

---

# Ley de Faraday

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

- En electrostática el campo eléctrico es conservativo, por lo tanto puede ser descrito por el gradiente de un campo escalar denominado *potencial eléctrico*. Esto permite afirmar que el campo electrostático es *irrotacional*, es decir que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

- Vimos que para producir una corriente estacionaria se necesita un campo  $\mathbf{E}'$ , cuyo rotacional sea distinto de cero, o la integral cerrada de línea sea distinta de cero

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') \quad \mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l}$$

## *Ley de Faraday*

---

Faraday descubrió experimentalmente que, cuando un flujo magnético que abraza un circuito cerrado es alterado, sobre el circuito se induce una tensión cuyo valor es proporcional a la variación temporal de dicho flujo.

Este efecto puede ser producido a través de un flujo magnético:

- *variable en el tiempo*: principio de funcionamiento de los **transformadores**
- o por el *cambio de posición en el tiempo* del circuito cerrado, abrazado por un campo magnético estable, principio de funcionamiento de **generadores eléctricos**.

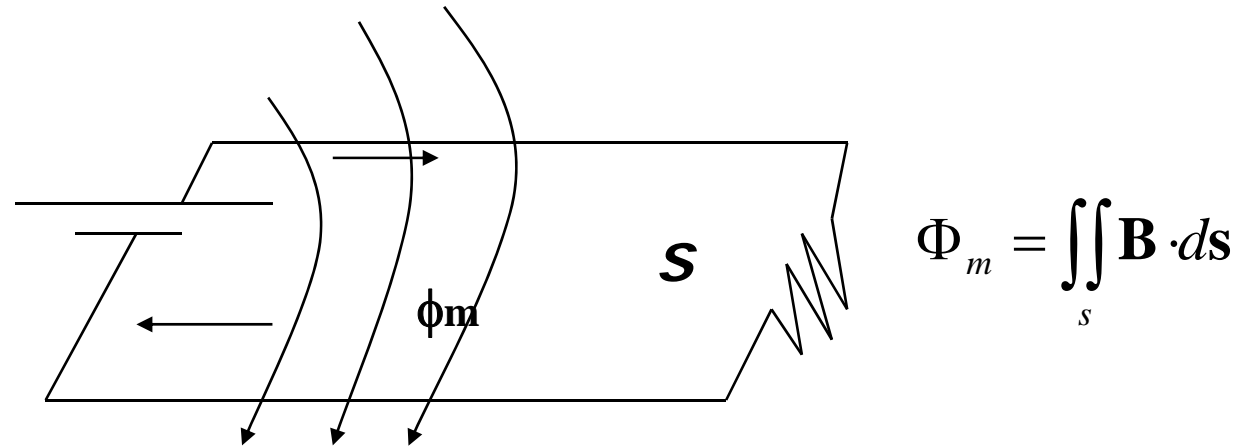
El flujo magnético que atraviesa el circuito está definido por:

$$\Phi_m = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Donde la superficie de integración tiene como contorno el perímetro del circuito cerrado.

## *Ley de Faraday*

Circuito cerrado y flujo que lo atraviesa:



Si este flujo cambia con el tiempo, la Ley experimental de Faraday establece que:

$$I R - \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

La corriente establecida en el circuito cerrado difiere de la predicha por la Ley de Ohm, en una parte que puede atribuirse a una fuerza electromotriz adicional, cuyo valor es igual a la variación temporal del flujo magnético, cambiada de signo.

## *Ley de Faraday*

---

$$\Phi_m = \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\varepsilon - \frac{d\Phi_m}{dt} = I R$$

$$\varepsilon = I R + \frac{d\Phi_m}{dt}$$

- La Ley de Faraday NO es consecuencia de la conservación de la energía aplicada al balance de energía de campos magnéticos.
  - La ecuación no es derivable de ninguna ley o relación planteada anteriormente
  - Está formulada en términos de **Flujo Total** que atraviesa un dado circuito, este flujo puede cambiar:
    - ✓ Cambio del flujo en el tiempo
    - ✓ Por movimiento del circuito o parte del circuito
- LEY experimental que se mantiene para todos los casos, incluyendo los casos de corrientes en medios en movimiento

## Ley de Faraday

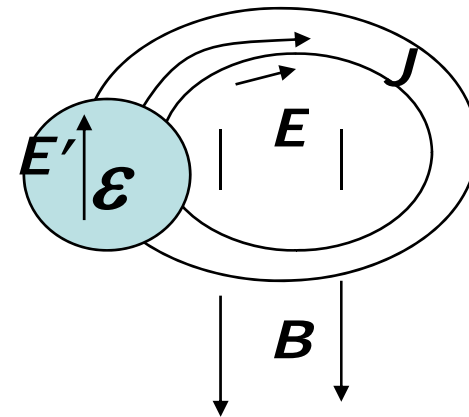
**Maxwell** reconoció que la Ley de inducción de Faraday tiene un significado más general que el indicado por la ecuación circuital.

Si la fuerza electromotriz alrededor de cualquier circuito cerrado se define como la integral de línea del campo eléctrico sobre dicho circuito cerrado, es decir:

$$\oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Ley Ohm}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} - \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} - \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = IR - \varepsilon}$$



esto indica que debe existir **un campo eléctrico a lo largo del circuito**, cuyo **origen no es electrostático, no es conservativo**

Las condiciones de límite entre un conductor y otro medio (por ejemplo aire), imponen que la componente tangencial de campo eléctrico sea continua, lo que implica que dicha componente sea la misma a ambos lados de la superficie límite.

**La ecuación anterior es válida en la región inmediatamente adyacente al conductor.**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Aparecerá un campo eléctrico en cualquier punto ya sea el vacío como el conductor, proporcional al cambio de flujo magnético.

- Esta relación es independiente de la presencia del conductor transportando una corriente, y es una ley física general que relaciona a un campo eléctrico con la variación temporal de un campo magnético

Si se emplea la derivada parcial temporal, para indicar que sólo se consideran variaciones temporales del flujo magnético a través de un circuito cerrado fijo, o de una región fija del espacio, centrando el interés en campos variables en el tiempo y NO en circuitos cerrados variables en el tiempo, resulta:

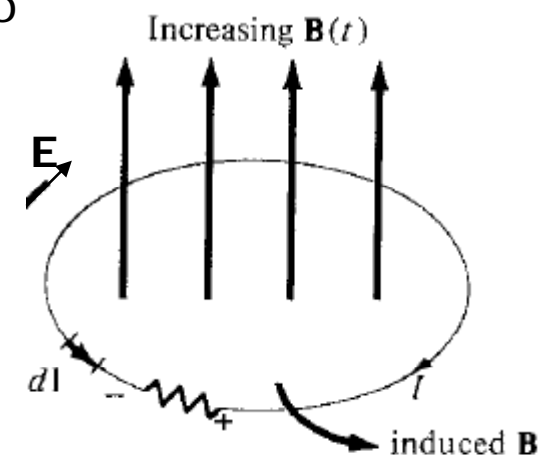
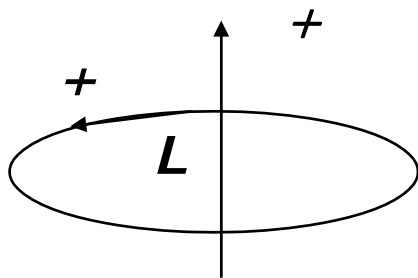
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

## *Ley de Farady.*

Una espira estacionaria en un campo Variable en el tiempo:  
Fuerza Electromotriz Estática o de Transformador

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

El signo negativo establece que la ecuación es correcta cuando la integral de línea se efectúa en el sentido positivo de circulación alrededor del contorno de integración (sentido antihorario), con respecto al sentido positivo del flujo a través de la superficie (saliente de la superficie). Las relaciones espaciales anteriores se pueden visualizar por aplicación de la regla de la mano

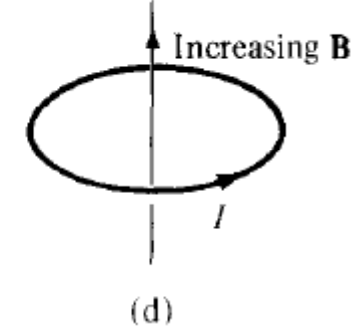
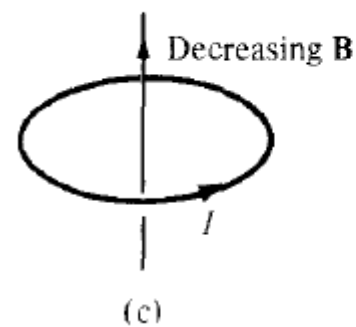
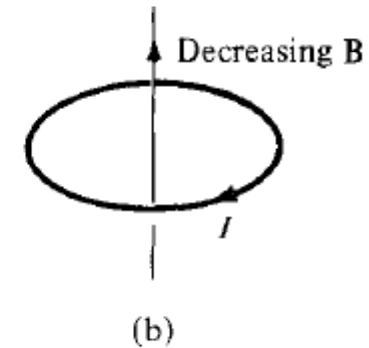
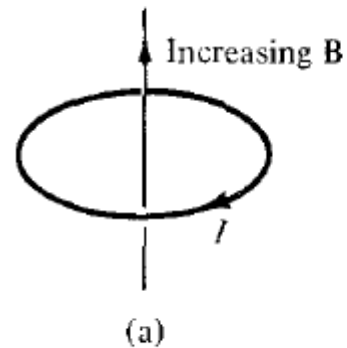




## *Ley de Faraday.*

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

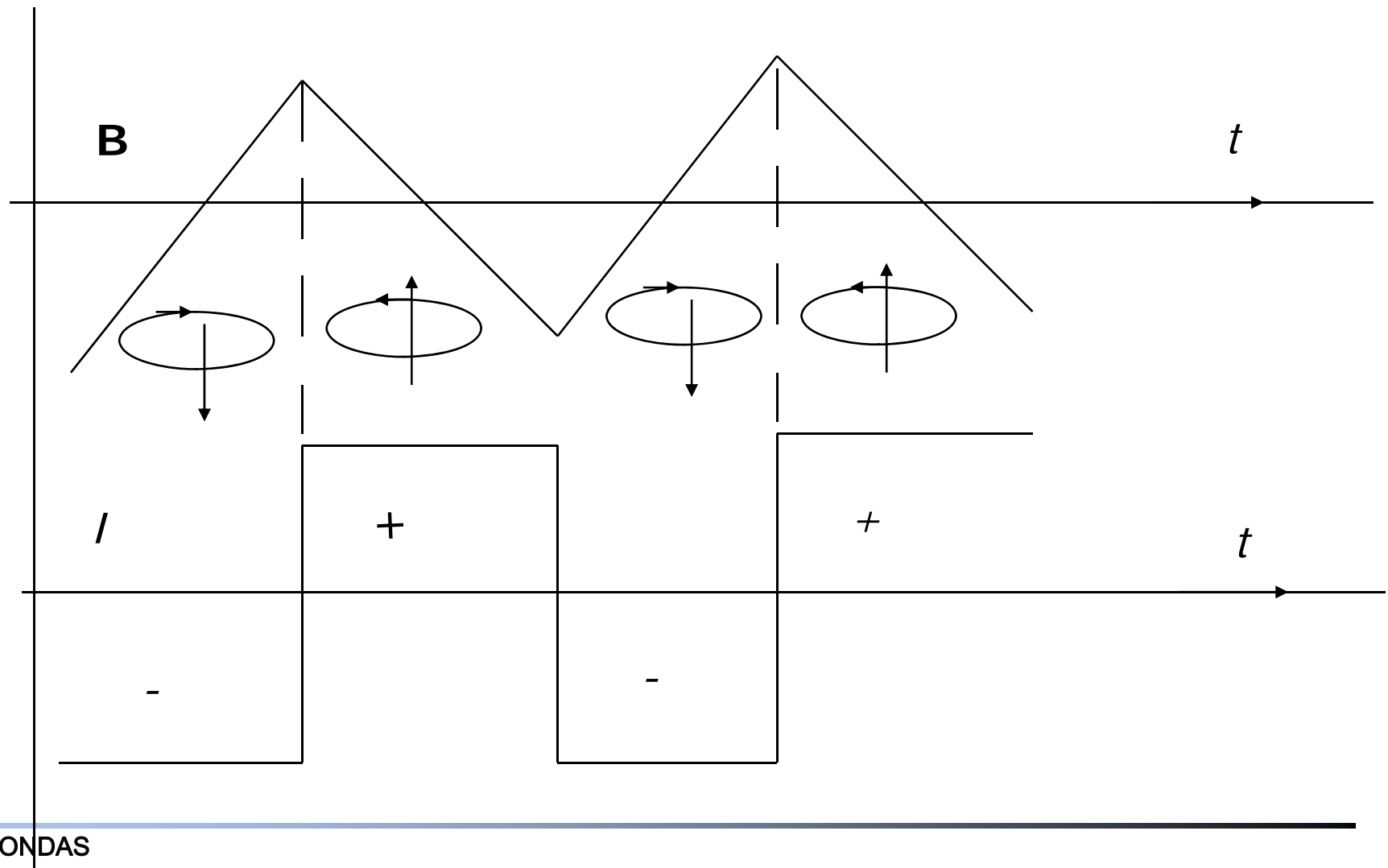
El signo negativo afirma que la FEM inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado, con dirección tal que se opone al cambio de flujo magnético "ligado"



Si cada lazo es estacionario y la variación del campo magnético **B** en el tiempo induce una corriente *I*, cual de las configuraciones es correcta ???

## *Ley de Faraday*

Corriente que aparece en la espira por efecto de la variación en el tiempo de  $B$



## *Ley de Farady.*

---

Para transformar la ley de Faraday a su forma diferencial se aplica el teorema de Stokes, o sea:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Si esta ecuación es cierta para cualquier superficie, los integrandos deben ser iguales, con lo que se obtiene la ley de Faraday diferencial, también conocida como una de las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación expresa que el campo electrostático irrotacional ya no es el único tipo de campo eléctrico posible, ya que como consecuencia de la Ley de Faraday **aparece un campo eléctrico rotacional**

Dado que la integral de línea del campo eléctrico alrededor de un circuito cerrado no es necesariamente cero para campos que varían en el tiempo, se debe desarrollar un trabajo para llevar una carga alrededor de dicho circuito sometido a esos campos variables.

El principio de conservación de la energía por supuesto que no es violado, ya que la energía requerida es suministrada por el campo magnético variable.

Esta ecuación ha sido derivada para medios estacionarios. Puede demostrarse su validez para medios no estacionarios, siempre y cuando el movimiento de estos medios sea hecho con una velocidad pequeña respecto a la velocidad de la luz.

## *Ley de Faraday.*

Para un Observador en movimiento, partiendo de la Ley de Faraday, se llega demostrar la siguiente expresión, donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del medio, y  $\mathbf{E}'$  es el campo en el marco de referencia en movimiento.

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

*Campo representa lo visto por un observador quieto, de acuerdo con la fuerza de Lorentz.*

*Un observador llevando una carga  $q$  a una velocidad  $\mathbf{u}$  experimenta una Fuerza total dada por  $q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ , entonces el campo para un observador estático es  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$*

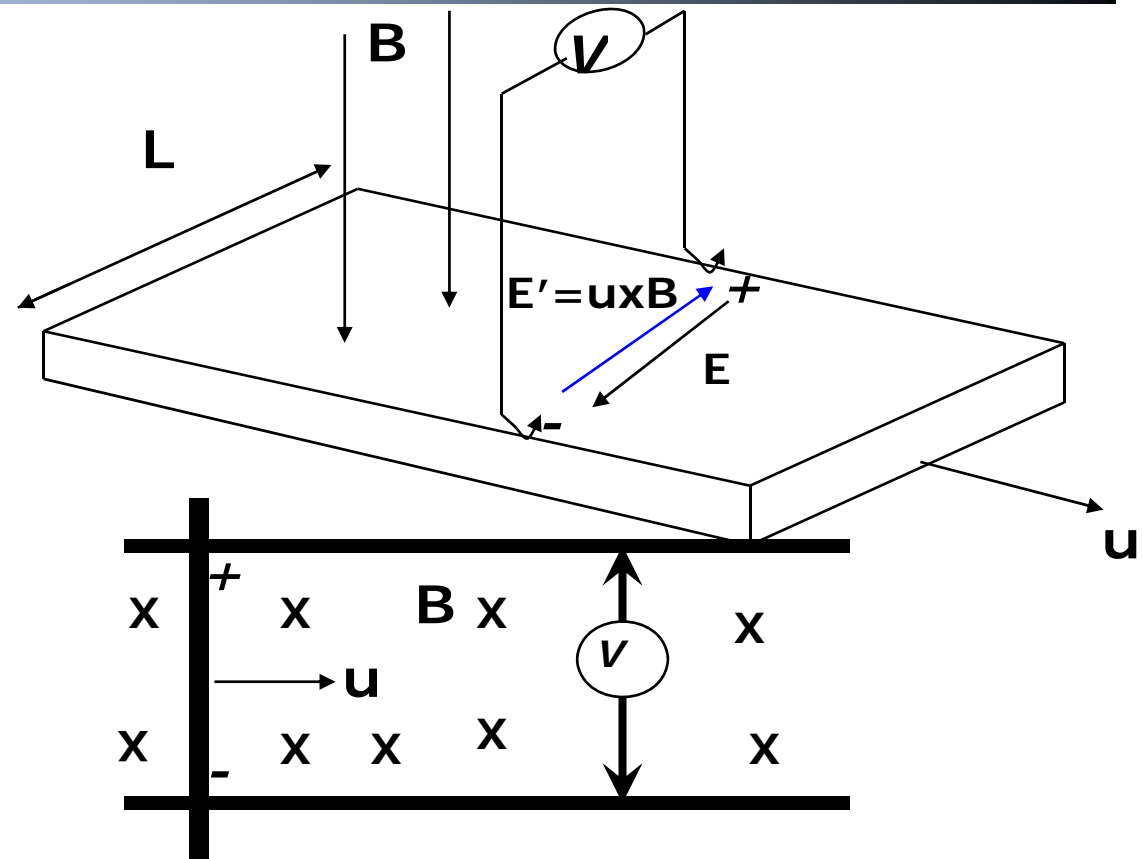
- La formulación de la Ley de Faraday es independiente del medio donde se encuentra el campo, incluyendo su movimiento

$$fem = - \underbrace{\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{Transformación}} + \underbrace{\oint \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{Movimiento}}$$

**Como un ejemplo de aplicación de los campos en movimiento,** tomemos en consideración una barra conductora, de longitud infinita y sección transversal rectangular, moviéndose en dirección de su longitud con velocidad **u** **relativa al campo uniforme magnético B.** **Como se muestra en la Fig., B es perpendicular al dirección de u y asumiremos que es constante en el tiempo.**

Dos contactos deslizantes, terminales de un voltímetro tocan los lados opuestos de la barra, como se muestra, de modo que la distancia **L** entre ellos es la longitud activa de la barra.

<i>MOVIMIENTO</i>			FEM medida
Barra	B	V	FEM
u	0	0	$uBL$
0	u	0	0
0	u	u	$uBL$
u	u	0	$uBL$
0	0	u	$uBL$
u	0	u	0



- 1) El estado de movimiento de la fuente B es irrelevante cuando B es uniforme;
- 2) El movimiento absoluto no puede ser detectado con este arreglo.
- 3) El movimiento de la barra o del voltímetro son intercambiables

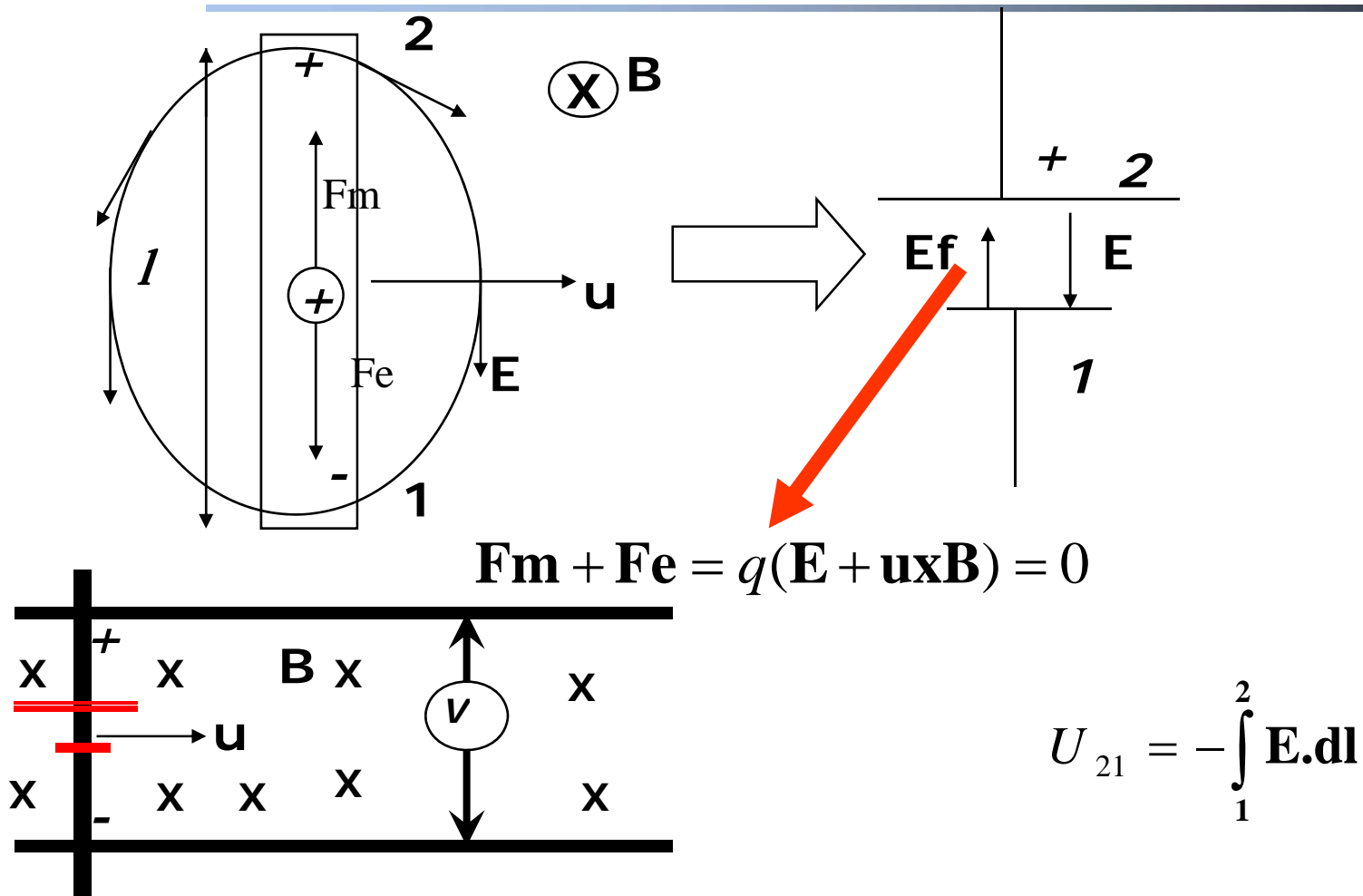
- Aparece una corriente que circula por este lazo compuesto. Un electrón moviéndose con la barra experimentará un campo eléctrico efectivo  $E' = u \times B$  entonces la corriente fluirá a través de los contactos para ser medida en un circuito externo por un observador estacionario.
- El campo eléctrico efectivo dentro de la barra en movimiento causará una corriente dentro de la barra, aquello producirá cargas sobre las caras, y estas cargas **producirán el campo electrostático observado externamente.**
- **Un observador estacionario** en cualquier posición del cuadro, **verá que el rotor de  $E$  es igual a cero**, cuando  $B$  no cambia en el tiempo (Electrostático).
- **Dentro de la barra, el desplazamiento de carga hacia los extremos, cancelará el campo efectivo  $u \times B$**
- **y si consideramos un camino de integración parcialmente contenido en la barra y parcialmente fuera de la barra, la integral del campo eléctrico alrededor de un lazo cerrado no desaparecerá (será distinta de cero).**
- Este resultado está de acuerdo con el resultado físicamente observable que **una fuerza electromotriz de magnitud  $uB$  es medida por el voltímetro.** Note que si el circuito fuese enteramente estacionario no habría fuerza electromotriz.



- Si en vez de mover la barra, se mueve el voltímetro con sus conexiones relativo a la barra en el campo  $B$ , nuevamente aparecerá la fuerza electromotriz  $\underline{uBl}$ , dado que los roles de las conexiones y de la barra son simplemente intercambiables
- La variedad de casos de movimiento relativo se expresan en la tabla .
- Dos factores salientes caracterizan los resultados:
  - (1) el estado de movimiento de la fuente  $B$  es irrelevante cuando  $B$  es uniforme;
  - (2) el movimiento absoluto no puede ser detectado con este arreglo.

## Principio de un Generador

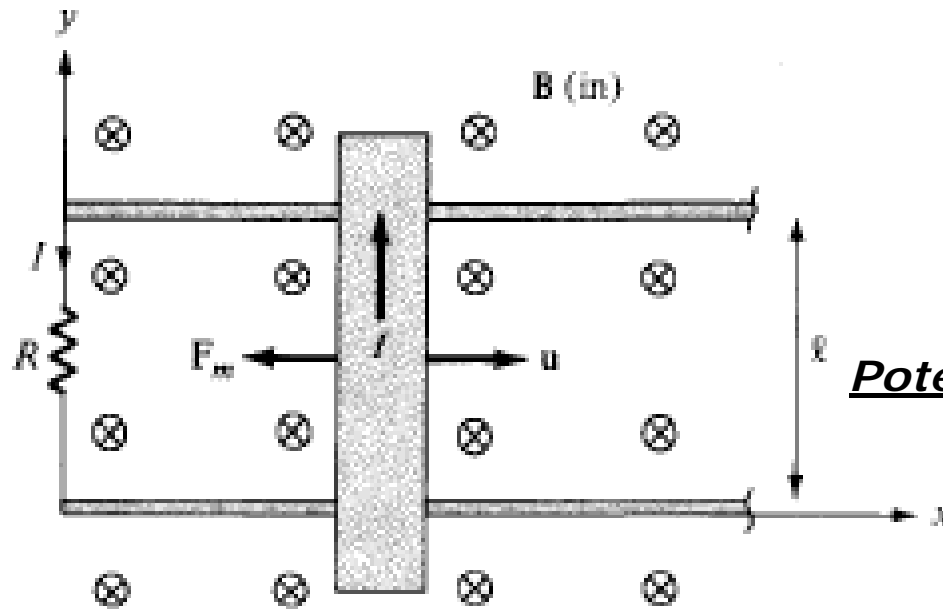
## Ley de Faraday.



Si el conductor móvil forma parte de un circuito cerrado aparece una FEM

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{u} \times \mathbf{B} = FEM$$

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{i} u \times (-\mathbf{k} B)) \cdot \mathbf{j} dl = FEM = +uBl$$



$$I = \frac{uBl}{R}$$

Potencia eléctrica

$$Pe = I^2 R = \frac{(uBl)^2}{R}$$

Potencia mecánica

$$Pm = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}_m = \int_1^2 I dl \times \mathbf{B} = \int I dy \mathbf{j} \times (-\mathbf{k}) B = -\mathbf{i} l \cdot B \cdot l = -\mathbf{i} \frac{u \cdot B \cdot l \cdot B \cdot l}{R} = -\mathbf{i} \frac{u(Bl)^2}{R}$$

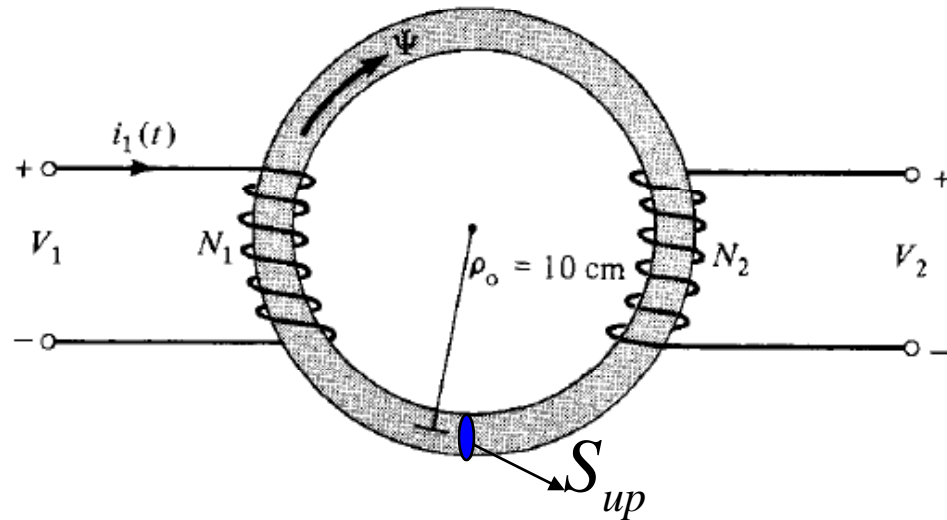
$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m = \mathbf{i} \frac{u(Bl)^2}{R}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} \frac{u(Bl)^2}{R} = \frac{(uBl)^2}{R}$$

$$Pm = Pe$$

# Principio del Transformador

# Ley de Faraday



$$IR - \varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$= \frac{d\phi}{dt} Ni_{\text{circuitos-vueltas}} = Vi$$

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint H dl = N_1 I_1 - N_2 I_2 = H.l = \frac{B.l}{\mu_o \mu_r}$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \frac{\phi.l}{S_{up} \mu_o \mu_r} \approx 0$$

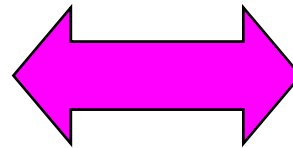
$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{N_1}{N_2} \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

$$\frac{V_1 I_1}{V_2 I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2}{N_2 \cdot N_1} = 1$$

$$P_{in} = P_{out}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$L = \frac{\phi}{I}$$



$$C \cdot \frac{dU}{dt} = I$$

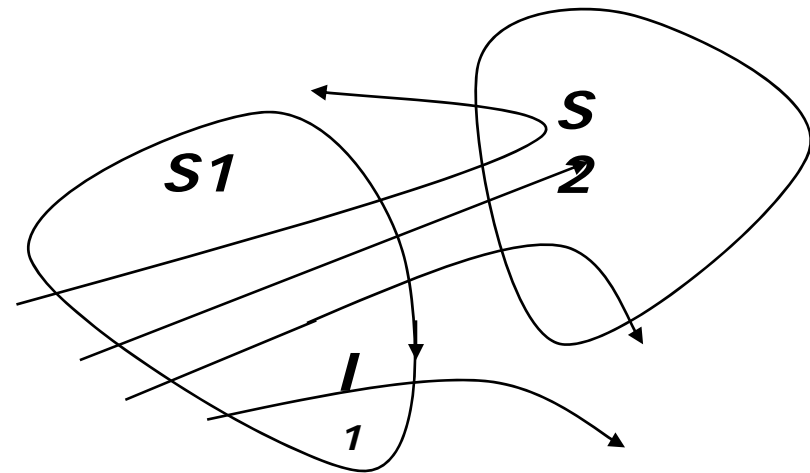
$$L \cdot \frac{dI}{dt} = u$$

En sistemas rígidos y estacionarios  
Los únicos cambios de flujo son los de corriente

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

La inductancia incremental

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad L = \frac{d\Phi}{dI}$$



- **En sistemas lineales**

- **B** es proporcional a la corriente y por lo tanto la L depende solo de la Geometría, en este caso la inductancia incremental coincide con la inductancia.

$$\mathbf{B} = \mu_0 I \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4.\pi.r^2}$$

$$L_1 = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{d\phi_1}{dI_1}$$

### La inductancia propia de un circuito

se define como el cociente entre el flujo producido por la corriente de ese circuito en la superficie rodeada por tal circuito y la corriente propia del mismo circuito.

### La inductancia Mutua entre dos circuitos

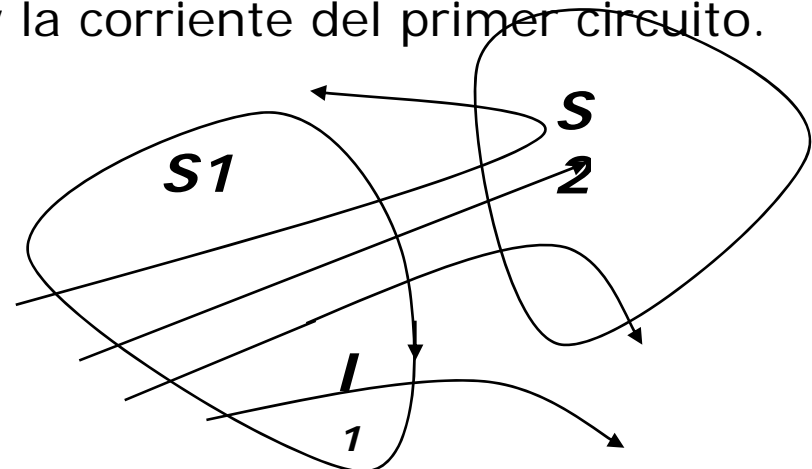
el cociente entre el flujo producido por la corriente de un circuito en la superficie rodeada por el otro circuito y la corriente del primer circuito.

$$L_1 = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{\iint_{S1} \mathbf{B}.d\mathbf{s}}{I_1}$$

La inductancia Propia

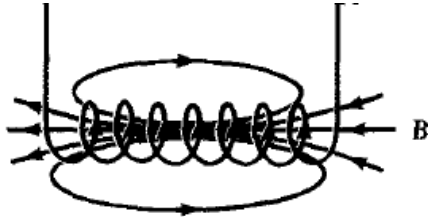
$$M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{\iint_{S2} \mathbf{B}(I_1).d\mathbf{s}}{I_1}$$

La inductancia Mutua



# Inductancias

En un circuito con una corriente  $I$ , aparece un  $B$



$$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \bullet \quad \text{Flujo por cada vuelta}$$

$$\lambda = N \Psi \quad \bullet \quad \text{Flujo concatenado por las } N \text{ vueltas}$$

$$\lambda \propto I \quad \bullet \quad \text{Medios lineales}$$

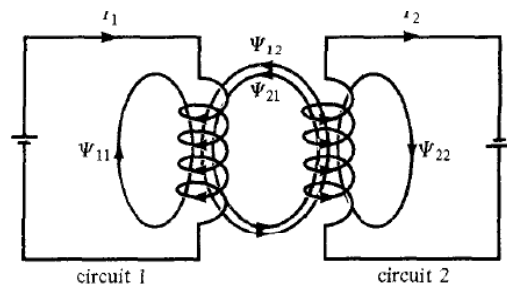
$$\lambda = LI$$

**Autoinductancia**, es igual a la razón entre el flujo Concatenado y la corriente que lo produce.

La inductancia es una propiedad de la disposición física del circuito, un circuito (o parte) con inductancia se denomina Inductor

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$$

Dos circuitos con corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  aparece un  $B_1$ ,  $B_2$



Flujo producido por  $I_2$  en el circuito 1

$$\Psi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}$$

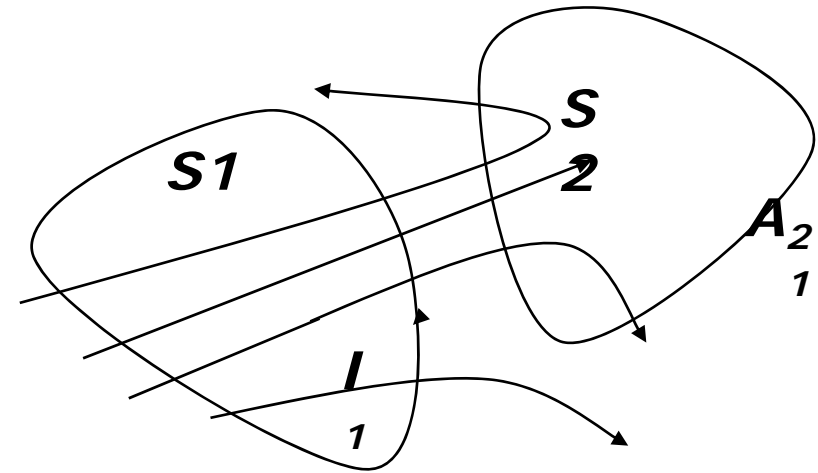
**Inductancia mutua**

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Psi_{12}}{I_2} \quad M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Psi_{21}}{I_1}$$

## Inductancia mutua entre dos circuitos

En sistemas lineales

$$\frac{d\varphi_{21}}{dI_1} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = L_{21}$$



$$L_{21} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \frac{\iint_{S2} \mathbf{B}_{21}(r_{21}) \cdot d\mathbf{s}}{I_1} = \frac{\iint_{S2} \nabla \times \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}}{I_1} = \frac{\oint_{l2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{l}}{I_1} = \frac{\mu_0 \frac{I_1}{4\pi} \oint_{l2} \oint_{l1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|r_{21}|}}{I_1}$$

Fórmula de Neumann

$$A_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|r_{21}|} = \varphi_{21}$$

$$\mu_0 \frac{1}{4\pi} \oint_{l2} \oint_{l1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|r_2 - r_1|}$$



$$L_{12} = L_{21}$$