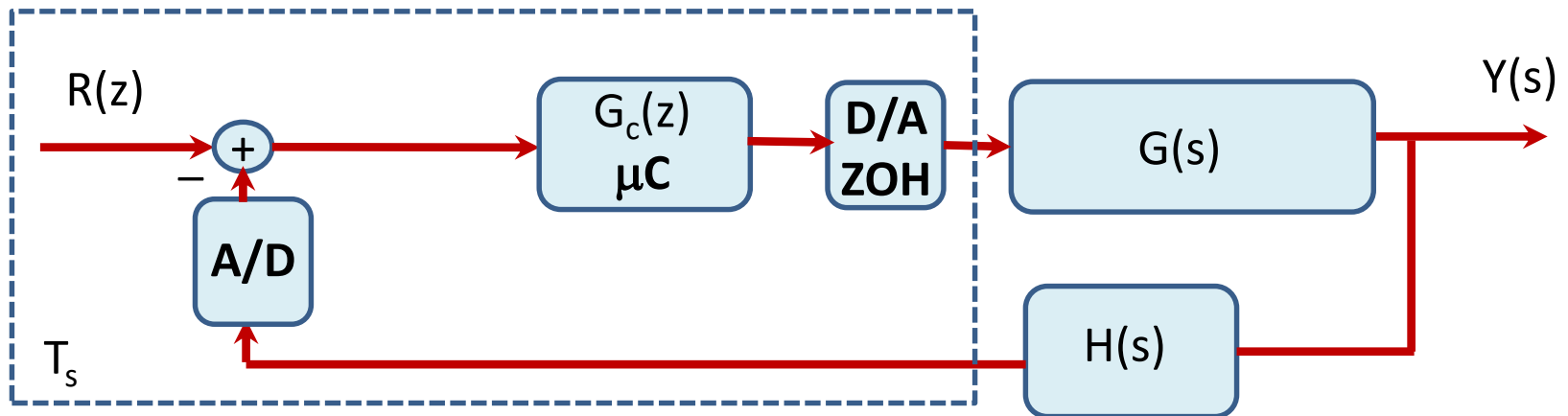
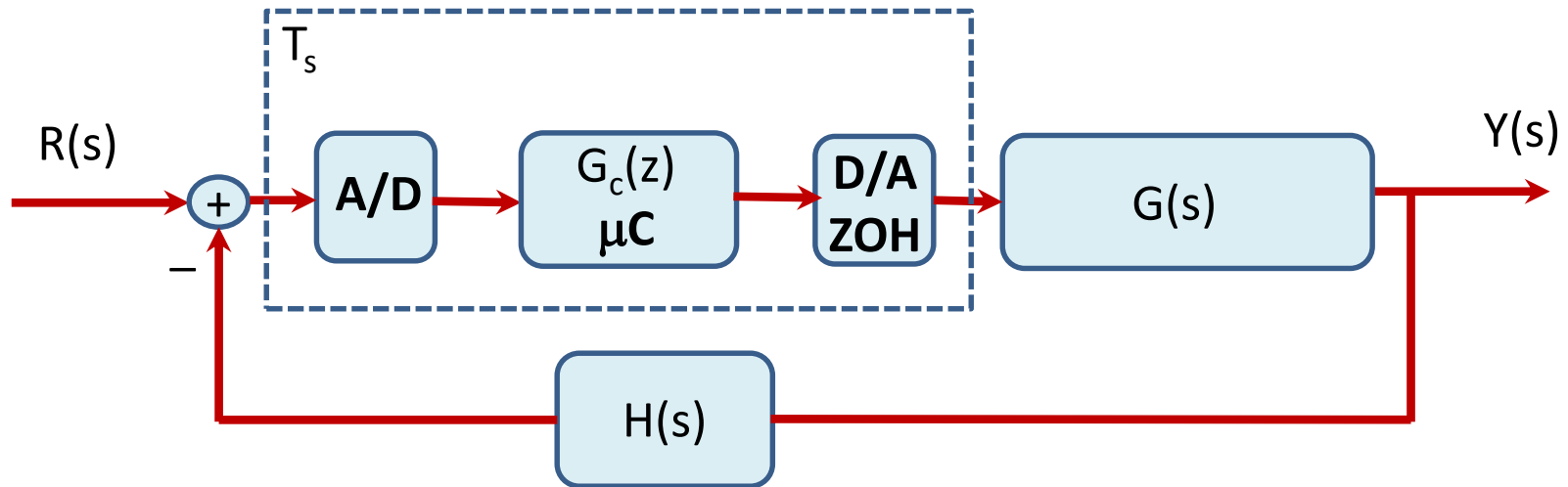
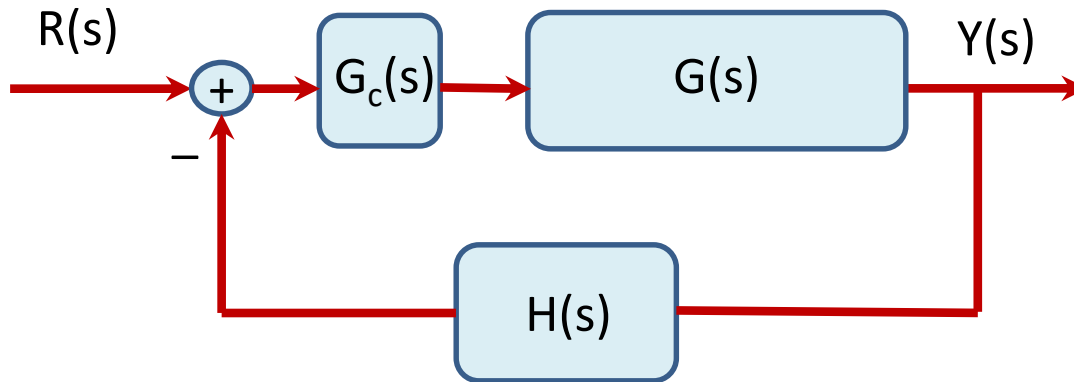


# Sistemas de Control Discreto

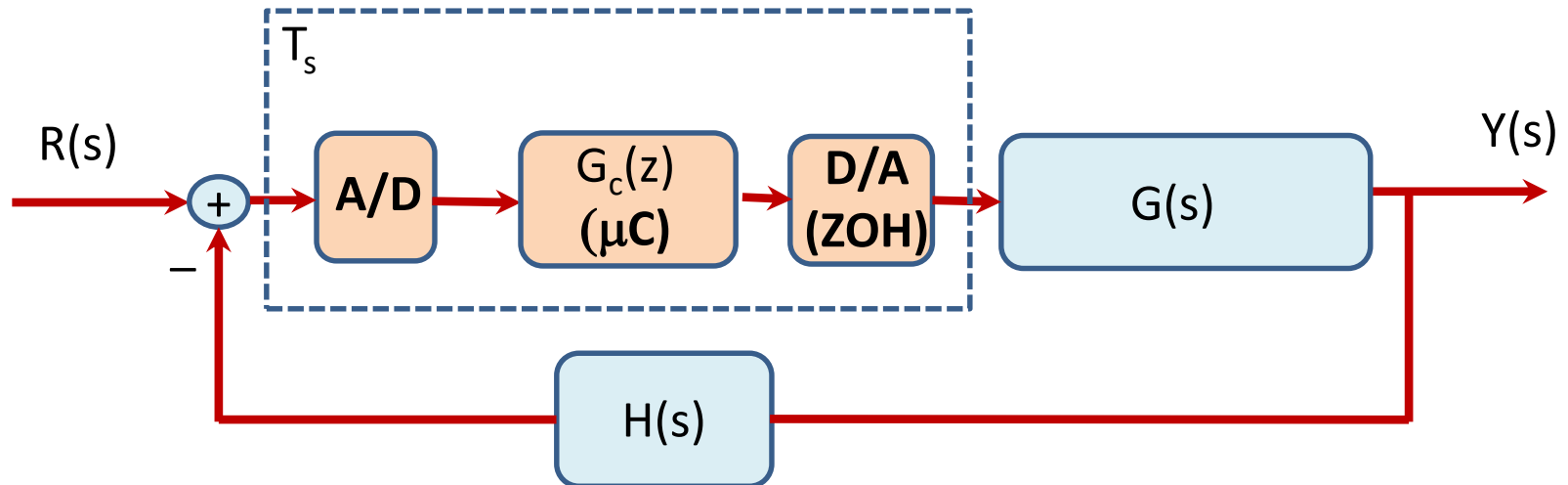


# Sistemas de Control Discreto

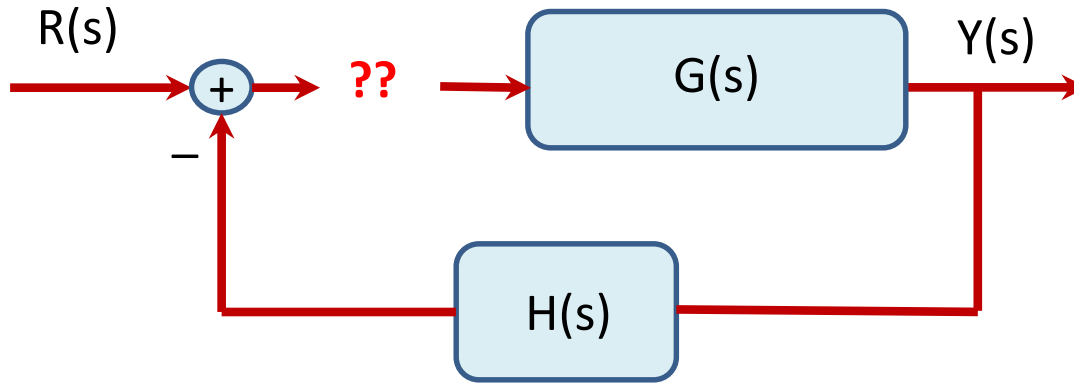


??

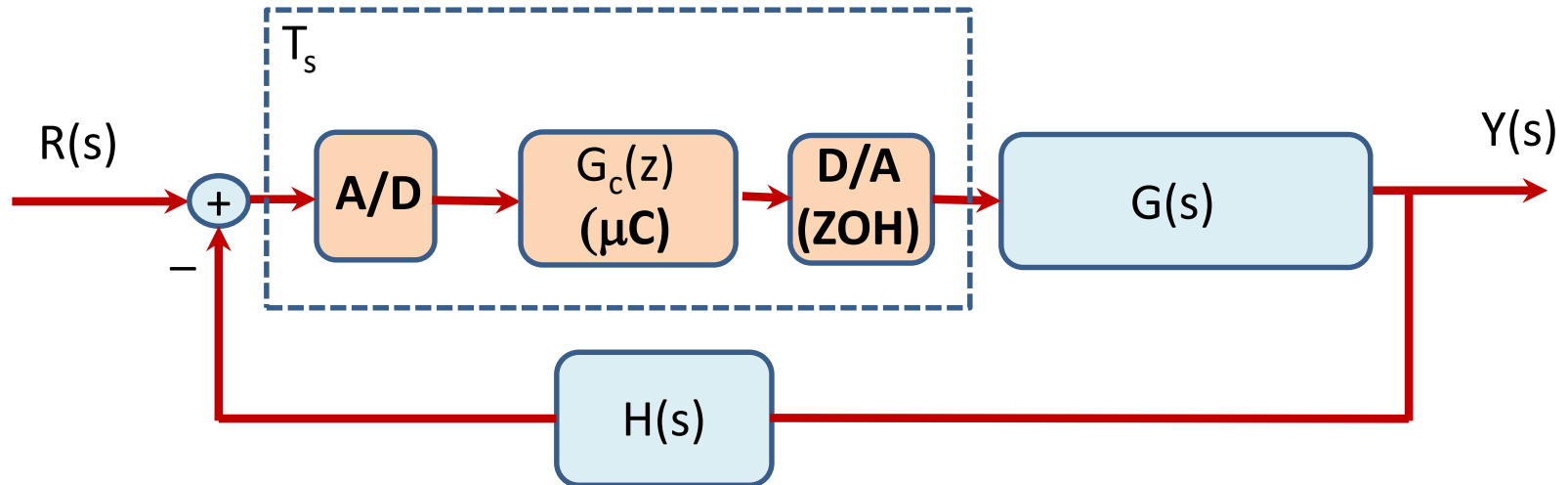
- Selección de  $T_s$
- Conversión  $G_c(s)$  a  $G_c(z)$



# Sistemas de Control Discreto



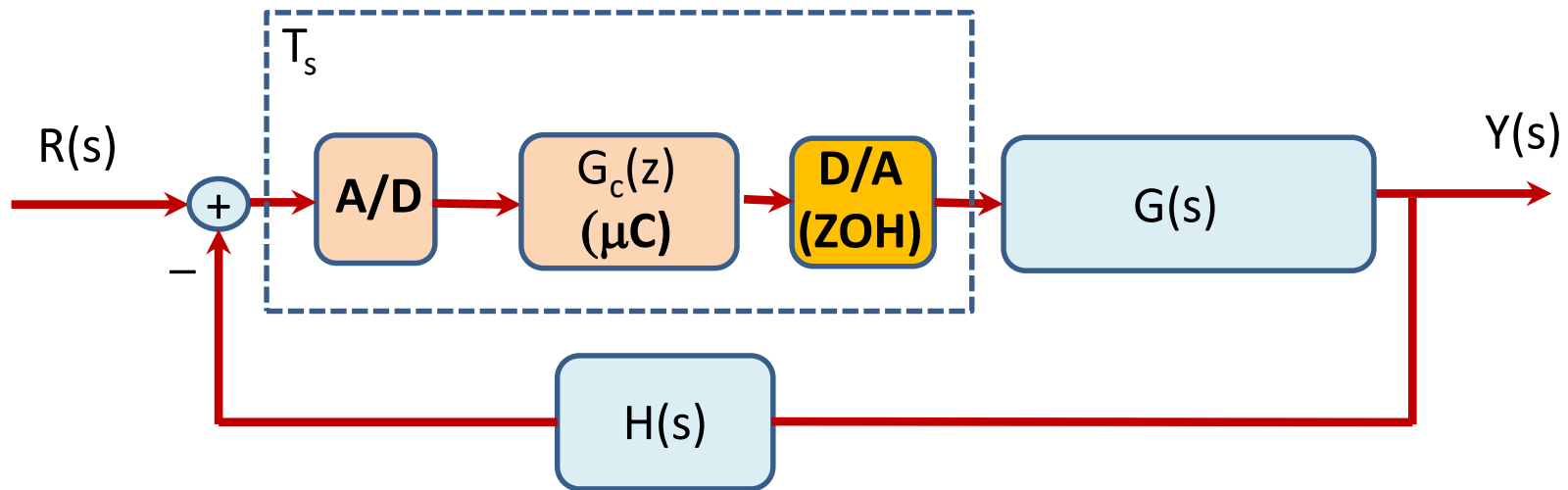
- Selección de  $T_s$
- Diseño de  $G_c(z)$  ??



# Sistemas de Control Discreto

## Selección del tiempo de muestreo $T_s$

- Por preservación de la estabilidad
- Por preservación de ciertas características de la respuesta dinámica



$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$$



$$ZOH(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{s}$$

$$|ZOH(j\omega)| = T_s \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$$

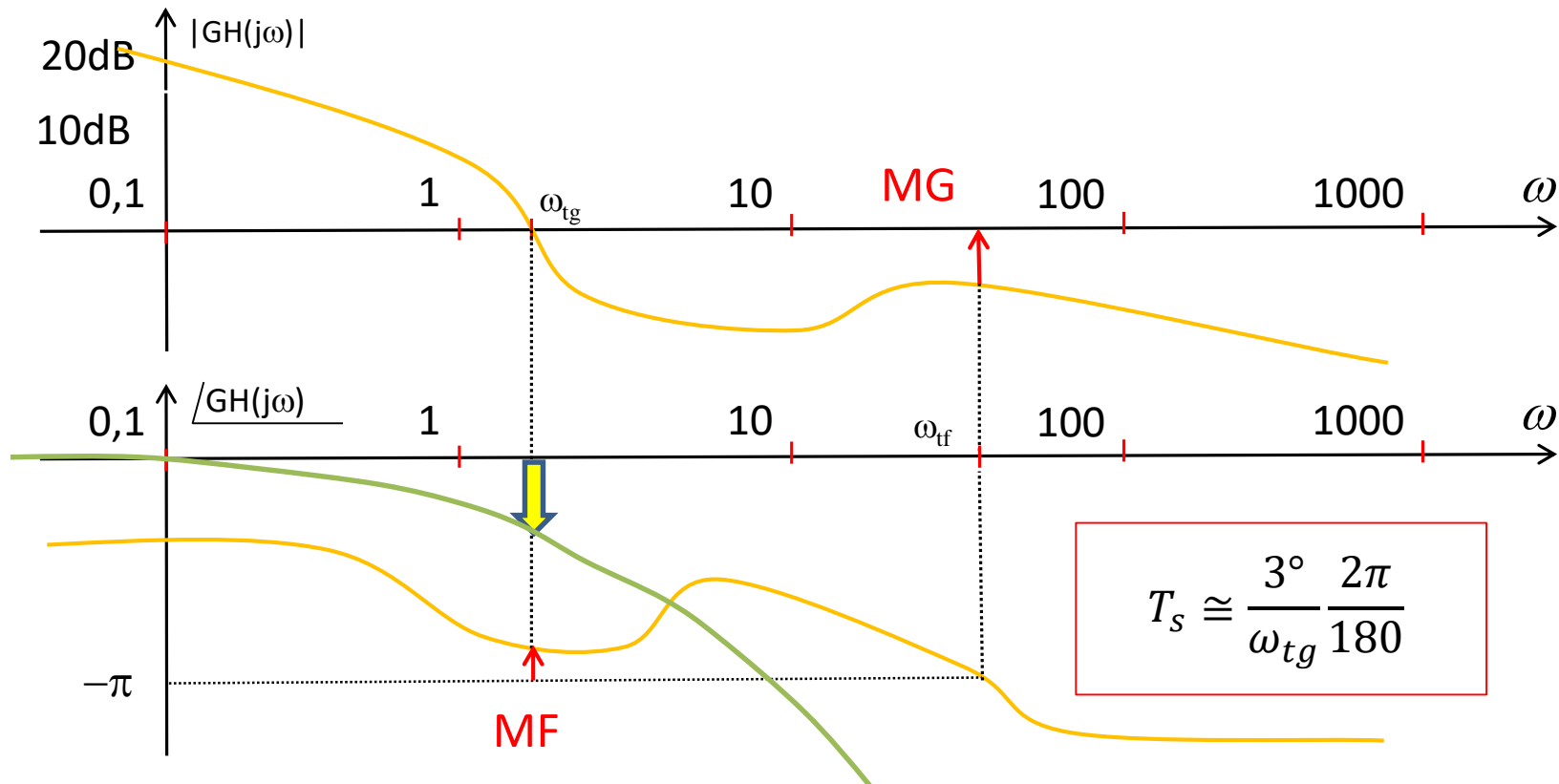
$$\varphi(ZOH(j\omega)) = -\frac{\omega T_s}{2}$$

# Sistemas de Control Discreto

## Selección del tiempo de muestreo $T_s$

- Por preservación de la estabilidad

$$\varphi(ZOH(j\omega))\Big|_{\omega_{tg}} = -\frac{\omega_{tg}T_s}{2} < -2^\circ; -3^\circ; -4^\circ; -5^\circ \quad \Rightarrow \quad -\frac{\omega_{tg}T_s}{2} < -3^\circ \frac{\pi}{180}$$

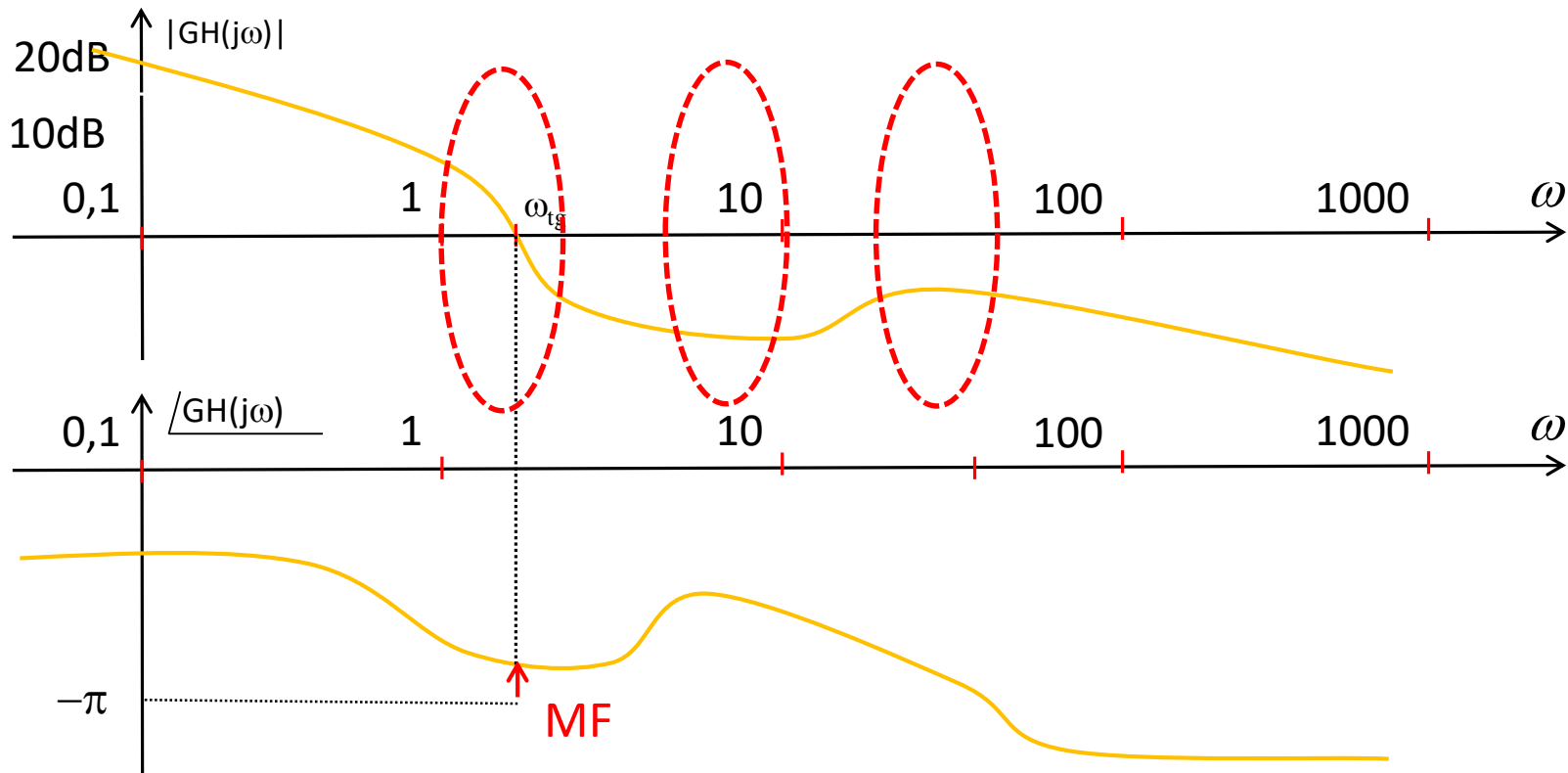


# Sistemas de Control Discreto

## Selección del tiempo de muestreo $T_s$

- Por preservación de cierta dinámica deseada

$$KG(s)H(s) = \frac{K \prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)} \quad \longrightarrow \quad p_k \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{p_k}$$

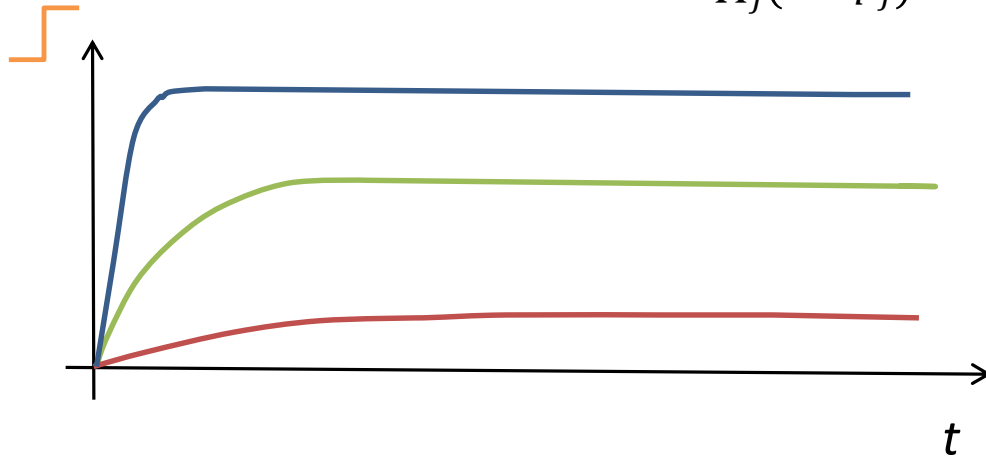


# Sistemas de Control Discreto

## Selección del tiempo de muestreo $T_s$

- Por preservación de cierta dinámica deseada

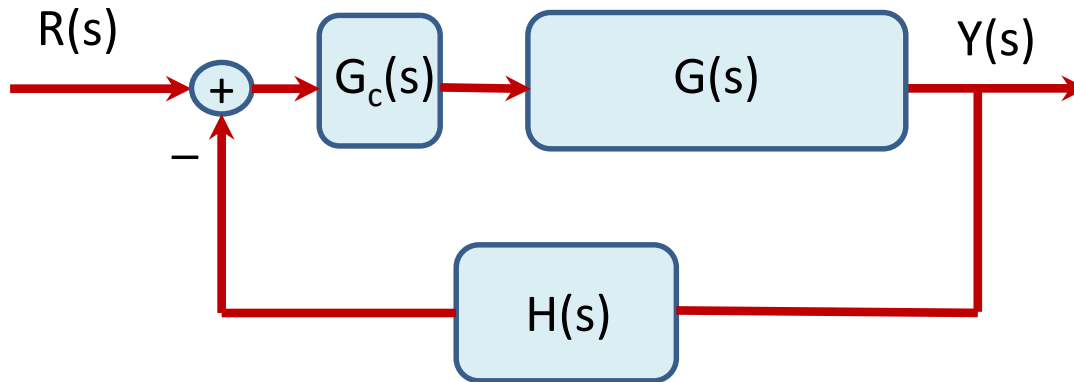
$$KG(s)H(s) = \frac{K \prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)} \quad \longrightarrow \quad p_k \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{p_k}$$



$$T_s = \frac{1}{4p_k}$$

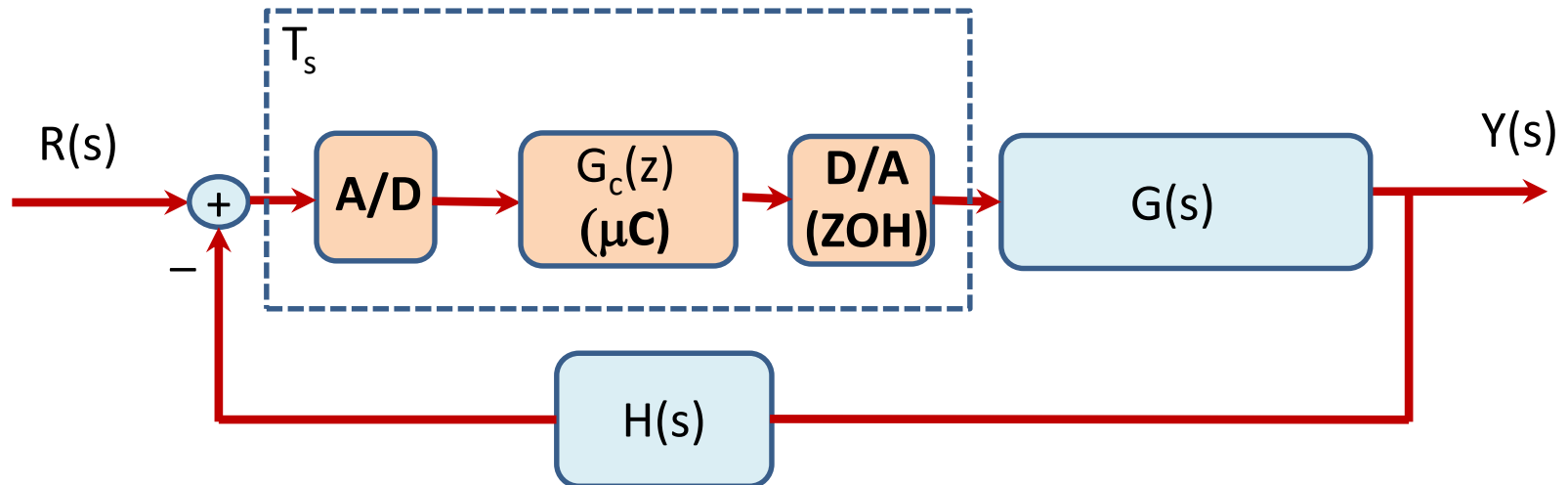
- La elección de un tiempo de muestreo bajo uno de los criterios vistos, no implica necesariamente cumplir las condiciones que corresponden al otro criterio.

# Sistemas de Control Discreto



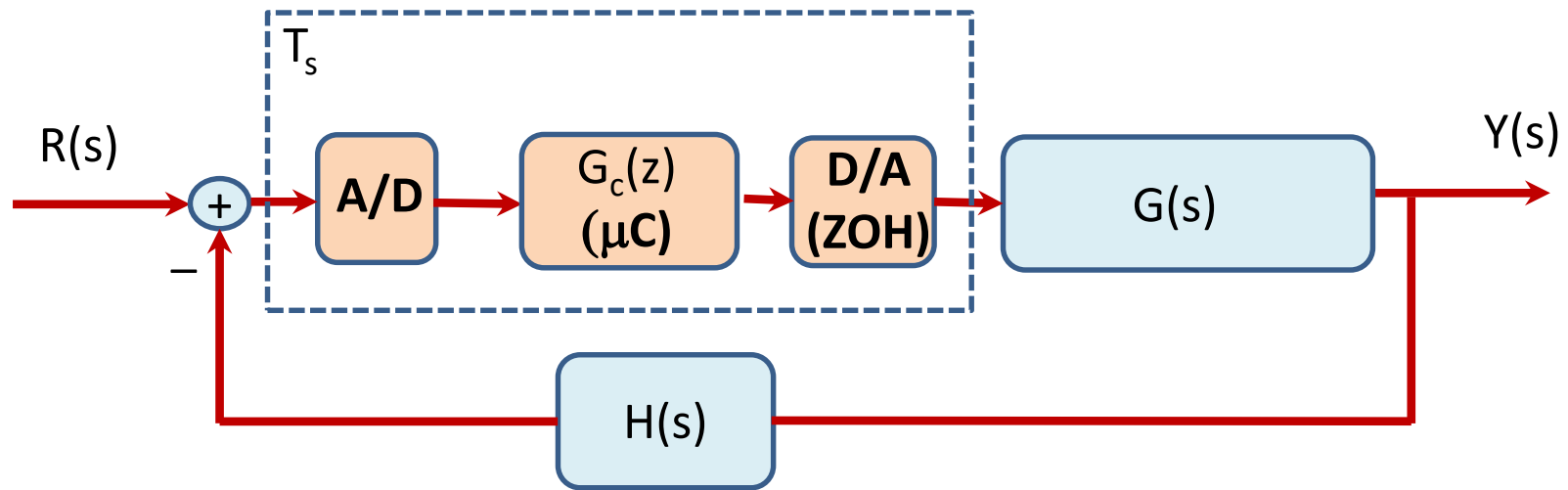
??

- Selección de  $T_s$
- Conversión  $G_c(s)$  a  $G_c(z)$





# Sistemas de Control Discreto



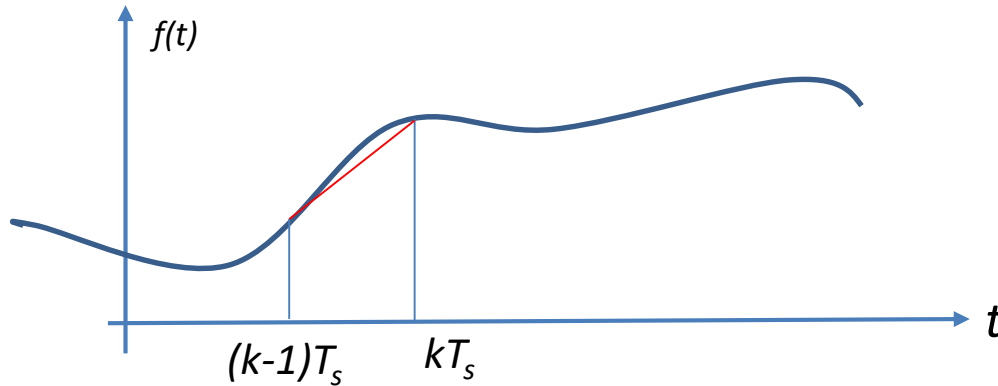
- Conversión  $G_c(s)$  a  $G_c(z)$ 
  1. Por definición:  $Z\{G_c(s)\}$
  2. Usando Aproximaciones :
    - a. Backward
    - b. Trapezoidal – Tustin – Bilinear
    - c. Bilinear con prewarping

La bondad de la aproximación dependerá del tiempo de muestreo.

Ninguna de las mecánicas de conversión tiene en cuenta el efecto desestabilizante del ZOH(s)

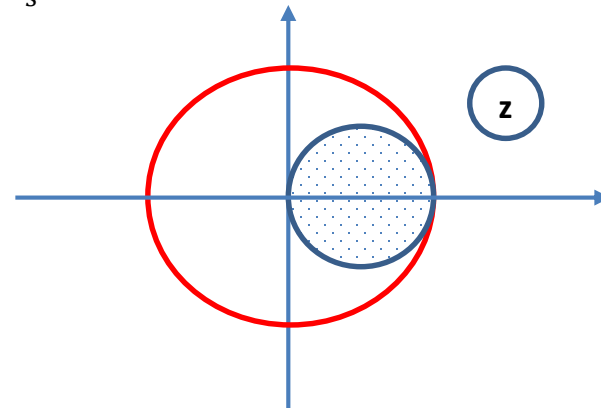
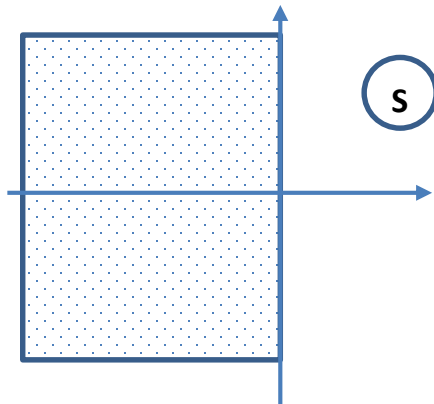
# Sistemas de Control Discreto

- Aproximación Backward (diferencias hacia atrás)



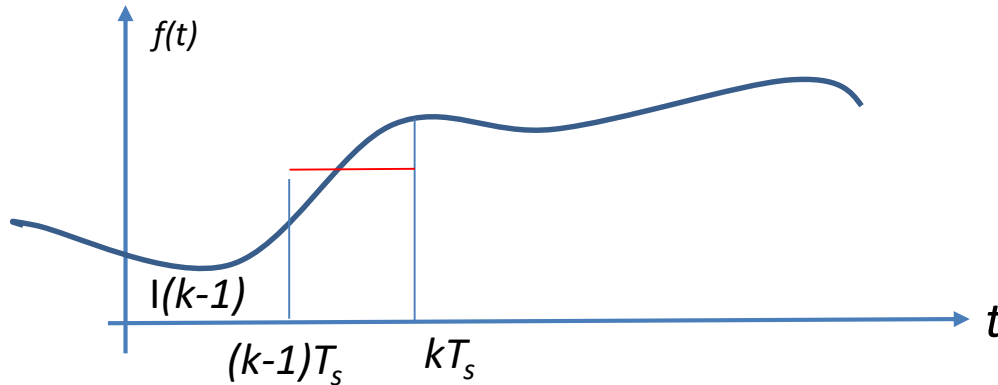
$$\frac{df(t)}{dt} \cong \frac{f(kT_s) - f((k-1)T_s)}{T_s} \quad \Rightarrow \quad sF(s) \cong F(z) \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad \Rightarrow \quad G_c(z) = \left. \frac{K \prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)} \right|_{s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_s}}$$



# Sistemas de Control Discreto

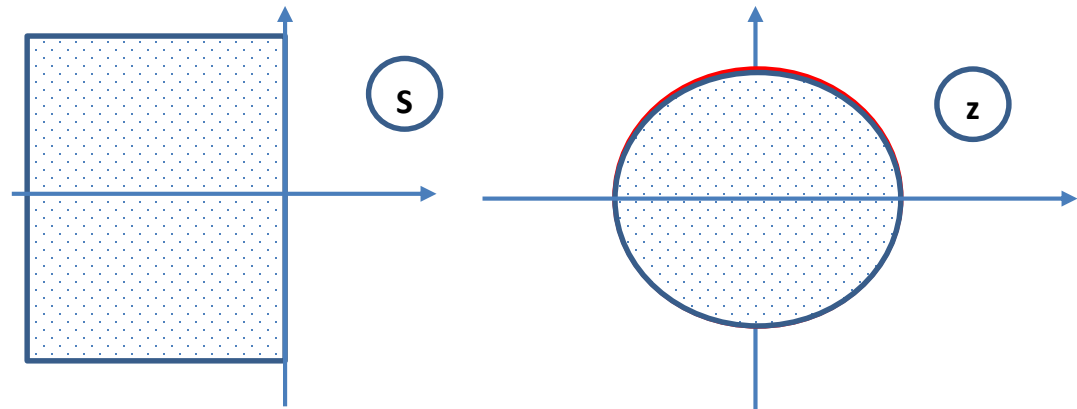
- Aproximación Bilineal



$$\int f(t) dt \approx I(k) = I(k-1) + T_s \frac{f(kT_s) + f((k-1)T_s)}{2}$$

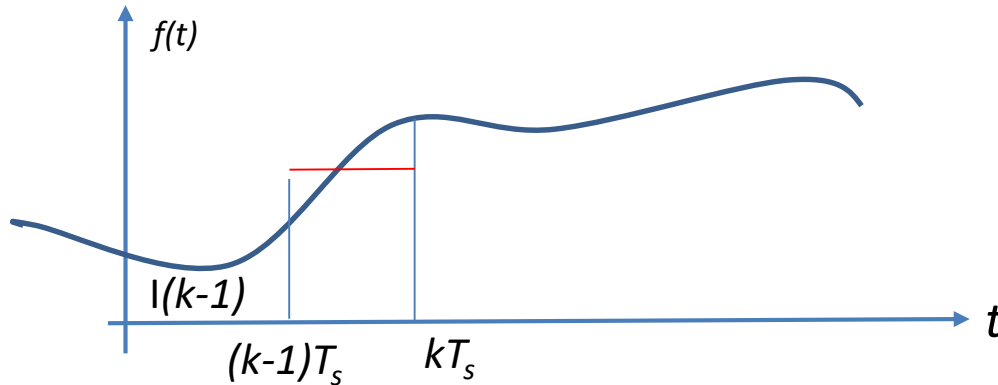
$$\frac{F(s)}{s} \approx I(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T_s}{2} F(z)(1 + z^{-1}) \quad \Rightarrow \quad s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$$

$$G_c(z) = \left. \frac{K \prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)} \right|_{s \approx \frac{2z-1}{T_s z+1}}$$



# Sistemas de Control Discreto

- Aproximación Bilineal con prewarping



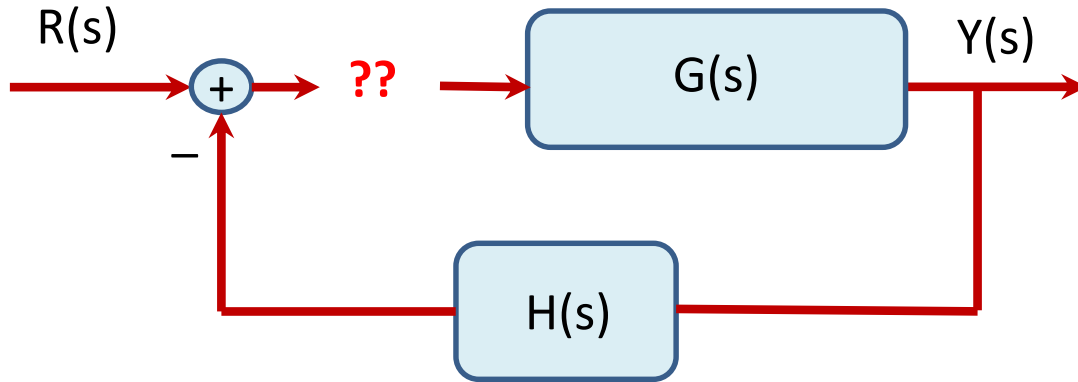
$$s \approx \frac{2}{T_s} \frac{(e^{j\omega T_s} - 1)}{(e^{j\omega T_s} + 1)} = \frac{2}{T_s} \frac{\left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}\right)} = j \frac{2}{T_s} \frac{\frac{\left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}\right)}{2j}}{\frac{\left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_s}{2}}\right)}{2}} = j \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega T_s}{2}$$

$$G_c(j\omega) \longrightarrow G_c(j2/T_s \tan(\omega T_s/2)) \quad |G_c(j\omega_c)| \longrightarrow |G_c(j2/T_s \tan(\omega_c T_s/2))|$$

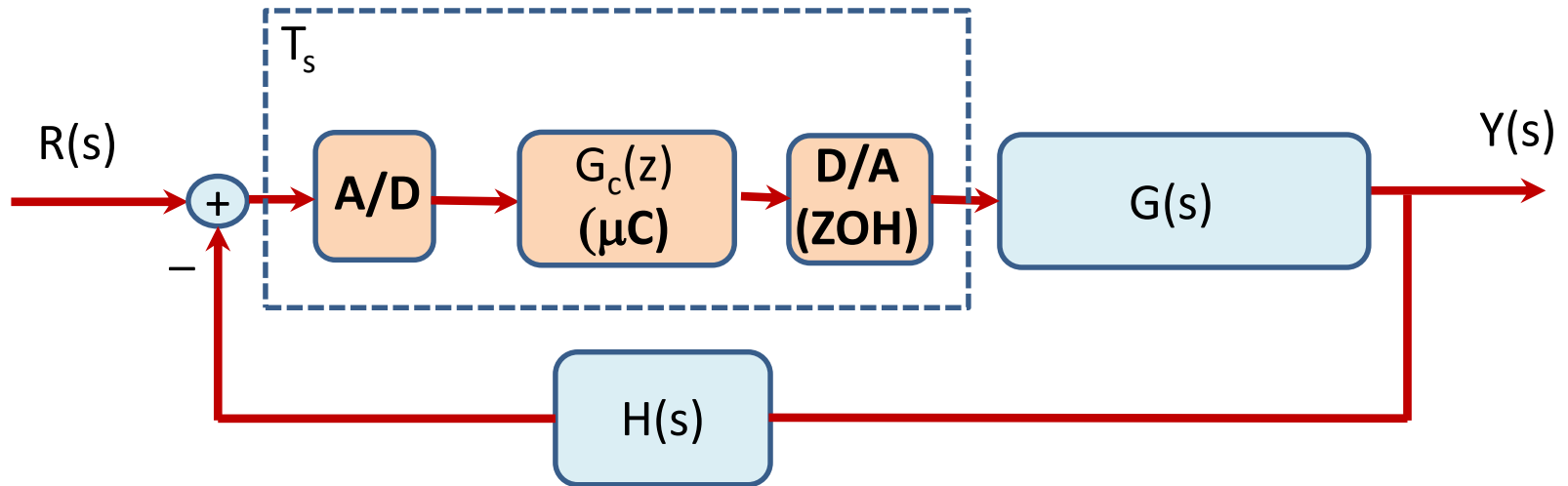
$$s \approx \frac{\omega_c}{\tan \frac{\omega_c T_s}{2}} \frac{(z - 1)}{(z + 1)} = j \frac{\omega_c}{\tan \frac{\omega_c T_s}{2}} \tan \frac{\omega T_s}{2}$$

$\longrightarrow |G_c(j\omega_c)|$  Se conserva en ese punto luego de la transformación

# Sistemas de Control Discreto



• Diseño de  $G_c(z)$  ??



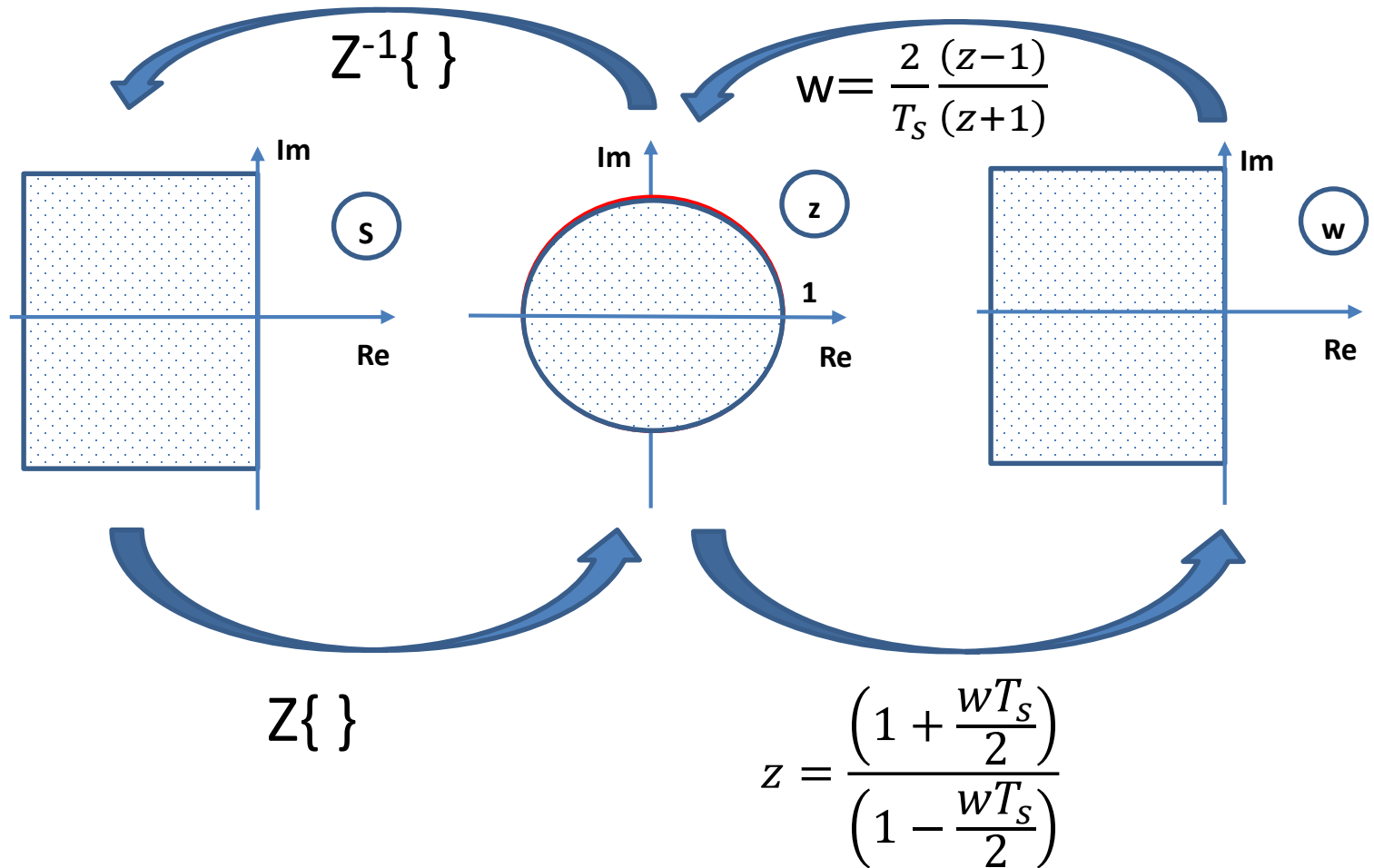
$$Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$$

# Sistemas de Control Discreto

Estabilidad S

Estabilidad Z

Estabilidad W



Equivalencias  $s=0 \rightarrow z=1 \rightarrow w=0$

# Sistemas de Control Discreto

Errores de EE

Equivalencias  $s=0 \rightarrow z=1 \rightarrow w=0$

$s=0$

$z=1$

$w=0$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}$$

$$K_p = \lim_{w \rightarrow 0} wG(w)H(w)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}$$

$$K_v = \lim_{w \rightarrow 0} w^2 G(w)H(w)$$

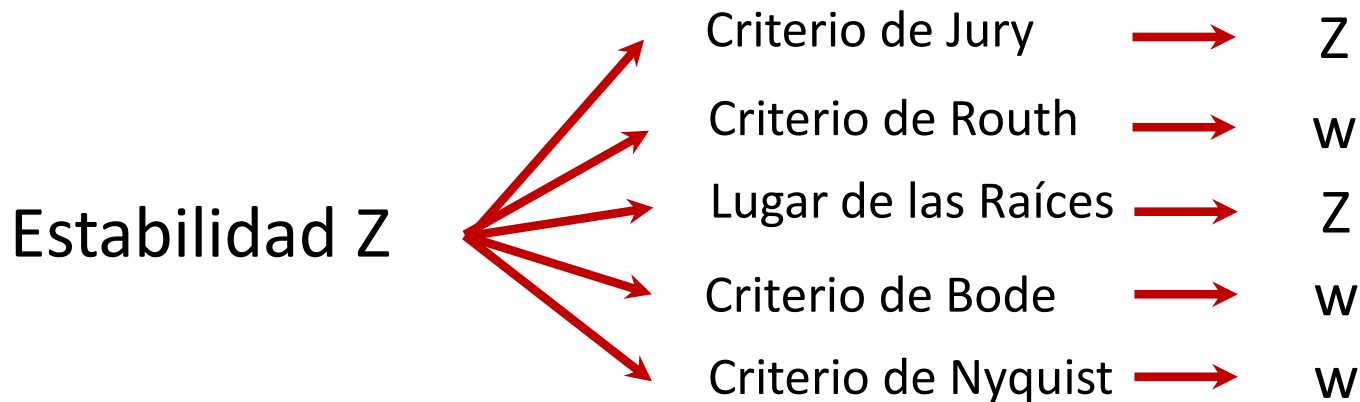
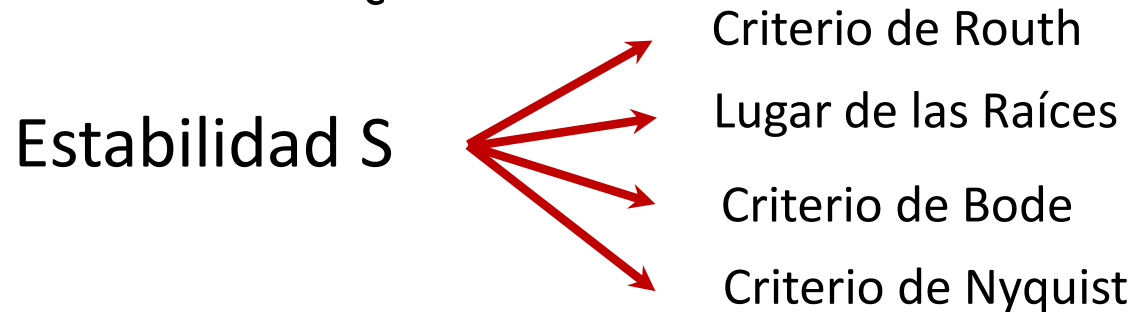
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 G(s)H(s)$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^3 Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}$$

$$K_a = \lim_{w \rightarrow 0} w^3 G(w)H(w)$$

# Sistemas de Control Discreto

- Diseño de  $G_c(z)$



$$w = \frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad \longrightarrow \quad z = \frac{\left(1 + \frac{wT_s}{2}\right)}{\left(1 - \frac{wT_s}{2}\right)}$$

**No tiene nada que ver con la aproximación bilineal. Esto es una transformación de planos que permite usar herramientas conocidas para el análisis y diseño**



# CRITERIO DE ROUTH

- Mantiene en el plano  $w$  la misma mecánica que se estudio anteriormente

$$1 + G_c(z)Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}|_w = a_1w^n + a_2w^{n-1} + a_3w^{n-2} + a_4w^{n-3} + a_5w^{n-4} + \dots$$

Arreglo de Coeficientes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots \\
 \swarrow & \searrow & & & \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots
 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_2a_3 - a_1a_4}{a_2}$$

$$b_2 = \frac{a_2a_5 - a_1a_6}{a_2}$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_4 - a_2b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_6 - a_2b_3}{b_1}$$

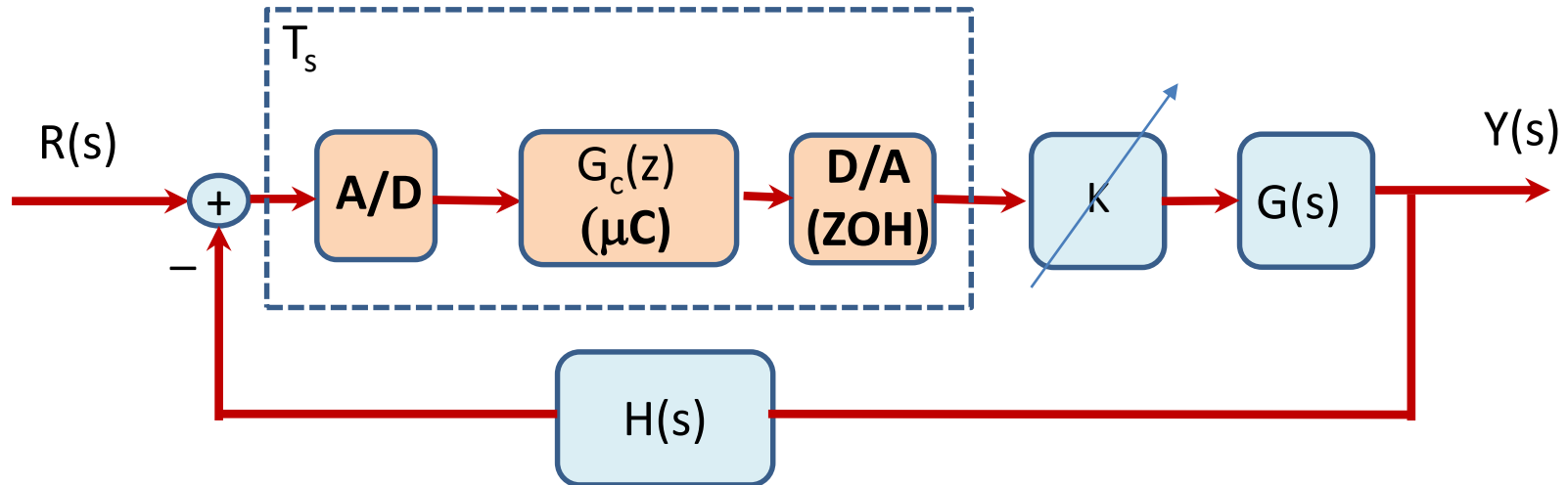
⋮

Hasta lograr una estructura triangular

El número de cambios de signo que se observa en la primer columna corresponde al número de raíces con parte real positiva en  $w$ , es decir asociadas a residuos inestables.

# Lugar de las Raíces

Método gráfico que permite visualizar en el plano complejo, el movimiento de los polos de lazo cerrado cuando se varía la ganancia  $K$



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K G_c(z) \{ZOH \cdot G\}(z)}{1 + K G_c(z) \{ZOH \cdot G \cdot H\}(z)} \rightarrow \text{Ec. Característica} \quad 1 + K G_c(z) \{ZOH \cdot G \cdot H\}(z) = 0$$

$$K G_c(z) \{ZOH \cdot G \cdot H\}(z) = -1 \begin{cases} |K G_c(z) \{ZOH \cdot G \cdot H\}(z)| = 1 \\ \varphi(G_c(z) \{ZOH \cdot G \cdot H\}(z)) = (2 * n + 1)180^\circ \end{cases}$$

# Lugar de las Raíces

Reglas Constructivas:

1. Llevar la transferencia  $KG_c(z)\{ZOHGH\}(z)$  a la forma que llamamos de LR:

$$KG_c(z)\{ZOHGH\}(z) = \frac{K(z \pm c)}{(z \pm a)(z \pm b)(z \pm d)}$$

2. Para  $K=0$  los polos de LC coinciden con los de LA
3. Para  $K=\infty$  los polos de LC coinciden con los ceros de LA
4. Número de ramas : Igual al orden del polinomio determinado por la Ec. Característica, es decir igual al nº de polos de  $GH(s)$
5. Simetría: dado que el polinomio determinado por la Ec. Característica tiene coeficientes reales, las ramas que se abran deben ser simétricas con respecto al eje real.
6. Los tramos del eje real que pertenecen al Lugar de Raíces tienen un número impar de singularidades a la derecha.

# Lugar de las Raíces

7. Asíntotas: los polos de LA ( $GH(s)$ ) que no mueren en ceros de LA finitos viajan por ramas que mueren en ceros ficticios en el infinito para ganancias muy grandes. En cualquier punto muy lejano sobre esa asíntota, el aporte de cada singularidad será casi idéntico en fase (salvo por el signo que corresponda) y será igual al ángulo de la asíntota. Esto significa que:

$$\varphi_{asin} = \frac{(2n + 1)180^\circ}{n^o p - n^o z} \quad \sigma_{asin} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n^o p - n^o z}$$

8. Puntos de Ruptura: en el punto en que las ramas se abren del eje real, el valor particular de ganancia determina que existen dos polos reales superpuestos. Por este motivo se cumplirá que:

$$\frac{d}{dz} (G_c(z) Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}) = 0$$

9. Ángulos de Llegada/salida

# Estabilidad en frecuencia

- Criterio de Bode
- Criterio de Nyquist

$$G_c(z)Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}$$



$$G_c(z)Z\{ZOH(s)G(s)H(s)\}\Big|_w$$

Criterio de Bode

$$MF > 0$$

$$MG > 0$$

Criterio de Nyquist  $\longrightarrow Z = N + P$

Puede realizarse en el dominio  $z$  pero es complicado relevar allí la curva de Nyquist