
Electrostática

Clase 2

Vector Desplazamiento o densidad de flujo eléctrico. Ley de Gauss. .

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

En ciertos casos que se analizan posteriormente, resulta conveniente introducir un vector \mathbf{D} proporcional a \mathbf{E} , en el vacío .

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad [\text{C/m}^2]$$

Para el caso de una carga puntual se tendrá:

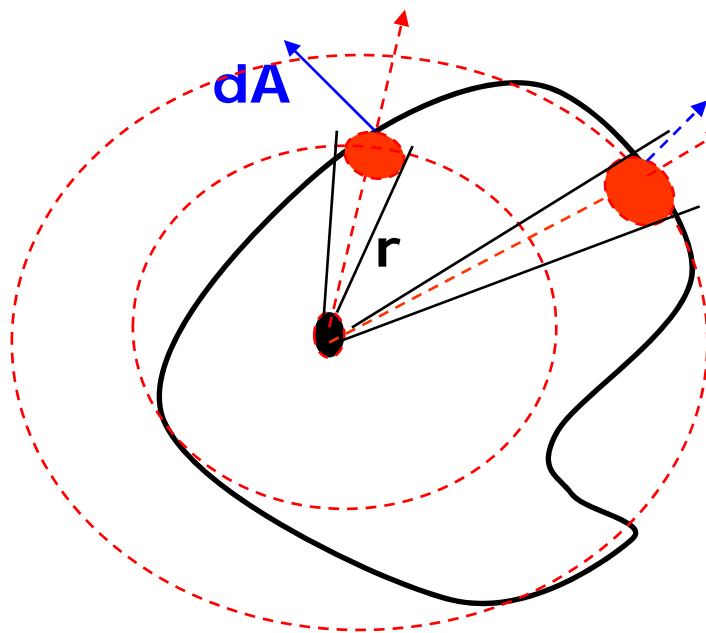
$$\mathbf{D} = \frac{q}{4 \pi r^2} \vec{\mathbf{r}} \quad [\text{C/m}^2]$$

Si se integra el vector **D** sobre una superficie cerrada donde existe una carga *puntual*

$$d\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = dS = \sin(\theta) \cdot r^2 \cdot d(\theta) \cdot dr$$

$$d\theta = \frac{dl(\text{arco})}{r} \rightarrow \theta_{\text{max}} = 2\pi$$

$$\text{Angulo sólido} \quad d\Omega = \frac{dS(\text{superficie})}{r^2} \rightarrow \Omega_{\text{max}} = 4\pi$$



$$\begin{aligned} \iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} &= \iint_{SC} D_r \cdot ds = \iint_{SC} \frac{q}{4\pi r^2} r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi \right) \\ &= \int_0^\pi \frac{q}{4\pi} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot 2\pi = -\frac{q \cdot 2\pi}{4\pi} \cdot \cos(\pi) - \left(-\frac{q \cdot 2\pi}{4\pi} \cdot \cos(0) \right) = q \end{aligned}$$

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q$$

$$\iint_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- *Aplicando el principio de superposición para cualquier distribución de carga :*
 - **el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por tal superficie.**
 - D se lo denomina *densidad de flujo eléctrico*.
 - La Ley de Gauss se satisface con la condición de que el campo verifica su dependencia con $(1/r^2)$, ya que solo así puede compensarse el aumento de la superficie con el radio
 - Ley de Gauss contiene solo parcialmente la información que brinda la Ley de Coulomb, ya que nada dice sobre la simetría central (esférica) que debe cumplirse para el campo producido por una carga puntual.

$$E_r(r) = \text{depende_del_radio}$$

$$E_\theta = 0$$

$$E_\varphi = 0$$

*Simetría
Esférica:
Campo
Conservativo
Irrotacionalidad*

*Ley de
Coulomb*

$$E r = \frac{k}{r^2}$$

$$E_\theta = ?$$

$$E_\varphi = ?$$

*Ley de Gauss,
Fuente de
Divergencia*

Divergencia de D y E

- La propiedad integral del campo expresada por la Ley de Gauss tiene su correspondiente propiedad puntual o diferencial. Aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$\iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} \, dv = \iiint_V \rho \, dv \quad [C]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad [C/m^3]$$

y teniendo en cuenta que las integrales de los segundos miembros de las igualdades anteriores se extienden sobre el mismo volumen, se concluye que:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [C/m^3] \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [V/m^2]$$

Ley de Gauss, cuando la usamos para calcular los campos ?? en lugar de utilizar los procedimientos de integración a partir de la ley de Coulomb

- **En situaciones suficientemente simétricas.**
 - Hay que usar la simetría para saber dónde E es constante y cuál es su dirección.
 - Hay que seleccionar una superficie cerrada en la cual E sea constante o donde el flujo sea cero (E tangente a la superficie).

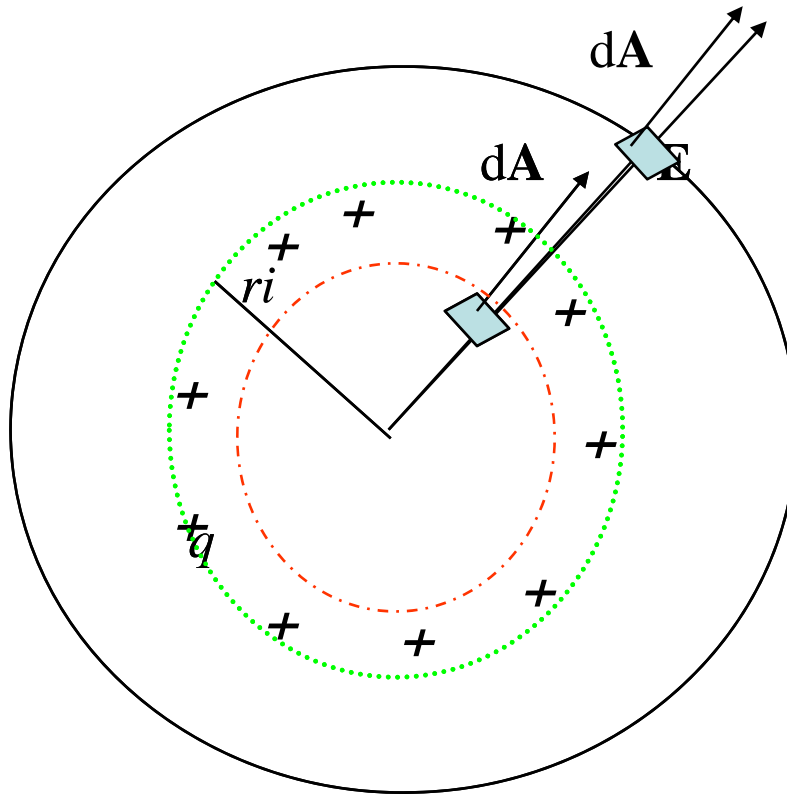
$$\iint_{sc} E \cdot dA = E \iint_{sc} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \iint dS}$$

Recomendaciones para aplicar la Ley de Gauss

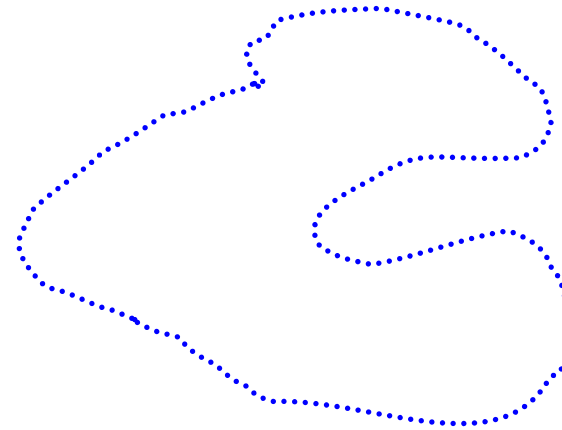
- Identificar al campo eléctrico y representarlo con líneas de campo.
 - En los casos de cargas estáticas en **conductores**, el campo eléctrico tiene dirección normal a la superficie.
- Seleccionar superficie gaussiana acorde a la simetría.
 - Que pase por los puntos donde se desea conocer la magnitud de E
 - Que sea cerrada.
 - Que E sea constante en los puntos de la superficie.
 - Que E sea tangente a la superficie en las partes donde no es constante.
- La integral lleva directo a una expresión algebraica que contiene E .
- Calcular la carga encerrada por la superficie.
 - En ocasiones será necesario calcularla a partir de alguna densidad de carga.

Esfera conductora cargada



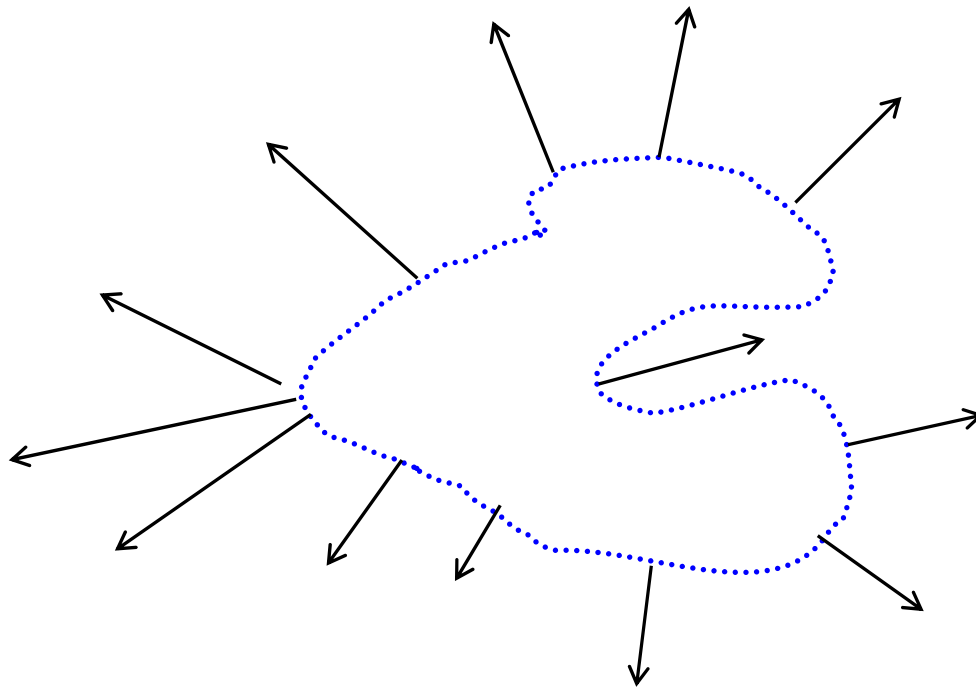
$$r < r_i \Rightarrow E = 0$$

$$r \geq r_i \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} r$$



- Si el cuerpo conductor de cualquier forma está cargado, como será el campo E , donde se ubicará la carga ??????

Cuerpo conductor cargado y aislado

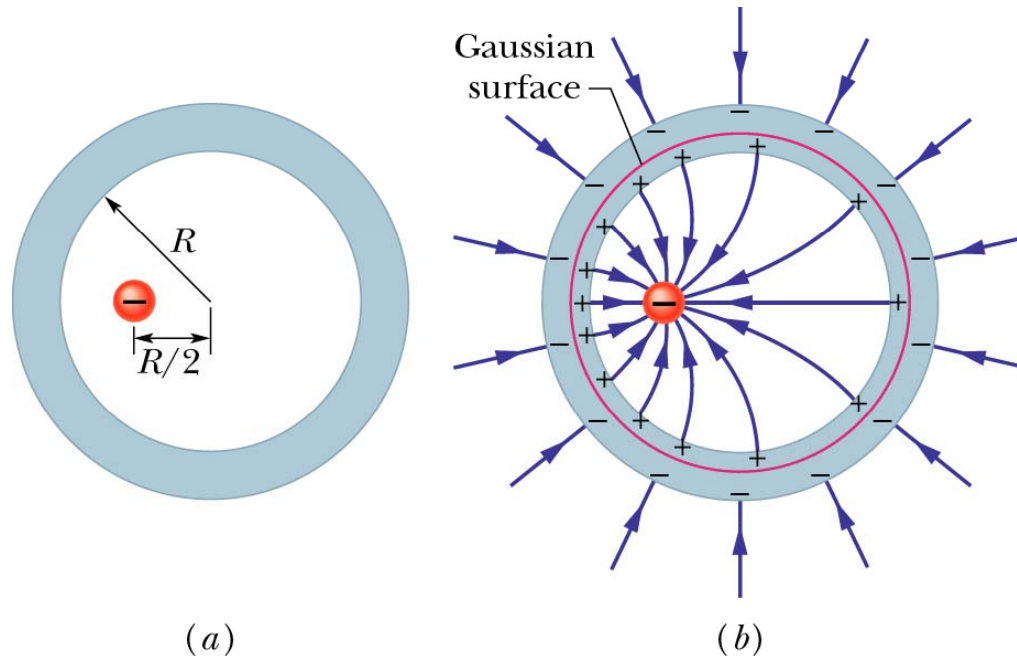


Si se coloca un exceso de cargas en un conductor aislado, esa cantidad de carga se moverá completamente a la superficie del conductor. Nada del exceso de carga se encontrara dentro del cuerpo del conductor

- **E: normal a la superficie**
- **E adentro=0**

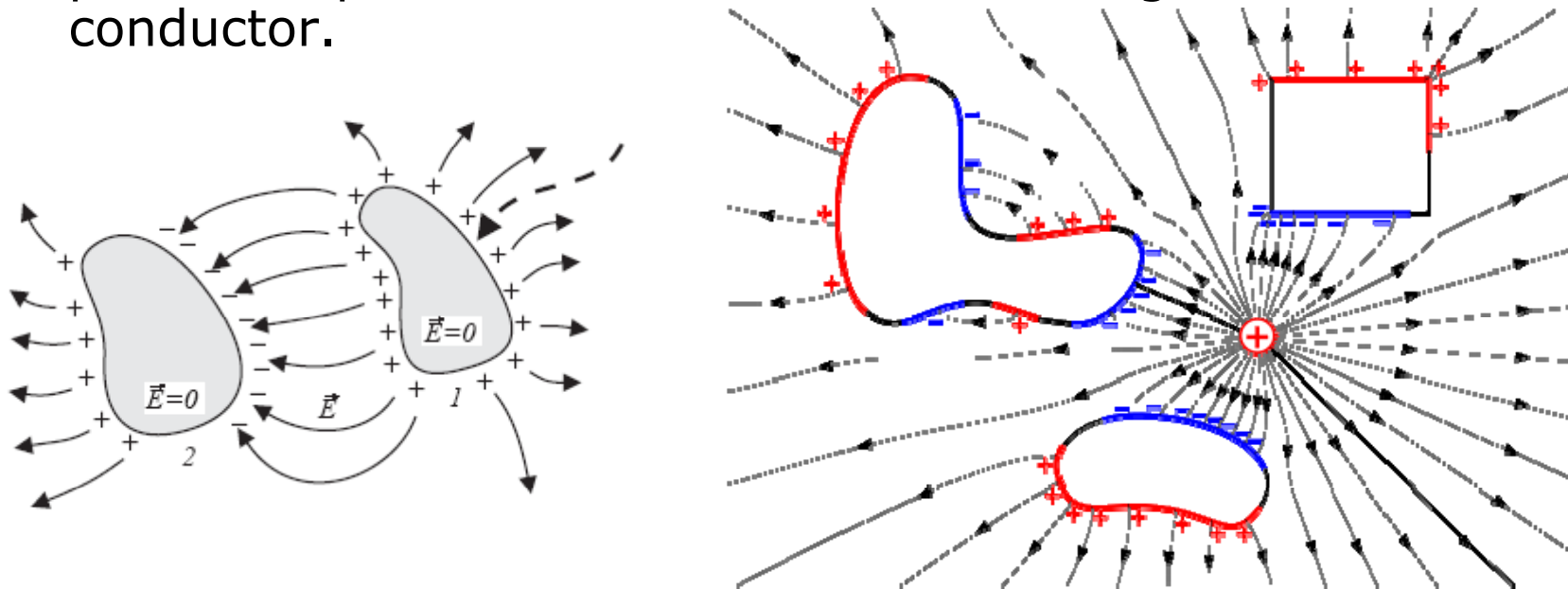
Cavidad conductora y carga

- Cargas dentro de un casquete esférico, ubicada fuera del centro
- El Campo E adentro de la cavidad no es radial
- El campo en el casquete es cero
- El Campo fuera Resulta Uniforme y radial como si la carga estuviese en el centro del casquete

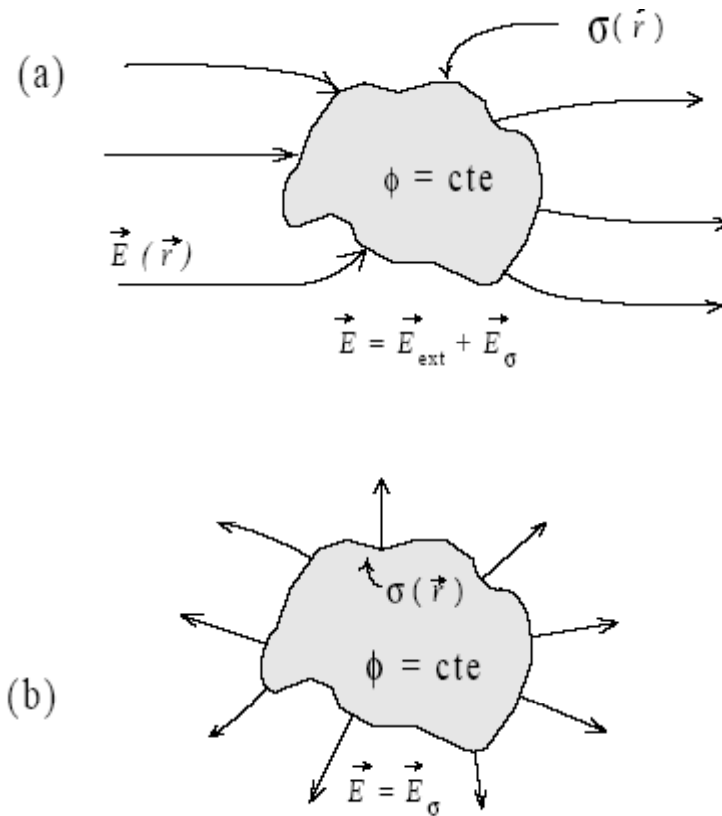


Cuerpos conductores aislados en un campo eléctrico, cargas inducidas

La presencia de un conductor cargado en las inmediaciones de otro conductor produce una redistribución de cargas en la superficie de ambos. Esto es lo que se conoce como **influencia electrostática (cargas inducidas)**. La redistribución está motivada por la exigencia de que el campo en el interior del conductor sea nulo. Al acercar el conductor cargado (conductor 1 en la figura) este producirá un campo en todo el espacio que debe ser neutralizado dentro de los conductores por el campo producido por la nueva distribución de cargas en cada conductor.



Cuerpos conductores



- La carga eléctrica superficial de un conductor provoca la aparición de campos eléctricos en sus inmediaciones.

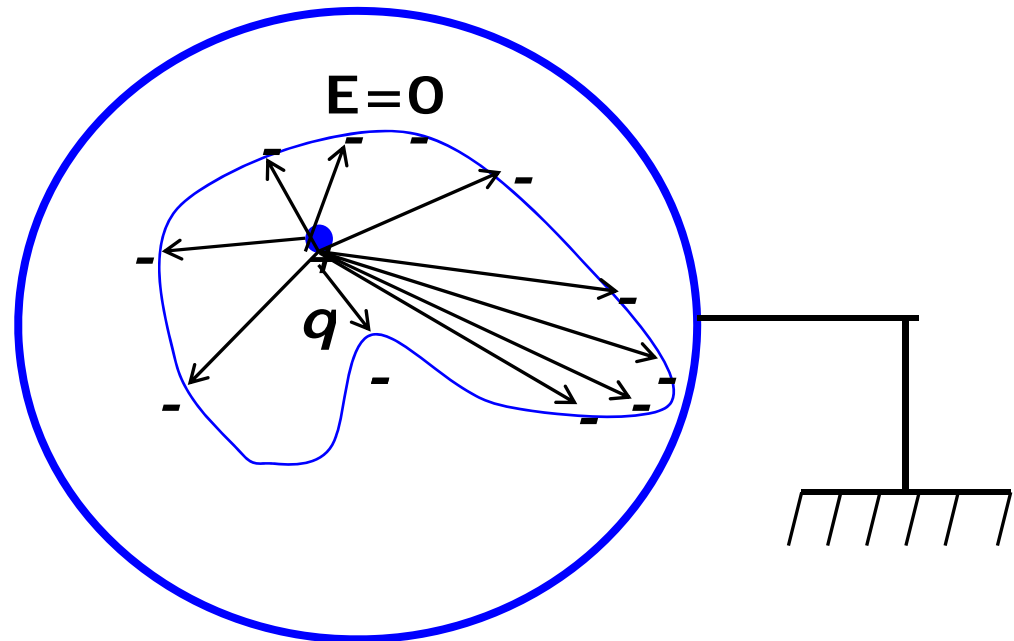
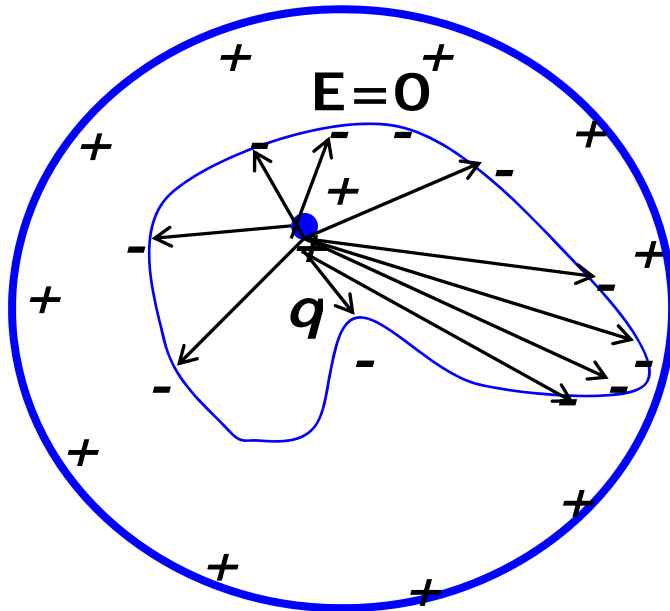
El campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor, que es una superficie equipotencial. Si no fuese así las cargas superficiales estarían en movimiento continuo, debido a la componente tangencial no nula del campo.

En la figura se muestra cualitativamente la forma de los campos en las proximidades de un conductor en dos situaciones típicas.

- a) Campo eléctrico en presencia de un conductor;*
- b) campo eléctrico producido por un conductor cargado*

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}$$

$$E=0$$



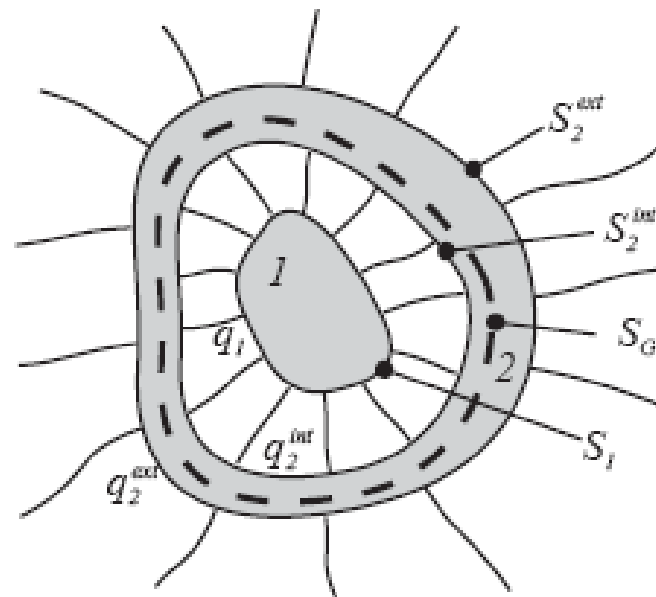
- EN GENERAL cuando una pieza conductora hueca rodea a otro conductor:
- La pieza interior posee una carga q_1 y la pieza hueca una carga q_2 , que en general se distribuirá en las dos superficies cerradas que la delimitan, S_{2int} , S_{2ext}
- Que carga se acumula en cada superficie ???
- utilizando la ley de Gauss en forma integral aplicada sobre una superficie gaussiana SG interior al conductor 2 que englobe a S_{int2}
- El cálculo da

$$\iint_{sc} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{q_{1ext} + q_{2int}}{\epsilon_0}$$

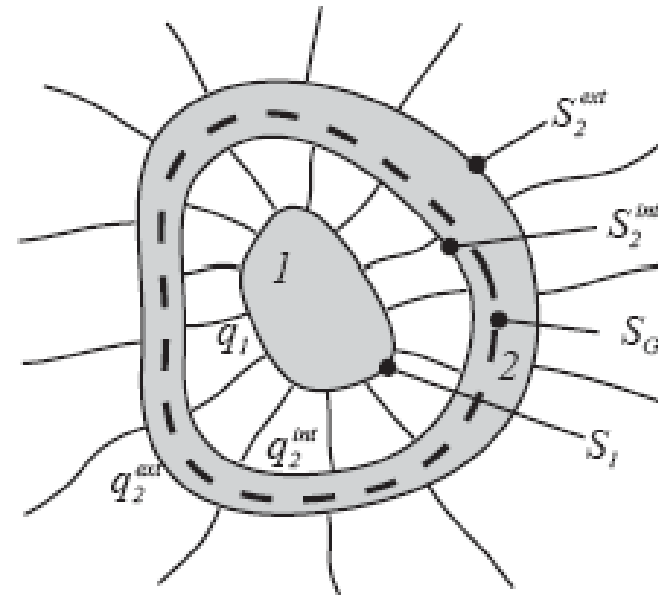
$$q_{2int} = -q_{1ext}$$

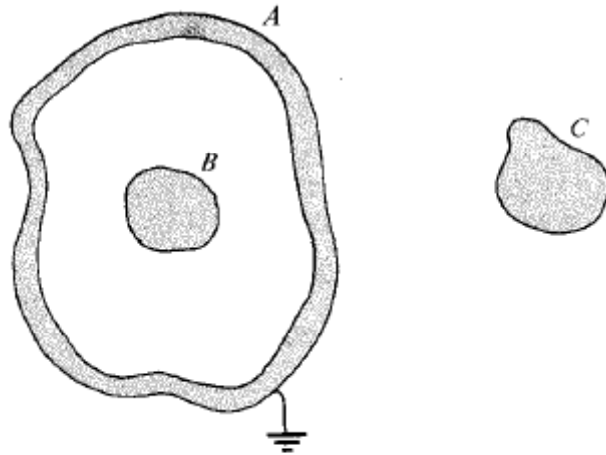
En la superficie exterior a 2 se deposita el resto de la carga suministrada a este conductor.

$$q_{2ext} = q_2 + q_{1ext}$$



-
- Otra característica propia del apantallamiento es que *todas las líneas de campo van de una superficie a la otra*, es decir, de S_1 a S_2^{int} o viceversa.
 - En efecto, en ausencia de carga volumétrica en la región intermedia, E es solenoidal y no hay fuentes ni sumideros de líneas de campo.
 - Tampoco es posible que una línea nazca y muera en la misma superficie, puesto que ello implicaría una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor en equilibrio electrostático.



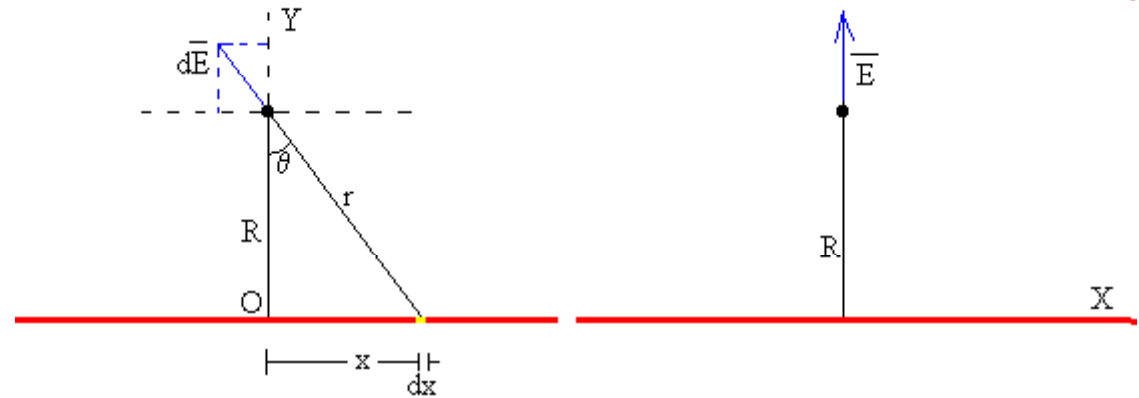
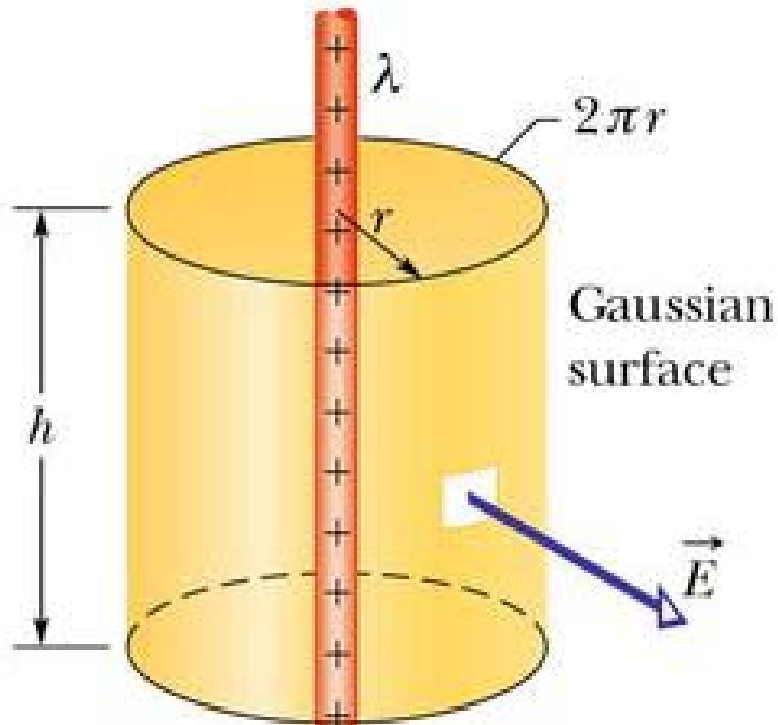


- El cuerpo conductor A aísla como si fuera una pantalla y las condiciones adentro y afuera de A son independientes

Ley de Gauss. Línea de carga infinita

Una Línea Recta e Infinita de Carga

Por que Infinita???



- Todos los puntos en los lados de la superficie Gaussiana cilíndrica tienen la misma magnitud de E
- En la práctica, no existen líneas infinitas pero el resultado será una buena aproximación al caso de puntos que quedan cerca de una línea de carga finita, $R \ll \text{longitud}$.

Ley de Gauss. Línea de carga infinita

- E resulta en la dirección radial de las coordenadas cilíndricas.
- La superficie Gaussiana tiene el lado cilíndrico y dos tapas.
- En las tapas E no es constante pero es tangente a la superficie así que la integral sobre las tapas es cero
- La integral sobre los lados del cilindro es la que se evalúa
- Se determina la carga dentro de la superficie.
- En este caso resulta ser λh donde λ es la densidad lineal de carga

$\lambda = \text{carga/longitud}$

$$\iint_{sc} E \cdot dA = E \iint_{\text{lados}} dS = \int_{h/2}^{h/2} \frac{\lambda}{\epsilon_0} dl$$

$$E \int_{h/2}^{h/2} 2\pi r dl = \frac{\lambda}{\epsilon_0} h$$

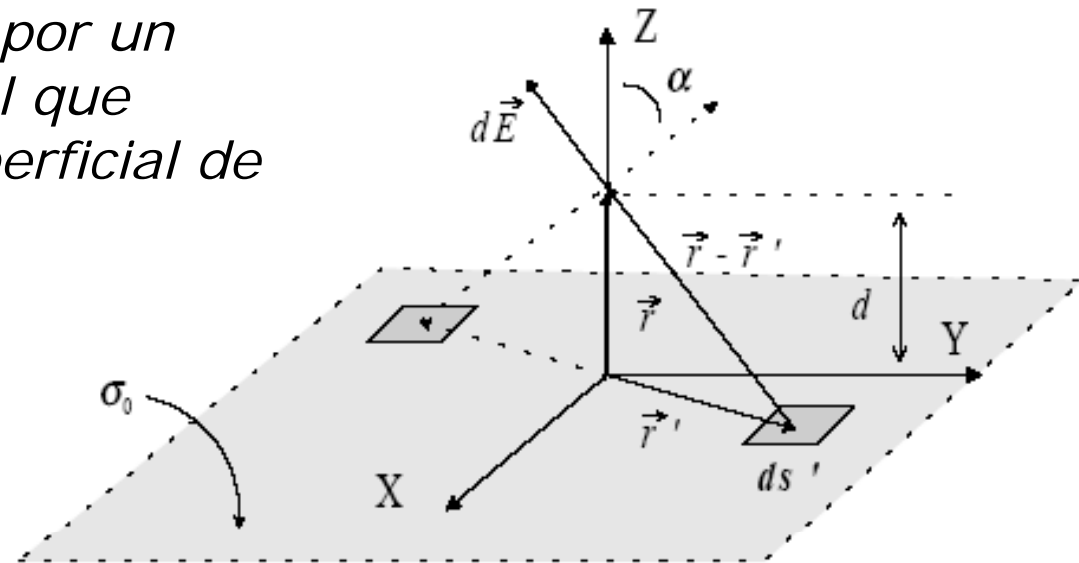
$$E 2\pi r h = \frac{\lambda}{\epsilon_0} h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r h \epsilon_0} h = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} r$$

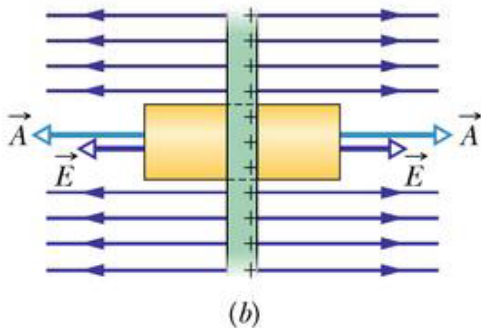
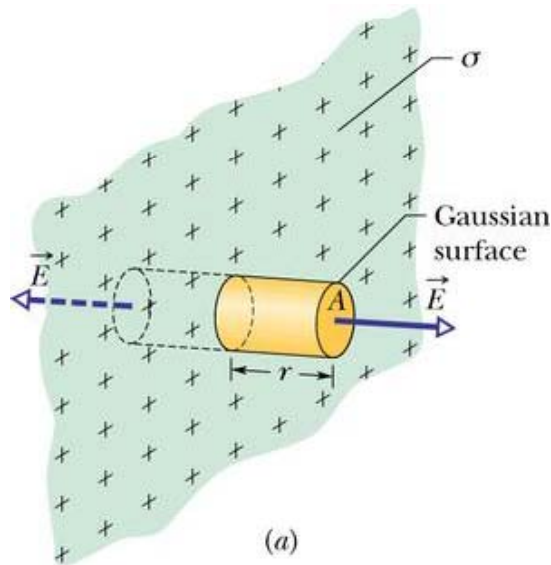
Placa infinita de carga

Campo eléctrico creado por un plano muy extenso en el que existe una densidad superficial de carga homogénea.



Campo eléctrico que crea en un determinado punto situado a una distancia d del plano.

- origen de coordenadas bajo el punto donde buscamos el campo, pues es equivalente a cualquier otra elección.
- Los radiovectores r' que señalan a los diferentes diferenciales de carga podemos tomarlos por parejas, opuestos respecto al origen, para poner de manifiesto la simetría del problema: **se comprueba que el campo total debe ir dirigido en la dirección perpendicular al plano**
- pues cualquier otra componente se cancelará al integrar



- La única dirección del campo resultante es perpendicular al plano.
- Puntos que quedan en planos paralelos están equidistantes al plano y tienen un campo E de la misma magnitud
- La superficie Gaussiana que usamos es un cilindro con dos tapas.
- El flujo a través de la superficie cilíndrica Gaussiana es cero.
- Los flujos a través de las dos tapas son iguales.

$$\iint_{sc} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \iint_{tapas} dS = \int_{h/2}^{h/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS$$

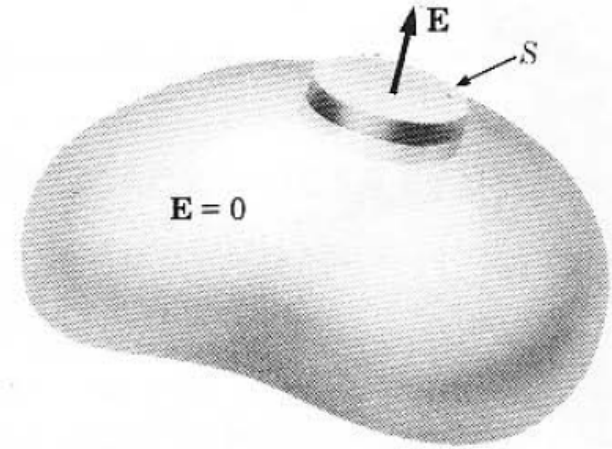
$$E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2 = 2 \cdot E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \text{campo_constante}$$

El campo eléctrico en el exterior inmediato de un conductor

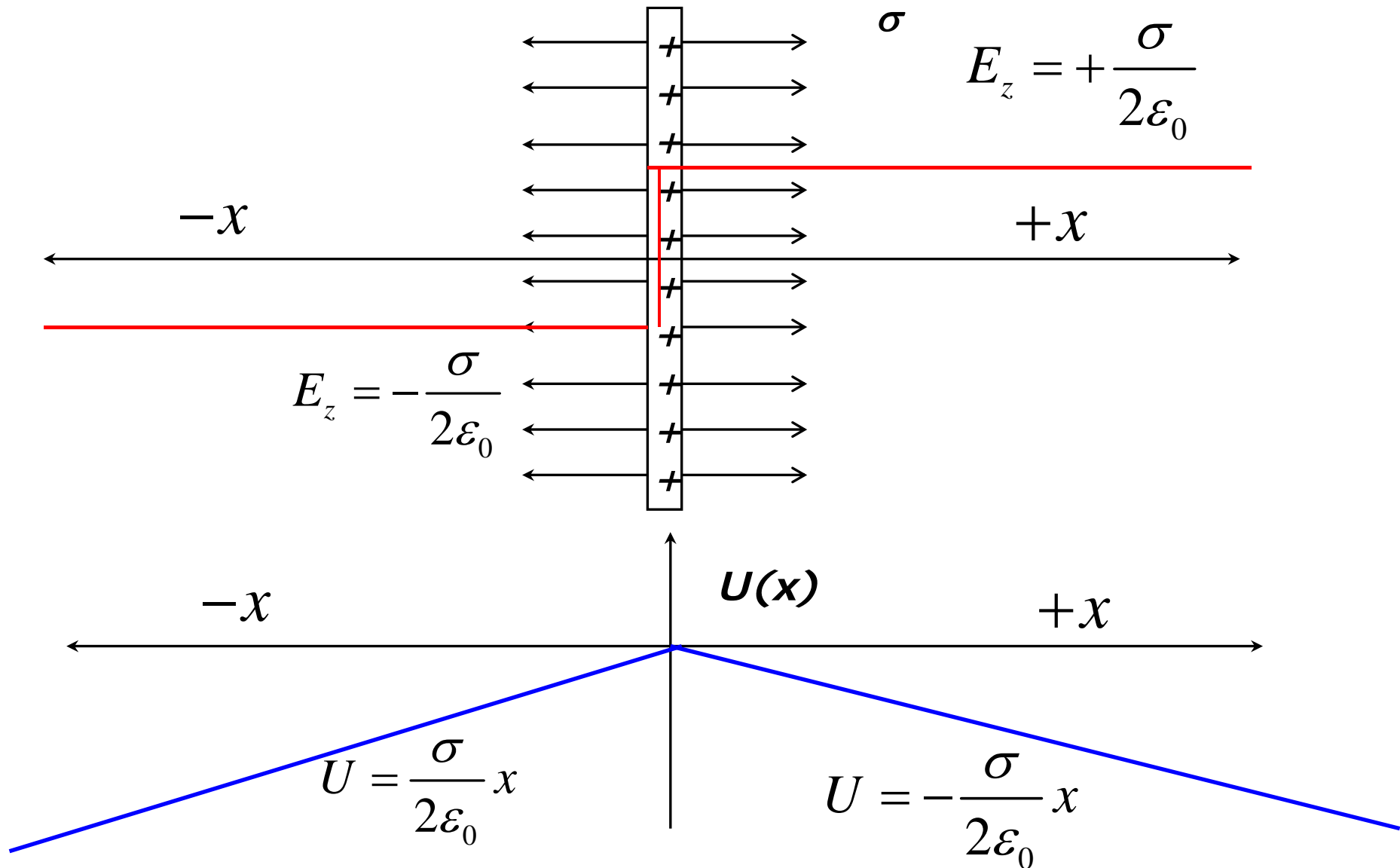
- E debe ser normal a la superficie del conductor (Equipotencial).
- Si la carga de un conductor está dada por la función de densidad superficial σ , considerando una superficie gaussiana cilíndrica con las bases ΔS paralelas a la superficie del conductor (una de ellas un infinitésimo dentro del conductor y la otra un infinitésimo afuera), entonces aplicando la ley de Gauss resulta
- por lo tanto el campo eléctrico que está en el exterior inmediato de un conductor resulta:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

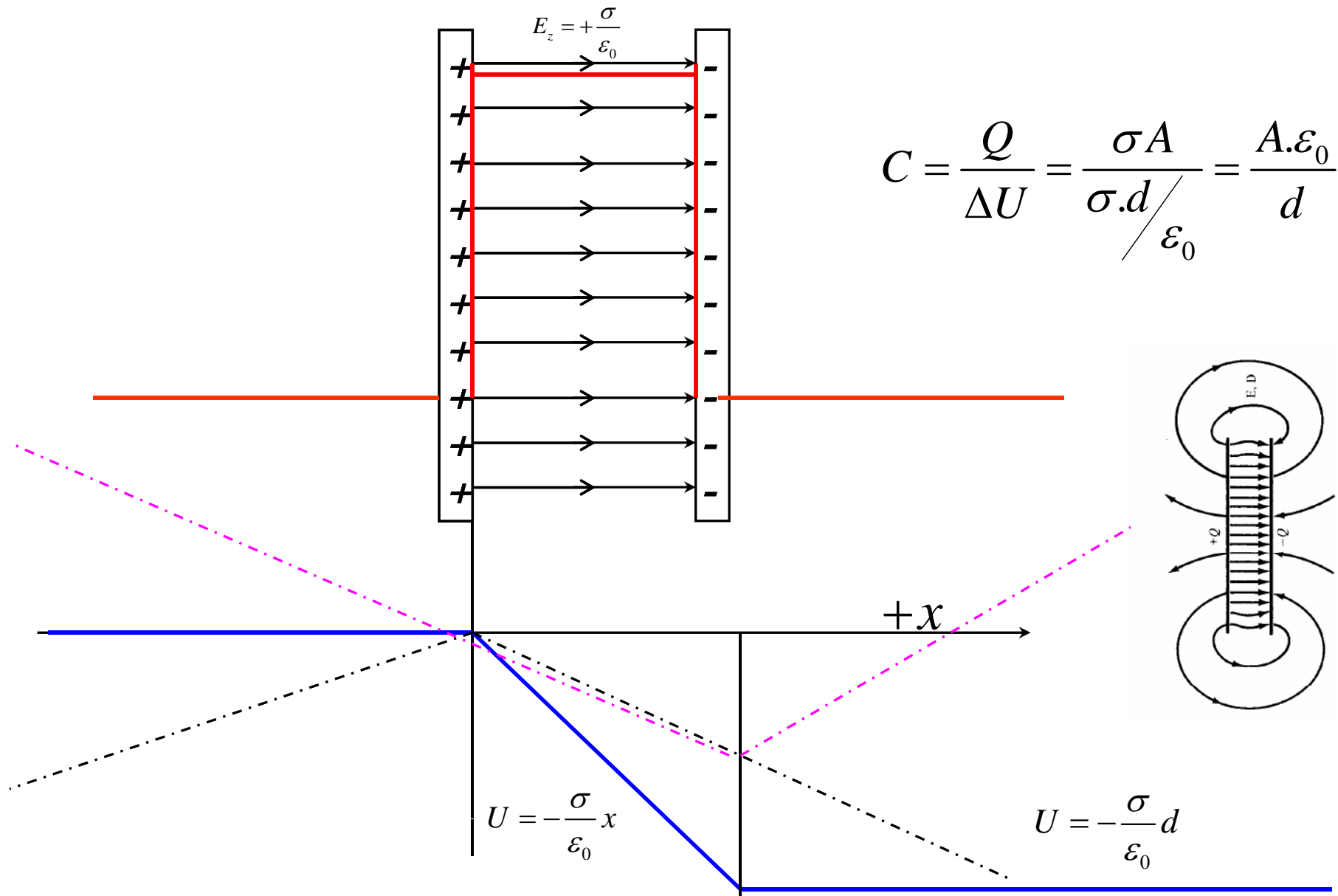


$$E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

Ejemplo de capacitor plano



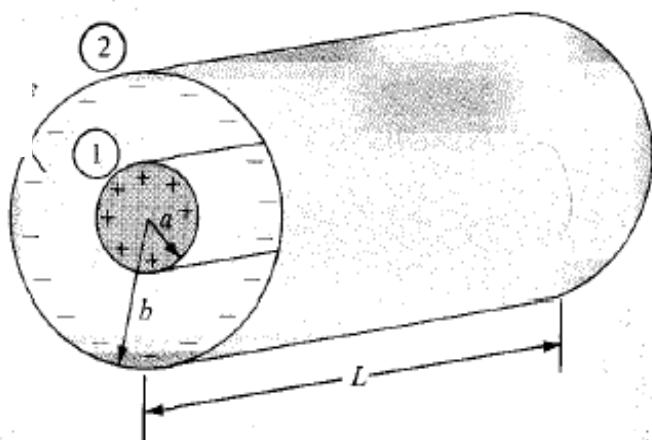
Ejemplo de capacitor plano



Cable coaxil o capacitor cilíndrico.

- Dos conductores cilíndricos concéntricos de radio a y b
- El espacio en este caso entre ambos es el vacío
- Ambos cilindros tienen una carga $+Q$ y $-Q$ uniformemente distribuida siendo $\lambda=Q/L$
- Aplicando Gauss :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} r$$



$$\Delta U = - \int_2^1 E r . dr$$

$$\Delta U = - \int_2^1 \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} . dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 . L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$