Ondas Planas en medios reales
Reflexión y Transmisión

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

- * **PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS.**
- Propagación de ondas planas en distintos medios
- homogéneos, isotrópicos y lineales, y no acotados espacialmente
- Las ondas planas son una buena aproximación a las ondas reales en la mayoría de las situaciones prácticas.

DIELÉCTRICOS Y CONDUCTORES.

- **Clasificación de materiales: dieléctricos y conductores**
- **La separación NO está muy bien definida, la tierra por ejemplo, se considera conductora hasta ciertas frecuencias, y dieléctrico con pérdidas para frecuencias superiores.**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega\varepsilon \mathbf{E}$$

La relación entre los módulos de las densidades de corriente de conducción y de desplazamiento, resulta ser:

$$\frac{\mathbf{J}_c}{\mathbf{J}_d} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Dieléctricos: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 0,01$

Cuasiconductores: $0,01 < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 100$

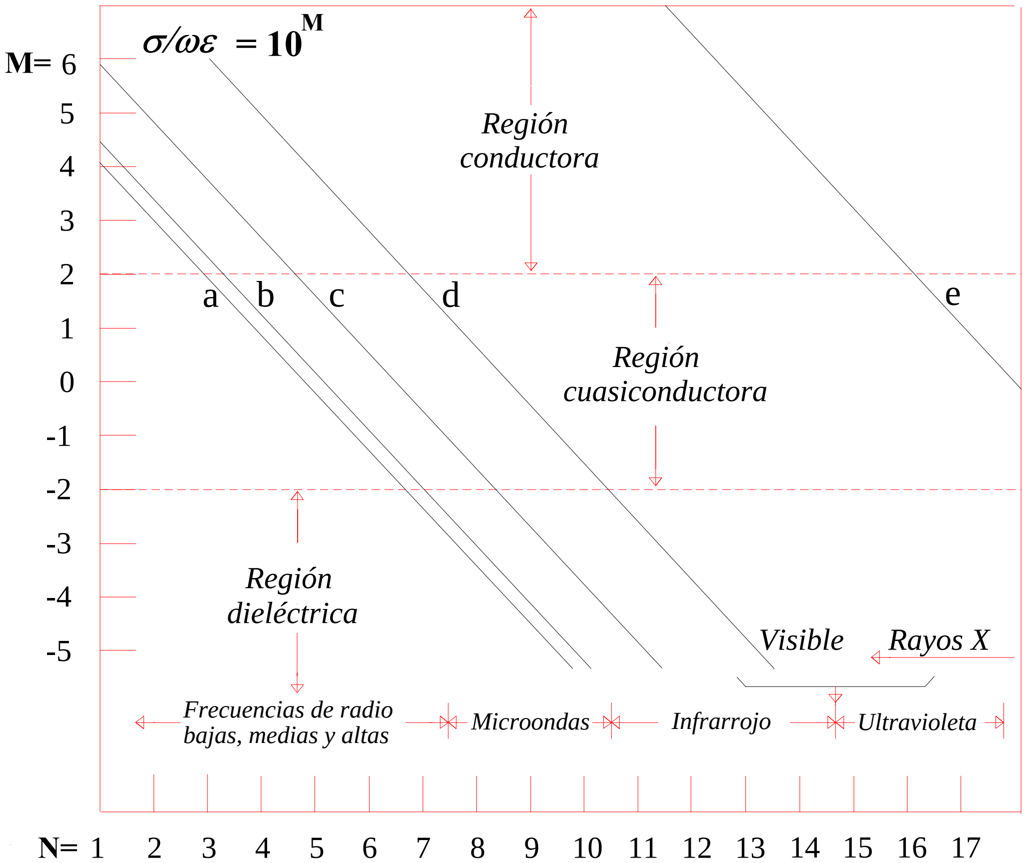
Conductores: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 100$

- **Buenos conductores**, tales como los metales, la relación $\sigma / (\omega \varepsilon)$ es muy superior a la unidad en todo el espectro de las radiofrecuencias. El Cobre a 30.000 MHz,

□ $\sigma / (\omega \varepsilon)$= 3,5·$10^9$.

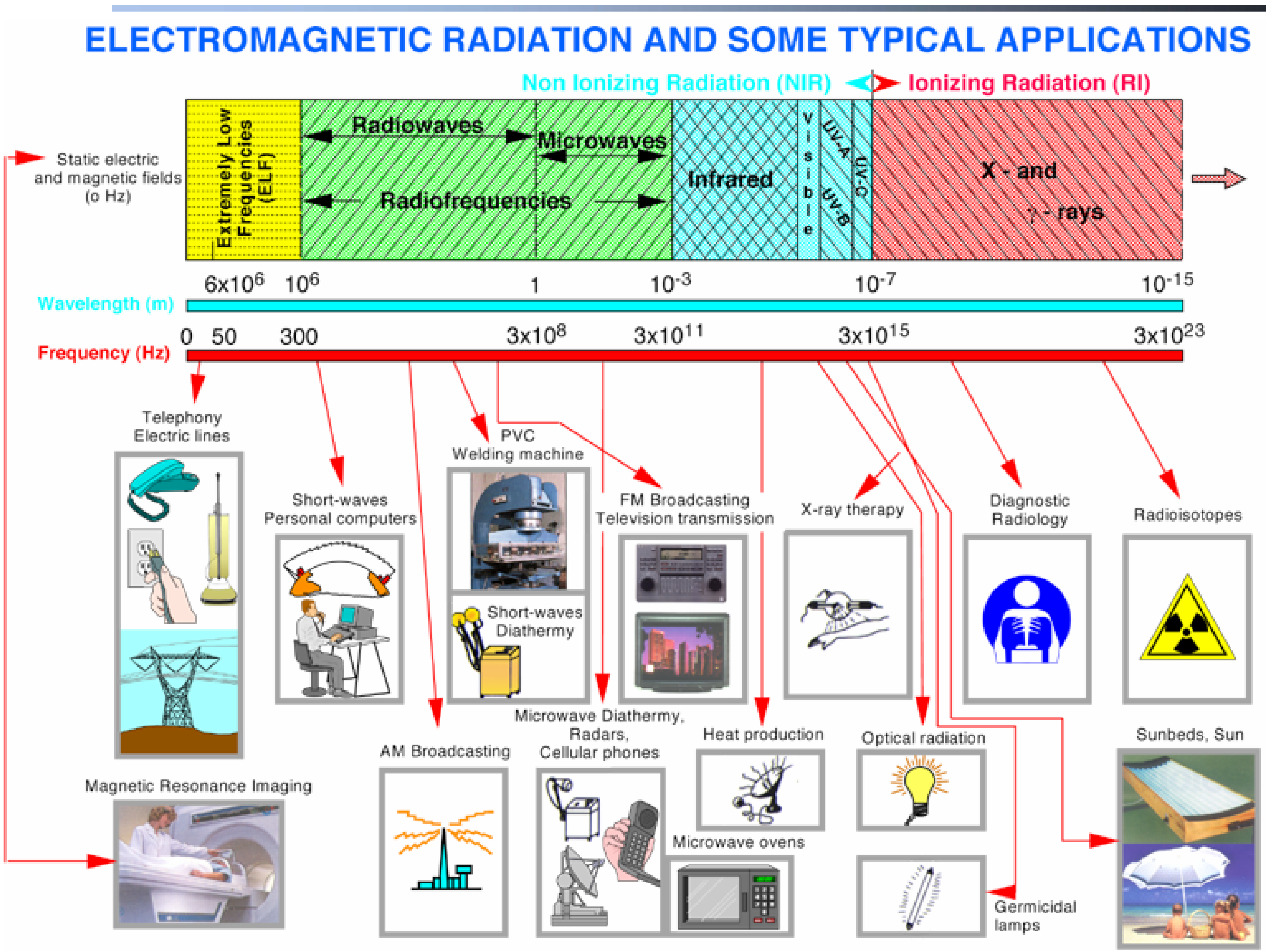
  - Conductores, tanto ε como σ son independientes de la frecuencia.

- **Dieléctricos** o aislantes, la relación $\sigma / (\omega\varepsilon)$ es mucho menor que la unidad
  - Tanto ε como σ son funciones de la frecuencia. $\sigma / (\omega \varepsilon)$ puede ser aproximadamente constante dentro de un rango de frecuencias de interés



(a) *Agua dulce* **(b)** *Terreno urbano* **(c)** *Terreno rural* **(d)** *Agua de mar* **(e)** *Cobre* **Frecuencia = 10^N Hz**

- **La mayoría de los materiales usados, o bien dejan pasar fácilmente las corrientes de conducción o evitan su circulación, es decir se comportan como**
  - **conductores**
  - **o como dieléctricos o aislantes, excepto algunas excepciones entre las que cabe mencionar por su importancia práctica, sobre todo en radioenlaces, a la tierra y al agua dulce o salada.**
- En radioenlaces, a la tierra y al agua dulce o salada, que a bajas frecuencias son buenos conductores a altas frecuencias son buenos dieléctricos.

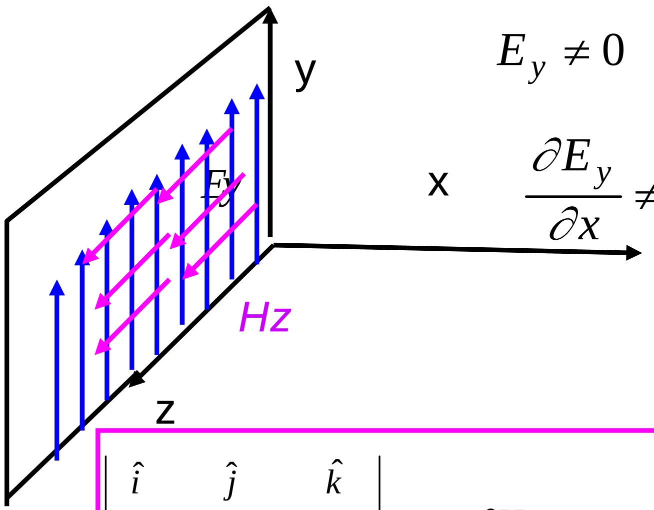


ELECTROMAGNETIC RADIATION AND SOME TYPICAL APPLICATIONS
Non Ionizing Radiation (NIR)
Ionizing Radiation (RI)
Static electric and magnetic fields (o Hz)
Extremely Low Frequencies (ELF)
Radiowaves
Microwaves
Radiofrequencies
Infrared
Visible
UV-A
UV-B
UV-C
X - and γ - rays
6x10^6 10^6 1 10^-3 10^-7 10^-15
Wavelength (m)
0 50 300 3x10^8 3x10^11 3x10^15 3x10^23
Frequency (Hz)
Telephony Electric lines
Short-waves Personal computers
PVC Welding machine
Short-waves Diathermy
FM Broadcasting Television transmission
X-ray therapy
Diagnostic Radiology
Radioisotopes
Magnetic Resonance Imaging
AM Broadcasting
Microwave Diathermy, Radars, Cellular phones
Heat production
Microwave ovens
Optical radiation
Germicidal lamps
Sunbeds, Sun

DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \qquad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

- **Se supone una onda electromagnética plana, el campo eléctrico E está *linealmente polarizado* en la dirección del eje *y*, y se propaga en el sentido del eje *x* positivo, H polarizado en z.**



$$E_y \neq 0 \qquad E_x = 0 \qquad E_z = 0 \qquad H_z \neq 0 \qquad H_x = 0 \qquad H_y = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix} = 0\hat{i} - \frac{\partial Hz}{\partial x}\hat{j} + 0\hat{k} = \sigma E_y \hat{j} + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y(x) & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{\partial E_y(x)}{\partial x}\hat{k} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}\hat{k}$$

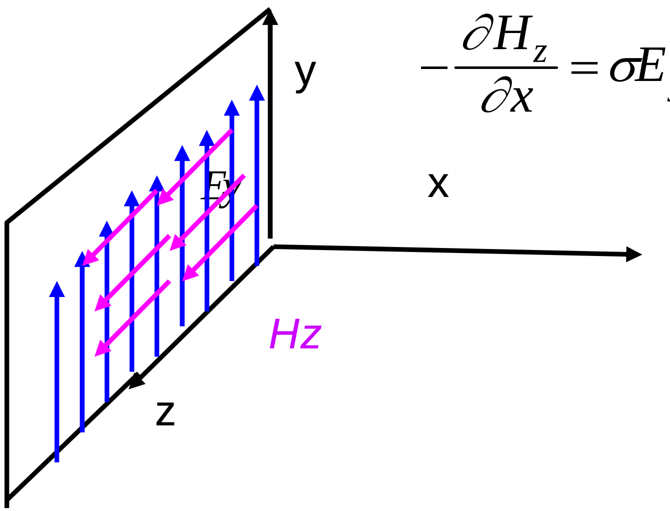
DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & 0 & H_z(x)\end{vmatrix}=0\hat{i}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\hat{j}+0\hat{k}=\sigma E_y\hat{j}+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{j}$$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & E_y(x) & 0\end{vmatrix}=0\hat{i}+0\hat{j}+\partial E_y(x)/\partial x\,\hat{k}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\hat{k}$$



$$-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\sigma E_y+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}\quad\boxed{\frac{\partial}{\partial t}}\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\sigma\frac{\partial E_y}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\quad\boxed{\frac{\partial}{\partial x}}\Rightarrow\quad-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\sigma\frac{\partial E_y}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0}$$

DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\boxed{\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial E_y}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}$$

- **Ecuación de propagación de campo eléctrico de una onda electromagnética plana, dentro de un material dieléctrico o conductor.**
- **Si imaginamos una variación sinusoidal, usamos fasores**

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - j\,\omega\sigma E_y + \omega^2\varepsilon E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \left(j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon\right)E_y = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$ **Constante de Propagación**

DESARROLLO GENERAL DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN.

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0}$$

- **Forma simplificada de la ecuación de propagación, el tiempo no está en forma explícita, variación temporal del tipo armónica.**
- **UNA SOLUCIÓN PARA LA ONDA INCIDENTE DE CAMPO ELÉCTRICO RESULTA SER ENTONCES:**

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$Hz = \frac{1}{\mu} \int \frac{\partial Ey}{\partial x} dt = -\frac{1}{\mu} \gamma \int E_0\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x} .dt = \frac{\gamma}{j\,\omega\mu} E_0\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}$$

$$H_z = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_y \qquad H_z = \frac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}{j\omega\mu} E_y$$

- **IMPEDANCIA INTRINSECA DEL MEDIO**

$$Zi = \frac{Ey}{Hz} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

Relación entre las ondas incidentes de campos eléctrico y magnético.

- **Un material dieléctrico real, con pérdidas.**

$$E_y = E_0\, e^{j\omega t}\, e^{-\gamma x}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

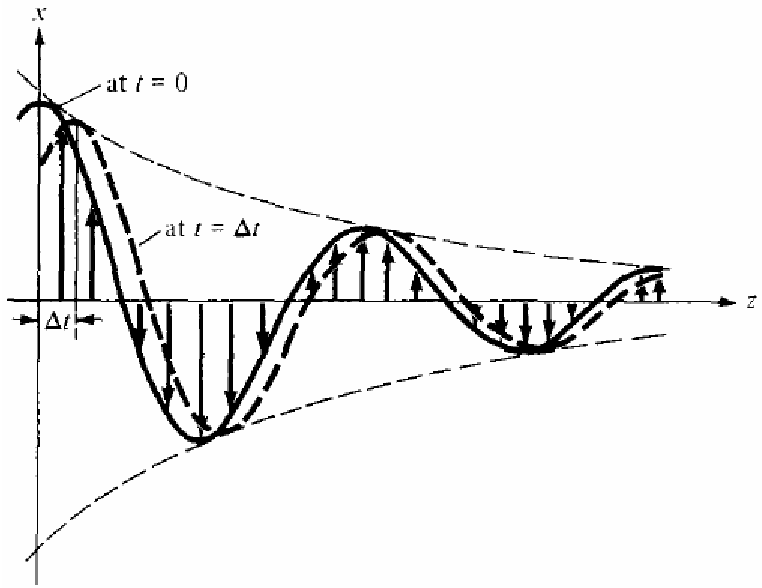
$$E_y = E_0\, e^{-\alpha x}\, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

constante de fase.

constante de atenuación

$$\alpha = Re\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]}$$

$$\beta = Im\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]}$$



- **Para buenos dieléctricos (bajas pérdidas), se cumple que:**

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$$

y en tales casos es posible realizar la siguiente aproximación binómica:

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$$

$$x << 1$$

donde se han usado los dos primeros términos del desarrollo binómico de la raíz cuadrada.

$$\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \cong 1+\frac{\sigma^2}{2\,\omega^2\varepsilon^2}$$

$$\alpha \cong \omega\sqrt{\frac{\mu\,\varepsilon}{2}\left(1+\frac{\sigma^2}{2\,\omega^2\varepsilon^2}-1\right)} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Como se puede apreciar, la constante de atenuación es pequeña, al serlo la conductividad, tendiendo a cero cuando ésta lo hace.

$$\beta = Im\left\{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}\right\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]} \qquad \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \cong 1+\frac{\sigma^2}{2\,\omega^2\varepsilon^2}$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x$$

$$x << 1$$

$$\beta \cong \omega\sqrt{\frac{\mu\,\varepsilon}{2}\left(1+\frac{\sigma^2}{2\,\omega^2\varepsilon^2}+1\right)} = \omega\sqrt{\mu\,\varepsilon}\left(1+\frac{\sigma^2}{8\,\omega^2\varepsilon^2}\right)$$

Impedancia característica o *impedancia intrínseca* del medio.

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(j\omega\mu)^2}{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\sigma}{j\,\omega\varepsilon}}}$$

Ecuación que puede ser aproximada por expansión binómica en:

$$Z_i \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

- **Dieléctrico ideal Zi es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente),**
- **Dieléctrico real con bajas pérdidas, Zi es compleja (el campo magnético atrasa ligeramente en el tiempo con respecto al campo eléctrico).**

$$Z_i \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \qquad \left|Z_i\right| \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2}\right)}$$

Este módulo resulta ser igual a la impedancia intrínseca de un medio dieléctrico perfecto (sin pérdidas), **multiplicada por el factor, mayor a la unidad pero muy próximo a ella.**

La relación entre campo eléctrico y magnético es menor en un medio dieléctrico que en el vacío εr>1.

$$Z_i = Z_o \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

IMPEDANCIA CARÁCTERÍSTICA DE UN MEDIO CONDUCTOR

$$H_z = \frac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + \cancel{j\omega\varepsilon})}}{j\omega\mu} E_y \qquad \frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{j\omega\mu} = \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\mu}} = \frac{1}{Zi} \qquad \delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\sigma\mu}}$$

$$Z_i = \frac{E_y}{H_z} = \frac{E_0}{H_0} e^{j\xi} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\,\delta} \qquad Z_i = R + j\,X = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

$$\xi = 45^\circ$$

El ángulo de fase de la impedancia característica resulta de 45 grados

$$|Z_i| = \left|\frac{E_y}{H_z}\right| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

- **Dieléctrico perfecto la Zi es resistiva pura (campos eléctrico y magnético en fase temporalmente)**
- **La Zi para un medio conductor es una cantidad compleja (el campo magnético atrasa 45° respecto al campo eléctrico).**