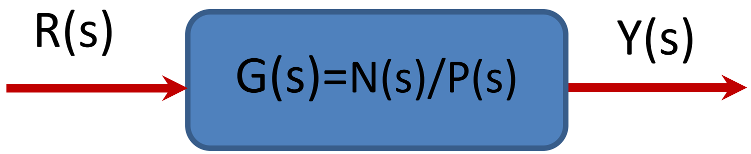
Control y Servomecanismos A

Control Automático I

Tema: Estabilidad – Lugar de las Raíces

Cursada Virtual 2020
F. Valenciaga

Conceptos de Estabilidad

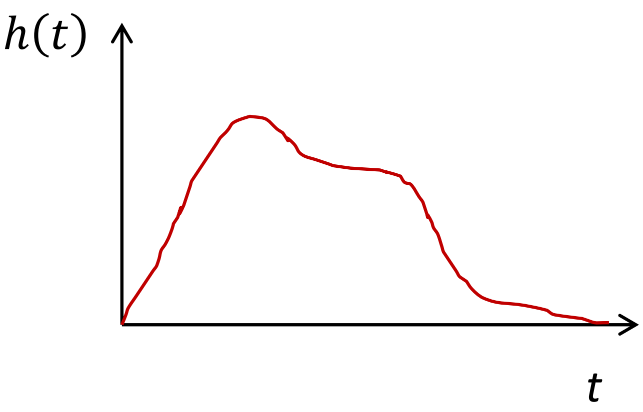


Entrada Acotada – Salida Acotada

Criterios de ESTABILIDAD $\longrightarrow$ BIBO

(Bounded Input – Bounded Output)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \quad \textit{donde} \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{G(s)}\} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} h(t) = 0$$



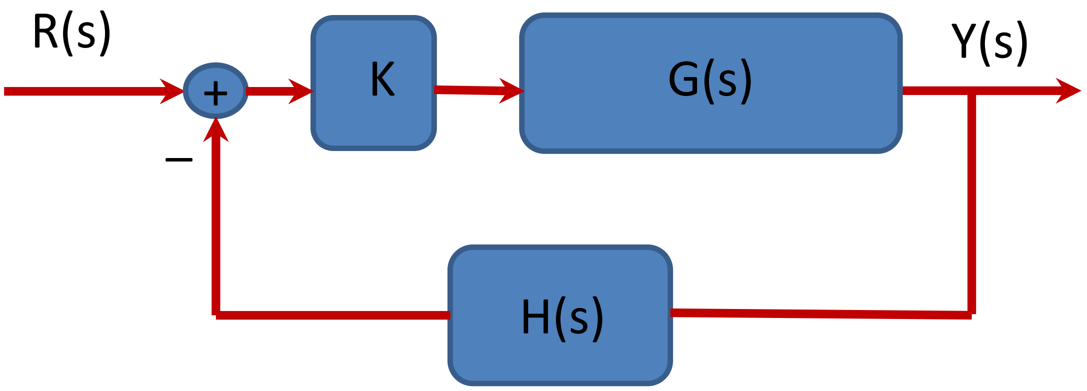
$$\frac{1}{(s+\alpha)^r} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{r-1}\ e^{-\alpha t}}{(r-1)!}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$$

$\alpha > 0$ → Polos de G(s) en el Sp. Izquierdo

Conceptos de Estabilidad

Transferencia Lazo Cerrado



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Ec. Característica

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

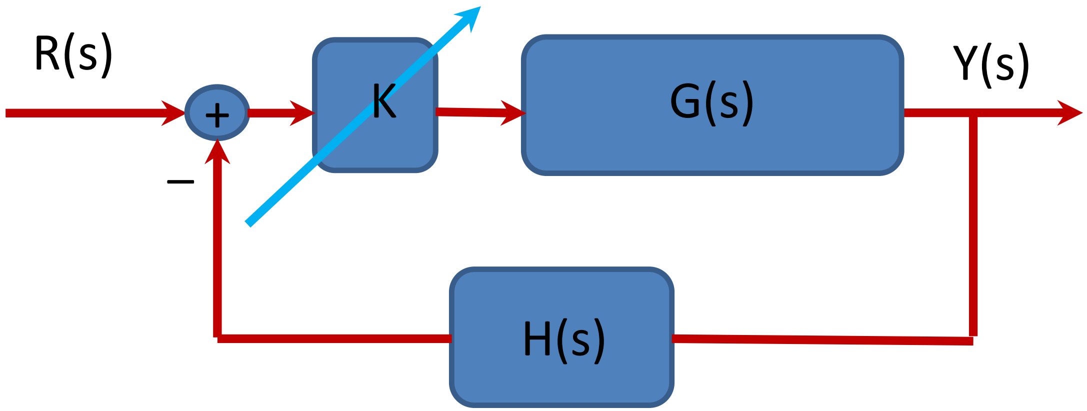
Análisis de ESTABILIDAD

- Criterio de Routh
- Lugar de las Raíces
- Criterio de Bode
- Criterio de Nyquist

Lugar de las Raíces

Método gráfico que permite visualizar en el plano complejo, el movimiento de los polos de lazo cerrado cuando se varía la ganancia K

Realimentación Negativa



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \longrightarrow 1 + KG(s)H(s) = 0$$

Ec. Característica

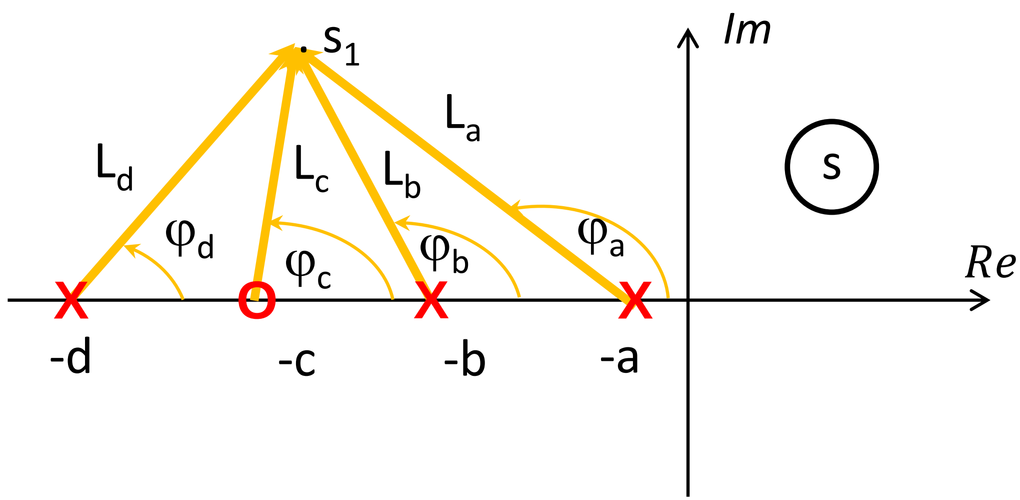
$$KG(s)H(s) = -1$$

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

$$KG(s)H(s) = \pm(2 * n + 1)180°$$

Lugar de las Raíces

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+c)}{(s+a)(s+b)(s+d)}$$



$$KG(s)H(s) = \frac{KL_c}{L_a L_b L_d} e^{-j(\varphi_a+\varphi_b+\varphi_d-\varphi_c)}$$

$$\frac{KL_c}{L_a L_b L_d} = 1$$

$$-(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_d - \varphi_c) = -180°$$

Lugar de las Raíces

Reglas Constructivas:

1. Llevar la transferencia GH(s) a la forma que llamamos de LR:

$$KG(s)H(s) = \frac{+K(s \pm c)}{(s \pm a)(s \pm b)(s \pm d)}$$

Realimentación Negativa

2. Para K=0 los polos de LC coinciden con los de LA
3. Para K=∞ los polos de LC coinciden con los ceros de LA
4. Número de ramas : Igual al orden del polinomio determinado por la Ec. Característica, es decir igual al nº de polos de GH(s)
5. Simetría: dado que el polinomio determinado por la Ec. Característica tiene coeficientes reales, las ramas que se abran deben ser simétricas con respecto al eje real.
6. Los tramos del eje real que pertenecen al Lugar de Raíces tienen un número impar de singularidades a la derecha.

LUGAR DE LAS RAÍCES

7. Asíntotas: los polos de LA (GH(s)) que no mueren en ceros de LA finitos viajan por ramas que mueren en ceros ficticios en el infinito para ganancias muy grandes. En cualquier punto muy lejano sobre esa asíntota , el aporte de cada singularidad será casi idéntico en fase (salvo por el signo que corresponda) y será igual al ángulo de la asíntota.

8. Puntos de Ruptura: en el punto en que la ramas se abren del eje real, el valor particular de ganancia determina que existen dos polos reales superpuestos. Por este motivo se cumplirá que:

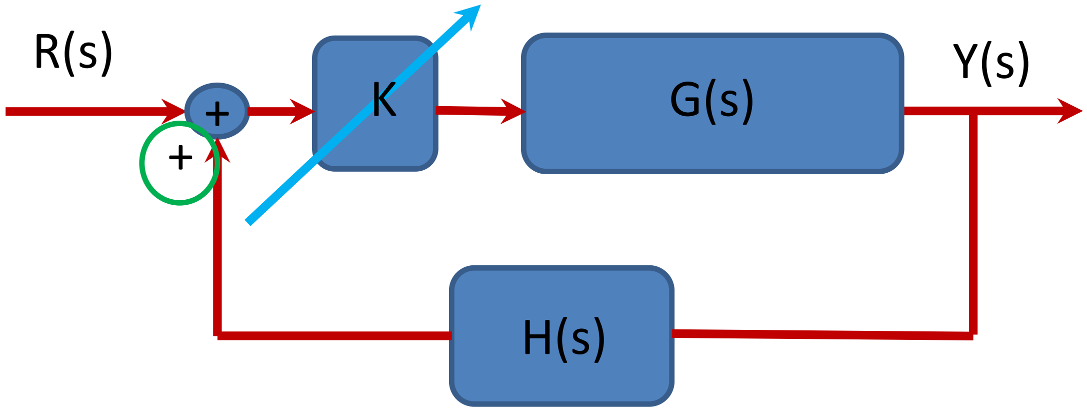
$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\big(1 + KG(s)H(s)\big) = 0 \longrightarrow \frac{d}{ds}\big(G(s)H(s)\big) = 0$$

9. Ángulos de llegada/salida

Lugar de las Raíces

Realimentación Positiva



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 - KG(s)H(s)}$$

Ec. Característica

$$1 - KG(s)H(s) = 0$$

$$KG(s)H(s) = 1$$

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

$$KG(s)H(s) = \pm(2 * n)180°$$

Lugar de las Raíces

Reglas Constructivas:

1. Llevar la transferencia GH(s) a la forma que llamamos de LR:

$$KG(s)H(s) = \frac{-K(s \pm c)}{(s \pm a)(s \pm b)(s \pm d)}$$

Realimentación Positiva

2. Para K=0 los polos de LC coinciden con los de LA

3. Para K=∞ los polos de LC coinciden con los ceros de LA

4. Número de ramas : Igual al orden del polinomio determinado por la Ec. Característica, es decir igual al nº de polos de GH(s)

5. Simetría: dado que el polinomio determinado por la Ec. Característica tiene coeficientes reales, las ramas que se abran deben ser simétricas con respecto al eje real.

6. Los tramos del eje real que pertenecen al Lugar de Raíces tienen un número par de singularidades a la derecha.

Lugar de las Raíces

7. Asíntotas: los polos de LA (GH(s)) que no mueren en ceros de LA finitos viajan por ramas que mueren en ceros ficticios en el infinito para ganancias muy grandes. En cualquier punto muy lejano sobre esa asíntota , el aporte de cada singularidad será casi idéntico en fase (salvo por el signo que corresponda) y será igual al ángulo de la asíntota.

8. Puntos de Ruptura: en el punto en que la ramas se abren del eje real, el valor particular de ganancia determina que existen dos polos reales superpuestos. Por este motivo se cumplirá que:

9. Ángulos de llegada/salida

Lugar de las Raíces

Regla de ORO!!!!!

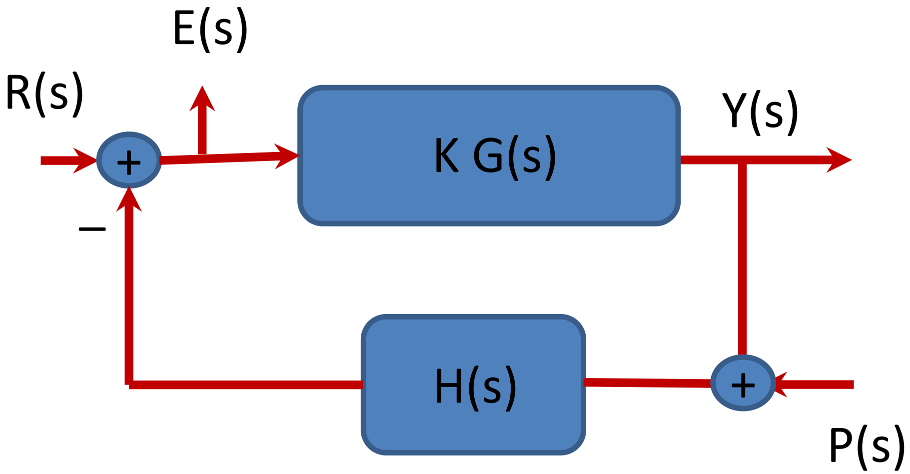
Llevar la transferencia GH(s) a la forma que llamamos de LR:

$$KG(s)H(s) = \frac{\pm K(s \pm c)}{(s \pm a)(s \pm b)(s \pm d)}$$

+ ⇒ $1 + KG(s)H(s) = 0$ $\quad KG(s)H(s) = \pm(2 * n + 1)180°$

- ⇒ $1 - KG(s)H(s) = 0$ $\quad KG(s)H(s) = \pm(2 * n)180°$

Cancelaciones e Inestabilidad Interna



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+14)(s+36)}$$

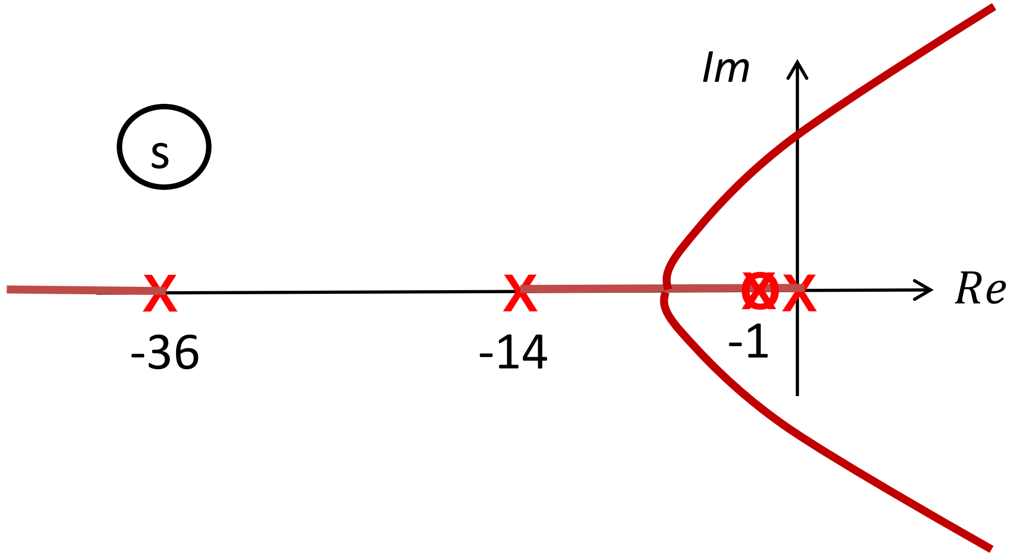
$$H(s) = \frac{(s+5)}{(s+1)}$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s+1)}{s(s+14)(s+36)}}{1+\frac{K(s+1)\quad (s+5)}{s(s+14)(s+36)(s+1)}} = \frac{K(s+1)}{s(s+14)(s+36)+K(s+5)}$$

$$T(s) = \frac{E(s)}{P(s)} = \frac{\frac{(s+5)}{(s+1)}}{1+\frac{K(s+1)\quad (s+5)}{s(s+14)(s+36)(s+1)}} = \frac{K(s+5)}{(s+1)[s(s+14)(s+36)+K(s+5)]}$$

Cancelaciones e Inestabilidad Interna

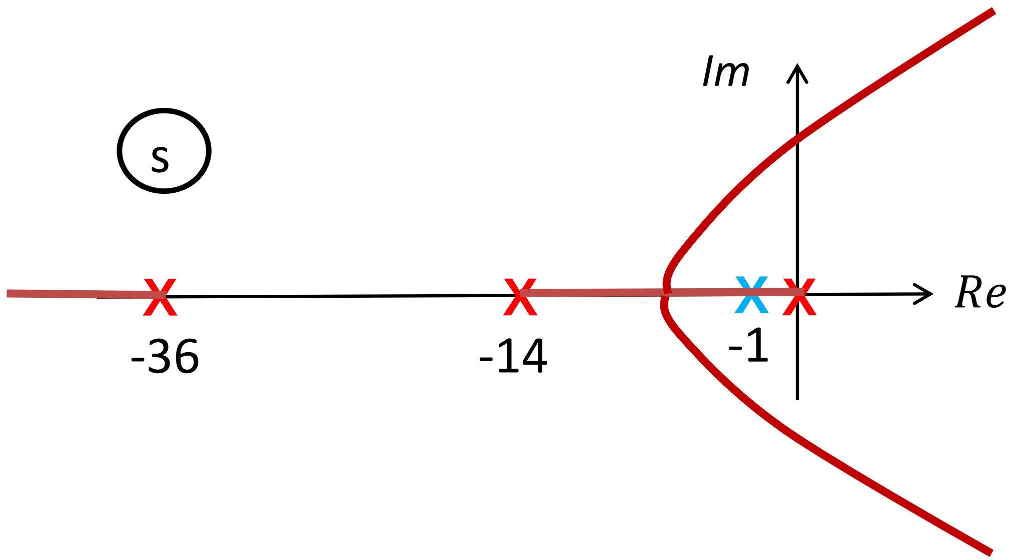
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s+1)}{s(s+14)(s+36)}}{1+\frac{K(s+1)\qquad(s+5)}{s(s+14)(s+36)(s+1)}} = \frac{K(s+1)}{s(s+14)(s+36)+K(s+5)}$$



Se observa la cancelación del cero y el polo en el semiplano estable. No hay evidencias en T(s)

Cancelaciones e Inestabilidad Interna

$$\mathrm{T}(s) = \frac{E(s)}{P(s)} = \frac{\frac{(s+5)}{(s+1)}}{1+\frac{K(s+1)\quad (s+5)}{s(s+14)(s+36)(s+1)}} = \frac{K(s+5)}{(s+1)[s(s+14)(s+36)+K(s+5)]}$$

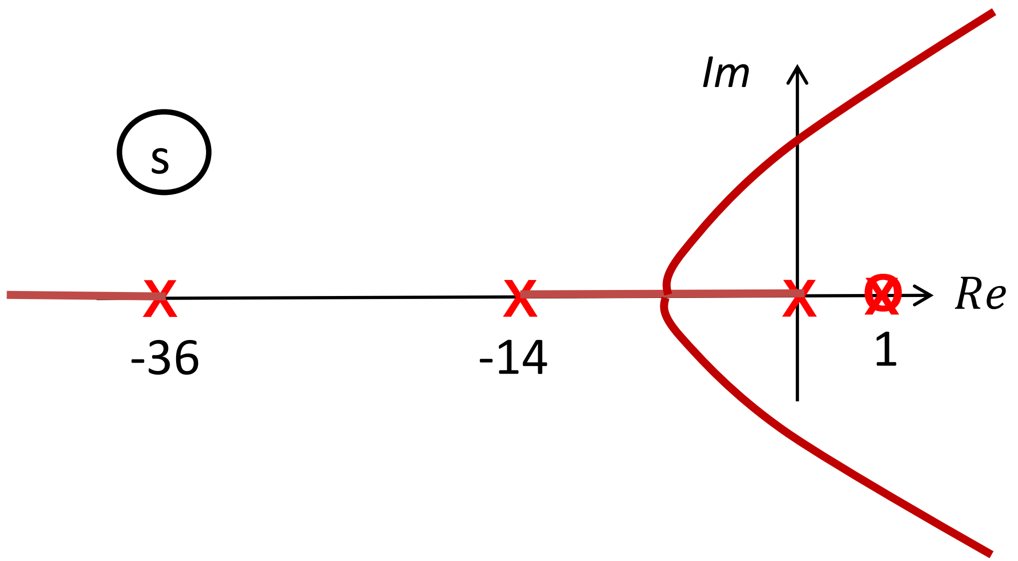


En este lugar de raíces se observa la aparición de un polo fijo (no se mueve cuando cambia la ganancia) que en este caso no altera la estabilidad.
Si bien se produce la cancelación, la estructura muestra que en T(s)=E(s)/P(s) hay un polo fijo en -1

Cancelaciones e Inestabilidad Interna

$$G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)} \qquad H(s) = \frac{(s+5)}{(s-1)}$$

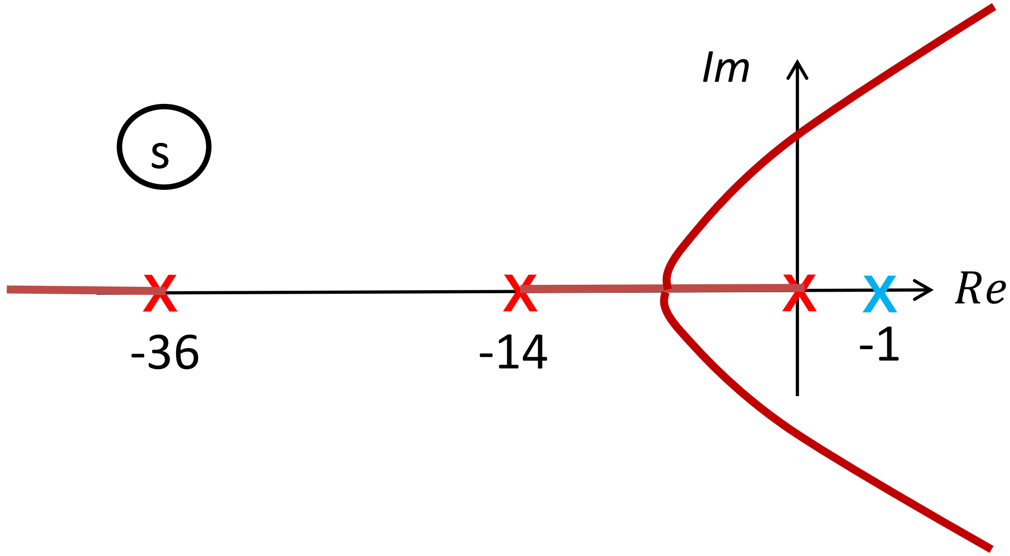
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)}}{1+\frac{K(s-1)\quad (s+5)}{s(s+14)(s+36)(s-1)}} = \frac{K(s-1)}{s(s+14)(s+36)+K(s+5)}$$



Se observa la cancelación del cero y el polo en el semiplano inestable sin consecuencias visibles en la transferencia de LC

Cancelaciones e Inestabilidad Interna

$$T(s) = \frac{E(s)}{P(s)} = \frac{\frac{(s+5)}{(s-1)}}{1+\frac{K(s-1)\quad\quad(s+5)}{s(s+14)(s+36)(s-1)}} = \frac{K(s+5)}{(s-1)[s(s+14)(s+36)+K(s+5)]}$$



En este lugar de raíces se observa la aparición de un polo de LC fijo (no se mueve cuando cambia la ganancia) que muestra la inestabilidad del sistema

Lugar de Raíces con otro Parámetro

$$KG(s)H(s) = \frac{Ke^{-s\tau}}{s(s+b)(s+d)} \Rightarrow KG(s)H(s) \approx \frac{K(1-s\tau)}{s(s+b)(s+d)}$$

Realizar el diagrama de LR para τ variante [0,∞)
En ese caso K debe ser fijo, de manera que elijo K=1

$$KG(s)H(s) \approx \frac{(1-s\tau)}{s(s+b)(s+d)}$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} \Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G^*(s)}{1+\tau G^*(s)H^*(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{(1-s\tau)}{s(s+b)(s+d)}}{1+\frac{(1-s\tau)}{s(s+b)(s+d)}} = \frac{(1-s\tau)}{s(s+b)(s+d)+1-s\tau}$$

Lugar de Raíces con otro Parámetro

$$T(s) = \frac{\dfrac{(1 - s\tau)}{s(s+b)(s+d)}}{1 + \dfrac{(1 - s\tau)}{s(s+b)(s+d)}} = \frac{(1 - s\tau)}{s(s+b)(s+d) + 1 - s\tau}$$

$$T(s) = \frac{(1 - s\tau)/[s(s+b)(s+d) + 1]}{1 - \tau s/[s(s+b)(s+d) + 1]}$$

$$\tau G^*(s)H^*(s) = -\frac{\tau s}{s(s+b)(s+d) + 1}$$