

---

# Propiedades Magnéticas de la Materia

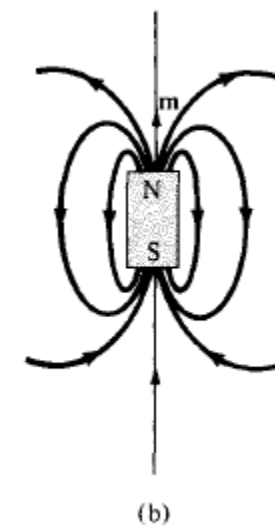
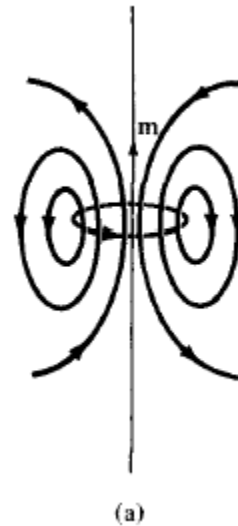
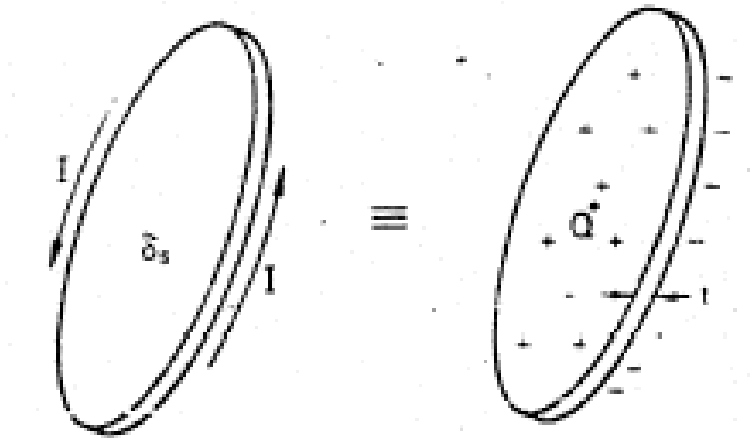
Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

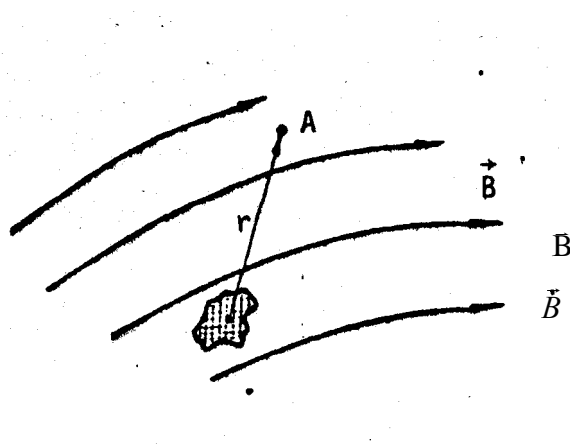
La intensidad de la corriente de una pequeña espira eléctrica por su área es equivalente a los efectos de un dipolo de momento dipolar  $Q^* \cdot t$

Equivalencia entre un espira y un dipolo

$$I \cdot \vec{\delta s} \quad \mu_0 = Q^* \cdot \vec{t} = \vec{p}^*$$



La presencia de un material magnético afecta el Campo magnético del medio que lo rodea.



Los efectos a una distancia  $r$  mucho mayor que las dimensiones del contorno del material, modifican el campo como si existiera un momento dipolar magnético ubicado en el lugar del material.

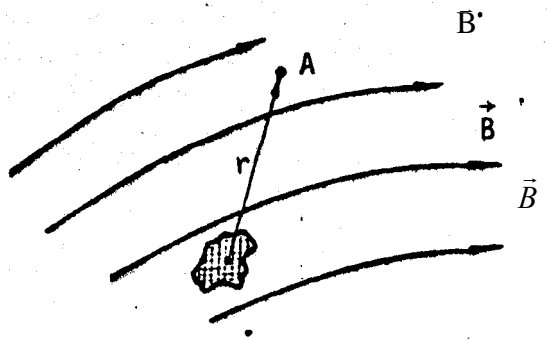
Se aplica la superposición de los efectos producidos por los momentos dipolares de pequeños elementos de volumen en el punto A

Los momentos dipolares pueden ser representativos

- de pequeñas espiras de corrientes
- dipolos magnéticos

**Material**=distribución volumétrica de momentos dipolares magnéticos.

$\vec{p}_i^*$  el momento dipolar magnético elemental,



$P^*$

**Densidad de momentos dipolares por unidad de volumen**

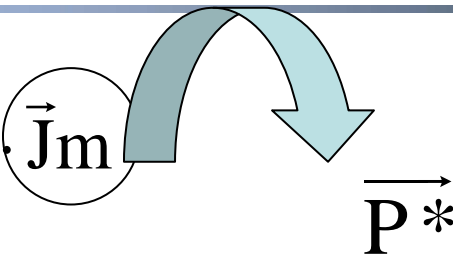
la suma vectorial de momentos dipolares magnéticos elementales de un pequeño elemento de volumen, dividida por ese volumen

$$P^* = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i^*$$

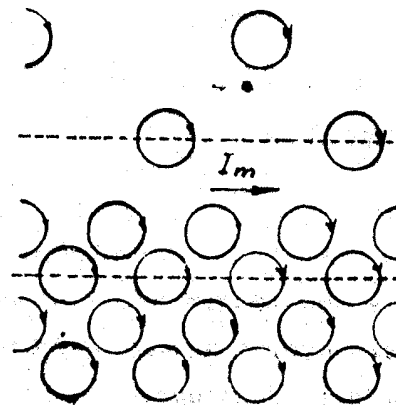
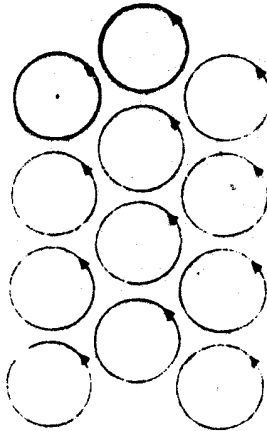
- La cantidad vectorial **P\*** proporciona una descripción macroscópica completa de la magnetización interna del material y en función de esta magnitud podrán expresarse los efectos producidos por el material sobre el medio que lo rodea.
- Los efectos magnéticos producidos por **las corrientes de conducción en el vacío** se expresan por medio de las siguientes ecuaciones.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- El material magnetizado modifica el campo magnético tanto en el medio que rodea al material, como en el material mismo. Estos efectos son representados, por funciones de **P\*** y **las ecuaciones de fuentes de B se modifican**

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \vec{J}_m$$


- El momento dipolar magnético puede interpretarse como relacionado con corrientes macroscópicas, provocadas por la imperfecta cancelación de órbitas a escala atómica en la materia  
Corrientes de magnetización  $J_m$
- un trozo de esta materia como compuesto por corrientes atómicas que circulan en circuitos cerrados en el mismo sentido.

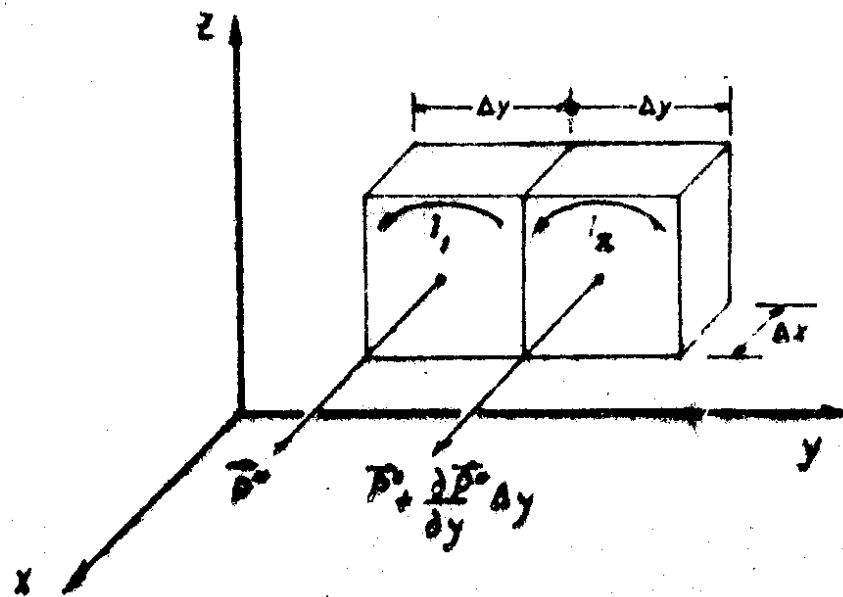


- la magnetización no es uniforme
- Sin Cancelación

• Mag. Uniforme. Cancelación Interna

## Materiales Magnéticos

- Para expresar en función del momento dipolar magnético es necesario establecer la relación entre  $\mathbf{P}^*$  y  $\mathbf{J}_m$



para elemento 1:  $P_x^*$

para elementos 2:  $P_x^* + \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \cdot \Delta y$

$$\vec{p}_x^* = \vec{P}_x^* \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

para elemento 1

$$p_{1x}^* = P_x^* \cdot \Delta x \cdot \cancel{\Delta y} \cdot \cancel{\Delta z} = \mu_0 \cdot I_1 \cdot \cancel{\Delta y} \cdot \cancel{\Delta z}$$

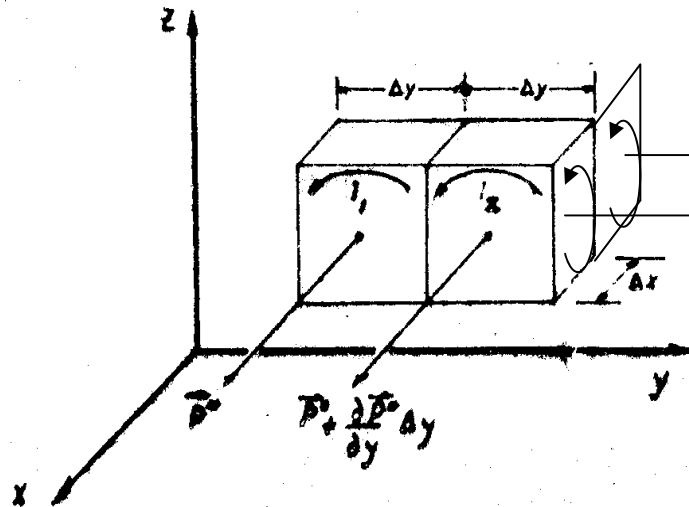
para elemento 2

$$p_{2x}^* = \left( P_x^* + \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \Delta x \cdot \cancel{\Delta y} \cdot \cancel{\Delta z} = \mu_0 \cdot I_2 \cdot \cancel{\Delta y} \cdot \cancel{\Delta z}$$

- La diferencia entre las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  resulta en una corriente neta en la dirección del eje  $z$  en la región intermedia de los dos pequeños volúmenes:

$$I'_z = I_1 - I_2 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

- Si ahora se consideran dos elementos de volumen contiguos sobre el eje  $x$ , de igual manera que en el caso anterior resulta una corriente neta en la dirección del eje  $z$ , dada por:



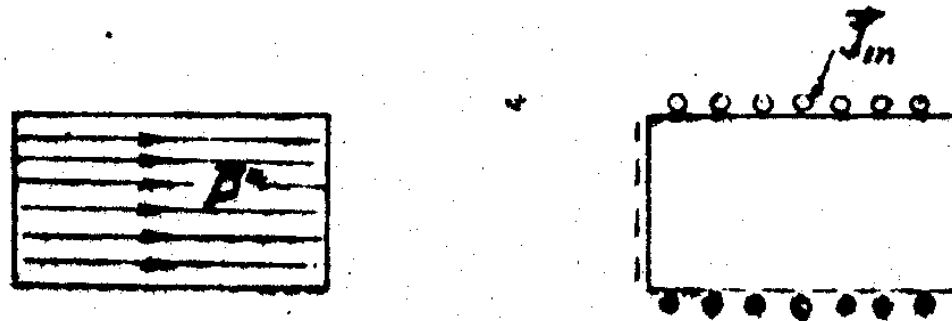
$$I''_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_y^*}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$J_z = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial P_y^*}{\partial x} - \frac{\partial P_x^*}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{P}^* = \mu_0 \mathbf{J}_m$$



En una región donde se produzca una discontinuidad de la magnetización resultará una corriente laminar igual al cambio en la componente tangencial de la magnetización.



La expresión del rotacional de B para el caso de tener corrientes de conducción y material magnético es:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P}^*$$

## Fuente de Divergencia de $\mathbf{B}$

## Materiales Magnéticos

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

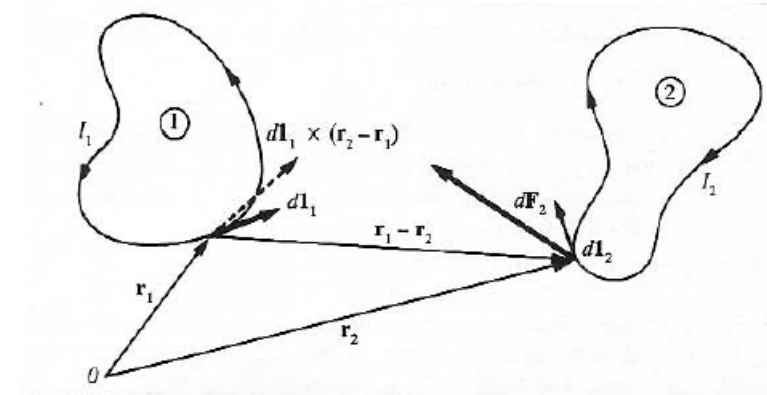
$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

Sin embargo,  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$  es el gradiente de  $-1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  con respecto a  $\mathbf{r}_2$ . Y debido a que el rotacional de un gradiente es cero, se deduce que

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0$$

- Polarización en medios eléctricos, resulta conveniente separar el campo cuyas fuentes son las cargas eléctricas libres, de aquel cuyas fuentes son las cargas libres más las ligadas D y E
- En Magnetostática separamos los campos cuyas fuentes de rotacional son las corrientes de conducción H, del campo cuyas fuentes son las de conducción mas las de magnetización B

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{J} + \boxed{\vec{J}_m}) = \mu_0 \cdot (\nabla \times \vec{H}) + \boxed{\nabla \times \vec{P}^*}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{P}^*}$$

*Ecuación constitutiva*

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \vec{P}^*) = \vec{J}$$

**H** se suele llamar campo magnetizante porque parece ocasionado por fuente que no dependen de las propiedades magnéticas del medio....

Pero **J** es sólo fuente de rotacional de **H**,

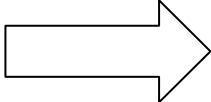
nada se ha dicho hasta aquí de sus fuentes de divergencia de **H**.

- **Fuente de divergencia de H**

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{P}^*$$

$$\nabla \vec{B} = \mu_0 \cdot \nabla \vec{H} + \nabla \vec{P}^*$$

Dado que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$    $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$

$\vec{H}$  queda enteramente determinado por:  
fuentes de rotacional que son sólo las corrientes de conducción

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

fuentes de divergencia provienen exclusivamente de la presencia de material magnético

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$$

$\vec{H}$

campo total de ambos tipos de fuentes definiendo

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_1 = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$$

H1 es la componente que se debe a J

H2 es la componente que se debe al material magnético  
A través de  $P^*$

$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla} V^*$$

- Consideremos un trozo de material magnetizado el cual presenta una distribución en volumen de momentos dipolares magnéticos dada por  $\vec{P}^*$ .

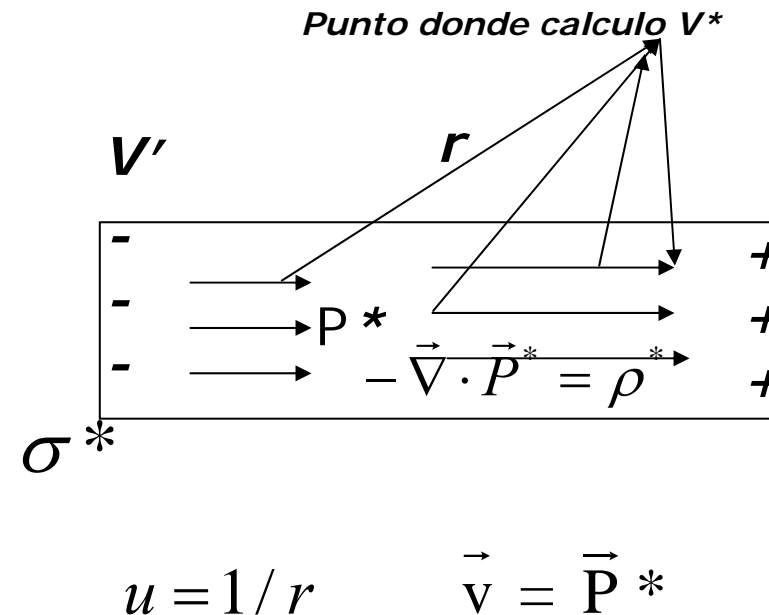
$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla} V^*$$

$$V_i^* = \frac{\vec{p}_i^* \cdot \vec{r}}{4\pi\mu_0 r^2}$$

$$V^* = \iiint \frac{\vec{P}^* \cdot \vec{r}.dv'}{4\pi\mu_0.r^2} = \iiint \frac{\vec{P}^* \cdot \vec{\nabla}'(1/r).dv'}{4\pi\mu_0}$$

$$\text{div}(u.\vec{v}) = \vec{v}.\text{grad}(u) + u.\text{div}(\vec{v})$$

$$V^* = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left( \iiint \nabla \cdot (\vec{P}^* \cdot 1/r) dv' - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{r} dv' \right) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left( \oint \frac{\vec{P}^* \cdot d\vec{s}'}{r} - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{r} dv' \right)$$



$$V^* = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left( \oiint \frac{\vec{P}^* \cdot \vec{ds}'}{r} - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{r} dv' \right)$$

$$\sigma^* \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \longrightarrow \text{P}^* \\ \hline - \\ \hline \longrightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* = \rho^* \\ \hline + \\ \hline \end{array}$$

$$\vec{P}^* \cdot \vec{ds}' = P_n^* \cdot ds' = \sigma^* ds'$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^* = \rho^*$$

$$V^* = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left( \oiint \frac{\sigma^*}{r} ds' + \iiint \frac{\rho^*}{r} dv' \right)$$

- la distribución en volumen de dipolos contribuye con H2 al campo de igual forma que la suma de los efectos provocados por una densidad superficial de carga magnética más una densidad volumétrica de carga magnética .
- el comportamiento magnético del material queda completamente descrito por las densidades de polos ( $\sigma^*$  y  $\rho^*$ ) magnéticos y pudiendo entonces reemplazarse el medio magnético por esas densidades.

## Materiales Magnéticos

*Los efectos magnéticos de las corrientes eléctricas estacionarias y de la materia en reposo pueden describirse, alternativamente, por medio de uno de los campos  $\vec{B}$  o  $\vec{H}$  , definidos a partir de una de las siguientes dos sistemas de ecuaciones:*

* Campo	de inducción: $\vec{B}$	Magnetizante: $\vec{H}$
* divergencia	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho^* / \mu_0$
* rotor	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
fuentes equivalentes al material magnetizado	$\vec{J}_m = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{P}^*$	$\rho^* = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}^*$$



- Imán Permanente

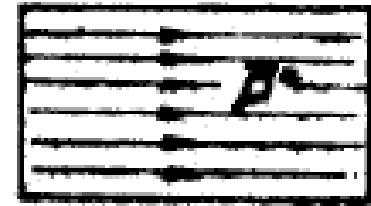
un trozo de material magnetizado que presenta una magnetización  $\vec{P}^*$ .

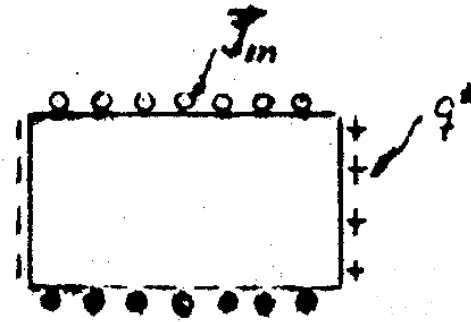
NO existen corrientes de conducción

Supongamos que se trata de una barra cilíndrica con magnetización uniforme en dirección axial, tal como la indicada en la figura

Las fuentes de campo son:  $\vec{J} = 0$      $\vec{\nabla} \times \vec{P}^*$      $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{P}^*$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$
$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{P}^*}{\mu_0}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}^*$

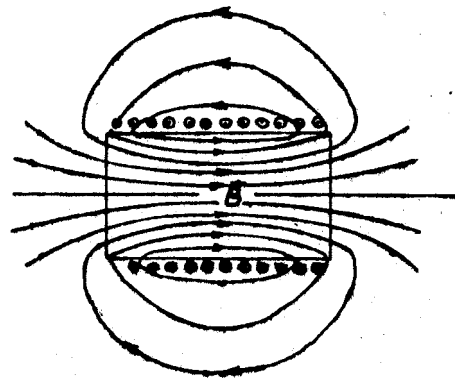




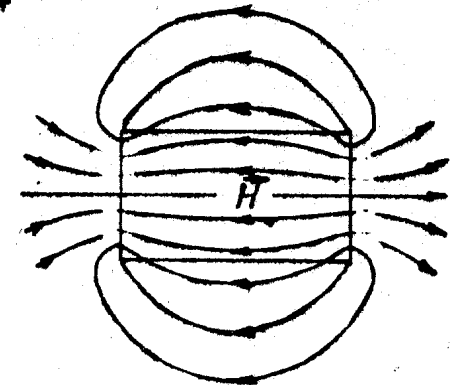
$\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{P}^*$$

$$\vec{J}_m = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{P}^*}{\mu_0}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}$$



$$\oint \vec{P}^* \cdot d\vec{l} = \iint J_m \cdot d\vec{s} = P^* \cdot l = N I_m$$

- El campo **B** resultará como el campo de un solenoide con densidad de corriente  $J_m$

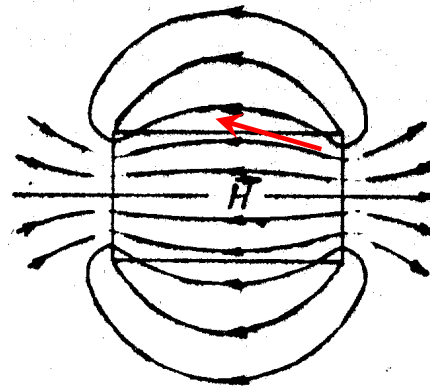
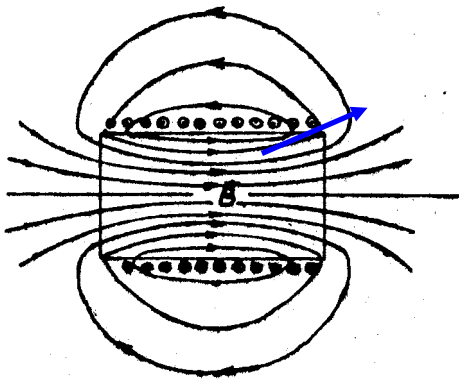
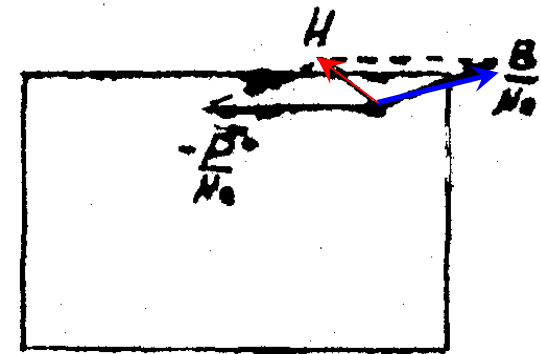
- El campo **H** resulta como el campo de dos placas paralelas de dimensiones finitas con densidad de carga superficial  $q^*$  análogo al campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas con efecto de borde.

- Para el espacio externo al material, donde  $\mathbf{P}=0$ , resulta :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

- Para el espacio interior al material, resulta :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}^*)$$

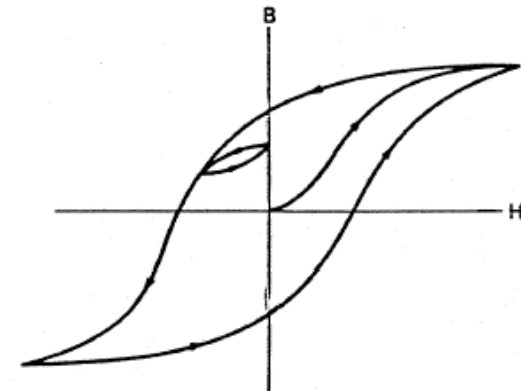
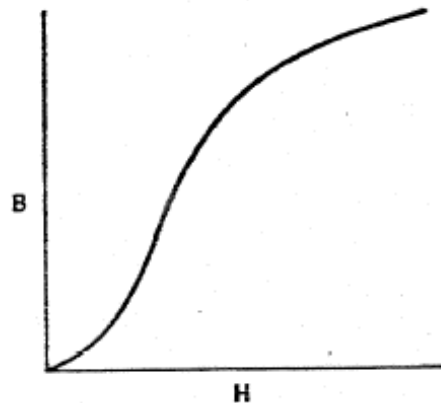
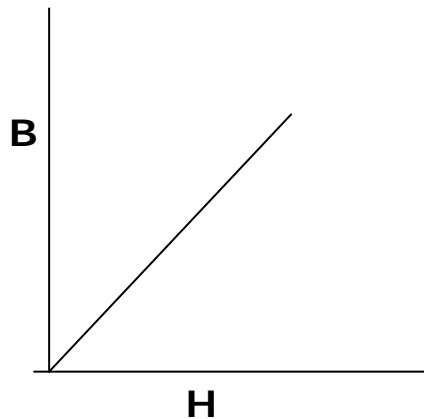


- **Característica de magnetización de los materiales**

los materiales magnéticos reales imponen una relación funcional entre **B**, **H** y **P**

$$f(\vec{B}, \vec{H}) = 0 \quad f(\vec{H}, \vec{P}^*) = 0 \quad f(\vec{B}, \vec{P}^*) = 0$$

- las dos primeras son las más frecuentemente utilizadas cualquiera de ellas expresa una vinculación funcional entre dos campos vectoriales que puede presentar, según el material, diferentes grados de complejidad: desde una simple relación de proporcionalidad, hasta relaciones alinéales de tipo tensorial.



### **Materiales-magnéticamente isotrópicos y lineales**

$$\vec{P}^* - \chi_m \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{P}^* = \chi_m \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

$$\chi_m \ll 1$$

*Donde  $\chi_m$  es una cantidad escalar adimensional llamada susceptibilidad magnética. Su valor absoluto es generalmente muy pequeño  $10^{-5}$  a  $10^{-8}$  a*

*El material es:*

- paramagnético si  $\chi_m$  es positiva*
- diamagnético si  $\chi_m$  es negativa.*

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}^*$$

$$\mu_r = \chi_m + 1$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

**permeabilidad magnética relativa**

Material	$\chi_m$	$\chi_{m,masa}$ (m <sup>3</sup> /kg)
Aluminio	$2.1 \times 10^{-5}$	$0.77 \times 10^{-8}$
Bismuto	$-16.4 \times 10^{-5}$	$-1.68 \times 10^{-8}$
Cobre	$-0.98 \times 10^{-5}$	$-0.11 \times 10^{-8}$
Diamante	$-2.2 \times 10^{-5}$	$-0.62 \times 10^{-8}$
Cloruro de gadolinio (GdCl <sub>3</sub> )	$603.0 \times 10^{-5}$	$133.3 \times 10^{-8}$
Oro	$-3.5 \times 10^{-5}$	$-0.18 \times 10^{-8}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$	$0.68 \times 10^{-8}$
Mercurio	$-2.8 \times 10^{-5}$	$-0.21 \times 10^{-8}$
Plata	$-2.4 \times 10^{-5}$	$-0.23 \times 10^{-8}$
Sodio	$0.84 \times 10^{-5}$	$0.87 \times 10^{-8}$
Titanio	$18.0 \times 10^{-5}$	$4.01 \times 10^{-8}$
Tungsteno	$7.6 \times 10^{-5}$	$0.40 \times 10^{-8}$
Bióxido de carbono (1 atm)	$-1.19 \times 10^{-8}$	$-0.60 \times 10^{-8}$
Hidrógeno (1 atm)	$-0.22 \times 10^{-8}$	$-2.48 \times 10^{-8}$
Nitrógeno (1 atm)	$-0.67 \times 10^{-8}$	$-0.54 \times 10^{-8}$
Oxígeno (1 atm)	$193.5 \times 10^{-8}$	$135.4 \times 10^{-8}$

Fuente: Datos obtenidos del *Handbook of Chemistry and Physics*, 70a. ed., Boca Raton, Florida, CRC Press, Inc., 1990. Prácticamente todas las fuentes de datos dan susceptibilidades magnéticas en unidades gaussianas (cgs); si se usa el supraíndice (1) para indicar la constante en el sistema gaussiano, entonces  $\chi_m = 4\pi\chi_m^{(1)}$  y  $\chi_{m,masa} = 4\pi \times 10^{-3}\chi_{m,masa}^{(1)}$ .

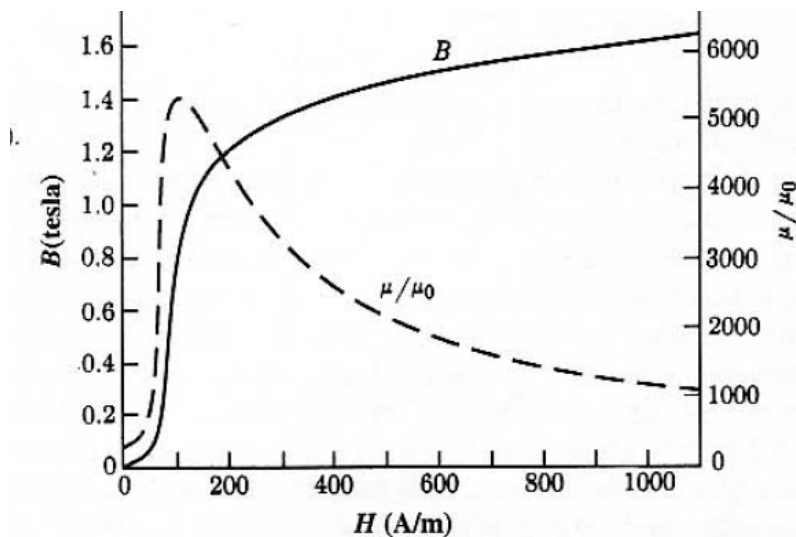
## Materiales magnéticamente isotrópicos y alineales

- Son materiales típicos de esta clase los llamados ferromagnéticos, cuya característica magnética es del tipo:

$$B = f(H) \quad \text{con}$$

$$\vec{B} \times \vec{H} = 0$$

$H, B, P^*$  igual dirección



**$B = f(H)$**  tienen una relación funcional alineal, la cual ni siquiera es en general expresable por fórmulas matemáticas sencillas. Es usual presentarla en forma de curvas o tablas determinadas experimentalmente.

$$\vec{B} = \mu_r(H) \cdot \mu_0 \vec{H}$$



es una magnitud escalar adimensional que es función del módulo de  $H$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} & & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \mu_0 \cdot \vec{J} \end{array} \right. & \begin{array}{c} \text{--->} \\ \text{<---} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- Ambos sistemas de ecuaciones constituyen descripciones diferenciales completas alternativas de la magnetostática, cuya solución (el campo o resultante) dependerá sólo de las condiciones de contorno particulares del problema, es decir, de su geometría, de las propiedades magnéticas de la materia en todos los puntos del espacio, interpretadas por  $\mu$  y el campo de corrientes estacionarias impuesto  $\vec{J}$ .
- Presentan una sencillez formal. Pero no debemos engañarnos. Esta sencillez es aparente pues sintetizan una fenomenología física cuyas manifestaciones son casi siempre tan complejas que la solución analítica de las ecuaciones diferenciales planteadas es rara vez posible, aún para geometrías muy sencillas.



$$\begin{array}{l|l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \mu_0 \cdot \vec{J} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{array}$$

Si bien puede formalizarse la expresión diferencial de los campos, pero las formulas resultantes no aportan mayor claridad conceptual y no ofrecen ventajas prácticas en su aplicación.

Es por ello práctica común utilizar una forma mixta en que aparecen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) \quad \vec{B} \times \vec{H} = 0$$

Al utilizar esta forma de las ecuaciones diferenciales de la magnetostática, debe cuidarse no olvidar que los campos **B** y **H** son descripciones alternativas equivalentes. Ninguno de ellos es causa o efecto del otro. Si se los usa a ambos es que, por razones prácticas, a veces es más sencillo trabajar con uno que con el otro o, como en este caso, con ambos a la vez.

# Materiales Magnéticos

**TABLA 9.2**

Propiedades de algunos materiales ferromagnéticos a temperatura ambiente

Material	Composición (%)	$\mu_0 M_s$ (T)	$H_s$ (A/m)	$K_m$ (máxima)
<b>Elementos</b>				
Hierro (recocido)		2.15	$1.6 \times 10^5$	5,500
Cobalto		1.79	$7.0 \times 10^5$	
Níquel		0.61	$5.5 \times 10^5$	
<b>Aleaciones y compuestos</b>			$H_c$ (A/m)	
Hierro-silicio	96 Fe, 4 Si	1.97	56	8,000
Permalloy	55 Fe, 45 Ni	1.60	5.6	50,000
Mumetal	5 Cu, 2 Cr, 77 Ni, 16 Fe	0.75	1.2	100,000
Permendur	50 Co, 50 Fe	2.45	159	5,000
Ferrita de manganeso	Mn Fe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	0.49		2,500
Ferrita de níquel	Ni Fe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	0.32		2,500
$B_r$ (T)				
Acero al cobalto	52 Fe, 36 Co, 4 W, 6 Cr, 0.8 C	0.97	$19 \times 10^3$	
Alnico V	51 Fe, 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu	1.25	$52 \times 10^3$	
Platino-cobalto	77 Pt, 23 Co	0.6	$3.4 \times 10^5$	
Samario-cobalto	Sm Co	0.84	$6.7 \times 10^5$	
Neodimio-hierro	13 Nd, 81 Fe, 6 B	0.80	$1.2 \times 10^6$	

Nota:  $M_s$  = magnetización de saturación,  $H_s$  = intensidad magnética requerida para la saturación,  $H_c$  = coercitividad,  $B_r$  = remanencia.

Fuente: Datos tomados del *American Institute of Physics Handbook*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1972, y del *Handbook of Chemistry and Physics*, 70a. ed., Boca Raton, FL, CRC Press, Inc., 1990. Los datos del Nd-Fe-B se tomaron de J. J. Croat et al., *Journal of Applied Physics* 55, 2079, 1985.

## Análisemos el Imán Permanente en materiales reales...

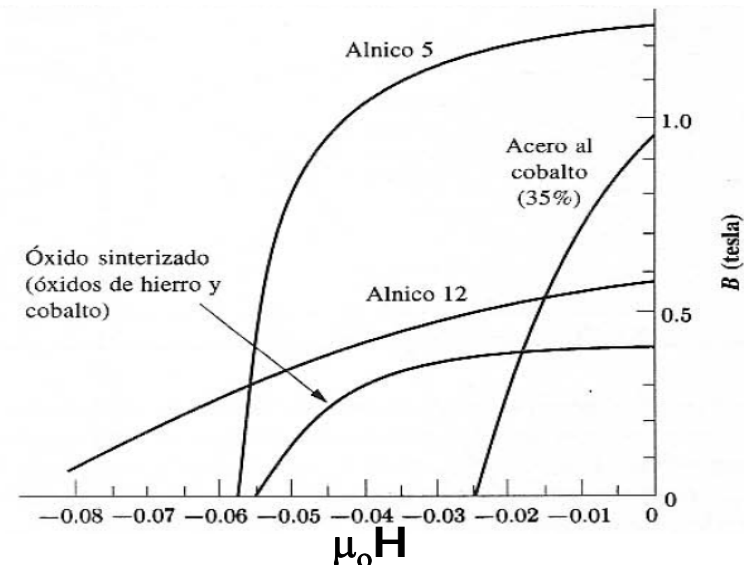
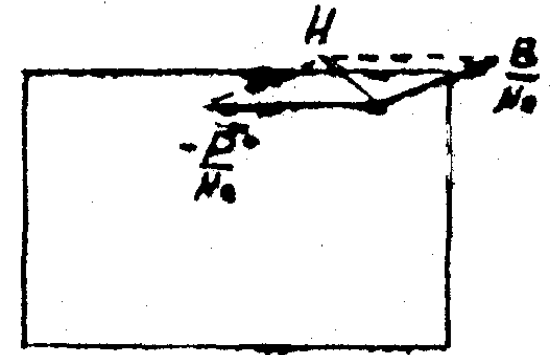
$$\vec{B} - \vec{P}^* - \mu_0 \cdot \vec{H} = 0$$

La ecuación constitutiva que liga los tres campos es vectorial

Por lo tanto en el caso **ideal** planteado los campos no son colineales y por lo tanto la relación funcional entre ellos no sería un escalar, tal situación NO ocurre en la realidad.

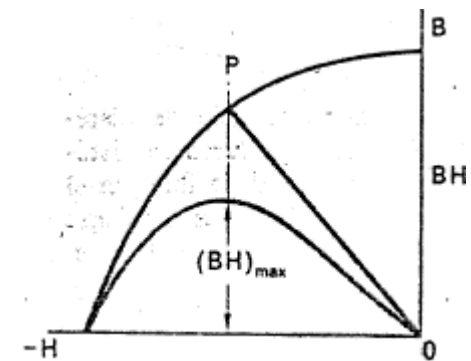
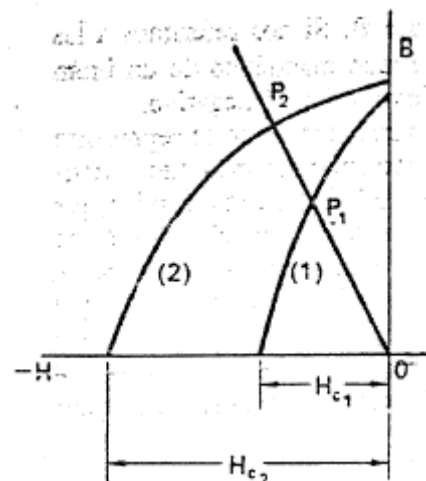
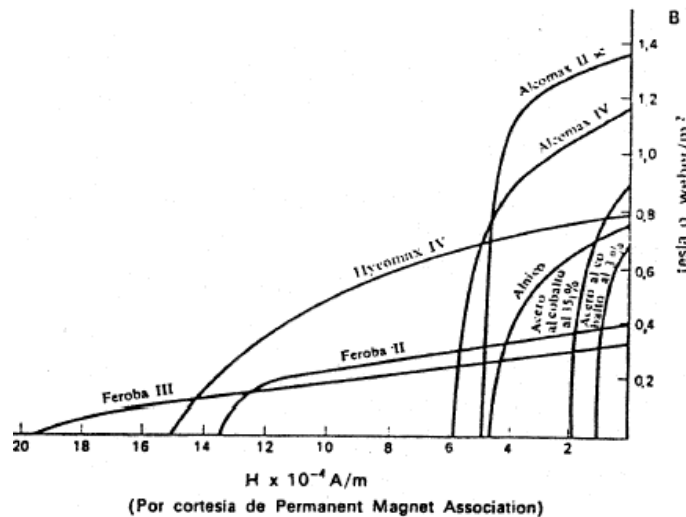
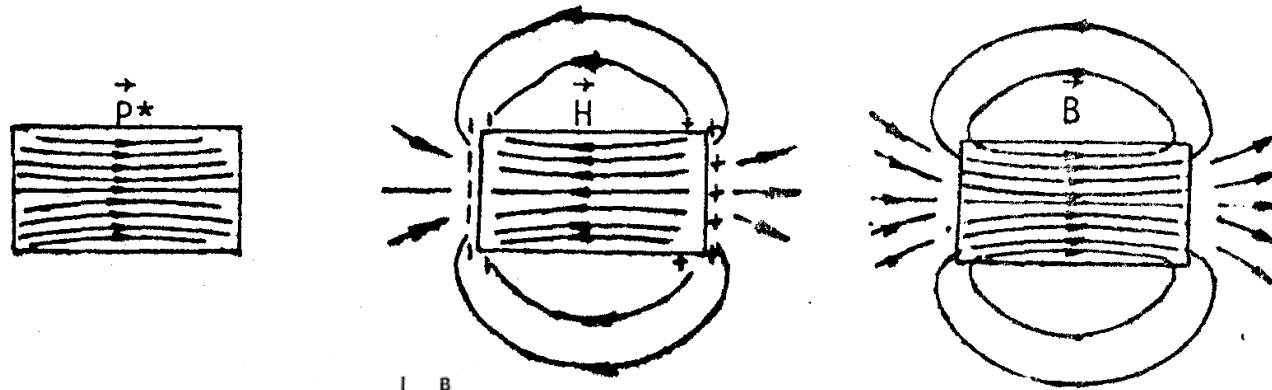
Si fijamos una determinada relación funcional entre uniformemente válida en toda la barra magnetizada (material homogéneo), ni  $\mathbf{P}^*$  será uniforme, ni  $\mathbf{B}$  ni  $\mathbf{H}$  serán fácilmente calculables como en el ejemplo

$$\vec{B} \times \vec{H} = 0$$



## Líneas de campo en un Imán permanente Real

- Las líneas de  $P^*$  no son uniformes
- Existe una relación funcional entre  $P^*$ ,  $H$  y  $B$ , los campos dentro del material tienen igual dirección y cumplirán con algún punto de la curva  $H$ ,  $B$



### Anillo de material isotrópico magnetizado con arrollamiento de excitación uniformemente distribuido.

Consideremos un anillo de material isotrópico (por ej. Hierro) sobre el cual está arrollada una bobina con  $N$  vueltas contiguas, recorridas por una corriente estacionaria  $I$ .

Este caso puede idealizarse considerando que la corriente circula en una lámina superficial adherida alrededor del anillo, con una densidad lineal de corriente cuyo modulo debe verificar la relación

$$2\pi r \cdot J_l = NI$$

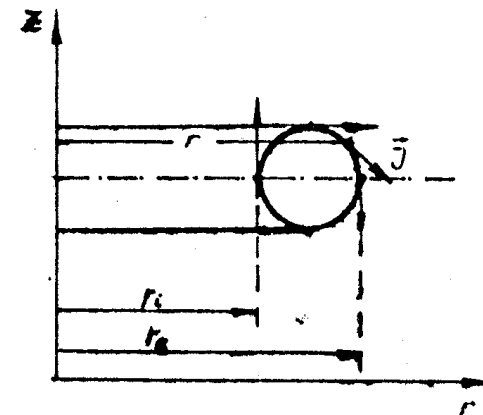
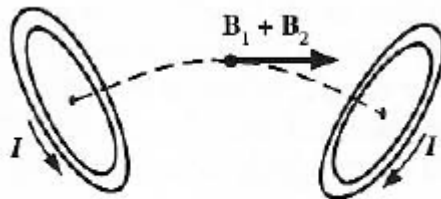
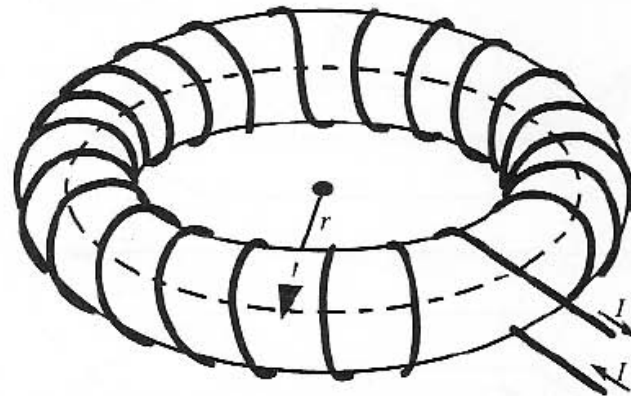


Figura 11

- Por el tipo de simetría que se presenta, las líneas de campo, tanto de  $\mathbf{P}^*$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  serán circunferencias concéntricas. No existirán entonces puntos de divergencia para ninguno de ellos. En particular el campo quedará entonces definido por:

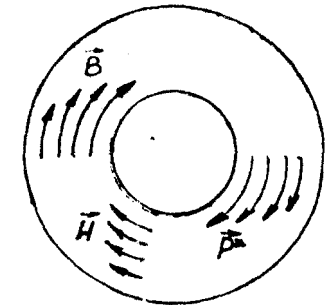
$$\begin{array}{l|l} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \end{array}$$

- A estas ecuaciones habrá que agregar la característica de magnetización del material, que vincula dos de los campos, ejemplo  $F(H)=B$
- Evidentemente es mucho más fácil en este caso resolver  $H$ , ya que la expresión diferencial depende sólo de  $J$  y no depende en absoluto del material que construye el anillo.
- Dicho de otra manera, no existe densidad de polos magnéticos equivalentes en ninguna parte del anillo ya que en todo el espacio la divergencia de  $\mathbf{P}^*$  es cero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

- Este tipo particular de simetría es el único caso en que no hay contribución alguna del material magnetizable al campo  $\vec{H}$ . Y es justamente por este motivo que esta configuración se utiliza para determinar experimentalmente la curva de magnetización de los materiales ferromagnéticos.
- Considerando la simetría del caso, el campo tendrá valor constante sobre circunferencias con centros en el eje del anillo.

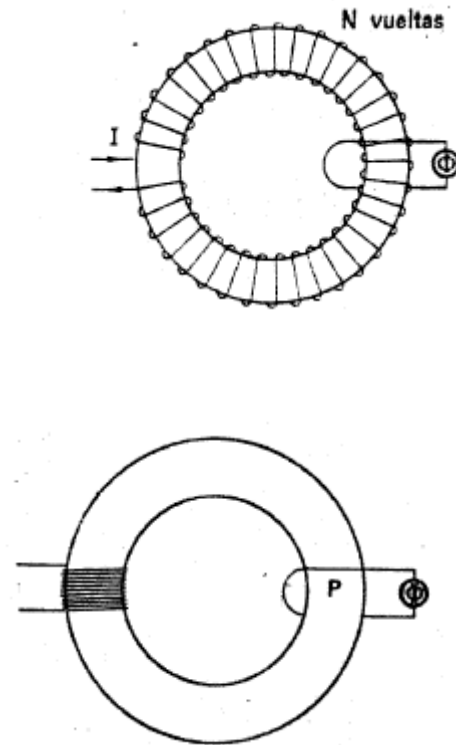
$$\oint H \varphi \cdot r \cdot d\varphi = NI \quad H\varphi = \frac{NI}{2\pi r}$$



- Si el camino de integración se toma sobre una de estas circunferencias con  $r < r_i$  (camino en aire) resultará  $H=0$
- Si el camino de integración se toma sobre una de estas circunferencias con  $r > r_e$  (camino en aire) resultará  $H=0$
- Si el camino de integración se toma sobre una de estas circunferencias con  $r_i < r < r_e$  (camino en el material) resultará

$$H\varphi = \frac{NI}{2\pi r}$$

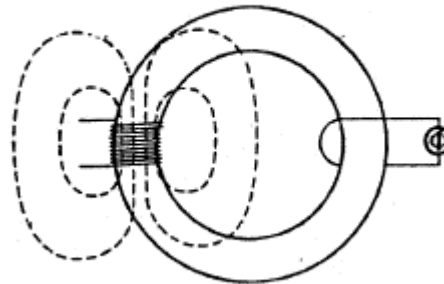
se indica en la figura. La f.m.m.\* del arrollamiento es  $NI$ , el diámetro medio  $d$ , la permeabilidad del anillo es  $\mu$ , y el área de la sección recta  $s$ .



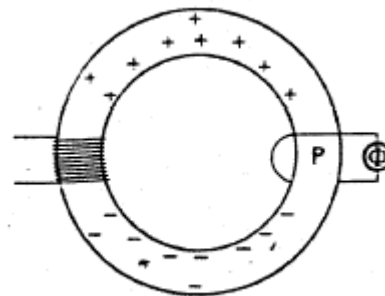
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H\pi d = NI,$$

$$\Phi = \frac{\mu N I s}{\pi d}.$$

Campo debido sólo a la corriente



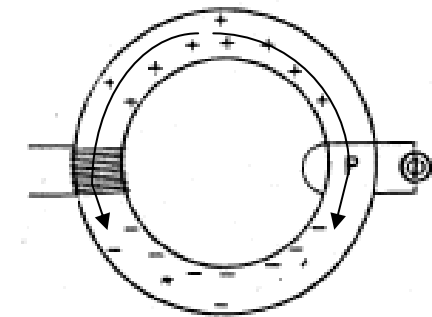
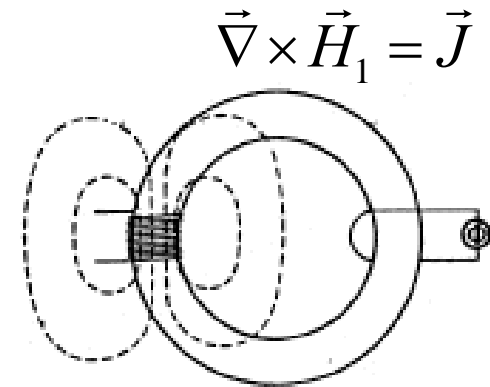
Polaridad superficial en un anillo



debe haber fuentes adicionales en la superficie del anillo.



- **Anillo de material magnetizado con arrollamiento de excitación concentrado**
- En el caso anterior, el hecho de que el campo  $\mathbf{H}$  producido por el arrollamiento externo no tenga componentes perpendiculares a la superficie del anillo se traduce en que **no existe densidad superficial de carga magnética**
- Para el caso del **arrollamiento concentrado** el campo producido por tal arrollamiento en el vacío es de tal forma que si introducimos el anillo de hierro, las líneas de campo incidirán sobre su superficie con un cierto ángulo, indicativo de una componente perpendicular, sobre la superficie del anillo. **Esto equivale a una distribución de carga magnética distribuida no uniformemente en el anillo, mostrada esquemáticamente en la figura**
- Esta carga superficial es fuente de un campo tal que disminuye el producido por la corriente externa en el lugar donde está ubicado el arrollamiento excitador y lo aumenta en el lado opuesto del anillo. El resultado es que el campo  $\mathbf{H}$  que aparece en el **interior del anillo es casi uniforme y su magnitud es aproximadamente igual a la que existe cuando se lo excita con un arrollamiento distribuido uniformemente de igual valor de f.m.m.**



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

## Electroimán

En el electroimán se superponen los efectos de una corriente de conducción externa y el del material magnetizado.

Para tal caso las fuentes de campo serán **J** y **P\***

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{P}^*$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$F(\vec{H}, \vec{P}^*) = 0$$

De la misma manera que para el caso del imán permanente, la materia magnetizada puede ser reemplazada por una corriente de magnetización y una densidad superficial de carga magnética equivalentes.

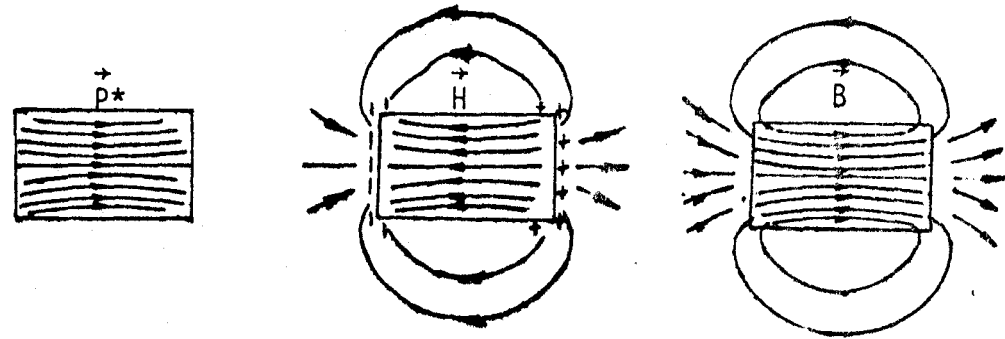
## ***Materiales Magnéticos***

---

- Para hallar **H y B** y separamos los efectos de la corriente de conducción y los de la materia magnetizada, componiéndolos a posteriori para hallar los campos totales.
- Si se denominan con **H1 y B1** y los campos provocados por la corriente de conducción y con **H2 y B2** los debidos al material tendremos

$$\begin{array}{l|l} \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 & \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_1 = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J} & \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_2 = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{P}^* = \mu_0 \vec{J}_m & \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = 0 \end{array}$$

- Así los campos **H1 y B1** serán campos de un solenoide con densidad de corriente **J**
- Los campos **H2 y B2** y serán del mismo tipo que los del imán permanente tal como se graficaron

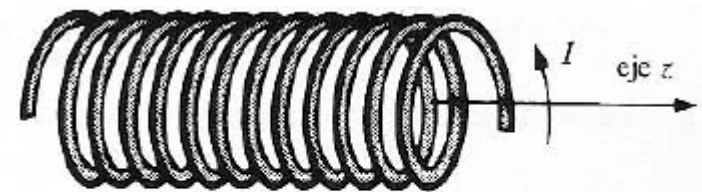


*Las sumas vectoriales*

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$$

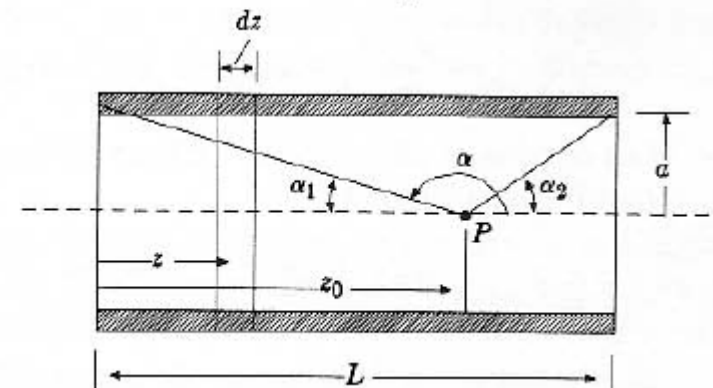
$$\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$$

*dan los los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$*



(a)

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L} \left[ \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right]$$



- **Conclusiones**

1.- La representación, macroscópica de las propiedades magnéticas de la materia puede describirse totalmente a través, del momento dipolar magnético por unidad de volumen  $\vec{P}^*$

2.- Dos funciones diferenciales de este momento dipolar , su rotacional y su divergencia, permiten expresar individualmente las fuentes de los campos magnéticos y debidas a la materia magnetizada.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{P}^* \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^*}{\mu_0}$$

3.- El conocimiento y la individualización de las fuentes que contribuyen a los campos permite analizar en forma sistemática distintos casos típicos, comprendiendo las causas que determinan el comportamiento de los campos y cuando hay materia magnetizada.