**
- **Caso que se dice que ha ocurrido una disrupción dieléctrica (descarga).**
- **Esta puede ocurrir en todo tipo de materiales líquidos, sólidos y gaseosos (autorregenerativos).**
- **Dependen de:**
  - **La naturaleza del material**
  - **De la temperatura**
  - **La humedad**
  - **La duración del período de aplicación del campo.**
- **El valor mínimo de campo eléctrico en que se produce la disrupción se denomina Rigidez (resistencia) dieléctrica del material**

- **Rigidez Dieléctrica.**

**Máximo campo eléctrico que puede soportar un dieléctrico sin perder sus propiedades aislantes.**

- Los campos eléctricos moderados son los que no arrancan electrones ligados de los átomos. Por tanto no producen corrientes importantes en los dieléctricos, pues solo mueven los electrones libres que pueda haber en el dieléctrico.
- Pero si se aumenta el valor del campo, puede llegar a arrancar un gran número de electrones ligados.
- Entonces la corriente en el dieléctrico crece bruscamente y suele dañarlo por elevación de su temperatura.
- El mayor valor del campo eléctrico que no produce este incremento brusco de corriente es la rigidez dieléctrica. La rigidez dieléctrica del aire seco es 30 kV/cm. Por encima de este valor se produce arco eléctrico.

OF SOME COMMON MATERIALS

Material	Dielectric Constant $\epsilon_r$ (Dimensionless)	Dielectric Strength $E$ (V/m)
Barium titanate	1200	$7.5 \times 10^6$
Water (sea)	80	
Water (distilled)	81	
Nylon	8	
Paper	7	$12 \times 10^6$
Glass	5–10	$35 \times 10^6$
Mica	6	$70 \times 10^6$
Porcelain	6	
Bakelite	5	$20 \times 10^6$
Quartz (fused)	5	$30 \times 10^6$
Rubber (hard)	3.1	$25 \times 10^6$
Wood	2.5–8.0	
Polystyrene	2.55	
Polypropylene	2.25	
Paraffin	2.2	$30 \times 10^6$
Petroleum oil	2.1	$12 \times 10^6$
Air (1 atm.)	1	$3 \times 10^6$

\*The values given here are only typical; they vary from one published source to another due to different varieties of most materials and the dependence of  $\epsilon_r$  on temperature, humidity, and the like.

Material	Constante dieléctrica $K$	Rigidez dieléctrica $E_{\text{máx}}$ (V/m)
Óxido de Aluminio	4.5	$6 \times 10^6$
Vidrio*	5–10	$9 \times 10^6$
Nylon	3.5	$19 \times 10^6$
Polietileno	2.3	$18 \times 10^6$
Cuarzo ( $\text{SiO}_2$ )	4.3	
Cloruro de sodio	6.1	
Azufre	4.0	
Madera*	2.5–8.0	
Alcohol etílico (0°C)	28.4	
Benceno (0°C)	2.3	
Agua (destilada, 0°C)	87.8	
Agua (destilada, 20°C)	80.1	
Aire (1 atm)	1.00059	$3 \times 10^6$
Aire (100 atm)	1.0548	
$\text{CO}_2$ (1 atm)	1.000985	

\* Para materiales como vidrio y madera, la composición química varía; de ahí el intervalo de constantes dieléctricas. No debe deducirse que el material es no lineal.



## Justificación del campo eléctrico Macroscópico dentro de un material dieléctrico

El campo electrostático en un dieléctrico debe tener las mismas propiedades básicas que encontramos válidas para  $\mathbf{E}$  en el vacío; en particular,  $\mathbf{E}$  es un campo conservativo y, en consecuencia, puede derivarse de un potencial escalar. Así pues,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

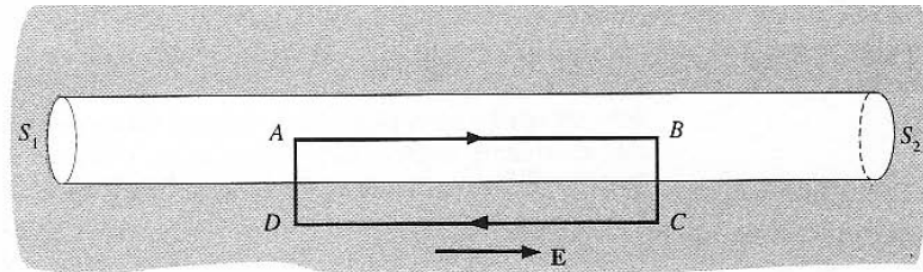
o, en forma equivalente,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{E}_v \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0$$

$$E_{vt} = E_{dt}$$

campo eléctrico dentro de un dieléctrico es igual a la componente longitudinal del campo eléctrico dentro de una cavidad en forma de aguja en el dieléctrico, siempre y cuando el eje de la cavidad esté orientado paralelamente a la dirección del campo eléctrico en el dieléctrico.



Evidentemente, el problema de calcular el campo eléctrico dentro de un dieléctrico se reduce a calcular el campo eléctrico en el interior de una cavidad en forma de aguja en el dieléctrico. Pero el campo eléctrico en dicha cavidad es un campo externo y, en

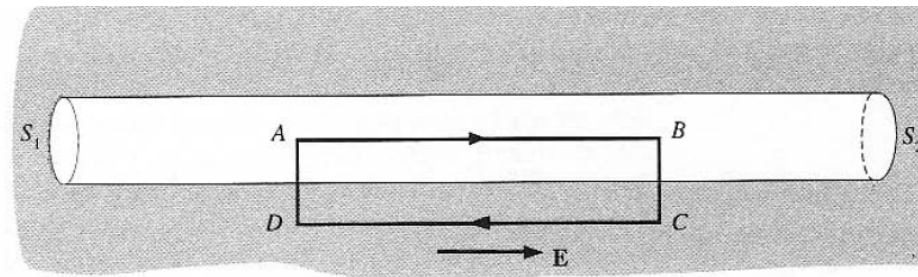
La trayectoria  $ABCD$  está contenida parcialmente en la cavidad en forma de aguja y parcialmente en el dieléctrico. En un dieléctrico isótropo

la polarización  $\mathbf{P}$  tiene la dirección de  $\mathbf{E}$ , de modo que, para la orientación mostrada de la aguja,  $\sigma_p = 0$  sobre las paredes cilíndricas. En un dieléctrico anisótropo,  $\sigma_p$  no es necesariamente cero, pero su valor no influye en la componente longitudinal del campo eléctrico en la cavidad.

la aguja.

puede hacerse arbitrariamente delgada, de modo que las superficies  $S_1$  y  $S_2$  tengan un área despreciable.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iint_{s_0+s'} \frac{\sigma_{lig}}{r} ds' + \iiint_{v_0-v_1} \left( \frac{\rho_{lig}}{r} \right) dv \right]$$



$S' = S_1 + S_2 + S_c$  son las superficies de la aguja.

$V_0 - V_1$  es el volumen del dieléctrico excluyendo la “aguja”.

se ve que  $\sigma_p = 0$  sobre la superficie cilíndrica  $S_c$ .

- La contribución de la superficie al cálculo del campo está dado por la  $S_o$ , superficie Externa, como en el caso del campo en el exterior
- Lo que hay que restar del volumen de la aguja, es una cantidad que tiende a cero, pues siendo la densidad de carga finita el término
  - $(dv/r) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow 0$
- La expresión del potencial y por lo tanto del campo dentro del dieléctrico es equivalente a la expresión usada para puntos exteriores

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iint_{s_o} \frac{\sigma_{lig}}{r} ds' + \iiint_{v_o} \left( \frac{\rho_{lig}}{r} \right) dv' \right]$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$D = \sigma_{\text{libre}}$$

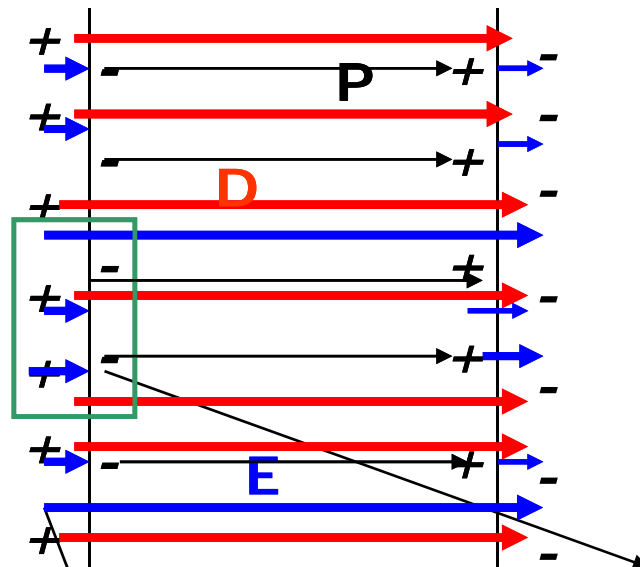
$$E = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_{\text{total}}}{\epsilon_0}$$

$$P = \sigma_{\text{libre}} - \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\sigma_{\text{libre}} + \sigma_{\text{ligada}} = \sigma_{\text{total}}$$

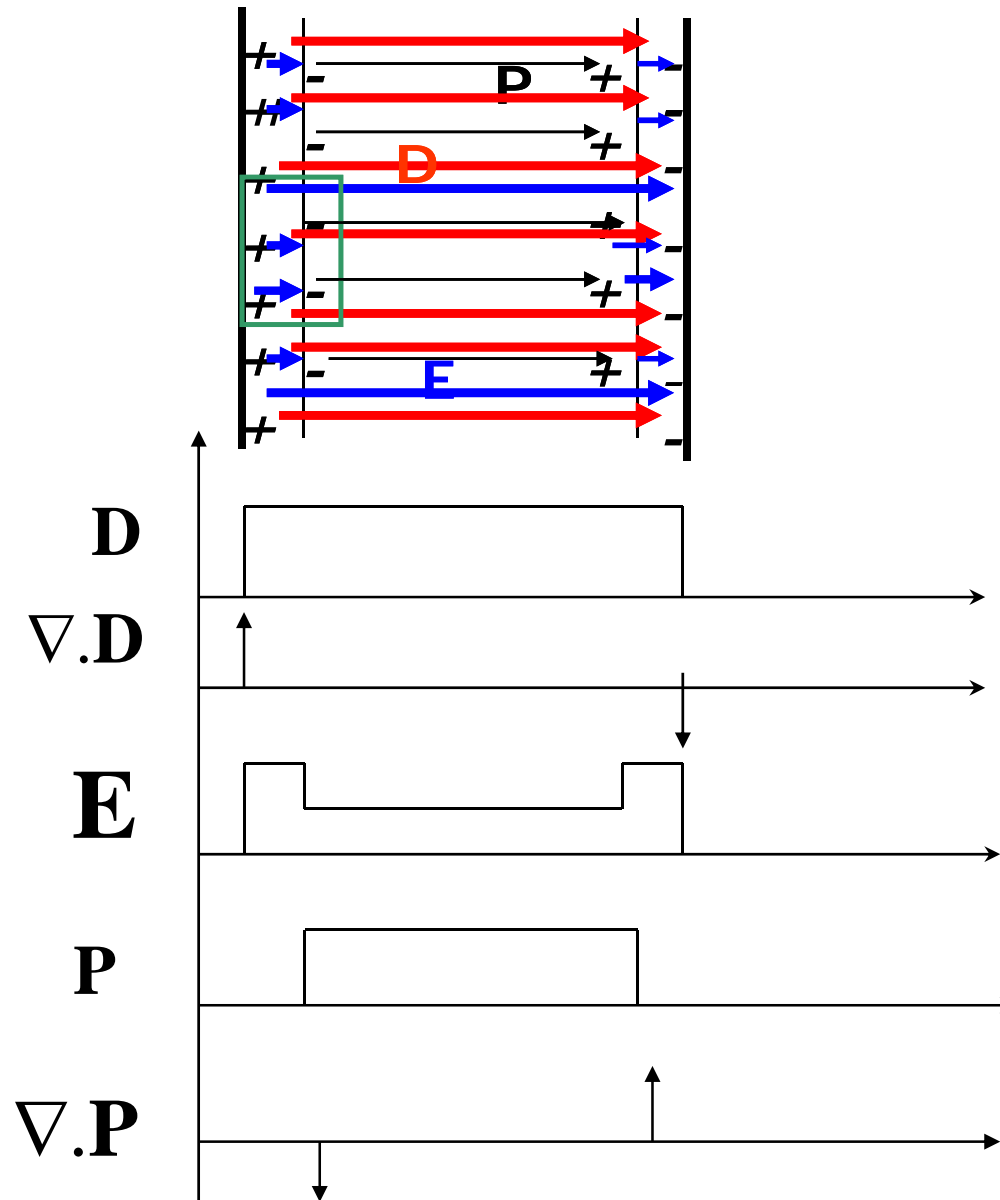
$$\sigma_{\text{ligada}} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_r} - \sigma_{\text{libre}}$$

$$P = \sigma_{\text{libre}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = -\sigma_{\text{ligada}}$$



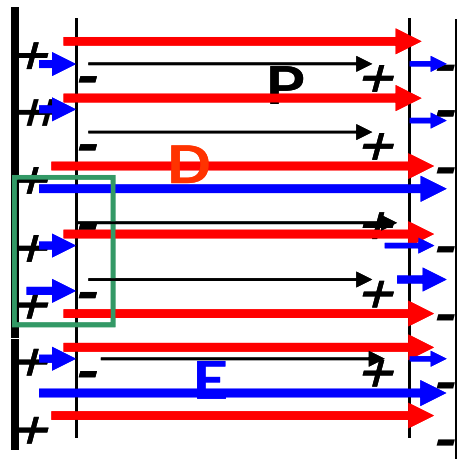
*Carga libre*

*Carga ligada*



---


$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D.S}{E.l} = \frac{\epsilon E.S}{E.l} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r . S}{l}$$



- La Capacidad usando materiales dieléctricos aumenta

- El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  depende de todas las cargas libres y ligadas.
- $\mathbf{D}$  depende solo de las cargas libres.
- $\mathbf{P}$  depende de las cargas ligadas.

$$\nabla \mathbf{D} = \rho_{libre}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \mathbf{P} = -\rho_{ligada}$$

- Carga esférica de radio  $a$  en un dieléctrico homogéneo, lineal e isotrópico
- El campo sigue siendo radial,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  tienen la misma dirección.
- $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

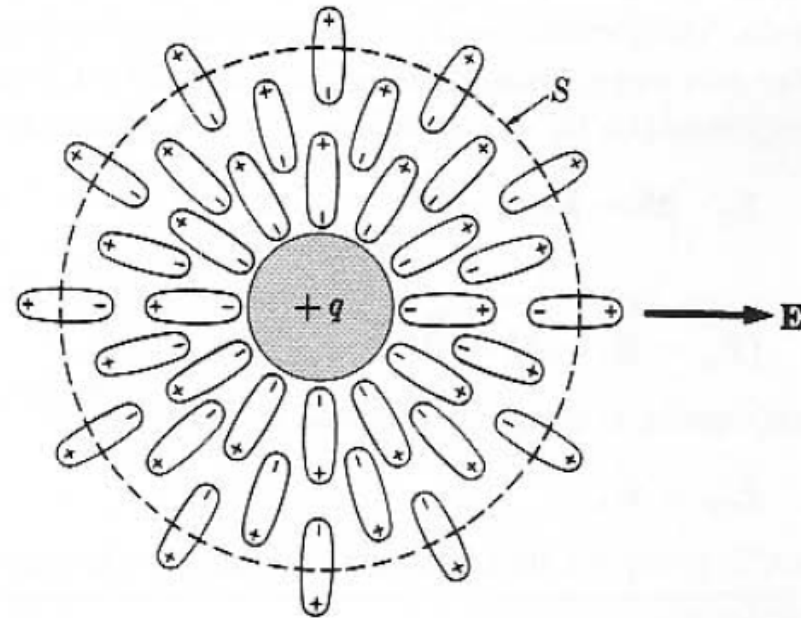
$$\iint_{sc} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q$$

$$4\pi r^2 D = q$$

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$





- El campo eléctrico es menor en un factor  $\epsilon_r$  que el que hay sin dieléctrico
- La carga ligada aparece en la superficie de separación de la esfera donde esta la carga  $q$
- Carga volumétrica ligada no existe pues el material es homogéneo y la Divergencia de  $\mathbf{P}$  es cero ( $\mathbf{P}$  tiene simetría esférica y varía con  $1/r^2$  )
- La carga ligada se calcula integrando  $\mathbf{P}$  en la superficie de la esfera

$$\iint_{sc, r=a} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = -q_{ligada} = \frac{4\pi a^2 q}{4\pi a^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

La carga Total se calcula sumando ambas cargas en la superficie de la esfera

$$q_{total} = q_{ligada} + q$$

$$q_{total} = -q \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) + q = \frac{q}{\epsilon_r}$$

## • Condiciones de Frontera

Los medios pueden ser dos dieléctricos con diferentes propiedades, o un dieléctrico y un conductor. El vacío puede considerarse como un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_0$ .

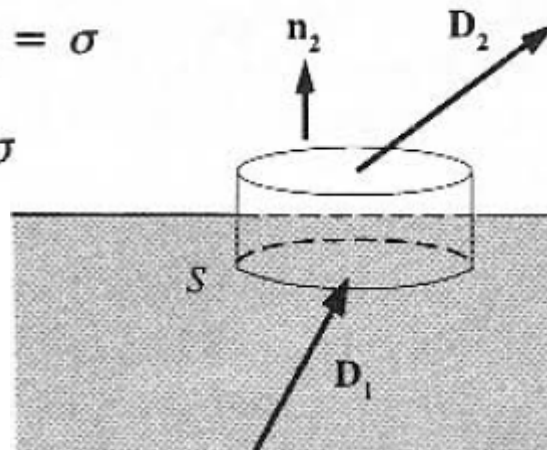
Supondremos que hay una densidad superficial de carga externa,  $\sigma$ , la altura de la caja de pastillas despreciablemente pequeña

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q = \int \sigma ds$$

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma$$

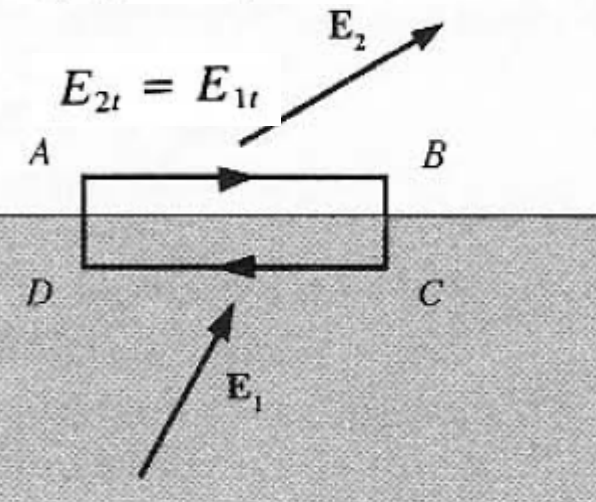
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = 0$$

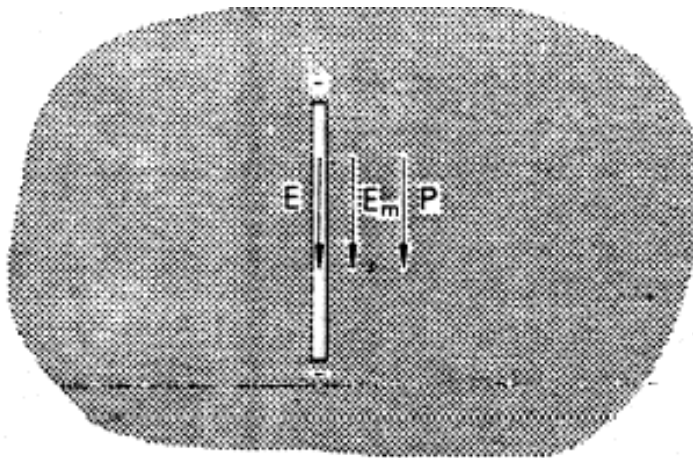
$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0$$



$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

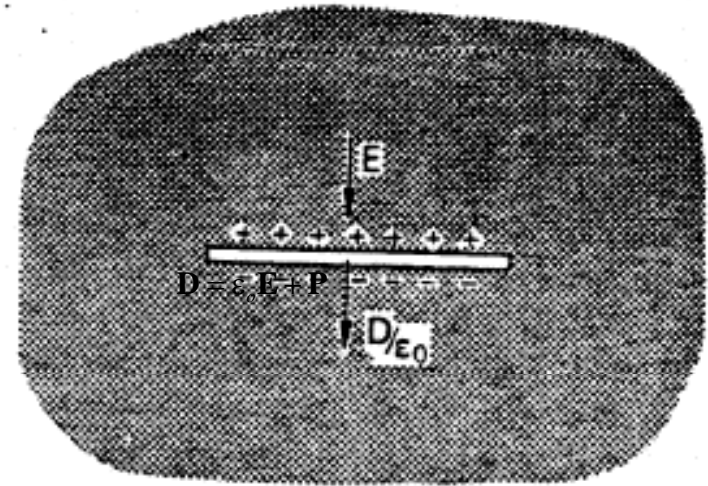
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$$



- Predominan las fuentes de rotacional de  $\mathbf{P} \rightarrow$  modifican  $\mathbf{D}$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P}$$



- Predominan las fuentes de divergencia de  $\mathbf{P} \rightarrow$  modifican  $\mathbf{E}$

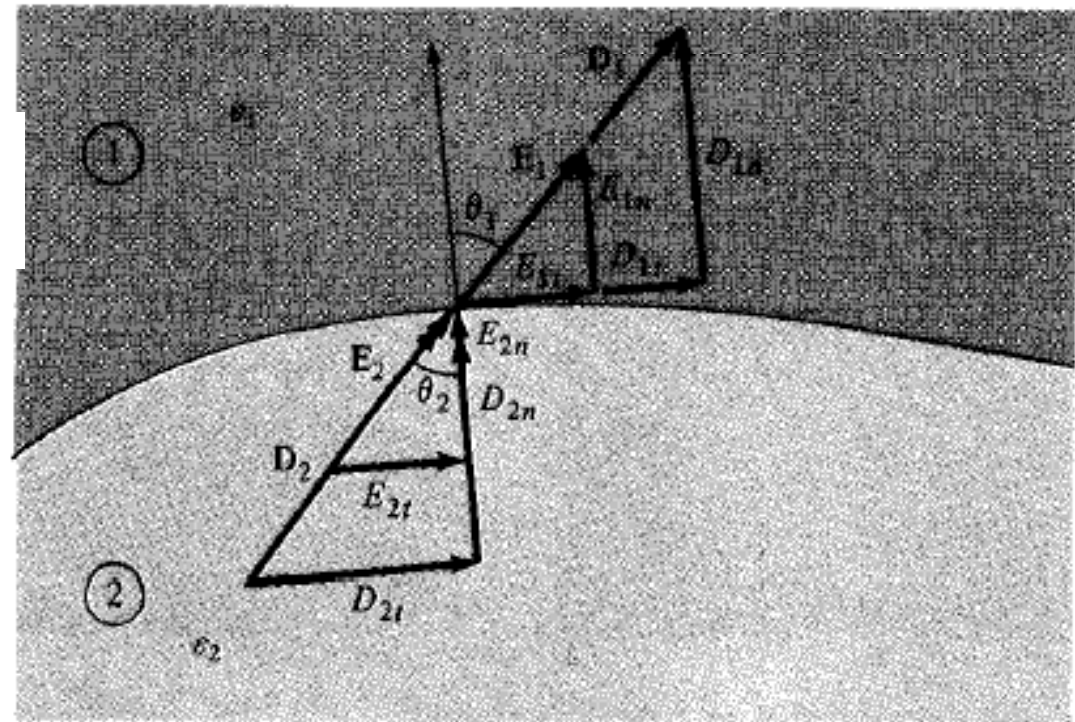
- Refracción en un dieléctrico

$$E_1 \sin \theta_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \sin \theta_2$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = D_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

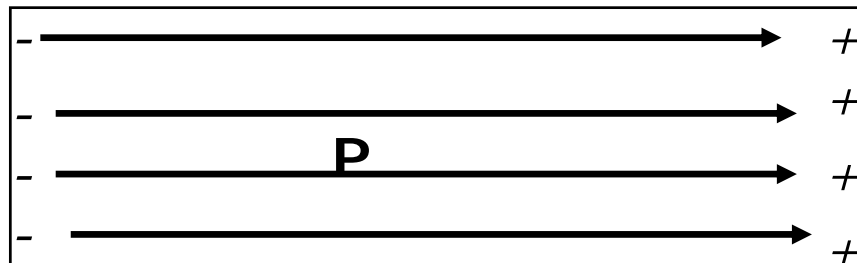
$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$



$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

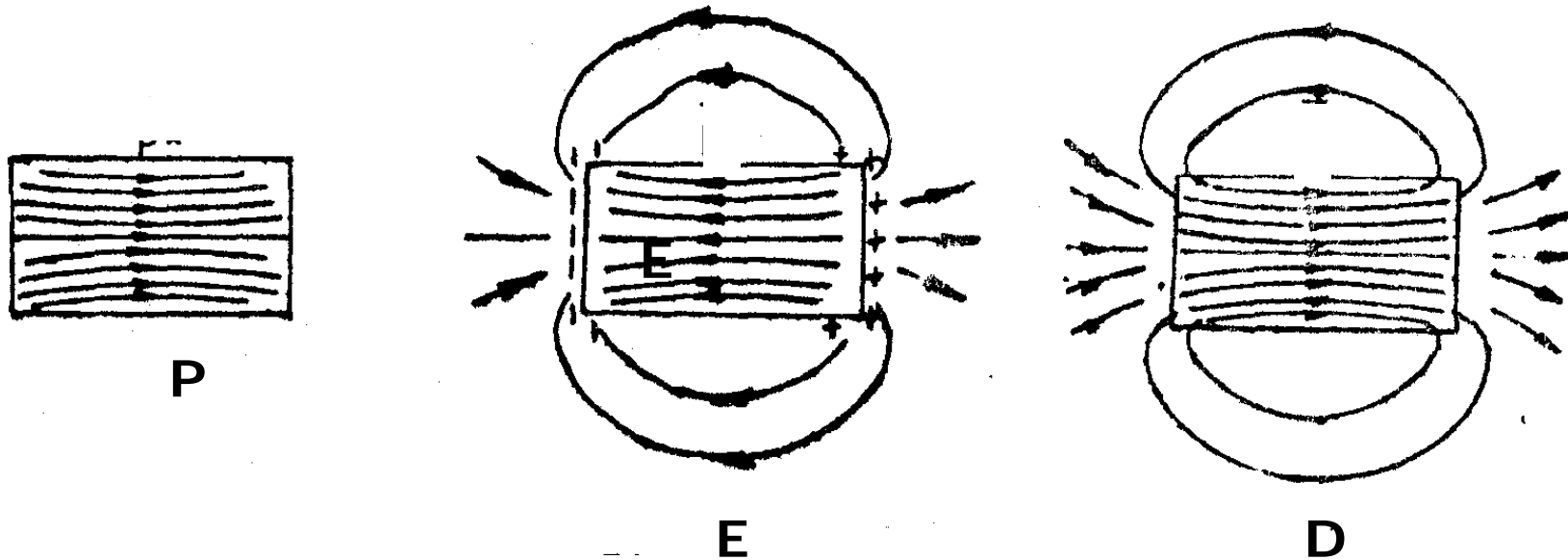
$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

- Barra de ELECTRETO o material FERROELECTRICO.
- Conserva la polarización aunque el campo externo haya desaparecido





- Líneas de campo en una barra polarizada con P



*Fuentes de  
Divergencia  
Líneas que salen  
y llegan a cargas*

*Fuentes de  
rotacional  
Líneas cerradas*