

---

# Líneas de Transmisión

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
ARGENTINA

- Obtención de las **ecuaciones diferenciales de la tensión y de la corriente en una línea** de transmisión bifilar (ecuaciones del Telegrafista) a partir de las ecuaciones de Campo .
  - Solución general de la ecuación para una línea ideal sin pérdida. Determinación de la:
    - velocidad de propagación
    - impedancia característica.
- **Líneas reales excitadas con funciones periódicas sinusoidales**, solución de la ecuación diferencial, constante de propagación.
- Ondas estacionarias en líneas excitadas por sinusoides y cargadas.
- Obtención de la onda incidente y reflejada en función de la carga y el generador.
  - Línea adaptada.
  - Coeficientes de reflexión.
  - Impedancia de entrada de líneas
  - línea de longitud infinita
  - línea en cortocircuito
  - línea en circuito abierto
  - línea de longitud= $\lambda/4$

Las ecuaciones de Maxwell, tanto en su forma puntual como integral, son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \quad \iint_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_{\text{libre}} dv \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \iint_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4)$$

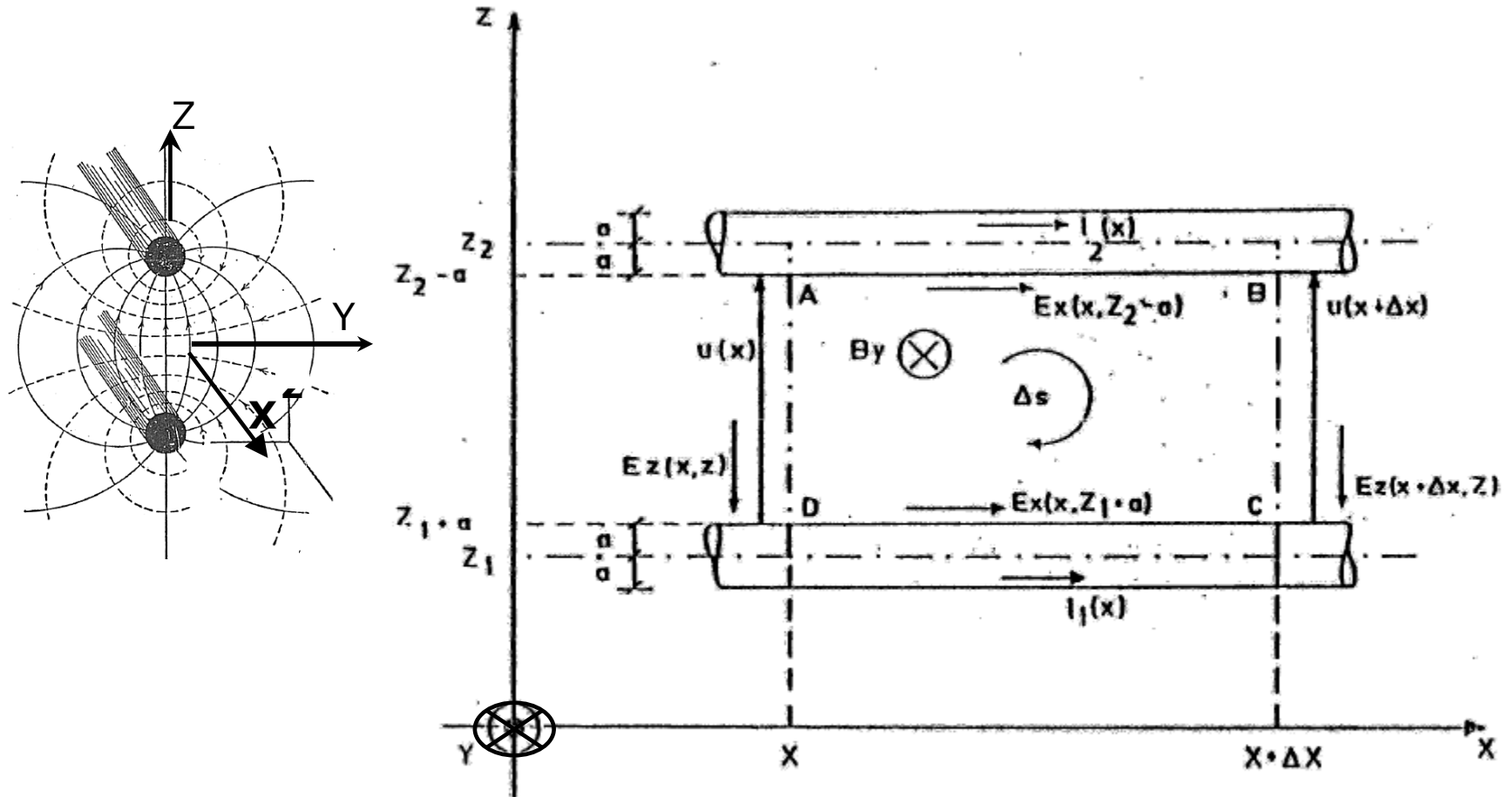


Figura 1 - Trozo de línea de longitud incremental  $\Delta x$ .

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\iint_{\Delta S} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{z_1+a}^{z_2-a} [\mathbf{E}(x, z) - \mathbf{E}(x + \Delta x, z)] dz + \int_x^{x+\Delta x} [\mathbf{E}(x, z_2 - a) - \mathbf{E}(x, z_1 + a)] dx \quad (3)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{z_1+a}^{z_2-a} [\mathbf{E}(x + \Delta x, z) - \mathbf{E}(x, z)] dz + \int_x^{x+\Delta x} [\mathbf{E}(x, z_2 - a) - \mathbf{E}(x, z_1 + a)] dx \quad (4)$$

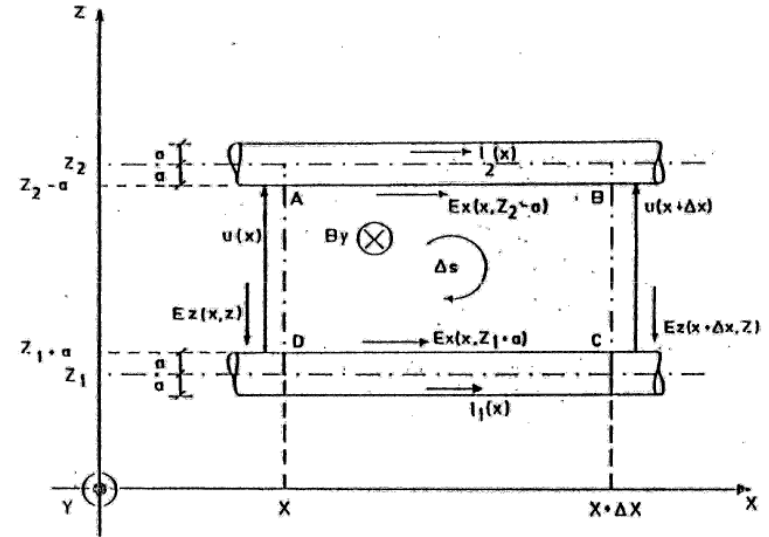


Figura 1 - Trozo de línea de longitud incremental  $\Delta x$ .

Definiendo:

$$U(x) = - \int_{z1+a}^{z2-a} \mathbf{E}(x, z).dz \qquad U(x + \Delta x) = - \int_{z1+a}^{z2-a} \mathbf{E}(x + \Delta x, z).dz$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{z1+a}^{z2-a} [\mathbf{E}(x + \Delta x, z) - \mathbf{E}(x, z)] dz \quad (5)$$

$$E_{x(x, z2-a)} = r_2.i(x) + l_2 \frac{\partial i(x)}{\partial t}$$

$$E_{x(x, z1+a)} = r_1.i(x) + l_1 \frac{\partial i(x)}{\partial t}$$

$r_1, r_2$  : resistencias de los conductores por unidad de longitud de cada conductor

$l_1, l_2$ : inductancias intrínseca por unidad de longitud de cada conductor

**Representan la impedancia interna por unidad de longitud de cada uno de los conductores (variables con la frecuencia)**

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} [\mathbf{E}(x, z_2 - a) - \mathbf{E}(x, z_1 + a)] dx = r.i(x) + l_i \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (8)$$

Por otra parte

$$\text{con: } r=r_1+r_2 \text{ y } l_i=l_{i1}+l_{i2} \quad \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta s} B_y(x, z).ds \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) dx.dz \quad (9)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta x} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) dx.dz \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z).dz \quad (10)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z).dz = -\frac{\partial}{\partial t} [le.i(x)] \quad (11)$$

Con  $le$ : como la inductancia externa del lazo por unidad de longitud en la coordenada  $x$ .

**Si la geometría del lazo es invariante y el material homogéneo  $\rightarrow le$  constante**

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z).dz = -le \cdot \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + r.i(x,t) + li.\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -le.\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + r.i(x,t) + l.\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = 0$$

**Con  $l=le+li$**

- Variación de la tensión respecto de la distancia en función del valor de la corriente y de su variación respecto del tiempo

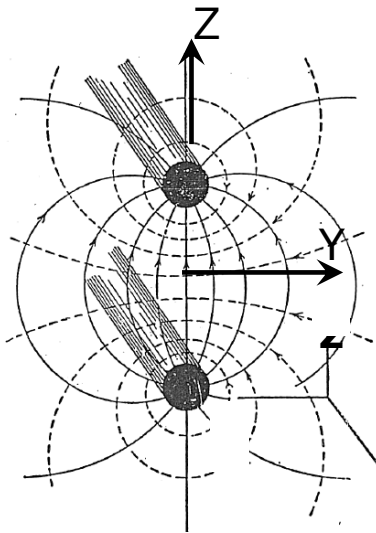


**En  $y=0$ ,  $B_y$ ,  $E_z$**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15)$$

Suponiendo B en la dirección de y

$$\boxed{\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y(x, z)}{\partial x} = J_z(z) + \varepsilon \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial t}} \quad (16)$$



Integrando la (16) a lo largo del eje z entre ambos conductores, en el medio dieléctrico:

$$\int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial B_y(x, z)}{\partial x} dz = \int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{1}{\varepsilon} J_z(z) dz + \int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial t} dz \quad (17)$$

Resolviendo el miembro de la izquierda por aplicación ec. (12) - inductancia por unidad de longitud -

$$\frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1+a}^{z_2-a} B_y(x, z) dz = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} [l e \cdot i(x)] = \frac{l e}{\mu \varepsilon} \frac{\partial i(x)}{\partial x} \quad (18)$$

$$\int_{z_1+a}^{z_2-a} \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1+a}^{z_2-a} E_z(x, z) dz = - \frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad (19)$$

Resolviendo el otro término

$$\int_{z_{1+a}}^{z_{2-a}} \frac{1}{\varepsilon} J_z(z) dz = \int_{z_{1+a}}^{z_{2-a}} \frac{\sigma}{\varepsilon} E_z(x, z) dz = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{z_{1+a}}^{z_{2-a}} E_z(x, z) dz = -\frac{\sigma}{\varepsilon} u(x) \quad (20)$$

Se ha supuesto  $\sigma, \varepsilon$  invariantes a lo largo del eje  $z$ , en el espacio entre ambos conductores que conforman la línea.

Reemplazando (18), (19) y (20) en (17)

$$\frac{le}{\mu\varepsilon} \frac{\partial i(x)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x)}{\partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon} u(x) \quad (21) \quad \frac{\partial i(x)}{\partial x} = -\boxed{\frac{\mu\varepsilon}{le}} \frac{\partial u(x)}{\partial t} - \boxed{\frac{\mu\varepsilon}{le} \frac{\sigma}{\varepsilon}} u(x)$$

$c = \mu\varepsilon/le$ : capacidad por unidad de longitud del medio dieléctrico que ocupa el espacio alrededor de los conductores. Si suponemos el medio homogéneo, permitividad uniforme y constante y la geometría invariante:

- la capacidad es constante.

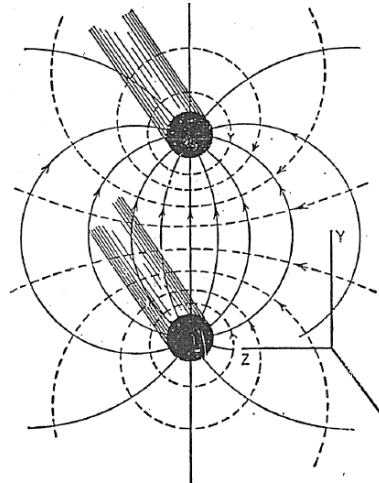
$g = \sigma/\varepsilon$ : conductancia por unidad de longitud del medio dieléctrico que ocupa el espacio alrededor de los conductores. Si suponemos el medio homogéneo, conductividad uniforme y constante y la geometría invariante:

- la conductancia es constante.

$$le = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{D}{a}\right)$$

$$\frac{le}{\mu\epsilon} = \frac{\mu}{\mu\epsilon\pi} \ln\left(\frac{D}{a}\right) = \frac{1}{\pi\epsilon} \ln\left(\frac{D}{a}\right)$$

$$c = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)} \quad [\text{F/m}]$$



## Analogía

$$\frac{c\sigma}{\epsilon} = \frac{\pi\epsilon\sigma}{\epsilon \ln\left(\frac{D}{a}\right)} = g$$

$$\frac{\partial i(x)}{\partial x} + c \frac{\partial u(x)}{\partial t} + g u(x) = 0$$

(22)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial t} i(x) + r i(x) = 0$$

Ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de tensiones y corrientes a lo largo de la línea.

Derivando (14) y (22) y reemplazando se obtienen las ecuaciones diferenciales en una sola variable

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= -l \frac{\partial}{\partial t} i(x) - r i(x) \\ \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x \partial t} &= -r \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - l \frac{\partial i^2(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial i^2(x,t)}{\partial x^2} = g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial i^2(x,t)}{\partial x^2} = gl \frac{\partial i(x)}{\partial t} + gr i(x) + cr \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + lc \frac{\partial i^2(x,t)}{\partial t^2}$$

### Ecuaciones del Telegrafista

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} - (lg + cr) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - r.g.u(x,t) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 i(x)}{\partial t^2} - (lg + cr) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - r.g.i(x,t) = 0 \quad (25)$$

Estas ecuaciones expresan la relación de la tensión y corriente en función de

- la posición en dicha línea (x)
- del tiempo (t),
- y los parámetros característicos de la línea (r,l,g,c) fijados por la geometría y los materiales. Estos parámetros se considerarán invariantes respecto de x y del tiempo.

A estas ecuaciones se arribó a través de conceptos de Campos, partiendo de las ecuaciones de Maxwell.

Otra forma alternativa es considerar la Teoría de Circuitos, y adoptar un circuitos eléctricos que representa un incremento  $dx$  de línea, proponiendo los parámetros del circuito por unidad de longitud  $r, l, c, g$ .

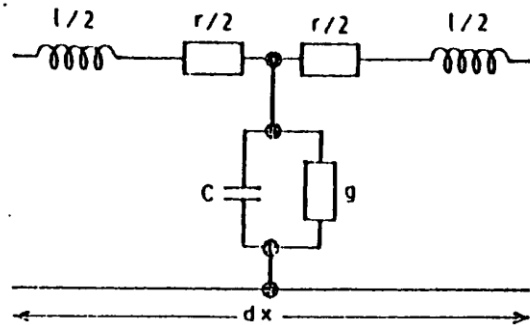


Figura 2 - Circuito equivalente T de un trozo  $dx$  de línea

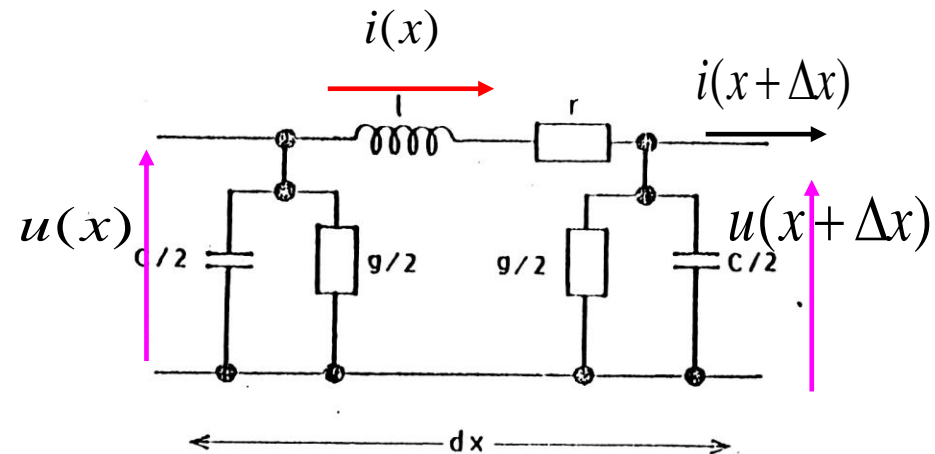
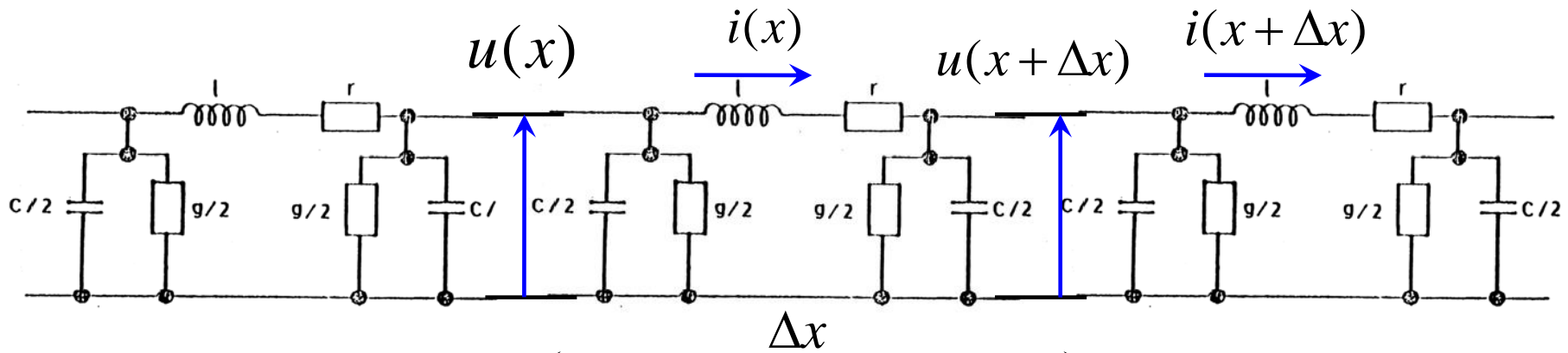


Figura 3 - Circuito equivalente II de un trozo  $dx$  de línea.

# Líneas de transmisión



$$u(x) - u(x + \Delta x) = \Delta x l \cdot \frac{\partial i(x)}{\partial t} + \Delta x r \cdot i(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x + \Delta x)}{\Delta x} = l \cdot \frac{\partial i(x)}{\partial t} + r \cdot i(x)$$

$$-\frac{\partial u(x)}{\partial x} = l \cdot \frac{\partial i(x)}{\partial t} + r \cdot i(x)$$

$$i(x) = i(x + \Delta x) + c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x)}{\partial t} + g \cdot \Delta x \cdot u(x + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-i(x + \Delta x) + i(x)}{\Delta x} = +c \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x)}{\partial t} + g \cdot u(x + \Delta x)$$

$$-\frac{\partial i(x)}{\partial x} = c \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial t} + g \cdot u(x)$$

Líneas sin Pérdida.

$$r=0, g=0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} = 0} \quad (25)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2 i(x)}{\partial t^2} = 0} \quad (26)$$



Estas ecuaciones representan una onda que se propaga sin atenuación, y sin deformarse, la solución es del tipo:

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt) \quad (28)$$

$$i(x,t)=i_1(x,t)+i_2(x,t)=g_1(x-vt)+g_2(x+vt) \quad (29)$$

*V: velocidad de propagación de la onda en la línea*

$$v=\sqrt{\frac{1}{l \cdot c}}$$

Las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  dependen de las condiciones de contorno de la línea impuestas por el generador que la excita y por la carga.

La tensión y la corriente se relacionan mediante la ecuación (22)

$$\frac{\partial i(x)}{\partial x} + c \frac{\partial u(x)}{\partial t} + g.u(x) = 0$$

Para el caso de una línea sin pérdida

$$-\frac{\partial i(x)}{\partial x} = c \frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad (30)$$

Esto hace suponer que la solución para  $i(x,t)$ :

$$i(x,t) = K_1 f_1(x-vt) + K_2 f_2(x+vt) \quad (31)$$

## Zo Impedancia característica de la línea

$$k_1 = c.v = \left( \sqrt{\frac{1}{l/c}} \right) = \frac{1}{Z_o}$$

Onda Incidente

$$k_2 = -c.v = -\left( \sqrt{\frac{1}{l/c}} \right) = -\frac{1}{Z_o}$$

Onda Reflejada

$$\frac{1}{k_1} = \frac{u(x-vt)}{i(x-vt)} = \sqrt{\frac{l}{c}} = Z_o$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{u(x+vt)}{i(x+vt)} = -Z_o$$

Impedancia Característica de la línea:

$$Z_o = \left( \sqrt{\frac{l}{c}} \right)$$

- La relación de tensión a corriente de la onda incidente y cambiada de signo de la onda reflejada
- Depende del medio y de la geometría

# ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

Líneas excitadas con funciones periódicas sinusoidales.

$$u(x, t) = U(x) \text{sen}(wt + \varphi)$$

Notación fasorial

$$-\frac{\partial i(x)}{\partial x} = c \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial t} + g \cdot u(x)$$

$$U(x, t) = \dot{\vec{U}}(x) e^{j\omega t} \quad (32)$$

$$-\frac{\partial u(x)}{\partial x} = l \cdot \frac{\partial i(x)}{\partial t} + r \cdot i(x)$$

$$I(x, t) = \dot{\vec{I}}(x) e^{j\omega t} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial t} = j\omega \dot{U}(x) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial t} = j\omega \dot{I}(x)$$

$$\frac{\partial \dot{I}(x)}{\partial x} + (j\omega c + g) \cdot \dot{U}(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \dot{I}(x)}{\partial^2 x} - (j\omega c + g) \cdot (j\omega l + r) \dot{I}(x) = 0$$

$$\frac{\partial \dot{U}(x)}{\partial x} + (j\omega l + r) \cdot \dot{I}(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \dot{U}(x)}{\partial^2 x} - (j\omega c + g) \cdot (j\omega l + r) \dot{U}(x) = 0$$

## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

---

Derivando (32) y (33) y reemplazando en (22) y (14)

$$\boxed{\frac{d^2 I(x)}{d^2 x} - (r + j\omega l)(g + j\omega c)I(x) = 0} \quad (34)$$

$$\boxed{\frac{d^2 U(x)}{d^2 x} - (r + j\omega l)(g + j\omega c)U(x) = 0} \quad (35)$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= (r + j\omega l) \\ y &= (g + j\omega c) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\gamma^2 = (r + j\omega l)(g + j\omega c) = z.y}$$

# ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

---

La solución es :

$$U(x) = U_1 e^{-\gamma x} + U_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_2}{Z_0} e^{\gamma x}$$

$\gamma$ : Constante de propagación

$$\gamma^2 = (r + j\omega l)(g + j\omega c) = z \cdot y$$

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \alpha + j\beta$$

$\alpha$ : constante de atenuación

$\beta$ : constante de fase

$Z_0$ : impedancia característica

$$Z_0 = \sqrt{z / y} = \sqrt{(r + j\omega l) / (g + j\omega c)}$$

## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

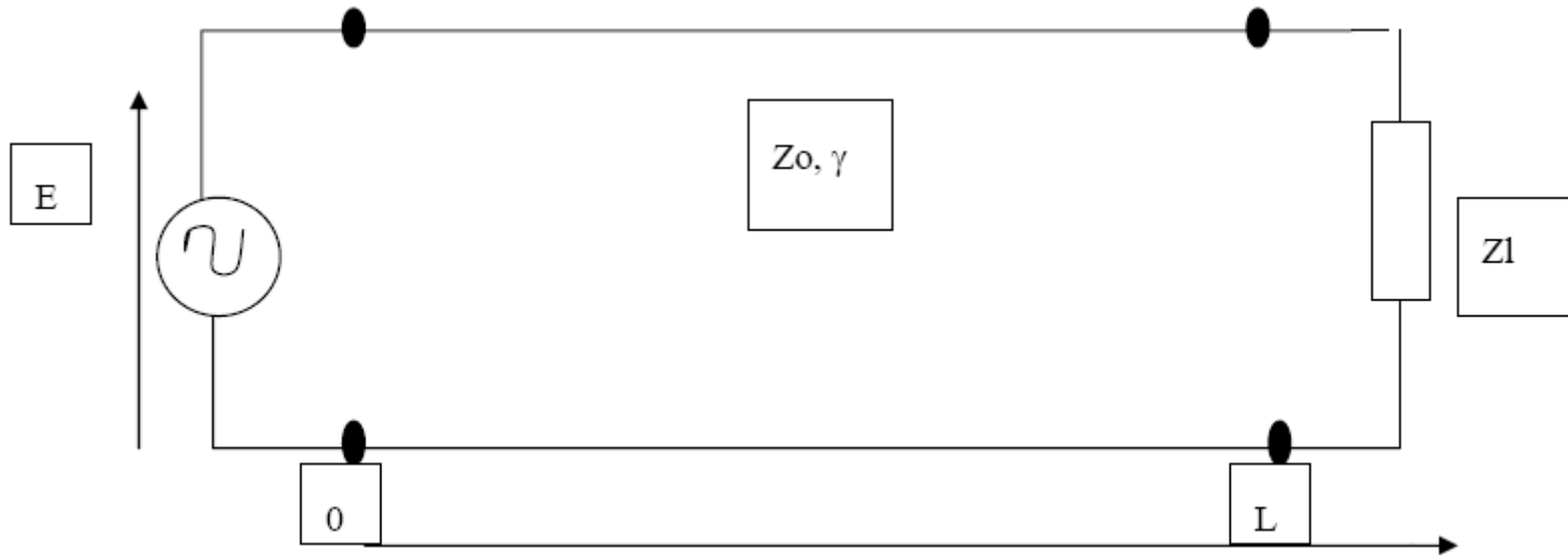
---

$$U(x,t) = U_1 e^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)} + U_2 e^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)} \quad (36)$$

$$I(x,t) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)} - \frac{U_2}{Z_0} e^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)} \quad (37)$$

# Líneas de transmisión con funciones armónicas

## Onda Estacionaria



Determinación de las constantes en función de las condiciones de borde.

$$U(x) = U_1 e^{-\gamma x} + U_2 e^{\gamma x} \quad (38)$$

$$I(x) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_2}{Z_0} e^{\gamma x} \quad (39)$$

Soluciones generales de las ecuaciones del telegrafista, para líneas con pérdidas, para funciones armónicas. obviando variaciones temporales  $e^{j\omega t + \gamma x}$

Se ha obviado la variable  $t$



## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

$$U(0) = U_1 + U_2 = E \quad (40)$$

esto es  $U$  del generador

$$U(L) = U_1 e^{-\gamma L} + U_2 e^{\gamma L} = Zl.I(L) = \frac{Zl}{Z_0} (U_1 e^{-\gamma L} - U_2 e^{\gamma L}) \quad (41)$$

Si se resuelve el sistema de dos ecuaciones se obtiene  $U_1$  y  $U_2$

$$U_1 = E \left[ \frac{(Z_0 + Zl)e^{\gamma L}}{(Z_0 + Zl)e^{\gamma L} - (Z_0 - Zl)e^{-\gamma L}} \right] \quad (42)$$

$$U_2 = -E \left[ \frac{(Z_0 - Zl)e^{\gamma L}}{(Z_0 + Zl)e^{\gamma L} - (Z_0 - Zl)e^{-\gamma L}} \right] \quad (43)$$

## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

---

Reemplazando los valores de  $U_1$  y  $U_2$  en las ecuaciones (38) y (39) se obtiene:

$$U(x) = E \left[ \frac{(Z_0 + Z_L)e^{\gamma(L-x)} - (Z_0 - Z_L)e^{-\gamma(L-x)}}{(Z_0 + Z_L)e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_L)e^{-\gamma L}} \right] \quad (44)$$

Reagrupando y considerando  $d=L-x$ , usando funciones hiperbólicas se obtiene:

$$U(x) = E \left[ \frac{Z_0 \sinh(\gamma d) + Z_L \cosh(\gamma d)}{Z_0 \sinh(\gamma L) + Z_L \cosh(\gamma L)} \right] \quad (45)$$

$$I(x) = \frac{E}{Z_0} \left[ \frac{Z_0 \cosh(\gamma d) + Z_L \sinh(\gamma d)}{Z_0 \sinh(\gamma L) + Z_L \cosh(\gamma L)} \right] \quad (46)$$

Estas ecuaciones dan los valores de amplitud de  $U$  e  $I$  en cualquier punto de la línea. Estas expresiones están escritas en forma fasorial ( $E$  es un fasor).

## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

---

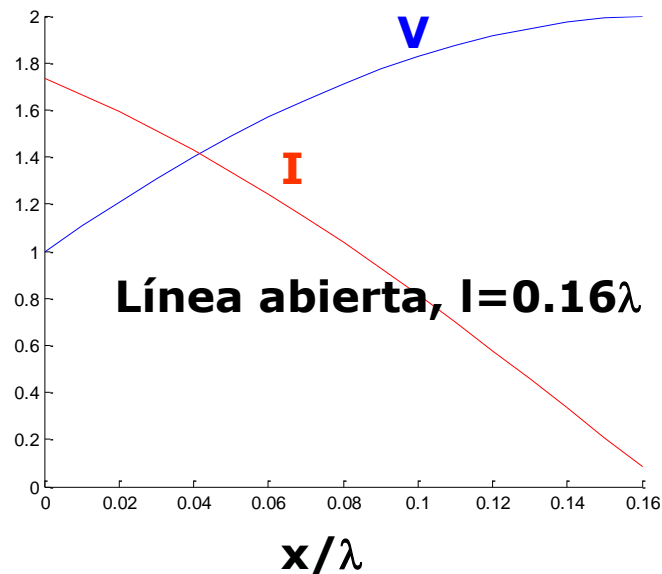
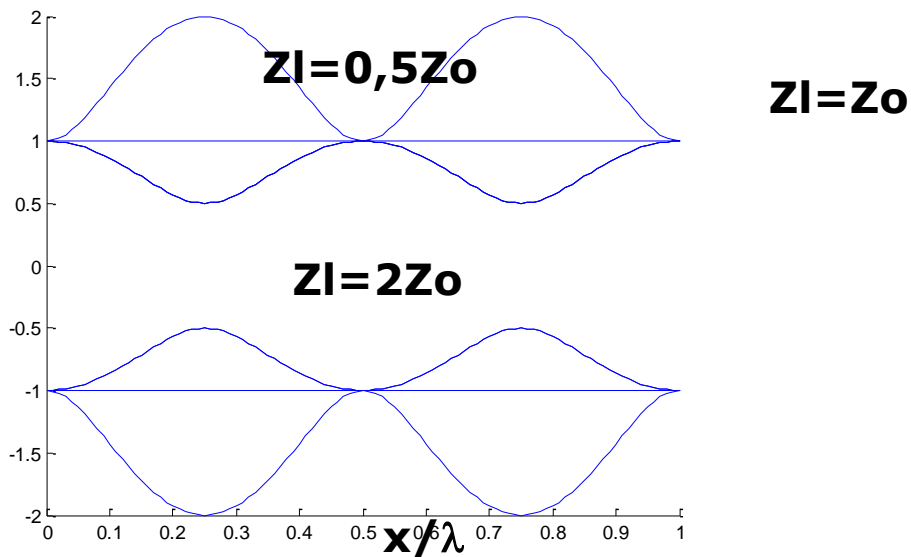
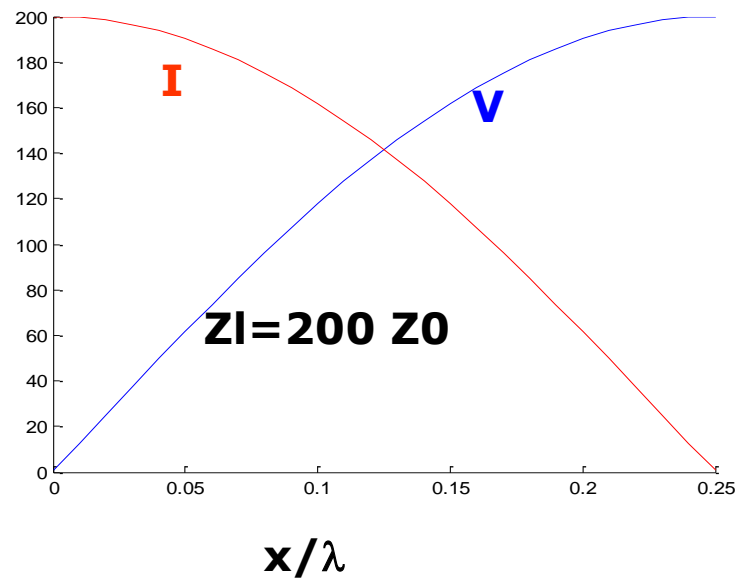
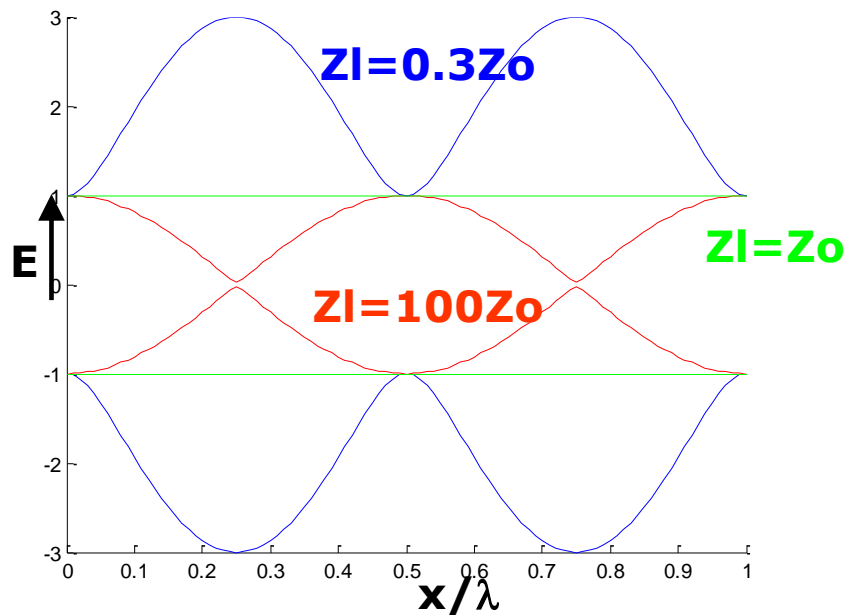
$$U_1 = E \left[ \frac{(Z_o + Z_l)e^{\gamma L}}{(Z_o + Z_l)e^{\gamma L} - (Z_o - Z_l)e^{-\gamma L}} \right] \quad (42)$$

$$U_2 = -E \left[ \frac{(Z_o - Z_l)e^{\gamma L}}{(Z_o + Z_l)e^{\gamma L} - (Z_o - Z_l)e^{-\gamma L}} \right] \quad (43)$$

- La onda estacionaria resulta de la composición de la onda incidente más la reflejada, y es el resultado de considerar a la línea de longitud finita.
- Existe una condición de la carga que anula la onda reflejada:  $Z_l = Z_o$ , se anula  $U_2$  (ecuación 43).
- En estas condiciones se dice que la Línea está adaptada.

$$U(x) = Ee^{-\gamma x} \qquad I(x) = \frac{E}{Z_o} e^{-\gamma x}$$

# Perfiles de Tensiones y Corrientes estacionarias a lo largo de la línea



# ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

## **Impedancia de entrada de líneas**

De las ecuaciones (45) y (46) se calcula la relación entre  $U(0)/I(0)$

$$U(x) = E \left[ \frac{Z_o \sinh(\gamma d) + Z_l \cosh(\gamma d)}{Z_o \sinh(\gamma L) + Z_l \cosh(\gamma L)} \right] \quad (45)$$

$$I(x) = \frac{E}{Z_o} \left[ \frac{Z_o \cosh(\gamma d) + Z_l \sinh(\gamma d)}{Z_o \sinh(\gamma L) + Z_l \cosh(\gamma L)} \right] \quad (46)$$

$$\boxed{\frac{U(0)}{I(0)} = Z_e = Z_o \left[ \frac{Z_o \sinh(\gamma L) + Z_l \cosh(\gamma L)}{Z_o \cosh(\gamma L) + Z_l \sinh(\gamma L)} \right]} \quad (47)$$

## ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

---

$$\boxed{\frac{U(0)}{I(0)} = Z_e = Z_o \left[ \frac{Z_o \sinh(\gamma L) + Z_l \cosh(\gamma L)}{Z_o \cosh(\gamma L) + Z_l \sinh(\gamma L)} \right]} \quad (47)$$

La impedancia de entrada a la línea depende de:

- Longitud de la línea, y de la frecuencia ( $\omega$ )
- De su impedancia característica  $Z_o$
- De la impedancia de carga  $Z_l$

➤ Línea de longitud Infinita

$$Z_e = Z_o$$

➤ Línea en cortocircuito,  $Z_l = 0$

$$Z_{e_{cc}} = Z_o \left[ \frac{Z_o \sinh(\gamma L)}{Z_o \cosh(\gamma L)} \right] = Z_o \tanh(\gamma L) \quad (48)$$

# Líneas de transmisión con funciones armónicas

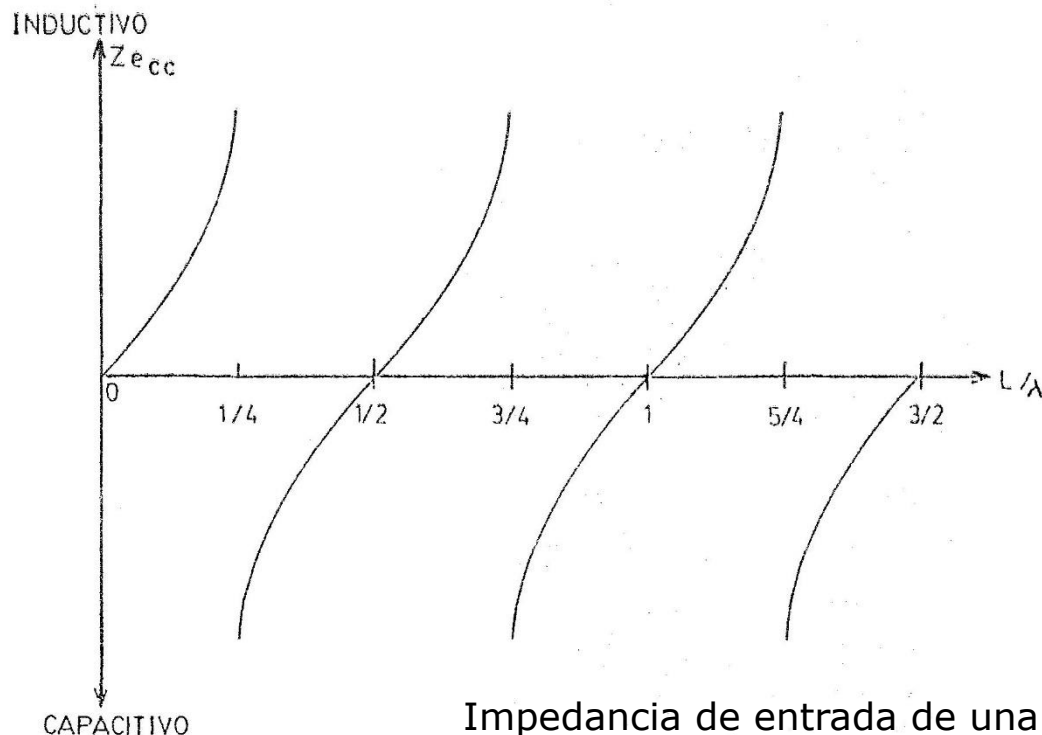
Si despreciamos las pérdidas:  $\gamma = j\omega\sqrt{lc} = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi f}{v} = j\frac{2\pi}{\lambda}$  (49)

$$Z_{ecc} = Z_0 \tanh(j\gamma L) = jZ_0 \tanh\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)$$

$Z_{ecc}$  es reactiva pura,

$$Z_{ecc}=0, \quad L=2n/(\lambda/4)$$

$$Z_{ecc}=\infty, \quad L=(2n+1)/(\lambda/4) \quad n=0,1,2,3.$$



$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$50 \text{ Hz} \rightarrow \lambda/4 = 1500 \text{ km}$$

$$500 \text{ MHz} \rightarrow \lambda/4 = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{L \cdot f}{v}$$

Impedancia de entrada de una línea de pérdidas despreciables, en cortocircuito ( $Z_{ecc}$ ).

# Líneas de transmisión con funciones armónicas

➤ Línea en circuito abierto  $Z_l = \infty$

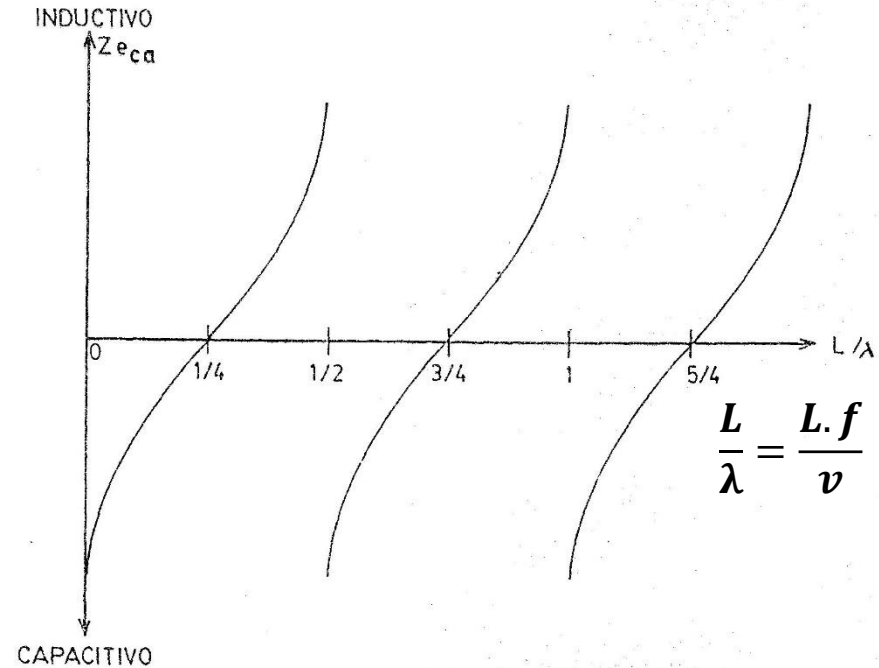
$$Z_{e_{ca}} = Z_0 \left[ \frac{\cosh(\gamma L)}{\sinh(\gamma L)} \right] = Z_0 \coth(\gamma L)$$

$$Z_{e_{ca}} = Z_0 \coth(\gamma L) = j Z_0 \coth\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)$$

$Z_{e_{ca}}$  es reactiva pura,

$$Z_{e_{ca}} = \infty, L = 2n/(\lambda/4)$$

$$Z_{e_{ca}} = 0, L = (2n+1)/(\lambda/4) \quad n=0,1,2,3.$$



Impedancia de entrada de una línea con pérdidas despreciables, en circuito abierto ( $Z_{ca}$ ).



# ***Líneas de transmisión con funciones armónicas***

De las expresiones de  $Z_{eca}$  y  $Z_{ecc}$  se obtiene:

$$\diamond \quad Z_0 = \sqrt{Z_{e_{ca}} Z_{e_{cc}}}$$

$$\frac{Z_{e_{ca}}}{Z_{e_{cc}}} = \frac{Z_0 \operatorname{thg}(\gamma L)}{Z_0 \operatorname{cothg}(\gamma L)} = \operatorname{thg}^2(\gamma L)$$

$$\diamond \quad \gamma = \frac{1}{L} \operatorname{arcthg} \sqrt{\frac{Z_{e_{ca}}}{Z_{e_{cc}}}}$$

➤ Línea de  $\lambda/4$ , despreciando las pérdidas

$$Z_e = Z_0 \left[ \frac{Z_0 \sinh(j\pi/2) + Z_l \cosh(j\pi/2)}{Z_0 \cosh(j\pi/2) + Z_l \sinh(j\pi/2)} \right]$$

$$Z_e = Z_0 \left[ \frac{Z_0 j + Z_l 0}{Z_0 0 + Z_l j} \right] = \frac{Z_0^2}{Z_l}$$

Transformador de impedancia

La impedancia de entrada es igual a la inversa de la impedancia de carga. Si la impedancia de carga tiene un comportamiento inductivo, la impedancia de entrada se comportará capacitivamente o viceversa.

# Líneas de transmisión con funciones armónicas

## Reflexión en Líneas

Determinación de las constantes en función de las condiciones de borde.

$$U_1 = E \left[ \frac{(Z_0 + Z_l)e^{\gamma L}}{(Z_0 + Z_l)e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_l)e^{-\gamma L}} \right] \quad (42)$$

$$U_2 = -E \left[ \frac{(Z_0 - Z_l)e^{-\gamma L}}{(Z_0 + Z_l)e^{\gamma L} - (Z_0 - Z_l)e^{-\gamma L}} \right]$$

$$U_i = U_1 e^{-\gamma l}$$

$$U_r = U_2 e^{\gamma l}$$

$$\frac{U_r}{U_i} = \frac{Z_l - Z_0}{Z_0 + Z_l} = \sigma_{RV} \quad \text{Coeficiente Reflexión de la tensión}$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_0 - Z_l}{Z_0 + Z_l} = \sigma_{RI} \quad \text{Coeficiente Reflexión de la Corriente}$$

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{U_r \cdot I_r}{U_i \cdot I_i} = \sigma_{RV} \cdot \sigma_{RI} \quad \text{Coeficiente Reflexión de la Potencia}$$

$$\sigma_{RP} = - \left( \frac{Z_l - Z_0}{Z_0 + Z_l} \right)^2$$

$$U(x) = U_1 e^{-\gamma x} + U_2 e^{\gamma x} \quad (38)$$

$$I(x) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_2}{Z_0} e^{\gamma x} \quad (39)$$

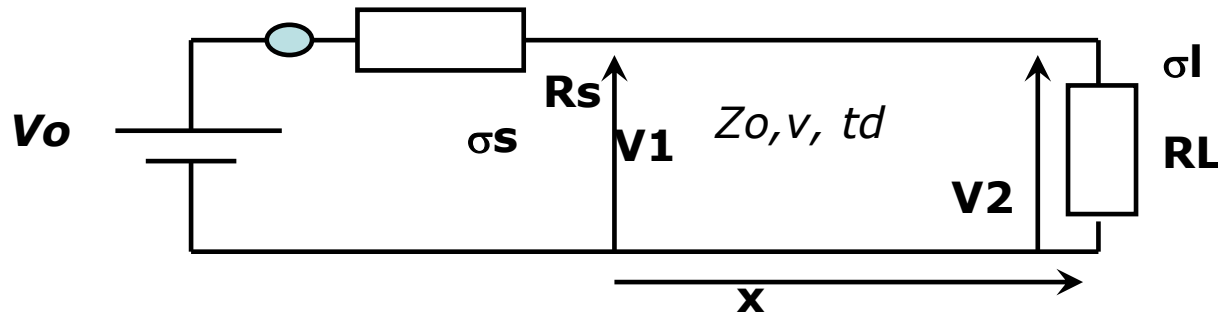
Se ha obviado la variable  $t$

$$I_i = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\gamma l}$$

$$I_r = - \frac{U_2}{Z_0} e^{\gamma l}$$

♦ Los coeficientes de reflexión son independientes de la frecuencia si  $Z_0$  y  $Z_l$  son resistencias.

# Respuesta al escalón de una línea sin pérdidas



## Coeficientes de Reflexión

$$\left. \begin{aligned} \frac{V^+}{I^+} &= Z_0 & \frac{V^-}{I^-} &= -Z_0 \\ V^+ + V^- &= V \\ \frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} &= I \\ Z_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} &= \frac{V}{I} = R_l \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V^+ + V^- &= \frac{R_l}{Z_0} (V^+ - V^-) \\ V^- \left( \frac{R_l}{Z_0} + 1 \right) &= V^+ \left( \frac{R_l}{Z_0} - 1 \right) \\ V^- \left( \frac{R_l + Z_0}{Z_0} \right) &= V^+ \left( \frac{R_l - Z_0}{Z_0} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{V^-}{V^+} = \left( \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} \right) = \sigma_l}$$

$$\sigma_l = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0}$$

$$\sigma_s = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0}$$

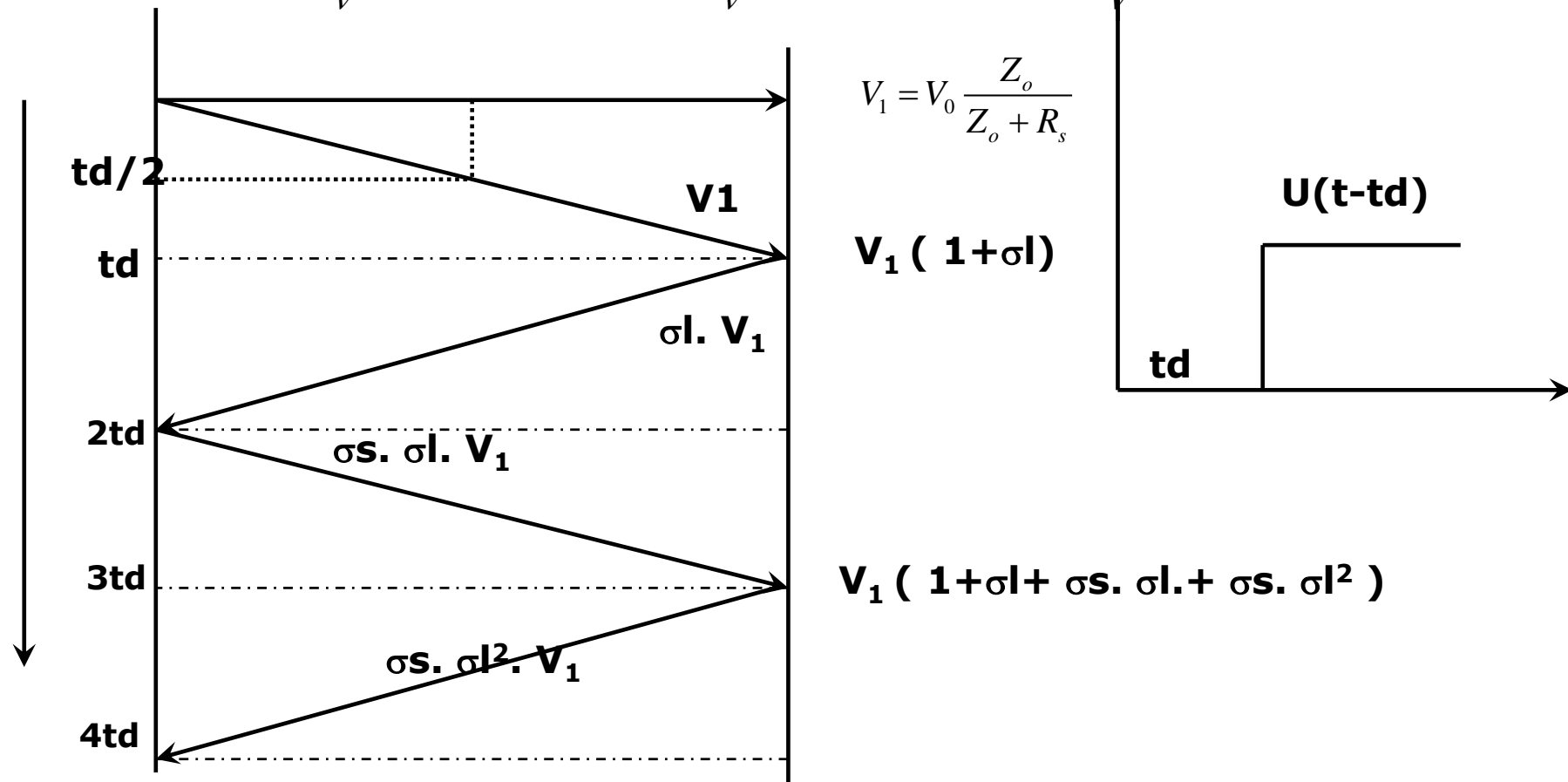
$$v_s(t) = V_0 \cdot U(t) \quad U(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

**Lado fuente**

$$V1^+ = V_0 \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} U\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

# Respuesta al escalón de una línea sin pérdidas

$$V(x,t) = V_0 \frac{Z_o}{Z_o + R_s} \left[ U\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sigma l U\left(t - 2td + \frac{x}{v}\right) + \sigma l \cdot \sigma s U\left(t - 2td - \frac{x}{v}\right) + \sigma l^2 \cdot \sigma s U\left(t - 4td + \frac{x}{v}\right) + \sigma l^2 \cdot \sigma s^2 U\left(t - 4td - \frac{x}{v}\right) + \sigma l^3 \cdot \sigma s^2 U\left(t - 6td + \frac{x}{v}\right) + \sigma l^3 \cdot \sigma s^3 U\left(t - 6td - \frac{x}{v}\right) + \dots \right]$$

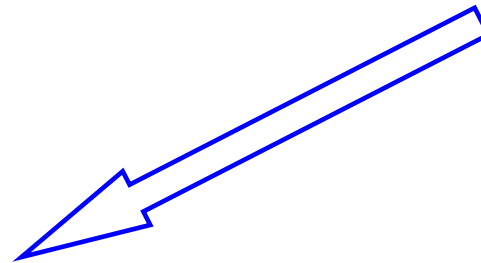
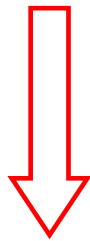


# ***Respuesta al escalón de una línea sin pérdidas***

***Para tiempos muy largos***

$$V(x, \infty) = V_0 \frac{Z_o}{Z_o + R_s} [1 + \sigma l + \sigma l \cdot \sigma s + \sigma l^2 \cdot \sigma s + \sigma l^2 \cdot \sigma s^2 + \sigma l^3 \cdot \sigma s^2 + \sigma l^3 \cdot \sigma s^3 + \sigma l^4 \cdot \sigma s^3 + \sigma l^4 \cdot \sigma s^4 \dots]$$

$$V(x, \infty) = V_0 \frac{Z_o}{Z_o + R_s} [(1 + \sigma l \cdot \sigma s + \sigma l^2 \cdot \sigma s^2 + \sigma l^3 \cdot \sigma s^3 + \sigma l^4 \cdot \sigma s^4 \dots) + \sigma l (1 + \sigma l \cdot \sigma s + \sigma l^2 \cdot \sigma s^2 + \sigma l^3 \cdot \sigma s^3 + \dots)]$$



$$V(x, \infty) = V_0 \frac{Z_o}{Z_o + R_s} \left[ \left( \frac{1}{1 - \sigma l \cdot \sigma s} \right) + \frac{\sigma l}{1 - \sigma l \cdot \sigma s} \right] = V_0 \frac{Z_o}{Z_o + R_s} \frac{1 + \sigma l}{1 - \sigma l \cdot \sigma s} = V_0 \frac{Rl}{Rl + R_s}$$



Tensión en la carga, igual al caso de no tener la línea interpuesta

