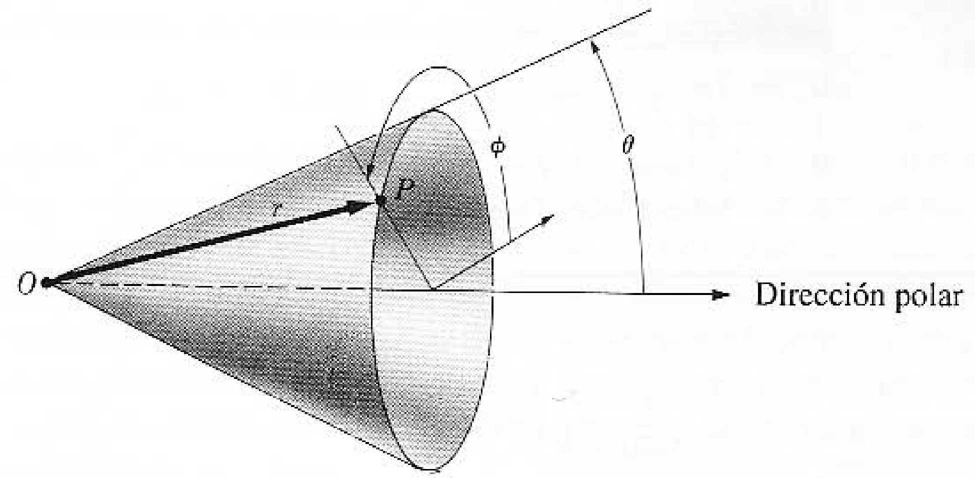
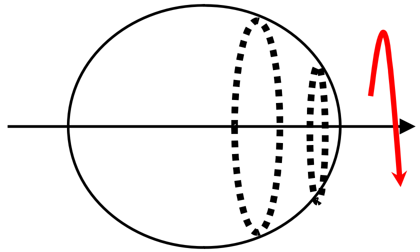
Resolución de la ecuación de Laplace en Coordenadas esférica. Burbuja en un campo uniforme

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS: ARMÓNICOS ESFÉRICOS





$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

a los casos en que φ es independiente del ángulo azimutal ϕ.

Para el caso esférico, φ es $\varphi(r,\ \theta)$, donde r es el radio vector (

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS: ARMÓNICOS ESFÉRICOS

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

Método de separación de Variables

$$\varphi(r,\theta) = Z(r)P(\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) + \frac{Z(r)}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{Z(r)}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=0$$

Dividiendo por $\varphi(r,\theta)$

multiplicando por r^2.

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=-\frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es función únicamente de r y el lado derecho es función de θ. La única forma en que una función de r puede ser igual a una función de θ para todos los valores de r y θ es que ambas funciones sean constantes.

. k, siendo k la "constante de separación".

No todos los valores de k proporcionan necesariamente soluciones aceptables con bases físicas. Considere primero la ecuación para θ, conocida como *ecuación de Legendre:*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0$$

Las únicas soluciones físicamente aceptables que están definidas en el intervalo de θ, que va desde 0 hasta (π) corresponden a $k = n(n + 1)$, siendo n un entero positivo.

para otros valores de k no se comportan bien en la vecindad de $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ radianes,

Estas soluciones no pueden satisfacer condiciones físicas en la frontera

Las soluciones aceptables, $P_n(\theta)$, son polinomios en cos θ y generalmente se denominan *polinomios de Legendre*. Las primeras cuatro funciones de Legendre se dan

$x = \cos\theta$, y sus soluciones se representan entonces con $P_n(x)$ o $P_n(\cos\theta)$.

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

Volvamos ahora a la ecuación radial

empleado la forma explícita de k que dio soluciones de θ aceptables.

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = n(n+1)Z$$

$$Z_n = r^n \qquad \text{y} \qquad Z_n = r^{-(n+1)}$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace se obtienen mediante el producto $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r)P_n(\theta)$, donde debe tenerse especial cuidado para que Z y P correspondan al mismo valor de n. Esto es imprescindible, puesto que ambos miembros de la ecuación son iguales a la misma constante, es decir, $n(n+1)$.

las soluciones conocidas como *armónicos esféricos*:

$$\varphi_n = r^n P_n(\theta) \qquad \text{o} \qquad \varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta)$$

n	$P_n(\theta)$	r^n	$r^{-(n+1)}$	$Zn(r).P(\theta)$	
0	1	1	r^{-1}	1	r^{-1}
1	$\cos(\theta)$	r	r^{-2}	$\cos(\theta).r$	$\cos(\theta).r^{-2}$
2	$\frac{1}{2}[3\cos^2(\theta)-1]$	r^2	r^{-3}	$\frac{1}{2}[3\cos^2(\theta)-1]\ .r^2$	$\frac{1}{2}[3\cos^2(\theta)-1]\ .r^{-3}$
3	$\frac{1}{2}[5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)]$	r^3	r^{-4}	$\frac{1}{2}[5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)].r^3$	$\frac{1}{2}[5\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)].r^{-4}$

$$\varphi(r,\theta)=\boxed{A_1}+\boxed{C_1 r^{-1}}+A_2.\cos(\theta).r+\boxed{C_2.\cos(\theta).r^{-2}}+A_3\frac{1}{2}[3\cos^2(\theta)-1].r^2+C_3.\frac{1}{2}[3\cos^2(\theta)-1].r^{-3}....$$

Dipolo

Trivial

Carga Puntual

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$Z_n = r^n$ y $Z_n = r^{-(n+1)}$

$$\varphi(r,\theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}A_3 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \tfrac{1}{2}C_3 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

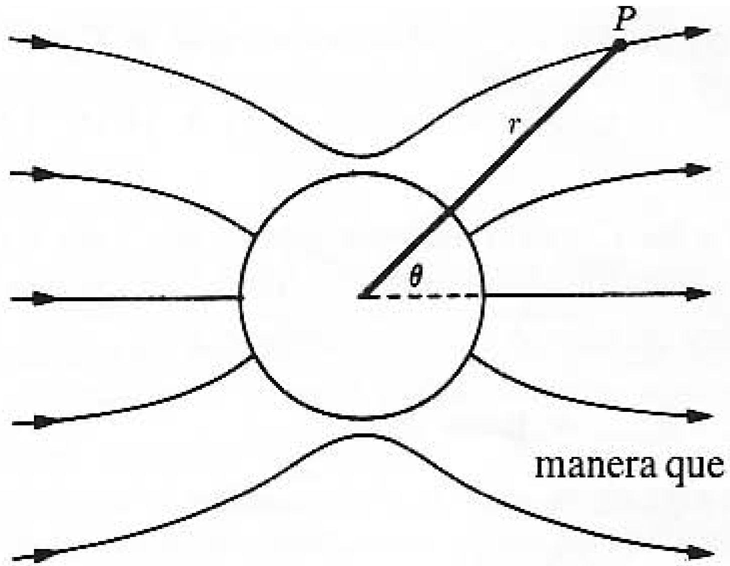
la solución de la ecuación de Laplace con fronteras esféricas y simetría azimutal.

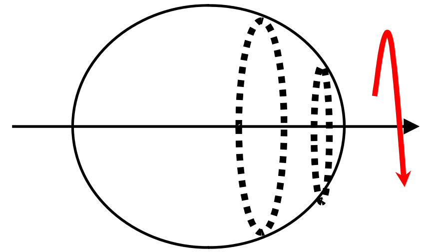
- una de las soluciones para $n = 0$, es decir, $\varphi = \text{constante}$, solución trivial
- el armónico esférico r^{-1} es el potencial de una carga puntual.
- $r^{-2}\cos\theta$ es el potencial de un dipolo.

ESFERA CONDUCTORA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

el problema de una esfera conductora descargada

colocada en un campo eléctrico *inicialmente* uniforme, $\mathbf{E}_0$.





la presencia del conductor altera el campo de tal

manera que las líneas de éste chocan perpendicularmente con la superficie

Si tomamos la dirección del campo eléctrico

inicialmente uniforme como la dirección polar (dirección z) y si fijamos el origen de nuestro sistema de coordenadas de modo que coincida con el centro de la esfera, entonces de la simetría del problema se ve que el potencial será independiente del ángulo azimutal ϕ y puede expresarse como una suma de los armónicos esféricos.

El conductor esférico, de radio a, es una superficie equipotencial; representemos este potencial con φ_0.

Nuestro problema es hallar una solución de la ecuación de Laplace en la región exterior a la esfera que se reduzca a φ_0 sobre la esfera misma y que tenga la forma limitadora correcta a grandes distancias de separación. La solución puede expresarse formalmente como

$$\varphi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}A_3 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \tfrac{1}{2}C_3 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

donde las A y las C son constantes arbitrarias. Para r grande, el campo eléctrico se distorsionará sólo ligeramente con respecto a su forma inicial y el potencial será el apropiado para un campo eléctrico uniforme.

(1) $$\boxed{[\mathbf{E}(r, \theta)]_{r\to\infty} = \mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{k}}$$

El Campo en el infinito no se altera

$$[\varphi(r, \theta)]_{r\to\infty} = -E_0 z + \text{constante} = -E_0 r\cos\theta + \text{constante}$$

$A_2 = -E_0$.

todas las A desde A_3 en adelante deben igualarse a cero.

(2)

$$\varphi(r,\theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta$$
$$+ \tfrac{1}{2}A_3 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \tfrac{1}{2}C_3 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

(1) (3)

(2) El término $C_1 r^{-1}$ produce un campo radial → conductor esférico que tiene una carga total neta. problema trata de un conductor descargado, la constante C_1 debe igualarse a cero.

(3) En la superficie de la esfera, $\varphi = \varphi_0$, y el potencial debe ser independiente del ángulo θ.

Los dos términos en que interviene $\cos\theta$ pueden eliminarse entre sí, pero los términos con potencias inversas de r, mayores, no pueden eliminarse entre sí debido a que contienen funciones de Legendre *diferentes*. La única posibilidad es igualar todas las C_i a cero cuando $i \geq 3$.

$$\varphi(r,\theta) = A_1 - E_0 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta, \quad \text{para} \quad r \geq a$$

$$\varphi(a,\theta) = \varphi_0$$

Ya que las dos expresiones deben ser iguales en $r = a$, $A_1 = \varphi_0$ y $C_2 = E_0 a^3$.

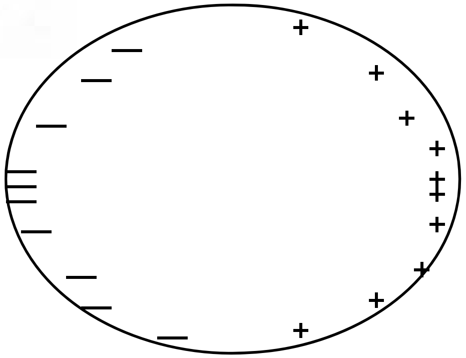
$$\varphi(a,\theta) = \varphi_0 = A_1 - E_0.\cos(\theta).a + C_2.\cos(\theta).a^{-2}$$

$$-E_0.\cos(\theta).a + C_2.\cos(\theta).a^{-2} = 0$$

$$C_2 = a^3.E_0; \quad \varphi_0 = A_1$$

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_o - E_o r\cos(\theta) + E_o a^3 r^{-2}\cos(\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \text{ para } r \geq a$$



$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r\big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta$$

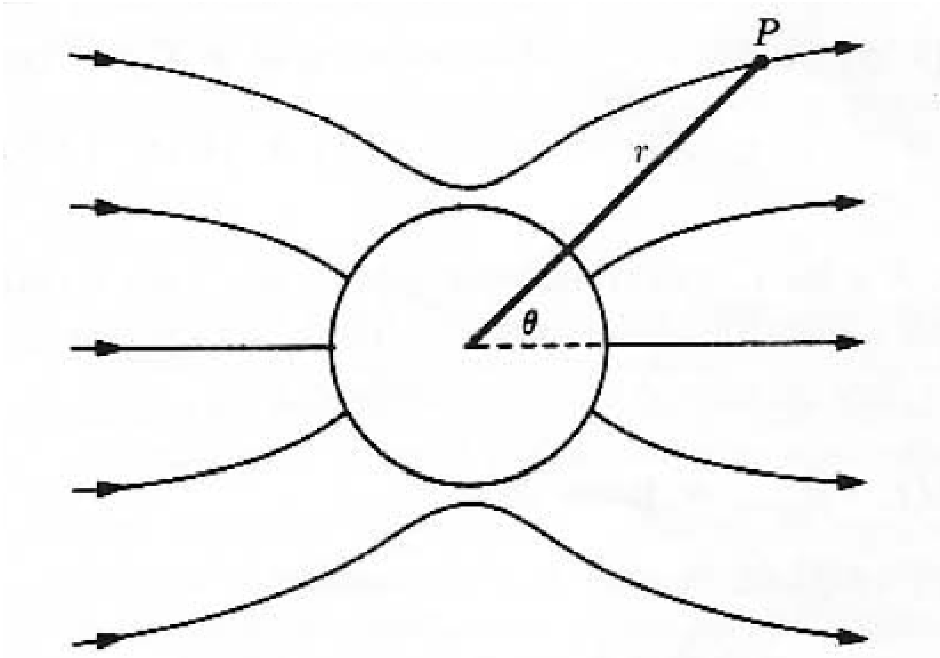
La carga total sobre la esfera,

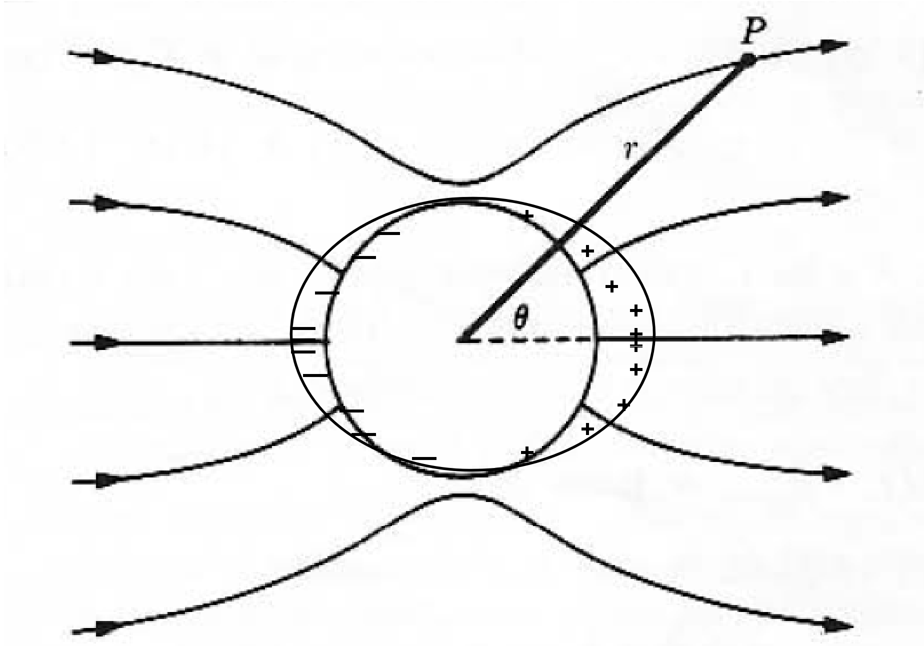
$$Q = a^2\int_0^\pi \sigma(\theta)2\pi\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$Q = \iint_s \sigma(\theta).ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_0 E_0.\cos(\theta).a^2.sen(\theta).d\theta.d\varphi$$

$$Q = a^2.2.\pi.\varepsilon_0 E_0\int_0^\pi \cos(\theta).sen(\theta).d\theta = a^2.2.\pi.\varepsilon_0 E_0\int_0^\pi \frac{sen(2\theta)}{2}.d\theta = 0$$

es evidentemente cero, lo que concuerda con nuestra suposición inicial.





Distribución cosenoidal
de la carga superficial

$$\sigma(\theta) = 3E_0\varepsilon_0 \cos(\theta)$$

PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA EN LOS QUE INTERVIENEN DIELÉCTRICOS

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

donde ρ es la densidad de carga externa. Si los dieléctricos con los que estamos trabajando son lineales, isótropos y homogéneos, entonces $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, siendo ϵ una constante característica del material, y podemos escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \qquad \nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\rho$$

ϵ reemplaza a ϵ_0 (y ρ significa densidad de carga externa en lugar de densidad de carga total).

En la mayoría de los casos de interés, el dieléctrico no contiene cargas distribuidas en todo su volumen, es decir, $\rho = 0$ dentro del material dieléctrico. La carga está sobre las superficies de los conductores o se concentra en forma de cargas puntuales que pueden, por cierto, estar dentro del dieléctrico. En estas circunstancias, el potencial satisface la ecuación de Laplace en todo el dieléctrico:

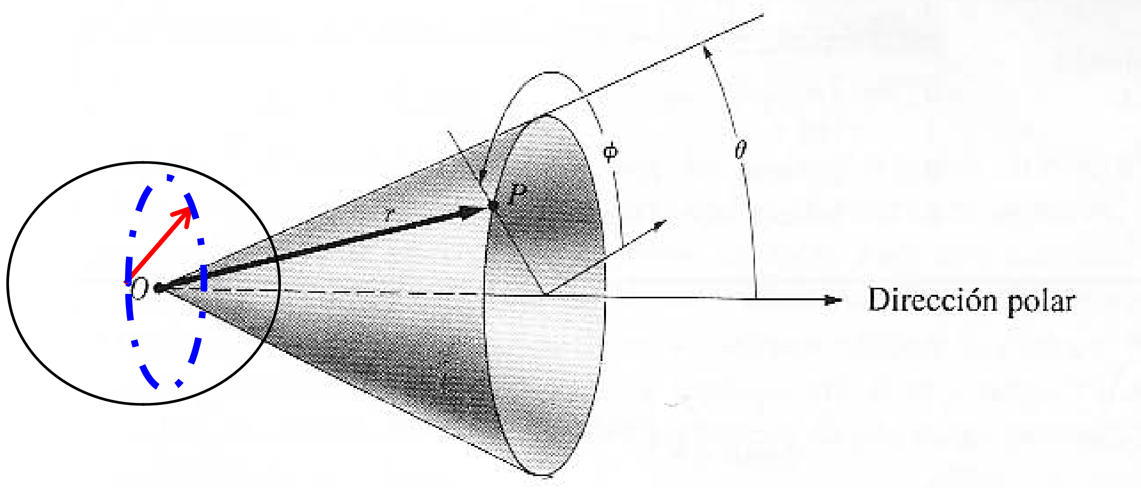
$$\nabla^2\varphi = 0$$

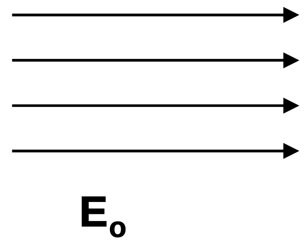
En algunos problemas puede haber una densidad superficial de carga, σ, sobre la superficie de un cuerpo dieléctrico o en la zona interfacial entre dos materiales dieléctricos, pero esto no altera la situación y la ecuación (4-49) sigue siendo aplicable mientras $\rho = 0$.

Un problema electrostático en el que intervienen dieléctricos lineales, isótropos y homogéneos se reduce, por tanto, a hallar las soluciones de la ecuación de Laplace en cada medio y relacionar las soluciones en los diversos medios con las condiciones en la frontera

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \qquad\qquad E_{2t} = E_{1t}$$

Esfera dieléctrica en un material dieléctrico, campo inicialmente uniforme





El origen de nuestro sistema de coordenadas puede tomarse en el centro de la esfera y la dirección de $\mathbf{E}_0$ como la dirección polar (dirección z).

todas las condiciones en la frontera pueden satisfacerse por medio de los dos armónicos de menor orden, y escribimos

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r\cos\theta + C_1 r^{-2}\cos\theta$$

Para la región exterior (ε1):

$$\varphi_2(r,\theta) = A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta$$

Para la región interior a la esfera (ε2)

- **Observese que el término 1/r no se considera pues no existe una carga puntual neta en la esfera**
- **El término constante debería sumarse a ambas expresiones, por lo tanto se hace cero**

Las constantes A_1, A_2, C_1 y C_2 no se conocen

deben determinarse a partir de las condiciones en la frontera.

Lejos de la esfera, el campo eléctrico conservará su carácter uniforme

(1) $$\lim_{r\to\infty} \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_z.E_\mathbf{0} = \mathbf{k}.E_\mathbf{0}$$

$$z = r.\cos(\theta)$$

Por lo tanto $A_1 = -E_0$

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_1(r,\theta) = -E_0.z = -E_0 r.\cos(\theta)$$

(2) $$\varphi_2(r,\theta) = A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta$$

- **Si r=0 el potencial y el campo eléctrico serían infinitos en el centro de la esfera. Esto implica la existencia de un dipolo puntual no proporcional al Δv_{olumen}**
- **Por lo tanto C2=0**

A_2 y C_1, pueden obtenerse de las condiciones en la frontera de la sección

La continuidad del potencial a través de la zona interfacial entre el dieléctrico y el vacío requiere que $\varphi_1 = \varphi_2$ en $r = a$, o sea:

(3)

$$A_1.a\cos(\theta) + C_1 a^{-2}\cos(\theta) = A_2.a\cos(\theta)$$

$$\boxed{-E_0.a + C_1 a^{-2} = A_2.a}$$

La continuidad de E_t en $r = a$ es equivalente a la ecuación $\varphi_1 = \varphi_2$

(3) Puesto que la componente normal de **D** en la zona interfacial es $D_r = -\epsilon(\partial\varphi/\partial r)$, la continuidad de D_r (no hay carga sobre la superficie del dieléctrico) requiere que $D_{1r} = D_{2r}$ en $r = a$, o sea:

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r\cos\theta + C_1 r^{-2}\cos\theta \Rightarrow \mathbf{D}_{1r} = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -\varepsilon_1.(-E_0)\cos(\theta) + \varepsilon_1.2C_1 r^{-3}\cos(\theta)$$

$$\varphi_2(r,\theta) = A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta \Rightarrow \mathbf{D}_{2r} = -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = -\varepsilon_2.A_2\cos(\theta) + \varepsilon_2.2\cancel{C_2} r^{-3}\cos(\theta)$$

$$\boxed{\varepsilon_1.E_0\cos(\theta) + \varepsilon_1.2C_1 a^{-3}\cos(\theta) = -\varepsilon_2.A_2\cos(\theta)}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1.E_0 + \varepsilon_1.2C_1 a^{-3} &= -\varepsilon_2.A_2 \\ -E_0.a + C_1 a^{-2} &= A_2.a \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} E_0 + 2C_1 a^{-3} &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.A_2 \\ -E_0 + C_1 a^{-3} &= A_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{A_2 = -\frac{3E_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2}} \qquad \boxed{C_1 = \frac{E_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}a^3} \qquad \boxed{A_1 = -E_0} \qquad \boxed{C_2 = 0}$$

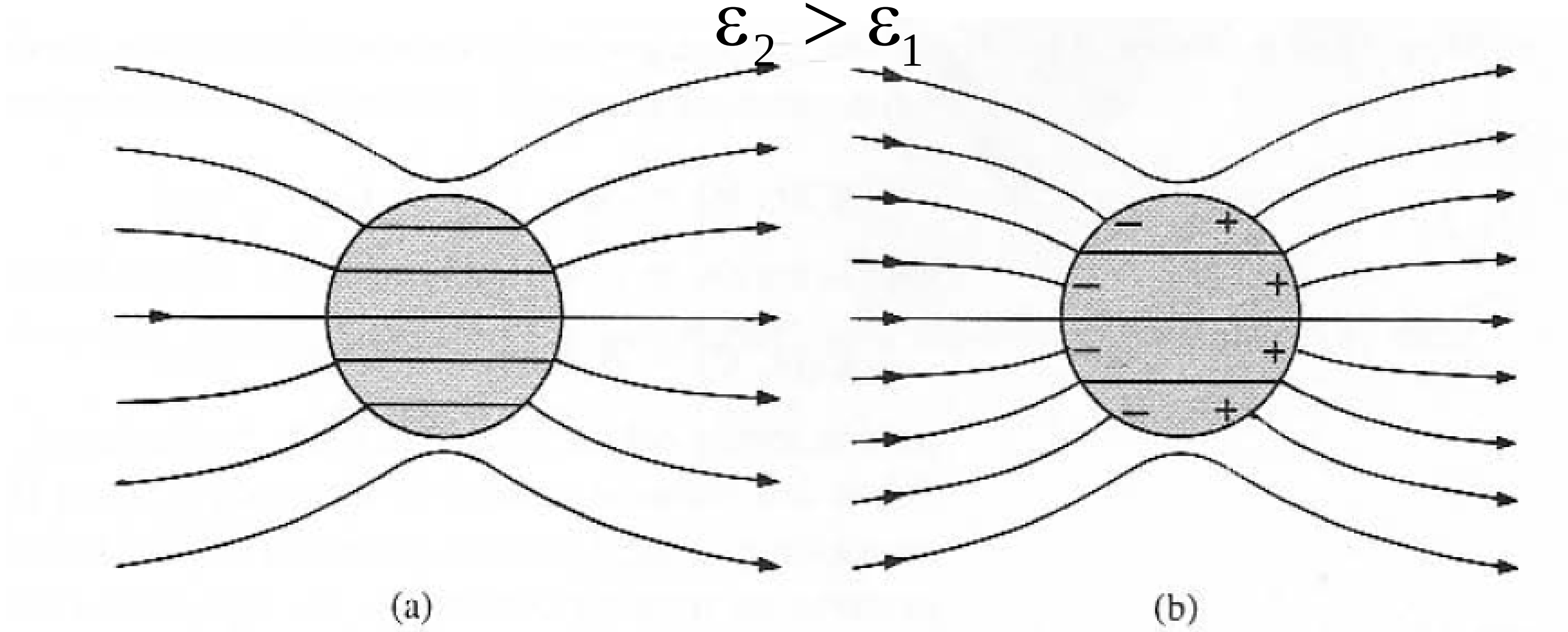
$$\varphi_1(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) + \frac{E_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 . r^{-2}\cos(\theta) \qquad r \geq a$$

$$\varphi_2(r,\theta) = -\frac{3E_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2} \boxed{r\cos(\theta)} \qquad r \leq a$$

$$\varphi_2(z) = -\frac{3E_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2} \boxed{z} \Rightarrow \boxed{E_z = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{3E_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2}}$$

- **El campo interior tiene la misma dirección que el campo E_0 previo**
- **La magnitud depende de la relación de las constantes de permitividad dielectricas**

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

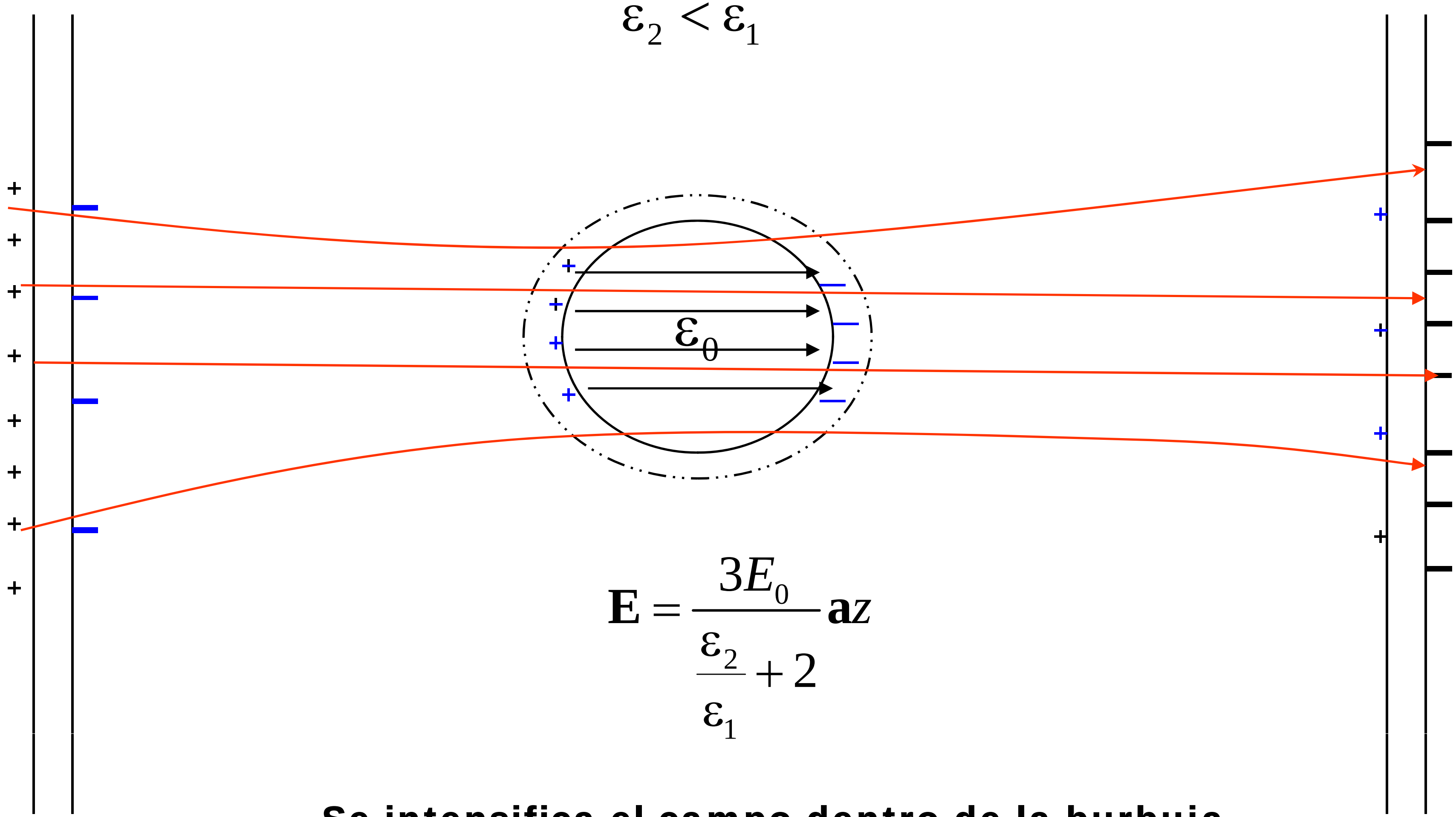


D: **desplazamiento**

E: **campo eléctrico**

Burbuja de aire dentro de un dieléctrico

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$



$$\mathbf{E} = \frac{3E_0}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2}\,\mathbf{a}z$$

Se intensifica el campo dentro de la burbuja