

---

# Electrostática

## Clase 3

Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson  
Teorema de Unicidad. Métodos de las Imágenes

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

## Ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[ \text{V/m}^2 \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[ \text{V/m}^2 \right]$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[ \text{V/m}^2 \right]$$

la divergencia del gradiente es el  
*laplaciano*

$$\nabla^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

***En coordenadas cartesianas***

Debe notarse que la ecuación de Poisson, tiene implícita las propiedades de irrotacionalidad y de la Ley de Gauss, lo cual implica que contiene la información completa de la electrostática equivalente a la Ley de Coulomb

---

$$\nabla^2 = \text{div}(\text{gradiente}) = \text{Laplaciano}$$

- **Cartesianas**

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

- **Esférica**

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

- **Cilíndricas**

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

---

El operador  $\nabla^2$ , la divergencia de un gradiente (un escalar)

implica la derivación con respecto a más de una variable; en consecuencia, la ecuación de Poisson es:

*una ecuación diferencial parcial que relaciona en cada punto la forma de variación del potencial con la densidad de carga presente en él.*

*Su resolución nos permite obtener el potencial*

$V(x, y, z)$  en cualquier punto del espacio, para lo cual es necesario conocer

- la dependencia funcional de la distribución de carga  $\rho(x, y, z)$
- *y las condiciones de frontera de dicho espacio*

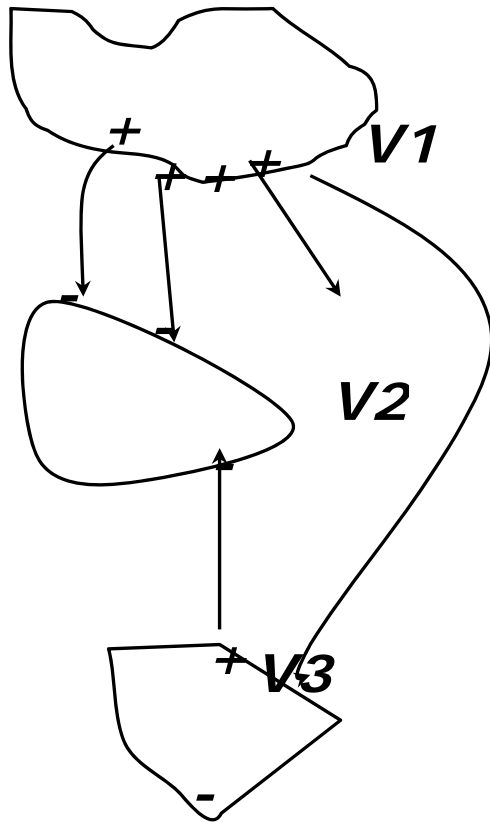
- Para el caso en que en cada punto de la región considerada la distribución de carga sea nula

$$\nabla^2 V = 0 \quad \left[ V / m^2 \right]$$

- A esta expresión se la denomina *ecuación de Laplace* y es de gran importancia en el estudio de los campos. Su resolución nos permite determinar el potencial  $V(x, y, z)$  en una región del espacio sin cargas, siendo necesario conocer las condiciones de frontera de esa región

# *Ecuación de Laplace*

---

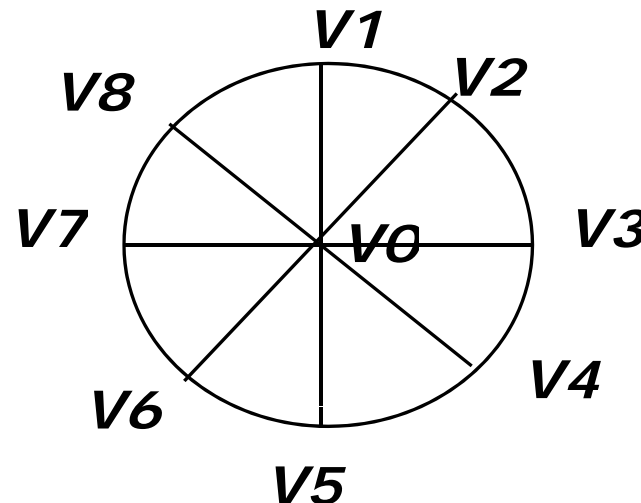


- Es de interés, cuando debe hallarse el campo en una región donde existen conductores inmersos en un medio vacío.
- Si se tiene conductores donde la carga está distribuida superficialmente, el problema consiste en encontrar el campo o el potencial en el espacio limitado por esos conductores.
- En dicho espacio al no existir cargas se verifica la ecuación de Laplace
- y su solución con las condiciones de límite impuestas por el potencial de los conductores nos permite hallar el valor del potencial en cada punto.

## *Ecuación de Laplace*

---

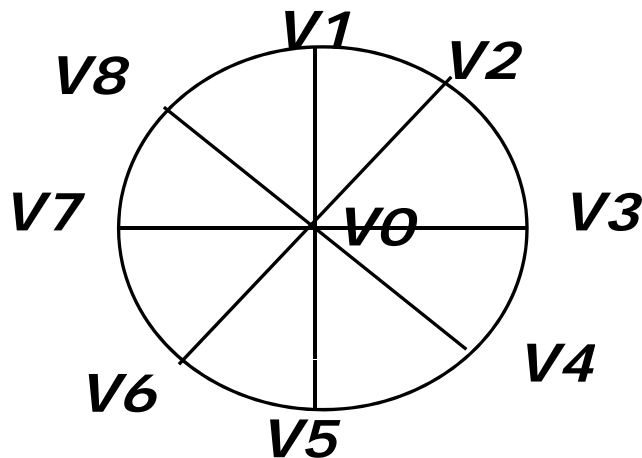
- Una propiedad importante de las funciones que son soluciones de la ecuación de Laplace, para el caso electrostático del potencial  $V(x, y, z)$ , es que si se define una esfera cualquiera situada completamente en la región en que la ecuación es satisfecha, el valor medio del potencial en la superficie de la esfera es igual al valor del potencial en el centro de la misma.



$$V_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i$$

## Propiedades de la Ecuación de Laplace

- Así, el potencial **no puede tener ni máximos ni mínimos** en el interior de la región considerada.
- Estos valores extremos solo pueden ocurrir en los límites de la región.
- Si  $V(x, y, z)$  es solución de la ecuación de Laplace y es constante sobre una superficie cerrada cualquiera, el potencial es constante en todo el volumen encerrado por tal superficie



$$V1 = V2 = V3 \dots = Vi = Vn = V0$$



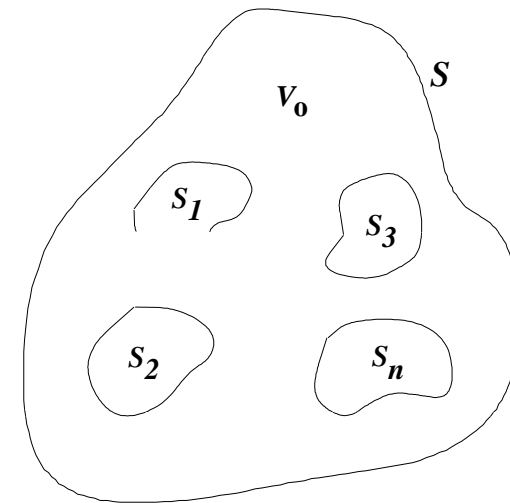
## *Teorema de Unicidad*

---

- La solución de un problema electrostático en una región sin cargas, estará dada por una función  $V(x, y, z)$ 
  1. cumplir con la ecuación de Laplace en todos los puntos interiores de la región,
  2. debe satisfacer los valores de potencial en el límite de dicha región.
- ¿es posible que exista más de una función  $V(x, y, z)$  que cumpla con tales condiciones?
- La respuesta la da el denominado *teorema de Unicidad*
  - establecer que existe una *única función*  $V(x, y, z)$  que satisface *simultáneamente*
    - la ecuación de Laplace,
    - y una determinada distribución de potencial *en el límite* de una dada región.

### ENUNCIADO

- *Dos soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren cuando mucho en una constante aditiva.*
- Un volumen  $V_0$ , limitado por las superficies  $S, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$
- Supongamos que existan dos soluciones diferentes para el potencial, sean las funciones  $V_1$  y  $V_2$



$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \nabla^2 V_2 = 0 \rightarrow \text{Laplace}$$

$$V_1(S) = V_2(S); \quad V_1(S_1) = V_2(S_1); \quad V_1(S_2) = V_2(S_2); \dots; \quad V_1(S_n) = V_2(S_n) \rightarrow \text{Condiciones límites}$$

## Teorema de Unicidad

---

- Se define una función  $\varphi$ , tal que:

$$\varphi = V_1 - V_2 \quad [\text{V}]$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 \quad \begin{array}{l} \text{en todo el volumen } V_0 \\ \text{en todo el volumen } V_0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_S = V_1(S) - V_2(S) \\ \varphi_S = V_1(S_1) - V_2(S_1) \\ \vdots \\ \varphi_S = V_1(S_n) - V_2(S_n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en cada Superficie} \\ \text{(Condición de Dirichlet)} \end{array}$$

Tenemos que demostrar que  $\varphi$  es idéntica a cero en todo el  $V_0$

- Definimos ,  $\varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi$  y aplicamos el teorema de la divergencia

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) dv = \iint_{S+S_1+S_2+\dots+S_n} \varphi \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} ds$$

dado que  $\varphi=0$  sobre las superficies, la integral del segundo miembro se anula y por ende será nula la del primer miembro.

Si en el integrando de esta última integral se reemplaza la igualdad:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) = \varphi \nabla^2 \varphi + (\vec{\nabla} \varphi)^2$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{Cumple con Laplace en el volumen}$$

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \varphi)^2 dv = 0$$

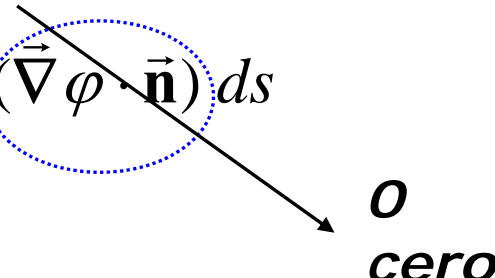
dado que el integrando no puede ser negativo, la igualdad anterior implica que, en todo el volumen  $V_0$ :

$$\vec{\nabla} \varphi = 0 \rightarrow V_1 - V_2 = Cte$$

## Teorema de Unicidad

- El valor de la constante puede ser evaluado en los límites y dado que sobre las superficies límites  $\phi = 0$ , resulta  $Cte. = 0$ .
- De esta forma es cero en todo el volumen  $v_0$  y sobre las superficies que limiten ese volumen.
- Así se verifica que si  $V_1$  y  $V_2$  son soluciones de la ecuación de Laplace y satisfacen las condiciones de potencial en el límite,  $V_1 = V_2$  y la solución es única.

La integral del segundo miembro de la expresión también es cero en el caso de que la componente normal del gradiente se anule sobre las superficies límites de  $v_0$ . Condición de Neumann

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) dv = \iint_{S+S_1+S_2+\dots+S_n} \phi (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}) ds$$


*o  
cero*

## Teorema de Unicidad

---

- Por lo que siguiendo igual razonamiento que en el caso anterior puede indicarse que si  $V_1$  y  $V_2$  son soluciones de la ecuación de Laplace y satisfacen las condiciones de la *componente normal del gradiente* sobre las superficies límites,  $V_1 = V_2 + Cte.$  y la solución es única a menos de una constante.
- Si bien el teorema de unicidad se demostró con la ecuación de Laplace, es igualmente válido para la ecuación de Poisson, ya que en tal caso:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

y se continúa la demostración de igual forma que en el caso anterior.

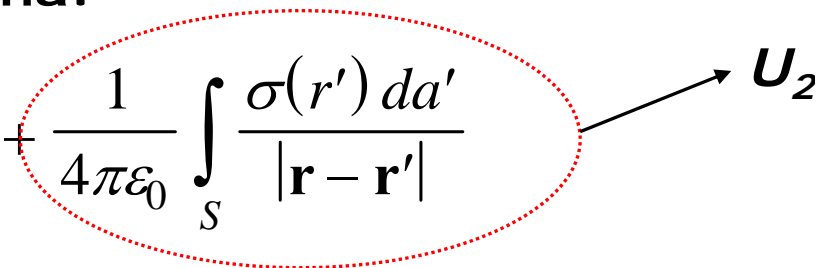
- La importancia del teorema de unicidad reside en el hecho de que se justifica intentar cualquier método de solución del problema electrostático, **en la seguridad de que si se encuentra una solución, esa es única y el problema está resuelto.**

- Método

### *Imágenes electrostáticas*

- Para un conjunto dado de condiciones en la frontera,
- la solución a la ecuación de Laplace es única, de modo que si se obtiene una solución  $U(x, y, z)$
- por cualquier medio, y si esta  $U$  satisface todas las condiciones en la frontera, entonces se ha efectuado una solución completa al problema.

- Es un procedimiento para lograr este resultado sin resolver específicamente una ecuación diferencial.
- Supóngase que el potencial pueda expresarse en la siguiente forma:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$


The diagram shows the integral term  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  from the equation above, which is circled with a red dotted line. An arrow points from this circled term to the label  $U_2$ .

- donde  $U_1$  es ya sea una función específica o fácilmente calculable
- La integral representa la contribución al potencial, de la carga superficial, sobre todos los conductores que aparecen en el problema. No se conoce la función  $\sigma$ .
- La integral se sustituye por un potencial  $U_2$  que se deba a una distribución de carga virtual *especificada*

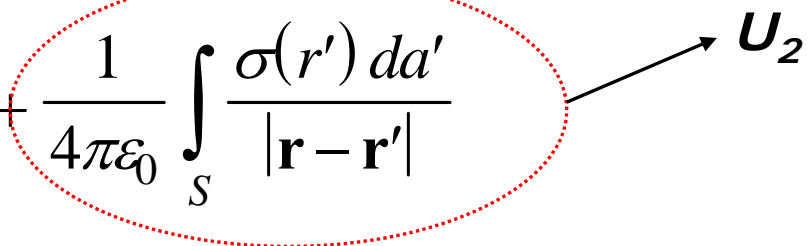


- Las superficies de todos los conductores deben coincidir con superficies equipotenciales de los  $U1 + U2$  combinados.
- Las *cargas virtuales especificadas que producen el potencial  $U2$  se denominan cargas imagen.*
- No existen realmente.
  - Su posición aparente está *dentro* de los diversos conductores,
  - el potencial  $U = U1 + U2$  es una solución válida al problema sólo en la región exterior a los conductores.

## *Método de las Imágenes*

---

- El método de imágenes no es otra cosa que adivinar en forma inteligente la forma que adopta la integral .

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$


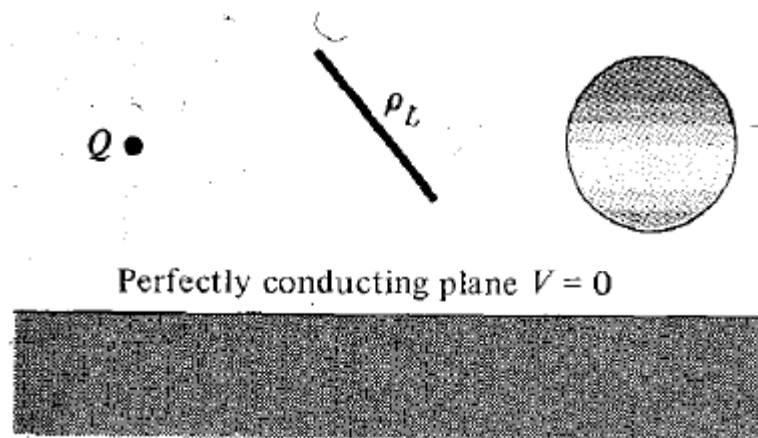
The diagram shows the integral term  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  circled in red. An arrow points from the circle to the label  $U_2$ .

- el potencial  $U_1(\mathbf{r})$  satisface la ecuación de Poisson y propondremos que la integral  $U_2(\mathbf{r})$  tendrá la misma forma que la función  $U_1$ .
- Agregar distribuciones de carga imaginarias al problema.
- Estas cargas imaginarias tendran, en general, la forma de la carga real fuera del conductor

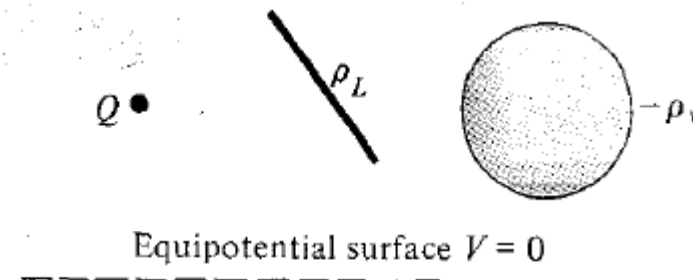
## *Método de las Imágenes*

Si la carga real es:

- **puntual** sera razonable poner **cargas "imagenes" puntuales**
- **lineal**(como un alambre cargado) sera mas razonable poner cargas lineales, etc.
- cargas imagen se colocan en una región del espacio donde NO calculamos el potencial o campo electrostático, puesto que si estuvieran allí, cambiaríamos la forma de la ecuacion de Poisson.
- Asi la tarea del método de imagen será con estas cargas imagen construir superficies equipo-tenciales

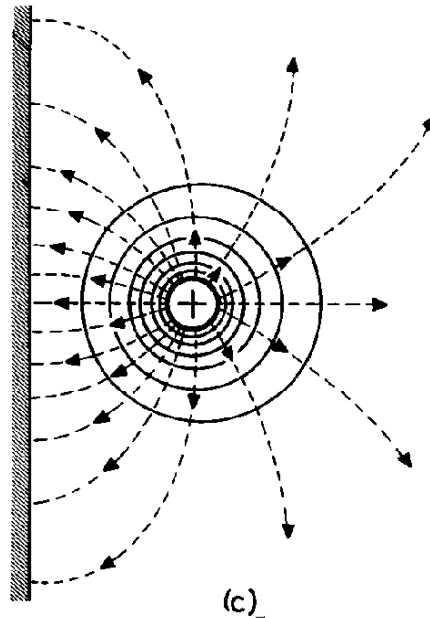
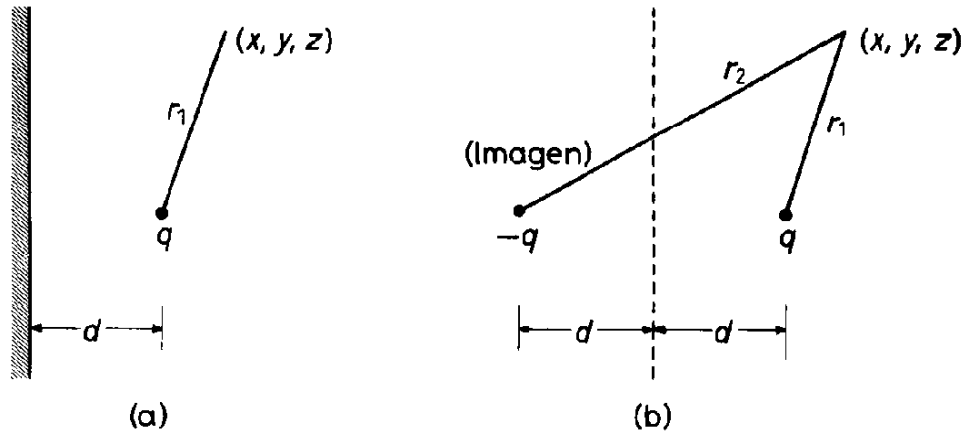


(a)



(b)

## Método de las Imágenes



Como ejemplo de este método, se resolverá el problema de una carga puntual  $q$  colocada cerca de un plano conductor de extensión infinita.

el plano conductor tal que coincida con el plano  $yz$ ,

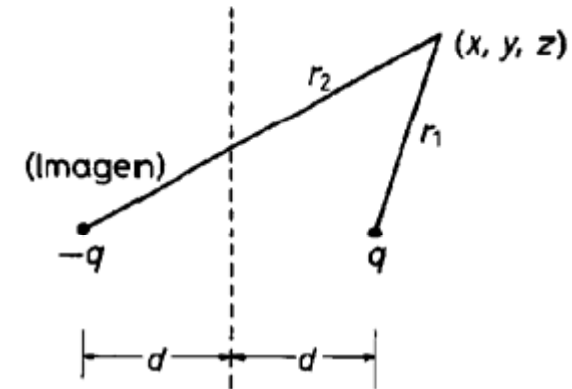
y supóngase que la carga puntual está en el eje  $x$  a una distancia  $x=d$

## *Método de las Imágenes*

$$U_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}$$

- dos cargas puntuales ( $q$  y  $-q$ ) separadas por una distancia  $2d$ , como el de la Figura
- El potencial de estas dos cargas

$$U(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$



- $U$ : satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos exteriores a las cargas
- se reduce a una constante (es decir, cero) sobre el plano que biseca perpendicularmente al segmento que une las dos cargas

- *Debido a que las soluciones de la ecuación de Laplace son únicas el potencial es correcto en todo el semiespacio exterior al plano conductor.*
- *La carga  $-q$  da origen al potencial  $U_2$*

$$U_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}$$

se llama la *imagen de la carga puntual  $-q$* .

*la imagen no existe en realidad, y la solución da correctamente el potencial en el exterior del plano conductor.*

$$U_1 + U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}$$

- El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en la región exterior puede obtenerse como el gradiente negativo o *superponiendo el efecto de las dos cargas*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^+ + \mathbf{E}_2^-$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x-d)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left((x-d)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{(x+d)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left((x+d)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right]$$

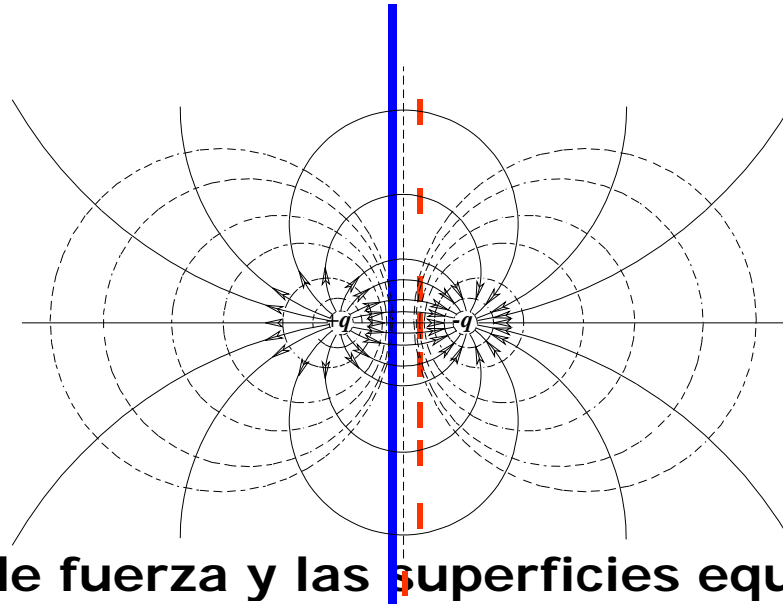
$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{(-d)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(d^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{(d)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(d^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right]_{x=0}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{(-d)\mathbf{i}}{\left(d^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{(d)\mathbf{i}}{\left(d^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right]_{x=0}$$

- Como la superficie del plano conductor representa una interface que relaciona dos soluciones de la ecuación de Laplace, es decir,  $U=0$  y  $U(x,y,z)$  la discontinuidad en el campo eléctrico se acomoda por una densidad de carga superficial  $\sigma$  sobre el plano

$$\sigma(y, z) = \varepsilon_0 E_x \big|_{x=0} = \frac{-q d}{2\pi (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$





- Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales adecuadas al problema original son las mismas líneas de fuerza y superficies equipotenciales adecuadas al problema de dos cargas puntuales
- excepto que en el último caso, las líneas de flujo continuarían en la mitad izquierda del plano.
- *todas* las líneas de flujo eléctrico que normalmente convergen en la carga imagen son interceptadas por el plano
- En consecuencia, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen  $-q$ .

- Es evidente que la carga puntual  $q$  ejerce una fuerza atractiva sobre el plano, debido a que la carga superficial inducida es de signo contrario. Por la ley de Newton de acción y reacción, esta fuerza es igual en magnitud a la fuerza ejercida sobre  $q$  por el plano. Como la carga puntual no experimenta ninguna fuerza debida a su propio campo, que es exactamente la fuerza ejercida sobre él por la carga imagen.

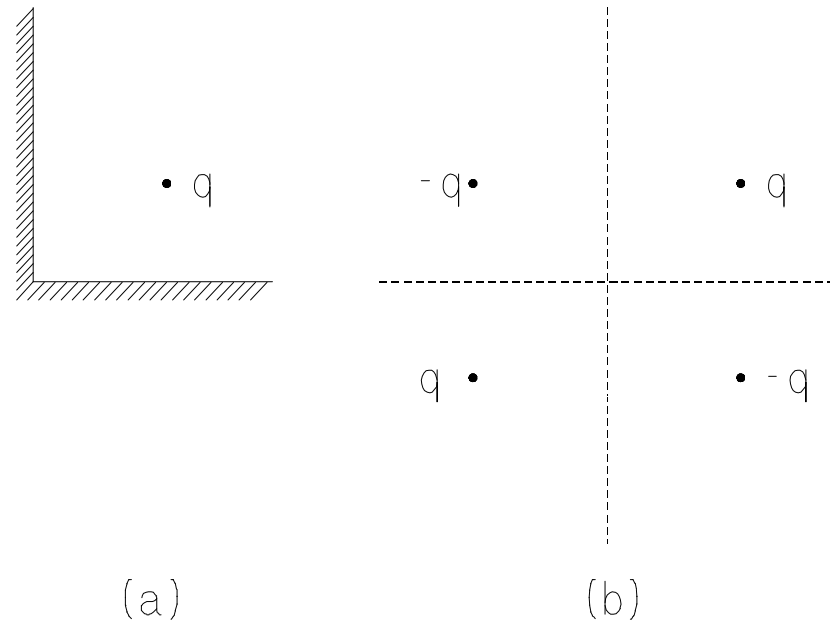
$$\mathbf{F} = -q \nabla U_2$$

$$\mathbf{F} = q \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{(x+d)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left((x+d)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right]_{x=d; y=z=0}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{i}}{(2d)^2} \right]$$

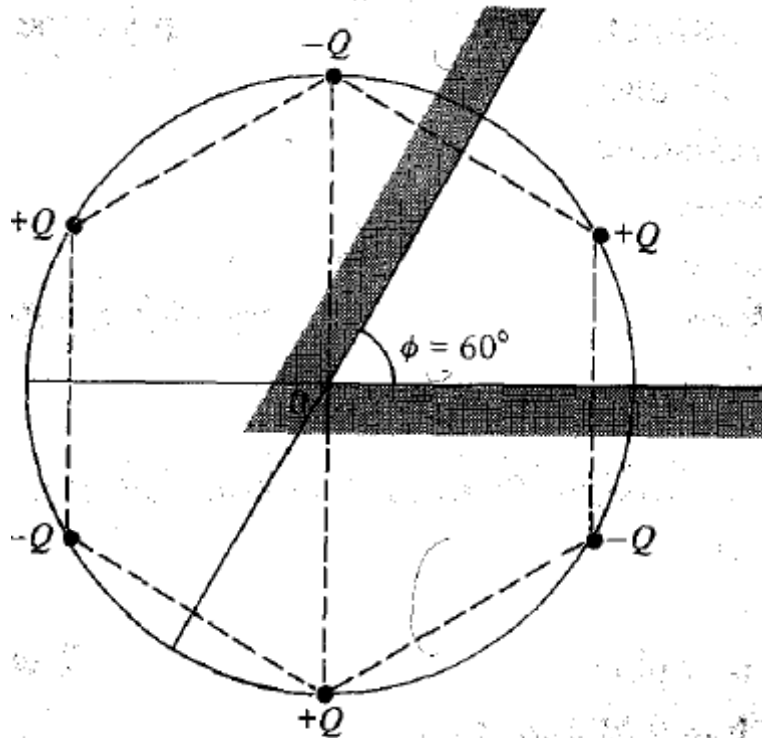
## *Método de las Imágenes*

- Otro problema que podría resolverse simplemente en función de las imágenes es el de determinar el campo eléctrico de una carga puntual  $q$  en la vecindad de la intersección de un ángulo recto formado por dos planos conductores
- los dos planos, representados en esta figura en línea de puntos, son superficies de potencial cero, debido a los potenciales combinados de  $q$  y de las tres cargas imagen.



## *Método de las Imágenes*

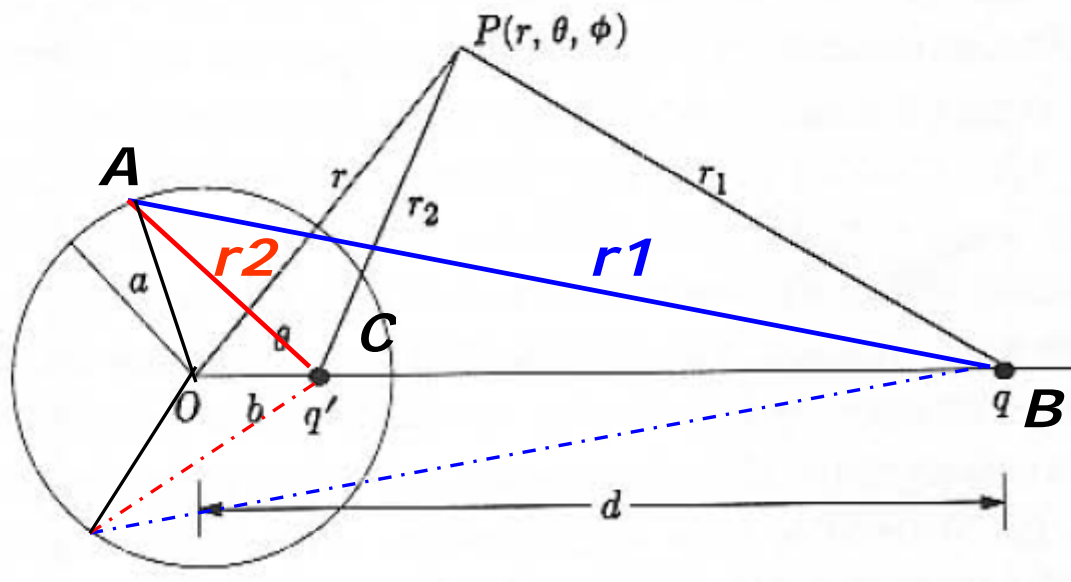
- Imágenes de una carga puntual entre dos planos infinitos que se intersectan en un ángulo de 60 grados.
- La cantidad de imágenes es finita si el ángulo es múltiplo de 360 grados



$$N = \left( \frac{360^\circ}{\phi} - 1 \right)$$

## Método de las Imágenes

- Carga puntual  $q$  en la vecindad de una esfera conductora



$$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$U_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} = cte$$

$$U_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0$$

$$q' = -\frac{q \cdot r_2}{r_1}$$

*Semejanza de Triángulos*

$$\triangle AOC \approx \triangle BOA$$

## Semejanza de Triángulos

$$\triangle AOC \approx \triangle BOA$$

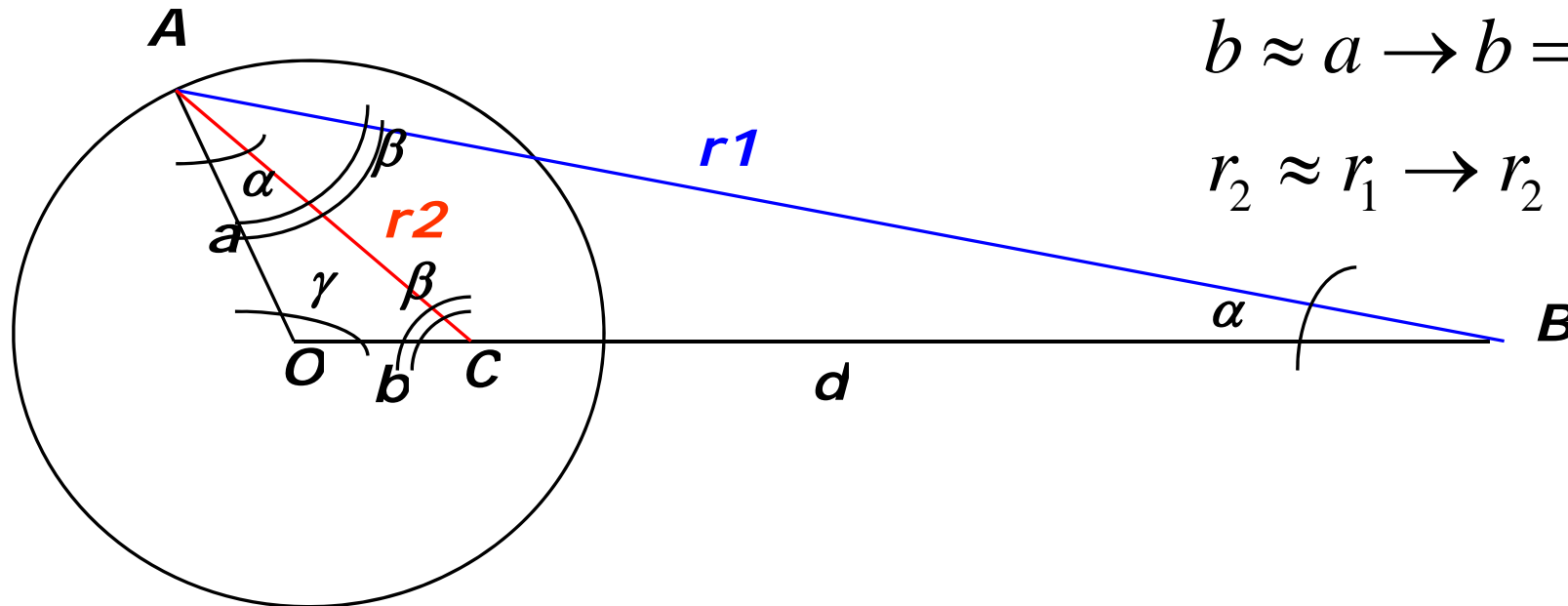
$$AO = a \quad BO = d \quad \frac{r_1}{\text{sen}\gamma} = \frac{d}{\text{sen}\beta} = \frac{a}{\text{sen}\alpha}$$

$$OC = b \quad OA = a \quad \frac{r_2}{\text{sen}\gamma} = \frac{a}{\text{sen}\beta} = \frac{b}{\text{sen}\alpha}$$

$$CA = r_2 \quad AB = r_1 \quad \frac{r_2}{\text{sen}\gamma} = \frac{a}{\text{sen}\beta} = \frac{b}{\text{sen}\alpha} \quad a \approx d \rightarrow a = k.d$$

$$b \approx a \rightarrow b = k.a$$

$$r_2 \approx r_1 \rightarrow r_2 = k.r_1$$



## Método de las Imágenes

### Semejanza de Triángulos

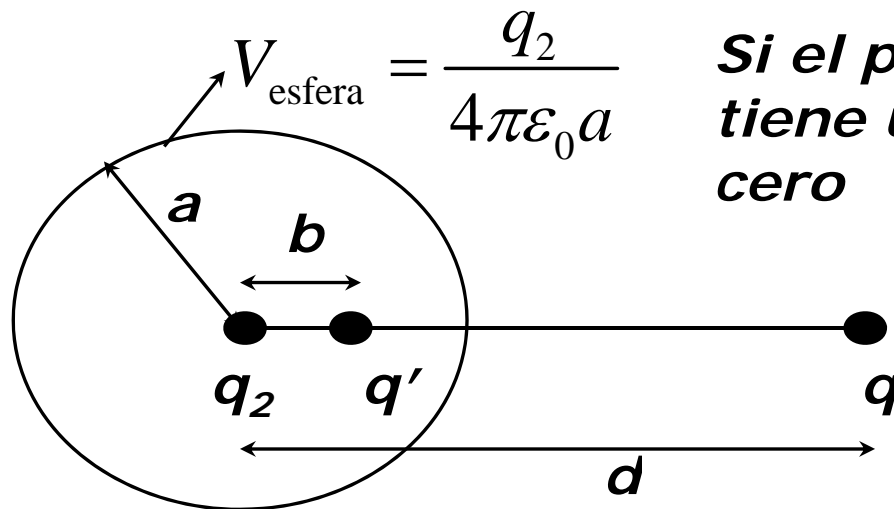
$$U_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0$$

$$q' = -\frac{q \cdot r_2}{r_1} = -\frac{q \cdot a}{d}$$

$$b = \frac{a \cdot a}{d} = \frac{a^2}{d}$$

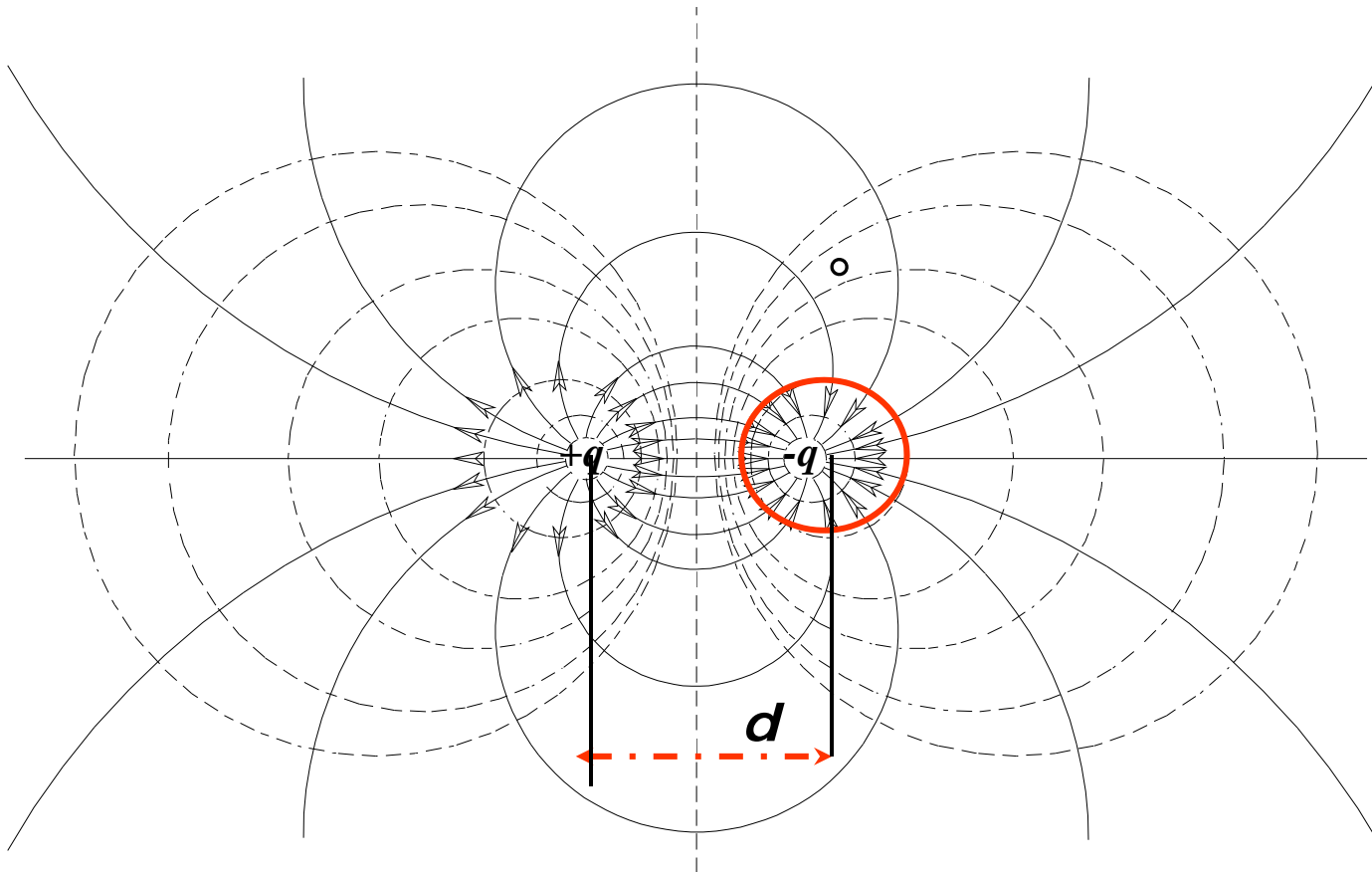
$$\triangle AOC \approx \triangle BOA$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a}{d} = \frac{b}{a}$$



***Si el potencial de la esfera tiene un valor distinto de cero***

- **Línea de Carga cercana a un cilindro conductor paralelos**





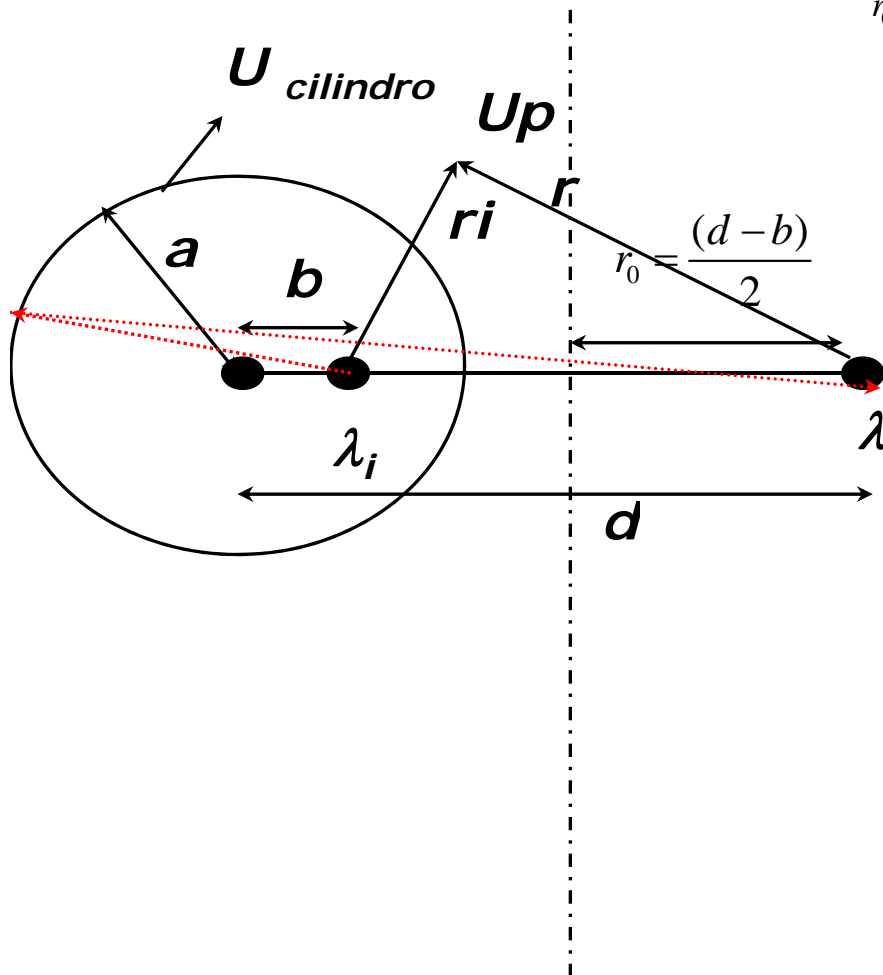
- La línea de carga  $\lambda$  a una distancia  $d$  del centro del cilindro, de radio  $a$
- La línea de carga y el cilindro conductor de longitud infinita
  - La imagen debe ser una línea de carga paralela al eje del cilindro para que la superficie de radio  $a$  sea equipotencial
  - Debido a la simetría debe estar sobre el eje  $d$ , dentro del conductor
  - Supongamos que  $\lambda_{\text{imagen}} = -\lambda$ , y probemos la solución si cumple con las condiciones de frontera

## Método de las Imágenes

$$U = - \int_{r_0}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$r_0 \rightarrow$  es la distancia desde la carga a la referencia

$r_{0i} \rightarrow$  es la distancia desde la carga imagen a la referencia



$$U_p = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{0i}}{r_i}\right)$$

$$r_0 = r_{0i} = \frac{(d-b)}{2} \rightarrow \text{ref. equi.}$$

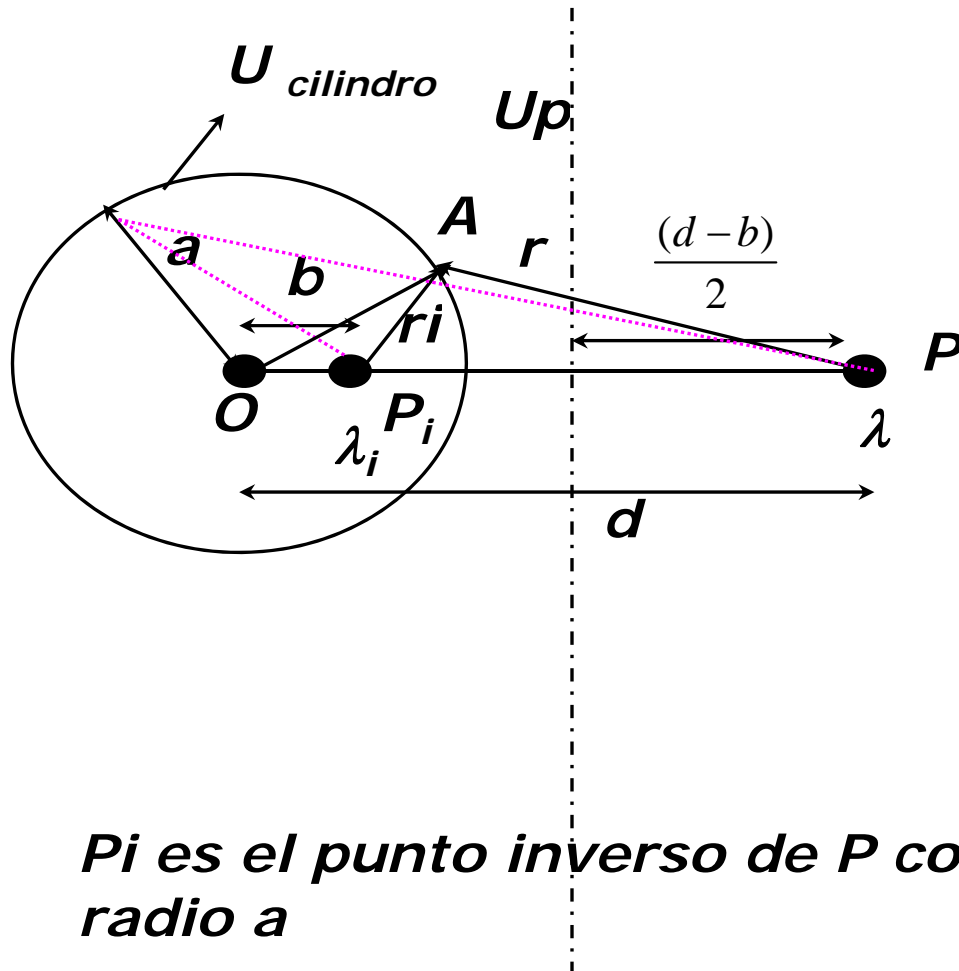
$$U_p = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_i}{r}\right)$$

$$U_{cilindro} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_i}{r}\right) = cte$$

$$\frac{r_i}{r} = cte$$

# Método de las Imágenes

## Semejanza de Triángulos



$$\triangle AOP \approx \triangle P_iOA$$

$$a \approx d \rightarrow a = k.d$$

$$b \approx a \rightarrow b = k.a$$

$$r \approx r_i \rightarrow r = k.r_i$$

$$\frac{r}{\text{sen}\gamma} = \frac{d}{\text{sen}\beta} = \frac{a}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{r_i}{\text{sen}\gamma} = \frac{a}{\text{sen}\beta} = \frac{b}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{r_i}{r} = \frac{b}{a} = \frac{a}{d} = \text{constante}$$

$$b = \frac{a^2}{d}$$

*Pi es el punto inverso de P con respecto al circulo de radio a*

## Un cilindro conductor sobre un plano conductor

$$b = \frac{a^2}{2h}$$

$$h \gg a$$

$$b \cong 0$$

*La carga se considera en el centro*

