Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2022

Tema 4 - Análisis en Frecuencia de Señales y Sistemas Continuos

Santiago Rodríguez

Introducción

Análisis Frecuencial

Transformadas:

Señales	Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
A-Periódicas	Transformada de Fourier (TF) Transformada de Fourier (TF)	Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)
Periódicas	Serie de Fourier (SF) & TF	Serie Discreta de Fourier (SDF) & TFTD

Motivación:

- Análisis Espectral de Señales
- Análisis de la Respuesta de Sistemas

Transformada de Fourier

Motivación:

1) Respuesta de sistemas lineales a exponenciales complejas:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau$$

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 \tau} h(\tau)d\tau$$

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

con

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

Respuesta de sistemas lineales a exponenciales complejas

$H(f_0)$ es un número complejo (Ojo!! Tiene parte real e imaginaria - o módulo y fase -).

Conclusión: En un SLIT cuando entra una exponencial compleja, sale una exponencial compleja de la misma frecuencia. Pero su amplitud y fase cambian de acuerdo a $H(f_0)$, que depende del sistema en cuestión.

Las exponenciales complejas son *autofunciones* de los SLIT y los correspondientes valores $H(f_0)$ *autovalores*. Además:

- Aprovecha los conocimientos sobre funciones periódicas.
- Transformación (casi) biunívoca entre 2 dominios (o puntos de vista).
- Permite describir el reparto de energía o de potencia.

¿Qué ocurre cuando a un SLIT entra un coseno?

Transformada de Fourier

Definición:

Transformada de Fourier directa (o integral de Fourier o ecuación de análisis):

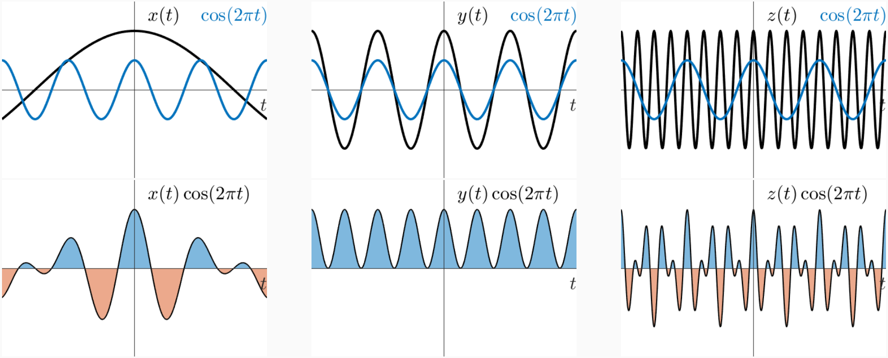
$$\boxed{X(f) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

Transformada de Fourier inversa (o ecuación de síntesis):

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df}$$

Interpretación:

Medida de parecido con exponenciales complejas de frecuencia fija:



$\int x \cos \approx 0$ $\quad$ $\int y \cos > 0$ $\quad$ $\int z \cos \approx 0$

Transformada de Fourier - Existencia

Condiciones de Dirichlet:

Si queremos que:

$$X(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}(t)\}(f)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f)\}(t)$$

Es suficiente que se cumplan simultáneamente:

- x es absolutamente integrable $\int |x| < \infty$.
- x tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- x tiene un número finito de discontinuidades finitas dentro de cualquier intervalo finito.

Transformada de Fourier - Existencia 2

Si $x(t)$ es discontinua en t_0 se obtiene:

$$\hat{x}(t_0) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f)\}(t_0) = \frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$$

Hay señales de uso frecuente (constantes, escalón, senoidales) que no cumplen con las condiciones de Dirichlet (CD). Para incluir a esas señales se recurre al uso de distribuciones (delta de Dirac).

Transformada de Fourier - Simetrías

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad \text{ó} \qquad x \supset X$$

Como $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\text{sen}(2\pi ft)$, $x = p_R + jp_I + n_R + jn_I$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_R + jp_I + n_R + jn_I)\,(\cos(2\pi ft) - j\,\text{sen}(2\pi ft))\,dt$$

y usando que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{par} f_{impar} = 0$ se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} x = & p_R & + & jp_I & + & n_R & + & jn_I \\ & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} \\ X = & P_R & + & jP_I & + & jN_I & + & N_R \end{array}$$

Si x es real $\Leftrightarrow$ X es Hermítica, es decir $X(f) = X^*(-f)$

Transformada de Fourier - Propiedades 1

Dualidad: Si $x \supset X$

1. $x^*(t) \supset X^*(-f)$
   - Demo: Plantear def. de $\mathcal{F}\{x(t)^*\}(f)$
2. $X(-t) \supset x(f)$
   - Demo: Plantear def. de $\mathcal{F}\{X(t)\}(f)$, reflejar f y luego intercambiar roles f y t.
   - *x par* $\rightarrow$ *X par* entonces $x(t) \supset X(f)$ y también $X(t) \supset x(f)$
3. $x(-t) \supset X(-f)$
   - Demo: Plantear def. de $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}(t)$, reflejar t y luego reflejar f.

Linealidad: Si $x \supset X$ e $y \supset Y$ entonces

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \supset \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

Transformada de Fourier - Propiedades 2

Traslación: Si $x \supset X$, $t_0 \in \Re$ y $f_0 \in \Re$ entonces

$$x(t - t_0) \supset X(f)e^{-j2\pi t_0 f}$$

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \supset X(f - f_0)$$

Similaridad: Si $x \supset X$ y $a \in \Re$ entonces

$$x(at) \supset \frac{1}{|a|}X(f/a)$$

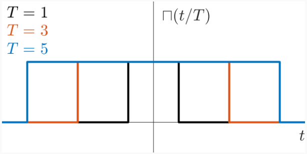
Traslación y similaridad juntos: Si $x \supset X$ y $a, b \in \Re$ entonces

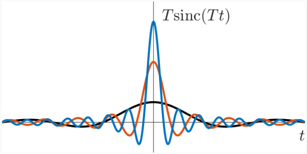
$$x(at - b) = x\left(a(t - b/a)\right) \supset \frac{1}{|a|}X(f/a)e^{-j2\pi f \frac{b}{a}}$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

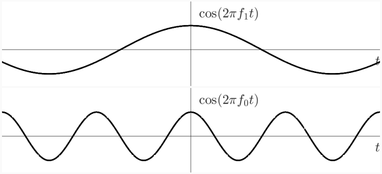
Si $a > 1$, $x(at)$ se contrae; pero $X\left(\frac{f}{a}\right)$ se expande.

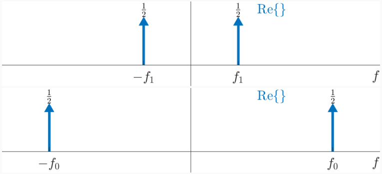
Ejemplo: Si $T > 0$, entonces $\sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \supset T\,\mathrm{sinc}(fT)$





Variaciones más rápidas $\Rightarrow$ contenido en mayores frecuencias.





Transformada de Fourier - Propiedades 3

Derivación: Si $x \supset X$, entonces

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) \supset j2\pi f X(f)$$

$$-j2\pi t x(t) \supset \frac{dX}{df}(f) = X'(f)$$

Notar que al derivar se incrementan las altas frecuencias.

Integración: Si $x \supset X$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \supset \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$$

¿Qué representa $X(0)$? ¿Cuándo tiene sentido aplicar esta propiedad?

Transformada de Fourier - Propiedades 4

Convolución: Si $x \supset X$ e $y \supset Y$ entonces

$$\{x * y\}(t) \supset X(f)Y(f)$$

- Demo: Plantear la convolución en el tiempo y tomarle $\mathcal{F}\{\}(f)$.

Multiplicación: Si $x \supset X$ e $y \supset Y$ entonces

$$x(t)y(t) \supset \{X * Y\}(f)$$

- Demo: Plantear la convolución en el espectro y tomarle $\mathcal{F}^{-1}\{\}(f)$.

Transformada de Fourier - Algunos ejemplos 1

- $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$

$$e^{-\alpha t}u(t) \supset \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \quad \alpha > 0$$

- $x(t) = e^{-\alpha |t|}, \quad \alpha > 0$

$$e^{-\alpha |t|} \supset \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad \alpha > 0$$

- $x(t) = \delta(t)$

$$\delta(t) \supset 1$$

- $x(t) = 1$

$$1 \supset \delta(f) \quad \textit{por dualidad}\ (2)$$

Transformada de Fourier - Algunos ejemplos 2

- Cajón: $x(t) = \sqcap(t)$

$$\sqcap(t) \supset \mathrm{sinc}(f) = \frac{\mathrm{sen}(\pi f)}{\pi f}$$

- Signo: $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$

$$\mathrm{sgn}(t) \supset \frac{1}{j\pi f} = \frac{-j}{\pi f}$$

$$\frac{1}{j\pi t} \supset \mathrm{sgn}(f)$$

- Escalón: $x(t) = u(t)$, (no es módulo integrable!!)

$$u(t) = \frac{1}{2}\,(1 + \mathrm{sgn}(t))$$

$$u(t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$$

Transformada de Fourier - Algunos ejemplos 3

- Exponencial compleja: $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 \in \Re$

$$e^{j2\pi f_0 t} \supset \delta(f - f_0)$$

- Coseno: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

- Seno: $x(t) = \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$

$$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{j}{2}\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)$$

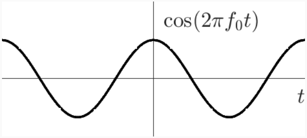
- Pulso gaussiano: $x(t) = e^{-\pi t^2}$

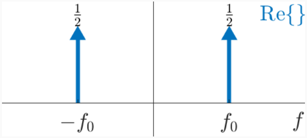
$$e^{-\pi t^2} \supset e^{-\pi f^2}$$

Transformada de Fourier - Algunos ejemplos 3

Coseno

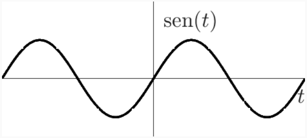
$$\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

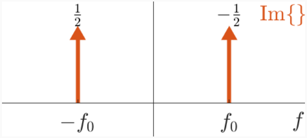




Seno

$$\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{j}{2}\left(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)\right)$$





Transformada de Fourier - Modulación

Si $x \supset X$ y $f_0, t_o \in \Re$ entonces

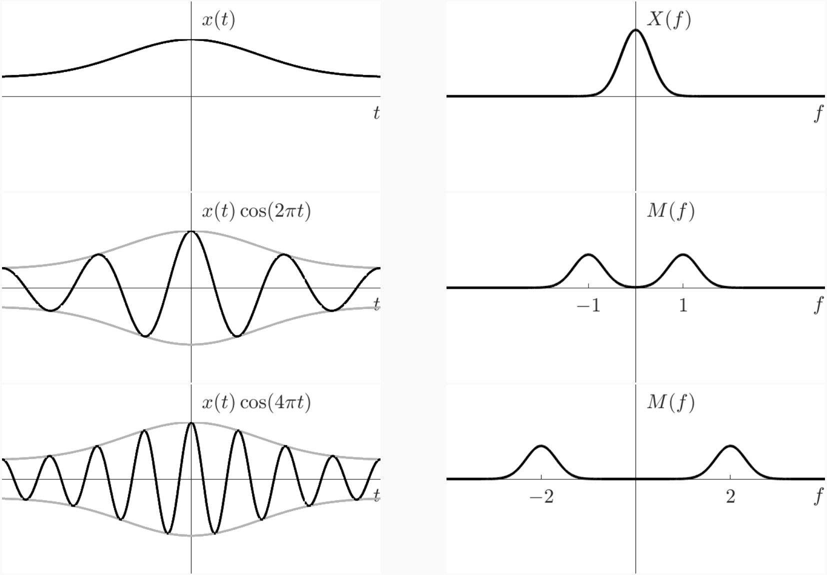
$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(X(f+f_0) + X(f-f_0)\right)$$

$$x(t)\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{j}{2}\left(X(f+f_0) - X(f-f_0)\right)$$

De forma dual

$$\frac{1}{2}\left(x(t+t_0) + x(t-t_0)\right) \supset X(f)\cos(2\pi f t_0)$$

Propiedades de la Transformada de Fourier



Serie de Fourier de Señales Continuas

Serie de Fourier

Definición:

Si $x(t)$ es periódica de período T y cumple ciertas condiciones (CD), entonces se puede representar como:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}}$$

c_k son los coeficientes de la serie y se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi kt/T}dt$$

Notar: Es una descomposición en suma de exponenciales complejas armónicas.

Antes de seguir...

Una señal periódica particular: El peine

Habíamos definido a la función peine como

$$\text{Ш}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-i)$$

Es simple ver que es una función periódica de período $T = 1$.

Aunque no cumple las condiciones de Dirichlet, podemos intentar representarla en serie de Fourier.

Para ello, calculamos los coeficientes:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi kt/T}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(t)e^{-j2\pi kt/T}dt = 1$$

La serie de Fourier del peine

Por lo tanto, tenemos que

$$\text{Ш}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt}$$

Notemos que la última suma no converge en el sentido usual. Hemos "descubierto" una nueva igualdad en sentido distribucional

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt}$$

igualdad conocida como de Poisson (o de Pascal).

La transformada de Fourier del peine

Usando los resultados anteriores, podemos calcular fácilmente la transformada de Fourier del peine

$$
\begin{aligned}
TF\{\text{Ш}(t)\} &= TF\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-i)\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} TF\{\delta(t-i)\} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi if} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k)
\end{aligned}
$$

donde en el último paso usamos la igualdad de Poisson.

O sea, mostramos que

$$\text{Ш}(t) \supset \text{Ш}(f)$$

Transformada de Fourier de señales periódicas

Transformada de Fourier de señales periódicas

Esto último es un caso particular de un resultado más general.

Si $x(t)$ es periódica de período T, puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

Utilizando la linealidad de la TF y la propiedad de traslación resulta

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

Las señales periódicas tienen espectro de líneas (aparecen deltas de Dirac).

La separación de las deltas es inversamente proporcional al período.

Respuesta en frecuencia de SLITs

Recordar

Respuesta de SLITs a exponenciales complejas:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

$H(f_0)$ es un número complejo (Ojo!! Tiene parte real e imaginaria - o módulo y fase -).

Conclusión:

En un SLIT cuando entra una exponencial compleja, sale una exponencial compleja de la misma frecuencia. Pero su amplitud y fase cambian de acuerdo a $H(f_0)$, que depende del sistema en cuestión.

Respuesta en Frecuencia de SLIT

Si variamos la frecuencia de la exponencial compleja de entrada, obtenemos

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

que es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional del sistema.

Por este motivo, $H(f)$ se conoce como la **respuesta en frecuencia** del sistema.

Respuesta en Frecuencia de SLIT

Sea un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y la salida de dicho sistema respectivamente. Como

$$y(t) = \{x * h\}(t)$$

Utilizando propiedades de la TF llegamos a que

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

donde $H(f)$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Atención: ¿Siempre existe $H(f)$?

Respuesta en Frecuencia de SLIT - Ejemplo

Analicemos un circuito RC con $R = 10\,k\Omega$ y $C = 10\,\mu F$.

$x(t)$ es la tensión de la fuente de alimentación (entrada).

$y(t)$ es la tensión en el capacitor (salida). La ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito es:

$$y(t) + RCy'(t) = x(t)$$

Aplicando TF a ambos lados de la igualdad:

$$Y(f) + j2\pi fRCY(f) = X(f)$$

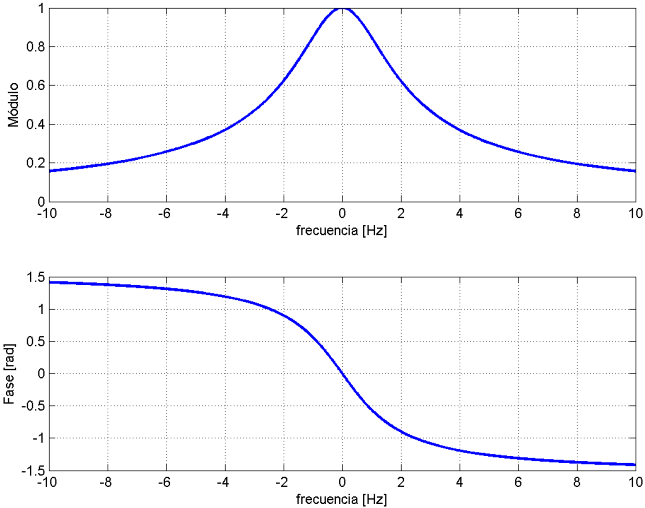
Despejando, la **respuesta en frecuencia** resulta:

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Antitransformando podemos encontrar $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

Respuesta en Frecuencia de SLIT - Ejemplo (cont.)



Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teorema de Rayleigh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Respuesta de un SLIT a señales periódicas

Respuesta de un SLIT a señales periódicas

Sea un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$. Sea $x(t)$ una señal periódica de período T la entrada al sistema.
¿Cómo resulta la salida?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

Utilizando superposición (SLIT) resulta

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(k/T) e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

¿Qué se puede decir de la señal de salida? ¿Es períodica?
¿Cuáles son los coeficientes de su SF?