

4. POLARIZACIÓN.

4.1. INTRODUCCIÓN.

Una onda electromagnética compleja puede ser descompuesta en una suma de ondas planas, cada una de ellas con su correspondiente dirección de propagación, amplitud y fase.

Se considera ahora el caso particular pero de gran importancia práctica, en que exista una combinación de ondas planas que se propagan en la misma dirección.

La orientación de los vectores de campo en estas ondas planas determina la polarización de dichas ondas, como se verá a continuación.

En la siguiente discusión se tratará con ondas senoidales de la misma frecuencia.

Como ya ha sido analizado, en una onda plana los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, y mantienen sus respectivas orientaciones en cada punto a lo largo de la onda. Además los vectores de campo están ubicados en un plano normal a la dirección de propagación, constituyendo de esta forma una onda *transversal electromagnética* (TEM).

Una combinación de ondas planas, propagándose en la misma dirección pero con orientaciones arbitrarias de los vectores de campos, al igual que magnitudes y fases arbitrarias de los mismos, se denomina onda *no polarizada*.

Si el vector campo eléctrico de una onda se mantiene siempre en una misma posición espacial, se dice que es una onda *linealmente polarizada*. De esto se desprende que una onda plana está linealmente polarizada.

La condición anterior de polarización lineal también resulta cuando se superponen ondas planas con los vectores de campo en la misma posición, o si están en diferentes posiciones tienen exactamente la misma fase.

Para las ondas de radio es común describir su estado de polarización por la posición del vector campo eléctrico. Para óptica, por el contrario, la polarización es descrita por la posición del campo magnético. Para evitar ambigüedades, es preferible explicitar a que campo se hace referencia cuando se habla de polarización.

Otra forma de interpretar la polarización de una onda plana es considerar el comportamiento temporal de los vectores de campo en un punto fijo en el espacio. De este modo se dice que el vector campo eléctrico está polarizado *verticalmente*, cuando un observador situado en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda, frente de onda, ve vibrar al campo eléctrico en una dirección *perpendicular al plano de tierra*. Análogamente se puede describir la polarización *horizontal*, u *oblicua* en el caso más general de polarización lineal, del vector de campo eléctrico.

En base a todo lo dicho anteriormente, cabe resaltar que una onda plana *siempre* está *linealmente* polarizada, ya sea con polarización vertical, horizontal u oblicua en el caso más generalizado.

Si ahora se considera una combinación de dos ondas planas, por lo tanto linealmente polarizadas, de la misma frecuencia y dirección de propagación, pero con diferentes fases, amplitudes y orientación de los vectores de campo, resultará una onda polarizada *elípticamente*, para el caso más general.

Esto implica que un observador situado en un punto fijo en el espacio, frente de onda, observa que los vectores de campo varían continuamente su eje espacial de vibración, siguiendo la traza de una elipse.

Para ver la razón de tal comportamiento en la onda compuesta resulta conveniente separar dicha onda compuesta en sus dos ondas planas componentes.

Si las ondas planas, y por ende la onda compuesta, se propagan en la dirección del eje z positivo, cada onda plana oblicuamente polarizada tendrá una componente del campo eléctrico según el eje x , y otra componente de dicho campo según el eje y . Sumando las componentes de cada onda vibrando en el mismo eje, ejes x e y , se obtiene:

$$E_x = E_1 \sin(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - \beta z + \delta) \quad (2)$$

donde:

E_1 : Amplitud de la onda linealmente polarizada en la dirección x .

E_2 : Amplitud de la onda linealmente polarizada en la dirección y .

δ : Angulo de fase temporal en adelante de E_y respecto de E_x .

El campo eléctrico instantáneo total resulta ser:

$$E_x = \vec{x} E_1 \sin(\omega t - \beta z) + \vec{y} E_2 \sin(\omega t - \beta z + \delta) \quad (3)$$

Analizando lo que ocurre para un dado plano perpendicular al sentido de propagación (*frente de onda*), para el plano $z=0$ resulta:

$$E_x = E_1 \sin(\omega t) \quad (4)$$

$$E_y = E_2 \sin(\omega t + \delta) \quad (5)$$

Las ecuaciones anteriores se corresponden con las ecuaciones paramétricas de una elipse. La vibración del vector campo eléctrico describe una elipse en un plano normal al de propagación de la onda. Para hallar la ecuación de dicha elipse, se debe despejar de las ecuaciones el término ωt , es decir:

$$\sin(\omega t) = \frac{E_x}{E_1} \quad (6)$$

$$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)} = \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}} \quad (7)$$

Introduciendo estos valores en la componente según y elevada al cuadrado, resulta:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - \frac{2E_x E_y \cos(\delta)}{E_1 E_2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2(\delta) \quad (8)$$

O bien que:

$$aE_x^2 - bE_x E_y + cE_y^2 = 1 \quad (9)$$

Donde:

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2(\delta)} \quad (10)$$

$$b = \frac{2 \cos(\delta)}{E_1^2 E_2^2 \sin^2(\delta)} \quad (11)$$

$$c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2(\delta)} \quad (12)$$

En la **Figura 4.1** se muestra la elipse resultante, con su eje mayor formando un ángulo de inclinación τ con el eje x .

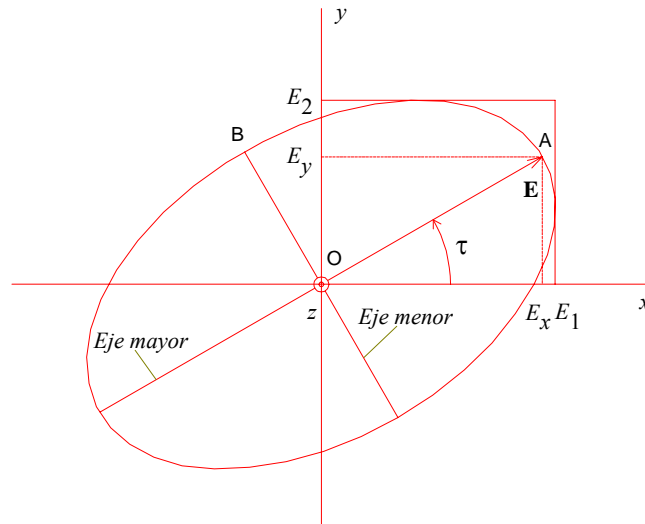


Figura 4-1. Polarización elíptica.

Si $E_1=0$ la onda está linealmente polarizada en la dirección y (polarización vertical).

Si $E_2=0$ la onda está linealmente polarizada en la dirección x (polarización horizontal).

Si $E_1=E_2$ y $\delta=0$ la onda está linealmente polarizada, pero en un plano a 45° respecto del eje x (polarización oblicua a 45°).

Si $E_1=E_2$ y $\delta=180^\circ$ la onda está linealmente polarizada (polarización oblicua), pero en un plano determinado por el siguiente ángulo:

$$\arctg\left(\frac{E_2 \cos \delta}{E_1}\right) \quad (13)$$

Si $E_1=E_2$ y $\delta=\pm 90^\circ$ la onda está circularmente polarizada. Cuando $\delta=+90^\circ$ la onda está circularmente polarizada a izquierda (polarización levógira). Cuando $\delta=-90^\circ$ la onda está circularmente polarizada a derecha (polarización dextrógira).

El sentido de rotación del vector campo eléctrico, a izquierda o derecha (levógiro o dextrógiro), es el que ve un observador situado en un frente de onda y que ve alejarse a la onda. Si la polarización rota en sentido contrario al giro de las agujas de reloj, se tiene polarización levógira o a izquierda. Si la polarización rota en el sentido de giro de las agujas de reloj, se tiene polarización dextrógira o a derecha.

En la **Figura 4.2** se muestra la posición del vector campo eléctrico para ondas con polarización lineal oblicua, elíptica y circular, vista desde un plano que contenga al frente de onda y a medida que transcurre el tiempo.

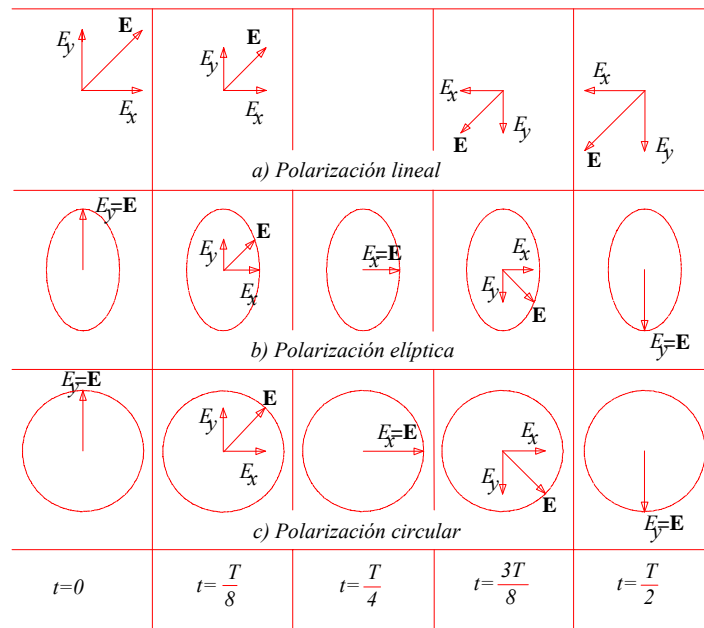


Figura 4-2. Posición del vector campo eléctrico para ondas con polarización lineal oblicua, elíptica y circular.

En la **Figura 4.3** se muestra la posición espacial del vector campo eléctrico para una onda polarizada elípticamente, que se propaga en la dirección del eje z positivo.

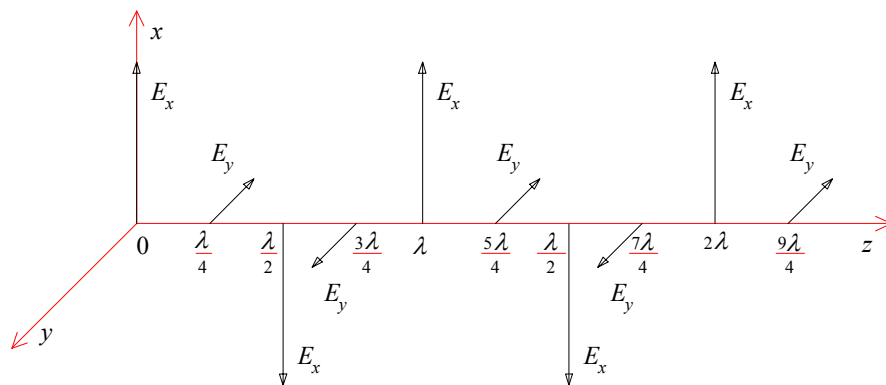


Figura 4-3. Posición espacial del vector campo eléctrico para una onda polarizada elípticamente.

5. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS.

5.1. INTRODUCCIÓN.

Hasta ahora se ha analizado la propagación de onda planas en diferentes medios (vacío, dieléctricos ideales y con pérdidas, conductores, etc.).

Este análisis se ha efectuado a partir de resolver las Ecuaciones de Maxwell, supuesta la existencia de dicha onda en el medio, es decir sin tener en cuenta como ha sido generada la onda, ni a través de que mecanismos a penetrado al medio.

Se ha visto que la solución general de las Ecuaciones de Maxwell, compuesta por dos ondas planas que viajan en sentidos opuestos, devino en una única *onda plana progresiva*, que a partir de este momento se denominará *onda incidente*. Esta onda que transporta energía electromagnética, contiene un exacto equilibrio energético entre campo magnético y campo eléctrico, ya que la energía total está asociada mitad al campo eléctrico y mitad al campo magnético, estando ambos campos en fase temporalmente.

La otra onda de la solución general, que a partir de este momento se denominará *onda reflejada*, fue descartada en su oportunidad con el argumento de que su existencia tenía en cuenta la presencia de una discontinuidad en el medio de propagación, y este es el caso a tratar ahora.

Es común denominar a ambas ondas, *incidente* y *reflejada*, con el nombre de ondas *progresivas*, ya que cada una transporta energía en forma progresiva, si bien en sentidos opuestos.

Las ondas *incidente* y *reflejada* se propagan en el mismo medio.

Existe otra onda, denominada *transmitida* o *refractada*, que ingresa al nuevo medio, transportando así energía en este medio. Esta onda *transmitida* en el nuevo medio, puede ser considerada ahora como onda *incidente* en tal medio, si en su camino de propagación encuentra, a su vez, una discontinuidad. Por otra parte también constituye una onda *progresiva*, ya que transporta energía, en forma progresiva, en el medio en que se propaga.

La presencia de las ondas reflejada y transmitida, puede ser justificada por dos mecanismos perfectamente compatibles entre sí.

El primero de ellos consiste en el balance energético total, ya que de la energía que transporta la onda incidente, energía suministrada por el generador de la onda, parte es devuelta al mismo medio, transportada por la onda reflejada, y el resto será transportada por la onda transmitida en el nuevo medio.

El segundo consiste en el cumplimiento de las condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético, en la superficie límite de separación entre ambos medios.

5.1. CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE UNA SUPERFICIE LÍMITE.

Si bien este tema ya ha sido tratado en diferentes oportunidades, ejemplificado con distintos casos particulares, es conveniente y oportuno insistir sobre ellos, debido a su directa y frecuente aplicación en el desarrollo del presente tema.

Las ecuaciones de Maxwell, en su forma diferencial, expresan la relación que debe existir entre los vectores de campos **E**, **D**, **B** y **H**, en todo punto de un medio continuo. En esta forma, y por contener derivadas espaciales, no puede esperarse que den información en puntos de discontinuidad del medio. Sin embargo, en su forma integral pueden emplearse para determinar lo que sucede en la superficie límite de separación entre medios distintos.

Para un acabado conocimiento del comportamiento de los campos ante tales superficies límites, es necesario conocer lo que acontece con las componentes tangenciales y normales de dichos campos.

5.1.1. Componentes tangenciales de **E**.

Para el análisis de la componente tangencial de **E** se supone tener una superficie de separación entre dos medios distintos, ubicada en el plano $x=0$, tal como la descrita por la **Figura 5.1**.

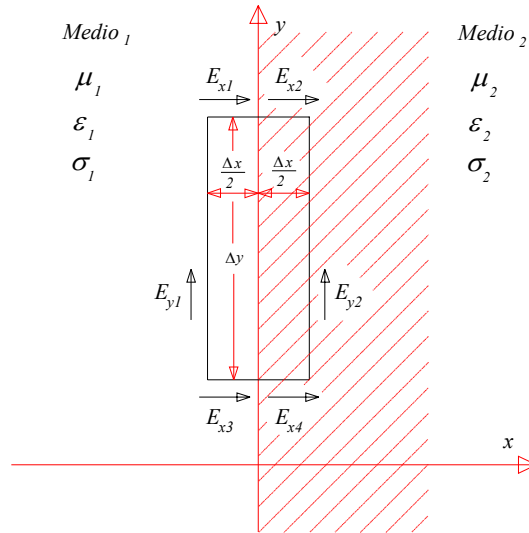


Figura 5.1. Condiciones de frontera para las componentes tangenciales de \mathbf{E} .

Considerando el pequeño rectángulo de ancho Δx y longitud Δy , que encierra una porción de cada medio (1) y (2), y teniendo en cuenta la ecuación de Maxwell que establece la fuente de rotacional de campo eléctrico, ley de Faraday en su forma puntual:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Si ahora se calcula la integral de superficie a ambos miembros, y se aplica el teorema de Stokes al primer miembro, resulta que la fuerza electromotriz en un circuito (integral a lo largo de la trayectoria cerrada, contorno de la superficie, del campo eléctrico), es igual a la variación temporal del flujo magnético (a través de la superficie) cambiada de signo, o sea la Ley de Faraday en su forma integral:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

Aplicada la anterior ecuación al rectángulo elemental de la figura, resulta:

$$E_{y2} \Delta y - E_{x2} \frac{\Delta x}{2} - E_{x1} \frac{\Delta x}{2} - E_{y1} \Delta y + E_{x3} \frac{\Delta x}{2} + E_{x4} \frac{\Delta x}{2} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_z \Delta x \Delta y) \quad (3)$$

Donde se ha considerado la densidad media del vector inducción magnética a través del rectángulo en cuestión.

Si ahora se hace tender la superficie del rectángulo a cero, reduciendo el ancho Δx , manteniendo siempre la superficie de discontinuidad entre los lados del rectángulo, y bajo la suposición de que la variación temporal del vector inducción magnética es acotada (no infinita), el segundo miembro de la anterior ecuación tenderá a cero, ya que lo propio hace la superficie y el integrando es finito. Por otra parte las contribuciones de las componentes normales del campo eléctrico a la integral de línea tienden a cero, porque lo propio hacen los elementos de longitud, quedando:

$$E_{y2} \Delta y - E_{y1} \Delta y = 0 \quad (4)$$

O sea que, para Δx tendiendo a cero resulta:

$$E_{y2} = E_{y1} \quad (5)$$

Es decir que: *la componente tangencial de campo eléctrico es siempre continua.*

5.1.2. Componentes tangenciales de \mathbf{H} .

De un modo completamente similar, se puede analizar la Ecuación de Maxwell que expresa las fuentes de rotacional de campo magnético, Ley de Ampere Modificada en su forma puntual, que establece que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

Si ahora se calcula la integral de superficie a ambos miembros, y se aplica el teorema de Stokes al primer miembro, resulta que la fuerza magnetomotriz en un circuito (integral a lo largo de la trayectoria cerrada, contorno de la superficie, del campo magnético), es igual a la variación temporal del flujo eléctrico más la corriente de conducción (ambas a través de la superficie), o sea:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} - \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (7)$$

Aplicada la anterior ecuación a un rectángulo elemental similar al de la **Figura 5.1**, resulta:

$$H_{y2} \Delta y - H_{x2} \frac{\Delta x}{2} - H_{x1} \frac{\Delta x}{2} - H_{y1} \Delta y + H_{x3} \frac{\Delta x}{2} + H_{x4} \frac{\Delta x}{2} = J_z \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial t} (D_z \Delta x \Delta y) \quad (8)$$

Donde se ha considerado la densidad media del vector desplazamiento eléctrico, y la corriente media de conducción, a través del rectángulo en cuestión.

Si ahora se hace tender la superficie del rectángulo a cero, reduciendo el ancho Δx , manteniendo siempre la superficie de discontinuidad entre los lados del rectángulo, y bajo la suposición que la variación temporal del vector desplazamiento eléctrico es acotada (no infinita), el segundo término del segundo miembro de la anterior ecuación tenderá a cero, ya que lo propio hace la superficie y el integrando es finito.

Por otra parte las contribuciones de las componentes normales del campo magnético a la integral de línea tienden a cero, porque lo propio hacen los elementos de longitud.

O sea que, para Δx *tendiendo a 0*, resulta:

$$H_{y2} \Delta y - H_{y1} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} J_z \Delta x \Delta y \quad (9)$$

De la anterior ecuación se desprenden dos casos, que exista una densidad de corriente de conducción finita o no.

Si la densidad de corriente de conducción es finita (caso real), el segundo miembro de la anterior ecuación tiende a cero, ya que lo propio hace la superficie de integración y el integrando es finito. Por lo que se concluye que:

$$H_{y2} = H_{y1} \quad (10)$$

Es decir que: *la componente tangencial de campo magnético es continua, si la densidad de corriente de conducción es finita (no existe densidad de corriente de conducción superficial, como se verá a continuación).*

El otro caso corresponde a un conductor perfecto o ideal, es decir un conductor con conductibilidad infinita (caso teórico). Los conductores reales tienen una conductibilidad finita, sin embargo esta conductibilidad puede alcanzar valores muy elevados, y en muchas aplicaciones prácticas resulta útil suponerla infinita. Tal supuesto conduce a ciertas dificultades (por la indeterminación que conlleva), al determinar las condiciones de límites, a menos que se tenga especial cuidado al formularlas.

Como ya se ha visto, la profundidad de penetración de un campo eléctrico variable en el tiempo en un conductor (y la corriente producida por el mismo), disminuyen a medida que aumenta la conductibilidad. Así, en un buen conductor, la corriente de alta frecuencia circulará en una delgada capa superficial, tendiendo su espesor a cero cuando la conductibilidad tiende a infinito. Esto da origen al concepto de *densidad de corriente laminar o superficial*. Cuando se tiene una densidad de corriente superficial o laminar finita, circula una corriente i_{sz} por unidad de ancho (amperes por metro), sobre un área transversal tendiente a cero; pero la densidad de corriente \mathbf{J} tiende a infinito, tal que:

$$i_{sz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} J_z \Delta x \Delta y \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (11)$$

Volviendo ahora a la expresión hallada para determinar las condiciones de contorno del campo magnético tangencial, aplicada ahora a un conductor ideal, cuando Δx tiende a cero se obtiene:

$$H_{y2} \Delta y - H_{y1} \Delta y = i_{sz} \Delta y \quad (12)$$

Por lo tanto si Δx tiende a cero resulta:

$$H_{y1} = H_{y2} - i_{sz} \quad (13)$$

Ahora bien, si el campo eléctrico es cero dentro de un conductor ideal, lo propio debe acontecer con el campo magnético (para campos variables en el tiempo), por lo que resulta:

$$H_{y2} = 0 \quad (14)$$

$$H_{y1} = -i_{sz} \quad (15)$$

Esta ecuación establece que: *el campo magnético tangencial, inmediatamente afuera de una superficie conductora ideal, es igual a la densidad de corriente superficial o corriente laminar, corriente por unidad de ancho en sentido transversal al campo magnético (A/m).*

En notación vectorial es:

$$\mathbf{i}_S = \mathbf{\hat{n}} \times \mathbf{H} \quad (16)$$

Donde $\mathbf{\hat{n}}$ es el vector unitario sobre la normal a la superficie.

Conviene destacar además que en tal conductor ideal, el campo eléctrico (variable en el tiempo) es cero para cualquier densidad de corriente de conducción, y para satisfacer la condición de contorno del campo eléctrico tangencial, éste debe ser nulo a ambos lados de la superficie límite.

5.1.3. Componentes normales de D.

Para determinar la relación entre las componentes normales de \mathbf{D} , en una superficie de separación de dos medios, se hará uso de un volumen cilíndrico elemental, con sus dos caras (de superficie ds) paralelas a la superficie límite, y con una altura Δx , tal como muestra la **Figura 5.2**.

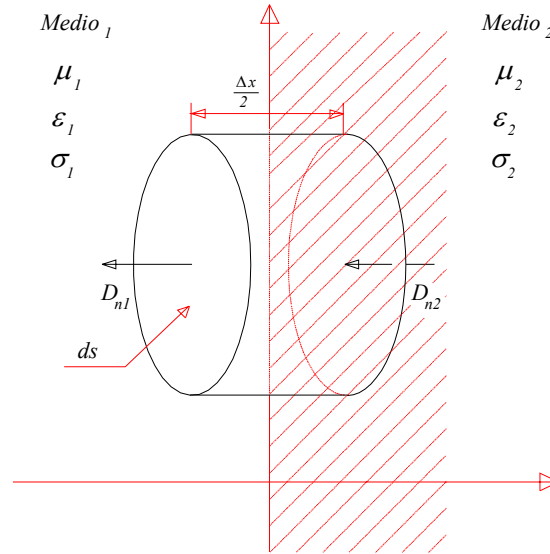


Figura 5.2. Condiciones de frontera para las componentes normales de D.

Si se recuerda lo establecido por el teorema de Gauss:

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_{\text{libre}} dv \quad (17)$$

Aplicada la anterior ecuación al volumen elemental de la figura, resulta:

$$D_{n1} ds - D_{n2} ds + \psi_{\text{lateral}} = \rho_{\text{libre}} \Delta x ds \quad (18)$$

Siendo ρ_{libre} la densidad volumétrica media de cargas dentro del volumen del cilindro elemental, y ψ_{lateral} el flujo saliente por la pared lateral del cilindro elemental.

Cuando Δx tiende a cero, es decir cuando las dos caras del cilindro tienden a juntarse, manteniendo entre ellas a la superficie límite de separación entre los dos medios, el flujo saliente por los laterales tiende también a cero, habida cuenta del valor finito del vector desplazamiento eléctrico. Es decir que:

$$D_{n1} ds - D_{n2} ds = \rho_{\text{libre}} \Delta x ds \quad (19)$$

Si por definición, la densidad superficial de cargas es:

$$\sigma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_{\text{libre}} \Delta x \quad (20)$$

Resulta que, cuando Δx tiende a cero:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \quad (21)$$

Se puede concluir que: *la componente normal del vector desplazamiento eléctrico es continua, si no existe carga superficial, y discontinua si existe tal carga.*

En todo medio conductor la densidad del vector desplazamiento eléctrico es muy pequeña (solamente será cero en electrostática, o para campos variables en el tiempo si el conductor es ideal). Por consiguiente, en un medio conductor, se puede decir con una buena aproximación a la realidad, que la carga reside *en la superficie*, y por lo tanto:

$$D_{n2} = 0 \quad (22)$$

De lo que resulta:

$$D_{n1} = \sigma \quad (23)$$

5.1.4. Componentes normales de B.

En el caso del vector inducción magnética, como no existen *cargas magnéticas libres* aisladas, un análisis similar conduce a:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (24)$$

De lo que se puede concluir que: *la componente normal del vector inducción magnética es siempre continua.*

5.2. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS CON INCIDENCIA NORMAL.

Se tratará a continuación, lo que ocurre cuando una onda propagándose en un dado medio, incide sobre otro medio que tiene distinta permitividad, permeabilidad o conductibilidad, generándose en consecuencia una onda reflejada y otra refractada o transmitida, estableciéndose así una nueva repartición de la energía electromagnética.

Por simplicidad del análisis involucrado, se comienza con el tratamiento de ondas planas con incidencia normal a la superficie límite, y suponiendo que el medio en el cual venía propagándose la onda incidente es el vacío.

En la **Figura 5.3** se esquematiza lo que ocurre en la superficie límite:

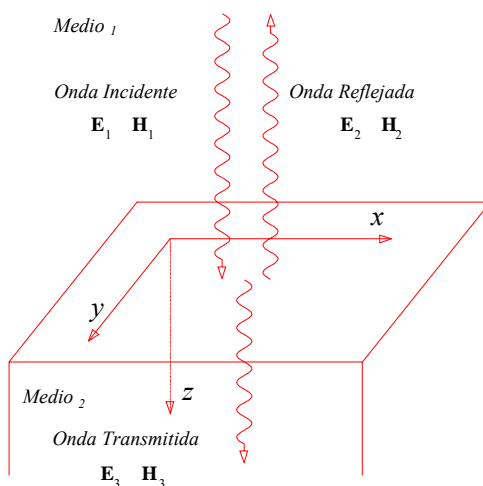


Figura 5.3. Reflexión y refracción de ondas planas.

5.2.1. REFLEXIÓN SOBRE SUPERFICIE CONDUCTORA PERFECTA.

En el caso de una onda plana que, propagándose en el vacío, incide normalmente sobre una superficie conductora perfecta, ésta se reflejará completamente, ya que como se ha visto con anterioridad, no pueden existir campos eléctricos ni magnéticos variables en el tiempo en el interior de dicho medio.

De esta manera, la onda incidente no puede transmitir energía hacia el interior del conductor perfecto, porque este medio no puede absorber energía, ya que si lo hiciera la energía absorbida sería infinita.

Como conclusión lógica del anterior razonamiento resultará que toda la energía que transporta la onda incidente en el vacío, es devuelta a dicho medio ahora transportada por la onda reflejada.

Para realizar el análisis se partirá de la solución general de la onda propagándose en un medio, el vacío, la cual como ya se sabe consta de dos términos, la onda incidente y la reflejada.

Se supondrá que la onda incidente de campo eléctrico se propaga en el sentido del eje z positivo, y está polarizada linealmente en la dirección del eje x . Además se supone que la superficie límite de separación entre ambos medios, vacío y conductor perfecto, está ubicada en $z=0$.

La expresión de la onda incidente es:

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)] \quad (25)$$

La onda completa en el vacío, ondas incidente y reflejada, tendrá la siguiente expresión:

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)] + f_2 [vt + z] \quad (26)$$

La forma de la onda reflejada dependerá de la onda incidente, y de las condiciones de contorno impuestas por la superficie límite.

Como el medio es perfectamente conductor, no puede existir campo eléctrico variable en el tiempo en su interior, y como además se debe conservar la componente tangencial de dicho campo, no cabe otra posibilidad que sobre la superficie conductora perfecta, el campo eléctrico sea nulo (para todo valor del tiempo).

De lo anterior se concluye que el valor de la onda reflejada, para $z=0$, es:

$$f_2[vt] = -E_m \cos[\beta(vt)] \quad (27)$$

Puede verse que la onda reflejada sobre la superficie conductora (para $z=0$), coincide en amplitud con la incidente, pero está en oposición de fase con la misma, es decir que ocurrió una inversión de fase sobre la onda reflejada, respecto de la incidente.

También resulta evidente que no existe onda transmitida, lo cual indica que la onda reflejada transportará la misma cantidad de energía que la onda incidente, pero en sentido contrario, dando un flujo neto nulo de energía en el medio (vacío).

Para todo otro z , la onda reflejada resulta ser:

$$f_2[vt + z] = -E_m \cos[\beta(vt + z)] \quad (28)$$

Y por lo tanto, la onda total en el medio (vacío), resultante de satisfacer las condiciones de contorno impuestas por la superficie conductora perfecta, resulta ser:

$$E_x = E_m \cos[\beta(vt - z)] - E_m \cos[\beta(vt + z)] \quad (29)$$

O expresada en términos de la pulsación angular:

$$E_x = E_m \cos(\omega t - \beta z) - E_m \cos(\omega t + \beta z) \quad (30)$$

Si ahora se utiliza notación exponencial para facilitar las operaciones a realizar, la onda completa resulta ser:

$$E_x = \text{Real}[E_m e^{j(\omega t - \beta z)} - E_m e^{j(\omega t + \beta z)}] \quad (31)$$

Siendo el fasor un factor común a ambas ondas, incidente y reflejada, la anterior expresión deviene en:

$$E_x = \text{Real}[E_m e^{j\omega t} (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})] \quad (32)$$

Reconociendo la expresión exponencial del seno trigonométrico:

$$E_x = \text{Real}[-2jE_m e^{j\omega t} \text{sen}(\beta z)] \quad (33)$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo eléctrico en el vacío resulta ser:

$$E_x = 2E_m \text{sen}(\beta z) \text{sen}(\omega t); \quad E_y = E_z = 0 \quad (34)$$

Esta onda completa, en conjunto con las ondas individuales (incidente y reflejada), es mostrada en la siguiente **Figura 5.4**, graficada para varios instantes de tiempo, lo que se traduce en diferentes fases de arribo de la onda incidente de campo eléctrico sobre la superficie conductora perfecta.

En la **Figura 5.4** se han trazado dos líneas, una sobre una cresta de la onda incidente y otra sobre una cresta de la onda reflejada, para visualizar como ambas se propagan en sentidos opuestos, y con la misma velocidad (ya que el medio es el mismo).

También se ha graficado la onda compuesta de campo eléctrico, onda incidente más reflejada. Puede observarse que esta onda compuesta no se propaga en ninguna dirección, siendo denominada por tal motivo *onda estacionaria*.

Esta onda estacionaria de campo eléctrico, que no transporta energía, alcanza valores máximos cuya magnitud duplica al correspondiente a la onda incidente, según puede apreciarse en la expresión matemática y visualizarse en la **Figura 5.4**.

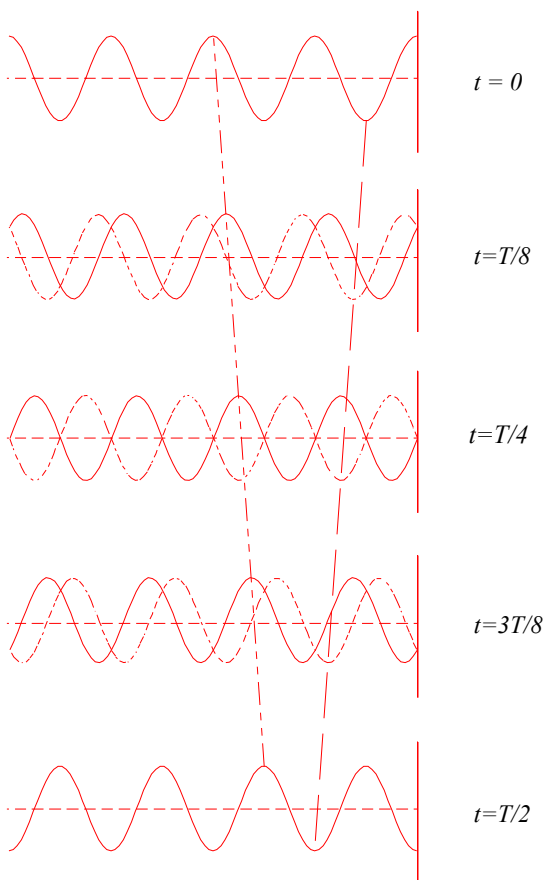
La envolvente (lugar geométrico de los máximos en cada punto del espacio) de esta onda estacionaria de campo eléctrico, tiene la forma típica de *ojos*, y su valor corresponde a la siguiente expresión:

$$\text{Envolvente} = 2E_m \text{sen}(\beta z) \quad (35)$$

Esta onda estacionaria de campo eléctrico tiene *vientres* (máximos) y *nodos* (mínimos), en ubicaciones espaciales fijas, distantes entre sí $1/4$ de la longitud de onda λ .

Los vientres están ubicados a múltiplos impares de $\lambda/4$ y los nodos están ubicados a múltiplos de $\lambda/2$, ambas distancias medidas desde la superficie conductora perfecta.

*Onda de Campo Magnético
(Incidente y Reflejada)*



*Onda de Campo Eléctrico
(Incidente y Reflejada)*

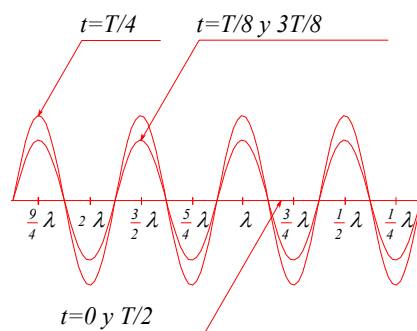
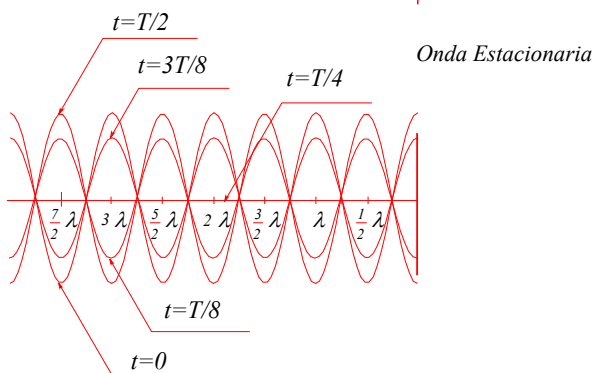
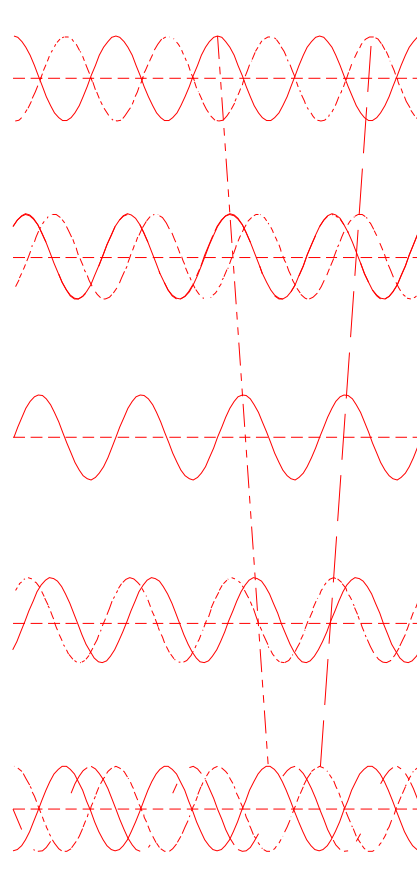


Figura 5.4. Reflexión y refracción de ondas planas sobre una superficie conductora ideal.

En cada punto del espacio, la variación temporal de la onda estacionaria de campo eléctrico es senoidal, alcanzando el valor máximo correspondiente al punto en cuestión. En todos los puntos espaciales dentro de un *ojo*, los fasores de campo eléctrico están en fase temporal entre sí, y en contrafase con respecto a aquellos pertenecientes a *ojos* adyacentes.

En el diagrama anterior puede observarse como pulsa senoidalmente la onda estacionaria de campo eléctrico, a medida que transcurre el tiempo, alcanzando los valores máximos correspondientes a la envolvente.

Se tratará ahora de determinar lo que ocurre con la onda de campo magnético.

Como las condiciones de contorno en la superficie perfectamente conductora imponen que el campo eléctrico tenga una inversión de fase en la reflexión, para obtener campo eléctrico nulo sobre la superficie y de esta manera garantizar la continuidad de su componente tangencial, resulta necesario que el campo magnético se refleje sin inversión de fase. Esto ocurre necesariamente pues de no ser así, no habría inversión del sentido de propagación de

la onda electromagnética reflejada. Por lo tanto, la fase de la onda magnética reflejada coincide con la de la incidente, duplicándose entonces el campo magnético sobre la superficie conductora perfecta.

Otra interpretación del mismo fenómeno resulta de considerar el flujo de corriente que se establece sobre la superficie del conductor perfecto, como consecuencia de la onda incidente de campo eléctrico. Esta corriente está ubicada espacialmente en el mismo sentido que dicho campo eléctrico, y produce un campo magnético (ley de Ampere), onda reflejada de campo magnético, que a su vez produce un campo eléctrico (ley de Faraday), onda reflejada de campo eléctrico, que se opone al original dando un campo eléctrico total nulo, y un campo magnético total doble del incidente.

Esta interpretación coincide con aquella dada para determinar las condiciones de contorno del campo eléctrico y magnético tangencial. Así para no tener continuidad de componente tangencial de campo magnético, es necesario la presencia de una densidad lineal (A/m) de corriente superficial (o laminar) finita, dando así lugar a una densidad superficial (A/m²) de corriente infinita, lo que implica rotacional de campo magnético infinito, que circula sobre una superficie transversal nula, la superficie límite del conductor perfecto. Esta densidad de corriente superficial finita, o densidad de corriente infinita, está asociada a un campo eléctrico nulo y a una conductibilidad infinita, pero esta indeterminación queda salvada por las anteriores consideraciones.

Habida cuenta de que las ondas incidentes de campo eléctrico y magnético están vinculadas por la impedancia intrínseca del medio (vacío), y que lo propio acontece con las ondas reflejadas pero cambiado de signo, ya que cambia el sentido de propagación, la expresión de la onda completa de campo magnético resulta:

$$H_y = \frac{E_m}{z_i} \cos(\omega t - \beta z) + \frac{E_m}{z_i} \cos(\omega t + \beta z) \quad (36)$$

Si ahora se utiliza notación exponencial para facilitar las operaciones a realizar, la onda completa resulta ser:

$$H_y = \text{Real} \left[\frac{E_m}{z_i} e^{j(\omega t - \beta z)} + \frac{E_m}{z_i} e^{j(\omega t + \beta z)} \right] \quad (37)$$

Siendo el fasor un factor común a ambas ondas, incidente y reflejada, la anterior expresión deviene en:

$$H_y = \text{Real} \left[\frac{E_m}{z_i} e^{j\omega t} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) \right] \quad (38)$$

Reconociendo la expresión exponencial del coseno trigonométrico:

$$H_y = \text{Real} \left[2 \frac{E_m}{z_i} e^{j\omega t} \cos(\beta z) \right] \quad (39)$$

Volviendo a notación trigonométrica, la expresión de la onda total de campo magnético en el vacío resulta ser:

$$H_y = 2 \frac{E_m}{z_i} \cos(\beta z) \cos(\omega t) \quad H_x = H_z = 0 \quad (40)$$

Esta onda total de campo magnético, en conjunto con las ondas incidente y reflejada, es mostrada en la figura anterior, graficada para varios instantes de tiempo, lo que se traduce en diferentes fases de arribo de la onda incidente de campo magnético sobre la superficie conductora perfecta.

La envolvente (lugar geométrico de los máximos en cada punto del espacio) de esta onda estacionaria de campo magnético, tiene la forma típica de *ojos*, y su valor corresponde a la siguiente expresión:

$$\text{Envolvente} = 2 \frac{E_m}{z_i} \cos(\beta z) \quad (41)$$

Del análisis de las ondas de campo magnético puede extraerse conclusiones similares a las ya detalladas con respecto a la onda de campo eléctrico. Para no abundar sobre conceptos ya tratados solamente se remarcarán las diferencias existentes.

Los nodos de la onda estacionaria de campo magnético coinciden con los vientres de la onda de campo eléctrico, y viceversa.

El fasor campo magnético está en cuadratura temporal con el fasor campo eléctrico, dando por consiguiente una potencia transportada nula, como ya había sido previsto. La energía es puramente reactiva, oscilando entre energía magnética o eléctrica, con una pulsación angular doble respecto de aquella de la onda incidente (o reflejada) de campo eléctrico (o magnético).

Como dato histórico puede citarse que la presencia de ondas electromagnéticas estacionarias permitió a Hertz demostrar la validez de las Ecuaciones de Maxwell, a través de la medición experimental de la presencia de los

vientres de la onda estacionaria, haciendo saltar una chispa entre los extremos de un aro de 1 metro de diámetro, utilizado como sensor, y ubicado frente a una lámina de zinc que reflejaba una onda producida por un generador elemental. La presencia de nodos y vientos, o sea la presencia de una onda estacionaria, es prueba de la existencia de dos ondas progresivas de igual amplitud, pero de sentidos inversos de propagación.

5.2.2. REFLEXIÓN SOBRE SUPERFICIE DIELECTRICA PERFECTA.

Si una onda plana, propagándose en el vacío (medio dieléctrico ideal o perfecto), incide normalmente sobre una superficie límite de separación con un medio dieléctrico perfecto, se generarán una onda reflejada que vuelve al medio original, y otra transmitida que ingresa y se propaga en el nuevo medio dieléctrico, estableciéndose un nuevo balance energético.

En el tratamiento siguiente se utilizará el subíndice 1 para indicar la onda incidente, 2 para la onda reflejada, y 3 para la onda refractada o transmitida.

La onda total en el vacío será la suma de las ondas incidente y reflejada, y tendrá la siguiente expresión genérica:

$$E_{x\text{ vacío}} = E_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + E_{m2} e^{j(\omega t + \beta_2 z)} \quad (42)$$

Mientras que la onda de campo eléctrico en el dieléctrico será:

$$E_{x\text{ dieléctrico}} = E_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)} \quad (43)$$

Recordando que la componente tangencial de campo eléctrico debe ser continua a través de la superficie de separación límite, ubicada en $z=0$, se tendrá que:

$$E_{m1} + E_{m2} = E_{m3} \quad (44)$$

Por otra parte, el campo magnético en el vacío tiene la siguiente expresión:

$$H_{y\text{ vacío}} = H_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + H_{m2} e^{j(\omega t + \beta_2 z)} \quad (45)$$

Y para el dieléctrico será:

$$H_{y\text{ dieléctrico}} = H_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)} \quad (46)$$

Por otra parte, y dada la no existencia de una densidad de corriente de conducción superficial finita, la componente tangencial de campo magnético es continua a ambos lados de la superficie límite, o sea que:

$$H_{m1} + H_{m2} = H_{m3} \quad (47)$$

Dado que los campos eléctrico y magnético de cada onda progresiva, están vinculados entre sí a través de las impedancias intrínsecas de los medios en que se propagan, resulta:

$$E_{m1} = Z_{i1} H_{m1} \quad (48)$$

$$E_{m2} = -Z_{i1} H_{m2} \quad (49)$$

$$E_{m3} = Z_{i3} H_{m3} \quad (50)$$

El signo negativo en la relación de las ondas reflejadas indica la inversión del sentido de propagación de dichas ondas, respecto de las incidentes (o transmitidas), como ya ha sido oportunamente aclarado.

Resolviendo el conjunto de ecuaciones que expresan la continuidad de los campos eléctrico y magnético tangenciales, y la relación entre los mismos dada por la impedancia intrínseca de los distintos medios, resultan las siguientes expresiones para las ondas reflejadas y transmitidas de campos eléctrico y magnético:

$$E_{m2} = \frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} E_{m1} = \rho_{RE} E_{m1} \quad E_{m3} = \frac{2Z_{i3}}{Z_{i3} + Z_{i1}} E_{m1} = \rho_{TE} E_{m1} \quad (51)$$

$$H_{m2} = -\frac{Z_{i3} - Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} H_{m1} = \rho_{RH} H_{m1} \quad H_{m3} = \frac{2Z_{i1}}{Z_{i3} + Z_{i1}} H_{m1} = \rho_{TH} H_{m1} \quad (52)$$

Se llama *coeficiente de reflexión* (ρ_R de campo eléctrico o magnético) a la relación entre las ondas reflejada e incidente (de campo eléctrico o magnético). Los coeficientes de reflexión de los campos eléctrico y magnético difieren entre sí por su signo, asegurando de esta manera la inversión de la onda reflejada de uno de los campos, y de esta manera invirtiendo el sentido de propagación de la onda electromagnética reflejada respecto de la incidente, dependiendo de la relación entre las impedancias intrínsecas de los medios, cual de las ondas se invierte.

Se llama *coeficiente de transmisión* (ρ_T de campo eléctrico o magnético) a la relación entre las ondas transmitida e incidente (de campo eléctrico o magnético).

Ambos coeficientes, reflexión y transmisión, son en general un número complejo, siendo en este caso particular de la reflexión *dieléctrico perfecto-dieléctrico perfecto* un número real. El módulo de estos coeficiente varía entre 0 y 1.

Puede observarse de los anteriores coeficientes que, si ambos medios poseen distintos valores de permitividades o permeabilidades pero la relación entre los mismos es igual en ambos medios (igual impedancia característica), no existirá onda reflejada y la onda transmitida coincidirá con la incidente. En tal caso se dice que ambos medios están adaptados. Este caso es de poca importancia práctica, ya que no es común encontrar materiales dieléctricos para altas frecuencias con permeabilidad diferente de la del vacío, pero es ilustrativo ya que no se esperaría intuitivamente una transmisión libre de reflexión, de una onda que proveniente del vacío encontrara un medio en donde la permitividad y la permeabilidad sean, por ejemplo, 5 veces mayor que la del vacío.

Comparando los resultados obtenidos antes en el caso de la reflexión sobre un medio conductor perfecto, con el caso de la reflexión sobre un medio dieléctrico perfecto que ahora nos ocupa, cabe preguntarse si se establecerá una onda estacionaria en el medio en el cual venía propagándose la onda (vacío o dieléctrico perfecto).

Si bien la respuesta al anterior interrogante es estrictamente que no, ya que no existe una reflexión total, la onda total (incidente más reflejada) puede ser descompuesta en la suma de una onda estacionaria más otra progresiva (propagándose en el mismo sentido que la incidente).

Si el coeficiente de reflexión tiende a la unidad (reflexión total), la onda total (incidente más reflejada) tiende a una onda estacionaria pura. Si el coeficiente de reflexión tiende a cero (transmisión total), la onda total (incidente más reflejada) tiende a una onda progresiva pura (no hay discontinuidad entre los medios).

De lo anteriormente expresado surge la necesidad de cuantificar el contenido estacionario de una onda. Este factor se denomina *relación de onda estacionaria (ROE)*, siendo este coeficiente igual a la relación entre las intensidades de campo (eléctrico o magnético) en los vientres y nodos. O sea:

$$ROE = \frac{|Ventre|}{|Nodo|} = \frac{|E_{m1}| + |E_{m2}|}{|E_{m1}| - |E_{m2}|} = \frac{1 + |\rho_{RE}|}{1 - |\rho_{RE}|} \quad (53)$$

La relación de onda estacionaria es un número real. El módulo de esta relación de onda estacionaria varía entre 1, cuando el coeficiente de reflexión es nulo (medios completamente adaptados), e infinito, cuando el coeficiente de reflexión es unitario (medios completamente desadaptados).

En la **Figura 5.5** se grafican, para distintos instantes de arribo de la onda incidente a la superficie límite, las ondas incidentes y reflejadas de campos eléctrico y magnético, y la onda total (incidente más reflejada) sobre el medio en el cual venía propagándose la onda. También se grafica la onda transmitida en el segundo medio.

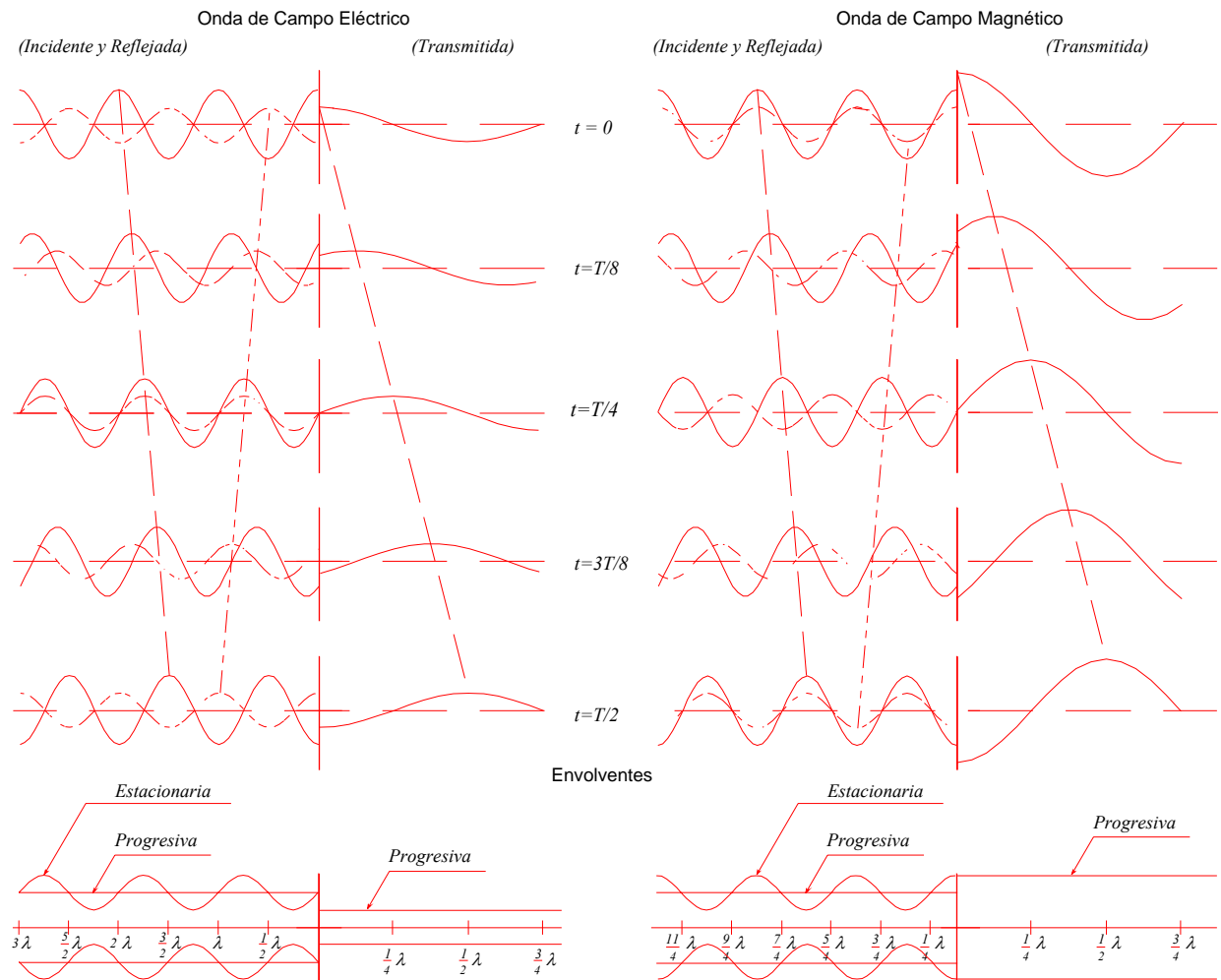


Figura 5.5. Reflexión y refracción de ondas planas sobre superficie dieléctrica perfecta.

5.2.3. REFLEXIÓN SOBRE SUPERFICIE DIeléCTRICA REAL (O CONDUCTOR REAL).

Si la conductividad real (o equivalente por efecto de la histéresis dieléctrica) de un medio dieléctrico no es nula de tal manera que pueda existir una densidad de corriente de conducción apreciable (medio dieléctrico real, o con pérdidas, o con histéresis dieléctrica), o la conductibilidad de un medio conductor no es infinita de tal manera que pueda existir un campo eléctrico apreciable (medio conductor real), la reflexión sobre la superficie de tal medio tiene algunas características particulares.

Para el análisis de este caso son válidas todas las expresiones halladas para el caso de la reflexión sobre una superficie dieléctrica perfecta, a condición de reemplazar la constante de fase por la constante de propagación, ya que esta última es ahora un número complejo (en vez de imaginario). Por otra parte hay que considerar también que la impedancia intrínseca del medio es ahora compleja (en lugar de real).

Las anteriores consideraciones arrojan como resultado que las ondas reflejadas de campo eléctrico o magnético no estarán necesariamente en fase o contrafase con las respectivas ondas incidentes, del mismo modo que tampoco estarán necesariamente en fase entre sí las ondas incidentes de ambos campos, o las reflejadas.

5.3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS CON INCIDENCIA OBLICUA.

Se considerará a continuación, la fenomenología que tiene lugar como consecuencia de una incidencia oblicua de una onda plana sobre una superficie de separación entre dos medios, considerando por simplicidad que la onda venía propagándose en el vacío (medio dieléctrico perfecto).

Es posible y deseable extender los conceptos de impedancia intrínseca ya aplicados para los casos de incidencia normal.

Es conveniente separar el tratamiento de la incidencia oblicua en dos casos, polarización con el campo eléctrico ubicado sobre el plano de incidencia, o normal al mismo, siendo cualquier otro caso considerado como superposición de estos casos dos particulares.

El plano de incidencia es el que contiene a las siguientes dos rectas, una normal a la superficie límite sobre la cual incide la onda, y la otra que sigue la dirección de propagación de la onda incidente.

El caso de ondas que inciden oblicuamente sobre una superficie límite de separación entre dos medios, uno (o ambos) de los cuales es un medio dieléctrico con pérdidas (o conductor no ideal), puede ser determinado por la adecuación de las expresiones que se hallarán en el siguiente desarrollo, utilizando los valores correspondientes de impedancia intrínseca y constante de propagación. La interpretación de los resultados obtenidos para tal caso, resulta complicada, y escapa al objetivo del presente análisis.

5.3.1. REFLEXIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE CONDUCTORA PERFECTA.

Polarización con campo eléctrico normal al plano de incidencia.

En la **Figura 5.6** se ejemplifica la ubicación de los vectores de campo eléctrico y magnético, respecto de la superficie límite y del plano de incidencia.

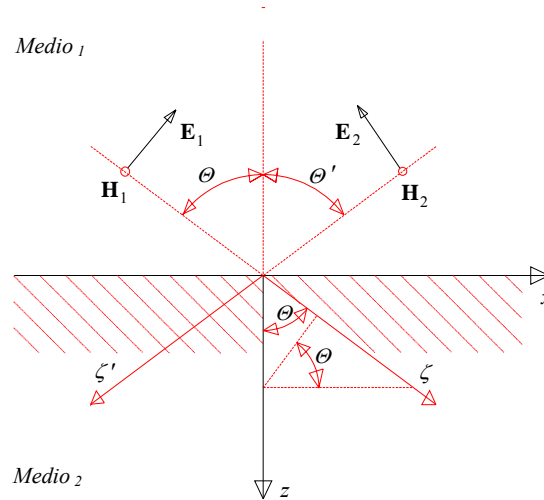


Figura 5.6. Reflexión sobre una superficie conductora perfecta, con campo eléctrico normal al plano de incidencia.

En la figura se muestra que la dirección de propagación de la onda incidente forma un ángulo θ con respecto a la normal al medio conductor.

Debido a que la energía, como ya ha sido analizado con anterioridad, no puede ingresar al interior del medio conductor perfecto, existirá una onda reflejada, cuya dirección de propagación estará determinada por un cierto ángulo θ' , respecto de la normal al punto de incidencia.

Los campos eléctrico y magnético de ambas ondas, incidente y reflejada, deben ser perpendiculares a sus direcciones de propagación, por propiedad inherente a las ondas planas, de modo tal que los campos eléctricos, incidente y reflejado, pueden estar ubicados espacialmente como se indica en la **Figura 5.6**. Por otra parte los campos magnéticos, incidente y reflejado, deben estar ubicados como se indica en dicha figura, para dar los sentidos correctos de propagación de cada onda electromagnética.

Si se denomina ζ a la dirección de propagación de la onda incidente, y ζ' a la dirección de propagación de la onda reflejada en el sentido negativo de ζ' , los factores de fase para cada onda serán:

$$\begin{aligned} \text{factor de fase onda incidente} &= e^{-j\beta\zeta} \\ \text{factor de fase onda reflejada} &= e^{-j\beta\zeta'} \end{aligned}$$

La onda total, suma de ondas incidente y reflejada, en cualquier punto x, z con $z < 0$, será:

$$\mathbf{E}(x, z) = E_1 e^{-j\beta\zeta} + E_2 e^{-j\beta\zeta'} \quad (54)$$

siendo:

- E_1 : valor máximo del fasor correspondiente a la onda incidente en $z=0$
- E_2 : valor máximo del fasor correspondiente a la onda reflejada en $z=0$

Es necesario expresar todas las coordenadas espaciales en términos de un único sistema de coordenadas, tomando como referencia a la superficie límite, ubicada en $z=0$. Adoptando el sistema cartesiano, resultan las siguientes transformaciones:

$$\zeta = x \sen \theta + z \cos \theta \quad (55)$$

$$\zeta' = x \sen \theta' + z \cos \theta' \quad (56)$$

Que substituidas en los factores de fase, y particionadas las ondas de campo eléctrico en sus componentes según los ejes x y z arrojan las siguientes expresiones para los mismos:

$$E_x(x, z) = E_1 \cos \theta e^{-j\beta(x \sen \theta + z \cos \theta)} - E_2 \cos \theta' e^{j\beta(-x \sen \theta' + z \cos \theta')} \quad (57)$$

$$E_z(x, z) = -E_1 \sen \theta e^{-j\beta(x \sen \theta + z \cos \theta)} - E_2 \sen \theta' e^{j\beta(-x \sen \theta' + z \cos \theta')} \quad (58)$$

Para la onda total del campo magnético resulta:

$$H_y(x, z) = H_1 \cos \theta e^{-j\beta(x \sen \theta + z \cos \theta)} - H_2 \cos \theta' e^{j\beta(-x \sen \theta' + z \cos \theta')} \quad (59)$$

El paso siguiente es aplicar las condiciones de contorno impuestas por el medio conductor perfecto, que requiere que la componente total del campo eléctrico E_x (componente tangencial) sea nula, a ambos lados de la superficie límite. Esto es que para todo x , en $z=0$:

$$E_x(x, 0) = E_1 \cos \theta e^{-j\beta x \sen \theta} - E_2 \cos \theta' e^{-j\beta x \sen \theta'} \quad (60)$$

Esta ecuación puede ser satisfecha para todo x solamente si el factor de fase es el mismo para los dos términos, onda incidente y reflejada, y esto requiere que:

$$\theta = \theta' \quad (61)$$

Es decir que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Este resultado implica a su vez la igualdad de los módulos de campo eléctrico incidente y reflejado, sobre la superficie límite, es decir:

$$E_1 = E_2 \quad (62)$$

Si las conclusiones anteriores se introducen en cada una de las componentes de campo eléctrico E_x y E_z , y en la componente de campo magnético H_y , resultan:

$$E_x(x, z) = -2jE_1 \cos \theta \sen(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta x \sen \theta} \quad (63)$$

$$E_z(x, z) = -2jE_1 \sen \theta \cos(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta x \sen \theta} \quad (64)$$

$$Z_i H_y(x, z) = 2jE_1 \sen(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta x \sen \theta} \quad (65)$$

Los campos así expresados se corresponden con una onda progresiva con respecto a la dirección x , y una onda estacionaria con respecto a la dirección z . Esto es, la componente E_x del campo eléctrico es cero, para todo tiempo, sobre el plano conductor y sobre planos paralelos distantes nd desde el mismo, con n entero y:

$$d = \frac{\lambda}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2f \sqrt{\mu\epsilon} \cos \theta} \quad (66)$$

La amplitud de la componente E_x de campo eléctrico es máxima en planos paralelos al conductor, y a distancias que sean múltiplos impares de $d/2$.

Por otra parte, la componente E_z del campo eléctrico y la componente H_y del campo magnético son máximas donde la componente E_x del campo eléctrico es nula y viceversa; y además, están en cuadratura de fase temporal con la misma.

Quizás la conclusión más interesante del análisis de este caso es que la distancia entre máximos y mínimos sucesivos de las ondas, medidos en la normal a la superficie límite, aumenta a medida que la incidencia es más oblicua.

Polarización con campo eléctrico paralelo al plano de incidencia.

En la siguiente **Figura 5.7** se ejemplifica la ubicación de los vectores de campo eléctrico y magnético, respecto de la superficie límite y del plano de incidencia, y puede observarse que la dirección de propagación de la onda incidente forma un ángulo θ con respecto a la normal al medio conductor.

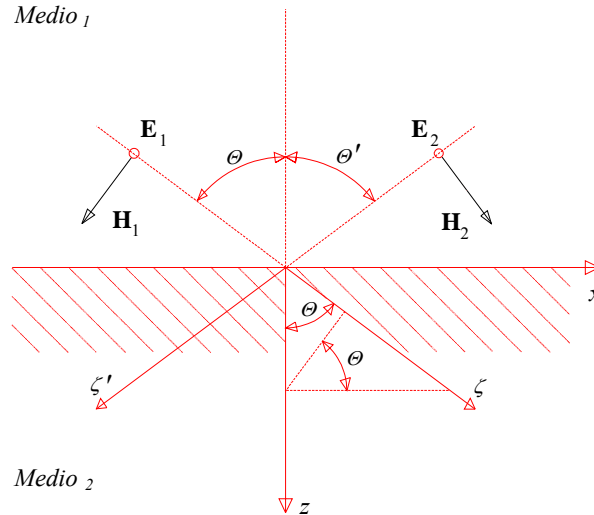


Figura 5.7. Reflexión sobre una superficie conductora perfecta, con campo eléctrico paralelo al plano de incidencia.

Procediendo en forma similar al caso anteriormente tratado, se puede expresar las componentes de las dos ondas de campo en un sistema de coordenadas cartesianas, es decir:

$$E_y(x, z) = E_1 e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} + E_2 e^{j\beta(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \quad (67)$$

$$Z_i H_x(x, z) = -E_1 \cos \theta e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} + E_2 \cos \theta' e^{j\beta(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \quad (68)$$

$$Z_i H_z(x, z) = E_1 \sin \theta e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} + E_2 \sin \theta' e^{j\beta(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \quad (69)$$

Las condiciones de contorno en la superficie perfectamente conductora, determinan que la componente E_y del campo eléctrico (componente tangencial), justo por encima de dicha superficie, sea nula para todo x , lo cual utilizando los mismos argumentos explicitados en el punto anterior, determinan la igualdad de los ángulos incidente y reflejado, y la igualdad entre los módulos de las ondas incidente y reflejada. Las componentes de los campos devienen entonces:

$$E_y(x, z) = -2jE_1 \cos(\beta z \sin \theta) e^{-j\beta x \sin \theta} \quad (70)$$

$$Z_i H_x(x, z) = -2jE_1 \cos \theta \cos(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta x \sin \theta} \quad (71)$$

$$Z_i H_z(x, z) = -2jE_1 \sin \theta \sin(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta x \sin \theta} \quad (72)$$

Este conjunto de ondas determina una onda progresiva en la dirección del eje x , y una onda estacionaria en la dirección del eje z .

Por otra parte se encuentran, ceros en la dirección del eje z para las componentes de campo eléctrico E_y y de campo magnético H_z , y máximos para la componente de campo magnético H_x , en el plano perfectamente conductor y en planos paralelos ubicados a distancias nd del mismo, siendo d el valor obtenido con la expresión (66).

5.3.2. VELOCIDAD DE FASE PARA INCIDENCIA OBLICUA.

Se considerará una onda incidente, de modo tal que viajando en una dirección positiva con la siguiente velocidad:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (73)$$

Velocidad que forma un ángulo θ con una dirección deseada z alineada con la normal a alguna superficie reflectante. Se ha visto que es posible expresar el factor de fase en términos de las coordenadas x y z , de modo tal que la onda incidente de campo eléctrico tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}(x, z) = E_1 e^{-j\beta\zeta} = E_1 e^{-j\beta(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (74)$$

Para ciertos propósitos, es deseable expresar los cambios de fase de la onda medidos sobre la dirección x , o la z . Resulta apropiado entonces definir las dos constantes de fase para esas direcciones, o sea:

$$\beta_x = \beta \sin \theta \quad (75)$$

$$\beta_z = \beta \cos \theta \quad (76)$$

La expresión de la onda incidente, explicitando el fasor y las constantes de fase, será entonces:

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E_1 e^{j(\omega t - \beta_x x - \beta_z z)} \quad (77)$$

Si se deseara mantener la fase instantánea constante, a medida que uno se mueva en la dirección x , se debe hacer:

$$\omega t - \beta_x x = \text{cte.} \quad (78)$$

Ya que el otro término del factor de fase se mantiene constante cuando uno se mueve en la dirección x , al depender estrictamente de z .

La velocidad de fase, es la velocidad con que se mueve un punto de igual fase de la onda, o sea:

$$v_{\text{fase } x} = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(\omega t - \beta_x x) = \text{cte.}} = \frac{\omega}{\beta_x} \quad (79)$$

o sea:

$$v_{\text{fase } x} = \text{cte.} = \frac{\omega}{\beta \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon} \sin \theta} = \frac{v}{\sin \theta} \quad (80)$$

Siendo v la velocidad de fase normal al frente de onda, es decir:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (81)$$

Con un razonamiento similar, se arriba a la siguiente velocidad de fase en la dirección z :

$$v_{\text{fase } z} = \text{cte.} = \frac{\omega}{\beta \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon} \cos \theta} = \frac{v}{\cos \theta} \quad (82)$$

Se puede apreciar que en ambos casos que la velocidad de fase es superior a la velocidad de fase medida sobre la normal al frente de onda. Esto no contradice ningún principio relativístico, debido a que ningún objeto material se mueve a dichas velocidades (superiores a la velocidad de la luz c). Estas velocidades se corresponden con la velocidad de un punto ficticio de intersección de un frente de onda y de una línea dibujada en la dirección seleccionada para medir estas velocidades de fase.

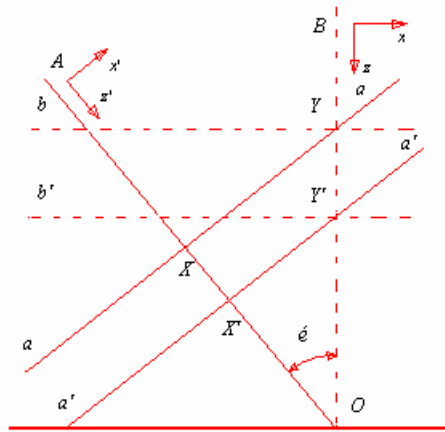


Figura 5.8.

Como se muestra en la **figura 5.8**, si un plano de fase constante $a-a'$ se mueve hasta $a'-a'$ en un dado intervalo de tiempo, la distancia recorrida, medida sobre la normal al frente de onda es, XX' mientras que la distancia recorrida medida sobre la dirección z es una distancia mayor de magnitud YY' . La relación entre ambas distancias es:

$$YY' = XX' \sec \theta \quad (83)$$

Esta relación es la misma ya obtenida para las velocidades de fase.

Estos conceptos son mejor comprendidos haciendo uso de la siguiente figura:

Este concepto de velocidad de fase, y el entendimiento de que puede superar la velocidad de la luz c , serán de gran utilidad en la discusión a desarrollar para el tema **Guías de Ondas**.

Impedancia intrínseca para incidencia oblicua.

Para los problemas planteados por la incidencia oblicua sobre un plano que separa medios distintos, resulta de utilidad definir la impedancia de onda (no confundir con impedancia intrínseca del medio) como la relación entre las componentes de los campos eléctrico y magnético ubicadas en planos paralelos a la superficie límite. La razón que da sustento a esta definición es la continuidad de las componentes tangenciales de dichos campos, y la consiguiente igualdad de la impedancia de onda a ambos lados de la superficie límite.

De esta manera, cuando las ondas incidente y reflejada forman un ángulo θ con la normal, se puede definir una impedancia de onda característica referida a la dirección z , en términos de las componentes de los campos ubicadas en planos transversales a esa dirección. Entonces, *para ondas polarizadas con el campo eléctrico en el plano de incidencia*, será:

$$Z_z = \frac{E_{1x}}{H_{1y}} = -\frac{E_{2x}}{H_{2y}} = Z_i \cos \theta \quad (84)$$

Donde, como ya ha sido utilizado con anterioridad los subscripts **1** y **2**, son empleados para identificar a las ondas incidente y reflejada respectivamente.

De la misma manera, *para ondas polarizadas con el campo eléctrico normal al plano de incidencia*, será:

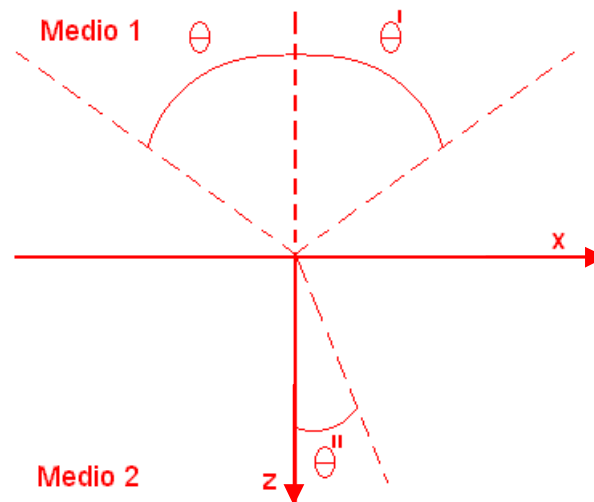
$$Z_z = -\frac{E_{1y}}{H_{1x}} = -\frac{E_{2y}}{H_{2x}} = Z_i \sec \theta \quad (85)$$

Se puede observar que, para el primer caso de polarización, la impedancia de onda es siempre menor que la impedancia característica del medio, como era factible de esperar ya que solo una componente de campo eléctrico está ubicada en el plano transversal x - y , mientras que el campo magnético total yace en dicho plano. Para el segundo caso de polarización, la conclusión es inversa, ya que la impedancia de onda es siempre superior a la impedancia característica del medio.

La interpretación de los resultados anteriores permite evaluar, bajo otro enfoque, las conclusiones a que se arribó para el caso de reflexión oblicua sobre un medio perfectamente conductor. Dicho medio presenta una impedancia nula para las componentes transversales de campo eléctrico E_x . Por consiguiente se debe esperar una onda estacionaria en la dirección z , con otros ceros distanciados a múltiplos de media longitud de onda, siendo esta longitud de onda computada a partir de la velocidad de fase según dicha dirección z , como ya ha sido visto en puntos anteriores.

5.3.3.R EFLEXIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE DIELECTRICA PERFECTA.**Ley de reflexión.**

Para una onda plana incidente con un cierto ángulo θ respecto de la normal a la superficie límite entre dos dieléctricos perfectos, con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , se tendrá una situación como la detallada en la **figura 5.9**:

**Figura 5.9**

Existirá una onda reflejada en el medio 1, con un cierto ángulo θ' respecto de la normal, y una onda refractada o transmitida en el medio 2, con un cierto ángulo θ'' respecto de la normal. Para cualquier tipo de polarización, se debe satisfacer la condición de continuidad de las componentes tangenciales de campo eléctrico y magnético sobre la superficie límite, a $z=0$, para todo valor de x .

Aplicando el mismo razonamiento empleado para la reflexión en un medio conductor perfecto, el mantenimiento de las componentes tangenciales solo es posible, para todo x , si todas las ondas, incidente, reflejada y refractada, tiene el mismo valor del factor de fase en la dirección x , y por ende la misma velocidad de fase en la dirección x . Aplicando esta conclusión, resulta:

$$\frac{v_1}{\sin \theta} = \frac{v_1}{\sin \theta'} = \frac{v_2}{\sin \theta''} \quad (86)$$

La igualdad del primer par de ecuaciones resulta en:

$$\theta' = \theta'' \quad (87)$$

Es decir que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia.

Ley de refracción de SNELL.

La igualdad el segundo par de ecuaciones determina la relación entre el ángulo de refracción y el de incidencia, o sea:

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_{i1}}{Z_{i2}} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (88)$$

Esta relación es muy conocida en óptica, y se la denomina **Ley de Snell**. El *índice de refracción* para el vacío o espacio libre, se define como la unidad, de modo tal que en cualquier otro medio dieléctrico, es una medida de la velocidad de fase de dicho medio respecto del vacío. Es práctica común, para caracterizar las propiedades de un medio dieléctrico, utilizar el índice de refracción en el rango de frecuencias infrarrojas u ópticas, o la velocidad de fase en términos de permitividad y permeabilidad, en el rango de bajas frecuencias y microondas.

Para dieléctricos comunes se puede realizar la siguiente aproximación:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{1/2} \quad (89)$$

Ya que para estos medios normalmente se cumple que:

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \quad (90)$$

Reflexión y transmisión. Polarización campo eléctrico en plano de incidencia.

Para computar las ondas reflejadas y transmitidas, se hará uso del concepto de impedancia de onda, asociado a la incidencia oblicua sobre una superficie conductora perfecta, ya tratado. Para demostrar la validez de este procedimiento, se dan a continuación las expresiones que determinan la continuidad de las componentes tangenciales de campos eléctrico y magnético:

$$E_{x1} + E_{x2} = E_{x3} \quad (91)$$

$$H_{y1} + H_{y2} = H_{y3} \quad (92)$$

Si se definen las *impedancias de onda* en términos de las componentes tangenciales, resulta:

$$Z_{Z1} = \frac{E_{x1}}{H_{y1}} = -\frac{E_{x2}}{H_{y2}} \quad (93)$$

$$Z_L = \frac{E_{x3}}{H_{y3}} \quad (94)$$

Por lo tanto, las condiciones de contorno pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$E_{x1} + E_{x2} = E_{x3} \quad (95)$$

$$\frac{E_{x1}}{Z_{Z1}} - \frac{E_{x2}}{Z_{Z1}} = \frac{E_{x3}}{Z_L} \quad (96)$$

Operando sobre las anteriores ecuaciones, resultan los siguientes coeficientes de reflexión y transmisión para campo eléctrico:

$$\rho_{RE} = \frac{E_{x2}}{E_{x1}} = \frac{Z_L - Z_{Z1}}{Z_L + Z_{Z1}} \quad (97)$$

$$\rho_{TE} = \frac{E_{x3}}{E_{x1}} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{Z1}} \quad (98)$$

Para el presente caso, dado que solamente existe una onda en el medio 2 (la onda transmitida actúa como onda incidente en este medio, si no fuera continuo), la impedancia intrínseca de este medio 2 coincide con la impedancia de onda referida a la dirección z , de la onda transmitida. O sea que:

$$Z_L = Z_{i2} \cos \theta'' = Z_{i2} \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (99)$$

El segundo término de la anterior ecuación se obtuvo a partir de la Ley de Snell, y sigue siendo válido aún cuando la impedancia intrínseca del medio 2 sea compleja (y no real como en este caso).

Por otra parte la impedancia de onda referida a la dirección z , en el medio 1, es:

$$Z_{Z1} = Z_{i1} \cos \theta \quad (100)$$

El campo total en la región 1 puede ser escrito como la suma de las ondas incidente y reflejada, utilizando el coeficiente de reflexión ya calculado, y las propiedades básicas de las ondas planas. Utilizando la onda incidente de campo magnético como referencia, ya que la misma es paralela a la superficie límite, resulta:

$$E_x = Z_{i1} H_1 \cos \theta e^{-j\beta_x x} \left(e^{-j\beta_z z} + \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (101)$$

$$E_z = Z_{i1} H_1 \sin \theta e^{-j\beta_x x} \left(-e^{-j\beta_z z} + \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (102)$$

$$H_y = H_1 e^{-j\beta_x x} \left(-e^{-j\beta_z z} + \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (103)$$

$$\beta_x = \beta \sin \theta \quad (104)$$

$$\beta_z = \beta \cos \theta \quad (105)$$

Resulta que, el campo tiene forma de onda progresiva en la dirección x , y de onda estacionaria más una progresiva en la dirección de z . La única diferencia respecto al caso de la reflexión sobre un conductor perfecto, es que no resultó una onda estacionaria pura en la dirección de z . La relación entre los máximos y mínimos de la onda, en la dirección de z , pueden ser expresados en términos de la relación de onda estacionaria (ROE), y ésta expresarse en términos del coeficiente de reflexión, arribando a los mismos resultados ya tratados para reflexión normal.

Reflexión y transmisión. Polarización campo eléctrico normal al plano de incidencia.

Para esta polarización se pueden calcular también las relaciones existentes entre impedancias y los coeficientes de reflexión y transmisión. Si se realizan los cálculos pertinentes se llegará a las siguientes expresiones:

$$\rho_{RE} = \frac{E_{y2}}{E_{y1}} = \frac{Z_L - Z_{Z1}}{Z_L + Z_{Z1}} \quad (106)$$

$$\rho_{TE} = \frac{E_{y3}}{E_{y1}} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{Z1}} \quad (107)$$

Para esta polarización, las impedancias de onda resultan:

$$Z_L = Z_{i2} \cos \theta'' = Z_{i2} \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (108)$$

$$Z_{Z1} = Z_{i2} \sec \theta \quad (109)$$

Los campos totales eléctrico y magnético en la región 1, tomando como referencia a la onda incidente de campo eléctrico según la dirección y, resulta:

$$E_y = E_1 e^{-j\beta_x x} \left(e^{-j\beta_z z} + \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (110)$$

$$H_x = -\frac{E_1}{Z_{i1}} \cos \theta e^{-j\beta_x x} \left(e^{-j\beta_z z} - \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (111)$$

$$H_x = \frac{E_1}{Z_{i1}} \sin \theta e^{-j\beta_x x} \left(e^{-j\beta_z z} + \rho_{RE} e^{j\beta_z z} \right) \quad (112)$$

$$\beta_x = \beta \sin \theta \quad (113)$$

$$\beta_z = \beta \cos \theta \quad (114)$$

Reflexión total.

Un estudio más detallado de los resultados obtenidos hasta ahora, muestra que existen varias condiciones particulares de casos de incidencia de especial interés.

Un caso interesante es el de la reflexión total. De las expresiones del coeficiente de reflexión, se puede determinar la condición para una reflexión total, que se corresponde con un módulo unitario de dicho coeficiente. Este valor unitario se logra cuando la impedancia Z_L es cero, infinita, o puramente imaginaria. Para demostrar esta última condición, haciendo $Z_L = jX_L$ y notando que Z_{Z1} es real:

$$|\rho_{RE}| = \frac{|jX_L - Z_{Z1}|}{|jX_L + Z_{Z1}|} = \frac{(X_L^2 + Z_{Z1}^2)^{1/2}}{(X_L^2 + Z_{Z1}^2)^{1/2}} = 1 \quad (115)$$

El valor de Z_L para polarización con campo eléctrico en el plano de incidencia, será cero para un cierto ángulo crítico $\theta = \theta_c$ de modo tal que:

$$\sin \theta_c = \frac{v_1}{v_2} \quad (116)$$

El valor de Z_L para polarización con campo eléctrico normal al plano de incidencia, será infinito para la misma condición.

Para ambos tipos de polarización, Z_L será imaginaria para ángulos de incidencia mayores que θ_c , por lo que existirá reflexión total para los mismos.

Para dieléctricos comunes donde:

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (117)$$

La expresión del ángulo crítico se reduce a:

$$\sin \theta_c = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^{1/2} \quad (118)$$

Se puede observar que existirá una solución real para estos casos cuando:

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 \quad (119)$$

Es decir, cuando una onda plana pase desde un medio ópticamente más denso a otro no tan denso.

A partir de la Ley de Snell se encontrará que, para un ángulo de incidencia igual al crítico, el ángulo de refracción será $\pi/2$, y será imaginario para ángulos de incidencia superiores al crítico, de modo tal que no habrá pasaje de energía hacia el medio 2. Si bien no hay transferencia de energía, hay valores de campo finito en el segundo medio,

para satisfacer las condiciones de contorno en la superficie límite. Estos campos decaerán exponencialmente con la distancia, ya que la constante de fase será un número imaginario, o lo que es equivalente, la constante de propagación será real pura.

Si bien la onda reflejada tiene la misma amplitud que la incidente, para ángulos de incidencia superiores al crítico, en general no tendrán la misma fase. La relación de fase entre estas ondas incidente y reflejada, tomará un valor para E_{x1} y E_{x2} en polarización con campo eléctrico en el plano de incidencia, distinto de aquella alcanzada para E_{y1} y E_{y2} en polarización con campo eléctrico normal al plano de incidencia, siendo ambas diferencias de fase computadas para el mismo ángulo de incidencia. De este modo, si la onda incidente contiene ambos tipos de polarizaciones, la onda reflejada estará elípticamente polarizada.

Este fenómeno de reflexión total es muy importante en el rango de frecuencias ópticas, ya que a través de su empleo se consigue la reflexión total sin pérdidas, distinto de lo logrado en el caso de reflexión sobre una superficie conductora.

Angulo de BREWSTER.

Se considerará ahora bajo que condiciones es posible no tener onda reflejada, cuando una onda plana incide con un ángulo θ sobre una superficie límite de un medio dieléctrico.

Es conocido a este punto que tal condición ocurre si hay una adaptación de impedancias entre los dos medios, es decir cuando:

$$Z_L = Z_{Z1} \quad (120)$$

Para una onda polarizada con el campo eléctrico en el plano de incidencia, y para medios en donde:

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (121)$$

Las impedancias resultan:

$$Z_L = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (122)$$

$$Z_{Z1} = \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \cos \theta \quad (123)$$

Estas dos impedancias resultarán iguales para un ángulo de incidencia θ_p , tal que:

$$\cos \theta_p = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (124)$$

Esta ecuación tiene por solución:

$$\theta_p = \arcsen \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2} = \arctg \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \quad (125)$$

Se nota que esta ecuación tiene solución cualquiera sea la relación entre las permitividades, de modo tal que para polarización con campo eléctrico en el plano de incidencia, siempre existe un ángulo de incidencia para el cual no existe reflexión. Es decir toda la energía pasa de un medio a otro.

Para polarización con campo eléctrico normal al plano de incidencia, un estudio de las expresiones de las impedancias arroja que no existe ningún ángulo de incidencia que permita obtener igualdad de dichas impedancias, cuando los medios tienen iguales permeabilidades pero distintas permitividades.

De lo anteriormente expresado surge que, una onda incidente con un ángulo θ_p y con ambos tipos de polarización, no tendrá onda reflejada para la componente del primer tipo de polarización, y si tendrá onda reflejada para el segundo tipo de polarización. La onda reflejada para este ángulo de incidencia, contendrá un sólo tipo de polarización, y por ende, estará polarizada en un único plano, con el campo eléctrico normal al plano de incidencia. Por tal motivo al ángulo de incidencia θ_p se lo denomina ángulo de polarización, y es conocido alternativamente como *ángulo de Brewster*.