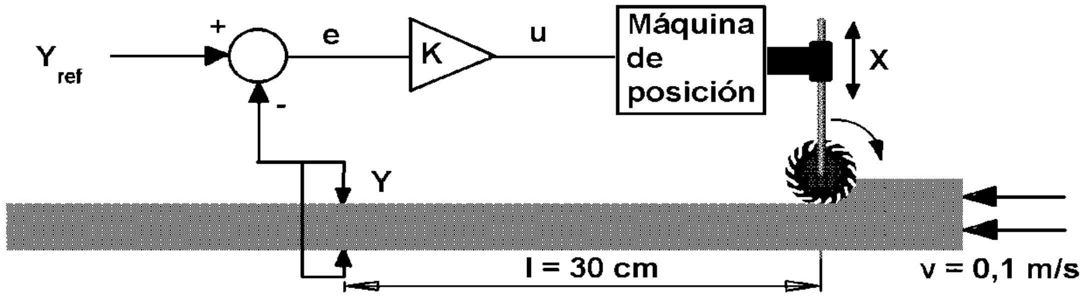
# Ejercicios de Estabilidad

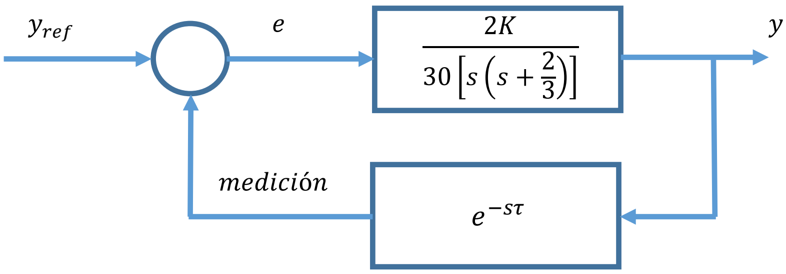
En el sistema de la figura se sabe que la máquina que posiciona la altura del disco de fresado tiene una transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{2/30}{s(s+2/3)}$$




Realizar un diagrama en bloques del sistema realimentando reconociendo la existencia de un retardo entre la salida del sistema (espesor de la pieza) y su medición.

***Para poder armar correctamente el diagrama en bloques es necesario visualizar donde se encuentra la salida real del sistema. Mirando el diagrama anterior es claro que, dado que la salida es el espesor de la placa, la salida se produce en la posición en que esta ubicado el eje del dispositivo de desvaste. Luego, entre esa salida y su medición realimentada existe un retardo temporal de $\tau$ = 30cm/0.1m/s=3seg.***



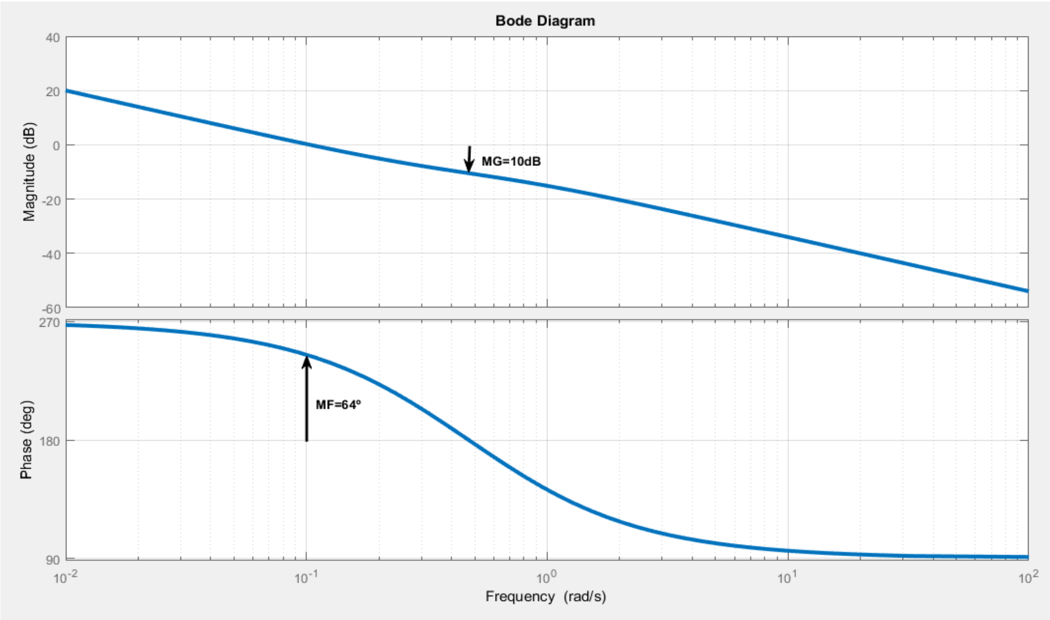

Aproximando la expresión del retardo por los dos primeros términos de su serie de potencias, realizar el diagrama de bode y determinar los márgenes de ganancia y fase.

***Aproximamos inicialmente el retardo por los dos primeros términos del desarrollo en serie de la exponencial:***

$$G(s)H(s) = \frac{2Ke^{-s\tau}}{30s(s+2/3)} \cong \frac{2K(1-s\tau)}{30s(s+2/3)}$$

***Considerando K=1 y un retardo de 3 segundos el diagrama de bode es el siguiente:***

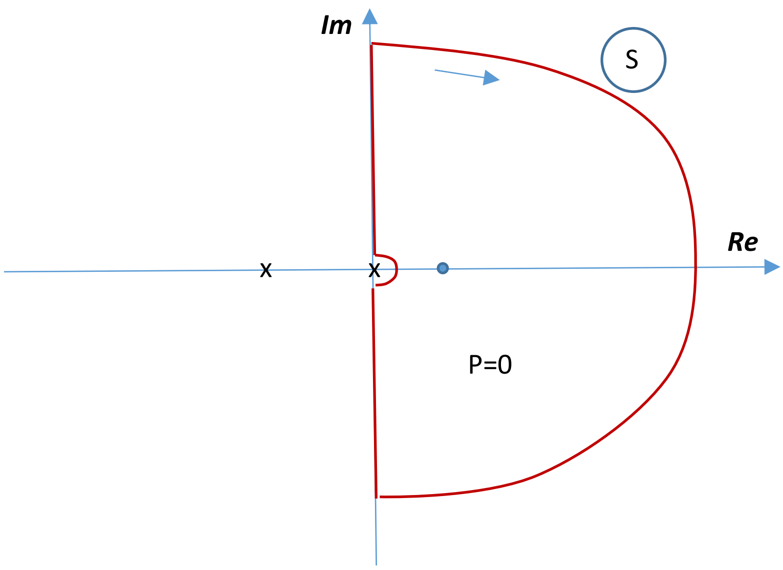
***Como se ve en la figura, los márgenes de fase y de ganancia son 64º y 10dB respectivamente.***



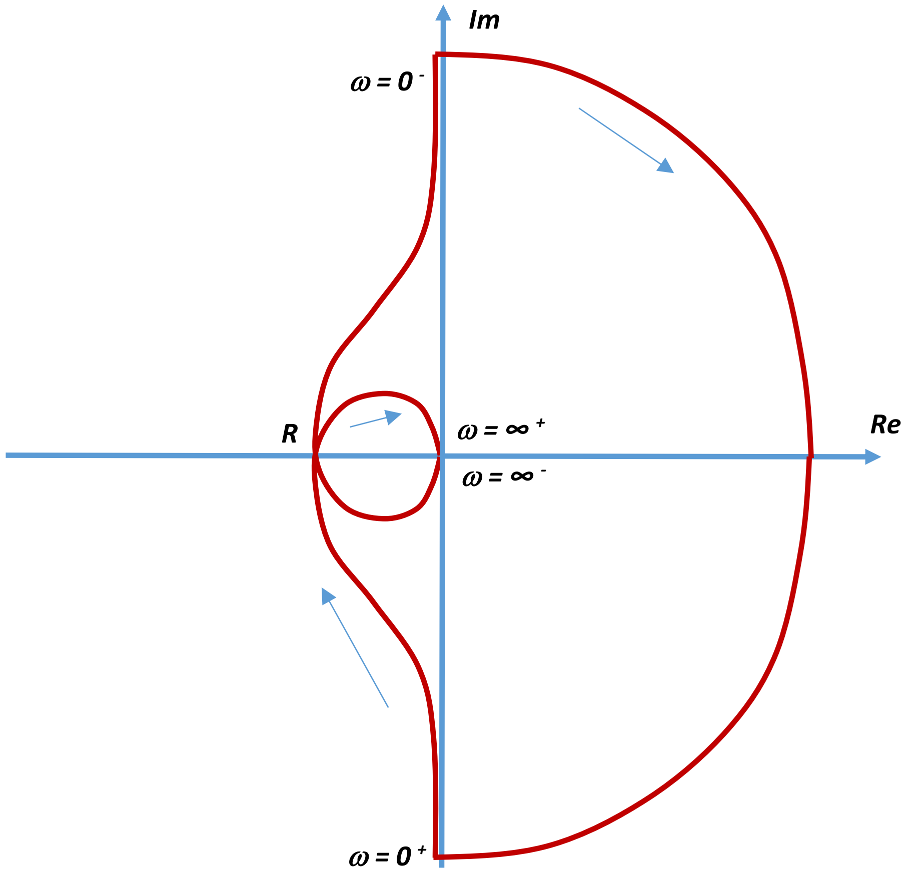

***Por lo tanto, el sistema resulta estable para ese valor de ganancia. Es interesante notar que al aumentar la ganancia estos márgenes se van achicando, hasta llegar a un punto crítico donde ambos comienzan a ser negativos determinando que a partir de ese valor el sistema comienza a ser inestable.***

Analizar la estabilidad del sistema utilizando las siguientes trayectorias de recorrido en el plano de Laplace:

i. Trayectoria con sentido horario abarcando el SP derecho excluyendo el origen.



*Para realizar el diagrama de Nyquist basta con traspasar las curvas de Bode a un diagrama polar. Realizando esto punto por punto y considerando que la tara del eje de ángulos en Bode usada por MATLAB coincide con una excursión de la fase entre -90º y -270º resulta:*




*Antes de estudiar la estabilidad del sistema se debe recordar que lo que finalmente se busca determinar es el valor de Z. Esto es, los ceros de la ecuación característica 1+KGH(s)=0 (polos de lazo cerrado) que se encuentran dentro de la trayectoria de Nyquist.*

*Con el objetivo antedicho, se puede calcular el valor de R y así ver si el sistema es estable o inestable para el valor de ganancia K=1. Sin embargo, más allá de ese resultado particular, es interesante analizar cualitativamente la estabilidad. Para ello es necesario entender que, disminuyendo la ganancia, el diagrama de Nyquist se achica radialmente, mientras que al incrementarla el diagrama se expande con la misma ley (radialmente). Así, para valores chicos de ganancia el punto -1 sobre el eje real negativo, no quedará rodeado por el diagrama de Nyquist relevado y por lo tanto el valor de N será igual a cero. Como la trayectoria de Nyquist usada (trayectoria con sentido horario abarcando el SP derecho excluyendo el origen, C) no abarcó al origen, P es igual a cero y por lo tanto Z=N+P=0. Esto quiere decir que para esos valores de ganancia no va a haber polos de lazo cerrado (o ceros de la ecuación característica) dentro del recorrido de Nyquist denominado C. Como esta curva abarca el SP+, al no haber polos de lazo cerrado allí, el sistema resulta estable.*

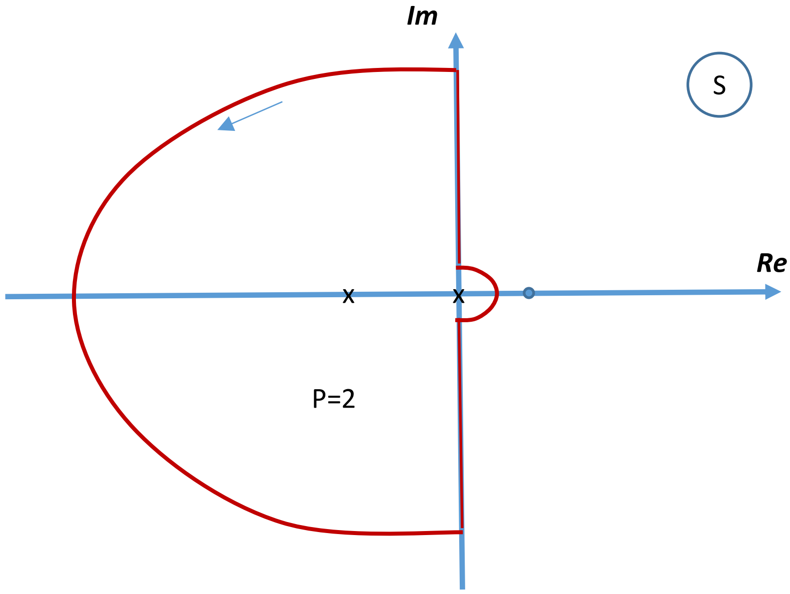
*Para ganancias grandes puede verse que el recorrido de la curva de Nyquist rodea dos veces al punto -1. Luego, como el sentido de rodeo al punto -1 coincide con el sentido*

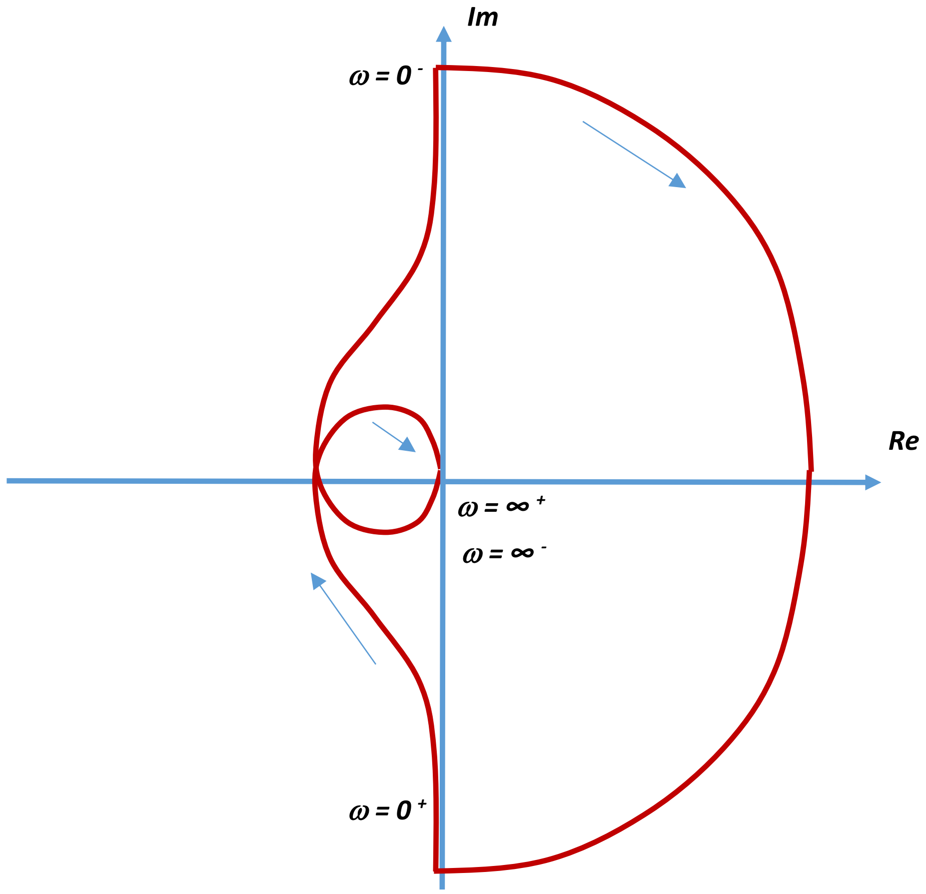
***de giro del recorrido de, C el valor de N será igual a 2. Como P depende del recorrido C, no habrá cambiado respecto al análisis previo y por lo tanto continúa siendo 0. Luego Z=N+P=2, lo cual significa que existen dos polos de lazo cerrado (o ceros de la ecuación característica) dentro del recorrido de Nyquist C, es decir en el semiplano derecho. Por lo tanto, el sistema resulta inestable para ese rango de ganancias elevadas.***

i. Trayectoria en sentido antihorario abarcando el SP derecho y el origen

***Queda para resolución de los alumnos.***

ii. Trayectoria en sentido antihorario abarcando el SP izquierdo y el origen.



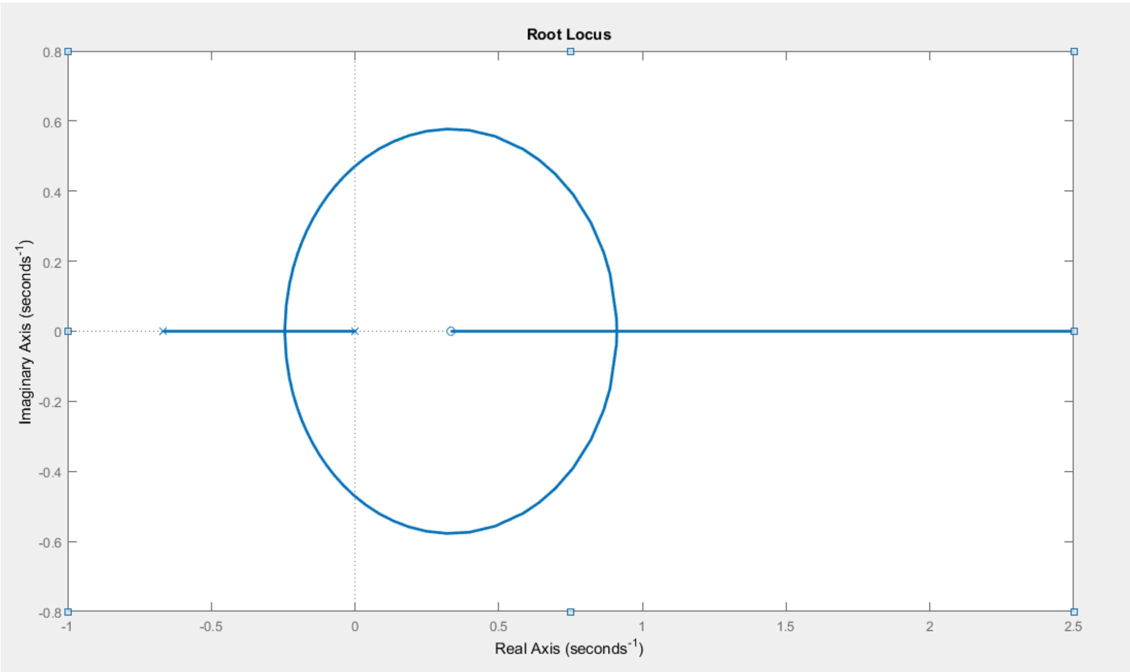



*En este caso el recorrido de Nyquist utilizado abarca el semiplano de estabilidad y se recorre en sentido antihorario. Puede apreciarse en la figura que P=2. Es importante apreciar que la curva de Nyquist no cambia ya que siempre corresponde al transformar el eje jω a través de GH(s). Por otro lado, como el cierre sobre el origen se realiza por el lado derecho al igual que en el primer anterior, la curva será exactamente igual a la graficada anteriormente. Luego, para ganancias chicas N será igual a cero ya que el -1 queda fuera del recorrido. Eso significa que Z=N+P=2. ¿¿¿¿Es entonces inestable el sistema???? No!! Lo que esto significa es que para ganancias chicas el sistema tiene sus dos polos de lazo cerrado dentro del recorrido C, es decir en el semiplano de estabilidad (izquierdo).*

*Para ganancias grandes la curva de Nyquist encierra dos veces al -1, pero dado que estos giros los realiza en sentido contrario al recorrido C, N = -2 . Luego, Z=N+P=0. Esto quiere decir que no existen polos de lazo cerrado en el recorrido de Nyquist C, que encierra al semiplano estable. Si no están allí, tendrán que estar del otro lado, es decir en el semiplano de inestabilidad. Por lo tanto para ganancias grandes el sistema resulta inestable.*

*Como puede verse los resultados cualitativos coinciden para ambos recorridos. No podría ser de otra manera ya que la estabilidad es propia de los sistemas y no de como se los analice. Este es un <u>concepto muy importante</u>!!!!*

*Obviamente si ahora analizo la estabilidad a través del diagrama de lugar de raíces los resultados deberían ser idénticos!! Vemos como queda este diagrama:*



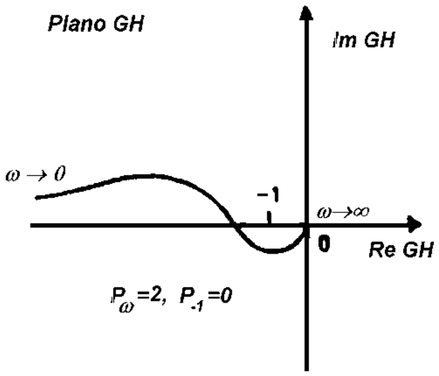

*Como puede verse, el sistema es estable para ganancias chicas e inestable para ganancias grandes.*

*Resumiendo: estudiado por Bode, Nyquist y Lugar de Raíces los resultados de los análisis de estabilidad son coincidentes. No podía ser de otra manera.*

¿Cuáles de los sistemas cuyos diagramas de Nyquist se muestran a continuación son estables a lazo cerrado? (En el caso de ser inestables indique el número de polos que se encontrarían en el semiplano derecho).

*Nomenclatura:* *Pω= Polos en el eje imaginario de G(s)H(s)*

*P-1= Polos en el semiplano derecho de G(s)H(s).*




(b)

***Como puede verse, el sistema tiene dos polos en el eje jω y comienza con -180º de fase. Como el diagrama no tiene discontinuidades esta fase proviene de dos polos en el origen y no de un signo menos. A partir del diagrama se pueden concluir dos cosas. La primera de ellas es que el diagrama decrece en módulo monótonamente, es decir que al recorrer el eje jω siempre quedan mas polos que ceros a frecuencias menores que la del punto en el que me encuentro. La segunda es que al comienzo del recorrido el diagrama incrementa su fase negativa, luego revierte esta tendencia y termina con una fase de -90º. Estas características nos permiten construir la forma cualitativa de la transferencia GH(s).***

***Para ir construyéndola paso a paso, consideremos que como ya dijimos, la transferencia posee dos polos en el origen, es decir:***

$$\boldsymbol{G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}}$$

***Avanzando en el grafico vemos que la fase comienza a ser más negativa, lo cual solo puede suceder (no hay ceros de NMF) si existe otro polo cercano en frecuencia. Es decir:***

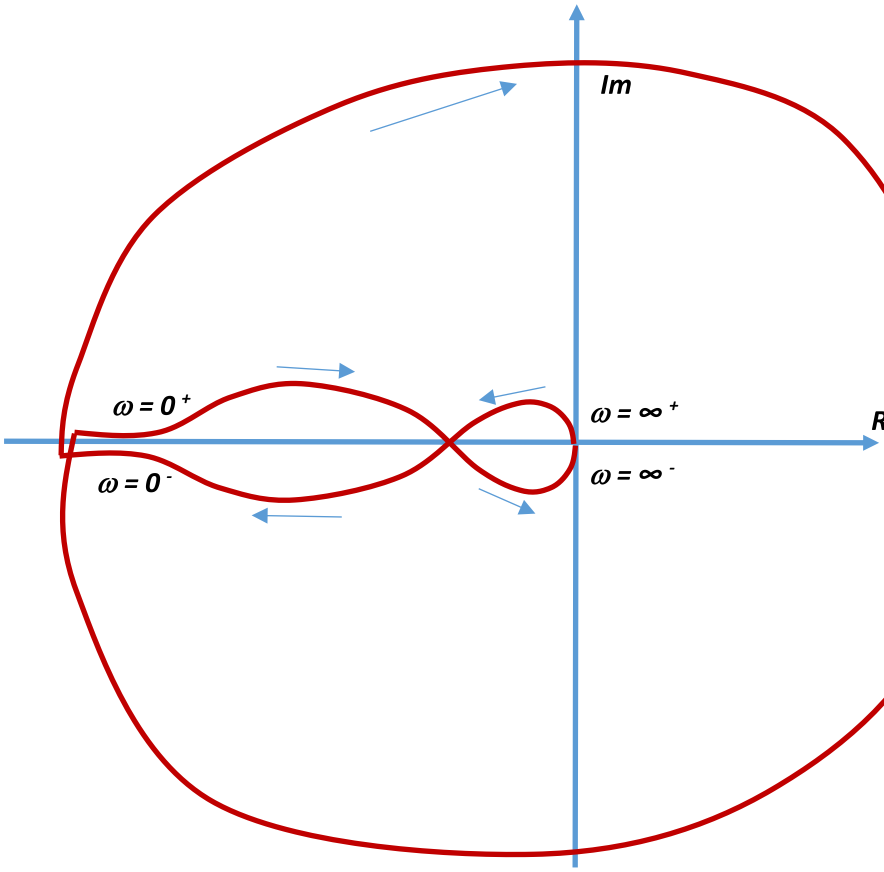
$$\boldsymbol{G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}}$$

***Luego, a pesar de que la curva sigue acercándose al origen (modulo decreciente), la fase comienza a crecer (sentido antihorario) y nunca deja de hacerlo hasta llegar al origen con una fase de -90º. Eso sólo puede suceder si a frecuencias mayores que ω = a, el sistema tuviera dos ceros de mínima fase. Es decir, la función de transferencia final se adapta a la forma:***

$$\boldsymbol{G(s)H(s) = \frac{K(s+b)(s+c)}{s^2(s+a)}}$$

***Con*** $\boldsymbol{a < b \leq c}$ ***.***

*Luego, para el recorrido de Nyquist tradicional (Sp+ sin incluir el cero y en sentido horario) P será igual a cero y tendremos que la curva de Nyquist quedará:*




*Como puede verse para ganancias chicas el -1 queda dentro del lóbulo izquierdo y por lo tanto N=2 ya que los sentidos de recorrido de este gráfico y de la curva C son idénticos. Así Z = N+ P= 2 lo cual significa que el sistema es inestable.*

*Para ganancias mayores el -1 queda dentro del lóbulo derecho y por lo tanto N=0 ya que se le da una vuelta en sentido antihorario y una en sentido horario. Luego Z=N + P = 0 y entonces el sistema pasa a ser estable.*

*Si realizamos el diagrama de lugar de raíces esto se corrobora fácilmente:*