

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**IITREE** - Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos

**Cátedra de Campos y Ondas**

**Notas sobre Electrostática en el vacío**

Por los Ings.

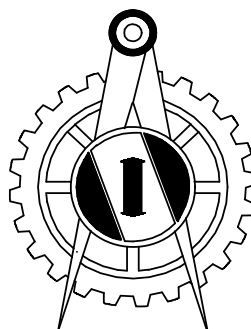
**Roberto H. Frediani**

**Jorge L. Agüero**

**Juan C. Barbero**

**M. Beatriz Barbieri**

**Julieta Z. Vernieri**



**C.E.I.L.P.**

## 1. Ley de Coulomb. Campo eléctrico

### 1. 1. Ley de Coulomb

En la naturaleza existe un tipo de interacción entre cuerpos materiales que puede interpretarse a través de cierto estado que pueden adquirir los cuerpos denominado *electrización*. Para cuantificar este estado y por ende la interacción, es necesario definir una magnitud física medible característica del fenómeno, esto es la carga eléctrica. Experimentalmente se observa que existen dos tipos de cargas eléctricas, que se denominan convencionalmente cargas positivas y cargas negativas; notándose además que cargas de igual *tipo* (*signo*) se repelen, mientras que las de distinto *tipo* (*signo*) se atraen.

Para estudiar cuantitativamente la interacción entre cuerpos cargados eléctricamente, resulta conveniente comenzar por el análisis de la más simple de las configuraciones. Esta es la de dos cuerpos puntiformes en reposo, cargados eléctricamente, separados por una cierta distancia. La observación del comportamiento de esta configuración muestra que existe una acción a distancia entre ambas cargas cuyos resultados se expresan por medio de la ley de Coulomb, la cual establece que la fuerza mutua,  $\mathbf{F}_{12}$ , entre dos cargas puntuales,  $q_1$  y  $q_2$ , es proporcional al producto de las cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r_{12}$  que las separa, tiene la dirección de la recta que une ambas cargas y el sentido se corresponde con la atracción de las mismas si son de *distinto* signo o la repulsión si son de *igual* signo. Expresada con notación vectorial en el espacio tridimensional, la forma matemática de la ley de Coulomb es:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \bar{\mathbf{r}}_{12} \quad [\text{N}] \quad [1]$$

donde:

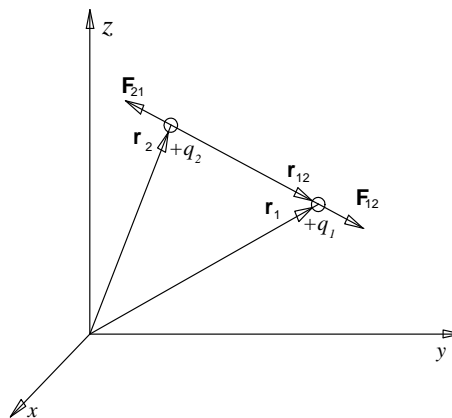
$\mathbf{F}_{12}$  es la fuerza que actúa sobre la carga  $q_1$  en presencia de la carga  $q_2$ . Por el principio de acción y reacción se tiene  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  (ver **Figura 1.1**).

$q_1, q_2$  son magnitudes escalares que dan la medida de la carga eléctrica de los cuerpos puntiformes 1 y 2 respectivamente.

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  es el vector que va desde el punto donde se ubica la carga  $q_1$  hasta la carga  $q_2$ .

$\bar{\mathbf{r}}_{12}$  versor que se expresa a través de  $\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$

$k$  constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades utilizado.



**Figura 1.1.** Ley de Coulomb. Representación gráfica.

Sistemáticamente, intercambiando índices, puede escribirse:

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \bar{\mathbf{r}}_{21} \quad [\text{N}]$$

siendo  $\bar{\mathbf{r}}_{12} = -\bar{\mathbf{r}}_{21}$ , y el resto una magnitud escalar, comparando con [1] se observa que:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

lo cual obviamente se corresponde con el principio de acción y reacción (ver **Figura 1.1**).

Utilizando el Sistema Internacional de Unidades (SI), la fuerza se expresa en Newton [N], las cargas en Coulomb [C], las distancias en metros [m], y la constante  $k$  resulta:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad [\text{m/F}]$$

donde  $\epsilon_0$  se denomina permitividad del vacío, siendo:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}$ .

La ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales. En el sentido macroscópico una *carga puntual* es aquella cuyas dimensiones espaciales son muy pequeñas en comparación con cualquier otra longitud pertinente al problema en consideración.

La ecuación [1] es una ley experimental; sin embargo, hay evidencia teórica y experimental para indicar que la ley del inverso de los cuadrados es exacta, es decir, que el exponente de  $|\mathbf{r}_{12}|$  es exactamente 2.

### 1. 1. 1. Principio de superposición

Por otra parte puede verificarse experimentalmente que las interacciones eléctricas, además de cumplir con la Ley de Coulomb, responden al principio de superposición.

Esto significa que la interacción eléctrica entre un par cualquiera de cargas no está influenciada por la presencia de otras cargas. De esto surge que la fuerza total  $\mathbf{F}_p$  sobre una carga puntual  $q_p$  en presencia de un sistema de otras cargas puntuales ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ), que actúan simultáneamente, es igual a la suma vectorial de las fuerzas  $\mathbf{F}_{pi}$  ejercidas por cada una de las cargas consideradas independientemente, lo cual se expresa mediante:

$$\mathbf{F}_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi} = \sum_{i=1}^n k \frac{q_p q_i}{|\mathbf{r}_{pi}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{pi} \quad [\text{N}] \quad [2]$$

### 1. 1. 2. Funciones de densidad de carga

El análisis de la interacción eléctrica debe considerar además de las cargas puntuales, el efecto de aquellas cargas que pueden suponerse distribuidas en forma continua ya sea sobre una línea, una superficie o un volumen.

Es importante examinar aquí el significado de una distribución continua de carga. Es bien sabido que la carga eléctrica se encuentra en múltiplos de la carga básica, la del electrón. En otras palabras, si se examina una carga con detalle, se verá que su magnitud es un múltiplo entero de la carga electrónica. Desde un punto de vista macroscópico, que la carga sea discreta no ocasiona dificultades, simplemente porque la carga electrónica tiene una magnitud de  $1,6019 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , que es extremadamente pequeña. La pequeñez de la unidad básica significa que las cargas macroscópicas están compuestas invariablemente por un número muy grande de cargas electrónicas; esto a su vez significa que en una distribución de carga macroscópica cualquier elemento pequeño de volumen contiene un gran número de electrones. Se puede describir entonces cualquier distribución de carga en términos de una función de *densidad de carga*, definida como el límite de la carga por unidad de volumen (densidad volumétrica) a medida que el volumen se vuelve infinitesimal. Sin embargo debe tenerse cuidado al aplicar esta clase de descripción a problemas atómicos, puesto que, en estos casos, sólo interviene un número pequeño de electrones, y el procedimiento de tomar el límite no tiene sentido. Dejando a un lado estos casos atómicos, se puede suponer que un segmento de carga puede subdividirse indefinidamente, y describir la distribución de carga por medio de funciones puntuales de densidad lineal, superficial, o volumétrica de carga, definidas de la siguiente manera:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad [\text{C/m}] \quad [3]$$

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad [\text{C/m}^2] \quad [4]$$

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad [\text{C/m}^3] \quad [5]$$

donde  $\Delta q$  es la carga contenida en el elemento de volumen  $\Delta v$ , en el elemento de superficie  $\Delta s$ , o en el elemento de línea  $\Delta l$ .

## 1. 2. Campo eléctrico

La expresión [2] puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_p = q_p \left( \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\mathbf{r}_{pi}|^2} \bar{\mathbf{r}}_{pi} \right) \quad [\text{N}] \quad [6]$$

La expresión [6] sugiere que si se toma una carga puntual  $q_p$  que se denomina carga de prueba, el efecto e interacción con el sistema de  $n$  cargas puntuales puede ser descrito como el producto de  $q_p$  por un factor que no depende de  $q_p$ . Este factor, indicado entre paréntesis en [6], es una función vectorial que depende de las cargas ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) y de la posición relativa de éstas y del punto donde se ubique  $q_p$ . Así el factor entre paréntesis representa el efecto de interacción que produce el sistema de  $n$  cargas puntuales sobre una unidad de carga ubicada en la posición de la carga de prueba  $q_p$ . Esto puede expresarse como:

$$\mathbf{F}_p = q_p \mathbf{E}(\mathbf{r}_p) \quad [\text{N}] \quad [7]$$

con:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p) = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\mathbf{r}_{pi}|^2} \bar{\mathbf{r}}_{pi} \quad [\text{N/C}] \quad [8]$$

donde:

$$\mathbf{r}_{pi} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i$$

Siendo  $\mathbf{r}_p$ , el vector de posición del punto  $p$  donde se ubica  $q_p$  (coordenadas del campo).

A la función vectorial  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_p)$  se la denomina campo eléctrico en el punto  $p$ , o más precisamente, teniendo en cuenta que se consideran cargas estáticas, *campo electrostático*.

De esta forma la acción entre cuerpos cargados puede ser expresada utilizando el concepto de *campo de fuerzas*. Se puede considerar al campo  $\mathbf{E}$  en un punto como el responsable de la fuerza  $\mathbf{F}$  que se ejerce sobre una carga ubicada en dicho punto. Si se retira la carga, en el punto sigue existiendo potencialmente el efecto de la interacción, ya que si se vuelve a colocar la carga volvería a aparecer la fuerza. Esta propiedad potencial en cada uno de los puntos del espacio es la que se describe por medio del concepto de campo.

Así es posible considerar que las cargas son fuentes que producen un campo en el espacio que las rodea. Si intentamos una determinación experimental del campo midiendo la fuerza  $\mathbf{F}_p$  que actúa sobre una carga de prueba  $q_p$ , ésta debe ser puntual de manera que sus dimensiones sean despreciables respecto al resto de las dimensiones involucradas y además debe tenerse en cuenta que al introducir  $q_p$  no se modifique el estado de las cargas, que son fuentes del campo. Para esto es necesario que la carga de prueba sea de magnitud despreciable para no modificar el campo de fuerza que se quiere determinar. La definición rigurosa del campo eléctrico resulta así:

$$\mathbf{E} = \lim_{q_p \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_p}{q_p} \quad [\text{N/C}] \quad [9]$$

Siendo el campo eléctrico en el punto genérico  $p$ , la fuerza que actúa sobre la unidad de carga situada en dicho punto.

El interés de introducir el concepto de campo se basa en el hecho de que por su intermedio es posible describir las acciones eléctricas locales sin que sea necesario conocer la fuente de tal acción. Es decir, el concepto de campo resulta alternativo del concepto de acción a distancia.

Para el estudio de los campos resulta de gran ayuda su representación gráfica. El método más utilizado es el de las *líneas de campo*, el cual consiste en la graficación de líneas que, en cada punto del espacio, son tangentes al vector campo eléctrico correspondiente a ese punto. En la **Figura 1.2** se muestran ejemplos de representación gráfica.

Debe observarse que la representación del campo por las líneas de campo no permite obtener directamente la intensidad del campo en cada punto. Sí es posible interpretar que el campo es más intenso donde las líneas están más concentradas y viceversa.

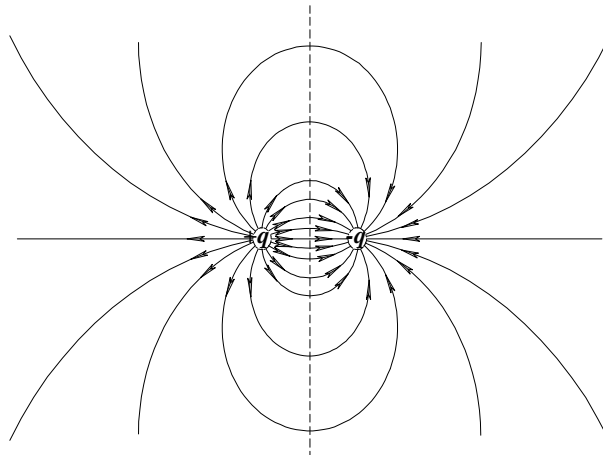
Los campos eléctricos cuyas fuentes son distribuciones de cargas como las indicadas anteriormente, pueden resolverse teniendo en cuenta la validez del principio de superposición, por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{E} = k \iiint_V \frac{\rho}{r^2} \vec{r} \, dv \quad [\text{N/C}] \quad [10]$$

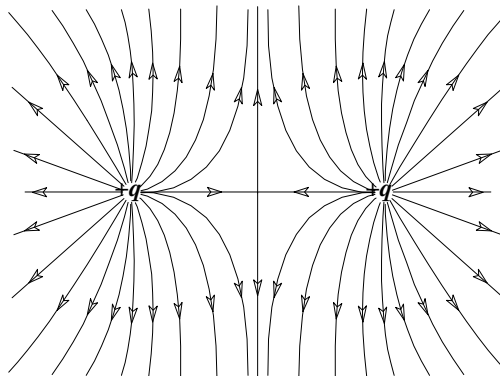
$$\mathbf{E} = k \iint_S \frac{\sigma}{r^2} \vec{r} \, ds \quad [\text{N/C}] \quad [11]$$

$$\mathbf{E} = k \int_l \frac{\lambda}{r^2} \vec{r} \, dl \quad [\text{N/C}] \quad [12]$$

Resulta así que el cálculo del campo electrostático producido por distintas distribuciones de cargas, consiste en resolver integrales vectoriales de fácil planteo pero en la gran mayoría de los casos, de difícil solución.



(a) Cargas de signos opuestos.



(b) Cargas de signos iguales.

**Figura 1.2.** Representación gráfica del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  para cargas puntuales.

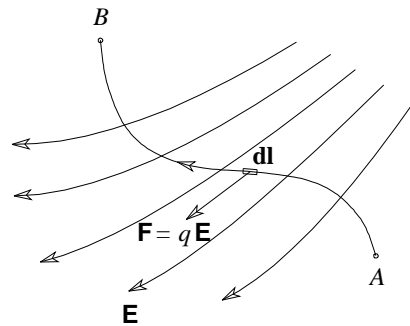
## 2. Diferencia de potencial, potencial electrostático y campo eléctrico.

### 2. 1. Diferencia de potencial

La dificultad planteada por las integraciones vectoriales para analizar las interacciones eléctricas pueden en general ser simplificadas transformando el problema al resolver las ecuaciones diferenciales.

Puesto de otra forma, puede resultar conveniente formular o resolver problemas en función de la energía en lugar de hacerlo por medio de los campos. La razón de dicha conveniencia es que la energía, por ser una magnitud escalar, se suma aritméticamente, mientras que los campos deben sumarse vectorialmente.

Resulta entonces conveniente introducir los conceptos de *diferencia de potencial* y de *potencial electrostático*. Para ello consideraremos el trabajo realizado sobre una carga de prueba positiva  $q$  para llevarla desde un punto  $A$  hasta un punto  $B$  en el seno de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  (ver **Figura 1.3.**).



**Figura 1.3.** Trabajo realizado para desplazar una carga.

La fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida por el campo  $\mathbf{E}$  sobre la carga  $q$  resulta:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

de modo que el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas para transportar la carga es:

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \left( - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad [13]$$

El factor entre paréntesis de la expresión [13] da el trabajo necesario para llevar una unidad de carga desde  $A$  hasta  $B$  y es lo que se define como *diferencia de potencial*  $V_{BA}$ . Es decir:

$$V_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [14]$$

En la expresión [14] el campo  $\mathbf{E}$  varía punto a punto según la trayectoria que se siga para llevar la carga desde  $A$  hasta  $B$ , pero es posible demostrar que la integral solo depende de la posición de los puntos  $A$  y  $B$ , y no de la trayectoria.

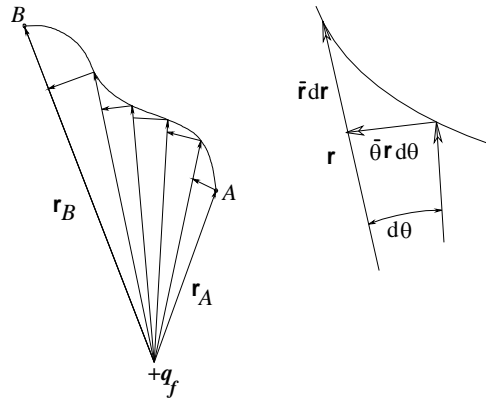
En general el campo  $\mathbf{E}$  tendrá como fuente un sistema complejo de cargas, pero teniendo en cuenta el principio de superposición basta con analizar la integral de la expresión [14] para el caso de una carga puntual, extendiendo luego su resultado al caso general.

Supóngase que el campo  $\mathbf{E}$  tiene como fuente una carga puntual positiva  $q_f$  que los puntos  $A$  y  $B$  están a distancias  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  respectivamente de la carga  $q_f$ , y que se elige un camino arbitrario entre  $A$  y  $B$  tal como se muestra en la **Figura 1.4.**

En la misma figura se muestra que es posible descomponer dicho camino en pequeños arcos de circunferencias infinitesimales de longitud  $r d\theta$  (de dirección perpendicular al radio, según  $\vec{\theta}$ ), y en tramos rectos de longitud  $dr$  (de dirección radial, según  $\vec{r}$ ).

Recorriendo tal camino el valor del integrando  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  de la [14] está formado por dos términos:

$$\mathbf{E} \cdot (\vec{\theta} r d\theta) + \mathbf{E} \cdot (\vec{r} dr)$$



**Figura 1.4.** Trabajo eléctrico según la trayectoria.

dado que  $\mathbf{E}$  solo tiene componente en la dirección  $\vec{r}$ , el primer término de la expresión anterior resulta nulo, y reemplazando en [14], se tiene:

$$V_{BA} = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad [15]$$

resultando así que la integral depende solamente de las distancias de los extremos del camino a la carga puntual, y no del trayecto recorrido entre ambos puntos. Esta condición de la diferencia de potencial es consecuencia directa de la simetría esférica del campo  $\mathbf{E}$ .

Ahora bien, dado que como se ha visto las interacciones eléctricas responden al principio de superposición, el campo eléctrico de varias cargas puede expresarse como la suma de los campos de cada una de las cargas. Entonces, la expresión [14] puede escribirse como una suma de integrales, cada una de las cuales será la diferencia de potencial debida a las cargas individuales.

De esta forma la independencia de la diferencia de potencial entre dos puntos, y el camino recorrido para unir esos puntos, demostrada para una carga puntual, puede extenderse a cualquier sistema de cargas.

En forma genérica se puede concluir que la diferencia de potencial entre dos puntos mide el trabajo realizado *contra* la fuerza del campo eléctrico para trasladar la *unidad de carga* entre ambos puntos, *sin importar la trayectoria utilizada*.

En caso de que la trayectoria sea cerrada, es decir que el recorrido comienza y termina en el mismo punto, la diferencia de potencial es nula, ya que coinciden los límites de la integral de la expresión [14]. Esta es una propiedad esencial de un campo electrostático: la integral de línea sobre una trayectoria cerrada es nula:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad [16]$$

## 2. 2. Potencial electrostático

Retomando la expresión [14], se nota que si se considera un punto cualquiera en el espacio que denominamos punto de referencia  $P_{\text{ref}}$  y calculamos la diferencia de potencial entre los puntos A y B con respecto al de referencia, se tiene, respectivamente:

$$V_{BP_{\text{ref}}} = - \int_{P_{\text{ref}}}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

y

$$V_{AP_{\text{ref}}} = - \int_{P_{\text{ref}}}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Como para calcular la diferencia de potencial  $V_{BA}$  se puede considerar una trayectoria cualquiera, si ésta pasa por el punto  $P_{\text{ref}}$  se expresará:

$$V_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^{P_{\text{ref}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \left( - \int_{P_{\text{ref}}}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

esto es:

$$V_{BA} = V_{BP_{ref}} - V_{AP_{ref}} \quad [17]$$

De esto surge que, elegido un punto de referencia cualquiera  $P_{ref}$ , puede expresarse la diferencia de potencial entre un par de puntos A y B como diferencia de potencial de B respecto a  $P_{ref}$  y de A con respecto a  $P_{ref}$ .

Es evidente que este concepto se puede generalizar asignando a cada punto genérico P del espacio un número  $V_P$  que se denomina potencial electrostático tal que:

$$V_P = V_{PP_{ref}} = - \int_{P_{ref}}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [18]$$

Así, el valor del potencial en el punto resulta definido a menos de una constante que depende de la elección de  $P_{ref}$ . Dado que esta elección es arbitraria, en ciertos casos resulta conveniente elegir  $P_{ref}$  en el infinito, resultando:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [19]$$

Este potencial es llamado con frecuencia potencial absoluto del punto P y es el trabajo necesario para traer una unidad de carga desde el infinito a dicho punto.

Si consideramos nuevamente el campo  $\mathbf{E}$  como el producido por una carga puntual  $q_f$  y se quiere determinar el potencial absoluto de un punto A ubicado a una distancia  $r_A$  de  $q_f$ , se tiene:

$$V_A = V_A - V_{\infty} = \frac{q_f}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{\infty}} \right)$$

Como  $\frac{1}{r_{\infty}} \rightarrow 0$ , entonces resulta:

$$V_A = \frac{q_f}{4 \pi \epsilon_0 r_A} \quad [20]$$

Esto equivale a asignarle al punto en el infinito un potencial nulo, resultando el potencial absoluto del punto A, debido a la carga  $q_f$ , inversamente proporcional a la distancia desde  $q_f$  hasta dicho punto.

Obsérvese en la expresión [20] que el potencial eléctrico debido a una carga puntual es una función lineal con respecto al valor de carga; así el potencial en un punto debido a cualquier número de cargas puntuales es la suma aritmética del potencial correspondiente a cada una de ellas. En general, el potencial eléctrico de un punto es la suma algebraica de las componentes individuales del potencial en ese punto.

Considerando las distribuciones de carga  $\rho$ ,  $\sigma$  y  $\lambda$  como fuentes de campo, el potencial puede resolverse por las siguientes expresiones:

$$V = k \iiint_V \frac{\rho}{r} dv \quad [V] \quad [21]$$

$$V = k \iint_S \frac{\sigma}{r} ds \quad [V] \quad [22]$$

$$V = k \int_l \frac{\lambda}{r} dl \quad [V] \quad [23]$$

Con las expresiones [21], [22] y [23] puede calcularse el potencial  $V$  en cualquier punto del espacio.

### 2. 3. El campo eléctrico como gradiente de potencial

Es necesario a continuación disponer de una relación que nos permita, conocido  $V$ , obtener el valor de  $\mathbf{E}$ . Para ello consideremos que en la expresión [14] los puntos A y B están separados por una distancia infinitesimal  $d\mathbf{l}$ , así tendremos:

$$dV = - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [24]$$



Considerando que:

$$V = V(x, y, z)$$

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

pudiendo escribirse como:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \quad [25]$$

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\mathbf{l} \quad [26]$$

siendo:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

Y por comparación entre [24] y [26] resulta:

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} V \quad [27]$$

de esta forma el campo puede expresarse como el gradiente cambiado de signo de la función escalar  $V$ . Conceptualmente, el gradiente de una función es un vector, cuyo módulo y dirección son el valor y la dirección de la máxima variación de la función en el punto, y su sentido es el del incremento de la función.

## 2. 4. Irrotacionalidad del campo electrostático

Que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  pueda expresarse por medio de un gradiente de una función escalar [27], permite derivar una propiedad fundamental del campo, esto es que *el campo electrostático es irrotacional*. Esto se obtiene en virtud de que el rotor de un gradiente es siempre nulo, por lo cual:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

es decir:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad [28]$$

siendo, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad \left[ \frac{V}{m^2} \right]$$

A igual conclusión puede arribarse en base a la aplicación del teorema de Stokes en la expresión [16], esto es:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

teniendo en cuenta que la superficie sobre la cual se integra el rotor es arbitraria con la única condición de que tenga como contorno la curva cerrada sobre la que se integra  $\mathbf{E}$ , se confirma también por este camino que la [28] es válida.

Es importante destacar que la propiedad puntual o diferencial expresada por [28] es equivalente a la propiedad global o integral expresada por:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad [16]$$

y ambas son consecuencia directa *de la simetría esférica* del campo eléctrico producido por una carga puntual, indicada por la Ley de Coulomb. Además, debe notarse que ambas propiedades son indicativas de que el campo electrostático es *conservativo*, es decir que no se realiza trabajo si una carga de prueba se mueve en el campo sobre una trayectoria cerrada.

## 2. 5. Superficies y líneas equipotenciales

Resulta particularmente útil introducir el concepto de *equipotencialidad*. Se denomina superficie (o línea) equipotencial al lugar geométrico de los puntos del espacio de igual potencial, lo cual puede ser expresado por la relación  $V = \text{cte}$ .

Considérese un desplazamiento  $d\vec{l}$  sobre una línea contenida en una superficie equipotencial. Dado que a lo largo de dicha línea  $V = \text{cte}$ , de la expresión [26], se tiene:

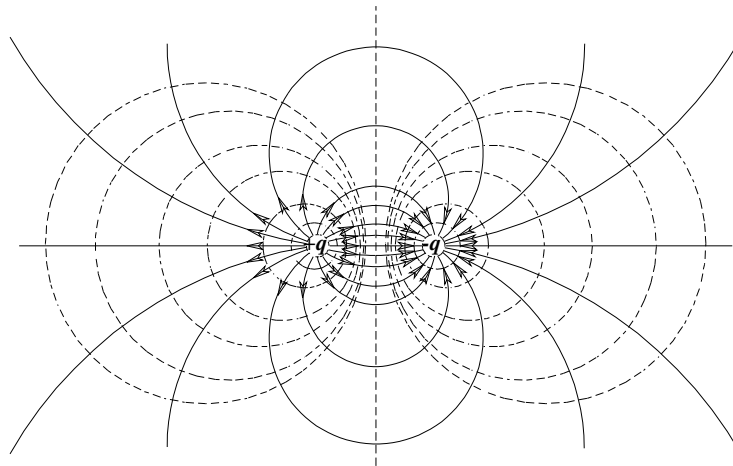
$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = 0$$

y por [24]:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

lo que muestra, por ser  $\vec{\nabla}V \neq 0$  y  $d\vec{l} \neq 0$ , que las líneas de campo electrostático son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales.

En la **Figura 1.5** se muestra el campo eléctrico  $\vec{E}$  (en líneas continuas) y las líneas equipotenciales (en líneas de trazos) que corresponden a dos cargas  $+q$  y  $-q$ , sobre un plano que contiene ambas cargas. En la misma figura se observa la ortogonalidad entre las líneas de campo y las líneas equipotenciales. Debe notarse además que cuanto más cercanas están entre sí las líneas equipotenciales (lo que equivale a un mayor gradiente), más intenso es el campo. Por otra parte, el sentido de las líneas de campo, inverso al de las del gradiente, es el que corresponde al *decrecimiento del potencial*.



**Figura 1.5.** Líneas de campo y equipotenciales.

## 2. 6. Conductores y aislantes

Teniendo en cuenta el comportamiento eléctrico de los materiales, los mismos pueden dividirse en dos categorías: *conductores* de electricidad y *aislantes* (*dieléctricos*). Los conductores son sustancias, como los metales, que esencialmente contienen un gran número de portadores de carga libre. Estos portadores de carga (electrones, en la mayoría de los casos) que tienen la libertad de moverse por el material conductor, responden a campos eléctricos casi infinitesimales y continúan moviéndose mientras experimenten un campo. Estos portadores libres llevan la corriente eléctrica cuando se mantiene un campo eléctrico en el conductor por medio de una fuente externa de energía.

Los dieléctricos son sustancias en las que todas las partículas cargadas están ligadas muy fuertemente a moléculas constituyentes. Las partículas cargadas pueden cambiar sus posiciones ligeramente como respuesta a un campo eléctrico, pero no se alejan de la vecindad de sus moléculas. Estrictamente hablando, esta definición se aplica a un dieléctrico ideal, uno que no muestra conductividad en presencia de un campo eléctrico que se mantiene exteriormente. Los dieléctricos físicos reales pueden mostrar una débil conductividad, pero en un dieléctrico típico la conductividad es  $10^{20}$  veces menor que la de un buen conductor. Como  $10^{20}$  es un factor enorme, por lo general es suficiente decir que los dieléctricos son no conductores.

Algunos materiales (semiconductores, electrólitos) tienen propiedades eléctricas intermedias entre las de los conductores y los dieléctricos. En lo que respecta a su comportamiento en un campo eléctrico estático, estos materiales se comportan casi como los conductores. Sin embargo, su respuesta transitoria es algo más lenta; es decir, estos materiales necesitan más tiempo para alcanzar el equilibrio en un campo estático.

En este capítulo trataremos con los materiales en campos *electrostáticos*, pero por ahora se pospondrá para otros capítulos el tratamiento de la polarización dieléctrica. En cambio, los conductores pueden estudiarse con bastante facilidad en términos de los conceptos expuestos hasta aquí.

Dado que en un conductor la carga puede moverse libremente, aún bajo la influencia de campos eléctricos muy pequeños, los portadores de carga (electrones o iones) se mueven hasta que hallan posiciones en las que no experimentan fuerza neta. Cuando llegan al reposo, el interior del conductor debe ser una región desprovista de un campo eléctrico; esto debe ser así porque la población de portadores de carga en el interior, de ningún modo se agota, y si persistiera el campo, los portadores continuarían moviéndose. Es decir, *en condiciones estáticas, el campo eléctrico en el interior de un conductor, se anula.*

Además, puesto que  $\mathbf{E}=0$  en el seno de un conductor, el potencial eléctrico es el mismo en todos los puntos del material conductor. En otras palabras, *en condiciones estáticas, cada conductor constituye una región equipotencial del espacio.*

### 3. Vector Desplazamiento o densidad de flujo eléctrico. Ley de Gauss.

#### 3. 1. Vector Desplazamiento o Densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D}$

En ciertos casos que se analizan posteriormente, resulta conveniente introducir un vector  $\mathbf{D}$  proporcional a  $\mathbf{E}$ , que para el espacio vacío, se define como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad [\text{C/m}^2] \quad [29]$$

donde:

$\mathbf{D}$  vector desplazamiento  $[\text{C} / \text{m}^2]$

$\epsilon_0$  permitividad del vacío  $[\text{F} / \text{m}]$

$\mathbf{E}$  intensidad de campo eléctrico  $[\text{V} / \text{m}]$

Para el caso de una carga puntual se tendrá:

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4 \pi r^2} \bar{\mathbf{r}} \quad [\text{C/m}^2] \quad [30]$$

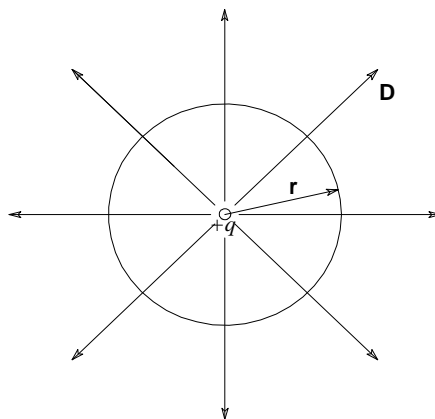
#### 3. 2. Ley de Gauss

Si se integra el vector  $\mathbf{D}$  sobre una superficie esférica con centro en la carga puntual  $q$  (ver **Figura 1.6**), resulta:

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{SC} \frac{q}{4 \pi r^2} \bar{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} \quad [\text{C}] \quad [31]$$

Lo cual indica que la integral de  $\mathbf{D}$  sobre una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por esa superficie. La expresión [31] puede generalizarse por el teorema de Gauss, el cual demuestra que la integración de  $\mathbf{D}$  sobre cualquier tipo de superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por esa superficie, cualquiera sea la distribución espacial de esa carga, así:

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv = q \quad [\text{C}] \quad [32]$$



**Figura 1.6.** Campo  $\mathbf{D}$  de una carga puntual positiva.

Si se considera la integral de  $\mathbf{D}$  sobre cualquier superficie cerrada o abierta, es posible definir el flujo eléctrico  $\psi$  como:

$$\psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad [\text{C}] \quad [33]$$

para el caso particular de una superficie cerrada se tiene, combinando [32] y [33]:

$$\psi = \iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv = q \quad [\text{C}] \quad [34]$$

lo cual permite expresar la Ley de Gauss como: *el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por tal superficie.*

Basado en la definición expresada por la [33] al vector  $\mathbf{D}$  se lo denomina *densidad de flujo eléctrico*.

La Ley de Coulomb indica que el campo eléctrico producido por una carga puntual es radial, tiene simetría esférica y varía con la inversa del cuadrado del radio. La Ley de Gauss se satisface con la condición de que el campo verifica su dependencia con  $(1/r^2)$ , ya que solo así puede compensarse el aumento de la superficie con el radio. Puesto en otros términos, la Ley de Gauss contiene solo parcialmente la información que brinda la Ley de Coulomb, ya que nada dice sobre la simetría central (esférica) que debe cumplirse para el campo producido por una carga puntual.

Por ello, la determinación del campo en un punto del espacio en base a la Ley de Gauss, solo es posible cuando se trata de un problema que tenga implícita esta simetría.

### 3. 3. Divergencia de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$

La propiedad integral del campo expresada por la Ley de Gauss tiene su correspondiente propiedad puntual o diferencial. Aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} \, dv \quad [C] \quad [35]$$

donde

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad [C/m^3]$$

dado que

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho \, dv = q \quad [C]$$

y teniendo en cuenta que las integrales de los segundos miembros de las igualdades anteriores se extienden sobre el mismo volumen, se concluye que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [C/m^3] \quad [36]$$

Si se considera la definición de  $\mathbf{D}$  para el medio vacío dada por [29], se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [V/m^2] \quad [37]$$

Las expresiones [36] ó [37] alternativamente, describen una propiedad puntual del campo eléctrico equivalente a la propiedad integral indicada por la Ley de Gauss, que es consecuencia directa de la Ley de Coulomb, en particular debido a la dependencia del campo de una carga puntual con la inversa del cuadrado de la distancia. Por ello ambas expresiones pueden considerarse como la forma diferencial de la ley de Gauss.

### 3. 4. Aplicación de la ley de Gauss

Las expresiones [36] ó [37] o, más adecuadamente, sus formas modificadas que se deducirán al tratar con dieléctricos, son unas de las ecuaciones diferenciales básicas de electricidad y magnetismo. Esta sola cuestión ya es importante, por supuesto; pero la ley de Gauss también tiene utilidad práctica. Lo práctico de la ley reside principalmente en proporcionar una forma muy fácil para calcular los campos eléctricos en situaciones suficientemente simétricas. En otras palabras, en algunas situaciones altamente simétricas de considerable interés físico, el campo eléctrico puede calcularse empleando la ley de Gauss en lugar de utilizar los procedimientos de integración a partir de la ley de Coulomb. Cuando puede hacerse esto, se ahorra esfuerzo.

Para que la ley de Gauss sea útil al calcular el campo eléctrico, debe ser posible elegir una superficie cerrada tal que el campo eléctrico tenga en todo punto de dicha superficie, la misma dirección con respecto a la normal, y que el valor absoluto sea el mismo en cada punto de la superficie.

Otro resultado importante de la ley de Gauss es que la carga (*carga libre neta*) de un conductor cargado, reside en su superficie. En efecto, se vio en el apartado 2.6. que el campo eléctrico dentro de un conductor se anula. Cualquier superficie gaussiana que se considere en el interior del conductor, por la ley de Gauss, encerrará una carga neta igual a cero. El único lugar en que puede estar la carga, para que no se contradiga la ley de Gauss, es sobre la superficie del conductor.

El campo eléctrico en el exterior inmediato de un conductor cargado, debe ser normal a la superficie del conductor. Esto es teniendo en cuenta la expresión [27] y que la superficie es una equipotencial (apartado 2.5.).

Si la carga de un conductor está dada por la función de densidad superficial  $\sigma$ , considerando una superficie gaussiana cilíndrica con las bases  $\Delta S$  paralelas a la superficie del conductor (una de ellas un infinitésimo dentro del conductor y la otra un infinitésimo afuera), entonces aplicando la ley de Gauss resulta:

$$E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

por lo tanto el campo eléctrico que está en el exterior inmediato de un conductor resulta:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [38]$$

## 4. Ecuaciones de Poisson y Laplace. Unicidad de la solución

### 4. 1. Ecuación de Poisson

Combinando las ecuaciones [27] y [37], obtendremos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[ \text{V/m}^2 \right]$$

Teniendo en cuenta que la divergencia del gradiente es el *laplaciano* ( $\nabla^2$ ), la ecuación anterior resulta:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[ \text{V/m}^2 \right] \quad [39]$$

Nótese que el laplaciano es un operador diferencial escalar puro, y la [39] es una ecuación diferencial. Ésta es la *ecuación de Poisson*. El operador  $\nabla^2$  implica la derivación con respecto a más de una variable; en consecuencia, la ecuación de Poisson es una *ecuación diferencial parcial* que relaciona en cada punto la forma de variación del potencial con la densidad de carga presente en él. Su resolución nos permite obtener el potencial  $V(x, y, z)$  en cualquier punto del espacio, para lo cual es necesario conocer la dependencia funcional de la distribución de carga  $\rho(x, y, z)$  y las condiciones de frontera de dicho espacio.

Debe notarse que la ecuación de Poisson, derivada como combinación de la [27] y la [37], tiene implícita las propiedades de irrotacionalidad y de la Ley de Gauss, lo cual implica que contiene la información completa de la electrostática equivalente a la Ley de Coulomb.

### 4. 2. Ecuación de Laplace

Para el caso en que en cada punto de la región considerada la distribución de carga sea nula, la [39] se reduce a:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \left[ \text{V/m}^2 \right] \quad [40]$$

A esta expresión se la denomina *ecuación de Laplace* y es de gran importancia en el estudio de los campos. Su resolución nos permite determinar el potencial  $V(x, y, z)$  en una región del espacio sin cargas, siendo necesario conocer las condiciones de frontera de esa región.

Esta ecuación reviste fundamental interés en la electrostática, en particular cuando debe hallarse el campo en una región donde existen conductores inmersos en un medio vacío. Suponiendo que se tiene un conjunto de conductores donde la carga está distribuida superficialmente, el problema consiste en encontrar el campo o el potencial en el espacio limitado por esos conductores. En dicho espacio al no existir cargas se verifica la ecuación de Laplace y su solución con las condiciones de límite impuestas por el potencial de los conductores nos permite hallar el valor del potencial en cada punto.

Una propiedad importante de las funciones que son soluciones de la ecuación de Laplace, para el caso electrostático del potencial  $V(x, y, z)$ , es que si se define una esfera cualquiera situada completamente en la región en que la ecuación es satisfecha, el valor medio del potencial en la superficie de la esfera es igual al valor del potencial en el centro de la misma. Así, el potencial no puede tener ni máximos ni mínimos en el interior de la región considerada. Estos valores extremos solo pueden ocurrir en los límites de la región. Si  $V(x, y, z)$  es solución de la ecuación de Laplace y es constante sobre una superficie cerrada cualquiera, el potencial es constante en todo el volumen encerrado por tal superficie.

### 4. 3. Unicidad de la solución. Teorema de Unicidad

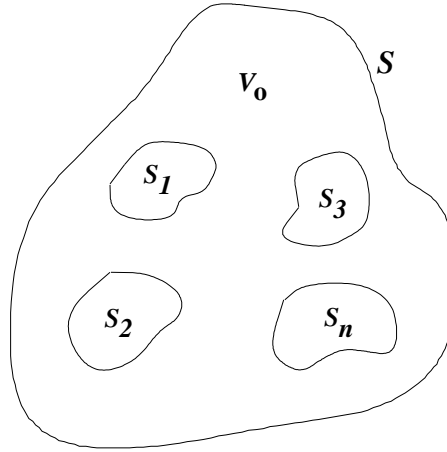
La solución de un problema electrostático en una región sin cargas, estará dada por una función  $V(x, y, z)$  que además de cumplir con la ecuación de Laplace en todos los puntos interiores de la región, debe satisfacer los valores de potencial en el límite de dicha región.

Cabe entonces formularse la pregunta: ¿es posible que exista más de una función  $V(x, y, z)$  que cumpla con tales condiciones?

La respuesta la da el denominado *teorema de Unicidad* que permite establecer que existe una *única función*  $V(x, y, z)$  que satisface *simultáneamente* la ecuación de Laplace, y una determinada distribución de potencial *en el límite* de una dada región.

Otra forma de enunciarlo sería: *dos soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren cuando mucho en una constante aditiva.*

Para demostrar el teorema consideremos un problema electrostático general tal como se muestra en la **Figura 1.7**. Se trata de un volumen  $v_0$ , limitado por las superficies  $S, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ .



**Figura 1.7.** Problema general electrostático.

Supongamos que existan dos soluciones diferentes para el potencial, sean las funciones  $V_1$  y  $V_2$ . Esto equivale a decir que se verifica:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 V_2 = 0 \quad [41]$$

y además ambas funciones tendrán iguales condiciones de frontera, esto es:

$$V_1(S) = V_2(S); \quad V_1(S_1) = V_2(S_1); \quad V_1(S_2) = V_2(S_2); \dots; \quad V_1(S_n) = V_2(S_n) \quad [42]$$

Se define una función  $\varphi$ , tal que:

$$\varphi = V_1 - V_2 \quad [V] \quad [43]$$

por lo tanto:

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2$$

en todo el volumen  $V_0$ . Además:

$$\varphi_S = V_1(S) - V_2(S)$$

$$\varphi_S = V_1(S_1) - V_2(S_1)$$

.

.

.

$$\varphi_S = V_1(S_n) - V_2(S_n)$$

Si sobre el producto  $\varphi \vec{\nabla} \varphi$  se aplica el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) \, dv = \iint_{S+S_1+S_2+\dots+S_n} (\varphi \vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{n} \, ds \quad [44]$$

dado que  $\varphi=0$  sobre las superficies, la integral del segundo miembro se anula y por ende será nula la del primer miembro. Si en el integrando de esta última integral se reemplaza la igualdad:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) = \varphi \nabla^2 \varphi + (\vec{\nabla} \varphi)^2$$

y considerando que  $\nabla^2 \varphi = 0$ , se tiene:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \varphi)^2 \, dv = 0$$

dado que el integrando no puede ser negativo, la igualdad anterior implica que, en todo el volumen  $V_0$ :

$$\vec{\nabla} \varphi = 0$$



la nulidad del gradiente implica que la función no puede variar en el volumen, por lo tanto:

$$\varphi = V_1 - V_2 = Cte. \quad [V] \quad [45]$$

El valor de la constante puede ser evaluado en los límites y dado que sobre las superficies límites  $\varphi=0$ , resulta  $Cte.=0$ . De esta forma  $\varphi$  es cero en todo el volumen  $v_0$  y sobre las superficies que limiten ese volumen. Así se verifica que si  $V_1$  y  $V_2$  son soluciones de la ecuación de Laplace y satisfacen las condiciones de potencial en el límite,  $V_1=V_2$  y la solución es única.

La integral del segundo miembro de la expresión [44] también es cero en el caso de que la componente normal del gradiente se anule sobre las superficies límites de  $v_0$ , o sea que:

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{n} = 0$$

Por lo que siguiendo igual razonamiento que en el caso anterior puede indicarse que si  $V_1$  y  $V_2$  son soluciones de la ecuación de Laplace y satisfacen las condiciones de la *componente normal del gradiente* sobre las superficies límites,  $V_1=V_2 + Cte.$  y la solución es única a menos de una constante.

Si bien el teorema de unicidad se demostró con la ecuación de Laplace, es igualmente válido para la ecuación de Poisson, ya que en tal caso:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

por lo cual

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

y se continúa la demostración de igual forma que en el caso anterior.

La importancia del teorema de unicidad reside en el hecho de que se justifica intentar cualquier método de solución del problema electrostático, en la seguridad de que si se encuentra una solución, esa es única y el problema está resuelto.

#### 4. 4. Imágenes electrostáticas

Para un conjunto dado de condiciones en la frontera, la solución a la ecuación de Laplace es única, de modo que si se obtiene una solución  $U(x, y, z)$  por cualquier medio, y si esta  $U$  satisface todas las condiciones en la frontera, entonces se ha efectuado una solución completa al problema.

El método de las imágenes es un procedimiento para lograr este resultado sin resolver específicamente una ecuación diferencial. No se aplica universalmente a todos los tipos de problemas electrostáticos, pero bastantes problemas interesantes caen dentro de esta categoría.

Supóngase que el potencial pueda expresarse en la siguiente forma:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [46]$$

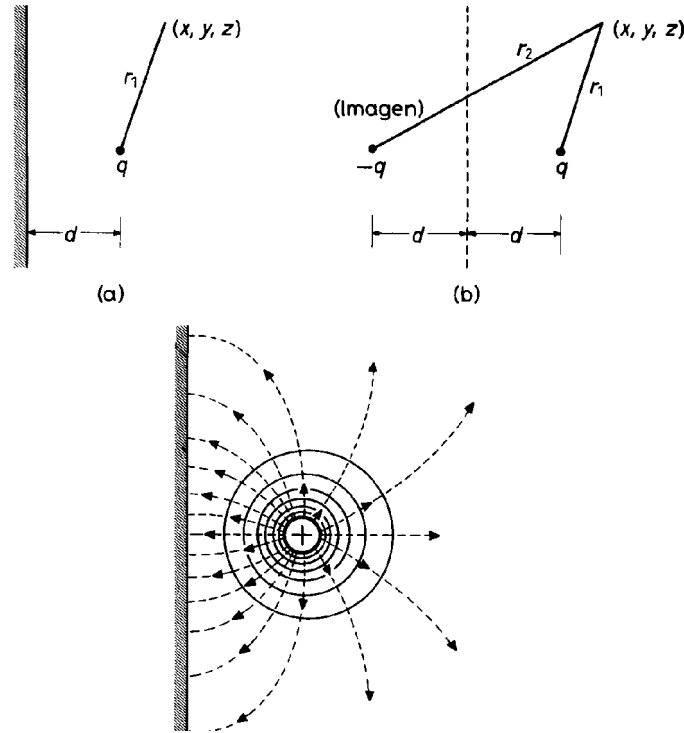
donde  $U_1$  es ya sea una función específica o fácilmente calculable, y la integral representa la contribución al potencial, de la carga superficial, sobre todos los conductores que aparecen en el problema. No se conoce la función  $\sigma$ .

Puede suceder, y ésta es la esencia del método de las cargas imágenes, que el último término en la ecuación anterior, se sustituya por un potencial  $U_2$  que se deba a una distribución de carga virtual *especificada*.

Pero esto es posible siempre y cuando las superficies de todos los conductores coincidan con superficies equipotenciales de los  $U_1 + U_2$  combinados.

Las *cargas virtuales especificadas* que producen el potencial  $U_2$  se denominan *cargas imagen*. Por supuesto que no existen realmente. Su posición aparente está *dentro* de los diversos conductores, y el potencial  $U = U_1 + U_2$  es una solución válida al problema sólo en la región exterior.

Como ejemplo de este método, se resolverá el problema de una carga puntual  $q$  colocada cerca de un plano conductor de extensión infinita. Para formular el problema matemáticamente, sea el plano conductor tal que coincida con el plano  $yz$ , y supóngase que la carga puntual está en el eje  $x$  a una distancia  $x=d$  (**Figura 1.8a.**).



**Figura 1.8.** Problema de una carga puntual y un plano conductor.

El potencial se ajusta al indicado por [46], siendo:

$$U_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad [47]$$

Considérese ahora un problema diferente, el de dos cargas puntuales ( $q$  y  $-q$ ) separadas por una distancia  $2d$ , como el de la **Figura 1.8b**. El potencial de estas dos cargas,

$$U(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad [48]$$

no sólo satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos exteriores a las cargas, sino que también se reduce a una constante (es decir, cero) sobre el plano que biseca perpendicularmente al segmento que une las dos cargas. Así pues [48] satisface las condiciones en la frontera del problema original. Debido a que las soluciones de la ecuación de Laplace son únicas, [48] es el potencial correcto en todo el semiespacio exterior al plano conductor. La carga  $-q$  que da origen al potencial

$$U_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad [49]$$

se llama la *imagen* de la carga puntual  $q$ . Naturalmente, la imagen no existe en realidad, y [47] no da correctamente el potencial en el exterior ni a la izquierda del plano conductor, en la **Figura 1.8a**.

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en la región exterior puede obtenerse como el gradiente negativo de [48]. Como la superficie del plano conductor representa una interface que relaciona dos soluciones de la ecuación de Laplace, es decir,  $U=0$  y [48], la discontinuidad en el campo eléctrico se acomoda por una densidad de carga superficial  $\sigma$  sobre el plano:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x \Big|_{x=0} = -\frac{q d}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad [50]$$

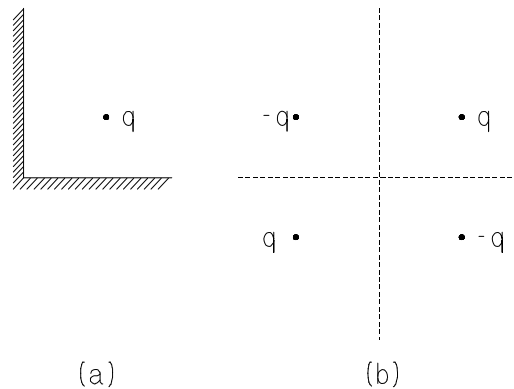
Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales adecuadas al problema original se ilustran en la **Figura 1.8c**. Estas son las mismas líneas de fuerza y superficies equipotenciales adecuadas al problema de dos cargas puntuales de la **Figura 1.8b**, excepto que en el último caso, las líneas de flujo continuarían en la mitad izquierda del plano. Es evidente, de la figura, que *todas* las líneas de flujo eléctrico que normalmente convergen en la carga imagen son interceptadas por el plano en la **Figura 1.8c**. En consecuencia, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen  $-q$ . Este mismo resultado puede obtenerse matemáticamente integrando [50] sobre toda la superficie.

Es evidente que la carga puntual  $q$  ejerce una fuerza atractiva sobre el plano, debido a que la carga superficial inducida es de signo contrario. Por la ley de Newton de acción y reacción, esta fuerza es igual en magnitud a la fuerza ejercida sobre  $q$  por el plano. Como la carga puntual no experimenta ninguna fuerza debida a su propio campo,

$$\mathbf{F} = -q \nabla U_2 \quad [51]$$

que es exactamente la fuerza ejercida sobre él por la carga imagen.

Otro problema que podría resolverse simplemente en función de las imágenes es el de determinar el campo eléctrico de una carga puntual  $q$  en la vecindad de la intersección de un ángulo recto formado por dos planos conductores (**Figura 1.9a.**). Las posiciones de las cargas imagen necesarias se ilustran en la **Figura 1.9b.** Como puede observarse los dos planos, representados en esta figura en línea de puntos, son superficies de potencial cero, debido a los potenciales combinados de  $q$  y de las tres cargas imagen.



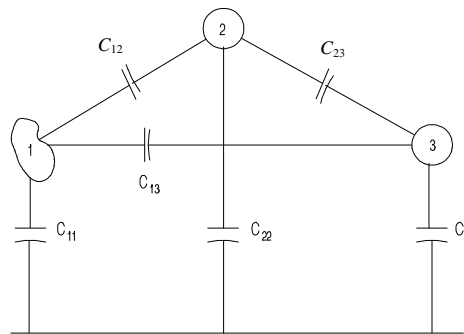
**Figura 1.9.** Carga puntual en una esquina que forma ángulo recto.

## 5. Distribución de los potenciales y de las cargas en un sistema de cuerpos conductores.

Hasta aquí se ha considerado el campo eléctrico de uno o dos cuerpos cargados. Pero en la práctica de la ingeniería resulta frecuente encontrar sistemas compuestos por una serie de cuerpos conductores sometidos en general a diferentes potenciales y con distintas cantidades de carga.

Considérese un sistema de  $n$  conductores que poseen respectivamente cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , con los consiguientes potenciales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , como se muestra en la **Figura 1.10**.

Se desea encontrar un método para evaluar las  $Q$  en función de los  $\varphi$  y viceversa. Tales relaciones se deducen en los apartados siguientes.



**Figura 1.10.**

### 5. 1. Coeficientes de capacidad

Considérese que el primer conductor se encuentra cargado, a un potencial  $\varphi_1$ , con todos los demás conductores *puestos a tierra*. La carga en el primer conductor será:  $\beta_{11} \varphi_1$ ; la carga inducida en el segundo conductor será:  $\beta_{21} \varphi_1$  y la inducida en el  $n$ -ésimo conductor será  $\beta_{n1} \varphi_1$ .

Si el segundo conductor se encontrara cargado al potencial  $\varphi_2$  y todos los conductores restantes estuvieran al potencial de tierra, entonces la carga en el segundo conductor estaría dada por  $\beta_{22} \varphi_2$  y la carga inducida en el  $n$ -ésimo conductor sería  $\beta_{n2} \varphi_2$ .

Si ahora los conductores estuviesen cargados a potenciales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , respectivamente, entonces la carga resultante sobre cada conductor resulta de la superposición de las cargas resultantes obtenidas según se acaba de mencionar. Estas cargas resultantes se denominan  $q_1, q_2, \dots, q_n$  y están relacionadas con los potenciales a través del siguiente juego de expresiones:

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11} \cdot \varphi_1 + \beta_{12} \cdot \varphi_2 + \dots + \beta_{1n} \cdot \varphi_n, \\ q_2 &= \beta_{21} \cdot \varphi_1 + \beta_{22} \cdot \varphi_2 + \dots + \beta_{2n} \cdot \varphi_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ q_n &= \beta_{n1} \cdot \varphi_1 + \beta_{n2} \cdot \varphi_2 + \dots + \beta_{nn} \cdot \varphi_n \end{aligned} \quad [52]$$

que planteadas matricialmente pueden escribirse como:

$$[q] = [\beta] \cdot [\varphi]$$

siendo  $[\beta]$  la *matriz de coeficientes de capacidad*.

Los coeficientes  $\beta$  son constantes que dependen de la forma, dimensiones relativas, permitividades dieléctricas del espacio entre los conductores, y de la disposición de los conductores. Esto es, los coeficientes  $\beta$  son funciones de la geometría de la configuración y de las propiedades dieléctricas del medio.

Para algunos autores, los coeficientes  $\beta_{ij}$  se denominan *coeficientes de capacidad*.

Para otros, los términos de la diagonal del arreglo:  $\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{nn}$ , son los denominados *coeficientes de capacidad*, y los otros factores:  $\beta_{12}, \beta_{13}, \dots$ , etc. (con  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ) son los denominados *coeficientes de inducción* (debido a que tienen en cuenta la carga que se induce en uno de los conductores, debido a la presencia de carga eléctrica otro). El hecho de que  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$  se expresa diciendo para los coeficientes  $\beta$  es válido el *principio de reciprocidad*.

Tal como se destacó antes, los coeficientes  $\beta$  son tales que  $\beta_{ij}$  es la *cantidad de carga eléctrica del  $i$ -ésimo conductor, que cargará al conductor  $j$ -ésimo a un potencial unitario, con todos los restantes conductores puestos a tierra*.

Esta consecuencia surge directamente del sistema de ecuaciones [52]. Sin embargo, se debe notar que, para cualquier configuración de un sistema de conductores, la capacidad total *entre pares de conductores* **no** está identificada directamente con ninguno de los coeficientes de capacidad o de inducción.

## 5. 2. Capacidades parciales

Las *capacidades parciales*, son las capacidades físicas existentes en un sistema de conductores, que vinculan a todos los conductores del sistema, tomados de a dos.

Para encontrar las relaciones entre dichas capacidades y los coeficientes de capacidad  $\beta$ , es conveniente reescribir el conjunto de expresiones [52], de manera tal que su interpretación resulte más directa. Específicamente, la primera de las ecuaciones puede reescribirse de la siguiente forma:

$$q_1 = (\beta_{11} + \beta_{12} + \dots + \beta_{1n}) \cdot \varphi_1 - \beta_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - \dots - \beta_{1n} \cdot (\varphi_1 - \varphi_n) \quad [53]$$

que también puede expresarse como:

$$q_1 = C_{11} \cdot \varphi_1 + C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1n} \cdot (\varphi_1 - \varphi_n) \quad [54]$$

siendo:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta_{11} + \beta_{12} + \dots + \beta_{1n} , \\ C_{12} &= -\beta_{12} , \\ &\dots\dots\dots , \\ C_{1n} &= -\beta_{1n} \end{aligned} \quad [55]$$

Nótese que  $C_{11} \varphi_1$  es la carga eléctrica en la capacidad  $C_{11}$  existente entre los puntos 1 y tierra, entre los cuales existe una diferencia de potencial  $\varphi_1$ . Similarmente,  $C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)$  es la carga eléctrica en la capacidad  $C_{12}$  existente entre los puntos 1 y 2, a través de los cuales existe una diferencia de potencial  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Una interpretación similar puede hacerse para los términos restantes.

En términos generales, las expresiones de las cargas del sistema de conductores resultan:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11} \cdot \varphi_1 + C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1n} \cdot (\varphi_1 - \varphi_n) , \\ q_2 &= C_{21} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22} \cdot \varphi_2 + \dots + C_{2n} \cdot (\varphi_2 - \varphi_n) , \\ &\dots\dots\dots , \\ q_n &= C_{n1} \cdot (\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2} \cdot \varphi_2 + \dots + C_{nn} \cdot \varphi_n \end{aligned} \quad [56]$$

siendo:

$$\begin{aligned} C_{ii} &= \beta_{i1} + \beta_{i2} + \dots + \beta_{ii} + \dots + \beta_{in} , \\ C_{ik} &= -\beta_{ik} , \text{ para } i \neq k \end{aligned}$$

La relación entre esta discusión y el sistema de conductores ilustrado en la **Figura 1.10.**, resulta evidente.

## 5. 3. Coeficientes potenciales o coeficientes de potencial

En base al principio de superposición, el potencial del sistema de conductores cargados en un punto cualquiera  $A$  se puede representar como la suma de los potenciales debidos a las cargas del primero, segundo, tercero, etc. conductor, de la siguiente manera:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} + \dots + \varphi_{An} \quad [57]$$

Además, cada componente es directamente proporcional a la carga correspondiente, es decir:

$$\varphi_{A1} = q_1 \cdot \alpha_{A1} \quad \varphi_{A2} = q_2 \cdot \alpha_{A2} \quad \varphi_{An} = q_n \cdot \alpha_{An} \quad [58]$$

Los coeficientes  $\alpha_{A1}$ ,  $\alpha_{A2}$ ,  $\alpha_{A3}$ , ... dependen tanto de la posición del punto  $A$  como de la *geometría* de *todos* los conductores portadores de cargas y de las propiedades dieléctricas del medio.

Unificando las expresiones [57] y [58], se puede escribir:

$$\varphi_A = \alpha_{A1} \cdot q_1 + \alpha_{A2} \cdot q_2 + \dots + \alpha_{An} \cdot q_n \quad [59]$$

Suponiendo que el punto  $A$  al principio se halla sobre el conductor 1, luego sobre el 2, etc., se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\varphi_1 = \alpha_{11} \cdot q_1 + \alpha_{12} \cdot q_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot q_n ,$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21} \cdot q_1 + \alpha_{22} \cdot q_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot q_n , \quad [60]$$

.....

$$\varphi_n = \alpha_{n1} \cdot q_1 + \alpha_{n2} \cdot q_2 + \dots + \alpha_{nn} \cdot q_n$$

donde  $\varphi_1$  es el potencial del primer conductor,  $\varphi_2$  es el potencial del segundo conductor, etc.

En forma matricial, el conjunto de ecuaciones [60] puede escribirse:

$$[\varphi] = [\alpha] \cdot [q]$$

Los coeficientes  $\alpha_{ik}$  se llaman *coeficientes potenciales* o *coeficientes de potencial* y  $[\alpha]$  es la *matriz de coeficientes de potencial*.

El sistema de ecuaciones con los coeficientes potenciales permiten resolver directamente el problema acerca de la distribución de los potenciales en un sistema de conductores cuando se conoce la distribución de sus respectivas cargas eléctricas.

#### 5. 4. Principio de reciprocidad

En el sistema considerado de cuerpos conductores cargados eléctricamente, se cumple el *principio de reciprocidad*, cuya expresión son las igualdades:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad [61]$$

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \quad [62]$$

La igualdad [62] coincide con la igualdad evidente de las capacidades parciales:

$$C_{ik} = C_{ki} \quad [63]$$

dado que  $C_{ik}$  y  $C_{ki}$  representan sólo las diferentes notaciones de la misma capacidad entre los conductores  $i$  y  $k$ .

Como consecuencia directa de la igualdad [61] resulta [62].

Analizando el sistema de ecuaciones [60], es fácil dar una formulación verbal del principio de reciprocidad: *el potencial del primer conductor, en presencia de una carga perteneciente únicamente al segundo conductor, es igual al potencial del segundo conductor en presencia de una carga perteneciente sólo al primer conductor.*

#### 5. 5. Relación entre los coeficientes de potencial y los coeficientes de capacidad.

Analizando la solución del sistema de ecuaciones [60], resulta sencillo hallar el vínculo que existe entre los coeficientes de potencial y los coeficientes de capacidad:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{A_{11}}{D} \cdot \varphi_1 + \frac{A_{12}}{D} \cdot \varphi_2 + \dots + \frac{A_{1n}}{D} \cdot \varphi_n , \\ q_2 &= \frac{A_{21}}{D} \cdot \varphi_1 + \frac{A_{22}}{D} \cdot \varphi_2 + \dots + \frac{A_{2n}}{D} \cdot \varphi_n , \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= \frac{A_{n1}}{D} \cdot \varphi_1 + \frac{A_{n2}}{D} \cdot \varphi_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{D} \cdot \varphi_n \end{aligned} \quad [64]$$

siendo  $A_{ki}$  los complementos algebraicos y  $D$  el determinante del sistema [60].

Comparando los sistemas [58] y [64] se encuentra que:

$$\beta_{ki} = \frac{A_{ki}}{D}$$

## 6. Energía electrostática. Densidad de energía

### 6. 1. Trabajo de agrupación de cargas puntuales

Consideremos el caso de dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  ubicadas en dos puntos del espacio, separadas por una distancia  $r_{12}$ . La energía potencial de este simple sistema, suponiendo las cargas previamente creadas en el infinito, estará dada por el trabajo requerido para llevar las cargas a su posición final.

Teniendo en cuenta que el potencial es el trabajo realizado para trasladar la unidad de carga desde el infinito al punto, el trabajo para ubicar  $q_2$  a una distancia  $r_{21}$  de  $q_1$  es:

$$W = q_2 V_{21} \quad [\text{J}]$$

donde  $V_{21}$  es el potencial en el punto 2 (donde se ubica  $q_2$ ) debido a  $q_1$ .

Si a la configuración anterior agregamos una tercera carga  $q_3$  situada a una distancia  $r_{31}$  de  $q_1$ , y  $r_{32}$  de  $q_2$ , la energía potencial del sistema de 3 cargas puede obtenerse adicionando al trabajo antes calculado el que corresponde al desplazamiento de  $q_3$  hasta su posición final, así para la configuración de las tres cargas se tiene:

$$W = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

ya que en general puede escribirse que:

$$q_m V_{mn} = q_n V_{nm}$$

resulta:

$$W = \frac{1}{2} q_1 (V_{12} + V_{13}) + \frac{1}{2} q_2 (V_{21} + V_{23}) + \frac{1}{2} q_3 (V_{31} + V_{32}) \quad [\text{J}]$$

expresión que puede escribirse como:

$$W = \frac{1}{2} q_1 V'_1 + \frac{1}{2} q_2 V'_2 + \frac{1}{2} q_3 V'_3 \quad [\text{J}]$$

donde  $V'_1$ ,  $V'_2$  y  $V'_3$  son los potenciales en los puntos 1, 2 y 3 respectivamente, debidos a todas las cargas *excepto* la carga ubicada en el punto considerado.

Extendiendo la expresión anterior a un sistema de  $n$  cargas puntuales, se obtiene:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} q_i V'_i \quad [\text{J}] \quad [65]$$

donde  $V'_i$  es el potencial en  $i$  debido a todas las cargas excepto la  $i$ -ésima.

### 6. 2. Energía total de un sistema de cargas puntuales

La fórmula [65] da la energía potencial  $W$  de agrupamiento de cargas eléctricas puntuales desde el punto de vista de la *acción a distancia* entre las cargas.

Naturalmente, también puede adoptarse el punto de vista del *campo de fuerza* creado por las cargas. Encontraremos la expresión de  $W$  en ese caso.

Consideremos el teorema de la divergencia y la Ley de Gauss, aplicados al caso de una carga puntiforme genérica  $q_i$  en el vacío; se tendrá:

$$\iiint_{v_i} \vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] dv = \iint_{S_i} \epsilon_0 \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad [66]$$

donde:

- $v_i$  es un volumen cualquiera que encierra (contiene) el punto  $i$  en el que está situada la carga  $q_i$ .
- $S_i$  es la superficie (cerrada) límite del volumen  $v_i$ .
- $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$  es el campo eléctrico asociado a  $q_i$ .
- $\mathbf{r}$  es el vector de posición de un punto genérico interior a  $v_i$ .

Sea  $V'_i(\mathbf{r})$  la función potencial que deriva de:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla} V_i(\mathbf{r}) \quad [67]$$

Se pueden expresar los  $V'_i(\mathbf{r})$  de la expresión [65] en la forma:

$$V'_i = \sum_{j=1 (j \neq i)}^n V_j(\mathbf{r}_i) \quad [68]$$

Siendo  $\mathbf{r}_i$  el vector de posición del punto  $i$ , donde está la carga  $q_i$ .

Así, con [66] y [68] en [65] se tiene:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \iiint_{v \rightarrow \infty} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \, dv \right] \left[ \sum_{j=1 (j \neq i)}^n V_j(\mathbf{r}_i) \right] \quad [69]$$

La expresión [69] es una suma de  $n(n-1)$  términos de la forma genérica:

$$V_j(\mathbf{r}_i) \cdot \iiint_{v_i} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \, dv \quad [70]$$

La  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$  bajo el signo integral es nula en casi todo el volumen  $v_i$ , excepto justo en el punto  $i$ , donde está  $q_i$ , la única carga considerada. Así también el producto  $(V_j \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i)$  será nulo en casi todo el volumen  $v_i$ , excepto en  $i$ , donde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  y  $V_j = V_j(\mathbf{r}_i)$ . Por eso resulta en este caso:

$$V_j(\mathbf{r}_i) \iiint_{v_i} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \, dv = \iiint_{v_i} V_j(\mathbf{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \, dv \quad [71]$$

El segundo miembro de [71] es igual a [70].

Por otra parte el primer miembro de [71] puede transformarse mediante una integración por partes utilizando la siguiente identidad del análisis vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot [V_j(\mathbf{r}_i) \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] = \vec{\nabla} \cdot [V_j(\mathbf{r}_i)] \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + V_j(\mathbf{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \quad [72]$$

de la cual

$$V_j(\mathbf{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \cdot [V_j(\mathbf{r}_i) \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] - \vec{\nabla} \cdot V_j(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \quad [73]$$

Con la [73] y teniendo en cuenta la [67], el primer miembro de [72] se convierte en:

$$\iiint_{v_i} \left\{ \vec{\nabla} \cdot [V_j(\mathbf{r}_i) \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] + \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \right\} dv \quad [74]$$

La integral del primer término de [74] puede a su vez transformarse, aplicando el teorema de la divergencia, así:

$$\iiint_{v_i} \vec{\nabla} \cdot [V_j(\mathbf{r}_i) \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] \, dv = \iint_{S_i} [V_j(\mathbf{r}_i) \mathbf{E}_i(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} \quad [75]$$

Como cada  $v_i$  puede ser cualquier volumen con la única condición de contener la carga  $q_i$ , se puede elegir un único volumen  $v = v_i$  tal que para todo  $i$  el volumen  $v$  contenga todas las  $n$  cargas  $q_i$ . Además puede hacerse  $v$  tan grande como sea necesario ( $v \rightarrow \infty$ ) de modo que las integrales de superficie del tipo de la [75] se anulen.

En efecto, cuando  $v$  crece indefinidamente, la superficie límite  $S$  varía con  $r^2$ , mientras que  $V_i$  varía con  $r^{-1}$  y  $\mathbf{E}_i$  lo hace con  $r^{-2}$  (siendo  $r = |\mathbf{r}|$ , el módulo del vector de posición de un punto genérico situado sobre la superficie  $S$ ).

Teniendo en cuenta esta condición, la forma integral dada por [70] se reduce al segundo término dentro de la integral de [74]; reemplazando en [69] y reordenando las sumas, tenemos:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1 (j \neq i)}^n \iiint_{v \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \, dv \quad [76]$$

o, lo que es igual,



$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{v \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1 (j \neq i)}^n (\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \right] dv \quad [77]$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico total  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  creado por las  $n$  cargas es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \quad [78]$$

resulta:

$$E^2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1 (j \neq i)}^n (\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) + \sum_{i=1}^n E_i^2(\mathbf{r})$$

de donde:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1 (j \neq i)}^n (\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \right) = E^2(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^n E_i^2(\mathbf{r}) \quad [79]$$

Finalmente, con [79] en [77] obtenemos:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{v \rightarrow \infty} E^2(\mathbf{r}) dv - \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^n \iiint_{v \rightarrow \infty} E_i^2(\mathbf{r}) dv \quad [80]$$

El primer término de [80]

$$U \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{v \rightarrow \infty} E^2(\mathbf{r}) dv \quad [81]$$

es la *energía total del campo eléctrico*, mientras que:

$$U_{Si} \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{v \rightarrow \infty} E_i^2(\mathbf{r}) dv \quad [82]$$

es la *autoenergía*, o energía de *condensación*, de la  $i$ -ésima carga. Consecuentemente:

$$U_S = \sum_{i=1}^n U_{Si} \quad [83]$$

es la *autoenergía de las cargas* del sistema considerado.

### 6. 3. Energía de una distribución continua de cargas

Se trata de encontrar ahora una expresión de la energía electrostática para una distribución cualquiera de carga en el continuo, caracterizada por una densidad  $\rho(x, y, z)$ , con la salvedad de que  $\rho$  es finita *en todo* punto  $(x, y, z)$ . Para ello supongamos que se desplazan pequeños elementos de carga desde el infinito a su ubicación final de modo de ir incrementando su densidad de carga en cada punto hasta alcanzar el valor final  $\rho(x, y, z)$ . Dado que el trabajo necesario para construir la distribución es independiente de la modalidad con que se construya, puede considerarse que el transporte de los pequeños elementos de carga se realiza de forma de que en cada instante la densidad de carga  $\rho_i$  en cada punto es la misma fracción  $f$  de la densidad final  $\rho$  de ese punto.

$$\rho_i = f \rho \quad \left[ \text{C/m}^3 \right]$$

con  $f$  variando entre 0 y 1, así el incremento de densidad de carga es:

$$d\rho = \rho df \quad \left[ \text{C/m}^3 \right]$$

A medida que va variando la distribución de carga, va modificándose el potencial de cada punto, de forma tal que en cada instante se tiene un potencial  $V_i$  correspondiente a la densidad  $\rho_i$ , siendo el valor final  $V$  correspondiente a  $\rho$ , el valor de  $V_i$  es:

$$V_i = f V \quad [V]$$

En base al modelo adoptado el incremento de trabajo a medida que se van transportando elementos de carga, es:

$$dW = (f V) df \quad (\rho dv) \quad [J]$$

y el trabajo total es:

$$W = \int_0^1 f df \iiint_V \rho V dv \quad [J]$$

de donde:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv \quad [J] \quad [84]$$

La ecuación [84] expresa la energía potencial para el caso de una distribución de carga arbitraria  $\rho$  (con  $\rho$  finito en todo punto del espacio), y es equivalente a la expresión [65] para cargas puntuales. Sin embargo, debe notarse que en [84] el valor del potencial es el generado por toda la distribución de carga  $\rho$ , mientras que en [65] el potencial es el debido a todas las cargas excepto la del punto.

Para los casos de distribuciones de cargas superficiales ( $\sigma$ ) y lineales ( $\lambda$ ), la [84] se expresa como:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V ds \quad [J] \quad [85]$$

y

$$W = \frac{1}{2} \int_L \lambda V dl \quad [J] \quad [86]$$

#### 6. 4. Energía en términos de campo

Se trata ahora de expresar la energía solo en términos de campo, introduciendo en la expresión [65] la igualdad:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [C/m^3] \quad [36]$$

resulta:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D}) dv \quad [J] \quad [87]$$

Utilizando la igualdad del análisis vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (c \mathbf{F}) = c \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} c$$

siendo  $c$  es un escalar y  $\mathbf{F}$  un vector, la [87] se transforma en:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (V \mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \vec{\nabla} V dv \quad [J]$$

aplicando el teorema de la divergencia al primer término del miembro derecho de la anterior ecuación, se tiene:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} - \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \vec{\nabla} V dv \quad [J] \quad [88]$$

La superficie sobre la cual debe efectuarse la integración de la primera integral del segundo miembro de la [88] debe contener la distribución de carga, cumplida tal condición  $S$  puede elegirse arbitrariamente. Si se elige  $S$  como una superficie cerrada en el infinito, debe calcularse la integral para  $r \rightarrow \infty$ . En tal condición, para una distribución de carga finita, el potencial tiende a cero con  $r^{-1}$ , el campo tiende a cero con  $r^{-2}$  y la superficie tiende a infinito con  $r^2$ , por lo cual la integral tiende a cero para  $r \rightarrow \infty$ .

Si además se reemplaza en la [67] la igualdad:

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} V \quad [27]$$

resulta:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E^2 dv = U \quad [\text{J}] \quad [89]$$

donde la integral se toma sobre todo el espacio.

La expresión [89] indica que la energía electrostática puede ser descripta en términos de campo. La energía puede ser calculada sin conocer las distribuciones de carga, es suficiente conocer el campo en todos los puntos generado por tales distribuciones.

De ello puede inferirse que la energía está *almacenada* en el campo. Esta concepción es alternativa a la de considerar que la energía reside en las cargas, como surge de analizar las expresiones [65] y [84].

### 6. 5. Densidad de energía

Del concepto de energía almacenada en el campo dado por la expresión [89], surge el de *densidad volumétrica* de energía electrostática, esto es:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \left[ \text{J/m}^3 \right] \quad [90]$$

o más genéricamente:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad \left[ \text{J/m}^3 \right] \quad [91]$$

Así, a cada punto del espacio se le puede asignar una magnitud escalar que es la energía electrostática por unidad de volumen.

### 6. 6. Fuerzas y energías en el campo electrostático

Conociendo la expresión de la energía almacenada en el campo eléctrico y su variación durante un desplazamiento infinitesimal de cuerpos cargados, siempre es posible determinar en base a las consideraciones referentes a la ley de conservación de energía, las fuerzas que actúan en un campo eléctrico.

Supongamos un sistema aislado formado por varias partes: fuente, conductores, cargas puntuales, dieléctricos, etc. La fuente mantiene las diferentes superficies conductoras a potencial constante. Supongamos que dejamos que una de las partes realice un pequeño desplazamiento,  $d\mathbf{r}$ , bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que actúan sobre el sistema eléctrico. Entonces hay un trabajo mecánico consecuencia de un intercambio de distintas formas de energía, que siguen la ley de conservación de la energía en dicho sistema. Podemos, entonces, formular la ecuación del balance de incrementos infinitesimales de energía.

Para ello definamos las variables que describirán el estado del sistema y su convención de signos. Sea  $W_m$  el trabajo mecánico realizado *por* las fuerzas eléctricas del sistema, sea  $W$  la energía *almacenada* en el campo electrostático y sea  $W_b$  la energía *suministrada* por la fuente. Debido a que el sistema está aislado no hay otro tipo de intercambio de energías. Entonces la ley de conservación de energía se convierte en la siguiente ecuación de balances incrementales:

$$dW + dW_m = dW_b \quad [92]$$

Nótese que es muy importante la definición arbitraria de las variables que definen el estado del sistema y que aparecen en la ecuación [92] de balances incrementales. Si hubiésemos elegido otras variables para describir el estado del sistema, entonces la ecuación obtenida a través de la ley de la conservación de la energía sería diferente a la ecuación [92].

Entonces para un pequeño desplazamiento,  $d\mathbf{r}$ , el trabajo mecánico realizado *por* el sistema eléctrico, es decir por las fuerzas eléctricas, es:

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad [93]$$

Si el objeto del sistema capaz moverse está restringido a hacerlo de manera tal que gire respecto a su eje, entonces la ecuación anterior puede sustituirse por:

$$dW_m = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad [94]$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el momento eléctrico y  $d\boldsymbol{\theta}$  el desplazamiento angular en función de sus componentes ( $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ) y ( $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3$ ).

Es importante comprender y analizar el significado de los signos de los distintos incrementos que aparecen en la ecuación [92]. De la forma en que, convencionalmente, fueron definidas las variables y para las cuales se dedujo la ecuación de balances energéticos, vale la siguiente interpretación:

- \*  $dW > 0$ ; *aumenta* la energía almacenada en el campo electrostático
- \*  $dW < 0$ ; *disminuye* la energía almacenada en el campo electrostático

- \*  $dW_m > 0$ ; el trabajo es realizado *por* las fuerzas del campo electrostático
- \*  $dW_m < 0$ ; el trabajo es realizado en *contra* de las fuerzas del campo electrostático, es decir el trabajo lo realiza algún agente exterior.
- \*  $dW_b > 0$ ; la fuente *entrega* energía
- \*  $dW_b < 0$ ; la fuente *recibe* energía

Supongamos un sistema aislado formado por varias partes tal que no se encuentra conectado a ninguna fuente, es decir es un sistema a *carga constante*. Dado que no hay fuente que entregue energía la ecuación [92] se convierte en:

$$dW + dW_m = 0 \quad [95]$$

Combinando [95] y [93], se tiene:

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q; \quad F_y = -\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_Q; \quad F_z = -\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_Q \quad [96]$$

Para el caso del desplazamiento angular se tiene combinando [93] y [94]:

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_1}\right)_Q; \quad \tau_2 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_2}\right)_Q; \quad \tau_3 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_3}\right)_Q \quad [97]$$

donde el subíndice Q se ha agregado para indicar que el sistema está aislado y, en consecuencia, su carga total permanece constante durante el desplazamiento  $d\mathbf{r}$  o  $d\boldsymbol{\theta}$ .

Para el caso de un sistema conectado a una fuente la cual mantiene a potencial constante las superficies conductoras del sistema, veremos como podemos relacionar la fuerza con las variaciones energéticas a partir de la ecuación de balance de incrementos de energía [92].

La energía electrostática,  $W$ , de un sistema de conductores cargados, está dada a través de la ecuación [65]. Si ahora parte del sistema se desplaza mientras que al mismo tiempo los potenciales de los conductores permanecen fijos, la energía electrostática sufre un incremento infinitesimal debido a una variación diferencial de la carga  $dq_i$ .

$$dW = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} dq_i V_i' \quad [98]$$

Además, la energía suministrada por la fuente,  $dW_b$ , es el trabajo necesario para mover cada uno de los diferenciales de carga,  $dq_i$ , desde el potencial cero hasta el potencial del conductor adecuado, entonces este trabajo es, por definición de potencial:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n dq_i V_i' \quad [99]$$

Por lo tanto observando las ecuaciones [98] y [99], se tiene:

$$dW_b = 2 dW \quad [100]$$

Utilizando esta última ecuación para reemplazar  $dW_b$  en [92], obtenemos:

$$dW_m = dW \quad [101]$$

Es decir, en un sistema conectado a una fuente que mantiene los conductores a potencial constante, cuando estos incrementos son positivos, la energía suministrada por la fuente se reparte por partes iguales entre la energía almacenada en el campo y el trabajo realizado por las fuerzas del campo. Y en forma similar, cuando estos incrementos son negativos, la energía que recibe la fuente proviene por partes iguales de la energía que pierde el campo y del trabajo realizado por un agente exterior.

Utilizando la ecuación [101] y combinándola con la [93], se obtiene:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad [102]$$

ó:

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_V; \quad F_y = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_V; \quad F_z = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_V \quad [103]$$

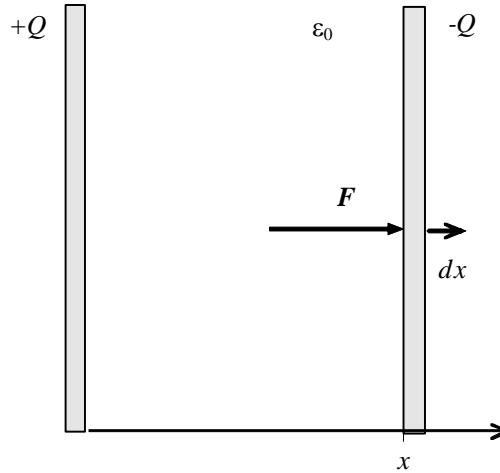
Para el caso del desplazamiento angular se tiene combinando [101] y [94]:

$$\tau_1 = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta_1} \right)_V; \quad \tau_2 = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta_2} \right)_V; \quad \tau_3 = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta_3} \right)_V \quad [104]$$

donde el subíndice V se ha agregado para indicar que el sistema se mantiene a potencial constante durante el desplazamiento  $d\mathbf{r}$  o  $d\boldsymbol{\theta}$ .

### 6. 6. 1. Ejemplo de cálculo de la fuerza sobre la placa de un capacitor

Como un ejemplo de la utilización del método de energía para calcular fuerzas sobre objetos cargados, veamos el caso de la fuerza existente entre las placas planas y paralelas, de un condensador en aire, como el que se observa en la **Figura 1.11**.



**Figura 1.11.** Fuerza entre las placas de un capacitor en aire.

La separación entre las placas del condensador es  $x$ , y el área de las mismas es  $A$ . Supongamos que el condensador ha sido cargado carga  $Q$  y desconectado de la fuente, después de ello la densidad de carga de sus placas será  $\sigma = Q/A$  y la misma no variará.

Deseamos calcular la fuerza que ejerce la placa cargada con carga  $+Q$  sobre la placa cargada con  $-Q$ . Para ello consideremos un trabajo virtual debido a un desplazamiento infinitesimal  $dx$  tendiente a alejar las placas, con el solo propósito de calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  que está actuando sobre la placa y analicemos las correspondientes variaciones energéticas.

Supongamos que el trabajo virtual es realizado por las fuerzas del campo eléctrico, y dado que el desplazamiento propuesto tiende a separar las placas, entonces la fuerza supuesta del campo tendrá la dirección y sentido del crecimiento de la variable  $x$ .

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} \quad [105]$$

Luego a través del análisis del signo resultante para  $F_x$  conoceremos el sentido real de la fuerza  $\mathbf{F}$ .

En este sistema de carga constante corresponde utilizar la ecuación [95] y por lo tanto la fuerza estará dada por la ecuación [96].

$$F_x = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q \quad [96]$$

La energía almacenada en el campo electrostático está dada por la ecuación [89] y dado que este sistema es a carga constante puedo escribir el campo eléctrico entre las placas como  $E = \sigma / \epsilon_0$ :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A x \quad [106]$$

donde  $A$  es el área de las placas y  $x$  la distancia de separación entre las mismas.

Para un desplazamiento  $dx$  la variación de energía almacenada en el campo será:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A \quad [107]$$

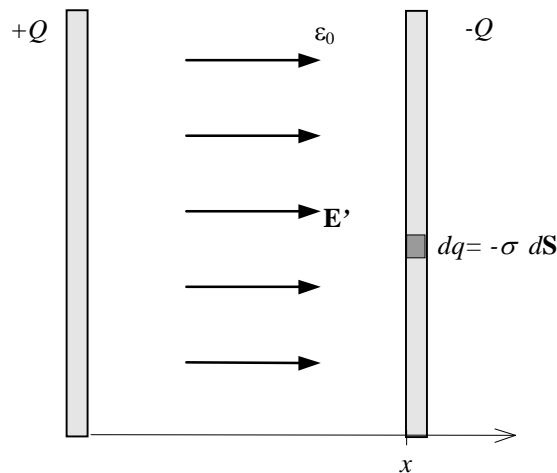
entonces la fuerza será, por la ecuación [96]:

$$\mathbf{F} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A \hat{\mathbf{i}} \quad [108]$$

El signo negativo indica que la fuerza es en sentido contrario a la variación positiva de  $x$ , es decir un aumento en la separación entre las placas, esto es un  $dx$  positivo, indica que la fuerza  $\mathbf{F}$  actúa en el sentido contrario al dibujado, es decir, tiende a acercarlas.

Esta fuerza para el caso del condensador de placas planas y paralelas, con carga constante, también puede ser hallada por medio de la ley de Gauss, y a través de la definición de campo eléctrico que es la fuerza por unidad de carga. En la **Figura 1.12**, se observa el campo eléctrico  $\mathbf{E}'$  generado por la placa cargada positivamente en la región entre placas, siendo el mismo de intensidad uniforme:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{i}} \quad [109]$$



**Figura 1.12.** Fuerza entre las placas de un capacitor

La fuerza que actúa sobre un diferencial de carga superficial  $dq$  será:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}' \cdot (-\sigma) d\mathbf{S} \quad [110]$$

Integrando esta fuerza infinitesimal sobre toda la superficie de la placa,  $A$ , obtenemos la fuerza sobre la misma. Dado que, despreciando los efectos de borde, la intensidad del campo eléctrico es constante y perpendicular a la placa en toda su superficie y dado que la densidad de carga también es constante en toda la superficie, la fuerza será:

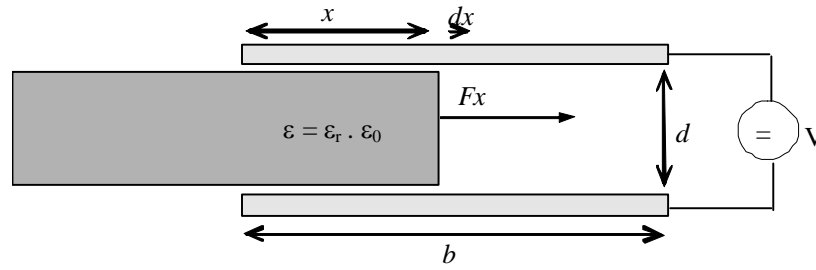
$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E}(-\sigma) d\mathbf{S} = E(-\sigma) \int d\mathbf{S} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A \hat{\mathbf{i}} \quad [111]$$

Esta fuerza tiene el sentido negativo de las  $x$ , es decir la placa cargada positivamente ejerce una fuerza de atracción sobre la otra placa, lo cual es lógica pues ambas placas están cargadas con diferente signo. Este resultado coincide en dirección, sentido y módulo, con el resultado obtenido a través de consideraciones energéticas, ecuación [108].

Es decir para este sencillo caso podemos hallar la fuerza por ambos métodos, pero en configuraciones más complejas generalmente esto no es posible y es en estos casos cuando resulta sumamente útil el empleo de consideraciones energéticas para obtener fuerzas y momentos en un campo electrostático.

### 6. 6. 2. Ejemplo de cálculo de la fuerza sobre un dieléctrico que penetra dentro de las placas de un capacitor

Un ejemplo típico es la fuerza que sufre un material dieléctrico al ser introducido en el espacio entre las placas planas de un condensador. Supóngase un condensador con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  que llena parte del espacio entre las placas. Las dimensiones de cada placa son: longitud  $b$ , ancho  $w$ , y separación  $d$ , como se observa en la **Figura 1.13**. Las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante  $V$ . Supóngase que el dieléctrico se desplaza en el sentido de introducirse dentro del espacio entre placas y supóngase que la fuerza que lo desplaza es la del campo, luego analizaremos el signo, el cual nos indicará el sentido real de la fuerza del campo. Se pretende calcular la fuerza que realiza el campo sobre este dieléctrico, y para ello resulta conveniente utilizar el método de consideraciones energéticas.



**Figura 1.13.** Trabajo realizado para introducir un dieléctrico entre las placas de un capacitor.

La energía almacenada en este sistema, puede ser calculada por diversos métodos, es decir, como contenida en las cargas usando la expresión [85], o como contenida en el campo usando la ecuación [89]:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS \quad [85]$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv \quad [89]$$

Así por ejemplo usaremos la ecuación [89], integrándola sólo en el espacio donde el campo eléctrico es distinto de cero. Despreciando los efectos de borde en el extremo del condensador y teniendo en cuenta que la densidad volumétrica de energía en el espacio ocupado por el dieléctrico es diferente a la que existe en la región con aire, obtenemos la energía total almacenada como la suma de las contribuciones tanto de la parte en aire como de la parte que contiene al dieléctrico. La expresión de la energía total almacenada en función de la variable  $x$ , es la siguiente:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (b-x)wd + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 xwd \quad [112]$$

Dado que la tensión se mantiene constante, el campo eléctrico en el aire será el mismo que en el dieléctrico, entonces reemplazando  $E = V/d$  en la expresión anterior, obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 V^2 w}{d} [(b-x) + \epsilon_r x] \quad [113]$$

La fuerza ejercida por el campo puede obtenerse, como ya lo adelantáramos, a través del análisis de balances incrementales energéticos, dado por la ecuación [92]. En este caso, dado que el sistema se encuentra conectado a una fuente que mantiene constante la diferencia de potencial entre las distintas partes del mismo, la fuerza puede obtenerse utilizando la ecuación [103].

La variación infinitesimal de la energía almacenada en el campo electrostático, con respecto a un desplazamiento diferencial  $dx$  y a potencial constante, es:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 V^2 w}{d} (\epsilon_r - 1) \quad [114]$$

Por lo tanto la fuerza ejercida por el campo, según ecuación [103], es:

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 V^2 w}{d} (\epsilon_r - 1) \quad [115]$$

La ecuación [115] expresa la fuerza realizada por el campo. Esta es una fuerza ejercida en la dirección del eje  $x$  y dado que en la ecuación anterior se observa que la fuerza es positiva pues  $\epsilon_r$  es mayor que uno, entonces la fuerza tiene el sentido dibujado en la **Figura 1.13.**, es decir en el sentido creciente de la variable  $x$ . Esto indica que la fuerza del campo tiende a atraer a un dieléctrico de mayor permitividad que el que contiene en su interior, y por lo tanto a expulsar este último.

Cabe mencionar que si bien para el cálculo del campo eléctrico y de la energía almacenada en el mismo, los efectos de borde fueron despreciados, son ellos los responsables de que exista esta fuerza. Como se puede observar la fuerza que atrae al dieléctrico tiene la dirección del eje  $x$ , es decir debe ser consecuencia de alguna componente del campo eléctrico en esta dirección. El campo eléctrico perpendicular a las placas, calculado despreciando los efectos de borde no es en absoluto responsable del desplazamiento del dieléctrico, sino que lo es la componente en  $x$  que aparece como consecuencia de los efectos de borde.