ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 8

Transformada de Laplace (TL) y Diagrama de Bode

Diverge

$e^t \to$?

NO xq' hay que ver la div

RDC? xq' bien?

1. **TL bilateral y sus propiedades**

   a) Calcule la TL de $x(t) = e^{-t}\,u(t)$ y de $y(t) = -e^{-t}\,u(-t)$

      I. Indique cuál es la región de convergencia para $X(s)$ e $Y(s)$.

      II. ¿Hay polos? ¿Dónde? (para $X(s)$ e $Y(s)$).

      III. Relacione la unilateralidad de estas señales con sus regiones de convergencia (RDC).

      ? IV. De acuerdo a las RDC ¿Tienen $x(t)$ e $y(t)$ TF ? Verifique calculando $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\,dt$.

   b) ¿Puede calcularse la TL bilateral de una constante ($x(t) = 1$ por ejemplo)? Identifique otras señales que poseen TF (no absolutamente convergente) aunque no poseen TL.

   c) Determine la TL (con RDC) y el diagrama polo-cero para cada una de las siguientes señales.

      ?

      I. $x(t) = 5\,e^{3\,t}\,u(t)$ II. $x(t) = -4\,e^{-3\,t}\,u(t)$

      Condición de Convergencia

      III. $x(t) = u(t-2)$ IV. $x(t) = \delta(t-1)$

      → $S > j2\pi f_0$

      V. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)\,u(t)$ $f_0, \phi \in \mathbb{R}$ VI. $x(t) = \sqcap(t)$

      Cuando sea posible calcule las TF de estas señales a partir de las TL que ya conoce.

   d) Halle $x(t)$ a partir de las siguientes $X(s)$ (no olvide las RDC):

      I. $X(s) = \dfrac{1}{s+2}$ $Re(s) < -2$ II. $X(s) = \dfrac{s}{s+2}$ $Re(s) > -2$

      III. $X(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+2}$ $Re(s) > -2$ IV. $X(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$ $Re(s) > 0$

      V. $X(s) = \dfrac{(s+4)}{s^2+5s+6}$ $Re(s) > -2$ VI. $X(s) = \dfrac{1}{s^2-3s}$ $0 < Re(s) < 3$

   e) La señal $x(t)$ unilateral derecha tiene la siguiente TL: $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$

      Halle las TL de:

      Lo importante es $\frac{dX(s)}{ds}$?

      I. $y(t) = t\,x(t)$ II. $y(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

      III. $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ IV. $y(t) = \{x * x\}(t)$

      xq cambia la RDC?

      V. $y(t) = e^{-3t}x(t)$ → RDC?

2. **TL y SLITs**

   a) Un sistema SLIT con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ está descripto por $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$

      I. Determine la trasferencia del sistema $H(s)$ y dibuje un diagrama cero-polar.

      II. Halle la respuesta impusional si se sabe que el sistema es estable.

      III. Idem I si el sistema es causal.

      IV. Idem I si el sistema no es causal, ni estable

   b) La transferencia de un SLIT causal es $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$

      I. Grafique los polos y ceros e indique la RDC.

      II. Halle la respuesta impulsional.

      III. Calcule la respuesta cuando la entrada es $x(t) = e^{-|t|}$, $\forall t$.

      IV. Halle el valor asintótico de la salida cuando se aplica como entrada $x(t) = u(t)$.

c) La respuesta de un SLIT a un escalón unitario es $(1 - e^{-t} - te^{-t})\, u(t)$. La salida de este sistema a una cierta entrada $x(t)$ desconcida es $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})\, u(t)$. Halle $x(t)$.

3. **Introducción a Bode**

Históricamente, los diagramas de Bode se han utilizado para realizar una estimación asintótica (bastante buena en general) de la respuesta en frecuencia de un SLIT sin utilizar herramientas de cómputo, las cuales eran muy limitadas en la época[1]. Aun hoy en día se utilizan, particularmente, en aplicaciones de Control, debido a que existen muchas técnicas de diseño de controladores para estabilizar sistemas basados en este tipo de diagramas. Veremos de realizar algunos ejercicios a mano para asentar la teoría y luego verificaremos los resultados utilizando la PC.

a) A continuación deberá graficar varios diagramas de Bode. En cada caso, elija adecuadamente qué valores de frecuencia considerar para que el gráfico sea representativo. Utilice para el eje de frecuencias la pulsación $\omega = 2\pi f$ en escala logarítmica. Para el eje de amplitud de la magnitud considere una escala lineal en $[dB]$ mientras que para la fase, utilice una escala lineal en grados sexagesimales [°].

   I. Grafique la respuesta de magnitud y fase asintótica para una constante, un polo en el origen y un cero en el origen, es decir, $H_1(s) = K$, $H_2(s) = 1/s$ y $H_3(s) = s$.

   II. Ahora repita para un polo y un cero simple. Considere $H_4(s) = 1/(s + 10)$ y $H_5(s) = s + 2$.

En nuestro estudio, todas las transferencias a analizar consistirán en cocientes de polinomios con coeficientes reales. Las raíces de dichos polinomios, que serán los ceros y polos de la función de transferencia, podrán ser entonces de dos formas: reales o complejas conjugadas. Consideramos un factor de segundo orden de una función de transferencia al polinomio $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento y ω_n es la pulsación natural.

   I. Obtenga las raíces de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ y grafíquelas en el plano $s \in \mathbb{C}$ para $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi > 1$ y $\xi < 1$. Para el caso en que las raíces sean complejas conjugadas, a la parte imaginaria ω se la denomina *frecuencia amortiguada*.

   II. Grafique la respuesta de magnitud y fase asintótica para $H_6(s) = 1/(s^2 + 3s + 25)$ y para $H_7(s) = 25/(s^2 + 3s + 25)$.

b) Repita *a)* utilizando Matlab para corroborar sus resultados. Por ejemplo, si en Matlab quisiera realizar el diagrama de Bode de $Y(s) = 1/(s + 5)$:

```
Y = tf([1],[1 5]) % Defino la Y(s) con los coef. del num y den.
w = logspace(-1,3,1e4); % Explicito las w donde graficar. 'help logspace'.
bode(H,w);grid on
```

4. **Diagramas de Bode**

A partir de lo realizado en el ejercicio anterior, estamos en condiciones de realizar diagramas de Bode de transferencias que sean combinación de los casos de transferencias simples ya analizados.

a) Para las siguientes transferencias:

$$H_a(s) = \frac{100}{s(s+1)(s/10+1)} \qquad H_b(s) = \frac{5s}{s^2+3s+25} \qquad H_c(s) = 5\frac{(1+0{,}25s)(1+0{,}1s)}{(s+1)(1+0{,}025s)}$$

   I. Grafique la respuesta de magnitud asintótica de línea recta.

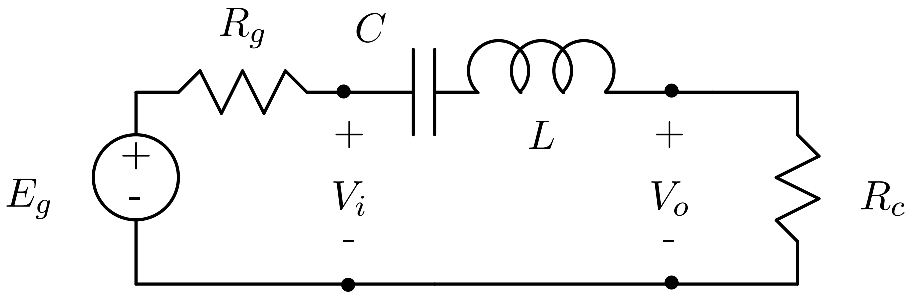
   II. Repita para la respuesta de fase.

   III. Utilice la PC para graficar la curva verdadera superpuesta a las aproximaciones.

b) Considere que la señal $x(t) = 2cos(24t + \pi/4)$ ingresa a un SLIT con transferencia $H_c(s)$. La salida del SLIT ante esta entrada es $y(t)$. Utilice el diagrama de Bode construido en 4*a*I para obtener una expresión aproximada de $y(t)$.

c) En la figura se muestra el esquema de un filtro pasa-banda pasivo.

[1] Estos diagramas fueron creados en los años 30 por Hendrik Wade Bode.



I. Verifique que su transferencia es $H(s) = \frac{V_o(s)}{E_g(s)} = \frac{(K\omega_0/Q)s}{s^2+(\omega_0/Q)s+\omega_0^2}$, con $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{\omega_0 L}{R_g+R_c}$ y $K = \frac{R_c}{R_g+R_c}$. Grafique el diagrama cero-polar si se considera que $4Q^2 > 1$. **Ayuda:** Recuerde que puede plantear la ecuación diferencial de este SLIT y luego aplicar TL a la misma.

II. Realice el diagrama de Bode para $H(s)$ si $R_g = R_c = 50\Omega$, $Q = 1,6$ y $\omega_0 = \frac{1}{LC} = 2\pi(970\ kHz)$.

III. Si $E_g(t) = Asen(2\pi f_1 t)$ con $f_1 = 1300\ kHz$, ¿Cuántos dB aproximadamente atenúa este filtro a $E_g(t)$? ¿Qué fase en radianes tiene aproximadamente $V_o(t)$?

IV. Corrobore los resultados obtenidos con la PC.

Algunos resultados

1. *a)* $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $Re(s) > -1$ $\qquad$ $Y(s) = \frac{1}{s+1}$, $Re(s) < -1$

   b) No. $x(t) = \text{sgn}(t)$, $y(t) = \cos(\omega_0 t)$, etc.

   c) I. $X(s) = \frac{5}{s-3}$, $Re(s) > 3$ $\qquad$ II. $X(s) = \frac{-4}{s+3}$, $Re(s) > -3$ $\qquad$ III. $X(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$, $Re(s) > 0$

   IV. $X(s) = e^{-s}$, $Re(s) > -\infty$ $\qquad$ V. $X(s) = \frac{s\cos(\phi) - 2\pi f_0 \operatorname{sen}\phi}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$, $Re(s) > 0$

   VI. $X(s) = \frac{\operatorname{senh}(s/2)}{s/2}$, $-\infty < Re(s) < \infty$

   d) I. $x(t) = -e^{-2t}u(-t)$ $\qquad$ II. $x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$ $\qquad$ III. $x(t) = e^{-2t+2}u(t-1)$

   IV. $x(t) = \cos 2tu(t)$ $\qquad$ V. $x(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ $\qquad$ VI. $x(t) = -\frac{1}{3}e^{3t}u(-t) - \frac{1}{3}u(t)$

   e) I. $Y(s) = \frac{s^2 + 2s - 1}{(s^2 + 5s + 6)^2}$, $Re(s) > -2$ $\qquad$ II. $Y(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^2 + 5s + 6}$, $Re(s) > -2$

   III. $Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s^2 + 5s + 6)}$, $Re(s) > 0$ $\qquad$ IV. $Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^2 + 5s + 6)^2}$, $Re(s) > -2$

   V. $Y(s) = \frac{s+4}{s^2 + 11s + 30}$, $Re(s) > -5$

2. *a)* I. $H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$ $\qquad$ II. $h(t) = -\frac{1}{3}(e^{2t}u(-t) + e^{-t}u(t))$

   III. $h(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})u(t)$ $\qquad$ IV. $h(t) = -\frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})u(-t)$

   b) I. $Re(s) > -1$ $\qquad$ II. $h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$

   III. $h(t) = \frac{2}{5}(e^{t}u(-t) + e^{-t}(\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t))u(t))$ $\qquad$ IV. $y(\infty) = H(0) = \frac{1}{2}$

   c) $x(t) = 2\,(1 + 2e^{-3t})u(t)$