E1214 Fundamentos de las Comunicaciones
E0311 Comunicaciones
E0214 Comunicaciones

Curso 2023

Adrián Carlotto

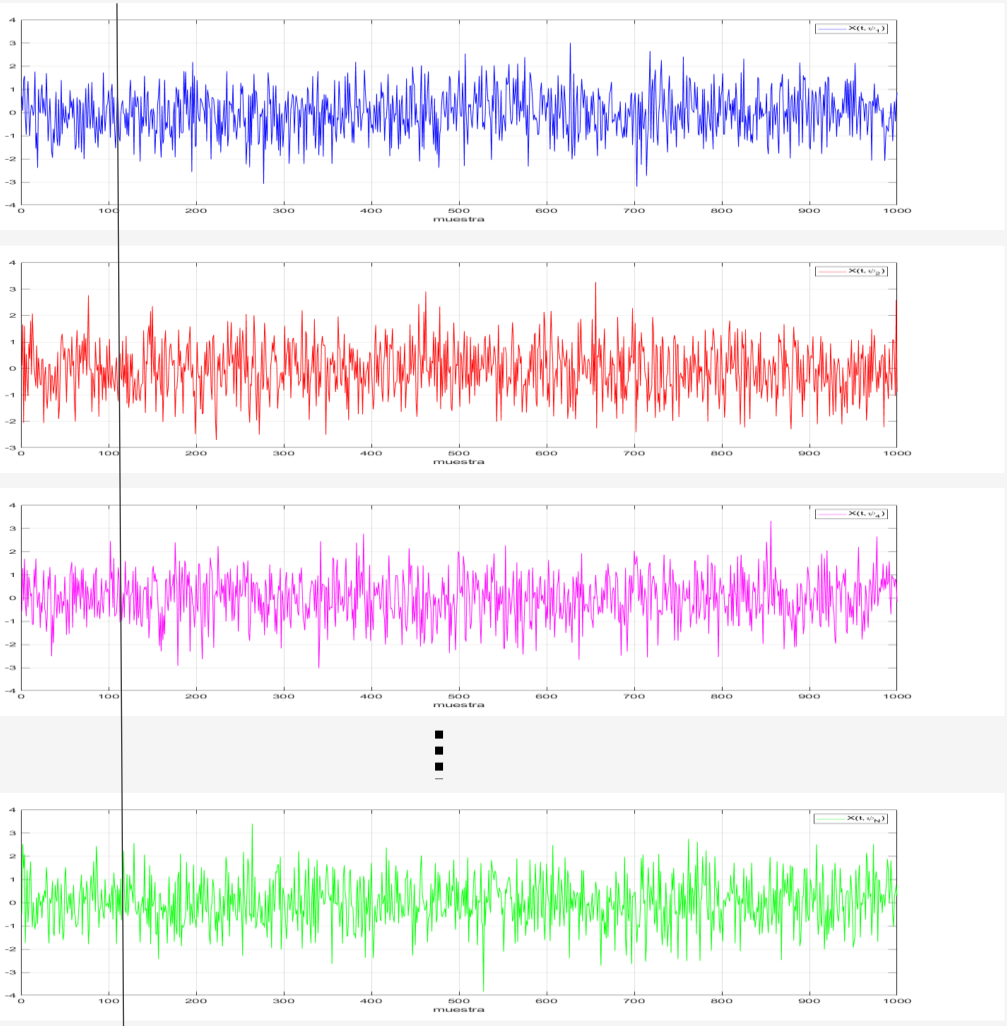
comunica@ing.unlp.edu.ar

Temas a tratar

- Modelo de señal aleatorio
- Promedios temporales y estadísticos
- Correlación y Densidad Espectral de Potencia (DEP)
- Proceso ESA
- Modelo de ruido blanco
- Ancho de banda equivalente de ruido
- Intercorrelación e Inter DEP

SAC-D

Modelo de señal ALEATORIO



Realización 1: $X(t,\psi_1)$

Realización 2: $X(t,\psi_2)$

Realización 3: $X(t,\psi_3)$

⋮

Realización N: $X(t,\psi_N)$

$X(t_1,\psi) = X_1$ **VA** $f_{X_1}(x_1,t_1) \longrightarrow$ fdp

$f_{X_1}(x_1,t_1)$ fdp

$$F_{X_1}(x_1,t_1) = P\{X_1 \leq x_1\} = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(\alpha,t_1)\,d\alpha$$

Proceso estocástico

$$X(t,\psi) = X(t)$$

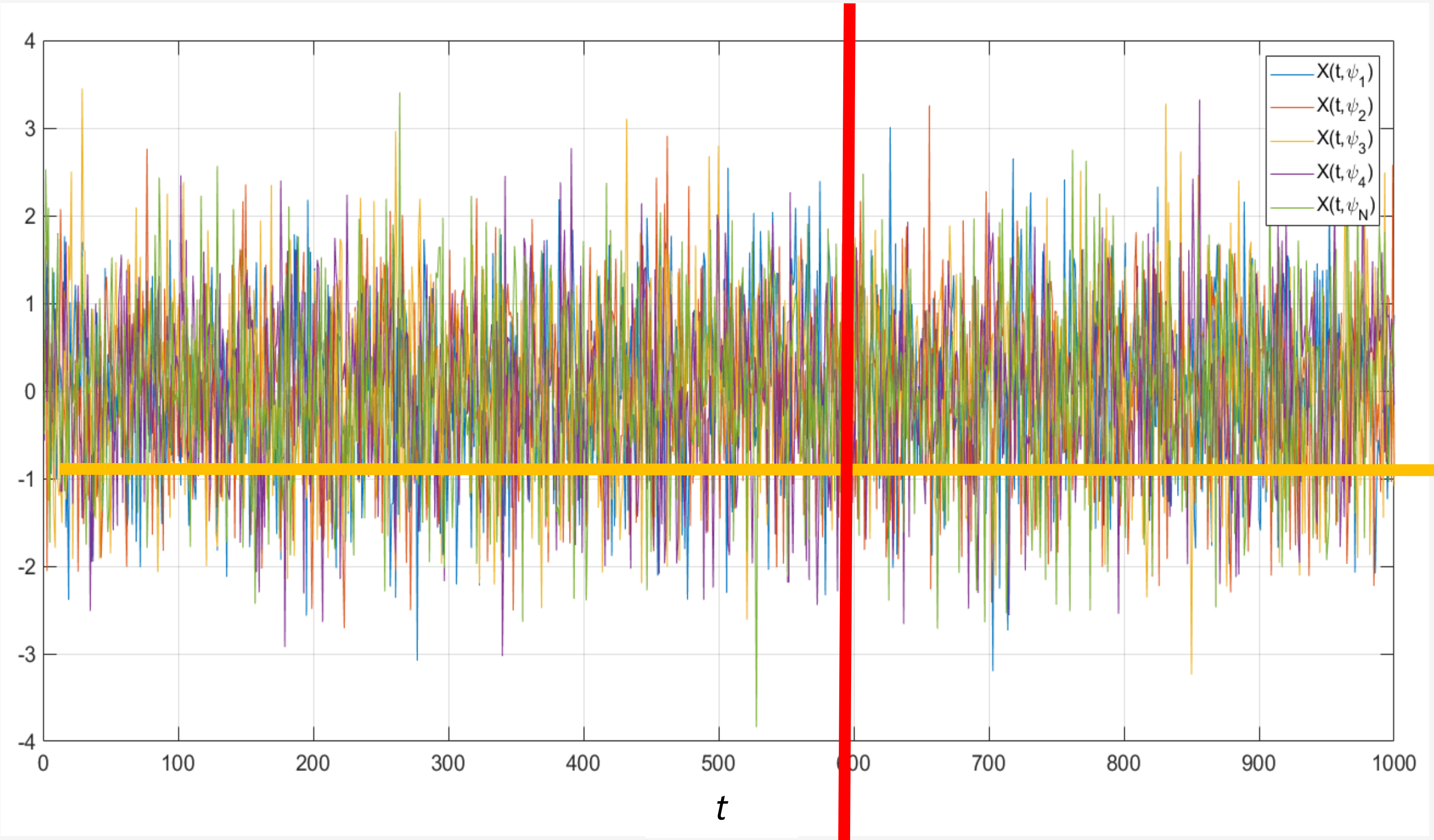
$f_{X_i}(x_i,t_i)$, $\forall\, t_i \in \mathbb{R}$

$f_{X_i,X_j}(x_i,x_j;t_i,t_j)$, $\forall\, t_i, t_j$

$f_{X_i,X_j,X_k}(x_i,x_j,x_k;t_i,t_j,t_k)$, $\forall\, t_i, t_j, t_k$

⋮

Modelo de señal ALEATORIO



Por ejemplo:

$$< X(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt \quad \textbf{VA}$$

$$r_{XX}(\tau) =< X(t+\tau)\, X^*(t) >$$

Promedios temporales

Promedios en las realizaciones

Por ejemplo:

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$$

$$R_{XX}(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau)X^*(t)\}$$

Media estadística

Proceso de VIC, espacio de estados discreto

$$E\{X(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \, P\{X(t) \; = x_i\} = \mu_X(t)$$

Proceso de VIC, espacio de estados continuo

$$E\{X(t)\} = \int_{\infty}^{-\infty} x \; f_X(x;t) \; dx = \mu_X(t)$$

Proceso de VID, espacio de estados discreto

$$E\{X[n]\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \, P\{X[n] \; = x_i\} = \mu_X[n]$$

Proceso de VID, espacio de estados continuo

$$E\{X[n]\} = \int_{\infty}^{-\infty} x \; f_X(x;n) \; dx = \mu_X[n]$$

Comparar con media temporal

$$< X[n] > = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X[n]$$

$$f_X(x;t) \; dx \sim P\{x < X(t) < x + dx\}$$

$$F_X(x;t) = P\{X(t) \leq x\}$$

$$F_X(x;n) = P\{X[n] \leq x\}$$

No perder la intuición natural por querer memorizar un conjunto de ecuaciones, sin comprender qué es lo que representan o los que nos están “diciendo”

Correlación y DEP

$r_{XX}(\tau) = < X(t+\tau)\, X^*(t) >$

$R_{XX}(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau)\, X^*(t)\}$

$|X(t)|^2$ Potencia instantánea
(es función del tiempo y de la realización)

$$< |X(t)|^2 > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |X(t)|^2 dt$$

Potencia media (temporal)
(es función de la realización)

$E\{|X(t)|^2\} = R_{XX}(t,t)$ Potencia media (estadística)
(es función del tiempo)

$\boxed{P_X = < R_{XX}(t,t) >}$ Potencia media normalizada
del proceso

Sea un PA con $R_{XX}(t,t) < \infty$

$$S_{XX}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E\{|X^T(f)|^2\}}{2T}$$ DEP

donde

$$X^T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\} = \mathcal{F}\{X(t)\, \sqcap\left(\frac{t}{2T}\right)\}$$

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\, df$$

Relación de Wiener - Khinchin

$$\boxed{S_{XX}(f) = \mathcal{F}\{< R_{XX}\,(t+\tau, t) >\}}$$

Ej: Modelo p/ salida generador de RF

$$Y(t) = A\cos(2\pi f_p t + \theta) \qquad \theta \sim \mathrm{U}[0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$E\{Y(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_p t + \theta)\} = \int_0^{\pi/2} A\cos(2\pi f_p t + \vartheta)\frac{2}{\pi}\, d\vartheta$$

$$E\{Y(t)\} = \mu_Y(t) = \frac{2A}{\pi}\cos(2\pi f_p t) + \frac{2A}{\pi}\mathrm{sen}(2\pi f_p t)$$

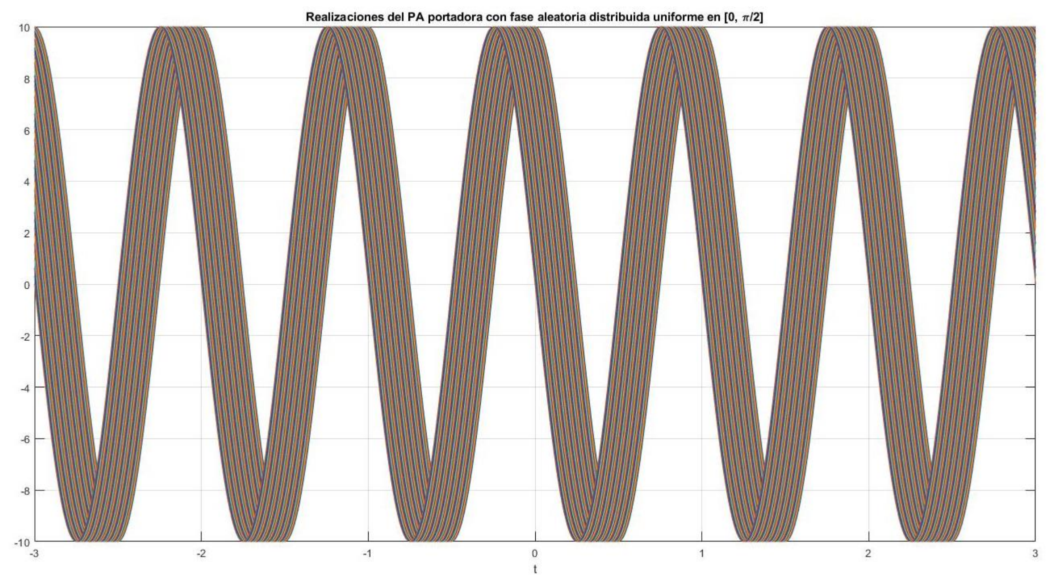
$$R_{YY}(t+\tau, t) = E\{Y(t+\tau)\, Y^*(t)\}$$

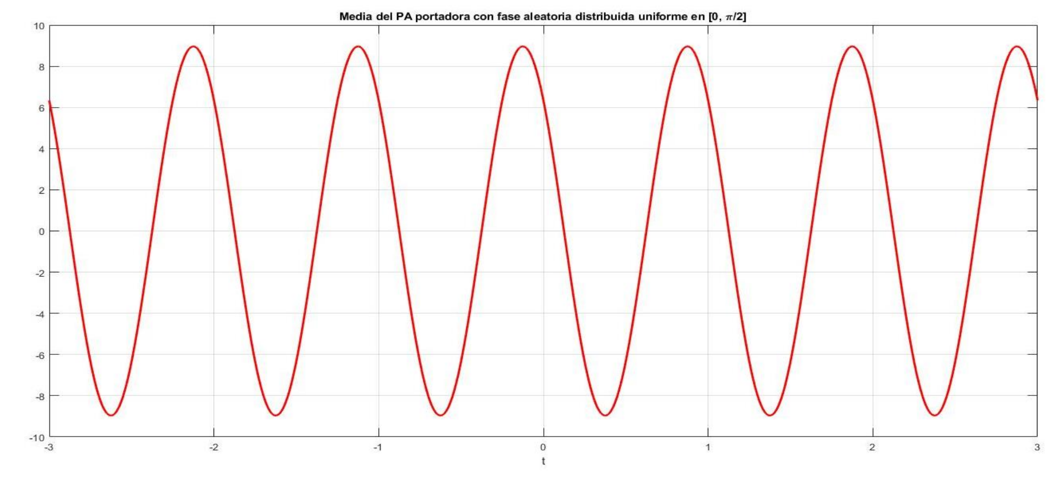
$$R_{YY}(t+\tau, t) = -\frac{A^2}{\pi}\mathrm{sen}(4\pi f_p t) + \frac{\mathrm{A}^2}{2}\cos(2\pi f_p \tau)$$

$$S_{YY}(f) = \mathcal{F}\{ < R_{XX}\ (t+\tau, t) > \}$$

$$S_{YY}(f) = \frac{\mathrm{A}^2}{4}\left(\delta(f + f_p) + \delta(f - f_p)\right)$$

$$P_Y = < R_{yy}(t,t) > = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(f)\, df = \frac{A^2}{2}$$





PAESAs

$$E\{X(t)\} = \mu_X \qquad \text{(constante)}$$

$$R_{XX}(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau)X^*(t)\} = R_{XX}(\tau)$$

$X(t)$ es ESA (PAESA)

$$E\{X[n]\} = \mu_X \qquad \text{(constante)}$$

$$R_{XX}[n+m, n] = E\{X[n+m]X^*[n]\} = R_{XX}[m]$$

$X(t)$ es ESA (PAESA)

<u>Secuencia aleatoria independiente e idénticamente distribuida (iid)</u>

$X[n]$ se denomina iid cuando:

- La distribución de cada VA $X_n = X[n]$ es $F_X(x_n)$, $\forall n$
- las variables aleatorias X_n son mutuamente independientes. Esto es:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1, n_2, \dots, n_m) = \prod_{i=1}^{m} P\{X[ni] \leq xi\} = \prod_{i=1}^{m} F_X(x_i) \ , \forall m$$

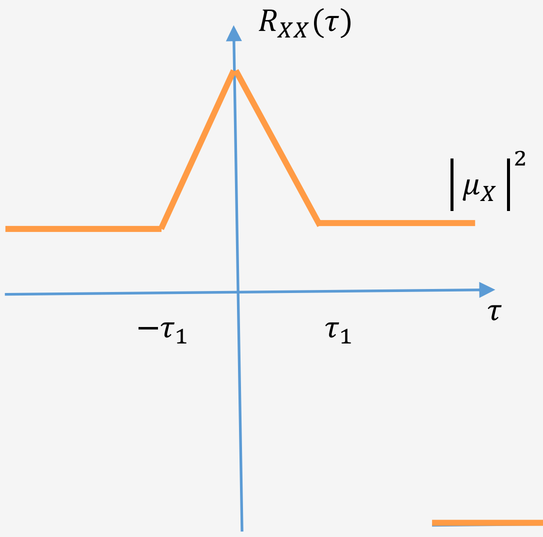
Para procesos de VIC no existen procesos **i**id, pero trabajaremos con un modelo ideal: Ruido Blanco

Auto-covarianza

$$C_{XX}(t+\tau,t) = E\{\left(X(t+\tau) - \mu_x(t+\tau)\right)\left(X(t) - \mu_x(t)\right)^*\}$$

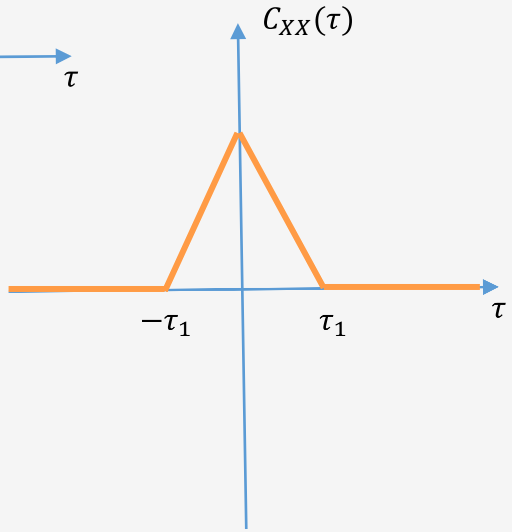
$$C_{XX}(t+\tau,t) = E\{X(t+\tau)\, X^*(t)\} - E\{X(t+\tau)\}\, \mu_X^*(t) - E\{X^*(t)\}\, \mu_X(t+\tau) + \mu_X(t+\tau)\, \mu_X^*(t)$$

$$C_{XX}(t+\tau,t) = R_{XX}(t+\tau,t) - \mu_X(t+\tau)\, \mu_X^*(t)$$



En el caso de PAESA

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \left|\mu_X\right|^2 \longrightarrow R_{XX}(\tau) = C_{XX}(\tau) + \left|\mu_X\right|^2$$



Si el proceso es de media nula

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

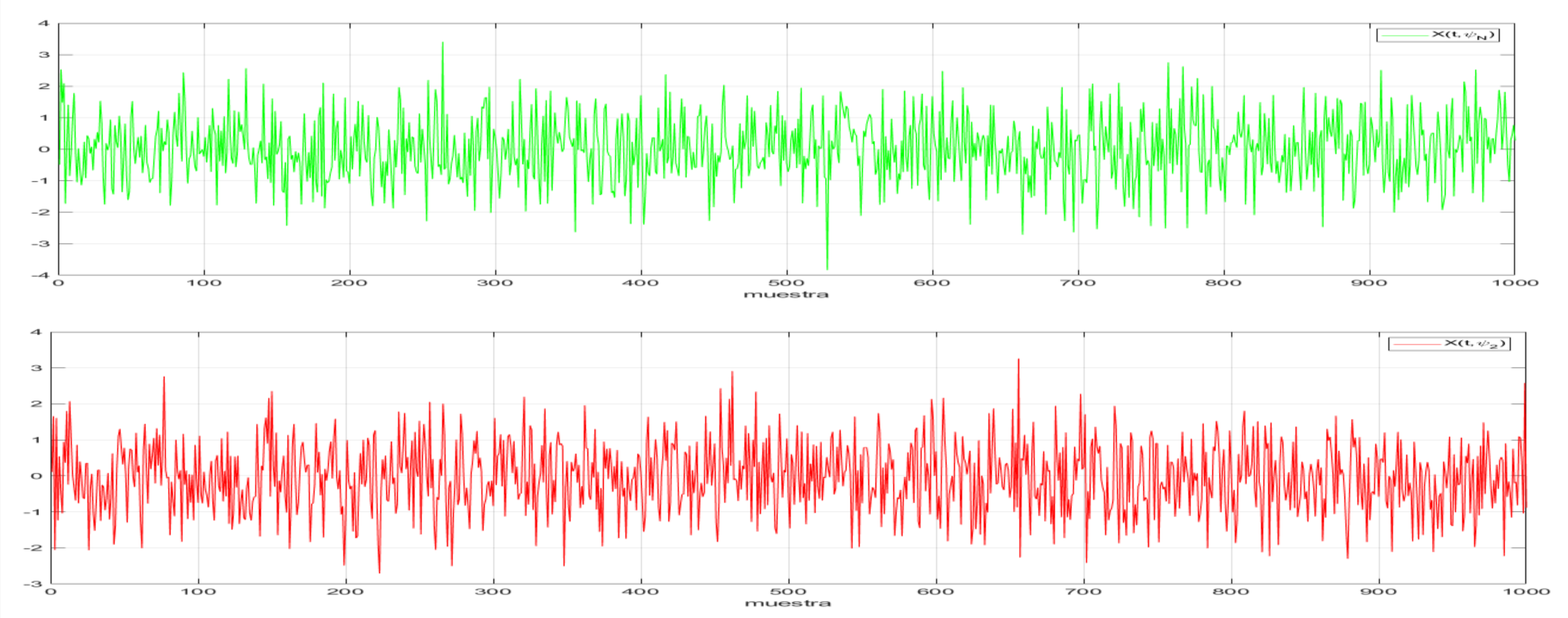
Modelo: Ruido Blanco

Buscamos un modelo para el ruido (variaciones “rápidas” y valores que se suponen no correlacionados entre sí)

$$\begin{cases} \mathrm{E}\{X(t)\} = \mu_X = 0 \\ R_{XX}(t,t) = \mathrm{E}\left\{|X(t)|^2\right\} = P_X < \infty \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & R_{XX}(t+\tau,t) = \mathrm{E}\{X(t+\tau)\,X^*(t)\} = P_X\,\delta[\tau] \\ & S_{XX}(f) = \mathcal{F}\{< R_{XX}(t+\tau,t) >\} = 0 \end{aligned}$$

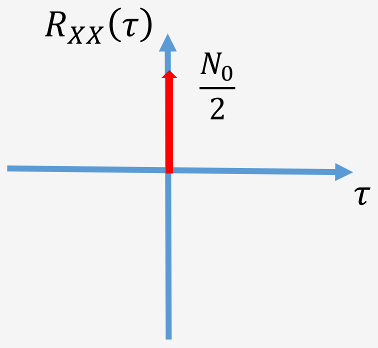
$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{S_{XX}(f)}\,df = 0!!!$$

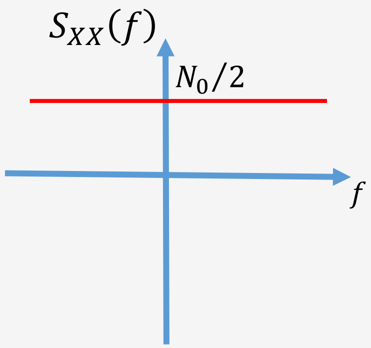
Además, supondremos que $X(t_i)$ y $X(t_j)$ no están correlacionadas $\forall\, t_i \neq t_j$



Modelo: Ruido Blanco

Modelo de <u>RUIDO BLANCO</u>: Cumple con la condición de un PA / VAs no correlacionadas entre sí, pero no con la con la condición de potencia finita.

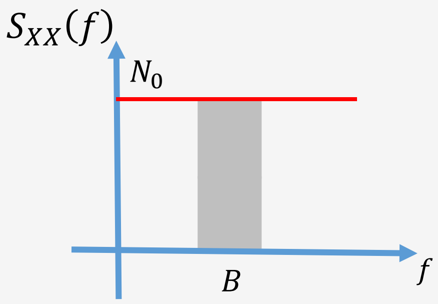




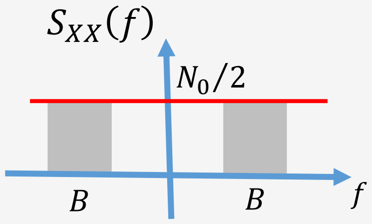
$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$

$$S_{XX}(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$P_X = \int_B S_{XX}(f)\,df = \frac{N_0}{2}\,2B = N_0 B$$



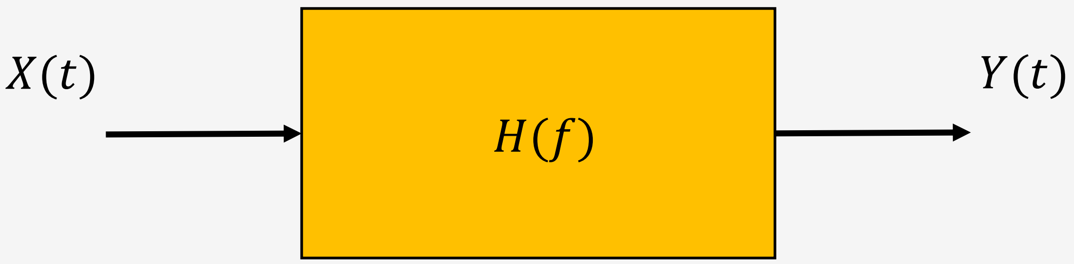
unilateral



bilateral

Gaussiano: VAs (amplitudes) son conjuntamente Gaussianas

PAs y SLITs



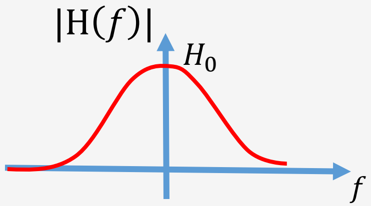
$$E\{Y(t)\} = E\{X(t)\}\, H(0)$$

$$R_{YY}(t+\tau, t) = \{R_{XX} * r_{hh}\}(t+\tau, t)$$

$$r_{hh}(\tau) = \{h * \bar{h}^{*}\}(\tau)$$

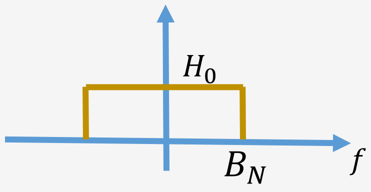
$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f)\, |H(f)|^2$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\, |H(f)|^2\, df$$



Si la entrada al sistema es ruido blanco con DEP $\frac{N_0}{2}$

$$P_Y = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df = N_0 B_N H_0^2$$



Ancho de Banda Equivalente de ruido

$$\boxed{B_N = \frac{1}{2H_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df}$$

Para un filtro pasa-bajos de 1er. orden

$$B_N = \frac{\pi}{2} f_{-3\mathrm{dB}}$$

Si la entrada es Gaussiana la salida del SLIT también lo será

Cálculo de B_N

$$\boxed{B_N = \frac{1}{2H_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\ df}$$

Teorema de Parseval

$$\frac{1}{2H_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\ df = \frac{1}{2H_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\ dt$$

$$\frac{1}{2H_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\ df = \frac{1}{2H_0^2}\sum_{Polos\ de\ H(S)} Res\{H(S)H(-S)\}$$

$H(S)$: Transferencia del SLIT (T. Laplace)

$$S = j2\pi f$$

Intercorrelación, Inter-DEP

También nos va a interesar la interacción entre dos PA. Consideremos dos PA de media nula y al PA $Z(t)$ a partir de ellos

$$Z(t) = a\,X(t) + b\,Y(t) \qquad a, b \in \mathbf{C}$$

$$S_{XY}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E\{X^T(f)\,Y^{T^*}(f)\}}{2T} = \mathcal{F}\{< R_{XY}(t+\tau, t) >\}$$

$$R_{ZZ}(t+\tau, t) = E\{[a\,X(t+\tau) + b\,Y(t+\tau)][a^*\,X^*(t) + b^*\,Y^*(t)]\}$$

$$S_{ZZ}(f) = |a|^2\,S_{XX}(f) + |b|^2 S_{YY}(f) + a\,b^*\,S_{XY}(f) + b\,a^*\,S_{YX}(f)$$

$$S_{XY}(f) = S_{YX}^*(f) \qquad\qquad a\,b^*\,S_{XY}(f) = [b\,a^*\,S_{YX}(f)]^*$$

$$S_{ZZ}(f) = |a|^2\,S_{XX}(f) + |b|^2 S_{YY}(f) + 2\,Re\{a\,b^*\,S_{XY}(f)\}$$

Intercorrelación, Inter-DEP

$$S_{ZZ}(f) = |a|^2\, S_{XX}(f) + |b|^2 S_{YY}(f) + 2\, Re\{a\, b^*\, S_{XY}(f)\}$$

- Si $S_{XY}(f) = 0$ entonces $< R_{XY}(t+\tau, t) > = 0$ por lo que $X(t)$ e $Y(t)$ no están correlacionados y la DEP de la suma pesada de ambos es una suma pesada de las DEPs de cada uno.

- Dada $S_{ZZ}(f) \geq 0\ \forall a, b, X$e Y puede demostrarse que $|S_{YX}(f)|^2 \leq S_{XX}(f) S_{YY}(f) \quad , \quad \forall f$

- Si $X(t)$ e $Y(t)$ no “solapan” sus espectros, entonces $S_{XX}(f)\, S_{YY}(f) = 0$ entonces $S_{YX}(f) = 0$ por lo que $X(t)$ e $Y(t)$ no están correlacionados

¿preguntas?

.

Foro en Moodle de E214 E1214

Consultas en tiempo real en reuniones virtuales

Fuentes:

- Principles of Communications, 5/E by Rodger Ziemer and William Tranter, John Wiley & Sons. Inc.
- Signals and Systems (Prentice-Hall signal processing series) by Alan V. Oppenheim.
- Apuntes de cátedra de Señales y Sistemas. FI-UNLP.
- Probability, Random Variables, and Stochastic Processes; Athanasios, Unnikrishna Pillai, 2002.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
POR LA CIENCIA Y POR LA PATRIA

U.N.L.P.
Fi