Análisis de Sistemas y Señales
Curso 2023

Tema 9 - Transformada Z

Santiago Rodríguez

Transformada Z - Contenido

Señales y Transformadas

Señales y Sistemas de Variable independiente discreta.

- Señales de energía finita $\rightarrow$ Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.
- Señales de potencia finita $\rightarrow$ TFTD + Deltas de Dirac
- Sistemas estables $\rightarrow H(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{h[n]\}$
- Respuesta de sistemas inestables (o a señales que no tienen TFTD) $\rightarrow$ Transformada Z

Transformada Z

Señales (V.I. $\in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ Funciones de variable compleja

Utilidad:

- Análisis de señales y sistemas que no tienen TFTD
- Determinación de estabilidad de sistemas
- Descomposición de sistemas en bloques simples
- Manipulación de diagramas en bloques
- Diseño de sistemas lineales

Filtrado!

Definición

Transformada Z (señales discretas)

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in RDC \subset \mathbb{C}$$

- *RDC* del plano complejo es la región de convergencia de la transformada.
- $X(z)$ es una función de variable compleja analítica en su región de convergencia.

Relación con la TFTD

Escribiendo $z = re^{j2\pi s}$ vemos que

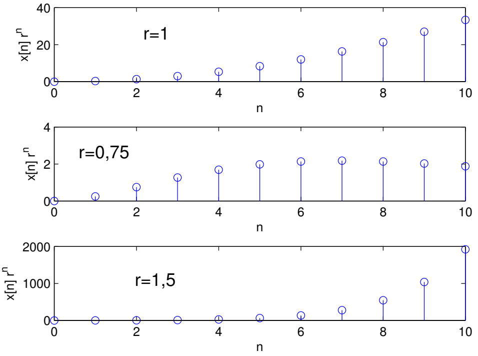
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j2\pi sn} = TFTD\{x[n]r^{-n}\}(e^{j2\pi s})$$

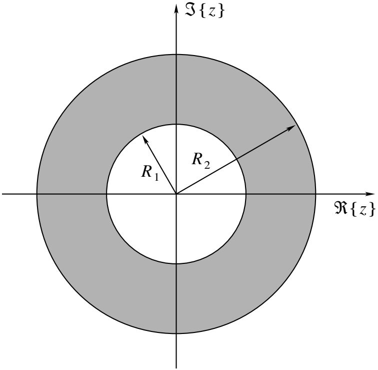
Si $\{r = 1\} \in RDC$:

$$\boxed{X^z(e^{j2\pi s}) = X^f(e^{j2\pi s})}$$

Coincide con la TFTD.

Región de Convergencia (TZ)





Según el valor de r la transformada converge o no.

La región de convergencia es siempre del tipo $\{R_1 < |z| < R_2\}$

Señales sin Transformada Z

Hay señales sin transformada Z.
Ejemplos ??

Pares transformados

Transformada Z:

$x[n]$	$X(z)$	RDC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-(n+1)]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az-1}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \cos(\theta_0 n) u[n]$	$\dfrac{1-a\cos\theta_0 z^{-1}}{1-2a\cos\theta_0 z^{-1}+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformadas Inversas

Antitransformada Z (señales discretas)

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X\}(z) \triangleq \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad \bigcirc \subset RDC$$

Es una integral sobre una cruva cerrada en el plano complejo (puede resolverse usando el teorema de Cauchy).
Alternativas:

- Descomposición en fracciones parciales para transformadas racionales ($H(z) = \sum_k r_k/(1 - p_k z^{-1})$)
- Comparación con pares transformados conocidos
- Expansión en serie

Principales propiedades

Linealidad

$$w[n] = ax[n] + by[n] \Leftrightarrow W(z) = aX(z) + bY(z)$$

Retardo

$$y[n] = x[n-m] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-m}X(z)$$

Convolución

$$w[n] = \{x * y\}[n] \Leftrightarrow W(z) = X(z)Y(z)$$

Sistemas Lineales Invariantes al Desplazamiento (SLID)

Para SLID:

$$y[n] = \{h * x\}[n]$$

Si aplicamos transformada Z:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Transferencia

Definimos la transferencia de un sistema SLID como $H(z) \triangleq \mathcal{Z}\{h[n]\}$, la transformada Z de la respuesta impulsional.

Propiedades y región de convergencia

- $h[n]$ es absolutamente sumable $\Leftrightarrow \{|z| = 1\} \subset RDC$
  (Sistemas estables)
- $h[n]$ es unilateral derecha $\Leftrightarrow \{|z| = \infty\} \subset RDC$
  (Sistemas causales)
- $h[n]$ es unilateral izquierda $\Leftrightarrow \{|z| = 0\} \subset RDC$
  (Sistemas anticausales)
- $h[n]$ es bilateral $\Leftrightarrow \{|z| = 0, |z| = \infty\} \not\subset RDC$
  (Sistemas no causales)

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Pueden resolverse con la transformada Z

$$Y(z) = (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) = \frac{b(z)}{a(z)} X(z)$$

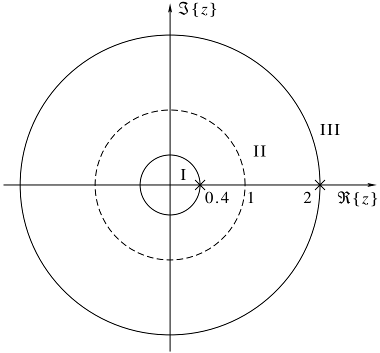
La transferencia del sistema $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ es racional.

Polos y Ceros

En una función de transferencia racional H:

- Raíces del numerador: Ceros ($H(c_k) = 0$)
- Raíces del denominador: Polos ($H(p_k) \to \infty$)
- Ejemplo:

$$H(z) = \frac{z(z+1.2)}{(z-0.4)(z-2)}$$



- Un sistema discreto causal y estable tiene sus polos dentro del círculo unidad

Transformadas unilaterales

Permiten considerar condiciones iniciales

Transformada Z unilateral

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad |z| > R_1$$

Retardo

$$y[n] = x[n-1] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-1} X^+(z) + x[-1]$$

Teoremas del valor inicial y final

$$\text{Si } x[n] = 0 \ \forall n < 0$$

Teorema del valor inicial

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Y si además, $(z-1)X(z)$ existe sobre todo el círculo unidad

Teorema del valor final

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$$

Otras propiedades

Escalamiento en z

$$z_0^n x[n] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Reflexión

$$x[-n] \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Conjugación

$$x^*[n] \Leftrightarrow X^*(z^*)$$

Diferenciación en z

$$nx[n] \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$