Ejercicio 3 del Trabajo Práctico 9

Martín Jamilis

En este documento se proponen algunos pasos para la resolución del ejercicio 3 del TP 9. Si bien no se incluye aquí, recuerde que luego de obtener la expresión del controlador en el dominio de z, debe hallar una realización del mismo.

Diseño en el lugar de raíces

Las transferencias originales son $G(s) = \frac{20{,}8}{3s+1}$ y $H(s) = 0{,}04$. Que transformadas al dominio de z son:

$$G(z) = \frac{3{,}193}{z - 0{,}8465} \qquad GH(z) = \frac{0{,}1277}{z - 0{,}8465}$$

La transferencia al error es:

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)}$$

El error de estado estacionario para una entrada escalón será:

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{1 + K_p}$$

con $K_p = \lim_{z \to 1} GH(z) = 0{,}8320$ por lo que $e_{ss} = 0{,}5459$

Para tener un error del 2 % (0.02) se requiere que $K_p = 49$. Esto se puede lograr agregando una ganancia en cascada con la planta. El valor de esa ganancia se determina de:

$$k = \frac{K_p}{GH(1)} \cong 58{,}9$$

Si realizamos el Lugar de raíces del sistema notaremos que para esa ganancia el sistema es inestable:

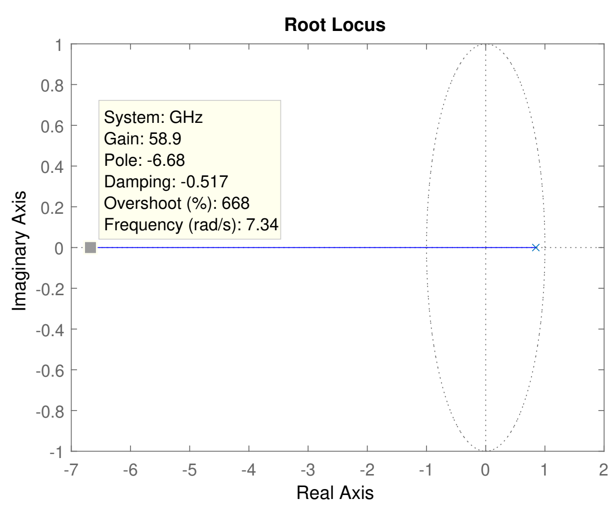

Figura 1: Lugar de raíces del sistema sin compensar

Esto se puede verificar también mediante test de Jury, o bien, en este caso evaluando la condición de ganancia en $z = -1$

$$|k_{critica} GH(-1)| = 1$$

Para estabilizar el sistema, una posible solución es agregar polos y ceros que modifiquen el lugar de raíces de manera que para $k = 58{,}9$ los polos de lazo cerrado se encuentren dentro del circulo unitario. Por ejemplo, si tomamos el compensador

$$(D(z) = (1 - 0{,}7)\frac{z}{z - 0{,}7}$$

el lugar de raíces correspondiente queda como se muestra a continuación:

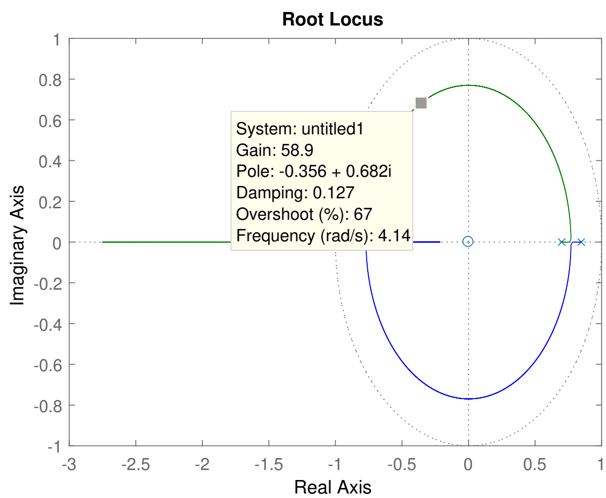

Figura 2: Lugar de raíces del sistema compensado

Es importante que el controlador no aporte ganancia en $z = 1$, por ejemplo, que sea de la forma

$$\frac{(1-b)}{(1-a)}\frac{(z-a)}{(z-b)}$$

Luego podemos elegir la posición de una de las singularidades, por ejemplo, $a = 0$. Finalmente, la posición del polo se puede determinar resolviendo

$$\left| k(1-b)\frac{z}{z-b} GH(z) \right|_{z=-1} < 1$$

$$\frac{k \cdot 0{,}1277}{1{,}8465}\frac{|1-b|}{|1+b|} < 1$$

Si asumimos $0 < b < 1$, se obtiene que $b > 0{,}6$. Notar que la inecuación se resuelve en $z = -1$ porque al agregar un polo y un cero sabemos que el eje real negativo es lugar de raíces a la izquierda del cero que hemos agregado, e indefectiblemente alguna rama cortará al circulo unitario en esa coordenada.

Es igualmente válido realizar el diseño eligiendo la posición de los polos de lazo cerrado, ya que además de estabilizar la planta se fija su respuesta.

Diseño en bode

La transferencia en el dominio de w es:

$$GH(w) = \frac{-0{,}069173(w-4)}{w + 0{,}3326} = \frac{0{,}832(1 - w/4)}{1 + w/0{,}3326}$$

El error de estado estacionario para una entrada escalón será:

$$e_{ss} = \lim_{w \to 0} w \frac{1}{1 + GH(w)} \frac{1}{w} = \lim_{w \to 0} \frac{1}{1 + K_p}$$

con $K_p = \lim_{w \to 0} GH(w) = 0{,}832$ por lo que $e_{ss} = 0{,}5459$.

Al igual que antes, se requiere $k = \frac{K_p}{GH(1)} \cong 58{,}9$ para un error del 2 %. Sin embargo esta ganancia inestabiliza al sistema. Esto se puede verificar realizando el diagrama de Nyquist del GH(w) como se muestra a continuación (la trayectoria encierra al semi plano derecho):

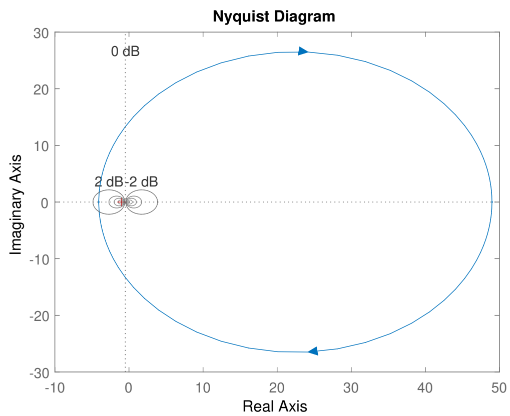

Figura 3: Diagrama de Nyquist del sistema sin compensar

Dado que GH(w) no posee polos de lazo abierto en el semiplano derecho, y que la trayectoria de Nyquist encierra una vez al -1, se concluye que el sistema tiene un polo inestable.

La compensación se puede hacer sobre el diagrama de Bode, buscando obtener márgenes de fase y ganancia positivos, sin modificar la ganancia a bajas frecuencias. Por ejemplo, en la Figura que sigue se muestra como se modifica la respuesta del sistema al agregar un compensador $D(w) = 1/(1 + w/0{,}01)$:

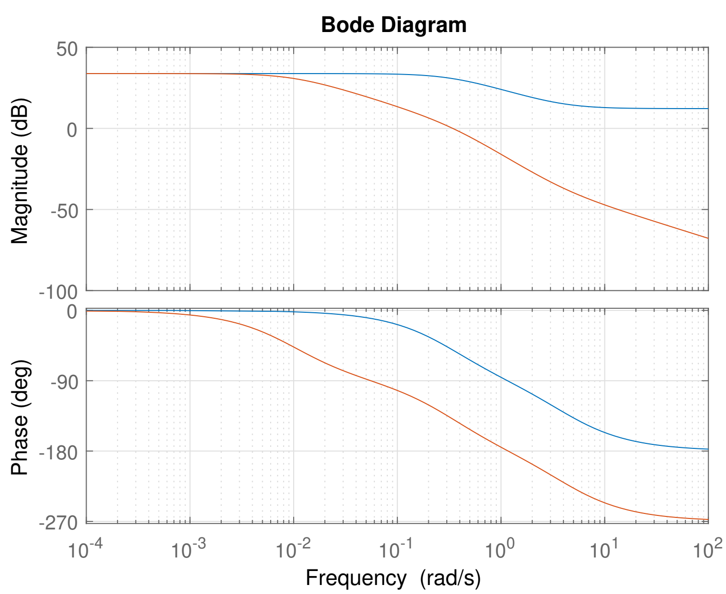

Figura 4: Diagrama de Bode del sistema sin compensar (azul) y compensado (rojo).

Notar que si bien el polo del compensador se encuentra a una frecuencia muy baja, también lo está el polo de la planta. Finalmente,

$$D(z) = 0{,}0024938 \frac{(z+1)}{(z-0{,}995)}$$