
Campo variables en el tiempo en conductores. Ecuación de Difusión

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

La distribución de corrientes y campos en el seno de materiales conductores no sólo resulta de interés desde un punto de vista teórico, sino que fundamentalmente reviste una **gran importancia en la práctica de la Ingeniería.**

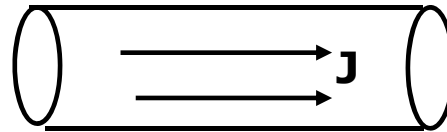
En efecto, los conductores normalmente son materiales costosos, y proporcionar **conductores innecesariamente gruesos, si la corriente circula solamente a través de una sección reducida**, vecina a la superficie del conductor, constituye un mal diseño de ingeniería.

Debido a la importancia de este tema, este capítulo estará dedicado a la discusión de la **distribución de corrientes y campos variables** con el tiempo, en el seno de materiales conductores.

Carga y corriente en un conductor

- en un conductor de sección recta y *longitud uniforme*, en el que circula una *corriente estacionaria*, la densidad de corriente es uniforme, y de acuerdo a la ley de Ohm puntual:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$



- En ausencia de f.e.m. en el conductor, el campo eléctrico \mathbf{E} es un campo irrotacional (que por lo tanto, puede ser expresado por el gradiente de un potencial escalar V), que sólo puede tener fuentes de divergencia.
- Tal campo puede proceder únicamente de cargas eléctricas, y surge la cuestión: **¿Dónde se encuentran las cargas que originan el flujo de corriente?** Deben estar o bien en el material conductor, o en su superficie, o en ambos lugares

- La ecuación de continuidad de la carga y corriente

$$\sum I_{Salida} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$$

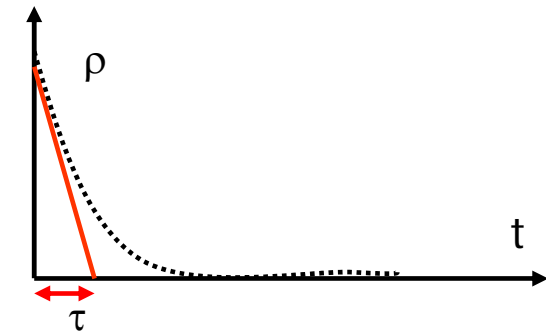
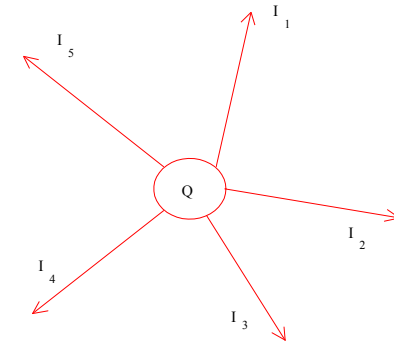
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \mathbf{J} = \nabla(\sigma \mathbf{E}) = \frac{\sigma \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

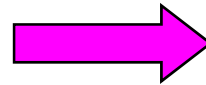
$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon_0)t}$$



- De manera que, si dentro del conductor aislado existe una densidad de carga ρ_0 la misma disminuye exponencialmente (se *relaja*), con una constante de tiempo característica o *tiempo de relajación* $\tau = \epsilon_0 / \sigma$.
- La carga **se ubica en la superficie del conductor**.

- El **tiempo de relajación** es una característica propia de cada medio, y da una indicación del tiempo en el cual se alcanzarán las condiciones esencialmente estacionarias, después de la iniciación de un determinado flujo de carga.
- Para un buen conductor, los valores de conductividad son del orden de $10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ (siemens), y siendo ϵ_0 del orden de 10^{-11} F/m, la constante de tiempo τ resulta del orden de 10^{-18} segundos.
- Esto significa que la carga se difundirá a la superficie del conductor con extrema rapidez, y no quedará carga en el interior del conductor, y en lugar de la ecuación se podrá escribir aún para campos variables en el tiempo:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



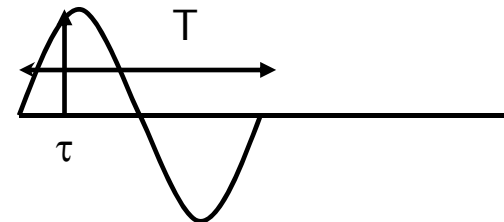
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$1\text{GHz} = 10^9 \text{ Hz}$$

$$T = 10^{-9} \text{ seg}$$

$$\tau = 10^{-18} \text{ seg}$$


$$\frac{T}{\tau} = \frac{10^{-9}}{10^{-18}} = 10^9$$



- La Ley de Ampere modificada para que cumpla con la ecuación de CONTINUIDAD

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\cancel{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H})} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$
 

¿Falta
Algo?

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla D)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ley de Amper Modificada, para cumplir
con la conservación de la carga

- En buenos conductores vale:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Otra forma de evaluar : se asume que los campos varían armónicamente en el tiempo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi d)$$

$$\mathbf{D} = \text{Real}(\overrightarrow{\mathbf{D}}_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi d)}) = \text{Real}(\overrightarrow{\mathbf{D}}_0 \cdot e^{j(\varphi d)} \cdot e^{j(\omega t)}) \quad \underline{\mathbf{D}} \equiv \dot{\mathbf{D}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t} \equiv j\omega \underline{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \equiv j\omega \underline{\mathbf{E}}$$

Trabajamos con números complejos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} = j\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} \mathbf{J} = j\omega\tau \mathbf{J}$$

$$(\tau = \varepsilon_0/\sigma \cdot 10^{-18} \text{ segundos}):$$

En un conductor $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}(1 + j\omega\tau) = \mathbf{J}(1 + j2\pi\frac{\tau}{T}) \simeq \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

- Ecuación general para la distribución de corriente variable con el tiempo, en el seno de un material conductor.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Aplicamos Rotor

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Aplicamos Nuevamente Rotor

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} = -\sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

- De manera similar, puede demostrarse que los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{H} también quedan descritos por una ecuación de la misma forma que se conoce con el nombre de *ecuación de difusión*

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- **Estas ecuaciones dan las relaciones entre las derivadas espaciales y temporales de la densidad de corriente \mathbf{J} , del campo eléctrico \mathbf{E} , de la inducción magnética \mathbf{B} y del campo magnético \mathbf{H} , en cualquier punto en el interior de un buen conductor.**
- **Resta por resolver estas ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta las condiciones de frontera impuestas por ciertas formas físicas de los conductores, de interés en la práctica de la ingeniería.**

- **Discusión de la ecuación de difusión**
- **Existen muchos fenómenos descritos por ecuaciones de la forma de la ecuación de difusión. Tal vez el ejemplo más importante del fenómeno de difusión sea el flujo de calor a través de la materia, el cual puede describirse**

$$\nabla^2 \theta = \frac{k}{c\delta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{donde es } \theta \text{ la temperatura, } k \text{ la conductividad térmica, } c \text{ el calor específico y } \delta \text{ la densidad de la materia.}$$

Supongamos que la temperatura en la superficie de la tierra varía durante el año en forma senoidal, como se muestra en la *curva A* de la **Figura**

Es razonable suponer que a medida que aumenta la profundidad en la tierra, dicha variación anual, será de *menor amplitud*. También debe producirse cierto *retardo* en el tiempo al difundirse el calor hacia adentro, de manera que existirá un *desfasaje* que variará al aumentar la profundidad. Esto se muestra en las *curvas B y C* de la **Figura**

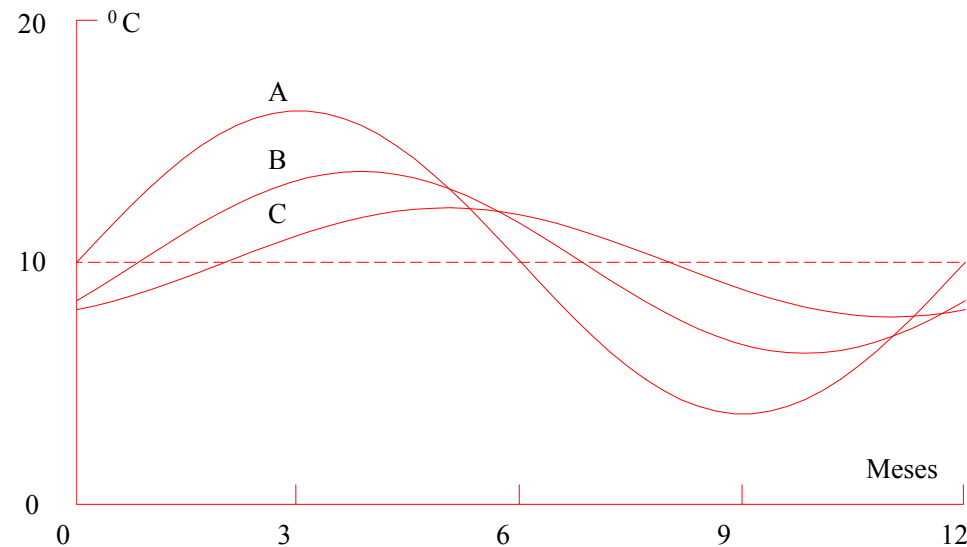
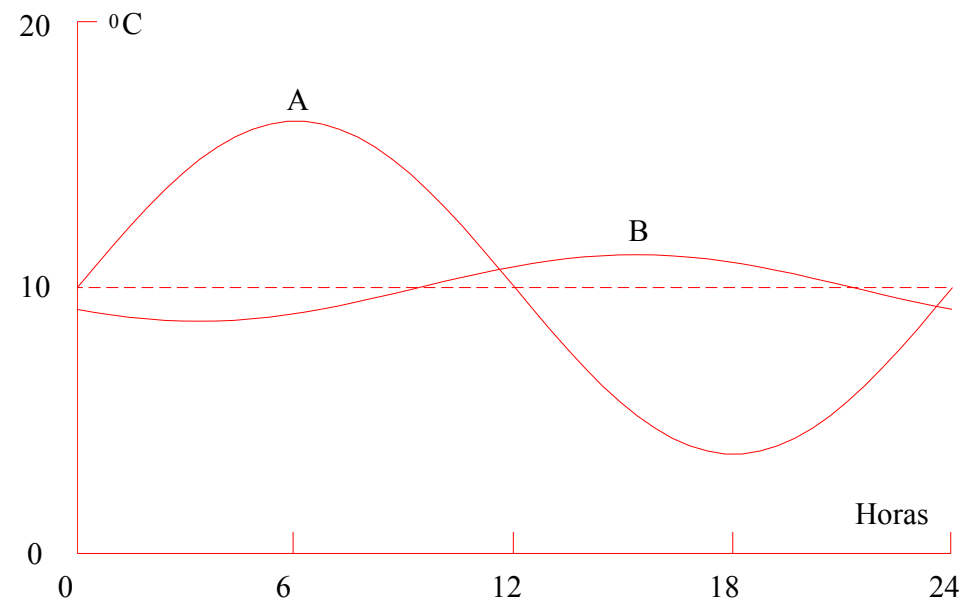


Figura. Variación anual de la temperatura del suelo en la superficie y a profundidades de 1 m y 2 m debajo de la superficie.

Ecuación de Difusión

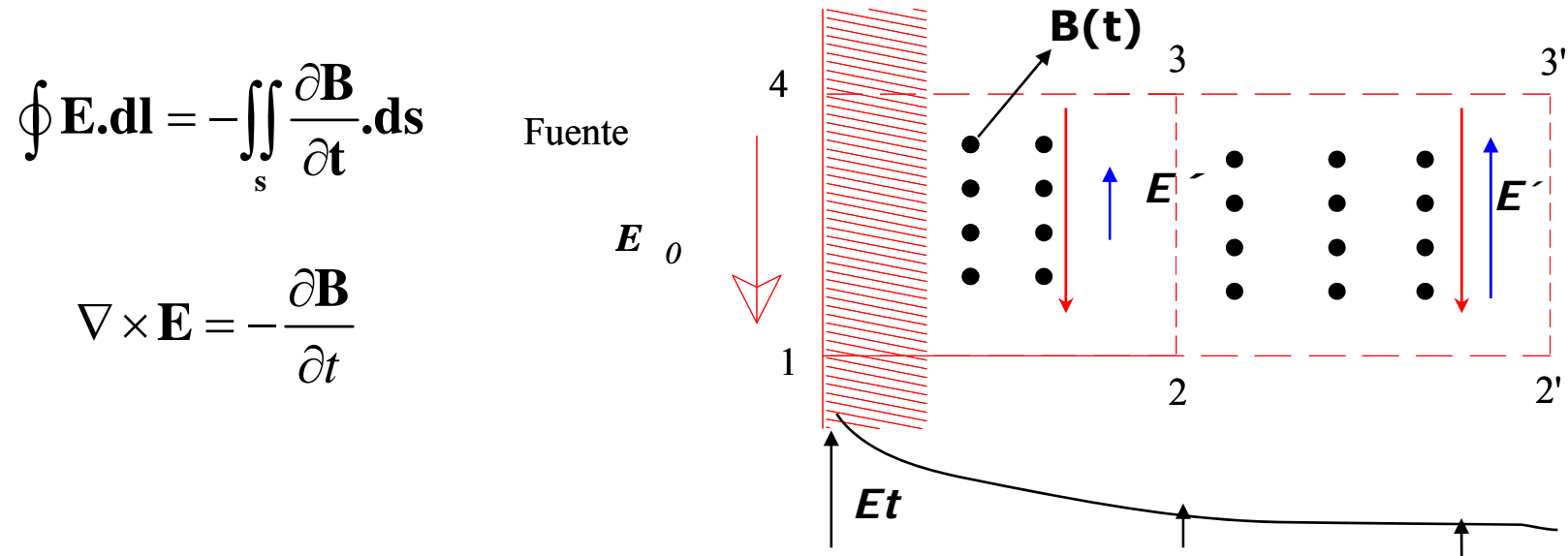
- Si ahora la frecuencia de la variación de temperatura en la superficie aumenta, como se muestra en la *curva A* (la cual corresponde a la variación diaria), es de esperar que la atenuación y el ángulo de fase aumenten más pronunciadamente a medida que aumenta la profundidad. Esto queda confirmado en la *curva B* que ha sido obtenida mediante la ecuación de difusión



Variación diaria de la temperatura del suelo en la superficie y a una profundidad de 25 cm debajo de la superficie.

Análisis cualitativo de la distribución de corriente y campos

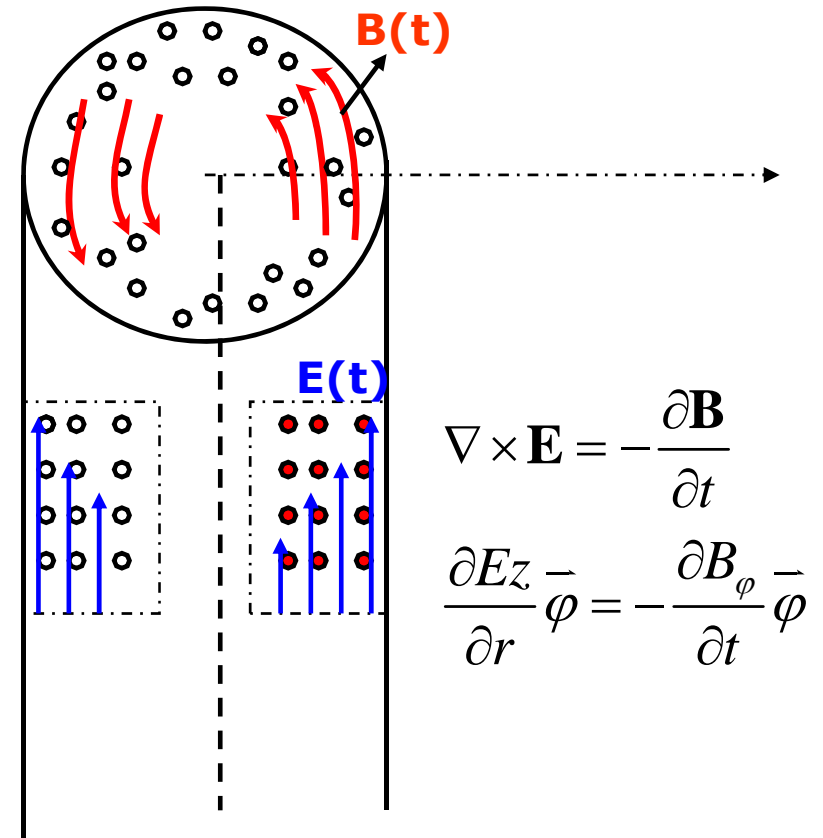
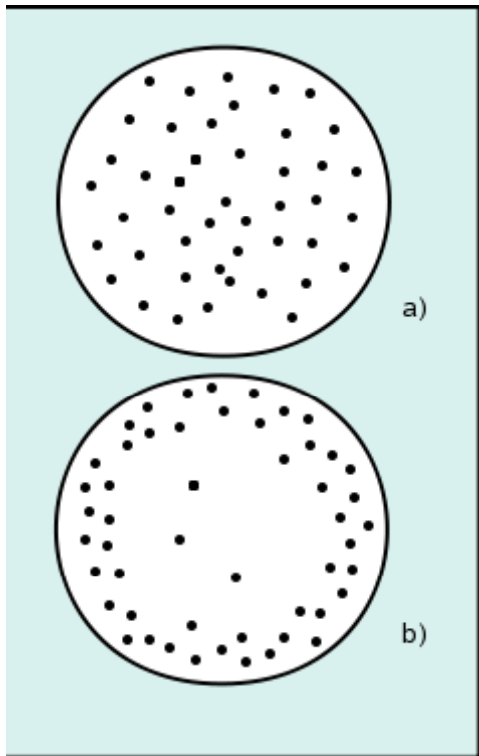
- Anticipar cualitativamente los resultados que arrojará la resolución de las ecuaciones de campo en conductores y haciendo uso intuitivo de la ley de Faraday.
- Una fuente de alta frecuencia que produce un campo eléctrico aplicado E_0 en la superficie del conductor.
- Este campo debe causar que fluya una corriente, la cual producirá un campo **magnético normal a E_0** .
- Este campo magnético variante producirá un campo eléctrico inducido E' opuesto a E_0 .
- Si efectuamos un estudio de las dos integrales de línea 1-2-3-4-1 y 1-2'-3'-4-1, se encuentra que esta última concatena más líneas de flujo, y por lo tanto la tensión inducida a lo largo de este trayecto será mayor,
- el campo inducido E' a lo largo de 2'-3' es mayor que el inducido sobre 2-3.
- ***A medida que se penetra en el conductor, resulta cada vez menor el campo neto $E_0 + E'$ que produce el flujo de corriente.***



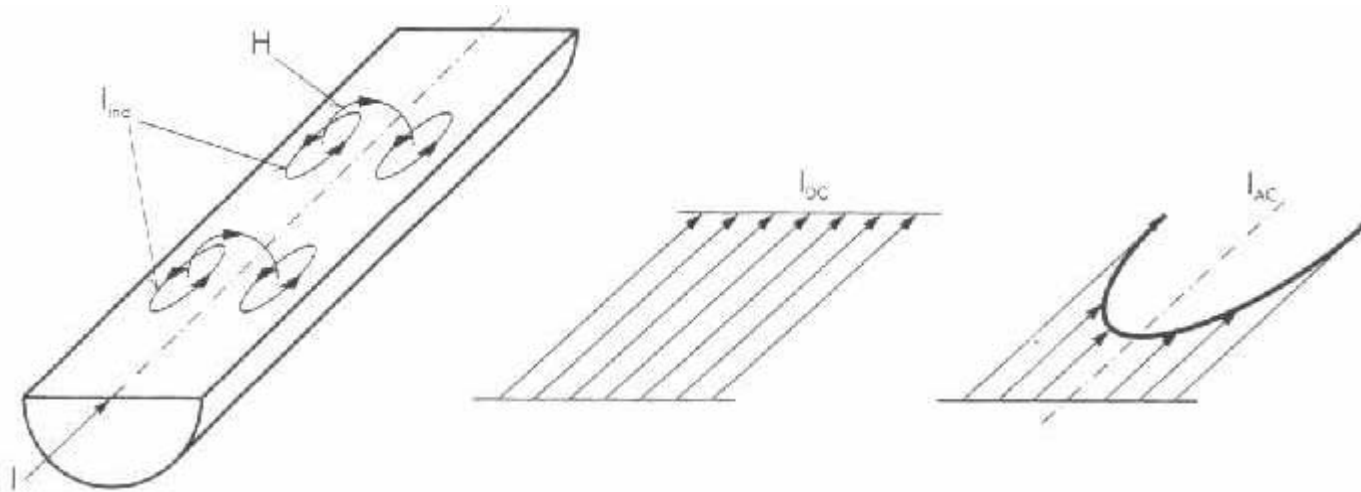
Análisis cualitativo de la distribución de corriente y campos

Distribución de la densidad de corriente en un conductor macizo cuando es recorrido por:

- a) Corriente Continua (DC).
- b) Corriente alterna (AC).

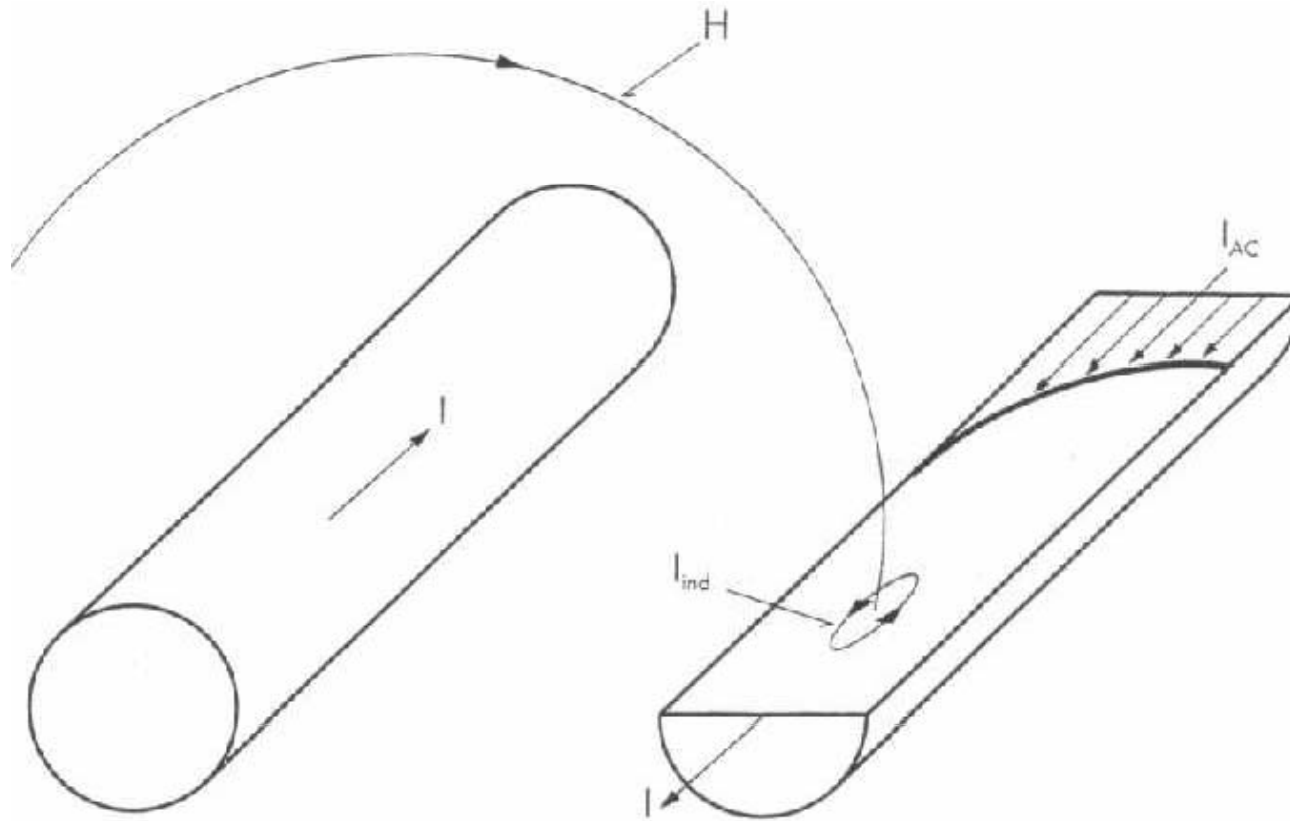


Análisis cualitativo de la distribución de corriente y campos



muestra el efecto skin (efecto pelicular)

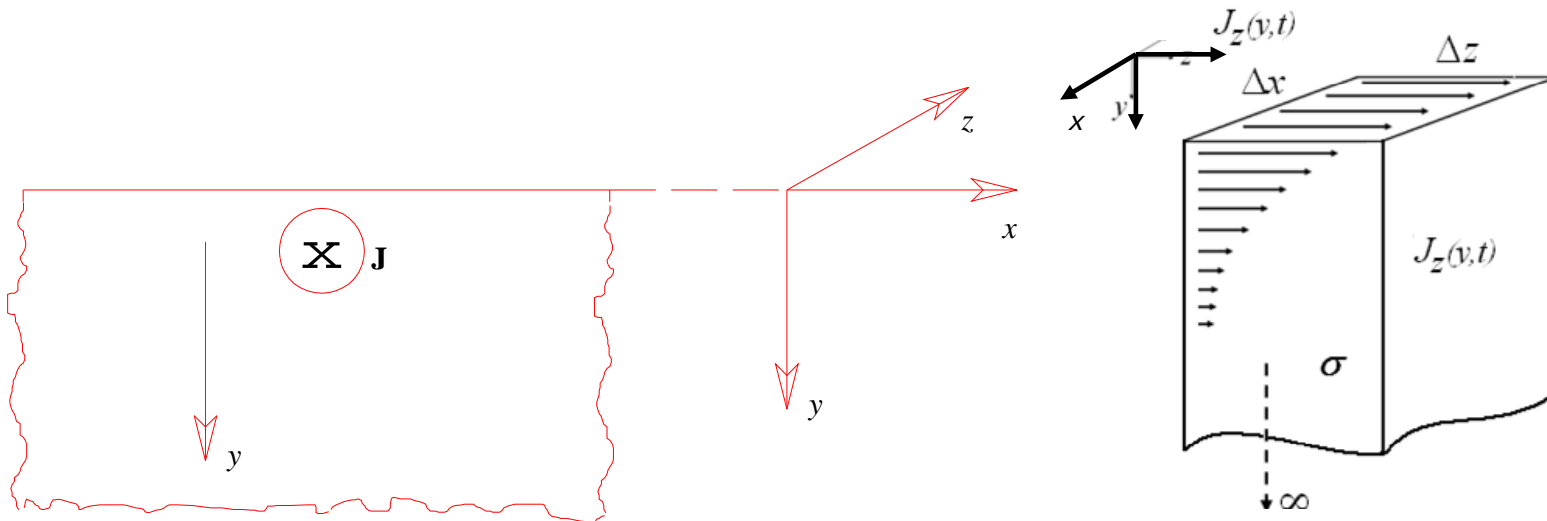
Análisis cualitativo de la distribución de corriente y campos



El efecto de proximidad (entre conductores) la densidad de corriente es variable

Conductor plano semi-infinito

- Conductor *plano* de profundidad infinita (en el sentido del eje de coordenadas y), en el cual no existen variaciones del campo eléctrico en toda la extensión de sus otras dos dimensiones *ancho* (eje de coordenadas x) y *largo* (eje de coordenadas z), también infinitas



Conductor plano semi-infinito

- **Densidad de corriente en un conductor semi-infinito**

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

No hay variación en la dirección x ni en la dirección z , ésta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

Variación temporal es del tipo $e^{j\omega t}$, siendo $\omega=2\pi f$ la pulsación angular, la variación espacial involucrada por (29) deberá satisfacer:

$$\frac{\partial^2 \dot{J}_z}{\partial y^2} = j\omega \sigma \mu_0 \mu_r \dot{J}_z = \tau^2 \dot{J}_z$$

Conductor plano semi-infinito

siendo:

$$\dot{J}_z = J_z e^{j\omega t}$$

Solución:

$$\dot{J}_z = C_1 e^{-\tau y} + C_2 e^{+\tau y}$$

La densidad de corriente aumentaría hasta el valor imposible de infinito cuando $y \rightarrow \infty$, a no ser que C_2 sea cero.

El coeficiente C_1 puede escribirse como la densidad de corriente en la superficie, si definimos $J_z = J_{z0}$ cuando $y=0$. Entonces:

$$J_z = J_{z0} e^{-\tau y} e^{j\omega t}$$

$$\tau^2 \equiv j\omega\mu\sigma$$

$$\sqrt{j} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$$

$$\tau = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{(1+j)}{\delta}$$

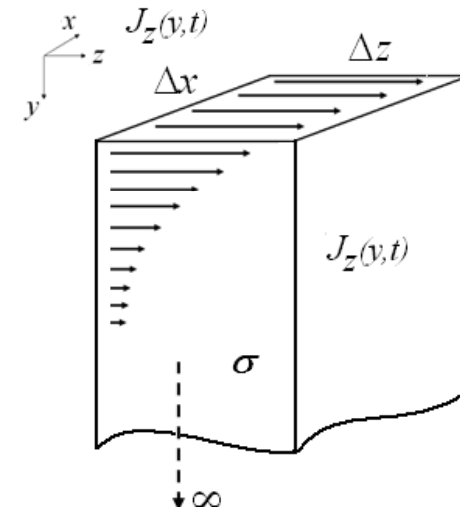
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \text{ [m]}$$

Conductor plano semi-infinito

$$J_z = J_{z0} e^{-y/\delta} e^{j(\omega t - y/\delta)}$$

$$E_z = E_{z0} e^{-y/\delta} e^{j(\omega t - y/\delta)}$$

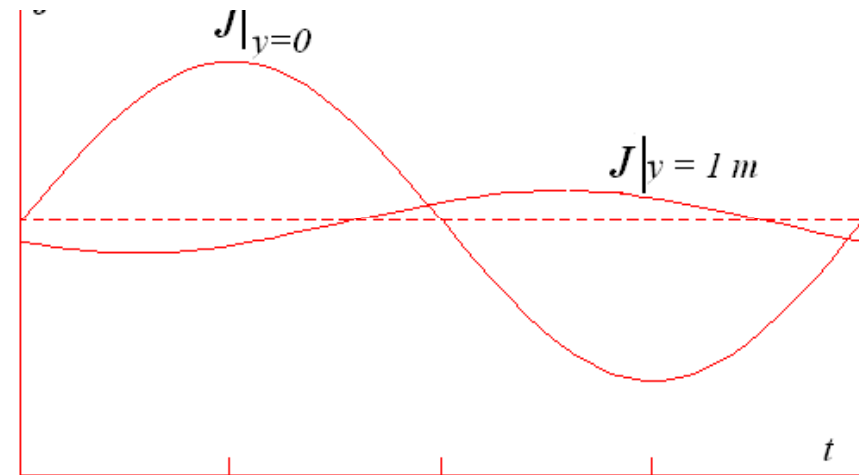
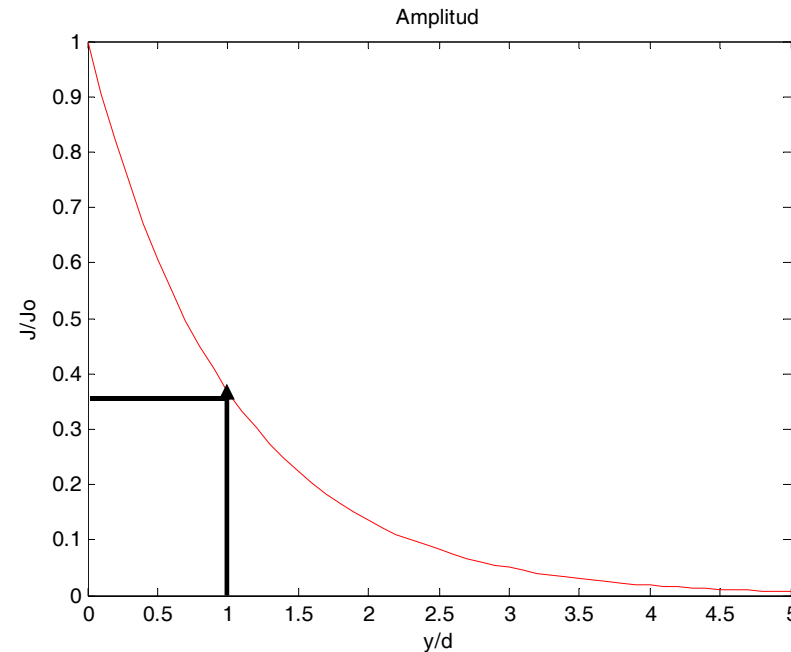
$$B_x = B_{x0} e^{-y/\delta} e^{j(\omega t - y/\delta)}$$



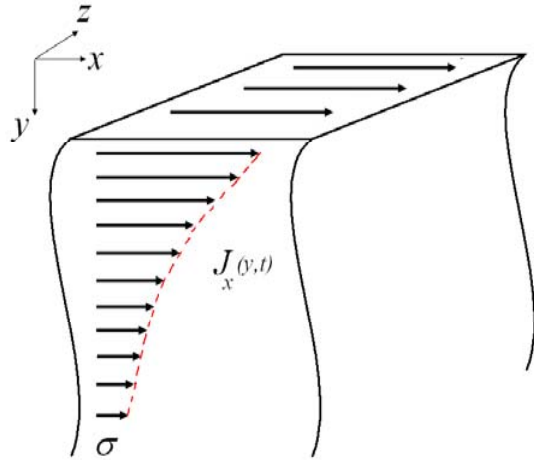
E_{z0} , B_{x0} y H_{x0} son las magnitudes de los respectivos campos en la superficie del conductor.

Conductor plano semi-infinito

- Las magnitudes de los campos y de la densidad de corriente, decrecen exponencialmente con la penetración en el conductor, y **δ tiene el significado de ser la profundidad a la cual dichas magnitudes han decrecido a $1/e$** (alrededor de 36,7%) de sus respectivos valores en la superficie.
- Por ello a la magnitud δ **se la denomina profundidad de penetración** o *profundidad pelicular* o simplemente (aunque menos apropiadamente) *penetración*.
- el retraso en la fase, cuyo valor (y/δ , en radianes) depende de la la profundidad y y de δ , tanto para la densidad de corriente \mathbf{J} como para los campos \mathbf{E} , \mathbf{B}



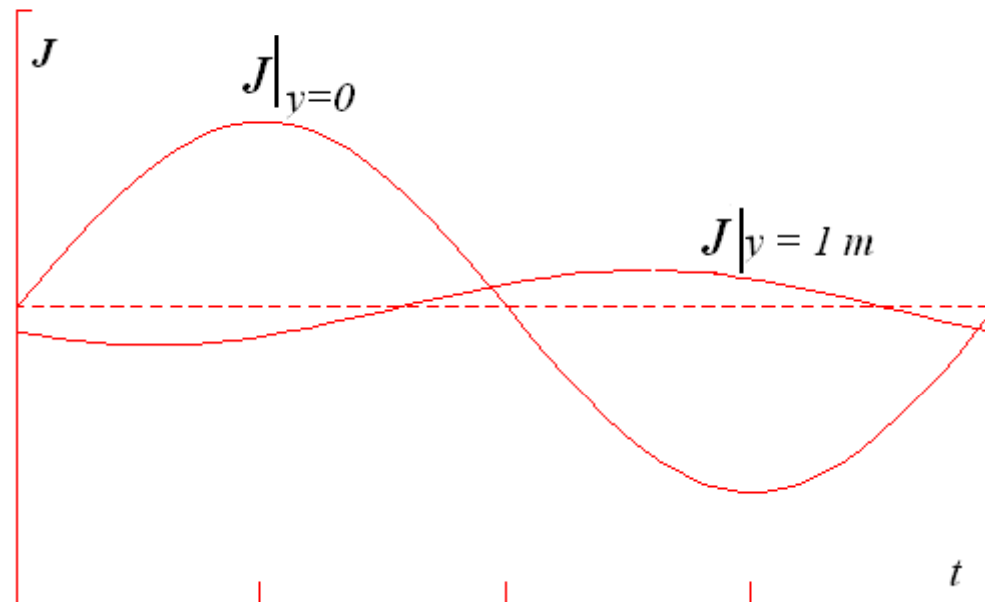
Conductor plano semi-infinito



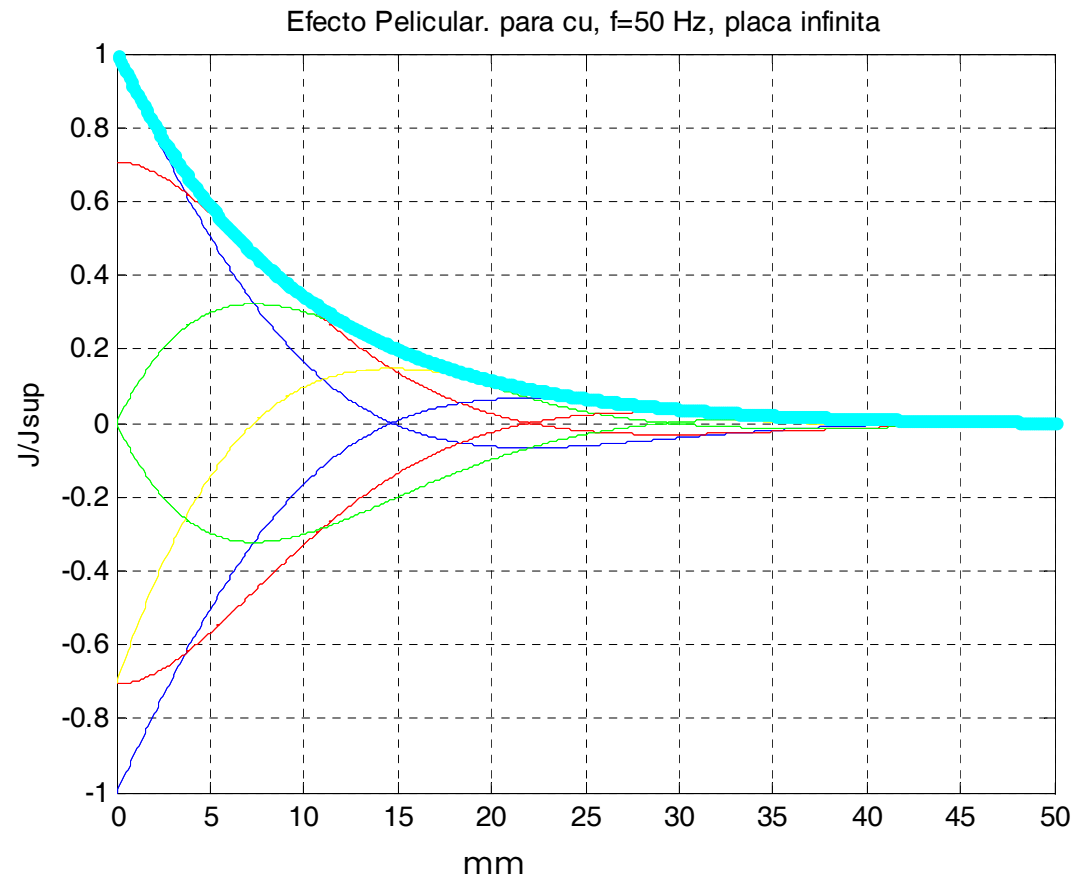
$$J_x(y,t) = \text{Real} \left\{ \dot{J}_x(y) \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$J_z(y,t) = J_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta)$$

Es decir, por debajo de cierto espesor, habrá variación despreciable y por lo tanto es razonable considerar a un material grueso, como una placa semi-infinita, con una superficie libre solamente.



Conductor plano semi-infinito



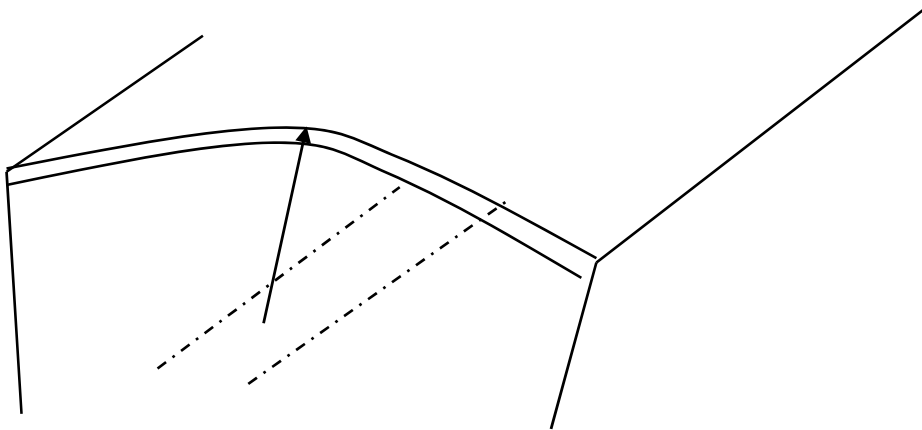
$$J_z(y, t) = J_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta)$$

Cobre, $\delta = 10$ cm, $F = 50$ Hz

Para $t = 0$ a 15 ms, en pasos de 2.5 ms (45 grados)

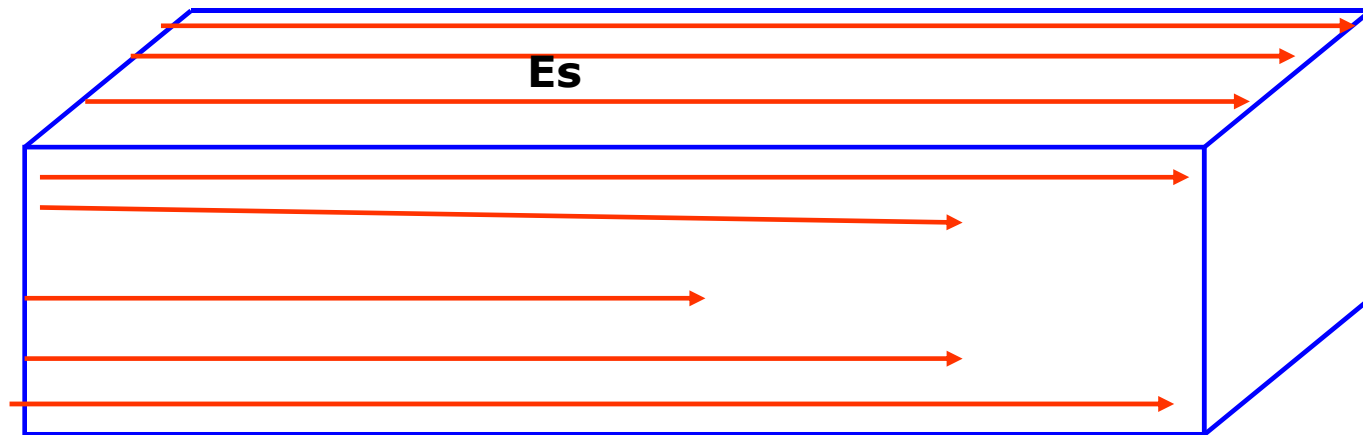
UTILIDAD:

- el análisis de este caso es de gran importancia en la **práctica aún con superficies curvadas**, dado que en frecuencias elevadas **la profundidad sobre la cual los campos se encuentran concentrados, es muy pequeña, el espesor del conductor pueden considerarse comparativamente infinitos**. Además, cualquier **variación de los campos en la extensión de las dimensiones largo o ancho, debidas ya sea, a la curvatura o efectos de borde, son por lo general despreciables** frente a las variaciones en la profundidad del conductor.



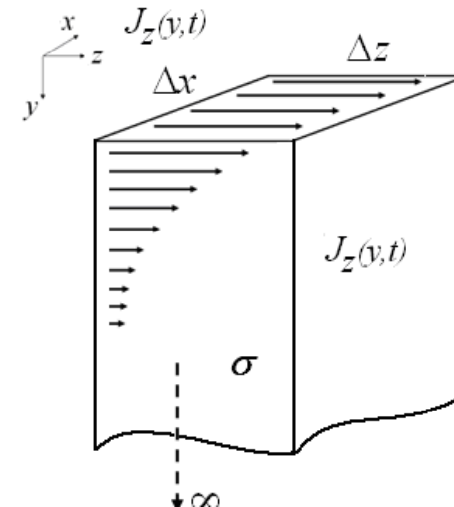
Impedancia interna del conductor

- **IMPEDANCIA INTERNA DE UN CONDUCTOR**
- *Impedancia interna* entre los extremos de una trayectoria a lo largo de un conductor.
- Para corrientes variables con el tiempo, la distribución de la corriente no es uniforme en la sección transversal del conductor, por lo tanto ni la J ni la E son uniformes en la sección transversal. Entonces la caída de potencial entre un extremo y otro depende de la trayectoria



Impedancia interna del conductor

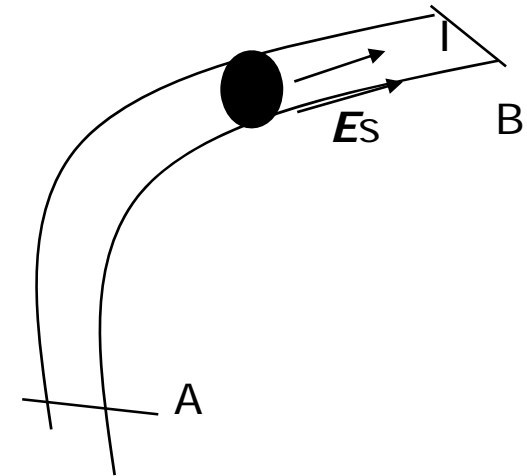
- Si defino una **IMPEDANCIA** como el cociente entre la caída de potencial y la corriente total, qué caída de potencial debo considerar?
- Por definición elijo calcular la caída de potencial en la superficie, es decir la integral del campo eléctrico sobre la superficie del conductor.
- $Z_{INT} = (\int E_{SUP} dl) / I_{TOTAL}$
- Si define **IMPEDANCIA INTERNA POR UNIDAD DE LONGITUD**:
- $Z_{INT \text{ unid long}} = E_{SUP} / I_{TOTAL}$



Impedancia interna del conductor

$$Z_i = \frac{E_s}{I}$$

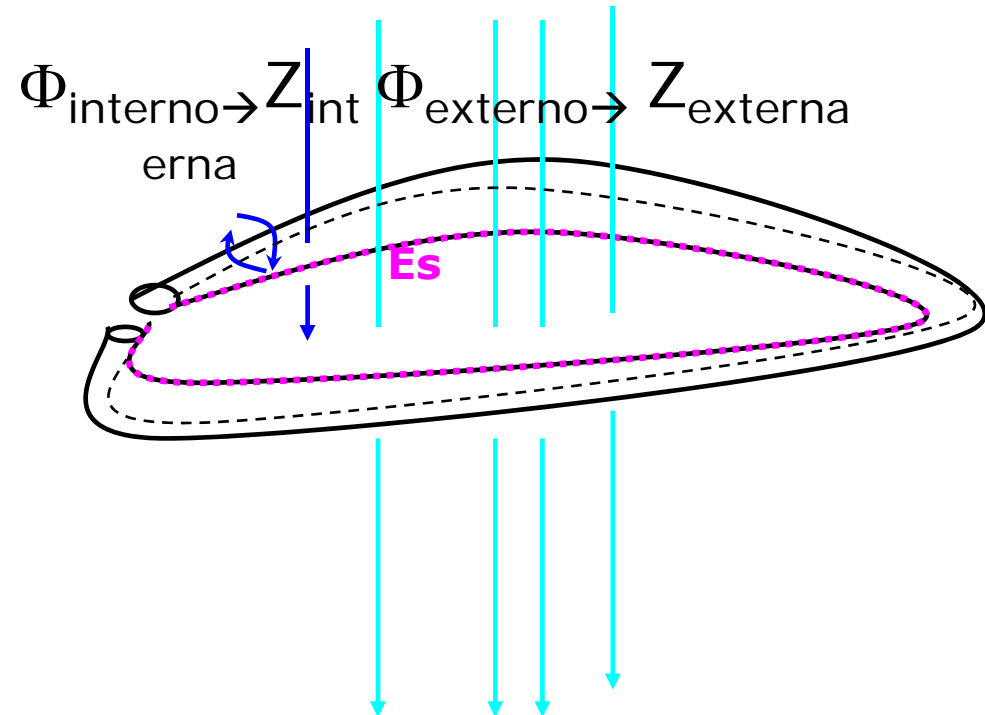
$$U_{AB} = \int_A^B \frac{\mathbf{J}_s}{\sigma} d\mathbf{l} = I \int_A^B \frac{\mathbf{E}_s}{I} d\mathbf{l} = I \int_A^B Z_i dl = IZ$$



- La impedancia tiene tanto una **parte real como una parte imaginaria**, ya que el campo eléctrico en la superficie no se encuentra en fase con la corriente total en el conductor debido a la velocidad de cambio del flujo magnético dentro del conductor.
- **La parte real da la resistencia en corriente alterna del conductor**; y la parte imaginaria da la reactancia interna, que es la parte de la **reactancia debida al flujo magnético interior al conductor** (el flujo magnético puede subdividirse en *interior* y *exterior*).

Impedancia interna del conductor

- La **elección de una trayectoria a lo largo de la superficie del conductor** fue **arbitraria**, y podría haberse adoptado una a lo largo del centro del conductor o a otra profundidad. Lo importante es que la misma debe tomarse en el mismo lugar para el tratamiento de cada uno de los términos de la ecuación del circuito.
- **La elección a lo largo de la superficie es conveniente** porque la misma marca la **separación entre la inductancia interna y la inductancia externa** para la mayoría de las formas geométricas simples.



Conductor plano semi-infinito

- **Impedancia interna de un conductor plano semi-infinito**
- es el cociente entre el campo eléctrico *en la superficie* y la corriente *total*.
- resulta conveniente definir la impedancia interna *por unidad de longitud y unidad de ancho*.
- *iz la corriente por unidad de ancho (x), desde la superficie del conductor, hasta una profundidad infinita:*

$$i_z = \int_0^{\infty} j_z dy = \int_0^{\infty} j_{z0} e^{-(1+j)(y/\delta)} dy = \frac{j_{z0} \delta}{(1+j)} \quad \dot{E}_{z0} = \frac{j_{z0}}{\sigma}$$

Impedancia interna por *unidad de longitud y unidad de ancho*, resulta

$$\dot{Z}_s = \frac{\dot{E}_{z0}}{i_z} = \frac{(1+j)}{\sigma \delta}$$

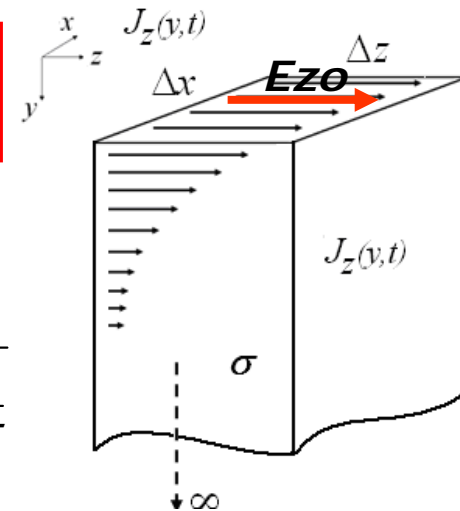
$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$\omega L_i = R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$L_i = \sqrt{\frac{\mu}{4 \pi f \sigma}}$$

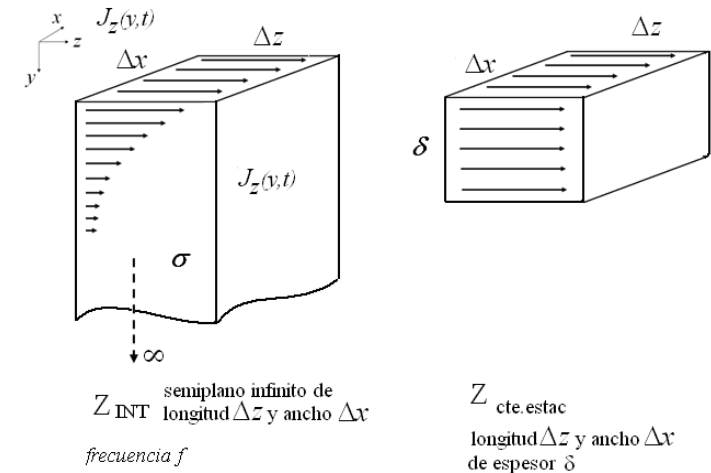
$$\dot{Z}_s = R_s + j \omega L_i$$

$$Z_{INT} = Z_s \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$



Conductor plano semi-infinito

- Rs y Xs interna de un conductor plano semi-infinito resultan iguales *a cualquier frecuencia*.
- La impedancia interna **Zs tiene un ángulo de fase de 45°**.
- La resistencia debida al efecto pelicular de un conductor plano semi-infinito es exactamente **la misma que la resistencia en corriente continua de un plano conductor de profundidad δ** .
- Esto es, la resistencia de este conductor, con decrecimiento exponencial de la densidad de corriente, es exactamente la misma que si **la corriente estuviera uniformemente distribuida sobre una profundidad δ** .
- La Zs de un conductor plano, por unidad de longitud y unidad de ancho, se denomina **impedancia de superficie**. Para un conductor de área finita, la resistencia se obtiene **multiplicando (Rs y Xs) por la longitud, y dividiéndola por el ancho** (ya que los elementos del ancho se encuentran esencialmente en paralelo). De manera que dimensionalmente Zs se expresa en ohms.
- También puede resultar un parámetro útil en el estudio de conductores aunque no sean de forma plana



$$\omega L_i = R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$Z_{INT} = Z_s \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Potencia disipada en un conductor plano semi-infinito

La corriente total por unidad de ancho para el conductor plano semi-infinito, resultaba dada por la expresión (), que puede volver a escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{i}_z = \frac{\delta}{(1+j)} \dot{J}_{z0} = \frac{\delta}{(1+j)} J_{z0} e^{j\omega t} = \frac{J_{z0} \delta (1-j)}{2} e^{j\omega t}$$

La parte real de esta expresión es:

$$\dot{i}_z = \frac{J_{z0} \delta}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t) = \frac{J_{z0} \delta}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

- La pérdida óhmica o potencia disipada P por unidad de ancho x y de longitud z , es decir, por unidad de área es:

$$dP = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \cdot dv$$

Densidad de potencia por unidad de volumen

Potencia disipada en un conductor plano semi-infinito

$$dP = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{J}}{\sigma} dv \quad J_z(y, t) = J_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - y/\delta)$$

Densidad de potencia promedio temporal por unidad de volumen

Para cada punto de coordenada y

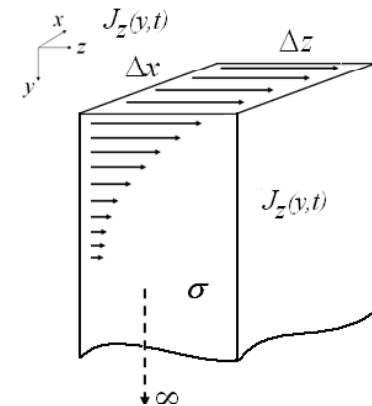
$$\frac{\overline{dP}}{dv} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{J_z^2(y, t)}{\sigma} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{J_0^2 e^{-2y/\delta}}{\sigma} \cos^2(\omega t - y/\delta) dt = \frac{J_0^2 e^{-2y/\delta}}{2\sigma}$$

**Potencia de pérdida en un volumen,
de superficie $\Delta x \cdot \Delta z$**

$$\iiint \frac{\overline{dP}}{dv} dv = \int_0^\infty \frac{J_0^2 e^{-2y/\delta}}{2\sigma} dy \cdot (\Delta x \cdot \Delta z) = (\Delta x \cdot \Delta z) \frac{J_0^2 e^{-2y/\delta}}{-2 \cdot 2\sigma} \delta \Big|_0^\infty = (\Delta x \cdot \Delta z) \frac{J_0^2 \delta}{4\sigma}$$

$$\frac{J_0^2 \delta}{4\sigma}$$

Pérdida por unidad de
largo Δz y ancho (Δx)



Potencia disipada en un conductor plano semi-infinito

$$i_z = \frac{J_{z0} \delta}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t) = \frac{J_{z0} \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad I_{eficaz} = \frac{J_{z0} \delta}{2}$$

$$P = \frac{J_{zo}^2 \delta}{4\sigma}$$

$$R = \frac{P}{I_{eficaz}^2} = \frac{1}{\sigma \delta}$$

- De aquí que la energía disipada es la misma que si circulase una corriente distribuida uniformemente en una capa superficial de profundidad δ .
- **Observar que existe corriente por debajo de la profundidad de penetración δ , aunque disminuye rápidamente.**
- **Por ejemplo, a una profundidad 4δ la densidad de corriente ha caído a menos del 2% del valor en la superficie.**

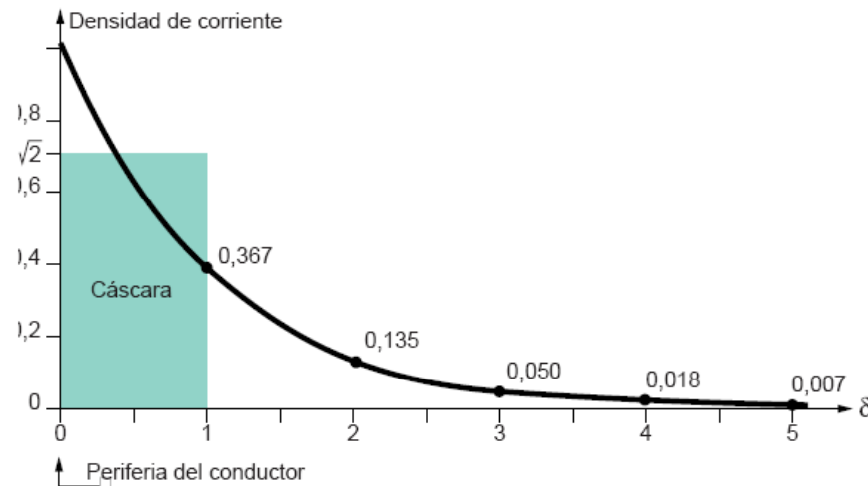
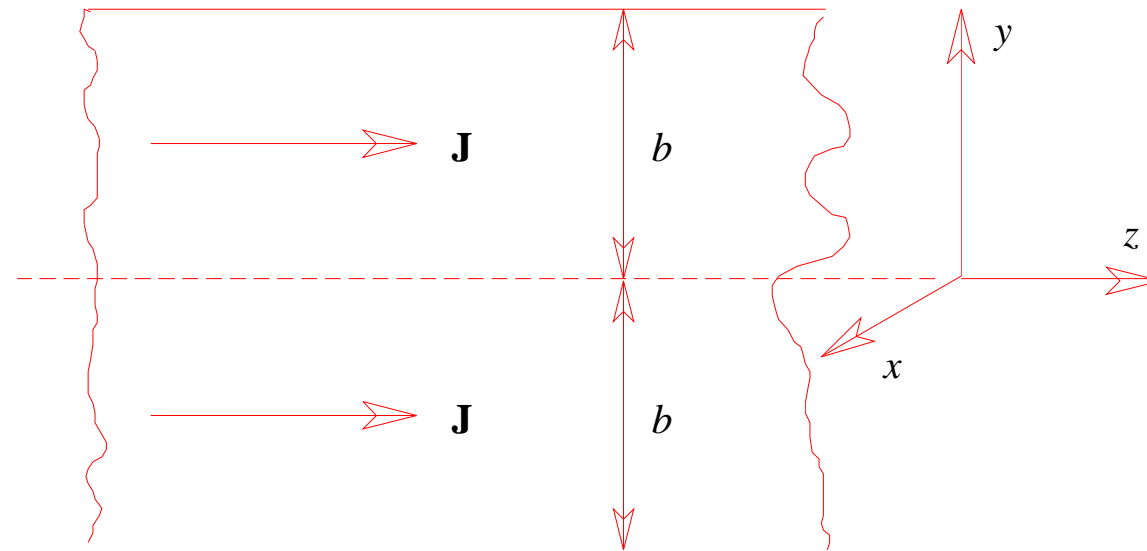


Lámina conductora de doble cara

- La lámina conductora de doble cara, también conocida como lámina plana, es un conductor cuyas dimensiones son longitud infinita (en el sentido del eje z), ancho infinito (en el sentido del eje x), y espesor finito e igual a $2b$ (en el sentido del eje y).
- Para efectuar el estudio de esta geometría, resulta conveniente adoptar el sistema de coordenadas mostrado en dicha figura, destacándose la adopción, por simetría, del eje $y=0$ en la línea central de la lámina



Densidad de corriente en una lámina de doble cara

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

dado que no hay variación en la dirección x ni en la dirección z , ésta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

Si la variación temporal es del tipo $e^{j\omega t}$, siendo $\omega = 2\pi f$ la pulsación angular, la variación espacial involucrada por deberá satisfacer:

$$\frac{\partial^2 \dot{J}_z}{\partial y^2} = j\omega \sigma \mu_0 \mu_r \dot{J}_z = \tau^2 \dot{J}_z$$

$$\dot{J}_z = J_z e^{j\omega t}$$

Una solución completa

$$\dot{J}_z = C_1 e^{-\tau y} + C_2 e^{+\tau y}$$

Obsérvese que, hasta aquí, se han seguido los mismos pasos que en el caso de un conductor plano semi-infinito. Pero ahora no se puede hacer que C_2 sea cero, por cuanto han cambiado las condiciones de contorno.

Densidad de corriente en una lámina de doble cara

$$\dot{J}_z = C_1 e^{-\tau y} + C_2 e^{+\tau y}$$

Es decir que por simetría debe cumplirse:

$$C_1 = C_2$$

es decir:

$$\text{para } y=0: \quad \dot{J}_{z0} = C_1 + C_2 \qquad C_1 = C_2 = \frac{\dot{J}_{z0}}{2}$$

$$\dot{J}_z = \frac{\dot{J}_{z0}}{2} \left(e^{\tau y} + e^{-\tau y} \right) = \dot{J}_{z0} \cdot \cosh(\tau y)$$

\dot{J}_{z0} no corresponde al valor de \mathbf{J} en la superficie de la lámina.

Densidad de corriente en una lámina de doble cara

$$\tau^2 \equiv j\omega\mu\sigma$$

$$\tau = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{(1+j)}{\delta}$$

$$j_z = \frac{j_{z0}}{2} \left(e^{(1+j)y/\delta} + e^{-(1+j)y/\delta} \right) = j_{z0} \cosh \left((1+j) \frac{y}{\delta} \right)$$

$$j_{zs} = \frac{j_{z0}}{2} \left(e^{(1+j)b/\delta} + e^{-(1+j)b/\delta} \right) = j_{z0} \cosh \left((1+j) \frac{b}{\delta} \right)$$

$$j_z = j_{zs} \frac{\cosh \left((1+j) y / \delta \right)}{\cosh \left((1+j) b / \delta \right)}$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{zs} \frac{\cosh \left((1+j) y / \delta \right)}{\cosh \left((1+j) b / \delta \right)}$$

$$H_x = -H_{x0} \frac{\sinh \left((1+j) \frac{x}{\delta} \right)}{\sinh \left((1+j) \frac{b}{\delta} \right)}$$

Impedancia interna de una lámina de doble cara

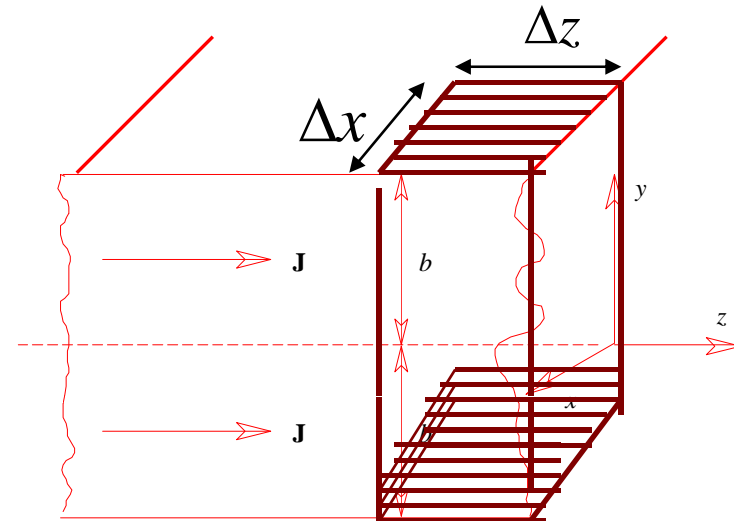
- La impedancia interna por unidad de longitud es el cociente entre el campo eléctrico *en la superficie* y la corriente *total*. Tal como se hizo con el conductor plano semi-infinito, en este caso también resulta conveniente definir la impedancia interna **por unidad de longitud y unidad de ancho**.
- Sea i_z** la corriente por unidad de ancho, desde la superficie del conductor

$$i_z = \int_{-b}^{+b} J_z dy = \int_{-b}^{+b} J_{zs} \frac{\cosh((1+j)y/\delta)}{\cosh((1+j)b/\delta)} dy = \frac{2 J_{zs} \delta}{(1+j)} \tanh\left((1+j)\frac{b}{\delta}\right)$$

Si b/δ es grande, $\tanh((1+j)b/\delta) \rightarrow 1$

$$i_z = \frac{2 J_{zs} \delta}{(1+j)}$$

Este es el valor que podría obtenerse, **imaginando la lámina de dos caras como dos placas infinitas** colocadas juntas. Es decir, para relaciones $b/\delta > 2,64$, **ambas caras de la lámina se comportan como sendos conductores planos semi-infinitos**



Impedancia interna de una lámina de doble cara

- **Campo en La superficie**

$$\dot{E}_{zs} = \frac{\dot{J}_{zs}}{\sigma} \quad i_z = \frac{2 \dot{J}_{zs} \delta}{(1+j)} \tanh\left((1+j) \frac{b}{\delta}\right)$$

- **Impedancia Interna superficial, por unidad de ancho y largo**

$$\dot{Z}_s = \frac{\dot{E}_{zs}}{\dot{i}_z} = \frac{(1+j)}{2 \sigma \delta} \coth\left((1+j) \frac{b}{\delta}\right) \quad \dot{Z}_s = R_s + j \omega L_i$$

$$\dot{Z}_s = \frac{(1+j)}{2 \sigma \delta} \frac{\cosh(b/\delta) \cos(b/\delta) + j \sinh(b/\delta) \sin(b/\delta)}{\sinh(b/\delta) \cos(b/\delta) - j \cosh(b/\delta) \sin(b/\delta)}$$

$$\dot{Z}_s = R_{ca} + j X_i = \frac{1}{2 \sigma \delta} \frac{\sinh(2b/\delta) + \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)} + \frac{j}{2 \sigma \delta} \frac{\sinh(2b/\delta) - \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)}$$

$$R_{cc} = \frac{1}{2 \sigma b} \quad \frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{b}{\delta} \frac{\sinh(2b/\delta) + \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)} \quad \frac{X_i}{R_{cc}} = \frac{b}{\delta} \frac{\sinh(2b/\delta) - \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)}$$

Impedancia interna de una lámina de doble cara

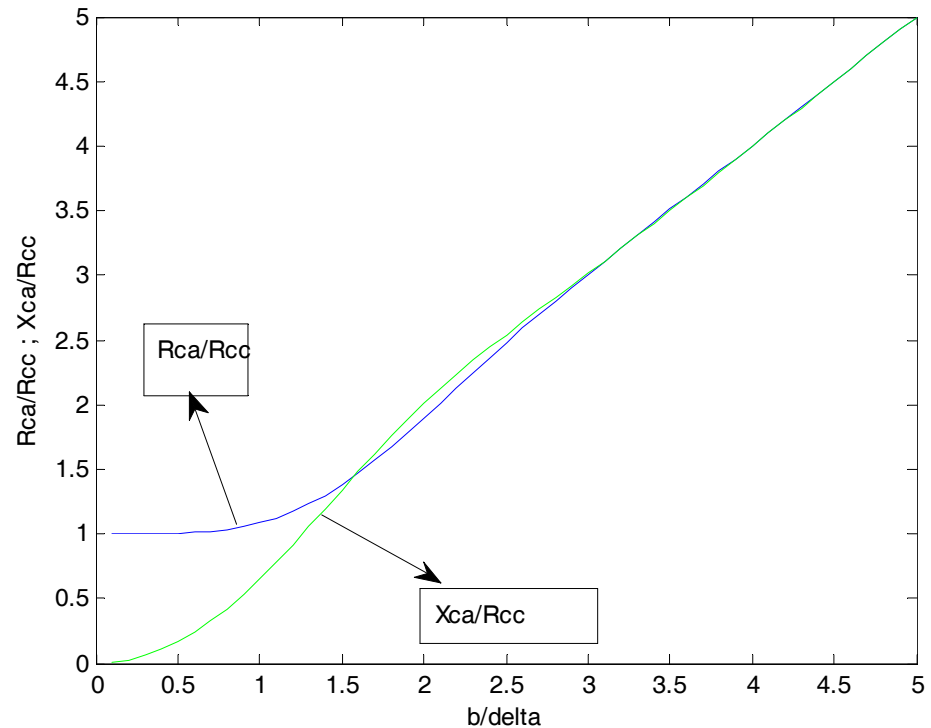
$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{b}{\delta} \frac{\sinh(2b/\delta) + \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)}$$

$$\frac{X_{ca}}{R_{cc}} = \frac{b}{\delta} \frac{\sinh(2b/\delta) - \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) - \cos(2b/\delta)}$$

- Para valores grandes de b/δ , tiende a b/δ , debido a que las pérdidas son **como si la corriente estuviera concentrada en dos capas superficiales de profundidad δ** . Para valores bajos de b/δ se puede efectuar un desarrollo en serie de potencias crecientes de b/δ :

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} \cong 1 + \frac{4}{45} \left(\frac{b}{\delta} \right)^4$$

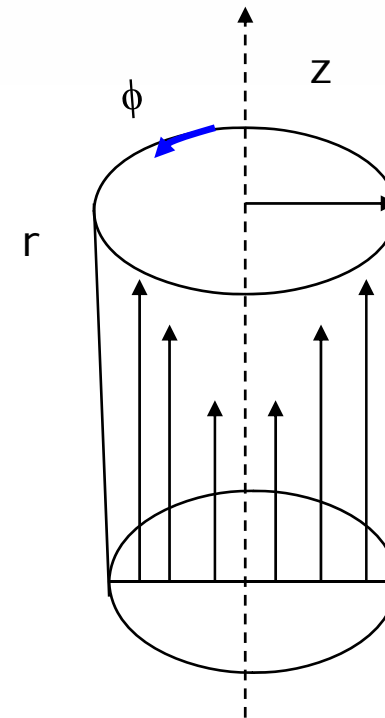
- R_{ca} varía con \sqrt{f} a altas f , $b > \delta$
- R_{ca} varía con $(1 + k f^2)$ a bajas f , $b < \delta$.



Hipótesis

- La corriente circula en la dirección axial solamente,
- Las variaciones en la dirección axial (dirección z) y circunferencial (dirección ϕ), son despreciables
- Las variaciones en la dirección radial del conductor (dirección r) solo importan.

La mayoría de los conductores empleados en los circuitos eléctricos son alambres de sección circular. Si un alambre de este tipo constituye una trayectoria conductora sin curvaturas agudas, como en la mayoría de las aplicaciones circuitales, cualquier porción pequeña puede tratarse como un cilindro circular recto.



Densidad de corriente en conductores cilíndricos

- La ecuación de difusión que describe la distribución de la corriente, escrita en coordenadas cilíndricas, para el caso de no existir variaciones ni en la dirección z , ni en la dirección ϕ resulta:

$$\frac{d^2 \dot{J}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{J}_z}{dr} = j\omega \mu \sigma \dot{J}_z$$

$$\tau^2 \equiv -j\omega \mu \sigma$$

$$\frac{d^2 \dot{J}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{J}_z}{dr} + \tau^2 \dot{J}_z = 0$$

$$\tau = j^{-1/2} \sqrt{\omega \mu \sigma} = j^{-1/2} \frac{\sqrt{2}}{\delta}$$

La ecuación es de la forma de la ecuación de Bessel de orden cero, con τ complejo. Una solución completa de esta ecuación es:

$$\dot{J}_z = A J_0(\tau r) + B H_0^{(1)}(\tau r)$$

J_0 : es la función de Bessel de primera clase y de orden cero

H_0 : es la función de Bessel de segunda clase y orden cero también llamada función de Hankel (Jahnke & Emde's).

Densidad de corriente en conductores cilíndricos

Para un alambre sólido, $r=0$ debe estar incluida en la solución, y por lo tanto es necesario que la constante B sea cero ya que un estudio de la función de Hankel demuestra que ésta se hace infinita cuando $r=0$

$$j_z = A J_0(\tau r) \quad j_z = j_{z0} \quad \text{en } r = r_0 \quad A = \frac{j_{z0}}{J_0(\tau r_0)}$$
$$j_z = \frac{j_{z0} J_0(\tau r)}{J_0(\tau r_0)}$$

Pero siendo τ complejo puede resultar problemático encontrar la función de Bessel. Si nos referimos a la serie de potencias para J_0 , se observa que si el argumento es complejo **la función tendrá tanto parte real como parte imaginaria**.

$$J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2}$$
$$x = \tau r = j^{-1/2} \sqrt{2} \frac{r}{\delta} = j^{-1/2} v$$

Estas pueden ser calculadas **separadamente, si definimos:**

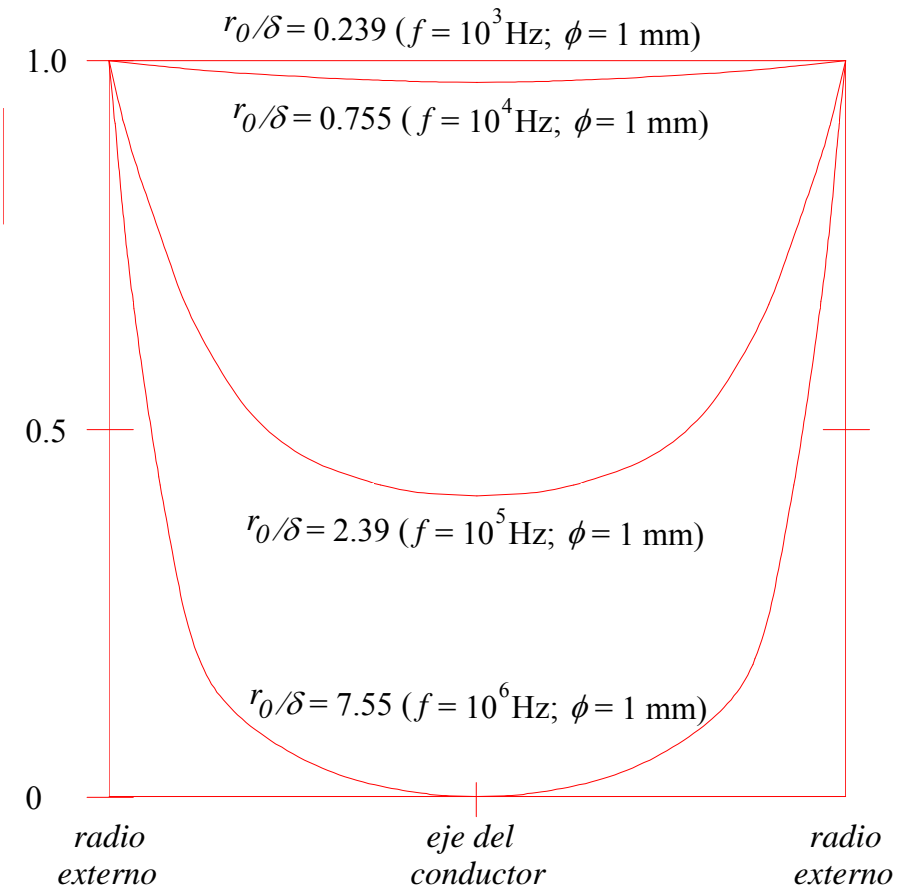
$$Ber(v) \equiv Re \left\{ J_0 \left(j^{-1/2} v \right) \right\}$$

$$Bei(v) \equiv Im \left\{ J_0 \left(j^{-1/2} v \right) \right\}$$

Conductores cilíndricos

$$\dot{J}_z = \dot{J}_{z0} \frac{Ber(\sqrt{2} r/\delta) + j Bei(\sqrt{2} r/\delta)}{Ber(\sqrt{2} r_0/\delta) + j Bei(\sqrt{2} r_0/\delta)}$$

$$\left| \frac{\dot{J}_z}{\dot{J}_{z0}} \right|$$

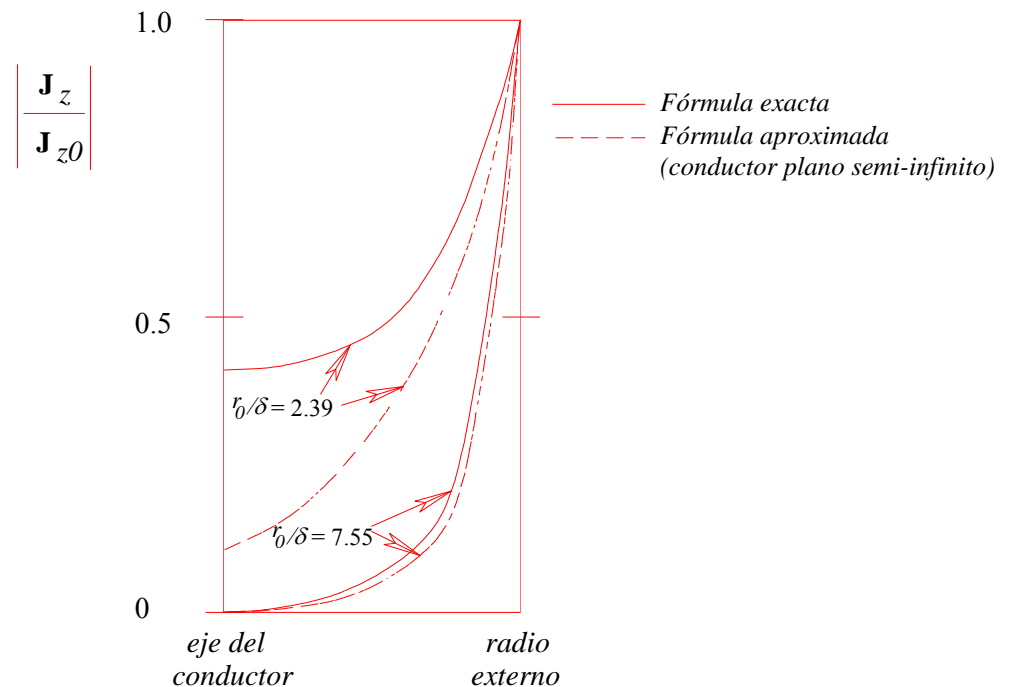


Conductores cilíndricos

- Como un ejemplo de la aplicabilidad del análisis del **conductor plano semi-infinito a casos de conductores curvados en frecuencias elevadas con δ pequeño frente al radio de curvatura, se puede estudiar** el presente caso del **conductor cilíndrico**.
- Si se va a despreciar la curvatura para aplicar el análisis del conductor plano, la coordenada y , distancia medida desde la superficie hacia el interior del conductor, es para el conductor cilíndrico: $r_0 - r$. Entonces, la ecuación resulta:

$$\frac{J_z}{J_{z0}} = e^{-(r_0 - r)/\delta}$$

Distribución de corriente real en conductores cilíndricos y aproximada (expresión para un conductor plano semi-infinito) para diferentes frecuencia



Impedancia interna de un conductor cilíndrico

$$I = \int_0^{r_0} J_z 2\pi r dr = \int_0^{r_0} \frac{J_{z0} J_0(\tau r)}{J_0(\tau r_0)} 2\pi r dr = \frac{2\pi}{\tau} \frac{J_{z0} J_1(\tau r_0)}{J_0(\tau r_0)}$$

$$Z = E_s / I = \frac{\tau}{2\pi\sigma} \frac{J_0(\tau r_0)}{J_1(\tau r_0)}$$

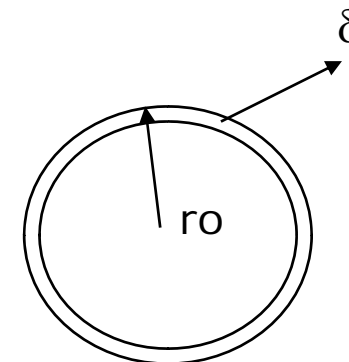
Impedancia interna de un conductor cilíndrico en muy altas frecuencias

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$$

$$\dot{Z}_{h.f.} = \frac{(1+j)}{2\pi r_0 \sigma \delta} = \frac{R_s(1+j)}{2\pi r_0}$$

$2\pi r_0 = \text{ancho}$

$2\pi r_0 \delta = \text{Sup}$



$$Z_{INT} = \left(\frac{\Delta l}{2\pi r_0} \right) \left(\frac{1}{\sigma\delta} + j \frac{1}{\sigma\delta} \right)$$

Para altas frecuencias

$$R_{h.f.} = (\omega L_i)_{h.f.} = \frac{R_s}{2 \pi r_0} \left[\Omega / \text{m} \right]$$

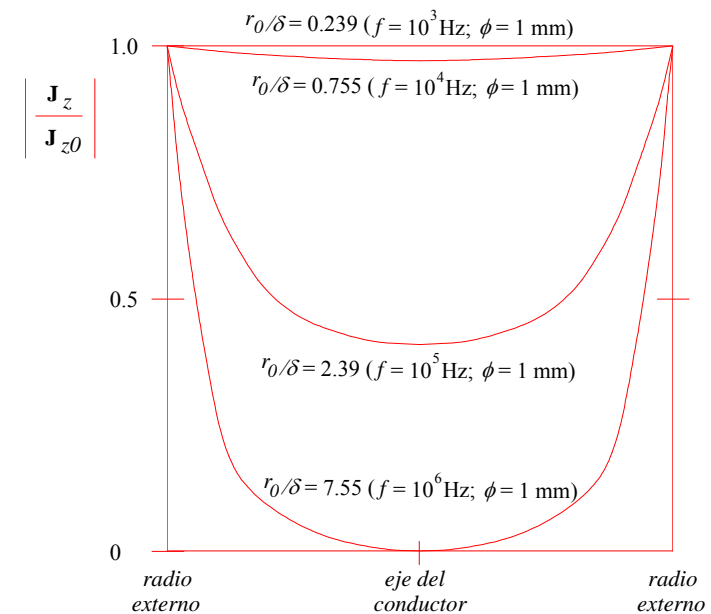
$$L_{i-h.f.} = \frac{R_s}{4 \pi^2 f r_0} \left[\text{H} / \text{m} \right]$$

Impedancia interna de un conductor cilíndrico en muy bajas frecuencias

En muy bajas frecuencias, la corriente tiene esencialmente una distribución uniforme sobre la sección transversal del conductor de manera que es posible aplicar la expresión para corriente continua:

$$R_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 \sigma} \left[\Omega / \text{m} \right]$$

$$L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left[\text{H} / \text{m} \right]$$

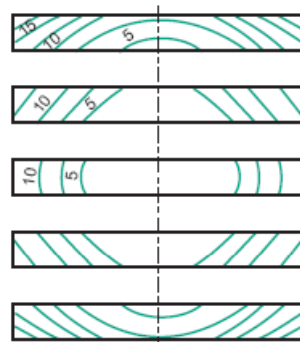
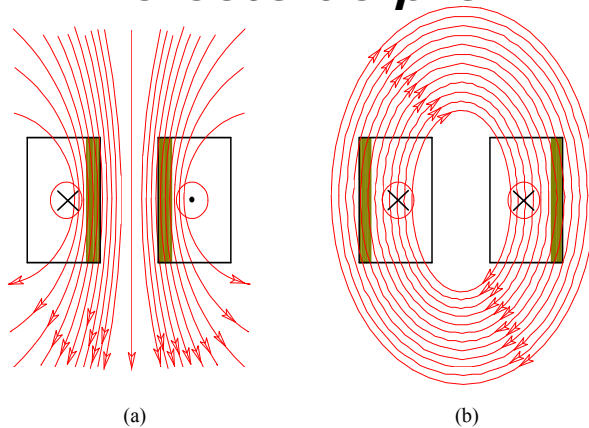


Para frecuencias intermedias donde los valores de **$r_0/\delta=2$** , el **error es 6%**

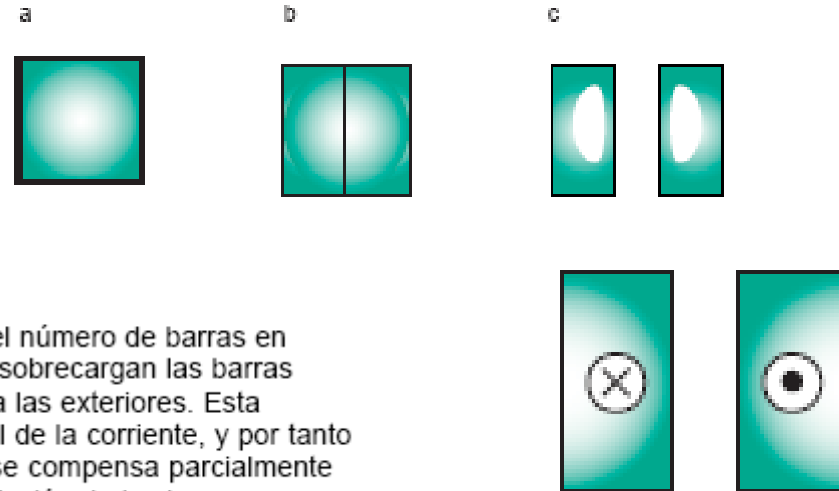
$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4$$

Efecto de proximidad

- Sobre la distribución de la corriente alterna en un conductor, ejercen su influencia las corrientes en los conductores vecinos. Este fenómeno suele denominarse *efecto de proximidad*.**

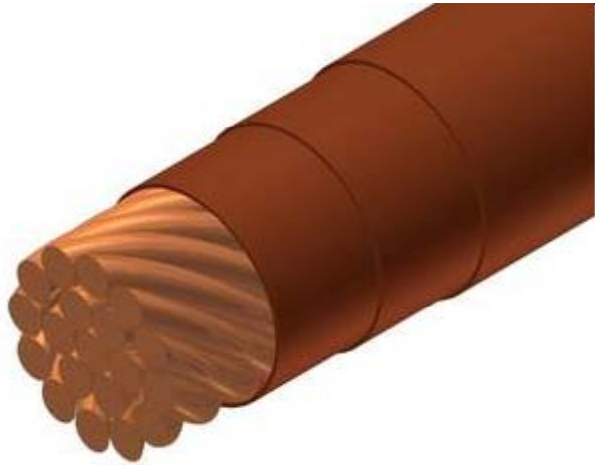


Densidad de corriente en un grupo de 5



Cuanto mayor sea el número de barras en paralelo, menos se sobrecargan las barras interiores respecto a las exteriores. Esta distribución desigual de la corriente, y por tanto del calentamiento, se compensa parcialmente con una mejor ventilación de las barras externas, las más cargadas. Con una separación suficiente de las barras, del orden de 3 veces su dimensión mayor, el efecto de proximidad desaparece totalmente; pero, para distancias intermedias, se produce una sensible disminución del coeficiente de pérdidas K , lo que también demuestran los ensayos y cálculos efectuados sobre 4 barras de 80 x 10 mm, separadas de 10 a 40 mm.

Separación (mm)	10	20	40
$K = \frac{R_a}{R_c}$	1,65	1,53	1,38



- El hilo de Litz es un tipo especial de hilo o alambre conductor utilizado en electrónica.
- El hilo de Litz está constituido por varios alambres recubiertos con una película aislante y trenzados,
- de esta forma se incrementa el área de la superficie conductora y con ello se reduce el efecto pelicular
- y por tanto las pérdidas de potencia asociadas cuando se usa en aplicaciones de alta frecuencia donde el *efecto skin* (efecto pelicular) es más pronunciado.
- El término hilo de Litz tiene su origen en la palabra alemana *litzendraht* que significa hilo entretejido.