ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES - AÑO 2023

Práctica 9

Transformada Z (TZ)

1. **TZ bilateral y sus propiedades**

   a) Determine la TZ de las siguientes secuencias. Grafique el diagrama cero-polar y RDC. Indique además, en cada caso, si existe la TFTD y obténgala a partir de la TZ cuando sea posible.

   I. $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$
   II. $x[n] = u[n-3]$
   III. $x[n] = (\frac{1}{4})^n\, u[n]$
   IV. $x[n] = (\frac{1}{4})^{-n}\, u[-n]$
   V. $x[n] = (\frac{1}{4})^{|n|}$
   VI. $x[n] = (\frac{1}{4})^n\, n\, u[n]$
   VII. $x[n] = \sqcap_5[n]$
   VIII. $x[n] = \wedge_5[n] = \left\{\sqcap_5 * \sqcap_5\right\}[n]$
   IX. $x[n] = \cos(2\pi n/5)$
   X. $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi)\, u[n] \qquad f_0, \phi \in \mathbb{R}$

   b) Determine la secuencia $x[n]$ a partir de $X(z)$:

   I. $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| < \dfrac{1}{2}$
   II. $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \dfrac{1}{2}$
   III. $X(z) = \dfrac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ $x[n]$ es unilateral der.
   IV. $X(z) = \dfrac{1}{1+2\,z^{-1}} \qquad |z| < 2$
   V. $X(z) = \dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ $x[n]$ es unilateral izq.
   VI. $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$, $\exists$ TFTD$\{x[n]\}$

   c) Para cada uno de las siguientes casos dibuje en un diagrama cero-polar las posibles regiones de convergencia de $X(z)$. Indique las características de las secuencias correspondientes a cada una.

   I. $X(z) = \dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$
   II. $X(z) = \dfrac{1}{z^2-2z+\frac{3}{4}}$
   III. $X(z) = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{z^2-z-\frac{1}{2}}$
   IV. $X(z) = \dfrac{z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}}$

   d) Sea $X(z)$ la TZ de la secuencia $x[n]$ en $a < |z| < b$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a < b$. Halle las TZ y sus RDC para las secuencias definidas a continuación.

   I. $y[n] = x[-n]$.
   II. $y[n] = a^n\, x[n] \;\; a \in \mathbb{R}^+$.
   III. $y[n] = e^{jw_0 n}\, x[n] \;\; w_0 \in \mathbb{R}^+$
   IV. $y[n] = z_0^n\, x[n] \;\; z_0 \in \mathbb{C}$
   V. $y[n] = n\, x[n]$
   VI. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

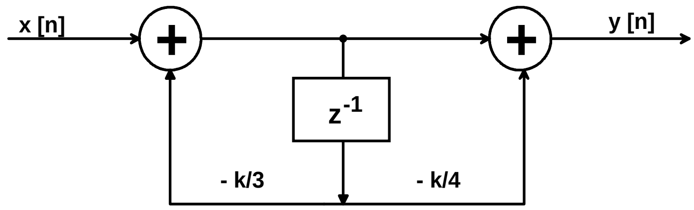
2. **TZ y SLIDs**

   a) Un SLID causal es descripto por $y[n] = y[n-1] + 3/4\, y[n-2] + 2x[n]$

   I. Encuentre la transferencia del sistema $H(z)$, su RDC y grafique su diagrama cero-polar.
   II. Calcule una expresión analítica para la respuesta impulsional $h[n]$.
   III. Calcule $h[0]$ usando el teorema del valor inicial. ¿Coincide su resultado con el de II?
   IV. Halle la secuencia de salida para la entrada con transformada Z dada por $X(z) = z^{-2}(z-3/2)$.
   V. Modifique la región de convergencia para que el sistema sea anticausal.
   Escriba la ecuación recursiva para ese caso.

   b) Un SLID con entrada $s[n]$ y salida $x[n]$ es descripto por $x[n] = s[n] - e^{-8\alpha}\, s[n-8], \;\; 0 < \alpha < 1$. Halle $H_1(z) = X(z)/S(z)$ y $H_2(z) = Y(z)/X(z)$ tal que $y[n] = s[n]$ (el sistema inverso). Indique todas las posibles RDC de H_2 e indique si el sistema es o no causal y estable en cada una.

c) Considere la estructura de filtro digital de la figura.



I. Halle $H(z)$ para este filtro causal. Grafique el diagrama cero-polar e indique la RDC.
II. Determine la respuesta en frecuencia del filtro.
III. ¿Para qué valores de k el sistema es estable?
IV. Halle $y[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$ para todo n.
V. Halle $\lim_{n\to\infty} y[n]$ por el teorema del valor final y compruebe el resultado anterior.

3. **Identificación con moraleja**

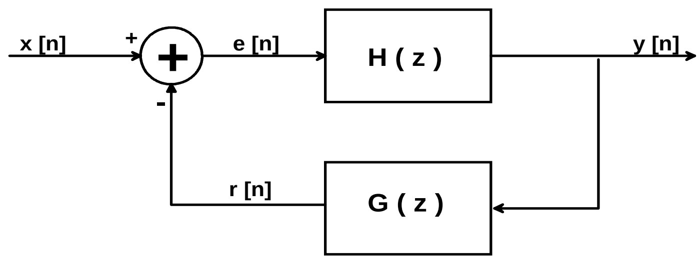
Los ingenieros $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de una empresa saben que una planta de su interés es un SLIT causal y estable cuya transferencia es de la forma $H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1})/(1 + a_1 z^{-1})$. Como son personas muy competitivas, cada uno decide hacer su propio intento para averiguar los parámetros a_1, b_0, b_1:

- $\mathcal{A}$ decide poner un impulso a la entrada y mide que $h[0] = 1$.
- $\mathcal{B}$ alimenta el sistema con un escalón unitario y mide la amplitud de la salida después de un largo tiempo (o ganancia de continua) que resulta ser 4.
- $\mathcal{C}$ decide excitar al sistema con la señal $\cos(\pi n/3)$, midiendo a la salida, después de un largo tiempo, una señal sinusoidal de amplitud 2.

El joven pasante, que acaba de terminar de cursar IPS, sorprendido por el escaso espíritu cooperativo de los ingenieros, decide determinar los parámetros utilizando la información anterior. Demuestre que Ud. puede desempeñar el rol del joven pasante.

4. **Un poco de realimentación...**

a) Un sistema discreto realimentado responde al esquema de la figura.



En cada uno de los siguientes casos, halle las transferencias $Y(z)/X(z)$ y $E(z)/X(z)$. Luego, suponiendo que $x[n]$ es el escalón unitario, halle el valor inicial y el valor final de $e[n]$.

I. $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}5\, z^{-1}}$, $G(z) = 0{,}5$.
II. $H(z) = \dfrac{1}{z - 1}$, $G(z) = 0{,}25\, z^{-1}$.

b) Un SLID causal $\mathcal{S}_1$ de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ obedece a la ecuación $y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n-1]$. La salida de este sistema se ingresa a un sistema $\mathcal{S}_2$ con ecuación en diferencias $r[n] = y[n] - K\, y[n-1]$, donde K es una constante real. Luego, $x[n]$ se genera a partir de las señales $v[n]$ (entrada externa) y $r[n]$, $x[n] = v[n] - r[n]$, dando lugar a un sistema realimentado.

I. Dibuje un diagrama en bloques que represente la conexión de los sistemas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
II. Encuentre la función de transferencia de $v[n]$ a $y[n]$.
III. Halle el rango de valores de K para el cual esa transferencia es estable.
IV. Halle el rango de valores de K para el cual la respuesta impulsional es oscilatoria amortiguada.

Algunos resultados

1. *a)* I. $X(z) = 1 - z^{-1},\ |z| > 0$ II. $X(z) = \dfrac{z^{-3}}{1 - z^{-1}},\ |z| > 1$ III. $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}},\ |z| > \dfrac{1}{4}$

   IV. $X(z) = \dfrac{-4z^{-1}}{1 - 4z^{-1}},\ |z| < 4$ V. $X(z) = \dfrac{-\frac{15}{4}z^{-1}}{1 - \frac{17}{4}z^{-1} + z^{-2}},\ \dfrac{1}{4} < |z| < 4$

   VI. $X(z) = \dfrac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2},\ |z| > \dfrac{1}{4}$ VII. $X(z) = \dfrac{z^2 - z^{-3}}{1 - z^{-1}},\ 0 < |z| < \infty$ VIII. $X(z) = \left(\dfrac{z^2 - z^{-3}}{1 - z^{-1}}\right)^2,$ $0 < |z| < \infty$ IX. $\nexists\, X(z)$ X. $X(z) = \dfrac{\cos(\phi) - z^{-1}\cos(2\pi f_0 - \phi)}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z^{-1} + z^{-2}},\ |z| > 1$

   b) I. $x[n] = -(-\frac{1}{2})^n u[-n-1]$ II. $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$ III. $x[n] = 4(-\frac{1}{2})^n u[n-2]$

   IV. $x[n] = -(-2)^n u[-n-1]$ V. $x[n] = -3(\frac{1}{4})^n u[-n-1] - 2\delta[n]$ VI $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$

2. *a)* I. $H(z) = \dfrac{2z^2}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})},\ |z| > \dfrac{3}{2}$ II. $h[n] = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u[n]$

   III. $h[0] = \lim\limits_{z\to\infty} H(z) = 2$ IV. $y[n] = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

   b) $H_1(z) = 1 - e^{-8\alpha}z^{-8},\ |z| > 0$ y $H_2(z) = 1/H_1(z)$

   c) I. $H(z) = \dfrac{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}{1 + \frac{k}{3}z^{-1}},\ |z| > \dfrac{k}{3}$ II. $H(e^{j2\pi s}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi s}}$ III. $-3 < k < 3$

   IV. $y[n] = \left[\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] u[n]$ V. $y[\infty] = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = 0$

3. $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y $a_1 = -\frac{1}{2}$

4. *a)* I. $e(0) = 1$ y $e(\infty) = 0{,}5$ II. $e(0) = 1$ y $e(\infty) = 0$

   b) II. $\dfrac{Y(z)}{V(z)} = \dfrac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + (1-K)z^{-2}}$ III. $0 < K < 1$ IV. $0 < K < \frac{3}{4}$