



# Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

## TP Nº 1. Redes bipuerta y Multipuerta

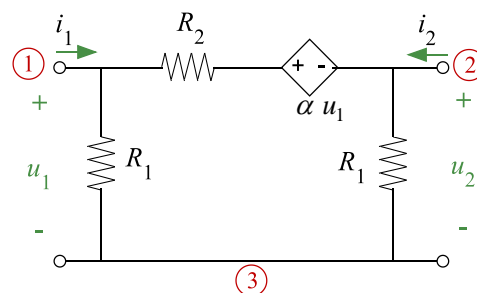


**Sugerencia:** Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.

### Ejercicio 2

Dado el circuito de la figura en conexión nodo 3 común.

- Hallar la matriz de admitancias en cortocircuito  $|Y_{cc3}|$ , aplicando la definición de cada parámetro.
- Dibujar el circuito para la configuración nodo 2 común con entrada por terminales 1-2 y salida por terminales 3-2. Obtener la matriz de admitancias en cortocircuito  $|Y_{cc2}|$ .
- Dibujar el circuito para la configuración nodo 1 común con entrada por terminales 3-1 y salida por terminales 2-1. Obtener la matriz de admitancias en cortocircuito  $|Y_{cc1}|$ .



### Resolución:

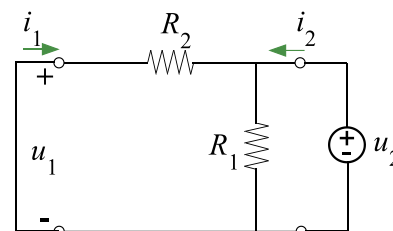
- Matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *nodo 3 común* ( $|Y_{cc3}|$ ).

$$y_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \quad y_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0}$$

Parámetros para  $u_1=0$

$$i_1 = -\frac{1}{R_2} u_2 \quad \therefore y_{12} = -\frac{1}{R_2}$$

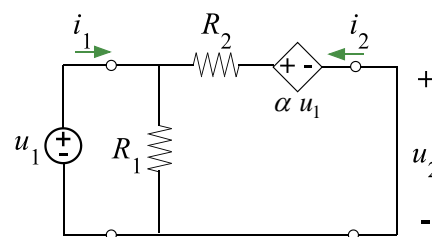
$$i_2 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_2 \quad \therefore y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Parámetros para  $u_2=0$

$$i_2 = -\frac{1-\alpha}{R_2} u_1 \quad \therefore y_{21} = -\frac{1-\alpha}{R_2}$$

$$i_1 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2} \right) u_1 \quad \therefore y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}$$



Es decir, los parámetros de la matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *terminal 3 común* resultan:

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}$$

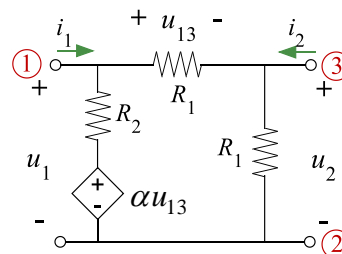
$$y_{12} = -\frac{1}{R_2}$$

$$y_{21} = -\frac{1-\alpha}{R_2}$$

$$y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$[Y_{cc3}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1-\alpha}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

- Matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *nodo 2 común*, con entrada por 1-2 y salida por 3-2 ( $|Y_{cc2}|$ ).



$$y_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0}$$

$$y_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0}$$

Parámetros para  $u_1=0$

$$i_1 = -\frac{\alpha u_{13}}{R_2} + \frac{u_{13}}{R_1} = \left( \frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) u_2 \quad \therefore \quad y_{12} = \frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

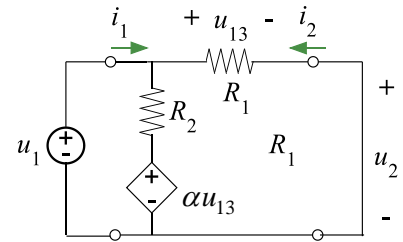
$$i_2 = \frac{2}{R_1} u_2 \quad \therefore \quad y_{22} = \frac{2}{R_1}$$

Parámetros para  $u_2=0$

$$i_2 = -\frac{1}{R_1} u_1 \quad \therefore \quad y_{21} = -\frac{1}{R_1}$$

$$i_1 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2} \right) u_1 \quad \therefore \quad y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}$$

Es decir, los parámetros de la matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *terminal 2 común* resultan:



$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1-\alpha}{R_2}$$

$$y_{12} = \frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

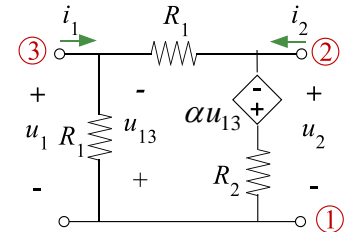
$$y_{21} = -\frac{1}{R_1}$$

$$y_{22} = \frac{2}{R_1}$$

c) Matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *nodo 1 común*, con entrada por 3-1 y salida por 2-1 ( $|Y_{cc2}|$ ).

$$y_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0}$$

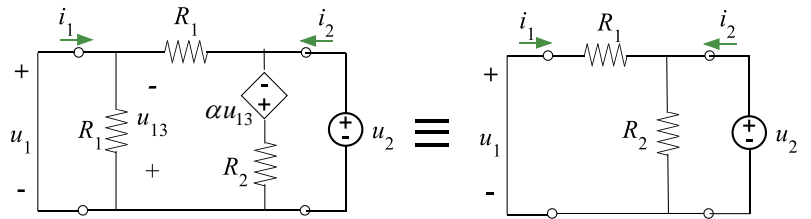
$$y_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0}$$



Parámetros para  $u_1=0$

$$i_1 = -\frac{u_2}{R_1} \quad \therefore \quad y_{12} = -\frac{1}{R_1}$$

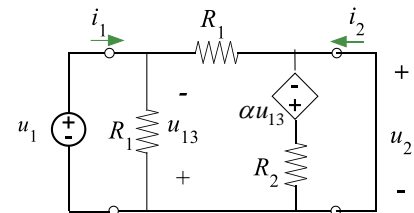
$$i_2 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_2 \quad \therefore \quad y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Parámetros para  $u_2=0$

$$i_2 = \left( -\frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) u_1 \quad \therefore \quad y_{21} = -\frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

$$i_1 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \right) u_1 \quad \therefore \quad y_{11} = \frac{2}{R_1}$$



Es decir, los parámetros de la matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *terminal 1 común*, con entrada por 3-1 y salida por 2-1 resultan:

$$y_{11} = \frac{2}{R_1}$$

$$y_{12} = -\frac{1}{R_1}$$

$$y_{21} = -\frac{\alpha}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

$$y_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

## Ejercicio 5

Dado un transformador real, con factor de acoplamiento  $k = 0,9$ , relación de transformación  $n = N_1/N_2 = 2$ ,  $L_1 = 4$  H y  $L_2 = 1$  H,  $\omega = 1$  rad/s obtener:

- Las matrices de parámetros  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{T}$  en forma genérica a partir del modelo galvánico del transformador. *Sugerencia: Utilizar los resultados obtenidos en ejercicio 4.a*
- Las matrices de parámetros  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{T}$  en forma numérica, es decir, reemplazando por valores.
- La tensión en el secundario a circuito abierto, cuando la tensión en el primario es sinusoidal con  $U_1 = 220\cos(t)$  V, es decir  $\omega = 1$  rad/s.
- La impedancia de entrada cuando la carga en el secundario es de  $R_L = 10 \Omega$ . *Sugerencia: Utilizar la expresión  $Z_i = \frac{AR_i + B}{CR_i + D}$ .*
- La corriente en el primario y la tensión y la corriente de salida en la carga  $R_L$ .
- Las potencias aparente, activa y reactiva en el primario y en el secundario del transformador. Saque conclusiones.

## Resolución:

a) y b) Para caracterizar un transformador real son necesarios cuatro parámetros: la relación de transformación  $n$ , las inductancias  $L_1$  y  $L_2$  y el coeficiente de acoplamiento  $k$ .

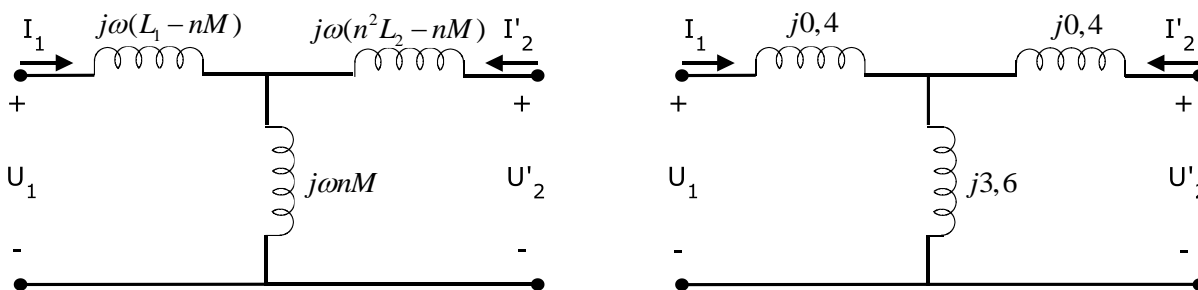
Por lo tanto, según los datos del ejercicio resulta:  $n = N_1/N_2 = 2$ ,  $L_1 = 4$  H,  $L_2 = 1$  H,  $k = 0,9$  y  $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,9\sqrt{4} = 1,8$ . Con estos parámetros, es posible determinar los parámetros del circuito equivalente con acoplamiento galvánico del transformador real referido al primario:

$$L_1 - nM = 4 - 2 \cdot 1,8 = 0,4$$

$$nM = 2 \cdot 1,8 = 3,6$$

$$n^2 L_2 - nM = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1,8 = 0,4$$

Por lo tanto el circuito equivalente se muestra en la siguiente figura:



Para obtener las matrices  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{T}$  se toman como referencia los resultados obtenidos en el ejercicio anterior para una red del tipo T. Las matrices resultantes son:

$$[\mathbf{Z}]_{\text{trafo\_real}} = \begin{bmatrix} Z_A + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_B + Z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega nM \\ j\omega nM & j\omega n^2 L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4j & 3,6j \\ 3,6j & 4j \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Y}]_{\text{trafo\_real}} = \begin{bmatrix} \frac{Z_B + Z_C}{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C} & -\frac{Z_C}{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C} \\ -\frac{Z_C}{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C} & \frac{Z_A + Z_C}{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\omega n^2 L_2}{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)} & -\frac{j\omega nM}{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)} \\ -\frac{j\omega nM}{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)} & \frac{j\omega L_1}{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,316j & 1,184j \\ 1,184j & -1,316j \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{H}]_{\text{trafo\_real}} = \begin{bmatrix} Z_A + \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C} & \frac{Z_C}{Z_B + Z_C} \\ -\frac{Z_C}{Z_B + Z_C} & \frac{1}{Z_B + Z_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)}{j\omega n^2 L_2} & \frac{M}{nL_2} \\ -\frac{M}{nL_2} & -\frac{j}{\omega n^2 L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,76j & 0,9 \\ -0,9 & -0,25j \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\text{trafo\_real}} = \begin{bmatrix} \frac{Z_A + Z_C}{Z_C} & \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C} \\ \frac{1}{Z_C} & \frac{Z_B + Z_C}{Z_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{nM} & \frac{\omega^2 n^2 (M^2 - L_1 L_2)}{j\omega n M} \\ -\frac{j}{\omega n M} & \frac{n L_2}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,111 & 0,844j \\ -0,278j & 1,111 \end{bmatrix}$$

c) La tensión en el primario, a circuito abierto en la salida puede obtenerse fácilmente a partir de la expresión de la ganancia de tensión:

$$T_U = \left. \frac{U'_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{A}$$

Por lo tanto la tensión del secundario referida al primario es:  $U'_2 = \frac{1}{A} U_1 = \frac{1}{1,111} \cdot 220 = 198 \text{ V}$

Esta tensión referida al secundario es:  $\frac{U'_2}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} \Rightarrow U_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot U'_2 = \frac{U'_2}{n} = \frac{198}{2} = 99 \text{ V}$

Esta es la tensión en vacío que aparece en el secundario del transformador real especificado.

d) Para calcular la impedancia de entrada de transformador real visto como un cuadripolo, hay que referir la resistencia de carga  $R_l = 10 \Omega$  al primario, afectándola por la relación de transformación al cuadrado, entonces resulta  $R'_l = n^2 R_l = 4 \cdot 10 = 40 \Omega$ .

Por lo tanto la impedancia de entrada es:

$$Z_i = \frac{AR'_l + B}{CR'_l + D} = \frac{1,111 \cdot 40 + 0,844j}{-0,278 \cdot 40j + 1,111} = 0,321 + 3,968j = 3,981e^{j85,34^\circ} \Omega$$

e) La corriente de entrada al transformador es:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{in}} = \frac{220e^{j0}}{0,321 + 3,968j} = 4,453 - 55,0846j = 55,264e^{-j85,34^\circ} \text{ A}$$

Por lo tanto, la tensión y la corriente del secundario reflejadas al primario pueden obtenerse ahora a partir de las ecuaciones básicas de los parámetros de transmisión de la red (tomando como sentido positivo de  $I_2$  hacia afuera):

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$$

Por lo tanto resolviendo para  $U'_2$  a partir de la regla de Cramer:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 D - \dot{I}_1 B}{(AD - BC)} = 197,964 \angle -1,09^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{A\dot{I}_1 - C\dot{U}_1}{(AD - BC)} = 4,949 \angle -1,09^\circ \text{ A}$$

Esta tensión y corriente referidas al secundario del transformador resultan:

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}'_2}{n} = 98,982 \angle -1,09^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = n\dot{I}'_2 = 9,898 \angle -1,09^\circ \text{ A}$$

e) Finalmente, las potencias de entrada al transformador y la entregada a la carga son:

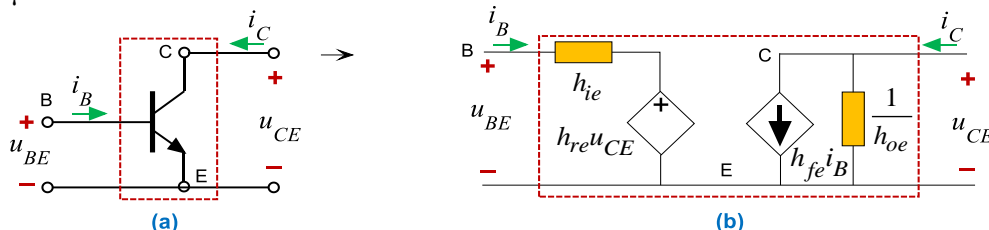
La potencia aparente de entrada es:  $S_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^* = P_1 + jQ_1 = 979,75 + 12119j \text{ VA}$ , con lo cual se deduce que:  $|S_1| = 12,158 \text{ kVA}$ ,  $P_1 = 979,75 \text{ W}$  y  $Q_1 = 12,119 \text{ kvar}$ . Como la carga es resistiva pura, la circulación de potencia reactiva es debida al transformador. El signo positivo de la potencia reactiva indica

claramente que el circuito es inductivo. Notar que es mucho mayor el flujo de potencia reactiva que de potencia activa (que es la potencia útil disponible en la carga).

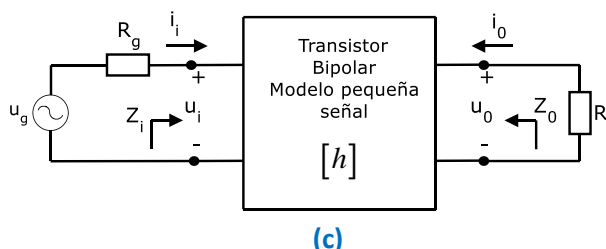
Si finalmente se calcula la potencia aparente en la carga resulta:  $S_2 = \dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2^* = P_2 + jQ_2 = 979,75 + j0 \text{ VA}$  resultando, como no podía ser de otra forma:  $P_2 = 979,75 \text{ W}$  y  $Q_2 = 0 \text{ var}$ .

## Ejercicio 7

En la figura se muestra el modelo equivalente de pequeña señal de un transistor bipolar, en su configuración emisor común (EC). Los valores típicos de los parámetros  $h$  son:  $h_{ie} = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $h_{re} = 10^{-4}$ ,  $h_{fe} = 100$  y  $h_{oe} = 24 \mu\text{S}$ .



- a) Determinar la matriz de parámetros híbridos (en forma simbólica y numérica), y posteriormente las matrices  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{T}$  (también de forma simbólica y numérica). *Sugerencia: obtener los elementos cada matriz en función de los parámetros  $h$  aplicando la definición de los respectivos parámetros en el modelo de pequeña señal tomando como referencia el ejemplo 1.3 del libro.*
- b) Dado el circuito de la Figura (c), en el cual dentro del cuadripolo se encuentra el modelo de pequeña señal del transistor bipolar de la Figura (b):



Considerando  $U_g = 1 \text{ V}$ ,  $R_g = 50 \Omega$  y  $R_l = 50 \Omega$ , determinar:

- La ganancia de corriente  $A_i = I_0/I_i$ .
  - La ganancia de tensión  $A_U = U_0/U_i$ .
  - La impedancia de entrada  $Z_i = U_i/I_i$ .
  - La impedancia de salida  $Z_o = U_0/I_0$  teniendo en cuenta que esta impedancia se calcula con el generador de entrada anulado por definición.
- c) Calcular  $I_i$ ,  $I_0$ ,  $U_i$ ,  $U_0$ . Saque conclusiones acerca de los resultados obtenidos.
- d) Verificar que la impedancia de entrada puede obtenerse también a partir de los parámetros de transmisión con la siguiente expresión:  $Z_i = \frac{AR_l + B}{CR_l + D}$ . Compare con el resultado obtenido en b).

## Resolución:

a) La matriz de parámetros híbridos puede obtenerse por simple inspección comparando las ecuaciones básicas de los parámetros híbridos con las ecuaciones que pueden escribirse en el circuito, resultando:

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \Rightarrow u_{be} = h_{11}i_b + h_{12}u_{ce}$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \Rightarrow i_c = h_{21}i_b + h_{22}u_{ce}$$

Por lo tanto, resulta por simple inspección:

$$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = h_{ie} = 5000 \Omega \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = h_{fe} = 100$$

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = h_{re} = 0,0001 \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = h_{oe} = 0,000024 \text{ S}$$

Por lo tanto, la matriz de parámetros híbridos del modelo de pequeña señal del transistor bipolar resulta entonces:

$$[H] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 0,0001 \\ 100 & 0,000024 \end{bmatrix}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,00000002 \\ 0,02 & 0,000022 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4583,3 & 4,1667 \\ -4166666,67 & 41667 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0011 & -50 \\ -0,00000024 & -0,01 \end{bmatrix}$$

b) Ganancia de corriente  $A_i = I_0/I_i$ .

Observando el circuito es posible escribir:

$$I_0 = I + h_{21}I_i = \frac{U_0}{\left(\frac{1}{h_{22}}\right)} + h_{12}u_{ce} \quad \text{como: } U_0 = -I_0R_l$$

$$I_0 + I_0R_lh_{22} = h_{21}I_i \quad \frac{I_0}{I_i} = \frac{h_{21}}{(1 + h_{22}R_l)} = \frac{h_{fe}}{(1 + h_{0e}R_l)} = \frac{100}{(1 + 2,4 \times 10^{-5} \cdot 50)} = 99,88$$

Normalmente se suele aproximar a la ganancia de corriente como  $\frac{I_0}{I_i} \approx h_{21} = h_{fe} = 100$

Ganancia de tensión  $A_U = U_0/U_i$ .

Observando el circuito es posible escribir:

$$U_i = h_{11}I_i + h_{12}U_0 \quad \text{como: } I_i = \frac{(1 + h_{22}R_l)}{h_{21}}I_0 \quad \text{y además: } I_0 = -\frac{U_0}{R_l}$$

$$U_i = -\frac{h_{11}}{h_{21}}(1 + h_{22}R_l)\frac{U_0}{R_l} + h_{12}U_0 \quad \text{como: } \frac{U_i}{U_0} = \frac{-h_{11} - h_{11}h_{22}R_l + h_{12}h_{21}R_l}{h_{21}R_l}$$

$$\text{Entonces: } \frac{U_0}{U_i} = -\frac{h_{21}R_l}{h_{11} + \Delta h R_l} = -0,9989$$

Es interesante notar que la ganancia de tensión es negativa, es decir hay un cambio de polaridad entre la tensión de entrada y la de salida.

Impedancia de entrada  $Z_i = U_i/I_i$

Observando el circuito es posible escribir:

$$U_i = h_{11}I_i + h_{12}U_0 \quad \text{pero: } U_0 = -\frac{h_{21}R_lU_i}{h_{11} + \Delta h R_l}$$

Entonces:

$$U_i = h_{11}I_i - \frac{h_{12}h_{21}R_l}{h_{11} + \Delta h R_l}U_i \quad \text{entonces: } U_i \left[ 1 + \frac{h_{12}h_{21}R_l}{h_{11} + \Delta h R_l} \right] = h_{11}I_i$$

$$\text{Finalmente: } Z_i = \frac{U_i}{I_i} = \frac{h_{11}}{\left[ 1 + \frac{h_{12}h_{21}R_l}{h_{11} + \Delta h R_l} \right]} = 4999,5 \, \Omega$$

Que normalmente se aproxima como:  $Z_i \approx h_{11} = h_{ie} = 5 \, k\Omega$ .

Impedancia de salida  $Z_0 = U_0/I_0$  teniendo en cuenta que esta impedancia se calcula con el generador de entrada anulado por definición

$$Z_0 = \left. \frac{U_0}{I_0} \right|_{U_g=0} \quad \text{como: } I_i = -\frac{U_0 h_{12}}{h_{11} + R_g}$$

$$I_0 = h_{22}U_0 + h_{21}I_i = h_{22}U_0 - \frac{h_{21}h_{12}}{h_{11} + R_g}U_0$$

$$Z_0 = \left. \frac{U_0}{I_0} \right|_{U_g=0} = \frac{1}{\left[ h_{22} - \frac{h_{21}h_{12}}{h_{11} + R_g} \right]} = 45,41 \text{ k}\Omega$$

Normalmente esta impedancia de salida se aproxima por:  $Z_0 = \left. \frac{U_0}{I_0} \right|_{U_g=0} \approx \frac{1}{h_{22}} = 41,66 \text{ k}\Omega$

Calculados entonces las expresiones de todas las ganancias, es posible obtener en primera medida la corriente de entrada al cuadripolo:

$$I_i = \frac{U_g}{(R_g + Z_i)} = \frac{1}{(50 + 4999,5)} = 0,198 \text{ mA}$$

$$U_i = Z_i I_i = 0,99 \text{ V}$$

Entonces:

$$I_0 = \frac{h_{21}}{(1 + h_{22}R_l)} I_i = 19,8 \text{ mA}$$

$$U_0 = -\frac{h_{21}R_l}{h_{11} + \Delta h R_l} U_i = -0,989 \text{ V}$$

Si se calcula finalmente la impedancia de entrada a partir de los parámetros de transmisión resulta:

$$Z_i = \frac{AR_l + B}{CR_l + D} = \frac{0,0011 \cdot 50 - 50}{-0,00000024 \cdot 50 - 0,01} = 4999,5 \text{ }\Omega$$

Que coincide exactamente con el valor obtenido previamente.

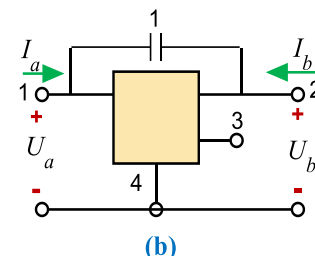
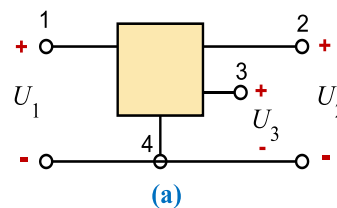


## Ejercicio 10

En la figura (a) se muestra una red de cuatro terminales conectada como de tres puertas con terminal común. Las ecuaciones en cortocircuito de esta red de tres puertas son las que se indican. Se desea conectar un condensador unidad entre los terminales 1 y 2, como se indica en la figura (b).

Hallar la matriz de las admitancias en cortocircuito de la red cuando se considera como bipuerta, siendo las puertas las indicadas en la figura (b).

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

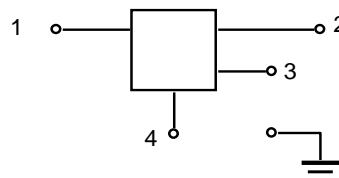


## Resolución

### Paso 1

Primero se debe hallar la matriz de *admitancia indefinida* de la red original:

$$[Y_{IND}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



### Paso 2

Supresión del terminal 3.

El terminal 3 pasa a ser un nodo interno de la red, es decir, la corriente del terminal 3 será nula, pudiendo despejarse la tensión  $U_3$  en función de las tensiones de los otros nodos y sustituir el resultado en las restantes ecuaciones, quedando entonces  $n-1$  ecuaciones.

Es decir la *MAI* resultante será:

$$MAI = [Y_{aa}] - [Y_{ab}] \cdot [Y_{bb}]^{-1} \cdot [Y_{ba}]$$

En este caso:

$$[Y_{aa}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad [Y_{ab}] = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [Y_{ba}] = [-2 \quad -1 \quad -1] \quad [Y_{bb}] = [4]$$

Operando:

$$[Y_{ab}] \cdot [Y_{bb}]^{-1} \cdot [Y_{ba}] = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \frac{1}{4} \right] \cdot [-2 \quad -1 \quad -1] = - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \frac{1}{4} \right] \cdot [-2 \quad -1 \quad -1] = - \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la *MAI* de la red resultante será:

$$[Y_{IND}] = [Y_{aa}] - [Y_{ab}] \cdot [Y_{bb}]^{-1} \cdot [Y_{ba}] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix}$$

### Paso 3

El capacitor de valor  $C=1$  entre los terminales 1 y 2 puede verse como:

Parámetros para  $U_1=0$

$$I_1 = \frac{-U_2}{\frac{1}{sC}} = -sC U_2 \quad \therefore \quad y_{12} = -sC$$

$$I_2 = \frac{U_2}{\frac{1}{sC}} = sC U_2 \quad \therefore \quad y_{22} = sC$$

Parámetros para  $U_2=0$

$$I_2 = \frac{-U_1}{\frac{1}{sC}} = -sC U_1 \quad \therefore \quad y_{21} = -sC$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\frac{1}{sC}} = sC U_1 \quad \therefore \quad y_{11} = sC$$

Para los datos de este ejercicio ( $C=1$  F):

$$y_{11} = s$$

$$y_{12} = -s$$

$$y_{21} = -s$$

$$y_{22} = s$$

Entonces, la matriz de admitancias indefinida del capacitor es:

$$[Y_{INDcapacitor}] = \begin{bmatrix} s & -s & 0 \\ -s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Paso 4

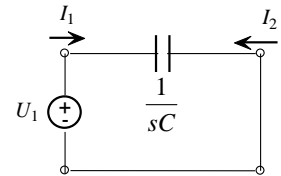
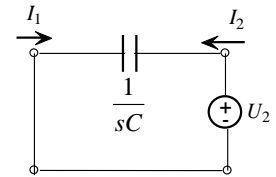
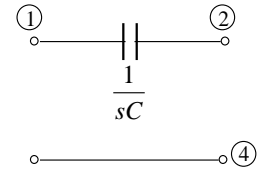
La matriz de admitancias indefinida al conectar el capacitor entre los terminales 1 y 2, resulta sumando las respectivas matrices de admitancias indefinidas:

$$[Y_{INDdespués}] = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -s & 0 \\ -s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & -s-\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -s-\frac{7}{2} & s+\frac{23}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{19}{4} \end{bmatrix}$$

### Paso 5

Finalmente la matriz de admitancias en cortocircuito para el Terminal 4 conectado como Terminal común resulta:

$$[Y_{CC4}] = \begin{bmatrix} s+4 & -s-\frac{3}{2} \\ -s-\frac{7}{2} & s+\frac{23}{4} \end{bmatrix}$$





## Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

### TP Nº 2. Transferencia de Potencia



**Sugerencia:** Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.

#### Ejercicio 1

Una instalación de 220 V y 50 Hz consume una potencia activa de 5,2 kW con factor de potencia de 0,8 y corriente *en atraso*. Calcular la capacidad necesaria a conectar en paralelo para obtener un factor de potencia de 0,95.

#### Resolución

La carga requiere una potencia de 5,2 kW y factor de potencia 0,8 con una tensión de 220 V, con lo cual la potencia reactiva puesta en juego resulta:

$$\cos(\varphi_1) = 0,8 \Rightarrow \varphi_1 = 36,87^\circ$$

$$\tan(\varphi_1) = \frac{Q_1}{P} \Rightarrow Q_1 = P \cdot \tan(\varphi_1) = 5,2 \cdot \tan(36,87^\circ) = 3,9 \text{ kvar}$$

Esta potencia reactiva es inductiva, dado que se especificó que la corriente está *en atraso*.

La potencia reactiva total necesaria para lograr el  $\cos\varphi_2 = 0,95$  en atraso deseado con la potencia activa de la carga resulta:

$$\cos(\varphi_2) = 0,95 \Rightarrow \varphi_2 = 18,19^\circ$$

$$\tan(\varphi_2) = \frac{Q_2}{P} \Rightarrow Q_2 = P \cdot \tan(\varphi_2) = 5,2 \cdot \tan(18,19^\circ) = 1,71 \text{ kvar}$$

Es decir, la potencia reactiva con la que se logra el factor de potencia requerido es menor que la correspondiente a la instalación original. Por lo tanto, para reducirla se debe suministrar una potencia reactiva capacitiva (que es de signo contrario) igual a la diferencia entre ambas potencias reactivas.

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3,9 - 1,71 = 2,19 \text{ kvar}$$

Por otra parte la potencia reactiva del capacitor de compensación sería:

$$Q_C = 2\pi f C U_C^2$$

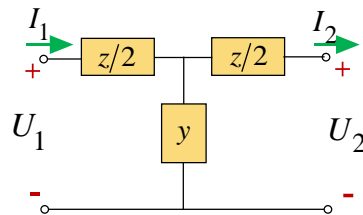
Con lo cual el valor de capacidad requerida para lograr la diferencia de potencia reactiva resulta:

$$C = \frac{Q_C}{2\pi f U_C^2} = \frac{2,19 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} = 144 \mu\text{F}$$

### Ejercicio 3

Sea una línea de 500 kV de longitud  $l=150$  km representada por un modelo T de parámetros concentrados por unidad de longitud de la línea como se indica en la figura. Los parámetros  $z$  e  $y$  del modelo se especifican por unidad de longitud, siendo  $z = 0,0165 + j 0,3306 \Omega/\text{km}$  e  $y = j 4,674 \times 10^{-6} \text{ S}/\text{km}$ . Dicha línea debe transmitir potencia para alimentar a una carga cuya condición de funcionamiento nominal está dada por 1000 MVA con una tensión de 500 kV y factor de potencia 0,9. Se requiere determinar:

- la tensión  $U_1$  y la corriente  $I_1$  que se debe aplicar a la entrada de la línea para garantizar el régimen nominal de la carga. *Sugerencia: resolver empleando parámetros de transmisión.*
- la potencia activa  $P_1$  y reactiva  $Q_1$  suministrada a la entrada de la línea.
- la eficiencia en la transferencia de potencia.



### Resolución

- El circuito equivalente considerando todos los elementos del modelo de la línea como *impedancias* se muestra en la figura (a), siendo:

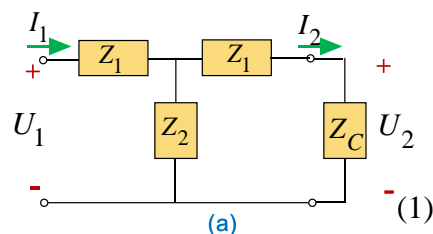
$$Z_1 = \frac{1}{2} z \cdot l = \frac{1}{2} (0,0165 + j0,3306) \cdot 150 = 1,2375 + j24,795 = 24,826 \cdot e^{j87,14^\circ}$$

$$Z_2 = \frac{1}{y \cdot l} = \frac{1}{j 4,674 \cdot 10^{-6} \cdot 150} = -j1426,33 = 1426,33 \cdot e^{-j90^\circ}$$

Si se emplean las ecuaciones basadas en los parámetros de transmisión para el cuadripolo de la figura (a):

$$U_1 = A U_2 + B I_2$$

$$I_1 = C U_2 + D I_2$$



Resulta fácil definir la secuencia de pasos necesarios para poder determinar  $U_1$  e  $I_1$ :

- calcular los valores de los parámetros  $A, B, C, D$ .
- determinar los valores  $U_2$  e  $I_2$  para el régimen nominal de la carga.
- con los valores obtenidos en (I) y (II) en las expresiones (1) se determinan  $U_1$  e  $I_1$ .

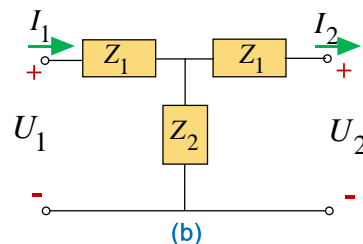
Procediendo entonces de este modo:

- Los parámetros de la matriz T para el cuadripolo de la figura (b) resultan:

Parámetros para  $I_2=0$

$$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad A = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad C = \frac{1}{Z_2}$$



Parámetros para  $U_2=0$

$$B = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \quad I_2 = U_1 \frac{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}}{Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = U_1 \frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}$$

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \quad D = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$B = Z_1 \left( 2 + \frac{Z_1}{Z_2} \right)$$

Teniendo en cuenta los valores calculados de  $Z_1$  y  $Z_2$ , los parámetros de la matriz T resultan:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{24,826 \cdot e^{j87,14^\circ}}{1426,33 \cdot e^{-j90^\circ}} = 0,98261 + j0,000867 = 0,98261 \cdot e^{j0,05^\circ}$$

$$B = Z_1 \left( 2 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) = 24,826 \cdot e^{j87,14^\circ} \left( 2 + \frac{24,826 \cdot e^{j87,14^\circ}}{1426,33 \cdot e^{-j90^\circ}} \right) = 2,475 + j49,59 = 49,65 \cdot e^{j87,14^\circ}$$

$$C = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1426,33 \cdot e^{-j90^\circ}} = 0,000695 \cdot e^{j90^\circ}$$

$$D = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{24,826 \cdot e^{j87,14^\circ}}{1426,33 \cdot e^{-j90^\circ}} = 0,98261 + j0,000867 = 0,98261 \cdot e^{j0,05^\circ}$$

- II. La carga requiere una potencia de 1000 MVA y factor de potencia 0,9 con una tensión de 500 kV, con lo cual las potencias activa y reactiva puestas en juego resultan:

$$\cos(\varphi_2) = 0,9 \Rightarrow \varphi_2 = 25,842^\circ$$

$$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = |\mathbf{S}_2| \cos \varphi + j |\mathbf{S}_2| \sin \varphi = 1000 \cdot 0,9 + j1000 \cdot 0,4358 = (900 + j435,8) \cdot 10^6$$

$$P_2 = 900 \text{ MW}$$

$$Q_2 = 435,8 \text{ Mvar}$$

Por lo tanto, la corriente en la carga puede calcularse como:

$$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{I}_2^*$$

Como la referencia de fase para medir el ángulo  $\varphi_{2c}$  es  $\mathbf{U}_2$ , entonces  $\mathbf{U}_2 = U_2 \cdot e^{j0} = U_2$ , resultando:

$$\mathbf{I}_2^* = \frac{P_2 + jQ_2}{U_2} = \frac{(900 + j435,8) \cdot 10^6}{500 \cdot 10^3} = 2000 e^{j25,842^\circ} \text{ A}$$

Por lo tanto la corriente en la carga en régimen nominal resulta:

$$\mathbf{I}_2 = 2000 e^{-j25,842^\circ} \text{ A}$$

- III. Reemplazando en las expresiones (1) los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  determinados en I) y el valor de  $I_2$  calculado en II) se obtiene:

$$U_1 = A U_2 + B I_2 = 0,98261 \cdot e^{j0,05^\circ} \cdot 500 \cdot 10^3 + 49,65 \cdot e^{j87,14^\circ} \cdot 2000 e^{-j25,842^\circ} = 545 \cdot 10^3 \cdot e^{j9,16^\circ}$$

$$I_1 = C U_2 + D I_2 = 0,000695 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 500 \cdot 10^3 + 0,98261 \cdot e^{j0,05^\circ} \cdot 2000 e^{-j25,842^\circ} = 1,84 \cdot 10^3 \cdot e^{j-15,9^\circ}$$

- b) La potencia aparente en la entrada de la línea resulta:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{I}_1^* = 545 \cdot 10^3 \cdot e^{j9,16^\circ} \cdot 1,84 \cdot 10^3 \cdot e^{j15,9^\circ} = 1002,8 \cdot e^{j25,06^\circ}$$

Por lo tanto, se pueden determinar las potencias activa y reactiva en la entrada de la línea como:

$$P_1 = 1002,8 \cdot \cos(25,06^\circ) = 908,4 \text{ MW}$$

$$Q_1 = 1002,8 \cdot \sin(25,06^\circ) = 424,75 \text{ Mvar}$$

- c) La eficiencia de la transmisión de potencia se calcula como:

$$\eta_T = 100 \cdot \frac{P_2}{P_1} = 100 \cdot \frac{900}{908,4} = 99,08\%$$



## Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

### TP Nº 3. Síntesis de Dipolos



**Sugerencia:** Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.

#### Ejercicio 1

Sintetizar por Foster 1, Foster 2, Cauer 1 y Cauer 2 las siguientes funciones de punto impulsor, verificando previamente si las mismas son realizables.

$$\text{a) } Y(s) = \frac{3s^4 + 15s^2 + 12}{s^3 + 2s}$$

$$\text{c) } Y(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{2s^5 + 16s^3 + 24s}$$

$$\text{b) } Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}$$

$$\text{d) } Z(s) = \frac{s(s^2 + 6)(s^2 + 12)}{(s^2 + 3)(s^2 + 9)}$$

#### Resolución:

$$\text{1 - b) } Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}$$

#### Realizabilidad:

Se trata de un dipolo LC porque:

- Es una función real positiva impar: es una función racional, impar en  $s$ , con coeficientes reales y positivos.
- Los polinomios del numerador y denominador son completos.
- Los grados del numerador y denominador difieren en 1.
- Un cero simple en el origen.
- Un cero simple en infinito.
- Polos y ceros imaginarios, conjugados y simples.
- Los polos y ceros se encuentran alternados sobre el eje  $j\omega$  (Teorema de Foster).

#### Número de elementos de las realizaciones canónicas:

- Grado de  $z(s)$  (la mayor potencia de  $s$ , ya sea en el numerador o en el denominador): **4**
- 1 + Número de frecuencias de singularidades finitas, excluido el origen:  $1 + 3 = \mathbf{4}$
- Número de ceros simples, incluido el eventual en  $\odot$ :  $s=0$ ;  $s=+j2$ ;  $s=-j2$ ;  $s=\odot$ . **4**
- Número de polos simples, incluido el eventual en  $\odot$ :  $s=+j\sqrt{2}$ ;  $s=-j\sqrt{2}$ ;  $s=+j3$ ;  $s=-j3$ . **4**

Es decir que el circuito tendrá **4 variables de estado** y tendrá **4 condiciones iniciales independientes**.

#### Primera forma canónica: Foster I

Como Foster I es para sintetizar impedancias, directamente se trabaja sobre la expresión dada para  $z(s)$ . El desarrollo de Foster para impedancias LC resulta:

$$z(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

siendo  $k_0$ ,  $k_{\lambda}$  y  $k_{\infty}$  los residuos de  $z(s)$  en los polos en el origen, en las frecuencias finitas  $\omega_{\lambda}$ , y en infinito.

- Polo en el origen  $s=0$  no existe ( $k_0=0$ )
- Polo en infinito no existe ( $k_{\infty}=0$ )

Ya se puede adelantar la topología que tendrá el dipolo, al no tener polos en cero ni en infinito, y con los 2 pares de polos conjugados de frecuencias finitas. Relacionarlo con el número de elementos.

- En el polo en  $s=\pm j\sqrt{2}$

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \frac{(s^2 + 2)}{2s} z(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \frac{(s^2 + 2)}{2s} \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 2)(s^2 + 9)} = \frac{1}{7}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

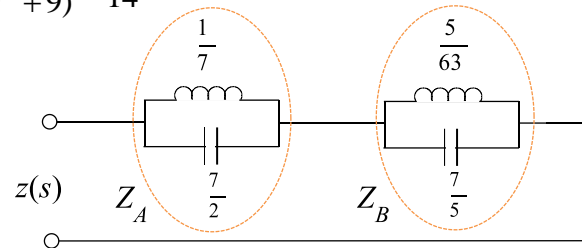
$$Z_A = \frac{2k_1 s}{s^2 + 2} = \frac{2 \frac{1}{7} s}{s^2 + 2} = \frac{1}{\frac{7}{2}s + \frac{1}{7}s}$$

- En el polo en  $s=\pm j3$

$$k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \frac{(s^2 + 9)}{2s} z(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \frac{(s^2 + 9)}{2s} \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 2)(s^2 + 9)} = \frac{5}{14}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Z_B = \frac{2k_2 s}{s^2 + 9} = \frac{2 \frac{5}{14} s}{s^2 + 9} = \frac{1}{\frac{7}{5}s + \frac{5}{63}s}$$



**Figura 1.**

Con lo cual, el circuito final resultante es el indicado en la Figura 1.

### **Segunda forma canónica: Foster II**

Como Foster II es para sintetizar admitancias, hay que obtener  $y(s)$  a partir de la expresión dada para  $z(s)$ . El desarrollo de Foster para admitancias LC resulta:

$$y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

siendo  $k_0$ ,  $k_{\lambda}$  y  $k_{\infty}$  los residuos de  $y(s)$  en los polos en el origen, en las frecuencias finitas  $\omega_{\lambda}$ , y en infinito. En este caso resulta:

$$y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}$$

Ya se puede adelantar la topología que tendrá el dipolo, al tener polos en cero y en infinito, y con 1 par de polos conjugados de frecuencias finitas. Relacionarlo con el número de elementos.

- Residuo en el polo en el origen:

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{9}{2}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_A = \frac{k_0}{s} = \frac{\frac{9}{2}}{s} = \frac{1}{\frac{2}{9}s}$$

- Residuo en el polo en infinito:

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = 1$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_B = k_{\infty} s = 1s$$

- En el polo en  $s = \pm j2$

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \frac{(s^2 + 4)}{2s} y(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \frac{(s^2 + 4)}{2s} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{(-2) 5}{2(-4)} = \frac{5}{4}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_C = \frac{2k_1 s}{s^2 + 4} = \frac{2 \frac{5}{4} s}{s^2 + 4} = \frac{1}{\frac{2}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{8}s}}$$

Con lo cual, el circuito final resultante es el indicado en la Figura 2.

### **Tercera forma canónica: Cauer I**

Hay que sintetizar  $z(s)$  o  $y(s)$ , según cuál tenga un polo en infinito.

En este caso  $z(s)$  tiene un cero en infinito, y por lo tanto  $y(s)$  tendrá un polo.

$$y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}$$

Ahora como  $y(s)$  tiene un polo en infinito, el desarrollo en fracciones parciales de Foster:

$$y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

puede describirse convenientemente:

$$y(s) = y_1(s) + k_{\infty(1)}s$$

Es decir que si a  $y(s)$  se le remueve el polo en infinito se obtiene  $y_1(s)$ , la cual tendrá un cero en infinito:

$$y_1(s) = y(s) - k_{\infty(1)}s$$

Entonces su inversa  $z_1(s)$  tendrá un polo en infinito, y otra vez, agrupando convenientemente los términos del desarrollo de Foster se puede escribir:

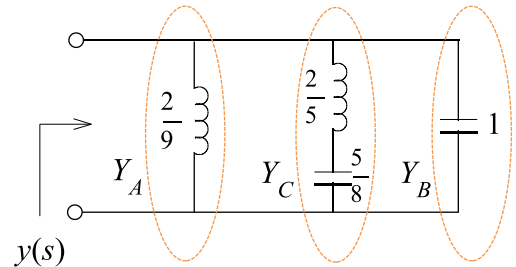
$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = z_2(s) + k_{\infty(2)}s$$

Es decir que si a  $z_1(s)$  se le remueve el polo en infinito se obtiene  $z_2(s)$ , la cual tendrá un cero en infinito:

$$z_2(s) = z_1(s) - k_{\infty(2)}s$$

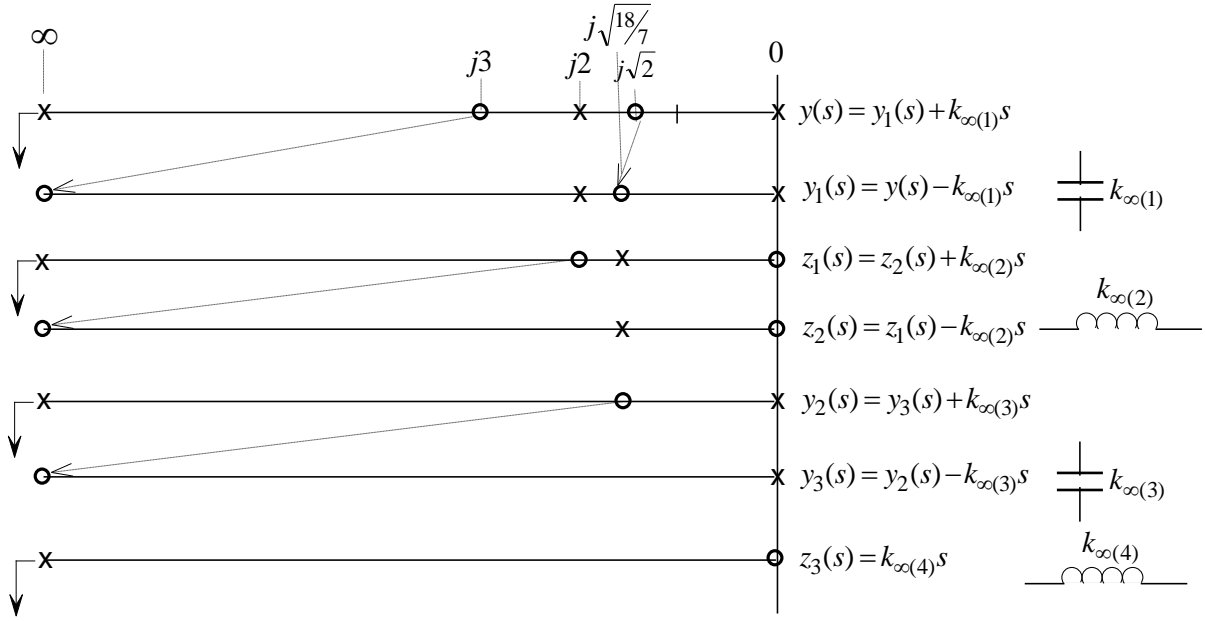
Entonces su inversa  $y_2(s)$  tendrá un polo en infinito, y otra vez se repite el ciclo de remoción en infinito, hasta llegar a un elemento simple de la forma  $k s$  o  $k/s$ .

Este proceso se ilustra en la Figura 3.



**Figura 2.**





**Figura 3**

$$y(s) = y_1(s) + k_{\infty(1)}s$$

$$k_{\infty(1)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = 1$$

$$y_1(s) = y(s) - k_{\infty(1)}s = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} - s = \frac{7\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}{s(s^2 + 4)}$$

$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = \frac{s(s^2 + 4)}{7\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}$$

$$z_1(s) = z_2(s) + k_{\infty(2)}s$$

$$k_{\infty(2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} z_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s(s^2 + 4)}{7\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)} = \frac{1}{7}$$

$$z_2(s) = z_1(s) - k_{\infty(2)}s = \frac{s(s^2 + 4)}{7\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)} - \frac{1}{7}s = \frac{10s}{49\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}$$

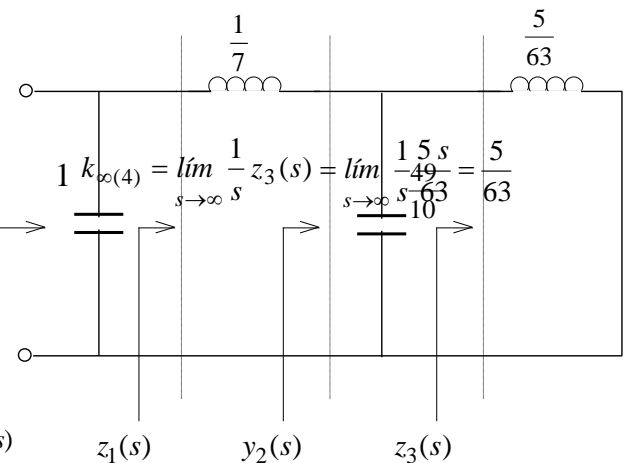
$$y_2(s) = \frac{1}{z_2(s)} = \frac{49\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}{10s}$$

$$y_2(s) = y_3(s) + k_{\infty(3)}s$$

$$k_{\infty(3)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} y_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{49\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}{10s} = \frac{49}{10}$$

$$y_3(s) = y_2(s) - k_{\infty(3)}s = \frac{49\left(s^2 + \frac{18}{7}\right)}{10s} - \frac{49}{10}s = \frac{63}{5} \frac{1}{s}$$

$$z_3(s) = \frac{1}{y_3(s)} = k_{\infty(4)}s$$



**Figura 4**

El circuito resultante se indica en la Figura 4.

$$y(s) = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{s^4 + 11s^2 + 18}{s^3 + 4s}$$

Por división continua:

$$\begin{array}{r|l}
s^4 + 11s^2 + 18 & s^3 + 4s \\
\underline{-s^4 - 4s^2} & s \leftarrow \\
\hline
s^3 + 4s & 7s^2 + 18 \\
\underline{-s^3 + \frac{18}{7}s} & \frac{1}{7}s \leftarrow \\
\hline
7s^2 + 18 & \frac{10}{7}s \\
\underline{-7s^2} & \frac{49}{10}s \leftarrow \\
\hline
\frac{10}{7}s & 18 \\
\underline{-\frac{10}{7}s} & \frac{5}{63}s \leftarrow \\
\hline
0 & 
\end{array}$$

Pudiendo también escribirse:

$$y(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{7}s + \frac{1}{\frac{49}{10}s + \frac{1}{\frac{5}{63}s}}}$$

Se ha efectuado la síntesis removiendo los polos de  $y(s)$  en infinito. Se puede verificar que el circuito sintetizado también responde al comportamiento en el origen. Esto resulta del desarrollo de Foster para  $y(s)$ .

$$y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

Cuyo comportamiento en el origen está dado por:

$$y(s) = \frac{k_0}{s} = \frac{1}{\frac{1}{k_0}s}$$

Es decir  $y(s)$  se comporta como un inductor de valor  $L_{eq(especificado)} = 1/k_0$ .

$$\text{con } k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{9}{2}$$

Es decir

$$L_{eq(especificado)} = \frac{1}{9/2} = \frac{2}{9}$$

Del circuito sintetizado, se observa que cuando  $s=0$  prevalecen los dos inductores en serie, que dan lugar a una inductancia equivalente:

$$L_{eq(sintetizado)} = \frac{1}{7} + \frac{5}{63} = \frac{9+5}{63} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$$

#### **Cuarta forma canónica: Cauer II**

Hay que sintetizar  $z(s)$  o  $y(s)$ , según cuál tenga un polo en el origen.

En este caso  $z(s)$  tiene un cero en origen, y por lo tanto  $y(s)$  tendrá un polo.

$$y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}$$

Ahora como  $y(s)$  tiene un polo en el origen, el desarrollo en fracciones parciales de Foster:

$$y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

puede describirse convenientemente:

$$y(s) = y_1(s) + k_{0(1)} \frac{1}{s}$$

Es decir que si a  $y(s)$  se le remueve el polo en el origen se obtiene  $y_1(s)$ , la cual tendrá un cero en el origen:

$$y_1(s) = y(s) - k_{0(1)} \frac{1}{s}$$

Entonces su inversa  $z_1(s)$  tendrá un polo en el origen, y otra vez, agrupando convenientemente los términos del desarrollo de Foster se puede escribir:

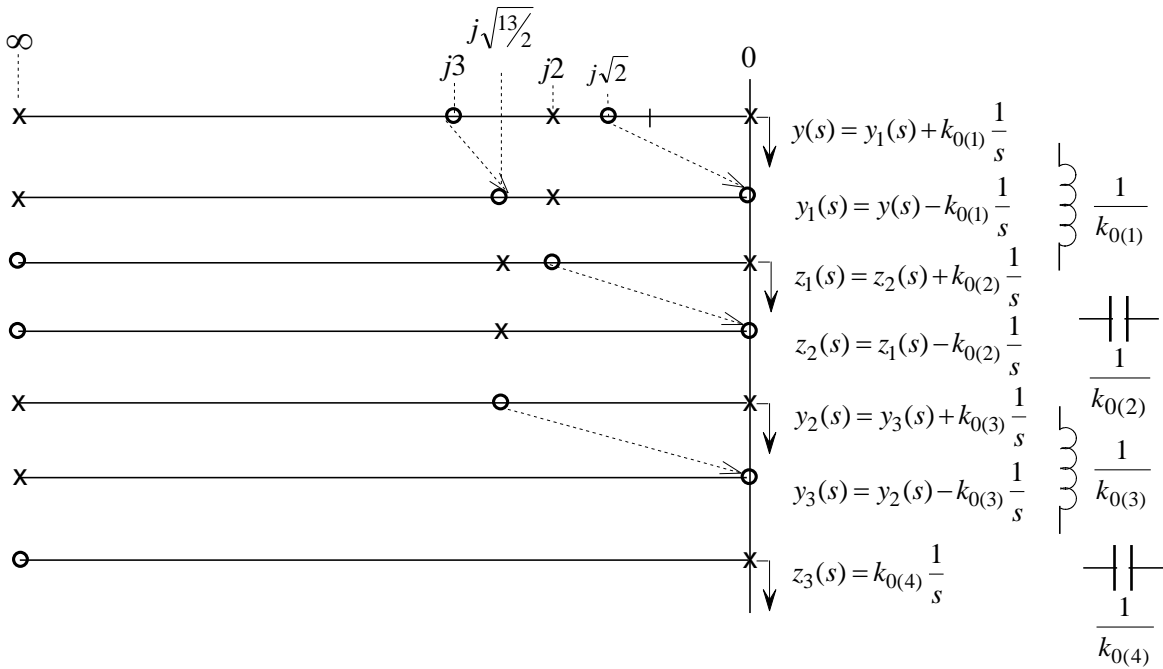
$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = z_2(s) + k_{0(2)} \frac{1}{s}$$

Es decir que si a  $z_1(s)$  se le remueve el polo en el origen se obtiene  $z_2(s)$ , la cual tendrá un cero en el origen:

$$z_2(s) = z_1(s) - k_{0(2)} \frac{1}{s}$$

Entonces su inversa  $y_2(s)$  tendrá un polo en el origen, y otra vez se repite el ciclo de remoción en el origen, hasta llegar a un elemento simple de la forma  $k s$  o  $k/s$ .

Este proceso se ilustra en la Figura 5.



**Figura 5**

$$y(s) = y_1(s) + k_{0(1)} \frac{1}{s}$$

$$k_{0(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{9}{2}$$

$$y_1(s) = y(s) - k_{0(1)} \frac{1}{s} = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} - \frac{9}{2s} = \frac{s \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}{(s^2 + 4)}$$

$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = \frac{(s^2 + 4)}{s \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}$$

$$z_1(s) = z_2(s) + k_{0(2)} \frac{1}{s}$$

$$k_{0(2)} = \lim_{s \rightarrow 0} s z_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 4)}{s \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)} = \frac{8}{13}$$

$$z_2(s) = z_1(s) - k_{0(2)} \frac{1}{s} = \frac{(s^2 + 4)}{s \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)} - \frac{8}{13s} = \frac{10s}{26 \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}$$

$$y_2(s) = \frac{1}{z_2(s)} = \frac{26 \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}{10s}$$

$$y_2(s) = y_3(s) + k_{0(3)} \frac{1}{s}$$

$$k_{0(3)} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{26 \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}{10 s} = \frac{169}{10}$$

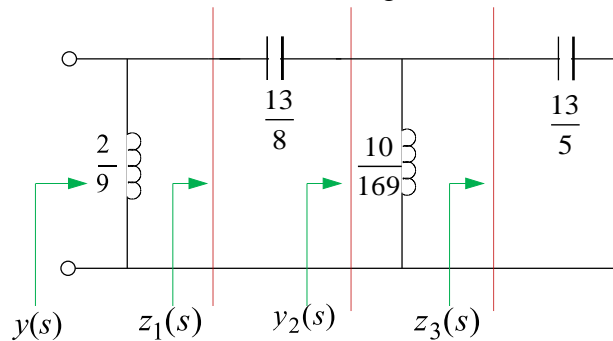
$$y_3(s) = y_2(s) - k_{0(3)} \frac{1}{s} = \frac{26 \left( s^2 + \frac{13}{2} \right)}{10 s} - \frac{169}{10} \frac{1}{s} = \frac{13}{5} s$$

$$z_3(s) = \frac{1}{y_3(s)} = \frac{5}{13 s}$$

$$z_3(s) = \frac{1}{y_3(s)} = k_{0(4)} \frac{1}{s}$$

$$k_{0(4)} = \lim_{s \rightarrow 0} s z_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{5}{13 s} = \frac{5}{13}$$

Es decir, el circuito resultante es el indicado en la Figura 6.



**Figura 6**

$$y(s) = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{s^4 + 11s^2 + 18}{s^3 + 4s} = \frac{1 + 11 \frac{1}{s^2} + 18 \frac{1}{s^4}}{\frac{1}{s} + 4 \frac{1}{s^3}}$$

Por división continua:

$$\begin{array}{r|l} 18 \frac{1}{s^4} + 11 \frac{1}{s^2} + 1 & 4 \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} \\ -18 \frac{1}{s^4} - \frac{9}{2} \frac{1}{s^2} & \hline & \frac{9}{2} \frac{1}{s} \leftarrow \\ \hline 4 \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} & \frac{13}{2} \frac{1}{s^2} + 1 \\ -4 \frac{1}{s^3} - \frac{8}{13} \frac{1}{s} & \hline & \frac{8}{13} \frac{1}{s} \leftarrow \\ \hline \frac{13}{2} \frac{1}{s^2} + 1 & \frac{5}{13} \frac{1}{s} \\ -\frac{13}{2} \frac{1}{s^2} & \hline & \frac{169}{10} \frac{1}{s} \leftarrow \\ \hline \frac{5}{13} \frac{1}{s} & \frac{1}{13 s} \\ -\frac{5}{13} \frac{1}{s} & \hline & \frac{13}{63} s \leftarrow \\ \hline 0 & \end{array}$$

Pudiendo también escribirse:

$$y(s) = \frac{9}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{8}{13} \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{169}{10} \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{5}{13} \frac{1}{s}}}}$$

Se ha efectuado la síntesis removiendo los polos de  $y(s)$  en cero. Se puede verificar que el circuito sintetizado también responde al comportamiento en infinito. Esto resulta del desarrollo de Foster para  $y(s)$ .

$$y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

Cuyo comportamiento en infinito está dado por:

$$y(s) = k_{\infty}s$$

Es decir  $y(s)$  se comporta como un capacitor de valor  $C_{eq(especificado)} = k_{\infty}$ .

$$\text{con } k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = 1$$

Es decir

$$C_{eq(especificado)} = 1$$

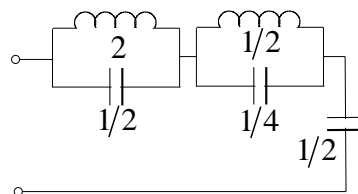
Del circuito sintetizado, se observa que cuando  $s \rightarrow \infty$  prevalecen los dos capacitores en serie, que dan lugar a una capacidad equivalente:

$$C_{eq(sintetizado)} = \frac{1}{\frac{8}{13} + \frac{5}{13}} = 1$$

### Ejercicio 3

Considere el circuito de la figura.

- Obtener dos circuitos distintos que tengan la misma admitancia de entrada  $Y(s)$ .
- Dibujar el circuito equivalente para frecuencias tendiendo a cero.
- Dibujar el circuito equivalente para frecuencias tendiendo a infinito.



### Resolución:

a)

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2s}} + \frac{1}{\frac{1}{4}s + \frac{2}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{2}s}} = \frac{s^5 + 9s^3 + 8s}{8s^4 + 38s^2 + 16} = \frac{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}$$

La topología dada corresponde a Foster I.

Por lo tanto otros dos circuitos con la misma admitancia  $Y(s)$  podrían obtenerse empleando otras dos formas canónicas:

### Segunda forma canónica: Foster II

Como Foster II es para sintetizar admitancias, se emplea directamente la función obtenida.

El desarrollo de Foster para admitancias LC resulta:

$$Y(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} + k_{\infty}s$$

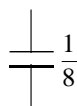
siendo  $k_0$ ,  $k_{\lambda}$  y  $k_{\infty}$  los residuos de  $y(s)$  en los polos en el origen, en las frecuencias finitas  $\omega_{\lambda}$ , y en infinito. En este caso resulta:

- Residuo en el polo en infinito:

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s^5 + 9s^3 + 8s}{8s^4 + 38s^2 + 16} = \frac{1}{8}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_A = k_{\infty}s = \frac{1}{8}s$$

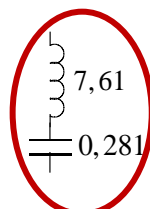


- En el polo en  $s = \pm j\sqrt{0,467}$

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -0,467} \frac{(s^2 + 0,467)}{2s} Y(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -0,467} \frac{(s^2 + 0,467)}{2s} \frac{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)} = \frac{0,533 \cdot 7,533}{2 \cdot 8 \cdot 3,816} = 65,7 \cdot 10^{-3}$$

La realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_B = \frac{2k_1s}{s^2 + 0,467} = \frac{2 \cdot 65,7 \cdot 10^{-3} \cdot s}{s^2 + 0,467} = \frac{1}{7,61s + \frac{1}{0,281s}}$$

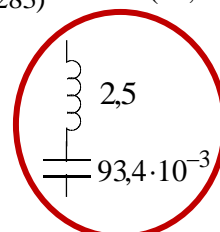


- En el polo en  $s = \pm j\sqrt{4,283}$

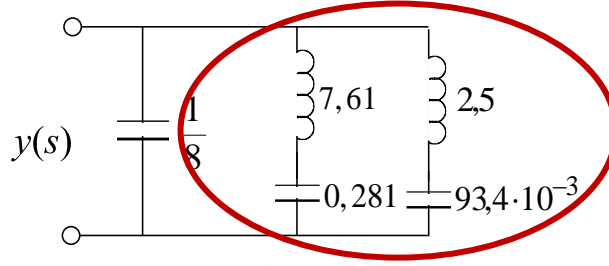
$$k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -4,283} \frac{(s^2 + 4,283)}{2s} Y(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -4,283} \frac{(s^2 + 4,283)}{2s} \frac{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)} = \frac{(-3,283)(3,717)}{2 \cdot 8 \cdot (-3,816)} = 0,2 \text{ La}$$

realización de esta singularidad corresponde a:

$$Y_B = \frac{2k_1s}{s^2 + 4,283} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot s}{s^2 + 4,283} = \frac{1}{2,5s + \frac{1}{93,4 \cdot 10^{-3}s}}$$



Con lo cual, el circuito final resultante es el indicado en la Figura 1.



**Figura 1.**

### **Tercera forma canónica: Cauer I**

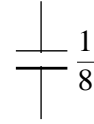
Cauer I es para sintetizar impedancias o admitancias, removiendo polos en infinito. Por lo tanto la síntesis debe comenzarse en la instancia que posea un polo en infinito.

En este caso, debe iniciarse como admitancia, ya que es  $Y(s)$  la que posee un polo en infinito:

$$Y(s) = \frac{s^5 + 9s^3 + 8s}{8s^4 + 38s^2 + 16}$$

$$Y(s) = y_1(s) + k_{\infty 1} = \frac{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}$$

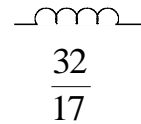
$$k_{\infty 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)} = \frac{1}{8}$$



$$y_1(s) = Y(s) - k_{\infty 1} s = \frac{s^5 + 9s^3 + 8s}{8s^4 + 38s^2 + 16} - \frac{1}{8} s = \frac{s^5 + 9s^3 + 8s - s^5 - 4,75s^3 - 2s}{8s^4 + 38s^2 + 16} = \frac{4,25s^3 + 6s}{8s^4 + 38s^2 + 16}$$

$$y_1(s) = \frac{\frac{17}{32} s (s^2 + 1,412)}{(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}$$

$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = \frac{\frac{32}{17} (s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s (s^2 + 1,412)} = z_2(s) + k_{\infty 2} s$$



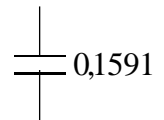
$$k_{\infty 2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} z_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{\frac{32}{17} (s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s (s^2 + 1,412)} = \frac{32}{17}$$

$$z_2(s) = z_1(s) - k_{\infty 2} s = \frac{\frac{32}{17} (s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s (s^2 + 1,412)} - \frac{32}{17} s = \frac{\frac{32}{17} s^4 + 8,9412s^2 + 3,765 - \frac{32}{17} s^4 - 2,658s^2}{s^3 + 1,412s}$$

$$z_2(s) = \frac{6,283s^2 + 3,765}{s^3 + 1,412s} = \frac{6,283 (s^2 + 0,6)}{s (s^2 + 1,412)}$$

$$y_2(s) = \frac{1}{z_2(s)} = \frac{s^3 + 1,412s}{6,283s^2 + 3,765} = \frac{0,1591 s (s^2 + 1,412)}{(s^2 + 0,6)} = y_3(s) + k_{\infty 3} s$$

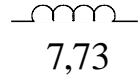
$$k_{\infty 3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} y_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{0,1591 s (s^2 + 1,412)}{(s^2 + 0,6)} = 0,1591$$



$$y_3(s) = y_2(s) - k_{\infty 3}s = \frac{s^3 + 1,412s}{6,285s^2 + 3,765} - 0,1591s = \frac{s^3 + 1,412s - s^3 - 0,6s}{6,285s^2 + 3,765} = \frac{0,813s}{6,285s^2 + 3,765} = \frac{0,1293s}{s^2 + 0,6}$$

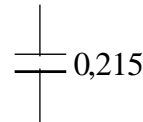
$$z_3(s) = \frac{1}{y_3(s)} = 7,73 \frac{(s^2 + 0,6)}{s} = z_3(s) + k_{\infty 4}s$$

$$k_{\infty 4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} z_3(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} 7,73 \frac{(s^2 + 0,6)}{s} = 7,73$$

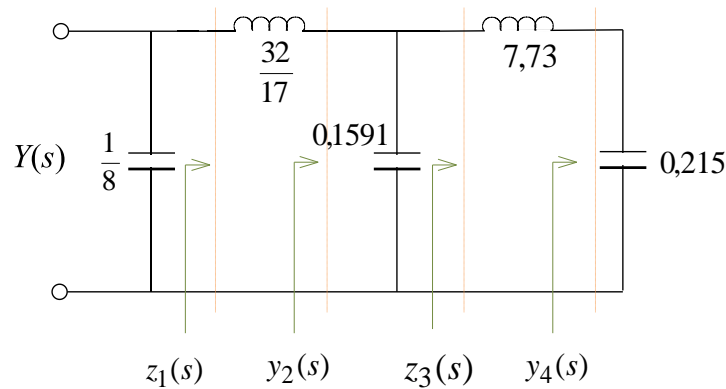


$$z_4(s) = z_3(s) - k_{\infty 4} = \frac{s^2 + 0,6}{0,1293s} - 7,73s = \frac{s^2 + 0,6 - s^2}{0,1293s} = \frac{0,6}{0,1293s} = \frac{4,64}{s}$$

$$y_4(s) = \frac{1}{z_4(s)} = 0,215s$$



Es decir, el circuito resultante es el indicado en la siguiente figura.



#### **Cuarta forma canónica: Cauer II**

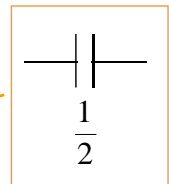
Cauer II es para sintetizar impedancias o admitancias, removiendo polos en el origen. Por lo tanto la síntesis debe comenzarse en la instancia que posea un polo en el origen.

En este caso, debe iniciarse como impedancia, ya que es  $Z(s)$  la que posee un polo en el origen:

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{8s^4 + 38s^2 + 16}{s^5 + 9s^3 + 8s} = \frac{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}$$

$$Z(s) = z_1(s) + \frac{k_0}{s} = \frac{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}$$

$$k_{01} = \lim_{s \rightarrow 0} s Z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{8(s^2 + 0,467)(s^2 + 4,283)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)} = 2$$



$$z_1(s) = Z(s) - \frac{k_0}{s} = \frac{8s^4 + 38s^2 + 16}{s^5 + 9s^3 + 8s} - \frac{2}{s} = \frac{8s^4 + 38s^2 + 16 - 2s^4 - 18s^2 - 16}{s^5 + 9s^3 + 8s} = \frac{6s^4 + 20s^2}{s^5 + 9s^3 + 8s} = \frac{6s^2(s^2 + \frac{10}{3})}{s(s^2 + 1)(s^2 + 8)}$$

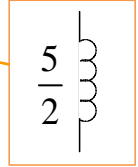
$$y_1(s) = \frac{1}{z_1(s)} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 8)}{6s(s^2 + \frac{10}{3})} = y_2(s) + \frac{k_{02}}{s}$$



$$k_{02} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2+1)(s^2+8)}{6s(s^2+\frac{10}{3})} = \frac{2}{5}$$

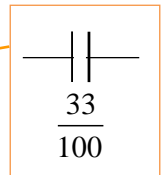
$$y_2(s) = y_1(s) - \frac{k_{02}}{s} = \frac{s^4+9s^2+8}{6s(s^2+\frac{10}{3})} - \frac{\frac{2}{5}}{s} = \frac{s^4+9s^2+\cancel{8}-\frac{12}{5}s^2-\cancel{8}}{6s(s^2+\frac{10}{3})} = \frac{s^2(s^2+\frac{33}{5})}{6s(s^2+\frac{10}{3})}$$

$$z_2(s) = \frac{1}{y_2(s)} = \frac{6(s^2+\frac{10}{3})}{s(s^2+\frac{33}{5})} = z_3(s) + \frac{k_{03}}{s}$$



$$k_{03} = \lim_{s \rightarrow 0} s z_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{6} \frac{(s^2+\frac{10}{3})}{\cancel{6}(s^2+\frac{33}{5})} = \frac{100}{33}$$

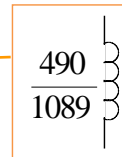
$$z_3(s) = z_2(s) - \frac{k_{03}}{s} = \frac{6s^2+20}{s(s^2+\frac{33}{5})} - \frac{\frac{100}{33}}{s} = \frac{6s^2+20-\frac{100}{33}s^2-20}{s(s^2+\frac{33}{5})} = \frac{\frac{98}{33}s^2}{s(s^2+\frac{33}{5})}$$



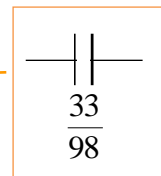
$$y_3(s) = \frac{1}{z_3(s)} = \frac{33}{98} \frac{s^2+\frac{33}{5}}{s} = y_4(s) + \frac{k_{04}}{s}$$

$$k_{04} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_4(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{33} \frac{s^2+\frac{33}{5}}{\cancel{33} \frac{1}{s}} = \frac{1089}{490}$$

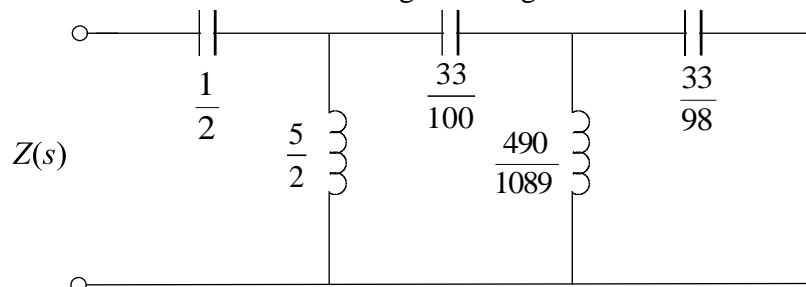
$$y_4(s) = y_3(s) - \frac{k_{04}}{s} = \frac{33}{98} \frac{s^2+\frac{33}{5}}{s} - \frac{\frac{1089}{490}}{s} = \frac{33}{98} s$$



$$z_4(s) = \frac{1}{y_4(s)} = \frac{1}{\frac{33}{98}s}$$



Es decir, el circuito resultante es el indicado en la siguiente figura.



## Ejercicio 7

El circuito de la figura fue sintetizado a partir de una función admitancia de entrada  $Y(s)$ .

- a) Indicar cuál de las siguientes funciones  $Y(s)$  se empleó para la síntesis. *Justificar ampliamente la respuesta.*

$$Y_a(s) = \frac{3s^3 + 18s}{s^4 + 20s^2 + 64}$$

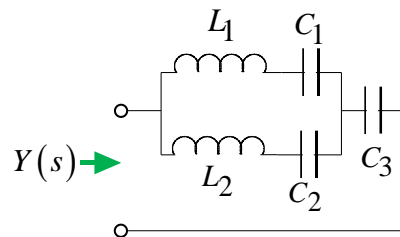
$$Y_b(s) = \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{3s^3 + 18s}$$

- b) A partir de la función  $Y(s)$  elegida, obtener los valores de los elementos del circuito  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $L_2$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .

- c) Comparar el comportamiento asintótico del circuito y de la función analítica elegida para *bajas frecuencias*.

- d) Comparar el comportamiento asintótico del circuito y de la función analítica elegida para *altas frecuencias*.

- e) Indicar y fundamentar, si es posible obtener otro circuito con la misma  $Y(s)$ , con menos elementos. En caso afirmativo, sintetizar alguno.



## Resolución

- a) El circuito no es canónico porque el número de elementos es 5 y el grado de la función  $Y(s)$  en ambos casos es 4.

Con cualquier método canónico se podrían determinar los valores de 4 componentes. Pero en este caso, por ser una red no canónica, será necesario encontrar algún criterio que aporte una ecuación más.

Primero es necesario definir con cuál de las dos expresiones dadas  $Y_a(s)$  o  $Y_b(s)$  se debe trabajar. Para ello, siempre resulta muy conveniente analizar los comportamientos asintóticos de las expresiones analíticas y del circuito.

Las redes asintóticas para  $s \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow \infty$  del circuito se muestran en la Figura 1.

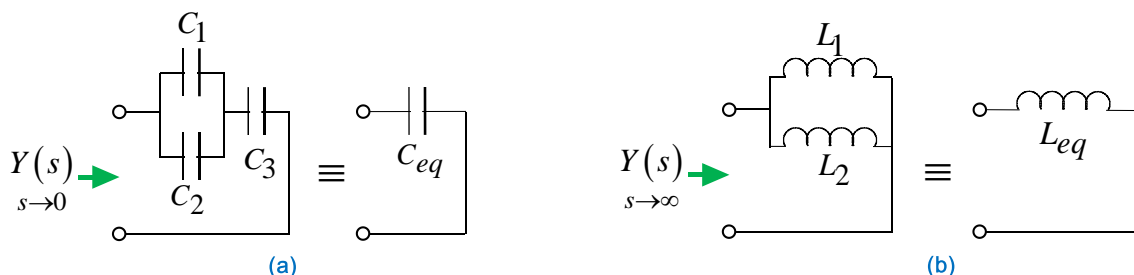


Figura 1

Es decir, el circuito tiene el siguiente comportamiento:

$$Y(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} C_{eq}s$$

$$Y(s) \underset{s \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{L_{eq}s}$$

Y de ambas expresiones dadas, la que tiene un comportamiento asintótico equivalente es  $Y_a(s)$ :

$$Y_a(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} \frac{18}{64} \cdot s = \frac{9}{32} \cdot s = 0,28125 \cdot s$$

$$Y_a(s) \underset{s \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\frac{1}{3}s}$$

Es decir que se debe trabajar con la expresión  $Y_a(s)$ .

$$Y_a(s) = \frac{3s^3 + 18s}{s^4 + 20s^2 + 64} = \frac{3s(s^2 + 6)}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)}$$

- b) Como el circuito no es canónico, el capacitor  $C_3$  puede sintetizarse efectuando una *remoción parcial* de un polo de impedancia en el origen.

$$Z_a(s) = \frac{1}{Y_a(s)} = Z_1(s) + \frac{k'_0}{s} \quad k'_0 < k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{3s^3 + 18s} = 3,556$$

Es decir, que se puede adoptar, por ejemplo,  $k'_0 = 3$  con lo cual resulta  $C_3 = 1/3$ .

La impedancia remanente resulta:

$$Z_1(s) = \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{3s^3 + 18s} - \frac{3}{s} = \frac{s^4 + 20s^2 + 64 - 9s^2 - 54}{3s^3 + 18s} = \frac{s^4 + 11s^2 + 10}{3s^3 + 18s} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 10)}{3s(s^2 + 6)}$$

Ahora hay que proseguir desarrollando con Foster II a  $Y_1(s) = 1/Z_1(s)$ :

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{3s(s^2 + 6)}{(s^2 + 1)(s^2 + 10)} = \frac{2k_1s}{s^2 + 1} + \frac{2k_2s}{s^2 + 10}$$

Siendo:

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \frac{s^2 + 1}{2s} \cdot \frac{3s(s^2 + 6)}{(s^2 + 1)(s^2 + 10)} = \frac{5}{6}$$

$$k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -10} \frac{s^2 + 10}{2s} \cdot \frac{3s(s^2 + 6)}{(s^2 + 1)(s^2 + 10)} = \frac{2}{3}$$

Estas remociones se realizan mediante las siguientes admitancias:

$$Y_I(s) = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}s}{s^2 + 1} = \frac{1}{\frac{3}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{3}s}}$$

$$Y_{II}(s) = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}s}{s^2 + 10} = \frac{1}{\frac{3}{4}s + \frac{1}{\frac{2}{15}s}}$$

Resultando los siguientes elementos de circuito:

$$C_1 = 5/3 \quad L_1 = 3/5 \quad C_2 = 2/15 \quad L_2 = 3/4 \quad C_3 = 1/3$$

**c)** El comportamiento asintótico del circuito sintetizado para  $s \rightarrow 0$  (Figura 1-a) resulta:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{3} + \frac{2}{15}} + 3} = \frac{1}{\frac{15}{27} + 3} = \frac{27}{96} = \frac{9}{32} = 0,28125$$

Que coincide con el comportamiento asintótico de  $Y_a(s)$ :

$$Y_a(s) = \frac{18}{64} \cdot s = \frac{9}{32} \cdot s = 0,28125 \cdot s$$

**d)** Por otra parte, el comportamiento asintótico del circuito sintetizado para  $s \rightarrow \infty$  (Figura 1-b) resulta:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{1}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,3333$$

Que también coincide con el comportamiento asintótico de  $Y_a(s)$ :

$$Y_a(s) = \frac{1}{\frac{1}{3}s}$$

**e)** Se observa que  $Y_a(s)$  no tiene polos en el origen ni en infinito, y por lo tanto el desarrollo de Foster resulta:

$$Y_a(s) = \frac{2k_1s}{s^2+2^2} + \frac{2k_2s}{s^2+4^2} = Y_1(s) + Y_2(s)$$

Siendo:

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \frac{(s^2+4)}{2s} Y_a(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \frac{(s^2+4)}{2s} \frac{3s(s^2+6)}{(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{1}{4}$$

$$k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -16} \frac{(s^2+16)}{2s} Y_a(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -16} \frac{(s^2+16)}{2s} \frac{3s(s^2+6)}{(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{-15}{-12} = \frac{5}{4}$$

Con lo cual:

$$Y_1(s) = \frac{2\frac{1}{4}s}{s^2+4} = \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{1}{8}s}} \quad Y_2(s) = \frac{2\frac{5}{4}s}{s^2+16} = \frac{1}{\frac{2}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{32}s}}$$

Resultando los siguientes elementos de circuito:

$$C_{1c} = 2 \quad L_{1c} = \frac{1}{8} \quad C_{2c} = \frac{2}{5} \quad L_{2c} = \frac{5}{32}$$

Y el circuito canónico resultante de la síntesis de  $Y_a(s)$  por Foster II es el que se muestra en la Figura 2.

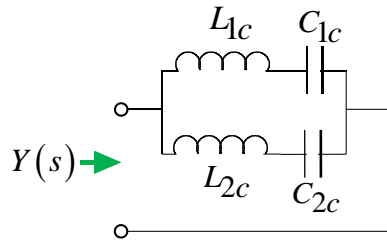


Figura 2

Y en este caso, los comportamientos asintóticos del circuito canónico están representados en la Figura 3.

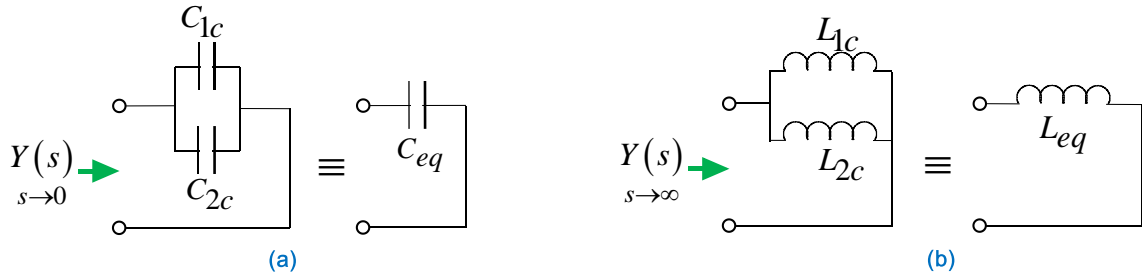


Figura 3



## Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

### TP N° 4. Síntesis de Cuadripolos



**Sugerencia:** Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.

#### Ejercicio 1

Sintetizar los cuadripolos  $LC$  que cumplan las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y_{11}(s) &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 6)}{2s(s^2 + 4)} & y_{12}(s) &= \frac{-3}{s(s^2 + 4)} \\ \text{b)} \quad z_{11}(s) &= \frac{s^3 + 16s}{2s^2 + 16} & z_{12}(s) &= \frac{8s}{2s^2 + 16} \\ \text{c)} \quad z_{11}(s) &= \frac{s(s^2 + \frac{3}{2})(s^2 + 3)}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)(s^2 + 4)} & z_{12}(s) &= \frac{s^3}{3(s^2 + 1)(s^2 + 2)} \\ \text{d)} \quad y_{21} &= \frac{-s^3}{s^2 + 3} & y_{22} &= \frac{s(s^2 + 5)}{s^2 + 3} \end{aligned}$$

#### Resolución:

$$\text{a)} \quad y_{11}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 6)}{2s(s^2 + 4)} \quad y_{12}(s) = \frac{-3}{s(s^2 + 4)}$$

#### Análisis de Realizabilidad

Los aspectos a tener en cuenta en el análisis de realizabilidad fueron enumerados con todo detalle en el Ejercicio 1-a).

La matriz de admitancias de cortocircuito especificada corresponde a un cuadripolo  $LC$ .

Se observa que  $y_{21}(s)$  posee un polo en  $s=0$  y un polo finito en  $s=\pm j2$ . Ambos polos son compartidos con la parte interior de  $y_{11}(s)$ . Además  $y_{21}(s)$  tiene un cero de orden 3 en  $\odot$ .

$y_{11}(s)$  posee el polo presenta un polo propio en  $\odot$ .

La especificación puede realizarse mediante un cuadripolo  $LC$  con tres ceros de transmisión: en  $\odot$ .

#### Desarrollo en fracciones parciales.

Tratándose de admitancias  $LC$ , el desarrollo en fracciones parciales (desarrollo de Foster 1) de  $y_{ii}(s)$  resulta:

$$y_{iiE}(s) = \frac{k_{0Ei}}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{2k_{jEi}s}{s^2 + s_j^2} + k_{\infty Ei}s$$

siendo  $k_{0E}$ ,  $k_{jE}$  y  $k_{\infty E}$  los residuos de  $y_{iiE}(s)$ . En todos los casos, el subíndice  $E$  indica *especificada*.

#### Residuos de $y_{11}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E11} = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_{11}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{(s^2+1)(s^2+6)}{2s(s^2+4)} \right) = \frac{3}{4}$$

- En el polo en  $s=\pm j2$

$$k_{aE11} = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \left[ \frac{s^2+4}{2s} y_{11}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \left( \frac{s^2+4}{2s} \frac{(s^2+1)(s^2+6)}{2s(s^2+4)} \right) = \frac{3}{8}$$

- En el polo propio en  $s=\infty$ .

$$k_{\infty E11} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} y_{11}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} \frac{(s^2+1)(s^2+6)}{2s(s^2+4)} \right) = \frac{1}{2}$$

### Residuos de $y_{21}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E21} = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_{21}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{-3}{s(s^2+4)} \right) = -\frac{3}{4}$$

- En el polo en  $s=\pm j2$

$$k_{aE21} = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \left[ \frac{s^2+4}{2s} y_{21}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -4} \left( \frac{s^2+4}{2s} \frac{-3}{s(s^2+4)} \right) = \frac{3}{8}$$

Por lo tanto, la especificación puede escribirse:

$$y_{11} = \frac{(s^2+1)(s^2+6)}{2s(s^2+4)} = \frac{\frac{3}{4}}{s} + \frac{2\frac{3}{8}s}{s^2+4} + \frac{1}{2}s$$

$$y_{21} = \frac{-3}{s(s^2+4)} = \frac{-\frac{3}{4}}{s} + \frac{2\frac{3}{8}s}{s^2+4}$$

### Síntesis de $y_{11}(s)$ generando los ceros de transmisión de $y_{21}(s)$

Primero debe obtenerse la parte interior de  $y_{11}(s)$ , removiéndole su polo propio en  $s=\infty$ . Es decir:

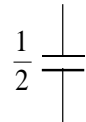
$$y_{11}(s) = y_{11INT}(s) + k_{\infty E11}s$$

Es decir:

$$y_{11INT}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+6)}{2s(s^2+4)} - \frac{1}{2}s = \frac{s^4+7s^2+6-s^4-4s^2}{2s(s^2+4)} = \frac{3(s^2+2)}{2s(s^2+4)}$$

La remoción del polo propio de  $y_{11}(s)$  da lugar a una admitancia constituida por:

$$Y_A(s) = \frac{1}{2}s$$



**IMPORTANTE:** Esta remoción no genera un cero de transmisión en infinito.

Por otra parte se observa que será necesario generar tres ceros de transmisión en infinito.

En la Figura 1 se detallan los pasos a seguir, y en la Figura 2 se muestra la correspondencia con el circuito sintetizado.

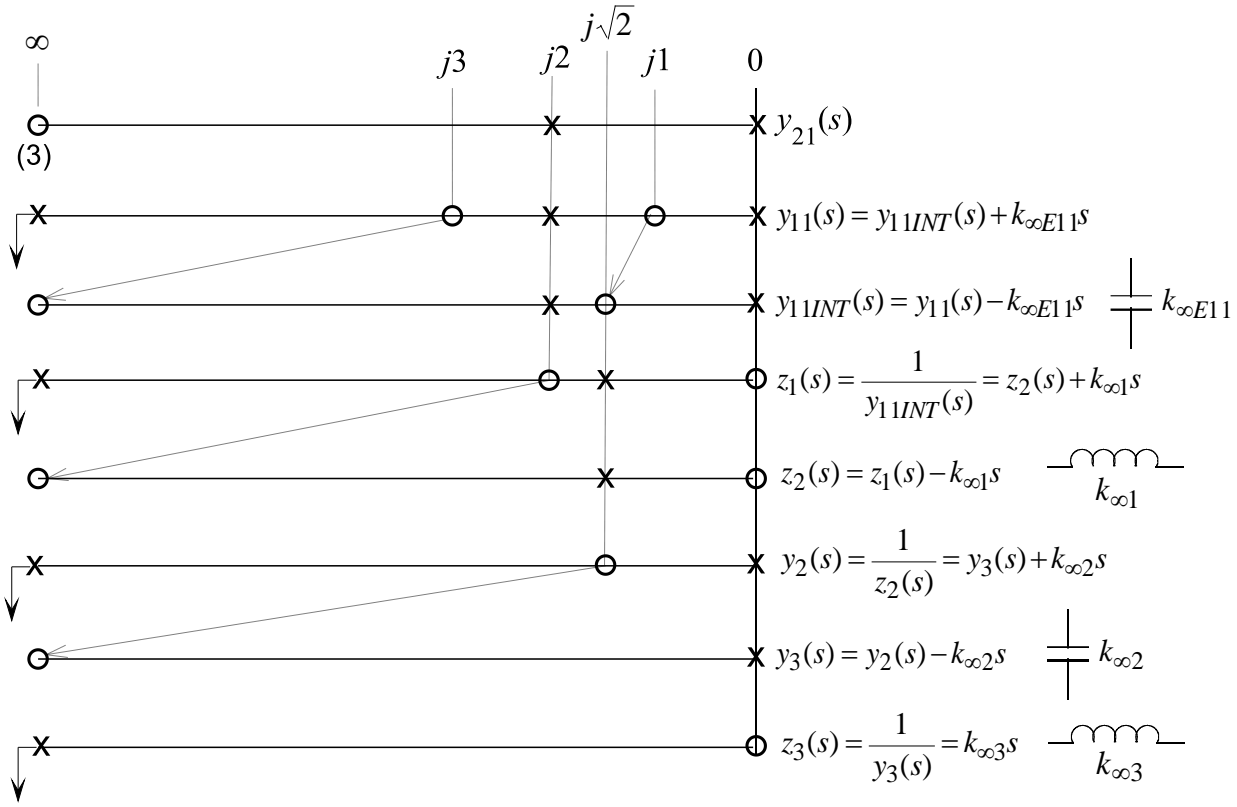


Figura 1

1

$$z_1(s) = \frac{1}{y_{11INT}(s)} = \frac{2s(s^2 + 4)}{3(s^2 + 2)} = z_2(s) + k_{\infty 1}s$$

$$k_{\infty 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} z_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{2s(s^2 + 4)}{3(s^2 + 2)} = \frac{2}{3}$$

$$z_2(s) = z_1(s) + k_{\infty 1}s = \frac{2s(s^2 + 4)}{3(s^2 + 2)} - \frac{2}{3}s = \frac{2s^3 + 8s - 2s^3 - 4s}{3(s^2 + 2)} = \frac{4s}{3(s^2 + 2)}$$

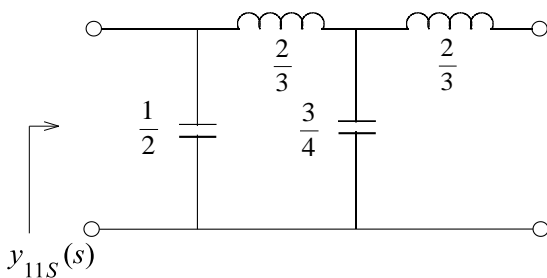
$$y_2(s) = \frac{1}{z_2(s)} = \frac{s^2 + 2}{2s} = y_3(s) + k_{\infty 2}s$$

$$k_{\infty 2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} y_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{3(s^2 + 2)}{4s} = \frac{3}{4}$$

$$y_3(s) = y_2(s) - k_{\infty 2}s = \frac{3(s^2 + 2)}{4s} - \frac{3}{4}s = \frac{3}{2s}$$

$$z_3(s) = \frac{1}{y_3(s)} = \frac{2}{3}s$$

El cuadripolo resultante se muestra en la Figura 2.



**IMPORTANTE:** Observar que la parte interior de  $y_{11}(s)$  debe empezar y terminar en serie, porque como los parámetros y se definen en cortocircuito, todos los elementos en derivación en uno de los extremos no formarán parte de la impedancia terminal vista desde el extremo opuesto.

Figura 2

$$y_{11S}(s) = \frac{I'_1}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{1}{2} s + \frac{1}{\frac{2}{3} s + \frac{1}{\frac{3}{4} s + \frac{3}{2s}}} = \frac{s^4 + 7s^2 + 6}{2s^3 + 8s} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 6)}{2s(s^2 + 4)}$$

### Verificación y eventual compensación del factor de escala de $y_{21}(s)$

En principio, se postula disponer un transformador ideal en el otro extremo del cuadripolo (el opuesto a la inmitancia terminal que se está sintetizando, que en este caso es  $y_{11S}$ ), tal como se indica en la Figura 3. Claramente, la inclusión del transformador en el extremo opuesto a  $y_{11S}$  no la afecta, por ser:

$$I_1 = I'_1 \quad U_1 = U'_1$$

Por lo tanto:

$$y_{11S}(s) = \frac{I'_1}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = y_{11E}(s)$$

A partir de las expresiones del transformador ideal indicado en la Figura 3 puede establecerse que:

$$I_2 = n I'_2 \quad U_2 = \frac{1}{n} U'_2$$

Por consiguiente:

$$y_{21S}(s) = \frac{I'_2}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{I_2}{n U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{n} y_{21E}(s)$$

Resultando:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)}$$

En la Figura 4 se muestra el circuito para determinar, aplicando su definición,  $y_{21S}(s)$ .

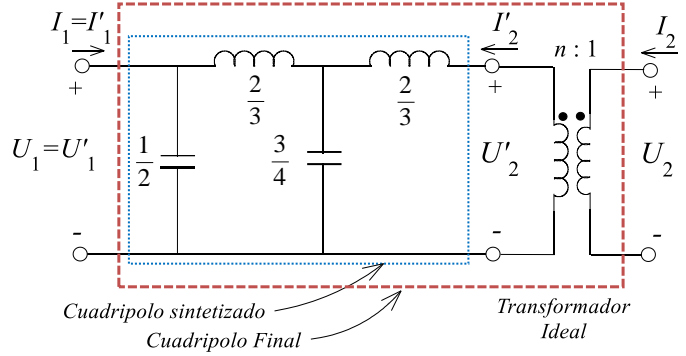


Figura 3

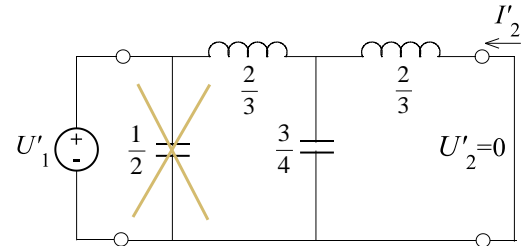


Figura 4

**IMPORTANTE:** Observar que de acuerdo a la definición de los parámetros admitancia de cortocircuito, el capacitor que realiza el polo particular de  $y_{11S}(s)$ , no interviene en la determinación de  $y_{21S}(s)$ .

$$y_{21S}(s) = \frac{I'_2}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = -\frac{1}{\frac{2}{3} s + \frac{1}{\frac{3}{4} s + \frac{3}{2s}}} \frac{1}{\frac{3}{4} s + \frac{3}{2s}} \frac{3}{2s} = \frac{-3}{s^3 + 2s + 2s} = \frac{-3}{s(s^2 + 4)}$$

Mientras que  $y_{21E}(s)$  debe resultar:

$$y_{21E}(s) = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{-3}{s(s^2 + 4)}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria (Figura 3) será:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{\frac{-3}{s(s^2 + 4)}}{\frac{-3}{s(s^2 + 4)}} = 1$$

Con lo cual no se requiere transformador.

### Red asintótica para $s \rightarrow 0$

En la Figura 5 se muestra la red asintótica para  $s \rightarrow 0$  para determinar  $y_{21S}(s)$ , resultando:

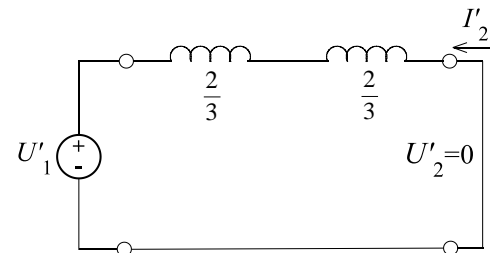


Figura 5



$$y_{21S}(s) = \frac{I_2}{U_1} \bigg|_{U_2=0} = -\frac{1}{\frac{2}{3}s + \frac{2}{3}s} = -\frac{1}{\frac{4}{3}s} = -\frac{3}{4s}$$

Mientras que  $y_{21E}(s)$ :

$$y_{21E}(s) = \frac{I_2}{U_1} \bigg|_{U_2=0} = \frac{-3}{s(s^2 + 4)}$$

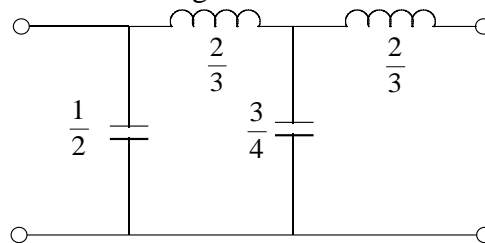
cuando  $s \rightarrow 0$  se comporta como:

$$y_{12E}(s) = -\frac{3}{4s}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria (Figura 3) será:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{-\frac{3}{4s}}{-\frac{3}{4s}} = 1$$

El circuito resultante final es el indicado en la Figura 6.



**Figura 6**

$$b) \quad z_{11}(s) = \frac{s^3 + 16s}{2s^2 + 16}$$

$$z_{12}(s) = \frac{8s}{2s^2 + 16}$$

### **Análisis de Realizabilidad**

Los aspectos a tener en cuenta en el análisis de realizabilidad fueron enumerados con todo detalle en el Ejercicio 1-a).

La matriz de impedancias de circuito abierto especificada corresponde a un cuadripolo  $LC$ .

Se observa que  $z_{12}(s)$  posee un polo finito en  $s = \pm j\sqrt{8}$  que es compartido con  $z_{11}(s)$ .

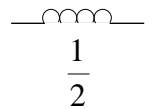
Por otra parte  $z_{11}(s)$  posee un polo particular en  $\infty$ .

La especificación puede realizarse mediante un cuadripolo  $LC$  con un cero de transmisión en el origen y uno en infinito.

### **Síntesis de $z_{11}(s)$ generando los ceros de transmisión de $z_{12}(s)$**

Como  $z_{11}(s)$  posee un polo propio, es la primera remoción que hay que realizar, para obtener la parte interior. Es decir:

$$z_{11INT}(s) = z_{11}(s) - \frac{1}{2}s = \frac{4s}{s^2 + 8}$$



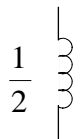
Lo cual corresponde a un inductor de valor  $\frac{1}{2}$  en serie.

**IMPORTANTE:** Esta remoción no genera un cero de transmisión en infinito.

Ahora se debe proceder a generar un cero de transmisión en el origen y uno en infinito.

El cero en el origen resulta removiendo un polo en el origen, en la inversa de  $z_{11INT}(s)$ .

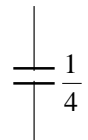
$$y_{11(1)}(s) = \frac{1}{z_{11INT}(s)} = \frac{s^2 + 8}{4s} = y_2(s) + \frac{k_{0(1)}}{s}$$



$$k_{0(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} s y_{11(1)}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 8}{4s} = 2$$

Remoción que corresponde a un inductor de valor  $\frac{1}{2}$  en derivación.

$$y_{11(2)}(s) = y_{11(1)}(s) - \frac{k_{0(1)}}{s} = \frac{s^2 + 8}{4s} - \frac{2}{s} = \frac{1}{4}s$$



Para realizar el cero de transmisión en infinito, se debe remover un polo en infinito, y en este caso es una admitancia de valor  $\frac{1}{4}s$ . Esto corresponde a un capacitor de valor  $\frac{1}{4}$  en derivación.

El cuadripolo hasta aquí resultante se muestra en la Figura 1.

### **Verificación de $z_{11}(s)$**

$$z_{11S}(s) = \frac{1}{\frac{1}{2s} + \frac{1}{\frac{1}{4}s + \frac{2}{s}}} = \frac{s^3 + 16s}{2s^2 + 16} = \frac{s(s^2 + 16)}{2(s^2 + 8)}$$

Que es idéntica a la  $z_{11}(s)$  especificada.

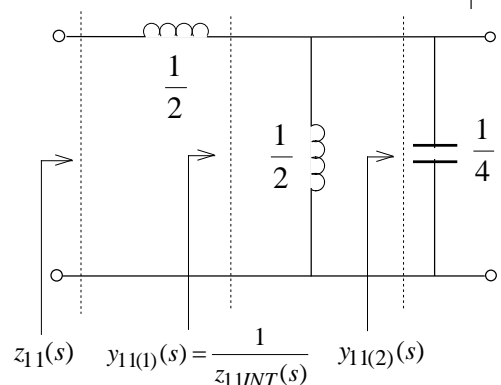
### **Verificación de $z_{12}(s)$ y de su factor de escala**

La red asintótica para bajas frecuencias resulta la indicada en Figura 2.

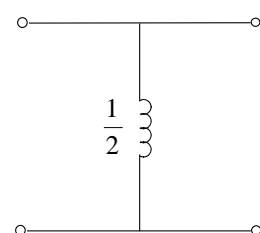
Entonces se deduce que  $z_{12S}(s)$  tiende a cero como:

$$z_{12S}(s) = \frac{1}{2}s$$

Por otra parte del parámetro  $z_{12}(s)$  especificado:



**Figura 1**



**Figura 2**

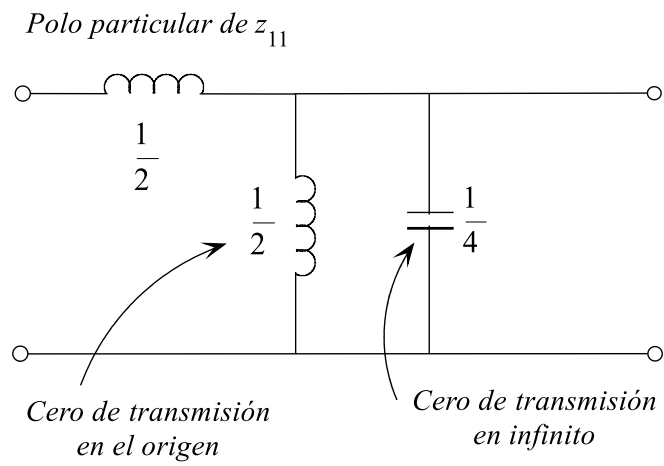
$$z_{12}(s) = \frac{4s}{s^2 + 8}$$

también resulta el mismo comportamiento, es decir tiende a cero como:

$$z_{12}(s) = \frac{1}{2}s$$

Por lo tanto no habrá que disponer transformador.

El cuadripolo sintetizado resultante se indica en la Figura 3.



**Figura 3**

## Ejercicio 2

Sintetizar los cuadripolos  $LC$  que cumplan las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad z_{21} &= \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} & z_{22} &= \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \\ \text{b)} \quad y_{11}(s) &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 9)} & y_{12}(s) &= \frac{-2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)} \\ \text{c)} \quad y_{11}(s) &= \frac{5(s^2 + \frac{9}{5})}{s(s^2 + 9)} & y_{12}(s) &= -\frac{(s^2 + 4)}{s(s^2 + 9)} \end{aligned}$$

## Resolución:

$$\text{a)} \quad z_{21} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \quad z_{22} = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

## Análisis de Realizabilidad

Los aspectos a tener en cuenta en el análisis de realizabilidad fueron enumerados con todo detalle en el Ejercicio 1-a).

La matriz de impedancias de circuito abierto especificada corresponde a un cuadripolo  $LC$ .

Se observa que  $z_{21}(s)$  posee un polo en el origen y un polo finito en  $s = \pm j\sqrt{2}$ . Ambos polos son compartidos con la parte interior de  $z_{22}(s)$ .

$z_{22}(s)$  posee los polos comunes en el origen y en  $s = \pm j\sqrt{2}$ , y no presenta polos propios.

La especificación puede realizarse mediante un cuadripolo  $LC$  con dos ceros de transmisión: uno en  $s = \pm j1$  y uno en  $\infty$ .

## Desarrollo en fracciones parciales.

Tratándose de impedancias  $LC$ , el desarrollo en fracciones parciales (desarrollo de Foster 1) de  $z_{ii}(s)$  resulta:

$$z_{iiE}(s) = \frac{k_{0Eii}}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{2k_{jEii}s}{s^2 + s_j^2} + k_{\infty Eii}s$$

siendo  $k_{0E}$ ,  $k_{jE}$  y  $k_{\infty E}$  los residuos de  $z_{iiE}(s)$ . En todos los casos, el subíndice  $E$  indica *especificada*.

## Residuos de $z_{22}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E22} = \lim_{s \rightarrow 0} s z_{22}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{2s^2 + 1}{s^2 + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

- En el polo en  $s = \pm j\sqrt{2}$

$$k_{aE22} = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \left[ \frac{s^2 + 2}{2s} z_{22}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \left( \frac{s^2 + 2}{2s} \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right) = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \left( \frac{2s^2 + 1}{2s^2} \right) = \frac{3}{4}$$

## Residuos de $z_{21}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E21} = \lim_{s \rightarrow 0} s z_{21}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

- En el polo en  $s = \pm j\sqrt{2}$

$$k_{aE21} = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \left[ \frac{(s^2 + 2)}{2s} z_{21}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -2} \left[ \frac{(s^2 + 2)}{2s} \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right] = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la especificación puede escribirse:

$$z_{21} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \frac{1}{2s} + \frac{2\frac{1}{4}s}{s^2 + 2}$$

$$z_{22} = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \frac{1}{2s} + \frac{2\frac{3}{4}s}{s^2 + 2}$$

### Síntesis de $z_{22}(s)$ generando los ceros de transmisión de $z_{21}(s)$

Dado que  $z_{22}(s)$  no posee polos propios, la parte interior coincide con  $z_{22}(s)$ .

Por otra parte se observa que será necesario generar un cero de transmisión en  $s = \pm j1$  y otro en infinito.

En la Figura 1 se detallan los pasos a seguir, y en la Figura 2 se muestra la correspondencia con el circuito sintetizado.

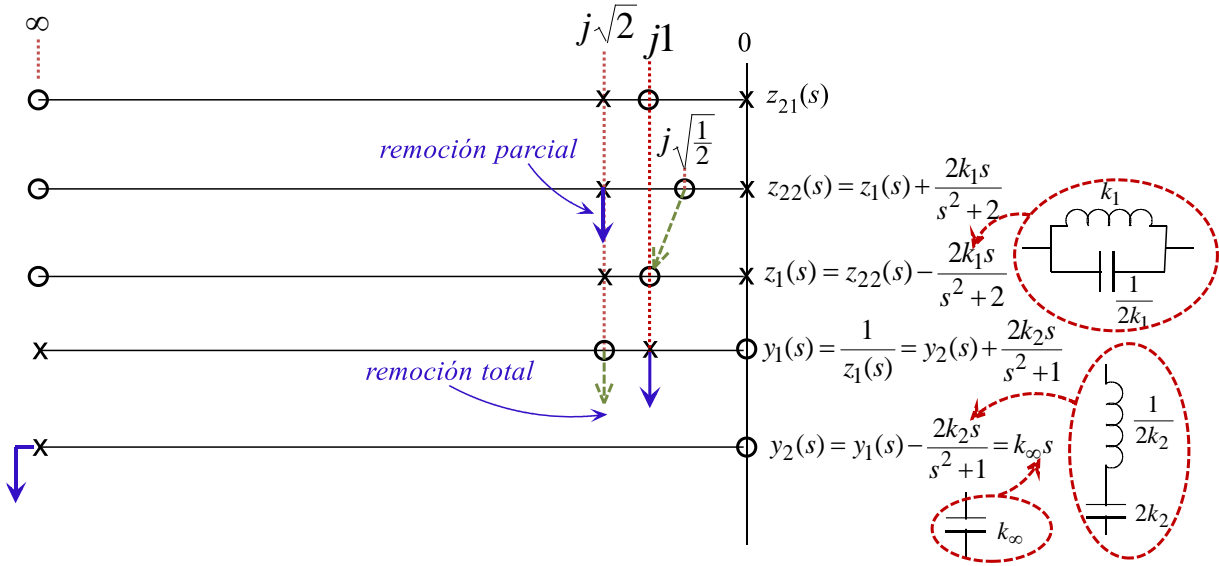


Figura 1

Dado que hay que realizar un cero de transmisión finito, que no coincide con ninguna singularidad de la parte interior de  $z_{22}(s)$ , hay que realizar una remoción parcial, para ubicar uno de los ceros de  $z_{22}(s)$  en  $s = \pm j1$ .

Para que dicha remoción parcial no afecte a los demás parámetros de la matriz  $Z$ , debe efectuarse en la misma instancia de la inmitancia terminal que se está sintetizando, en este caso como *impedancia*.

En este caso el cero que se puede correr a  $s = \pm j1$  es el que se encuentra en  $s = \pm j1/\sqrt{2}$ , y para lograrlo hay que efectuar una remoción parcial del polo  $z_{22}(s)$  en  $s = \pm j\sqrt{2}$ . El residuo que hay que remover resulta de forzar:

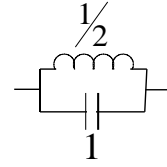
$$z_{22}(s) = z_1(s) + \frac{2k_1s}{s^2 + 2}$$

Y como  $k_1$  debe ser tal que  $z_1(\pm j1) = 0$ :

$$k_1 = \frac{s^2 + 2}{2s} z_{22}(s) \Big|_{s^2 = -1} = \frac{\cancel{s^2 + 2}}{2s} \frac{2s^2 + 1}{s \cancel{(s^2 + 2)}} \Big|_{s^2 = -1} = \frac{1}{2}$$

Esta remoción parcial se realiza con una impedancia en serie  $Z_A$ :

$$Z_A(s) = \frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+2} = \frac{1}{s+\frac{1}{2}s}$$



$$z_1(s) = z_{22}(s) - \frac{2k_1s}{s^2+2} = \frac{2s^2+1}{s(s^2+2)} - \frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+2} = \frac{2s^2+1-s^2}{s(s^2+2)} = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)}$$

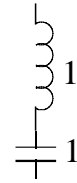
Que como era de esperar, tiene un cero en  $s=\pm j1$ . Por lo tanto, su inversa tendrá un polo y al removerlo se realizará el cero de transmisión deseado.

$$y_1(s) = \frac{1}{z_1(s)} = \frac{s(s^2+2)}{s^2+1} = y_2(s) + \frac{2k_2s}{s^2+1}$$

$$k_2 = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \frac{s^2+1}{2s} y_1(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \frac{s^2+1}{2s} \frac{s(s^2+2)}{s^2+1} = \frac{1}{2}$$

Esta remoción parcial se realiza con una admitancia en derivación  $Y_B$ :

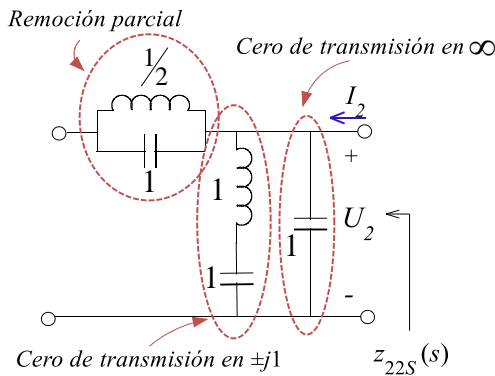
$$Y_B(s) = \frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+1} = \frac{1}{s+\frac{1}{s}}$$



$$y_2(s) = y_1(s) - \frac{2k_2s}{s^2+1} = \frac{s(s^2+2)}{s^2+1} - \frac{2\frac{1}{2}s}{s^2+1} = \frac{s^3+s}{s^2+1} = s$$

Resta realizar un cero de transmisión en infinito, el lo realiza la admitancia  $y_2(s)=s$  remanente de la remoción anterior, y que corresponde a un capacitor en derivación de valor 1

El cuadripolo resultante se muestra en la Figura 2.



**IMPORTANTE:** Observar que la parte interior de  $z_{22}(s)$  debe empezar y terminar en derivación, porque como los parámetros  $z$  se definen a circuito abierto, todos los elementos en serie en uno de los extremos no formarán parte de la impedancia terminal vista desde el extremo opuesto.

Figura 2

### Verificación y eventual compensación del factor de escala de $z_{21}(s)$

En principio, se postula disponer un transformador ideal en el otro extremo del cuadripolo (el opuesto a la inmitancia terminal que se está sintetizando, que en este caso es  $z_{22s}$ ), tal como se indica en la Figura 3.

Claramente, la inclusión del transformador en el extremo opuesto a  $z_{22s}$  no la afecta, por ser:

$$z_{22s}(s) = \frac{U'_2}{I'_2} \bigg|_{I'_1=0} = \frac{U_2}{I_2} \bigg|_{I_1=0} = z_{22E}(s)$$

A partir de las expresiones del transformador ideal indicado en la Figura 3 puede establecerse que:

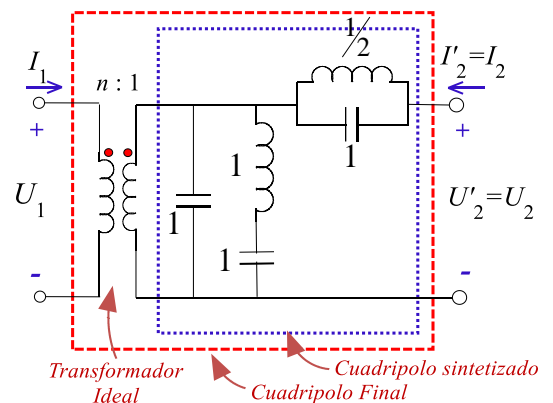


Figura 3

$$I'_1 = n I_1 \quad U'_1 = \frac{1}{n} U_1$$

Por consiguiente:

$$z_{21S}(s) = \frac{U'_2}{I'_1} \bigg|_{I'_2=0} = \frac{U_2}{n I_1} \bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{n} z_{21E}(s)$$

y la relación de transformación necesaria resulta:

$$n = \frac{z_{21E}(s)}{z_{21S}(s)}$$

La Figura 4 muestra el circuito para determinar  $z_{21S}(s)$  por definición.

$$z_{21S}(s) = \frac{U_2}{I'_1} \bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{s + \frac{1}{s + \frac{1}{s}}} = \frac{1}{s + \frac{s}{s^2 + 1}} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

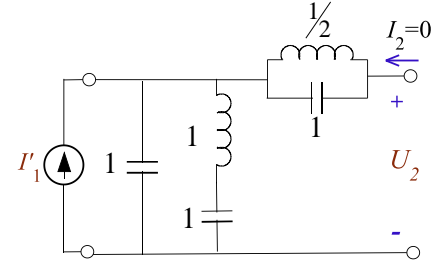


Figura 4

Que resulta igual a  $z_{21E}(s)$ . Por lo tanto la relación de transformación necesaria resulta 1 y no se requiere transformador.

#### Red asintótica para $s \rightarrow \infty$

En la Figura 5 se muestra la red asintótica para  $s \rightarrow \infty$  para determinar  $z_{21S}(s)$ , resultando:

$$z_{21S}(s) = \frac{U_2}{I_1} \bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{s}$$

Por otra parte  $z_{21E}(s)$ :

$$z_{21E}(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

cuando  $s \rightarrow \infty$  se comporta como:

$$z_{12E}(s) = \frac{1}{s}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria (Figura 3) será:

$$n = \frac{z_{12E}(s)}{z_{12S}(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}} = 1$$

#### Red asintótica para $s \rightarrow 0$

En la Figura 6 se muestra la red asintótica para  $s \rightarrow 0$  para determinar  $z_{21S}(s)$ , resultando:

$$z_{21S}(s) = \frac{U_2}{I_1} \bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{2s}$$

Por otra parte  $z_{21E}(s)$ :

$$z_{21E}(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

cuando  $s \rightarrow 0$  se comporta como:

$$z_{12E}(s) = \frac{1}{2s}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria (Figura 3) será:

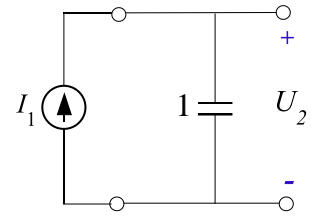


Figura 5

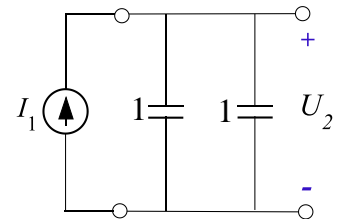
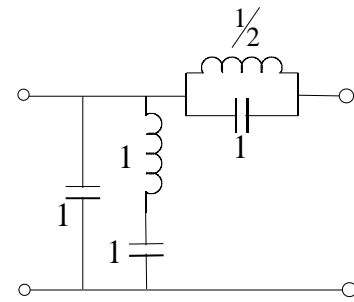


Figura 6

$$n = \frac{z_{12E}(s)}{z_{12S}(s)} = \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2s}} = 1$$

El circuito final resultante se indica en la Figura 7.



**Figura 7**



$$\text{b)} \quad y_{11}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 9)} \quad y_{12}(s) = \frac{-2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)}$$

### Resolución

#### Análisis de Realizabilidad

Los aspectos a tener en cuenta en el análisis de realizabilidad fueron enumerados con todo detalle en el Ejercicio 1-a).

La matriz de admitancias de cortocircuito especificada corresponde a un cuadripolo  $LC$ .

Se observa que  $y_{12}(s)$  posee un polo en  $s=0$  y un polo finito en  $s=\pm j3$ . Ambos polos son compartidos con la parte interior de  $y_{11}(s)$ . Además  $y_{12}(s)$  en tiene un cero en  $\odot$  y un cero finito en  $s=\pm j1$ .

$y_{11}(s)$  presenta un polo propio en  $\odot$ .

La especificación puede realizarse mediante un cuadripolo  $LC$  con dos ceros de transmisión: uno en  $\odot$  y otro finito en  $s=\pm j1$ .

#### Desarrollo en fracciones parciales.

Tratándose de admitancias  $LC$ , el desarrollo en fracciones parciales (desarrollo de Foster 1) de  $y_{ii}(s)$  resulta:

$$y_{iiE}(s) = \frac{k_{0Eii}}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{2k_{jEii}s}{s^2 + s_j^2} + k_{\infty Eii}s$$

siendo  $k_{0E}$ ,  $k_{jE}$  y  $k_{\infty E}$  los residuos de  $y_{iiE}(s)$ . En todos los casos, el subíndice  $E$  indica *especificada*.

#### Residuos de $y_{11}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E11} = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_{11}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{(s^2 + 9)} = \frac{16}{9}$$

- En el polo en  $s=\pm j3$

$$k_{aE11} = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \left[ \frac{s^2 + 9}{2s} y_{11}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \left( \frac{(s^2 + 9)(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{2s(s^2 + 9)} \right) = \frac{28}{9}$$

- En el polo propio en  $s=\odot$ .

$$k_{\infty E11} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} y_{11}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 9)} \right) = 1$$

#### Residuos de $y_{12}(s)$

- En el polo en  $s=0$

$$k_{0E21} = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_{12}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{-2(s^2 + 1)}{(s^2 + 9)} \right) = -\frac{2}{9}$$

- En el polo en  $s=\pm j3$

$$k_{aE21} = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \left[ \frac{s^2 + 9}{2s} y_{12}(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -9} \left( \frac{s^2 + 9}{2s} \frac{-2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)} \right) = -\frac{8}{9}$$

Por lo tanto, la especificación puede escribirse:

$$y_{11} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 9)} = \frac{16}{9} \frac{1}{s} + \frac{2 \frac{28}{9} s}{s^2 + 9} + 1s$$

$$y_{12}(s) = \frac{-2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)} = \frac{-\frac{2}{9}}{s} - \frac{\frac{2}{9}s}{s^2 + 9}$$

### Síntesis de $y_{11}(s)$ generando los ceros de transmisión de $y_{21}(s)$

Primero debe obtenerse la parte interior de  $y_{11}(s)$ , removiéndole su polo propio en  $s=\infty$ . Es decir:

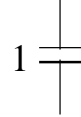
$$y_{11}(s) = y_{11INT}(s) + k_{\infty E11}s$$

Es decir:

$$y_{11INT}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 9)} - s = \frac{s^4 + 17s^2 + 16 - s^4 - 9s^2}{s(s^2 + 9)} = \frac{8(s^2 + 2)}{s(s^2 + 9)}$$

La remoción del polo propio de  $y_{11}(s)$  da lugar a una admitancia constituida por:

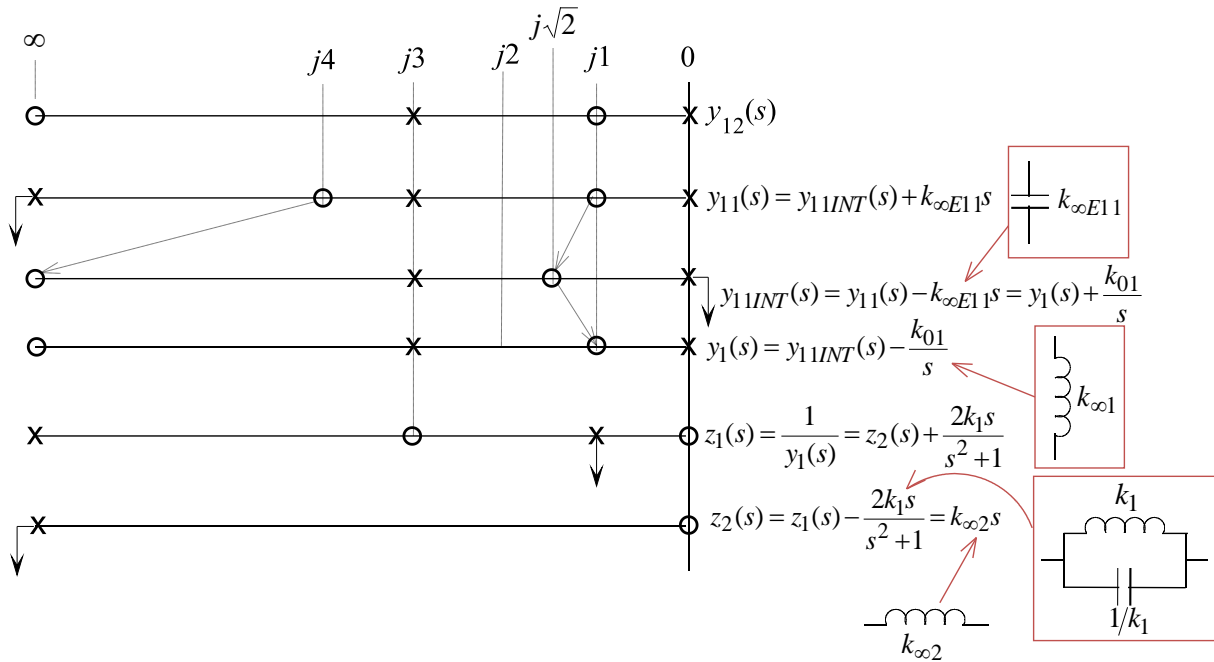
$$Y_A(s) = 1s$$



**IMPORTANTE:** Esta remoción no genera un cero de transmisión en infinito.

Por otra parte se observa que será necesario generar un cero de transmisión finito y ceros de transmisión en infinito.

En la Figura 1 se detallan los pasos a seguir, y en la Figura 2 se muestra la correspondencia con el circuito sintetizado.



**Figura 1**

Como primer paso hay que efectuar una remoción parcial para acomodar un cero de  $y_{11INT}(s)$  en la ubicación del cero de transmisión finito ( $s=\pm j1$ ).

Es muy importante efectuar esta remoción parcial en la misma instancia (admitancia o impedancia) del parámetro que se está sintetizando (en este caso, tratándose de  $y_{11}(s)$ , la remoción parcial hay que hacerla en  $y_{11INT}(s)$ ).

La razón de ello es que los elementos del circuito que realizan esa remoción parcial, no son “vistos” por los otros parámetros, dado que parecerían polos particulares de la inmitancia que se está sintetizando. Y además como son una remoción *parcial*, del residuo en uno de los polos de la parte interior, dicho polo sigue estando en esa parte interior, y por lo tanto, estará presente en los demás parámetros.

En este caso, se ve de la Figura 1 que el cero que se encuentra en  $s=\pm j\sqrt{2}$  puede moverse a  $s=\pm j1$  efectuando una remoción parcial del polo en el origen de  $y_{11INT}(s)$ , de manera tal que:

$$y_{11INT}(s) = y_1(s) + \frac{k_{01}}{s}$$

Es decir:

$$y_1(s) = y_{11INT}(s) - \frac{k_{01}}{s}$$

Y  $k_{01}$  tal que:

$$y_1(j1) = y_{11INT}(j1) - \frac{k_{01}}{s} = 0$$

Es decir:

$$k_{01} = s y_{11INT}(j1) = \cancel{s} \frac{8(s^2 + 2)}{\cancel{s}(s^2 + 9)} \Big|_{s=j1} = \frac{8(-1+2)}{-1+9} = 1$$

Esta remoción parcial se realiza con un inductor en derivación de valor 1.

Ahora si puede determinarse:

$$y_1(s) = y_{11INT}(s) - \frac{k_{01}}{s} = \frac{8(s^2 + 2)}{s(s^2 + 9)} - \frac{1}{s} = \frac{8s^2 + 16 - s^2 - 9}{s(s^2 + 9)} = \frac{7(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)}$$

Que como cabía esperar, tiene un cero en  $s=\pm j1$ .

Ahora se invierte  $y_1(s)$  para obtener un polo en  $s=\pm j1$  y *removerlo*. Esta remoción realizará el cero de transmisión deseado en  $s=\pm j1$ .

**IMPORTANTE.** Hacer hincapié que ubicar el cero  $y_1(s)$  en  $s=\pm j1$  no realiza el cero de transmisión. Hasta que no se efectúa la remoción de un polo en el punto, no se realiza el cero de transmisión.

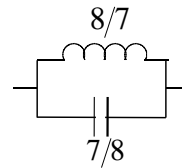
$$z_1(s) = \frac{1}{y_1(s)} = \frac{s(s^2 + 9)}{7(s^2 + 1)} = z_2(s) + \frac{2k_1s}{s^2 + 1}$$

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \frac{s^2 + 1}{2s} z_1(s) = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \frac{s^2 + 1}{2s} \frac{s(s^2 + 9)}{7(s^2 + 1)} = \frac{4}{7}$$

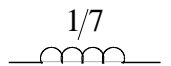
$$z_2(s) = z_1(s) - \frac{2k_1s}{s^2 + 1} = \frac{s(s^2 + 9)}{7(s^2 + 1)} - \frac{\frac{8}{7}s}{s^2 + 1} = \frac{s^3 + 9s - 8s}{7(s^2 + 1)} = \frac{s(s^2 + 1)}{7(s^2 + 1)} = \frac{1}{7}s$$

La remoción se realiza con los siguientes elementos:

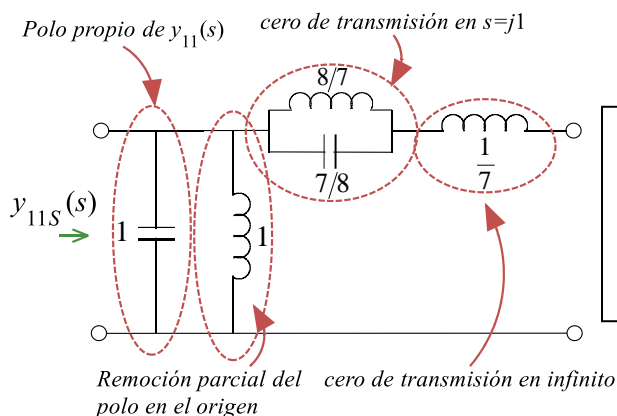
$$Z_A = \frac{\frac{8}{7}s}{s^2 + 1} = \frac{1}{\frac{7}{8}s + \frac{1}{\frac{8}{7}s}}$$



$z_2(s)$  es el remanente de la remoción del polo finito. Es un inductor en serie de valor  $1/7$  y realiza el cero de transmisión requerido en infinito.



El cuadripolo resultante se muestra en la Figura 2.



**IMPORTANTE:** Observar que la parte interior de  $y_{11}(s)$  debe empezar y terminar en serie, porque como los parámetros y se definen en cortocircuito, todos los elementos en derivación en uno de los extremos no formarán parte de la impedancia terminal vista desde el extremo opuesto.

**Figura 2**

$$y_{11S}(s) = \frac{I'_1}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = 1s + \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{7}{8}s + \frac{7}{8s}} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 16)}{s(s^2 + 1)}$$

### Verificación y eventual compensación del factor de escala de $y_{21}(s)$

En principio, se postula disponer un transformador ideal en el extremo del cuadripolo opuesto a la inmitancia terminal que se está sintetizando (que en este caso es  $y_{11S}$ ), como se indica en la Figura 3.

Claramente, la inclusión del transformador en el extremo opuesto a  $y_{11S}$  no la afecta, por ser:

$$I_1 = I'_1 \quad U_1 = U'_1$$

Por lo tanto:

$$y_{11S}(s) = \frac{I'_1}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = y_{11E}(s)$$

A partir de las expresiones del transformador ideal indicado en la Figura 3 puede establecerse que:

$$I_2 = n I'_2 \quad U_2 = \frac{1}{n} U'_2$$

Por consiguiente:

$$y_{12S}(s) = \frac{I'_1}{U'_2} \Big|_{U'_1=0} = \frac{I_1}{n U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{1}{n} y_{12E}(s) \quad y_{21S}(s) = \frac{I'_2}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{I_2}{n U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{n} y_{21E}(s)$$

Resultando:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{y_{21E}(s)}{y_{21S}(s)}$$

En la Figura 4-a se muestra el circuito para determinar, aplicando su definición,  $y_{12S}(s)$  y en la Figura 4-b se muestra el circuito para determinar, aplicando su definición,  $y_{21S}(s)$ .

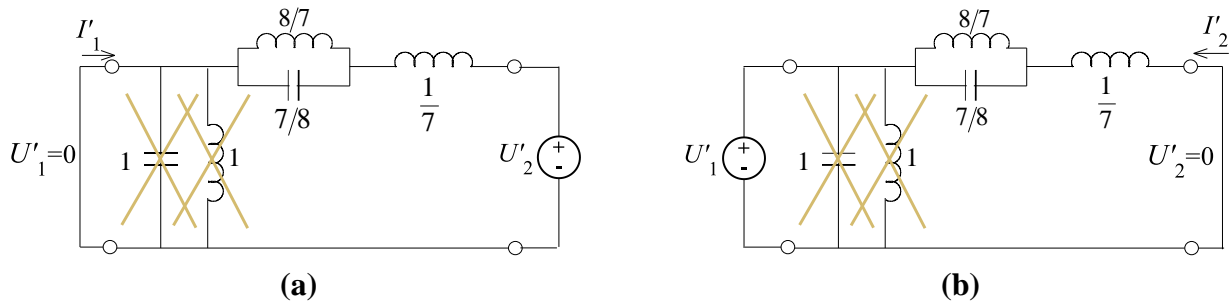


Figura 4

**IMPORTANTE:** Observar según la definición de los parámetros admitancia de cortocircuito, tanto el capacitor que realiza el polo particular de  $y_{11S}(s)$  como el inductor que corresponde a la remoción parcial del polo en el origen, no interviene en la determinación de  $y_{12S}(s)$  ni de  $y_{21S}(s)$  (debe notarse que en un caso tienen en paralelo un generador de tensión y en el otro un cortocircuito).

De la Figura 4-a resulta:

$$y_{12S}(s) = \frac{I'_1}{U'_2} \Big|_{U'_1=0} = \frac{-1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{\frac{7}{8}s + \frac{7}{8s}}} = \frac{-7(s^2 + 1)}{s(s^2 + 9)}$$

Y de la Figura 4-b resulta:

$$y_{21S}(s) = \frac{I'_2}{U'_1} \Big|_{U'_2=0} = \frac{-1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{\frac{7}{8}s + \frac{7}{8s}}} = \frac{-7(s^2+1)}{s(s^2+9)}$$

Mientras que  $y_{12E}(s)$  debe resultar:

$$y_{12E}(s) = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{-2(s^2+1)}{s(s^2+9)}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria (Figura 3) será:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{\frac{-2(s^2+1)}{s(s^2+9)}}{\frac{-7(s^2+1)}{s(s^2+9)}} = \frac{2}{7}$$

Con lo cual no se requiere transformador.

#### Red asintótica para $s \rightarrow 0$

En la Figura 5 se muestra la red asintótica para  $s \rightarrow 0$  para determinar  $y_{12S}(s)$ , resultando:

$$y_{12S}(s) = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -\frac{1}{\frac{8}{7}s + \frac{1}{7}s} = -\frac{1}{9s} = -\frac{7}{9s}$$

Mientras que  $y_{21E}(s)$ :

$$y_{12E}(s) = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{-2(s^2+1)}{s(s^2+9)}$$

cuando  $s \rightarrow 0$  se comporta como:

$$y_{12E}(s) = -\frac{2}{9s}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria será:

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{-\frac{2}{9s}}{-\frac{7}{9s}} = \frac{2}{7}$$

#### Red asintótica para $s \rightarrow \infty$

En la Figura 6 se muestra la red asintótica para  $s \rightarrow \infty$  para determinar  $y_{12S}(s)$ , resultando:

$$y_{12S}(s) = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -\frac{1}{\frac{1}{7}s} = -\frac{7}{s}$$

Mientras que  $y_{21E}(s)$ :

$$y_{12E}(s) = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{-2(s^2+1)}{s(s^2+9)}$$

cuando  $s \rightarrow \infty$  se comporta como:

$$y_{12E}(s) = -\frac{2}{s}$$

Con lo cual la relación de transformación necesaria será:

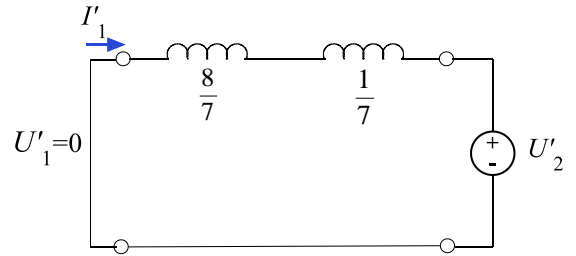


Figura 5

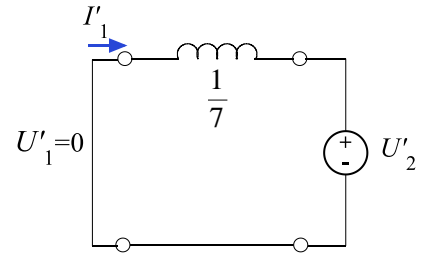
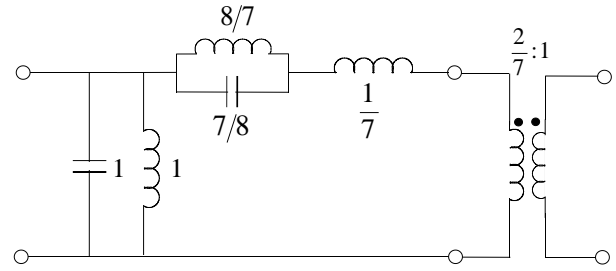


Figura 6

$$n = \frac{y_{12E}(s)}{y_{12S}(s)} = \frac{-\frac{2}{s}}{-\frac{7}{s}} = \frac{2}{7}$$

El circuito final es el indicado en la Figura 7.



**Figura 7**

### Ejercicio 3

Sintetizar las siguientes transferencias:

$$\text{a) } T_1(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 1}$$

$$\text{b) } T_2(s) = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = -\frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 9)}$$

$$\text{c) } T_3(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 25)}{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}$$

### Resolución

$$\text{a) } T_1(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 1}$$

Del conjunto de ecuaciones del cuadripolo:

$$U_1(s) = z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s)$$

$$U_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s)$$

Resulta para  $I_2(s)=0$ , la función de transferencia buscada, haciendo la relación  $U_2(s) / U_1(s)$ :

$$T_1(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = -\frac{s^2 + 1}{2s^2 + 1}$$

Como los polos de  $z_{21}(s)$  deben ser también polos de  $z_{11}(s)$ , desde todo punto de vista, resulta válido hacer:

$$\frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = -\frac{\frac{s^2 + 1}{D(s)}}{\frac{2s^2 + 1}{D(s)}}$$

Si se adopta:

$$D(s) = s(s^2 + 2)$$

se satisfacen todas las propiedades de las inmitancias de punto impulsor y de transferencia.

Resultando:

$$z_{11}(s) = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

$$z_{21}(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)}$$

Cuya síntesis fue realizada en el Ejercicio 2 (a), pero para la inmitancia terminal  $z_{22}(s)$ , y por lo tanto, para sintetizar  $z_{11}(s)$  el circuito resultará como se indica en la Figura 1.

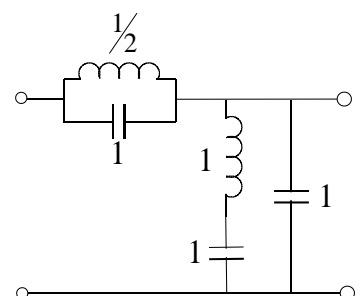


Figura 1

## Ejercicio 5.

Sintetizar un cuadripolo cargado con una resistencia  $R_2=300\ \Omega$  que está excitado por un generador de tensión real  $U_G$  con  $R_1=50\ \Omega$ . Las pérdidas de inserción deberán satisfacer la siguiente expresión:  
 $|P_{20}/P_2|=1+0,64\omega^6$ .

- Indicar y justificar cuántas realizaciones habrá y dibujar las respectivas topologías.
- Efectuar la síntesis de una de las realizaciones.

## Resolución

La función *ganancia de inserción* resulta:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\left| \frac{P_{20}}{P_2}(\omega) \right|_{\omega=\frac{s}{j}}} = \frac{1}{1-0,64s^6}$$

Con lo cual, resulta:

$$|\rho(s)|^2 = 1 - t \frac{1}{1-0,64s^6} \quad \text{siendo:} \quad t = \frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 300}{(50+300)^2} = 0,4898$$

Se calcula  $|\rho_1(s)|^2$  mediante (1) y se determinan sus singularidades. Se obtiene  $\rho_1(s)$  considerando los polos ubicados en el SPI (la mitad de polos de  $|\rho_1(s)|^2$ ). Pero puede haber dos posibles soluciones:  $\rho_{1a}(s)$  considerando los *ceros* en el SPI y  $\rho_{1b}(s)$  considerando los *ceros* en el SPD.

Resultando:

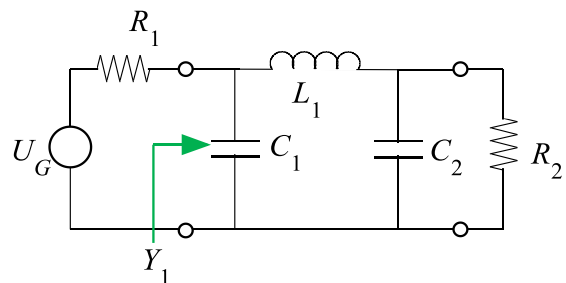
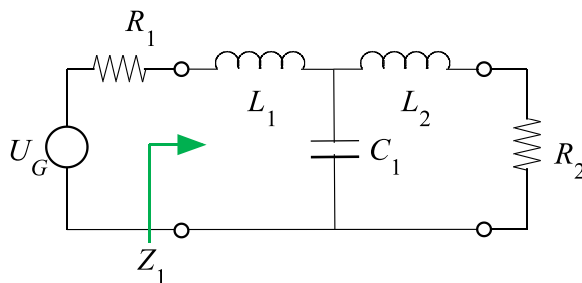
$$Z(s) = \left( \frac{1 - \rho_1(s)}{1 + \rho_1(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y(s) = \left( \frac{1 + \rho_1(s)}{1 - \rho_1(s)} \right)^{\pm 1} \quad (1)$$

Se calculan las impedancia y admitancia de entrada normalizadas del cuadripolo cargado mediante las expresiones (1).

Se sintetizan  $Z(s)$  ó  $Y(s)$  de modo de realizar *los polos* de la función *pérdidas de inserción* (o sea los puntos de pérdidas infinitas -  $P_2=0$ , que se encuentran todos en infinito).

Como el grado de  $Z(s)$  ó  $Y(s)$  resulta  $n=3$ , la síntesis se efectúa realizando 3 remociones de polos en infinito, y por lo tanto todas las realizaciones tendrán 3 elementos reactivos.

Se ve que por ser  $t < 1$   $|\rho_1(s)|^2$  tendrá *ceros* tanto en el SPI como en el SPD, y por lo tanto estarán en el origen, y por lo tanto  $\rho_{1a}$  será distinto a  $\rho_{1b}$  y existirán 4 realizaciones diferentes: una como impedancia y otra como admitancia con  $\rho_{1a}$  y análogamente otras 2 (como impedancia y otra como admitancia) con  $\rho_{1b}$ .



**Análisis de realizabilidad:**

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 300}{(50+300)^2} = 0,4898$$



### Determinación de $|\rho_1(s)|^2$ de sus singularidades

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - 0,49 \cdot \frac{1}{1 - 0,64 s^6} = \frac{0,51 - 0,64 s^6}{1 - 0,64 s^6} = \frac{0,797 - s^6}{1,5625 - s^6}$$

Resultando los siguientes polos y ceros:

- Los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  son 6, y se encuentran ubicados sobre una circunferencia de radio 1,077:  
 $\pm 1,07722$  y  $\pm 0,5386 \pm j0,9329$

Los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  también son 6 y se encuentran sobre una circunferencia de radio 0,9629:  
 $\pm 0,9629$  y  $\pm 0,4815 \pm j0,8339$

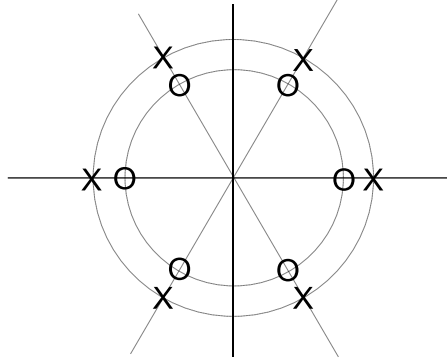


Diagrama cero-polar de  $|\rho_1(s)|^2$

- 1)  $P_{20}/P_2(\omega)$  y por consiguiente  $|\rho_1(s)|^2$  tienen que ser funciones racionales, pares en  $\omega$ , con coeficientes reales.
- 2) Debe ser  $0 \leq |\rho_1(s)|^2 \leq 1$  para todo  $\omega$ . Es decir  $t \leq P_{20}/P_2(\omega) < \infty$  para todo  $\omega$ . (Si  $R_g=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow 0 \leq P_{20}/P_2(\omega) < \infty$ ).
- 3) Además  $P_{20}/P_2$ , como toda función de pérdidas, no puede tener sus ceros sobre el eje imaginario, y tanto sus polos como sus ceros deben tener una disposición simétrica respecto del origen.

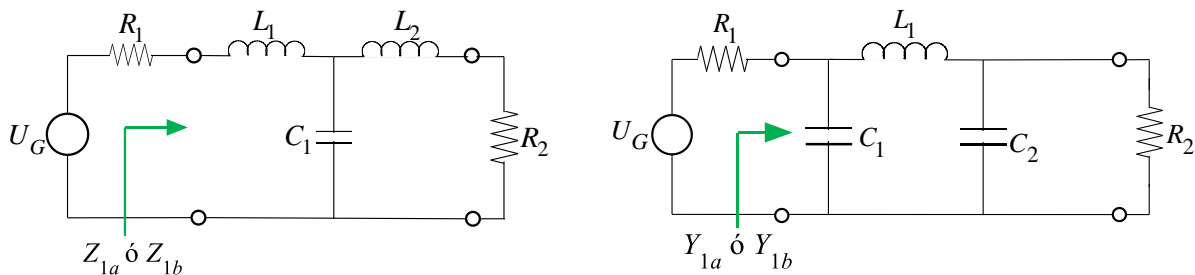
Por lo tanto, la especificación es realizable

#### a) Realizaciones distintas:

Se ve que por ser  $t < 1$  todos los ceros  $|\rho_1(s)|^2$  se encuentran sobre una circunferencia de radio 0,9629, y por lo tanto  $\rho_{1a}(s) \neq \rho_{1b}(s)$  y habrá 4 realizaciones diferentes: dos como impedancia y otras dos como admitancia.

Además la función dada  $|P_{20}/P_2|$  tiene seis polos en infinito. Como los polos de la pérdida de inserción son el doble de los ceros de transmisión, el cuadripolo que la realice tendrá 3 ceros de transmisión en infinito y por lo tanto tendrá una configuración Cauer I con 3 remociones en infinito.

Por lo tanto ambas topologías resultan:



## b) Síntesis

### Determinación de $\rho_1(s)$

Una de las dos raíces de  $|\rho_1(s)|^2$  se obtiene con los polos ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI.

$$\begin{aligned}\rho_{1a}(s) &= \frac{(s+0,9629)(s+0,4815-j08339)(s+0,4815+j08339)}{(s+1,07722)(s+0,5386-j09329)(s+0,5386+j09329)} \\ &= \frac{s^3+1,9259s^2+1,8545s+0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}\end{aligned}$$

La otra raíz de  $|\rho_1(s)|^2$  se obtiene con los polos ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPD.

$$\begin{aligned}\rho_{1b}(s) &= \frac{(s-0,9629)(s-0,4815-j08339)(s-0,4815+j08339)}{(s+1,07722)(s+0,5386-j09329)(s+0,5386+j09329)} \\ &= \frac{s^3-1,9259s^2+1,8545s-0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}\end{aligned}$$

### Determinación de las Impedancias y Admitancias de entrada (normalizadas respecto a $R_1$ y $G_1$ ).

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} = \left( \frac{1 - \frac{s^3+1,9259s^2+1,8545s+0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}}{1 + \frac{s^3+1,9259s^2+1,8545s+0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}} \right)^{\pm 1}$$

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \left( \frac{s^3+2,0402s^2+2,0876s+1,0714}{0,1143s^2+0,2332s+0,1786} \right)^{\pm 1}$$

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1} = \left( \frac{1 - \frac{s^3-1,9259s^2+1,8545s-0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}}{1 + \frac{s^3-1,9259s^2+1,8545s-0,8929}{s^3+2,1544s^2+2,3208s+1,25}} \right)^{\pm 1}$$

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \left( \frac{s^3+0,1143s^2+2,0876s+0,1786}{2,0402s^2+0,2332s+1,0714} \right)^{\pm 1}$$

Como los ceros de transmisión (polos de las pérdidas de inserción) se encuentran en infinito, tendremos que remover polos de  $Z_{1a}$  ( $Z_{1b}$ ) o  $Y_{1a}$  ( $Y_{1b}$ ) en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1a}$  hay que considerar el exponente (+1):

$$\begin{aligned}Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) &= \frac{s^3+2,0402s^2+2,0876s+1,0714}{0,1143s^2+0,2332s+0,1786} \\ Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) &= \frac{s^3+0,1143s^2+2,0876s+0,1786}{2,0402s^2+0,2332s+1,0714}\end{aligned}$$

### Síntesis de las Impedancias y Admitancias de entrada

Como los ceros de transmisión se encuentran en infinito, tendremos que remover polos en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer).

Es decir que habrá 2 formas posibles de configuración, una como impedancias  $Z_{1a}$  y  $Z_{1b}$  y otras dos como admitancias:  $Y_{1a}$  y  $Y_{1b}$ .

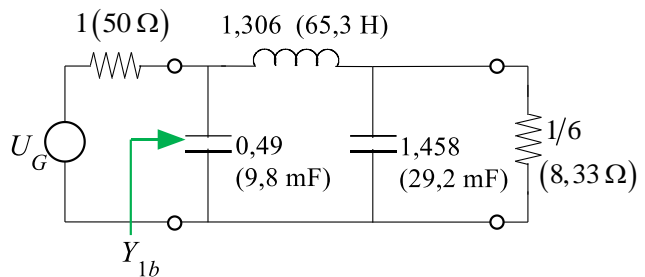
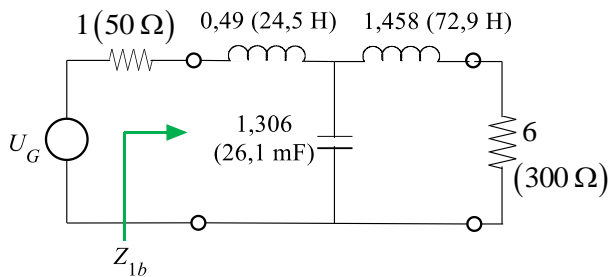
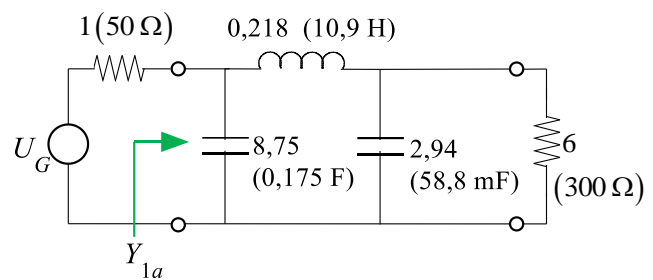
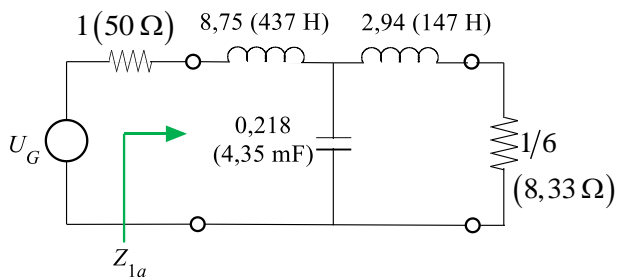
Aplicando Cauer I y resolviendo por división continua, para  $Z_{1a} = Y_{1a}$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = 8,75s + \frac{1}{0,218s + \frac{1}{2,94s + \frac{1}{6}}}$$

y resolviendo por división continua, para  $Z_{1b} = Y_{1b}$  resulta:

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = 0,49s + \frac{1}{1,305s + \frac{1}{1,458s + 6}}$$

La síntesis resulta en los siguientes circuitos (los valores desnormalizados se indican entre paréntesis):





## Circuitos y Sistemas Lineales - Curso 2023

### TP Nº 5. Introducción al Diseño de Filtros. Transformaciones y Normalizaciones



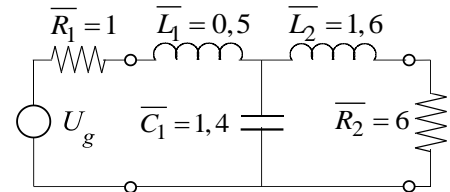
**Sugerencia:** Dado que el objetivo de los Trabajos Prácticos es utilizar los conceptos teóricos vistos para resolver problemas, se sugiere leer con detenimiento cada propuesta y contestar cada punto sin presuponer temas o asuntos conocidos, de forma que toda afirmación o decisión de opciones sea justificada. Esta sugerencia pretende ayudar a reafirmar conocimientos y a organizar la resolución de los ejercicios.

#### Ejercicio 2

El circuito de la figura corresponde a un filtro pasa – bajos normalizado de orden 3.

Desnormalizar el circuito, teniendo en cuenta los siguientes parámetros del filtro:

- Frecuencia de corte y normalización: 300 kHz
- Resistencia de generador  $R_1$  (impedancia de normalización): 50  $\Omega$ .



#### Resolución

Los elementos del circuito se encuentran normalizados en frecuencia e impedancia. Las expresiones de desnormalización resultan:

$$\bar{R} = \frac{R}{R_1} \gg R = \bar{R} \times R_1 \quad \bar{sL} = \frac{sL \omega_c}{\omega_c R_1} \gg L = \bar{L} \times \frac{R_1}{\omega_c} \quad \frac{1}{s\bar{C}} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} \omega_c C R_1} \gg C = \frac{\bar{C}}{\omega_c R_1}$$

Por lo tanto:

$$R_1 = 1 \times 50 = 50 \Omega \quad L_1 = 0,5 \frac{50}{2\pi 300 \times 10^3} = 13,26 \mu H \quad C_1 = \frac{1 \times 4}{2\pi 300 \times 10^3 \times 50} = 14,85 \text{ nF}$$

$$R_2 = 6 \times 50 = 300 \Omega \quad L_2 = 1,6 \frac{50}{2\pi 300 \times 10^3} = 42,44 \mu H$$

### Ejercicio 3

Un filtro pasa banda tiene un ancho de banda de 3 dB de 50 kHz y una frecuencia central de 1 MHz.

- a) Realizar un gráfico indicativo de la curva Atenuación vs. Frecuencia.
- b) Obtener las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  que delimitan el ancho de banda de 3 dB.
- c) Transformar  $f_1$  y  $f_2$  al dominio del filtro pasa bajos equivalente. Razone acerca del resultado relacionándolo con el ancho de la banda de paso.
- d) Determinar la frecuencia equivalente a  $f_A = \pm 5$  MHz en el filtro pasa bajos correspondiente.

### Resolución

a) La transformación pasa-banda a pasa-bajos es:

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$$

Resulta:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Por lo tanto, si  $f_0 = 1 \text{ MHz}$  y  $\Delta f = 50 \text{ kHz}$ :

$$f_{1,2} = \pm \frac{50 \text{ kHz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{50 \text{ kHz}}{2}\right)^2 + (1 \text{ MHz})^2}$$

$$f_1 = 975.3 \text{ kHz}$$

$$f_2 = 1.0253 \text{ MHz}$$

b) Utilizando la transformación pasa-banda a pasa-bajos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{j\omega} &= \frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{j\omega} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega} \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{f}_A = \frac{f_A^2 - f_0^2}{f_A} = \frac{(5 \text{ MHz})^2 - (1 \text{ MHz})^2}{5 \text{ MHz}} = 4.8 \text{ MHz}$$

### Ejercicio 5

Considerar ahora que el circuito de la Figura del Ejercicio 2 es el prototipo pasa bajos normalizado correspondiente a la síntesis de un filtro pasa altos.

La frecuencia de normalización es la frecuencia de corte del pasa altos  $f_c=315,45$  kHz y la impedancia de normalización es la resistencia del generador  $R_1=75 \Omega$ :

- Deducir las expresiones de las transformaciones y desnormalizaciones de los componentes, necesarias para obtener el filtro pasa altos desnormalizado. Dibujar la topología del filtro pasa altos
- Obtener los valores de los componentes del filtro pasa altos desnormalizado.

### Resolución

a) Para realizar la normalización/desnormalización de los componentes, es necesario tener en cuenta la transformación pasa-altos a pasa-bajos:

$$\bar{s} = \frac{\omega_c}{s}$$

Por lo tanto:

$$\bar{R} = R \gg R = \bar{R} \quad \bar{s}\bar{L} = \frac{\omega_c}{s}\bar{L} \gg C = \frac{1}{\omega_c\bar{L}} \quad \frac{1}{s\bar{C}} = \frac{1}{\frac{\omega_c}{s}\bar{C}} \gg L = \frac{1}{\omega_c\bar{C}}$$

Si se considera, además, la desnormalización en impedancia, se obtiene:

$$R = \bar{R} R_g \quad \bar{L} \gg C = \frac{1}{R_g \omega_c \bar{L}} \quad \bar{C} \gg L = \frac{R_g}{\omega_c \bar{C}}$$

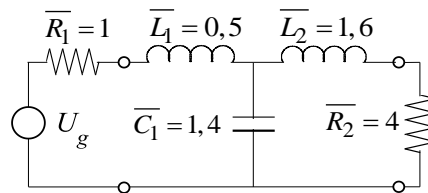
b) Los componentes resultan:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \times 75 \\ &= 75 \Omega \end{aligned} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{75 (2\pi 315.45 \times 10^3) 0.54} \\ &= 12.45 \text{ nF} \end{aligned} \quad \begin{aligned} L_1 &= \frac{75}{(2\pi 315.45 \times 10^3) 1.44} \\ &= 26.3 \mu H \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{75 (2\pi 315.45 \times 10^3) 1.6} \\ &= 4.2 \text{ nF} \end{aligned} \quad R_1 = 4 \times 75 = 450 \Omega$$

### Ejercicio 7

El circuito de la Figura es el prototipo pasa bajos normalizado correspondiente a la síntesis de un filtro pasa banda con las siguientes características:

- Frecuencia central: 60 MHz
- Ancho de banda: 1,13 MHz
- Resistencia de generador (impedancia de normalización): 75  $\Omega$



- Deducir las expresiones de las transformaciones y desnormalizaciones de los componentes, necesarias para obtener el filtro pasa banda desnormalizado. Dibujar la topología del filtro pasa banda.
- Obtener los valores de los componentes del filtro pasa banda desnormalizado.

### Resolución

a) Para realizar la normalización/desnormalización de los componentes, es necesario tener en cuenta la transformación pasa-banda a pasa-bajos sin conservación del ancho de banda:

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega s}$$

$$\bar{R} = R \gg R = \bar{R} \quad \bar{sL} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega s} \bar{L} = s \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} + \frac{1}{s \frac{\Delta\omega}{\bar{L} \omega_0^2}} \gg \begin{cases} L = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} \\ C = \frac{\Delta\omega}{\bar{L} \omega_0^2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s\bar{C}} = \frac{1}{\frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega s} \bar{C}} = \frac{1}{s \frac{\bar{C}}{\Delta\omega} + \frac{1}{s \frac{\Delta\omega}{\bar{C} \omega_0^2}}} \gg \begin{cases} L = \frac{\Delta\omega}{\bar{C} \omega_0^2} \\ C = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega} \end{cases}$$

Si se considera, además, la desnormalización en impedancia, se obtiene:

$$R = \bar{R} R_g \quad \bar{sL} \gg \begin{cases} L = \frac{\bar{L} R_g}{\Delta\omega} \\ C = \frac{\Delta\omega}{\bar{L} \omega_0^2 R_g} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s\bar{C}} \gg \begin{cases} L = \frac{\Delta\omega R_g}{\bar{C} \omega_0^2} \\ C = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega R_g} \end{cases}$$

b) Los componentes resultan:

$$R_1 = 1 \times 75 = 75 \Omega$$

$$L_1 = 0.54 \frac{75}{2\pi 1.13 \times 10^6} = 5.7 \mu H \quad C_1 = \frac{2\pi 1.13 \times 10^6}{0.54 (2\pi 60 \times 10^6)^2 75} = 1.23 \text{ pF}$$

$$L_2 = \frac{2\pi 1.13 \times 10^6 75}{1.44 (2\pi 60 \times 10^6)^2} = 2.6 \text{ nH} \quad C_2 = \frac{1.44}{2\pi 1.13 \times 10^6 75} = 2.7 \text{ nF}$$

$$L_3 = 1.6 \frac{75}{2\pi 1.13 \times 10^6} = 16.9 \mu H \quad C_3 = \frac{2\pi 1.13 \times 10^6}{1.6 (2\pi 60 \times 10^6)^2 75} = 0.42 \text{ pF}$$

$$R_2 = 4 \times 75 = 300 \Omega$$

### Ejercicio 9

Obtener la expresión de la función de transferencia  $T(s)$  de un filtro Chebyshev *pasa banda* con las siguientes características:

- la banda de paso se encuentra centrada en  $f_0=30$  kHz
- el ancho de banda de 1,6 dB es 8 kHz
- en la banda de atenuación, para la frecuencia 52 kHz la atenuación no debe ser inferior a 20 dB.

### Resolución

(1) Obtención de las frecuencias que definen el ancho de banda de 1,2 dB:

$$\Delta f|_{1,2 \text{ dB}} = 8 \cdot 10^3 \quad f_2 - f_1 = 8 \cdot 10^3 \quad f_2 = f_1 + 8 \cdot 10^3 \quad (1)$$

$$f_0 = 30 \cdot 10^3 \quad f_1 \cdot f_2 = 9 \cdot 10^8 \quad (2)$$

Con (1) en (2)

$$f_1^2 + 8 \cdot 10^3 f_1 - 9 \cdot 10^8 = 0$$

$$f_{1a,b} = -\frac{8}{2} \cdot 10^3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(8 \cdot 10^3)^2 + 4 \cdot 9 \cdot 10^8} \Rightarrow \begin{aligned} f_{1a} &= 26265,5 \\ f_{1b} &= -34265,5 \end{aligned} \quad (3)$$

Con (3) en (1):

$$f_{2a} = f_{1a} + 8000 = 26265,5 + 8000 = 34265,5$$

$$f_{2b} = f_{1b} + 8000 = -34265,5 + 8000 = -26265,5$$

Entonces, considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas):

$$f_1|_{1,2 \text{ dB}} = \pm 26265,5 \quad f_2|_{1,2 \text{ dB}} = \pm 34265,5$$

Por ser  $\Delta f_{1,2 \text{ dB}} \ll f_0$  las frecuencias de corte resultaron aproximadamente aritméticamente simétricas alrededor de  $f_0$ .

Es decir:

$$\overline{f_{B1}} = \frac{(\pm 26265,5)^2 - (30000)^2}{\pm 26265,5} = \pm 8000 \text{ Hz}$$

$$\overline{f_{B2}} = \frac{(\pm 34265,5)^2 - (30000)^2}{\pm 34265,5} = \pm 8000 \text{ Hz}$$

Entonces para el pasabajos equivalente:

$\overline{f_B} = 8 \text{ kHz} \quad \text{y} \quad A_{\text{máx}} = 1,6 \text{ dB}$
---

Se hace notar que la transformación pasa banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma un  $\Delta f_B = 8 \text{ kHz}$  en  $\overline{f_B} = 8 \text{ kHz}$ .

Por otra parte, como el dato de la especificación en la banda de atenuación es 52 kHz que es mayor que  $f_0=30$  kHz, corresponde a la frecuencia  $f_2$  que delimita el ancho de banda de 20 dB. Y sabiendo que, para el filtro pasa banda se cumple:

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \Rightarrow f_1 = \frac{f_0^2}{f_2} = \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{52 \cdot 10^3} = 17307,7$$

Con lo cual:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 52000 - 17307,7 = 34692,3$$

Por lo tanto, de acuerdo a la observación la frecuencia correspondiente al ancho de banda  $\Delta f/20 \text{ dB}$  en el dominio del pasa bajos equivalente resulta:

$\overline{f_H} = 34,6923 \text{ kHz} \quad \text{y} \quad A_{\text{mín}} = 20 \text{ dB}$
--



(2) Calcular los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del pasa bajos equivalente con la aproximación de Chebyshev

En la banda de paso del pasa bajos equivalente debe ser:

$$A(\omega) = 10 \log \left[ 1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) \right] \leq A_{\max}$$

Y siendo en el borde de la banda de paso  $V_n(1) = 1$  resulta:

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot A_{\max}} - 1 \quad \varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 1,6} - 1 = 0,44544 \quad \therefore \quad \varepsilon = 0,6674$$

Por otra parte la *atenuación mínima* admitida a la pulsación  $\omega_H$  en la banda de atenuación, permite determinar el orden  $n$  requerido:

$$A(\omega_H) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cosh \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_H}{\omega_B} \right) \right) \right]^2 \right\} \geq A_{\min} \Rightarrow n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 A_{\min}} - 1}{10^{0,1 A_{\max}} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_H}{\omega_B} \right)}$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 52} - 1}{10^{0,1 \cdot 1,6} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{2\pi \cdot 34,69 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^3} \right)} = 1,58$$

Es decir con la aproximación de Chebyshev el  $n$  que se debería adoptar es 2, y por lo tanto los componentes requeridos para implementar el filtro pasa banda serían 4.

Verificación del obtenido  $n$  con la aproximación de Chebyshev

En la banda de atenuación se debe cumplir:

$$A(\omega_H) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cosh \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_H}{\omega_B} \right) \right) \right]^2 \right\} \geq A_{\min}$$

$$A(\omega_H) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ 0,44544 \cdot \cosh \left[ 2 \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{34,6923 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} \right) \right] \right]^2 \right\} = 27,74 \geq 20$$

Con lo cual el valor de  $n=2$  es satisfactorio.

Por ser  $n$  un número par,  $|T(s)|^2$  no tiene polos reales, y por lo tanto todos resultan complejos conjugados, de la forma:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

siendo:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{1}}{\varepsilon} \right)^{1/n} - \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{1}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{1}}{\varepsilon} \right)^{1/n} + \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{1}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right]$$

$$k=1, 2, 3, \dots, 2n$$

Que para los valores de  $n$  y  $\varepsilon$  del caso resultan:

$$s_k = \pm 0,4476 \pm j0,8369$$

y la función de transferencia del filtro pasa bajos normalizado se obtiene mediante la expresión (8-54) del libro, con los polos ubicados en el SPI. En este caso:

$$T(s) = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{(s+s_1)(s+s_2)} = \frac{1/(0,6674 \cdot 2^{2-1})}{(s-0,4476+j0,8379)(s-0,4476-j0,8379)} = \frac{0,7492}{s^2+0,8952 \cdot s+0,9007}$$

Esta expresión se encuentra normalizada respecto de  $\omega_B=16\pi \cdot 10^3$  rad/s.

Aplicando la transformación pasa bajos normalizado a pasa banda desnormalizado:

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta\omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) = \frac{1}{16\pi \cdot 10^3} \left( s + \frac{(60\pi \cdot 10^3)^2}{s} \right) = \frac{s}{16\pi \cdot 10^3} + \frac{225\pi \cdot 10^3}{s}$$

resulta la  $T(s)$  buscada:

$$T(s) = \frac{0,7492}{\left( \frac{s}{16\pi \cdot 10^3} + \frac{225\pi \cdot 10^3}{s} \right)^2 + 0,8952 \left( \frac{s}{16\pi \cdot 10^3} + \frac{225\pi \cdot 10^3}{s} \right) + 0,9007}$$

$$T(s) = \frac{0,7492}{\left( \frac{s}{16\pi \cdot 10^3} \right)^2 + 28,125 + \left( \frac{225\pi \cdot 10^3}{s} \right)^2 + 0,8952 \left( \frac{s}{16\pi \cdot 10^3} + \frac{225\pi \cdot 10^3}{s} \right) + 0,9007}$$

$$T(s) = \frac{0,7492(16\pi \cdot 10^3 s)^2}{s^4 + (225\pi \cdot 16\pi \cdot 10^6)^2 + 0,8952(16\pi \cdot 10^3 s^3 + 225\pi(16\pi)^2 \cdot 10^9 s) + 29,0257 \cdot (16\pi \cdot 10^3 s)^2}$$

$$T(s) = \frac{1,893 \cdot 10^9 \cdot s^2}{s^4 + 4,5 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 7,334 \cdot 10^{10} s^2 + 1,599 \cdot 10^{15} s + 1,262 \cdot 10^{21}}$$

