

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**

**Cátedra de Campos y Ondas**

**Resumen de Fórmulas sobre Ecuaciones de Maxwell, Notas sobre Corrientes y Campos variables con el tiempo en los conductores, Ecuación de Difusión y Propagación de Ondas Planas<sup>1</sup>**

**Parte 1**

---

<sup>1</sup> Resumen de fórmulas de los apuntes de la Cátedra: “Notas sobre Corrientes y Campos variables con el tiempo en los conductores” y “Notas sobre Ecuaciones de Maxwell, Propagación de Ondas Planas y Vector de Poynting”

## ECUACIONES DE MAXWELL.

Las ecuaciones de Maxwell, tanto en su forma puntual como integral, son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_{libre} dv$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\iint_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Contenida en las anteriores ecuaciones, y como ya ha sido visto previamente se halla la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\iint_{SC} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

En conjunto con las ecuaciones de Maxwell, otras relaciones fundamentales deben ser consideradas cuando se tratan problemas electromagnéticos. Entre ellas cabe mencionar a las siguientes:

Ley de Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

La Ley de fuerzas de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

La relación constitutiva entre los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y de desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

para medios LIH  
(lineales, isotrópicos y homogéneos)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

La relación constitutiva entre los campos intensidad magnética  $\mathbf{H}$  y densidad magnética  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}^*$$

para medios LIH  
(lineales, isotrópicos y homogéneos)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Si ahora se asume que los campos varían armónicamente en el tiempo:

$$\mathbf{D} = \text{Real} \left\{ D_0 e^{j(\omega t + \varphi_D)} \right\} = \text{Real} \left\{ D_0 e^{j\varphi_D} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \text{Real} \left\{ \dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t} \right\}$$

$$\mathbf{D} = \text{Real} \left\{ \dot{\mathbf{D}} \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$\mathbf{D} \equiv \dot{\mathbf{D}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{E} \equiv \dot{\mathbf{E}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{B} \equiv \dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{H} \equiv \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}$$

En donde el símbolo con el punto arriba denota una función sólo espacial pero que siempre debe ir acompañada del término de variación temporal  $e^{j\omega t}$

Las derivadas temporales adoptan la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{E}$$

Bajo la suposición de que los campos varían armónicamente con el tiempo, las ecuaciones de Maxwell pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \mathbf{E}$$

Analicemos las dos fuentes de rotacional del campo magnético

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Considerando que los campos varían armónicamente con el tiempo el término densidad de

corriente de desplazamiento puede expresarse como:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}$$

A partir de la existencia de los dos tipos de corrientes, corriente de conducción ( $J_C$ ) y corriente de desplazamiento ( $J_D$ ) definimos el **factor de pérdida fp** que mide la relación entre ambos módulos:

$|J_C| = \sigma |E|$  será una corriente de conducción

$|J_D| = \omega \epsilon |E|$  será una corriente de desplazamiento

factor de pérdida 
$$f_P = \left| \frac{J_C}{J_D} \right| = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

Se suele definir al cociente  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$  como una constante  $\tau$  llamada **tiempo de relajación**, que para un buen conductor ( $\tau = \epsilon_0 / \sigma \cong 10^{-18}$  segundos):

En los materiales buenos conductores el factor de pérdida es muy alto, o lo que es lo mismo la corriente de desplazamiento es despreciable frente a la corriente de conducción, al menos hasta frecuencias del orden de  $10^{15}$  Hz.

$$f_P = \frac{J_C}{J_D} = 1 / \omega \tau > 100$$

$f_P > 100$  en los buenos conductores en todo el rango de frecuencias de aplicación (el espectro de micro-ondas MICROWAVE 300 MHz a 300 GHz, o sea de  $3 \times 10^8$  Hz a  $3 \times 10^{11}$  Hz)

Para un buen conductor ( $\tau = \epsilon_0/\sigma \cong 10^{-18}$  segundos):  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \cancel{(j\omega\epsilon\mathbf{E})}$

Y aplicando divergencia miembro a miembro, y teniendo en cuenta que la divergencia de un rotacional siempre es nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Lo cual significa que las corrientes de conducción variables en el tiempo, incluso a muy altas frecuencias, si el material es muy buen conductor no tienen divergencia al igual que lo que sucedía cuando las corrientes eran estacionarias.

Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell para los

**BUENOS CONDUCTORES!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**(material lineal, isot, homog)

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

Aplicando a la primera ecuación de arriba la ley de ohm puntual  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

y la relación  $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

y aplicando nuevamente rotor miembro a miembro y reemplazando rotor de  $\mathbf{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J}$$

y teniendo en cuenta que la densidad de corriente tiene divergencia nula (a pesar de ser los campos variables pero gracias a ser un buen conductor):

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}}$$
 conocida con el nombre de ecuación de difusión

De manera similar, puede demostrarse que los vectores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  también quedan descritos por una ecuación de la misma forma:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{B} = \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}}$$

Estas ecuaciones dan las relaciones entre las derivadas espaciales y las derivadas temporales de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  y del campo magnético  $\mathbf{H}$ , en cualquier punto en el interior de un buen conductor.

También la puedo reescribir utilizando la notación fasorial, como:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}} \leftrightarrow \nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = j\omega \sigma \mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{J}}$$

Resta por resolver estas ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta las condiciones de frontera impuestas por ciertas formas físicas de los conductores, de interés en la práctica de la ingeniería.

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = j\omega \sigma \mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{J}} = \Gamma^2 \dot{\mathbf{J}}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{J}} = \Gamma^2 \dot{\mathbf{J}} \Rightarrow \text{la solución de la ecuación de difusión es el fenómeno llamado}$$

***efecto pelicular***

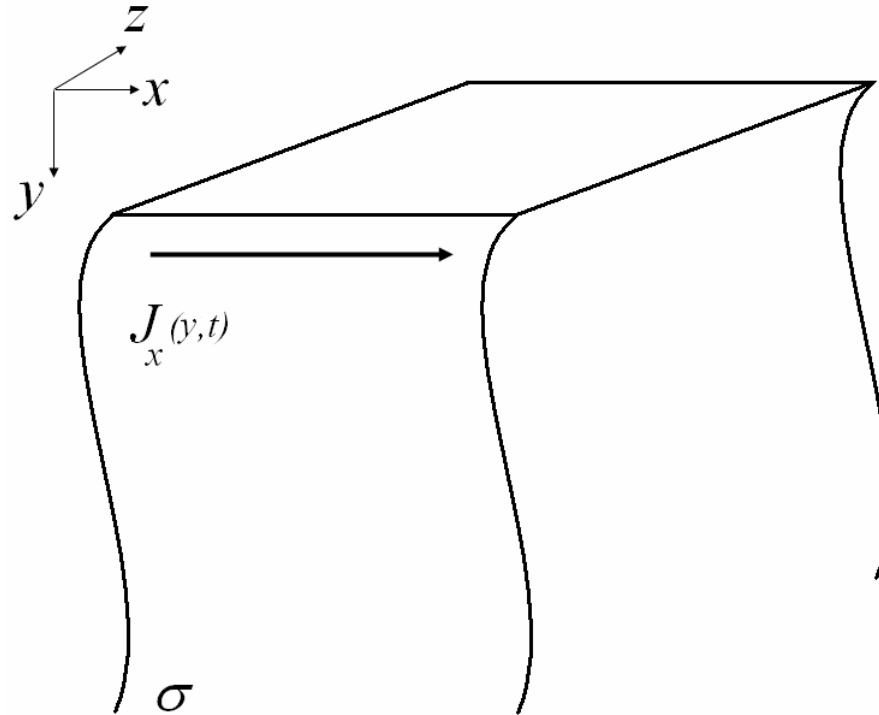
$$\Gamma = \sqrt{j\omega \sigma \mu_0 \mu_r} = 1/\delta + j 1/\delta \quad \text{recordando que } \sqrt{j} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$$

COEFICIENTE DE PENETRACION

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \sigma \pi f}}$$



## SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA UNA PLACA CONDUCTORA SEMI-INFINTA



$$J_x(y, t) = \text{Real} \left\{ \dot{J}_x(y) \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$\nabla^2 \dot{J}_x(y) = \Gamma^2 \dot{J}_x(y)$$

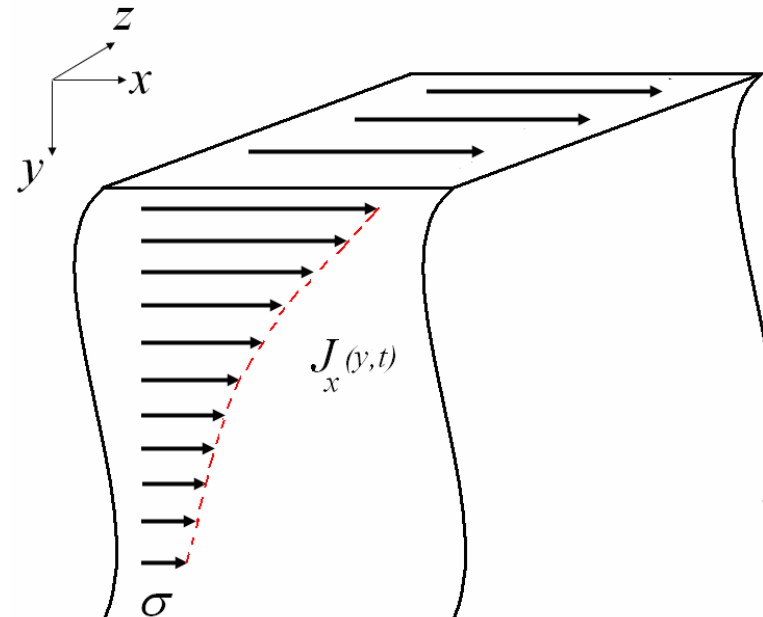
$$\dot{J}_x(y) = \dot{C}_1 e^{-\Gamma^* y} + \dot{C}_2 e^{+\Gamma^* y} = \dot{J}_0 e^{-\Gamma^* y} + 0 e^{+\Gamma^* y}$$

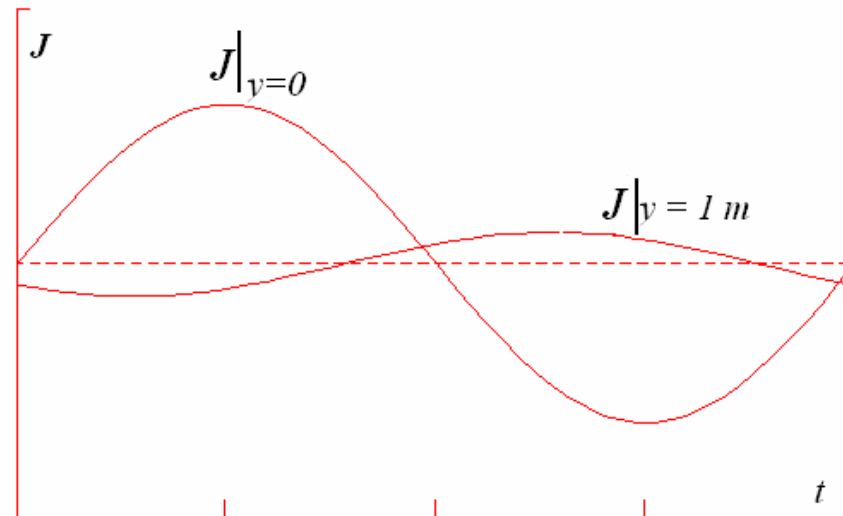
$$\dot{J}_x(y) = J_0 e^{j\phi} \cdot e^{-\left(\frac{1+j}{\delta}\right)y}$$

$$J_x(y, t) = J_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta + 0)$$

suponiendo  $\phi=0$

***efecto pelicular***





**Difusión de la corriente: comparación de la corriente en la superficie con la corriente a un metro de profundidad.**

***efecto pelicular***

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \sigma \pi f}}$$

**$\delta$  depende de la frecuencia**

**A mayor frecuencia menor coeficiente de penetración**

$$J_x(y, t) = J_0 e^{-y/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta} + 0\right)$$

Particularmente en el punto de profundidad igual al coeficiente de penetración ( $y=\delta$ ) la intensidad se habrá reducido hasta ser un 36,8% del valor en la superficie:

$$|J|_{y=\delta} = J_0 e^{-\delta/\delta} = J_0 \frac{1}{e} = 0,368 J_0$$


---

## IMPEDANCIA INTERNA DE UN CONDUCTOR

*Impedancia interna* entre los extremos de una trayectoria a lo largo de un conductor.

Para corrientes variables con el tiempo, la distribución de la corriente no es uniforme en la sección transversal del conductor, por lo tanto ni la **J** ni la **E** son uniformes en la sección transversal. Entonces la caída de potencial entre un extremo y otro depende de la trayectoria!!!!!!!!!!

Si defino una IMPEDANCIA como el cociente entre la caída de potencial y la corriente total, qué caída de potencial debo considerar?

Por definición elijo calcular la caída de potencial en la superficie, es decir la integral del campo eléctrico sobre la superficie del conductor.

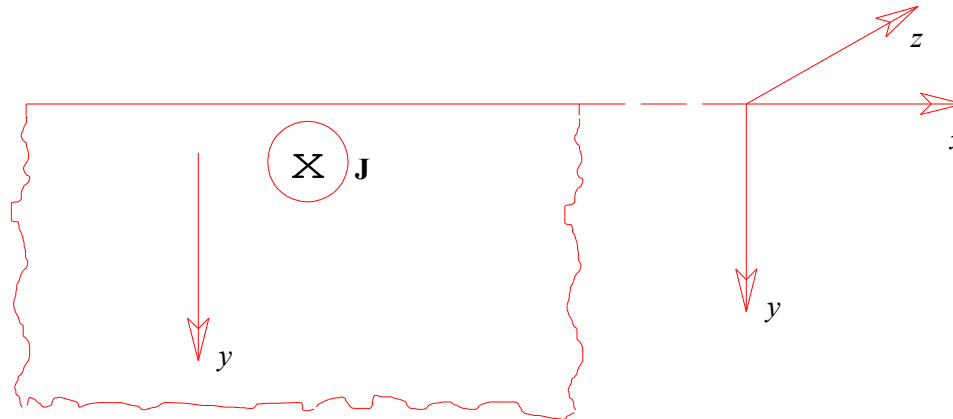
$$Z_{\text{INT}} = (\int E_{\text{SUP}} dl) / I_{\text{TOTAL}}$$

Si defino IMPEDANCIA INTERNA POR UNIDAD DE LONGITUD:

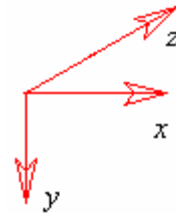
$$Z_{\text{INT}} \times \text{unid long} = E_{\text{SUP}} / I_{\text{TOTAL}}$$

### CONDUCTOR PLANO SEMI-INFINITO

Sea un conductor *plano* de profundidad infinita (en el sentido del eje de coordenadas  $y$ ), en el cual no existen variaciones del campo eléctrico en toda la extensión de sus otras dos dimensiones *ancho* (eje de coordenadas  $x$ ) y *largo* (eje de coordenadas  $z$ ), también infinitas



Dado que en la gráfica la longitud se mide en  $z$ , hablar de Impedancia interna por unidad de longitud ( $Z_{\text{INT}} \times \text{unid long}$ ) es hablar de  $Z_{\text{INT}} / \Delta z$



La corriente total es la integral en el semiplano “xy”.

Dado que la densidad de corriente  $J_z$  no varía en  $x$ , su integral en esta variable me daría infinito, entonces la calcularé por unidad de ancho en  $x$ . En la variable  $y$  integraré desde 0 a infinito.

La corriente por unidad de ancho ( $i_{\text{ancho.}}$ ), será  $I_{\text{TOT}} / \Delta x$  :

$$i_{\text{ancho}} = \int_0^{\infty} \dot{J}_z(y) dy = \int_0^{\infty} J_0 e^{-\left(\frac{1+j}{\delta}\right)y} dy = J_0 \left( \frac{\delta}{1+j} \right)$$

$$i_{\text{ancho}} = J_0 \left( \frac{\delta}{1+j} \right) = E_0 \left( \frac{\sigma \delta}{1+j} \right)$$

La impedancia interna ( $Z_{\text{INT}}$ ) la puedo calcular en función de definir una IMPEDANCIA INTERNA POR UNIDAD DE LONGITUD Y UNIDAD DE ANCHO ( $Z_{\text{INT u long y ancho}}$ ):

$$Z_{INT} = \frac{\Delta U_{SUP}}{I_{TOTAL}} = \frac{E_{SUP} \cdot \Delta z}{i_{ancho} \cdot \Delta x} = \left( \frac{E_{SUP}}{i_{ancho}} \right) \frac{\Delta z}{\Delta x} = Z_{INT u. long. y. ancho} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Teniendo en cuenta que  $E_{SUP} = E_0$  entonces la impedancia interna por *unidad de longitud y unidad de ancho*, resulta:

$$Z_{INT u long y ancho} = \frac{E_{SUP}}{i_{ancho}} = \frac{E_0}{E_0} \frac{1+j}{\sigma \delta}$$

Por simplicidad a la impedancia interna por *unidad de longitud y unidad de ancho*, ( $Z_{INT u long y ancho}$ ) la denotaremos como  $Z_{INT u}$

$$Z_{INT u} = \frac{1}{\sigma \delta} + j \frac{1}{\sigma \delta}$$

$$Z_{INT u} = r_u + j \omega l_u$$

La impedancia interna unitaria  $Z_{INT u}$  tiene un ángulo de fase de  $45^\circ$ .

$$r_u = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$$

$$\omega l_u = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$$

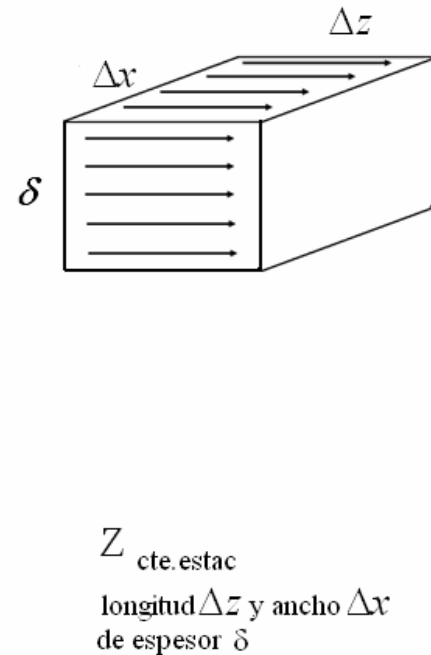
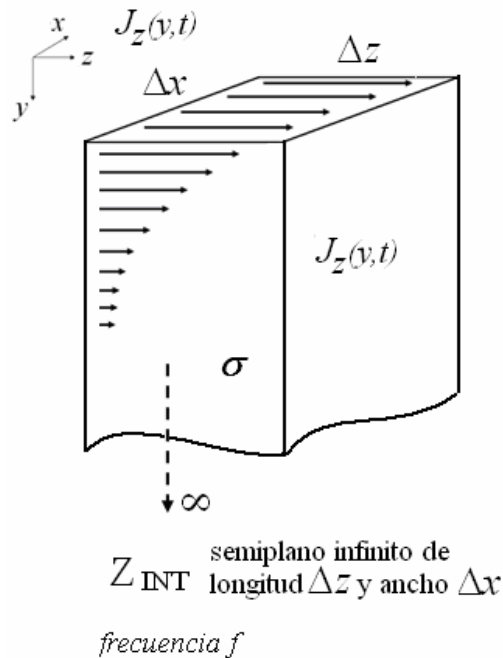
Para un conductor plano seminfinito en la dirección  $y$ , de longitud  $\Delta z$  y ancho  $\Delta x$ , la IMPEDANCIA INTERNA será:

$$Z_{INT} = Z_{INT u} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

### Otra interpretación de la profundidad de penetración $\delta$

Se observa que la resistencia debida al efecto pelicular de un conductor plano semi-infinito es exactamente la misma que la resistencia en corriente continua de un plano conductor de profundidad  $\delta$ . Esto es, la resistencia de este conductor, con decrecimiento exponencial de la densidad de corriente, es exactamente la misma que si la corriente estuviera *uniformemente* distribuida sobre una profundidad  $\delta$ .

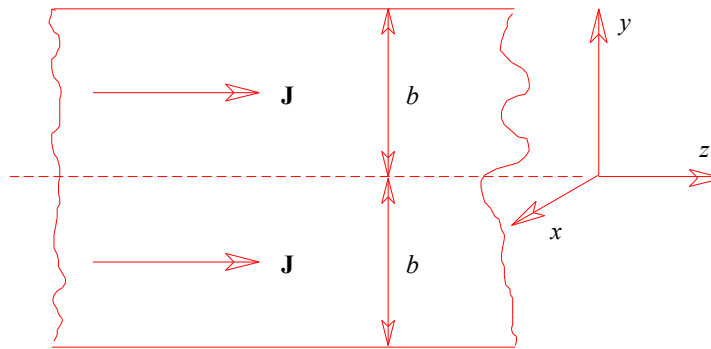
$$R_{INTc.a.(f)} = \text{Real}\{Z_{INTc.a.(f)}\} = \left(\frac{1}{\sigma\delta(f)}\right) \frac{\Delta z}{\Delta x} \implies R_{c.c.} \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta z}{\delta\Delta x}$$





## IMPEDANCIA INTERNA DE UNA LÁMINA DE DOBLE CARA

La lámina conductora de doble cara, también conocida como lámina plana, es un conductor cuyas dimensiones son longitud infinita (en el sentido del eje  $z$ ), ancho infinito (en el sentido del eje  $x$ ), y espesor finito e igual a  $2b$  (en el sentido del eje  $y$ ), tal como se indica en la **Figura**.



**Figura** - Flujo de corriente en una lámina de doble cara.

La impedancia interna *por unidad de longitud y unidad de ancho* es el cociente entre el campo eléctrico en la superficie ( $E_{Z-SUP}$ ) y la corriente por unidad de ancho ( $i_{ancho}$  en [A/m]:  $i_{ancho} = \int_{-b}^b \dot{J}_z dy$  )

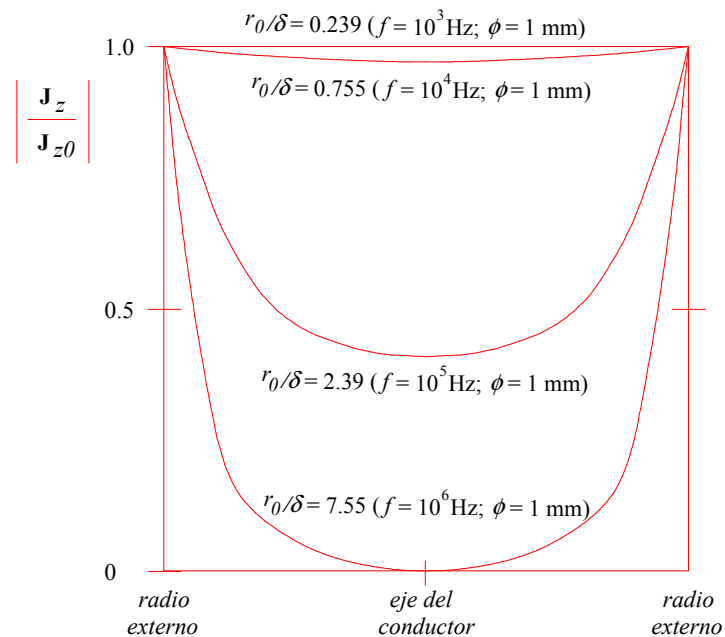
Se demuestra que si  $b/\delta > 2,64$  es válido (con un error despreciable) considerar la lámina de dos caras como dos placas semi-infinitas colocadas juntas (en paralelo). La impedancia interna por *unidad de longitud* ( $\Delta z$ ), y *unidad de ancho* ( $\Delta x$ ), resulta ser la impedancia del paralelo de estas dos semiplacas infinitas, es decir:

$$Z_{INTu} = \frac{1}{2\sigma\delta} + j \frac{1}{2\sigma\delta}$$

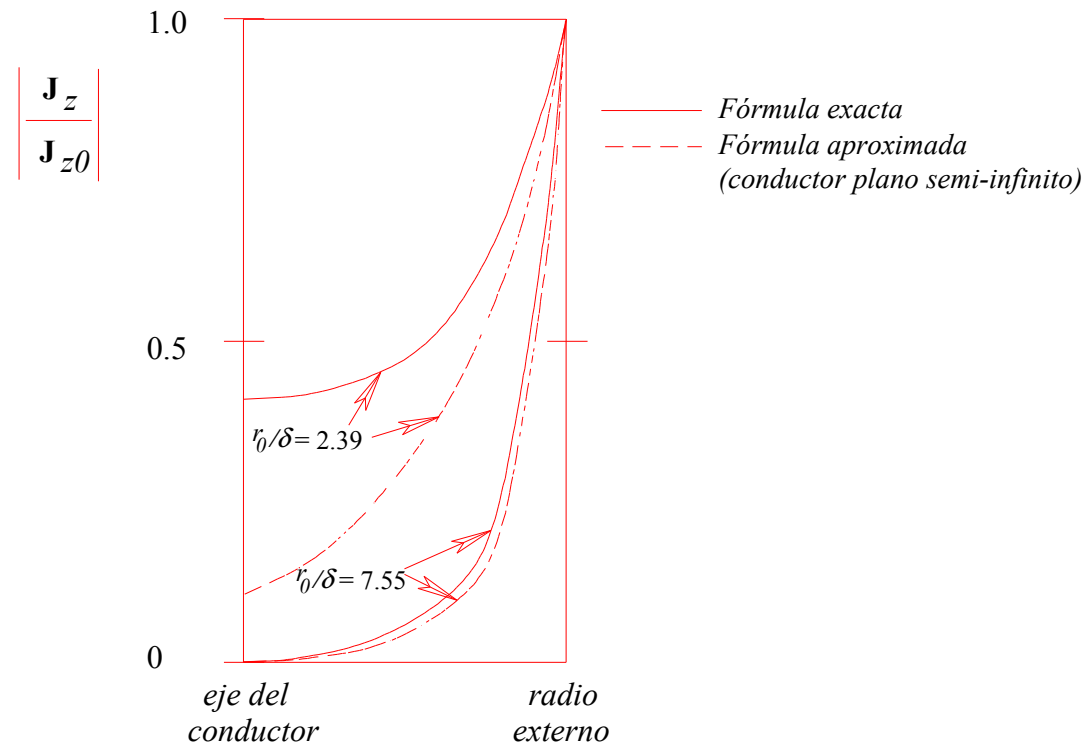
## CONDUCTORES CILÍNDRICOS

Se demuestra que si la relación  $r/\delta$  es  $>7,55$  se introduce un error pequeño al considerar al conductor cilíndrico como si fuera plano semi-infinito (plegado en forma circular), de ancho  $2\pi r$ .

$$Z_{INT} = Z_{INTu} \cdot \left( \frac{\text{largo}}{\text{ancho}} \right) = \left( \frac{1}{\sigma\delta} + j \frac{1}{\sigma\delta} \right) \left( \frac{\Delta l}{2\pi r} \right)$$



**Figura -** Distribución de corriente en conductores cilíndricos para diferentes frecuencias.



**Figura -** Distribución de corriente real en conductores cilíndricos y aproximada (expresión para un conductor plano semi-infinito) para diferentes frecuencias.