2. ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN EL ESPACIO LIBRE.

Como primer ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de Maxwell, se tratará la propagación de ondas electromagnéticas en el espacio libre en forma general, para después particularizar en un caso simple, pero muy importante, cual es el caso de ondas planas en dicho espacio libre.

El espacio libre es un medio homogéneo, lo que implica que sus características son constantes, es decir que tanto la permitividad, como la permeabilidad y la conductibilidad son constantes. El espacio libre es también un medio eléctricamente y magnéticamente isotrópico, lo que implica que tanto la permeabilidad como la permitividad son escalares y no tensores. Por otra parte, en el espacio libre la conductibilidad es nula y la permitividad y la permeabilidad son iguales a aquellas correspondientes al vacío. Como se puede inferir, la definición de espacio libre coincide con aquella correspondiente a un dieléctrico perfecto.

En la resolución de cualquier problema electromagnético se deben satisfacer las cuatro relaciones fundamentales, cuales son las ecuaciones de Maxwell, según ya ha sido previamente explicado. Es decir que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

Por otra parte existen otras ecuaciones concernientes al medio de que se trate que también deben ser cumplidas. Estas son las siguientes:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{5}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{7}$$

Las dos últimas relaciones corresponden a las ecuaciones constitutivas de un medio dieléctrico y de un medio magnético respectivamente, mientras que la primera es la conocida ley de Ohm puntual. De este modo, y respetando las anteriores ecuaciones, las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre resultan:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{11}$$

Este conjunto de ecuaciones resulta de considerar al medio, espacio libre en este caso, exento de cargas y corrientes de conducción, esto último debido a que la conductividad de tal medio es nula. Como se ve, existe cierta simetría en las expresiones de los rotacionales de los campos **E** y **H**. Es esta simetría la que da origen a la propagación de ondas electromagnéticas. Este mecanismo de interdependencia entre campo eléctrico y magnético se puede visualizar de la siguiente forma: La variación temporal del primero de estos campos produce una variación espacial del segundo de los campos en un punto y su entorno. A su vez una variación temporal del segundo de estos campos produce una variación espacial en un punto y su entorno, del primero de los campos.

De esta forma ambos campos se van generando mutuamente mientras se propagan, transportando energía electromagnética en dicha propagación.

Si se aplica el operador rotor a la ecuación que expresa el rotacional del campo eléctrico **E**, se tiene que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \tag{12}$$

Ya que las derivadas temporales y espaciales pueden ser intercambiadas en su orden, sin alterar el resultado final. Si se usa la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{13}$$

Y se tiene en cuenta además que la divergencia del campo eléctrico es nula, ya que el medio, espacio libre, está exento de carga, se obtiene el siguiente resultado:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)=-\nabla^2\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mathbf{H}\right) \qquad (14)$$

Por otra parte se tiene la expresión del rotor del campo intensidad magnético, que reemplazado en la anterior ecuación arroja el siguiente resultado:

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad (15)$$

O lo que es equivalente:

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (16)$$

Ya que la permitividad es constante y no depende del tiempo. Si se opera en forma similar, pero aplicando el operador rotor a la expresión que da el rotacional del campo intensidad magnética, se arriba a una ecuación similar para dicho campo que aquella obtenida anteriormente para el campo eléctrico **E**.

Es decir que:

$$\nabla^2\mathbf{H}=\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (17)$$

Estas dos últimas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de onda, una para el campo eléctrico y la otra para el campo magnético. Así cualquier solución, tanto para el campo eléctrico como para el magnético, deben satisfacer dichas ecuaciones. Es de notar que si bien ambas expresiones obedecen a la misma ley, los campos eléctrico y magnético que de ellas se derivan no son iguales entre sí.

2.1. ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO GENERAL.

La ecuación de onda se reduce a una forma relativamente sencilla de resolver, pero de gran utilidad práctica, para el caso particular en el cual los campos eléctrico y magnético dependan solamente de una dirección espacial, y que a su vez ambos campos no posean componentes según esa dirección (dirección de propagación de la onda electromagnética). Este comportamiento corresponde, por definición, a la propagación de una onda plana. Las anteriores condiciones, correspondientes a la propagación de una onda plana, si se admite que la dirección de propagación es aquella correspondiente al eje x, pueden ser expresadas matemáticamente de la siguiente manera:

$$E_x=0 \qquad H_x=0 \qquad (18)$$

$$E_y\neq 0 \qquad H_y\neq 0 \qquad (19)$$

$$E_z\neq 0 \qquad H_z\neq 0 \qquad (20)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x}\neq 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}\neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x}\neq 0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y}=0 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z}=0 \quad ; \quad \frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \qquad (23)$$

Por lo tanto las ecuaciones de onda de los campos eléctrico **E** y magnético **H**, para una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección del eje *x*, son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad (24)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}=\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \qquad (25)$$

Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de segundo orden, cuya solución general es, para una de ellas, la siguiente:

$$\mathbf{E}=\mathbf{f}_1\left(x-vt\right)+\mathbf{f}_2\left(x+vt\right) \qquad (26)$$

Donde:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (27)$$

Siendo f1 y f2 dos funciones cualesquiera (no necesariamente idénticas), cuyas variables independientes son (*x*-*vt*) y

(x+vt) respectivamente, siendo x la dirección de propagación de la onda, v la velocidad de propagación, y t el tiempo.

Una onda puede definirse como un fenómeno físico que, ocurriendo en un dado lugar y en un determinado tiempo, se reproduce en otros lugares a otros tiempos, siendo la diferencia de tiempo proporcionales a las diferencias de distancias. Esta definición no implica de por sí que dichas ondas sean fenómenos repetitivos, aunque no prohíbe tal condición. Por otra parte, la variación de la onda queda confinada a una sola dimensión, aquella en la cual se propaga.

Si se toma un dado instante de tiempo, t_1 por ejemplo, entonces la función $\mathbf{f}_1(x\text{-}vt)$ se convierte en una función de x solamente, ya que t_1 es una constante. Esta función, de forma totalmente arbitraria, se muestra en la parte a) de la **Figura 2-1**. En otro instante posterior, por ejemplo t_2 , se obtiene otra función de x , con la misma forma que la anterior pero desplazada sobre el eje x una distancia $v(t_2\text{-}t_1)$, como se observa en la parte b) de la siguiente figura. Esto pone de manifiesto que el fenómeno ha viajado en la dirección del eje x positivo, con una velocidad v. Por otra parte, la función $\mathbf{f}_1(x+vt)$, corresponde a una onda que viaja en el sentido negativo de las x.

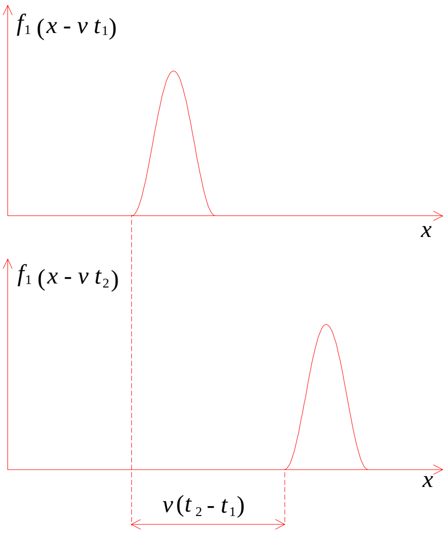

Figura 2-1. Onda propagándose en dirección de las x positivas, mostrada en los instantes t_1 y t_2

Así la solución general de la ecuación de onda, esta compuesta por dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos.

A la primera onda, que viaja alejándose del punto donde se generó, se la denomina onda incidente, mientras que a la otra, que viaja acercándose al punto en donde se generó la onda, se la denomina onda reflejada, siendo su existencia dependiente de que la onda incidente encuentre en su camino, mientras se propaga, una discontinuidad en el medio, como puede ser el caso de una superficie reflectora o de un cambio de medio, casos que serán desarrollados con posterioridad.

Si esta discontinuidad no existe, tampoco existirá la onda reflejada y la solución para la ecuación de onda consistirá en:

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}_1(x - vt) \tag{28}$$

Si ahora se retoma la discusión a partir de la ecuación de onda aplicada a una onda plana que se propaga en dirección del eje x, la cual resulta ser para el campo eléctrico, según ya ha sido descripto:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{29}$$

La cual, desglosada para cada componente espacial resulta:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{32}$$

Por otra parte, si se descompone la expresión de la divergencia del campo eléctrico **E** en cada componente espacial, con la condición de que esta divergencia es nula por no existir densidad de carga, se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{33}$$

En esta última expresión son nulas las dos últimas derivadas espaciales, ya que en una onda plana, como ha sido expresado con anterioridad, sólo hay dependencia con una única variable espacial, es decir con aquélla correspondiente a la dirección en que la onda se propaga. De esta consideración y de la expresión de la divergencia dada anteriormente resulta que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{34}$$

Por tanto no hay variación según *x*, de la componente de campo eléctrico según la direccion de *x*, de lo cual se infiere que también será nula la derivada segunda de esta componente respecto de la dirección *x*. Ambas conclusiones exigen que dicha componente sea nula, constante o creciente uniformemente con el tiempo, dado que la derivada segunda temporal de la misma debe igualarse, a menos de una constante, con la derivada segunda según *x* de la misma componente.

Pero un campo que satisfaga las dos últimas condiciones no sería parte de una onda que se propaga, por lo tanto no existe otra posibilidad que la componente de campo según la dirección de propagación de la onda plana sea nula.

Un razonamiento similar puede hacerse para el campo magnético **H**, con lo cual se arriba a la conclusión de que las ondas electromagnéticas planas son transversales y solo tienen componentes en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación.

Si se expresan ahora los rotores de los campos eléctrico **E** y magnético **H**, habida cuenta de que ambos campos no poseen componentes según el eje *x*, dirección de propagación de la onda plana, y que además son independientes de las variables espaciales *z* e *y*, se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{\mathbf{z}} \tag{35}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\vec{\mathbf{z}} \tag{36}$$

Así las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{\mathbf{z}} = -\mu\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\vec{\mathbf{z}}\right) \tag{37}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\vec{\mathbf{z}} = \varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\vec{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial t}\vec{\mathbf{z}}\right) \tag{38}$$

Igualando los términos que corresponden a las mismas direcciones espaciales se obtiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{39}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{40}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{41}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{42}$$

De las anteriores ecuaciones se observa que existe una relación directa entre las componentes de los campos eléctrico y magnético que se hallan en cuadratura espacial. Para encontrar dicha relación, se puede partir de la base que, por ejemplo, la componente según la dirección *y* del campo eléctrico tiene la siguiente expresión general, la cual constituye una solución de la ecuación de onda como ya ha sido determinado:

$$E_y = f_{1y}\left(x - vt\right) \tag{43}$$

siendo $v = 1\Big/\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$ según ya ha sido expresado.

Por lo tanto resulta ser que:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -v \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} \tag{44}$$

Por otra parte, de las relaciones que vinculan las componentes espaciales, se tiene que:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = v\varepsilon \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} \tag{45}$$

De donde surge que:

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \int \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} dx \tag{46}$$

Pero por otra parte, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial f_{1y}}{\partial x} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = \frac{\partial f_{1y}}{\partial (x - vt)} \tag{47}$$

Por lo tanto:

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \int \frac{\partial f_{1y}}{\partial x} dx = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} f_{1y}(x - vt) + C \tag{48}$$

La constante de integración C indicaría la presencia de un campo que no depende de x, y que por lo tanto no constituiría parte de la onda que se propaga, razón por la cual no se toma en consideración. Expresado en otros términos, dadas las condiciones de contorno del problema, dicha constante de integración C debe ser nula, por lo tanto se tiene la siguiente relación:

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \; E_y \tag{49}$$

De forma similar puede demostrarse que:

$$H_y = -\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \; E_z \tag{50}$$

Por otra parte, las intensidades totales de los campos eléctrico y magnético, y el cociente entre ambas, resultan ser:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \tag{51}$$

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{H_y^2 + H_z^2} \tag{52}$$

$$\left|\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{53}$$

Esta última ecuación establece que, para una onda electromagnética plana existe una relación determinada entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético, válida también para las componentes espaciales de ambos campos que se encuentran en cuadratura espacial. Esta relación esta dada por la raíz cuadrada del cociente entre la permeabilidad y la permitividad del medio, y su unidad es el ohm. Por este motivo, a esta relación suele denominarse *impedancia intrínseca* o *característica* del medio. Para el vacío esta relación es:

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{54}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\, 10^{-9} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{55}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\,\pi = 377 \;\; [\Omega] \tag{56}$$

La posición relativa en el espacio de ambos campos, eléctrico y magnético, puede ser perfectamente determinada si se realiza el producto escalar de ambos campos. Es decir:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_y H_y + E_z H_z = Z_0 \left(H_z H_y + H_y H_z \right) = 0 \tag{57}$$

De lo que se deduce que en una onda plana los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí espacialmente, además de ser perpendiculares a la dirección de propagación.

Si ahora se realiza el producto vectorial entre ambos campos, se obtiene:

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \left(E_y H_z - E_z H_y\right)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} Z_0 \left(H_z^2 + H_y^2\right) = \vec{\mathbf{x}} Z_0 \left|\mathbf{H}\right|^2 = \vec{\mathbf{x}}\frac{\left|\mathbf{E}\right|^2}{Z_0} \tag{58}$$

Por lo que se deduce que el producto vectorial del campo eléctrico por el campo magnético, da como resultado la dirección en que se propaga la onda plana. Más adelante, al tratarse el vector de Poynting, se hallará el sentido físico de este producto vectorial.

2.2. ONDAS PLANAS EN EL ESPACIO LIBRE. CASO ARMONICO.

En la práctica se verifica que gran parte de los campos eléctrico y magnéticos generados, varían en forma senoidal con el tiempo. Además, toda variación periódica con el tiempo puede desglosarse en una sumatoria de variaciones senoidales cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de repetición de la onda.

Es a partir de esta base que se realizan análisis de ondas, cuya variación con el tiempo se adopta que sea senoidal. Así es que un vector se transforma en un fasor, cuando dicho vector varía en forma senoidal con el tiempo, este fasor se indica con un punto sobre la cantidad fasorial. Es común representar la variación temporal con el tiempo en notación exponencial. Así, por ejemplo se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) cos(\omega t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) Re\left\{e^{j\omega t}\right\} \tag{59}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) sin(\omega t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) Im\left\{e^{j\omega t}\right\} \tag{60}$$

donde $\omega = 2\pi f$, es la pulsación angular, siendo f la frecuencia.

En las anteriores expresiones, se ha separado del fasor $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, la parte correspondiente a un vector que varía con $\mathbf{r}$, variable espacial, la cual ha sido denominada $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, de la parte que da la variación temporal de dicho vector.

Si se reescriben ahora las ecuaciones de Maxwell para el caso del espacio libre, habida cuenta de la variación senoidal de los campos eléctrico y magnético, teniendo en cuenta la notación fasorial utilizada a continuación, se tiene que:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \tag{61}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \tag{62}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{libre} \tag{63}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{64}$$

En donde han sido reemplazadas las derivadas temporales de los fasores por su correspondiente valor, cual es el producto de $j\omega$ por dicho fasor.

Para variaciones senoidales con el tiempo, la ecuación de onda de los campos eléctrico y magnético, en el espacio libre resultan ser igual a:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} \tag{65}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} \tag{66}$$

Estas ecuaciones son conocidas con el nombre de ecuaciones vectoriales de Helmholtz. Para el caso de una onda plana que se propaga en la dirección del eje x y que no varía según los ejes z e y, las ecuaciones de onda resultan:

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = -\beta^2\mathbf{E} \tag{67-a}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} = -\beta^2\mathbf{H} \tag{67-b}$$

donde :

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{68}$$

es la denominada *constante de fase* y, como se verá más adelante, es la parte imaginaria de otra constante compleja denominada *constante de propagación*.

Considerando que exista solamente la componente de campo eléctrico según el eje y, lo cual no resta generalidad al análisis ya que el tratamiento para la otra componente si existiera, componente según el eje z, sería completamente análogo según ya ha sido tratado, la solución general de la ecuación de onda tiene la siguiente forma:

$$E_y = C_1 e^{j(\omega t - \beta x)} + C_2 e^{j(\omega t + \beta x)} \tag{69}$$

En las que C_1 y C_2 son constantes complejas arbitrarias, y corresponden a la *máxima amplitud* o *amplitud cresta*, que alcanzan las ondas incidente y reflejada, respectivamente.

Si C_1 o C_2 fueran magnitudes complejas, esto indicaría que las expresiones de cada onda estarían compuestas por una suma de un coseno multiplicado por la parte real de C_1 o C_2 más un seno multiplicado por la parte imaginaria de C_1 o C_2.

Tomando la parte real de la ecuación anterior, sin por ello perder generalidad en el análisis, se obtiene su forma cosenoidal.

Por ejemplo si C_1 y C_2 son reales, la forma cosenoidal de la ecuación anterior resulta:

$$E_y = C_1 cos(\omega t - \beta x) + C_2 cos(\omega t + \beta x) \tag{70}$$

La expresión anterior demuestra que en un medio homogéneo y sin pérdidas, cual es el espacio vacío o un dieléctrico ideal, *la hipótesis de una variación senoidal en el tiempo da lugar a una variación espacial del mismo tipo.*

Esta ecuación representa la suma de dos ondas que viajan ambas a lo largo del eje x, pero en sentidos opuestos. Si C_1 y C_2 son iguales (C_2 es distinto de cero cuando la onda incidente encuentra en su camino de propagación una discontinuidad en el medio en el cual se propagaba), las dos ondas (ondas *progresivas* en sentidos opuestos), se combinan para formar una onda *estacionaria* que no se desplaza, como se verá más adelante cuando se desarrolle el tema de las reflexiones de las ondas electromagnéticas.

Si se reescribe la expresión de la onda de campo eléctrico en función de x-vt, puede hallarse la velocidad v de propagación de la onda, la cual resulta ser:

$$E_y = C_1 cos[\beta(x - vt)] + C_2 cos[\beta(x + vt)] \tag{71}$$

Siendo la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{72}$$

Esta velocidad de propagación de la onda puede ser obtenida si, observando un punto particular de la onda, se realiza el cociente entre el desplazamiento a lo largo del eje x, que sufre dicho punto y el tiempo transcurrido para que dicho desplazamiento tenga lugar.

Para una onda que se desplace en la dirección de las x positivas, un punto particular se identifica por:

$$\omega t - \beta x = Cte. \tag{73}$$

para una onda armónica de pulsación angular ω.

Una diferenciación respecto del tiempo de la anterior expresión, arroja como resultado:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{74}$$

Esta velocidad de un punto de una onda senoidal recibe el nombre de velocidad de fase. A la constante *ß* se la conoce con el nombre de *constante de fase*, y es una medida del desfasaje espacial expresado en radianes por unidad de longitud.

En la **Figura 2-2** se muestra lo que ocurre con una onda progresiva que avanza en el sentido positivo de las x, a medida que el tiempo transcurre.

En esta figura se representa el valor que adquiere la onda para tres tiempos distintos, cuales son: ωt=0, ωt=π/4 y ωt= π/2.

Si un observador se coloca en un punto de la onda, la cresta por ejemplo, viajará en la dirección de las x positivas, con una velocidad v=ω/ß, como se muestra en la **Figura 2-2**.

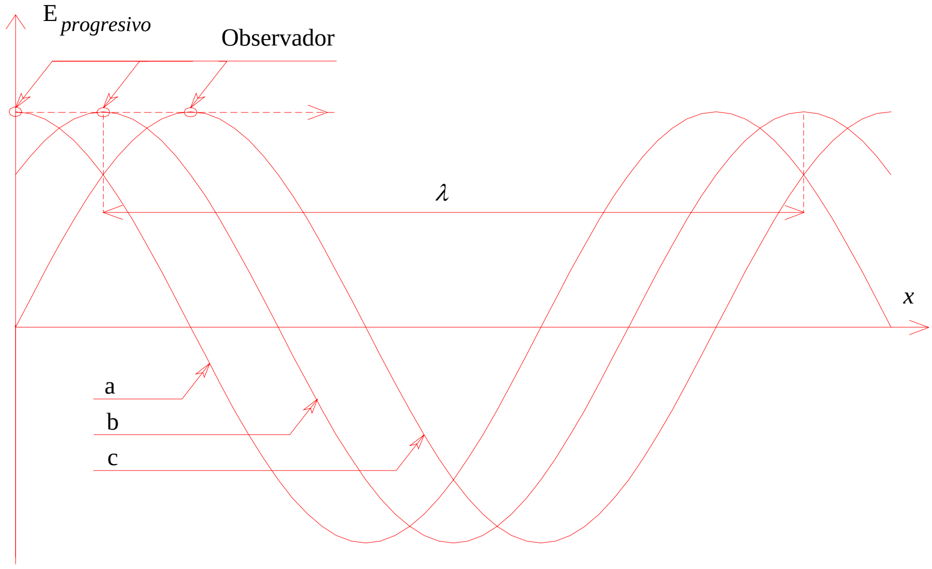

Figura 2-2. Onda progresiva que avanza en el sentido positivo del eje *x*. **(a)** ωt=0, **(b)** $\omega t=\pi/4$, **(c)** $\omega t=\pi/8$

Si ahora, el observador se ubica en un punto fijo sobre el eje *x*, verá que la onda varía senoidalmente con el tiempo, como se grafica en la siguiente **Figura 2-3**:

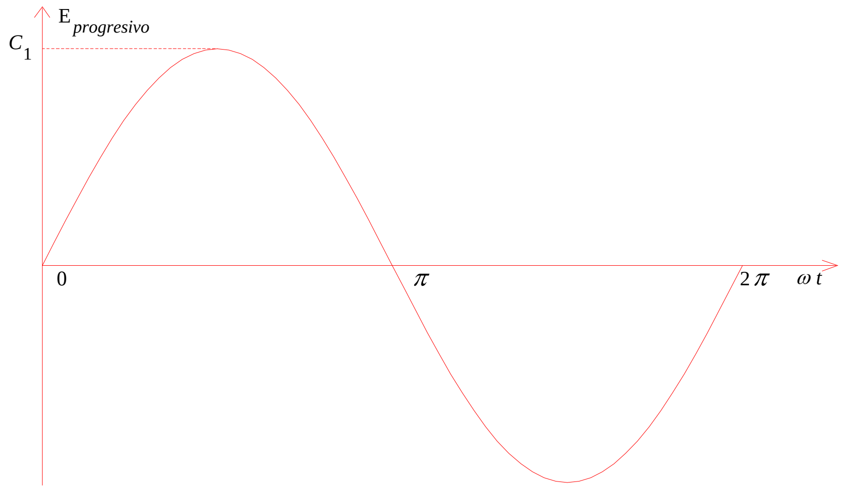

Figura 2-3. Variación senoidal con el tiempo de una onda progresiva, en un punto del espacio

Como conclusión cabe resaltar el hecho de que la suposición de que las ondas varían senoidalmente en el tiempo, implica también que dichas ondas varían senoidalmente en el espacio.

En la **Figura 2-4** se muestra la ubicación espacial de una onda electromagnética que se propaga en dirección del eje *x* positivo, y en la cual puede observarse que la variación espacial es senoidal. En esta figura se observa que los campos eléctrico y magnético están en cuadratura espacial y en fase temporal, siendo estas características correspondientes a una onda plana progresiva.

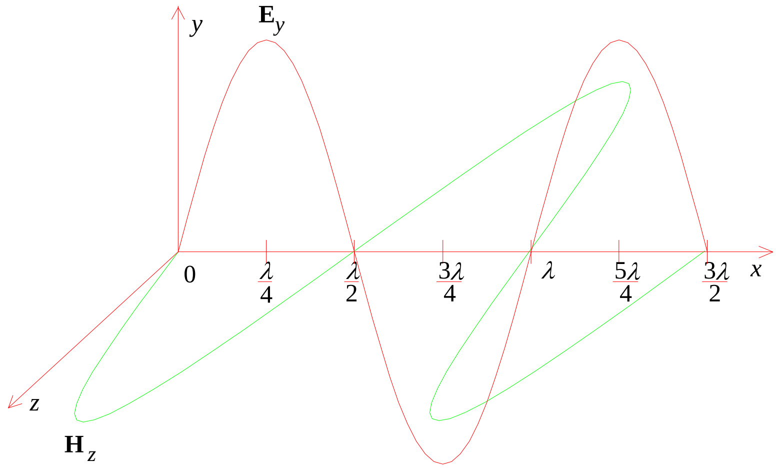

Figura 2-4. Ubicación en cuadratura espacial, y en fase temporal, de las ondas de campos eléctrico y magnético, correspondientes a una onda plana progresiva

2.2.1. Velocidad de fase.

El concepto de velocidad de fase ya ha sido introducido al final del punto anterior. Se puede definir a esta velocidad de fase como la velocidad con que viaja, según la dirección de propagación, un punto de igual fase de una onda.

La expresión de la velocidad de fase para una onda plana progresiva, ya ha sido determinada en el punto anterior. Este valor resulta ser:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{75}$$

Siendo para el espacio libre:

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \qquad [\mathrm{H/m}] \tag{76}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\, 10^{-9} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{77}$$

resulta:

$$v_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cong 300.10^6 \ [\mathrm{m/s}] \tag{78}$$

donde c es la velocidad de la luz.

La velocidad de la fase con relación a la velocidad de la luz, denominada *velocidad de fase relativa*, resulta ser:

$$v_r = \frac{v}{c} \tag{79}$$

que es una magnitud adimensional.

Para otros medios (sin pérdidas), la *velocidad de fase relativa* es:

$$v_r = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\ \varepsilon_r}} \tag{80}$$

De la ecuación anterior surge que la velocidad de fase de una onda plana progresiva, en un medio sin pérdidas y no limitado espacialmente, es menor o igual a la velocidad de la luz.

Sin embargo, este resultado no debe extrapolarse a cualquier medio, ni a cualquier tipo de onda, ya que en términos generales la velocidad de fase puede ser menor, igual o mayor que la velocidad de la luz. Este último caso se da en guías de ondas por ejemplo, donde se tiene la composición de dos ondas planas progresivas.

Si dos ondas progresivas, de la misma frecuencia, viajan con la misma velocidad en direcciones opuestas, o con diferentes velocidades en la misma dirección, la velocidad de fase de la onda compuesta resultante no es una constante sino que varía como función de la posición.

Para la determinación, por medición, de la velocidad de fase, es usual calcular el desfasaje eléctrico entre dos puntos, a través de métodos de comparación, para lo cual uno de los puntos es tomado como referencia.

Para una onda que viaja en el sentido positivo de las *x*, existe un retraso de fase infinitesimal $d\phi$ para una distancia positiva *x*. El tiempo requerido para que un punto de fase constante se desplace esta distancia es:

$$dt = -\frac{T}{2\pi} d\phi \tag{81}$$

Donde *T* es el tiempo correspondiente a un período de la onda.

Por consiguiente, la velocidad de fase, como una función de la posición, está dada por:

$$\nu = \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{\frac{T}{2\pi} d\phi} = -\frac{\omega}{\frac{d\phi}{dx}} \tag{82}$$

Para una onda que viaja en el sentido positivo de las *x*, $d\phi/dx$ es negativo y por ende la velocidad de fase será positiva.

La velocidad de fase está expresada por la siguiente relación:

$$\nu = \frac{\omega}{\beta} \tag{83}$$

La anterior expresión corresponde a una velocidad de fase promediada sobre un número entero de períodos.

Del mismo modo, la velocidad de fase relativa resulta ser:

$$\nu_r = -\frac{\beta}{\frac{d\phi}{dx}} \tag{84}$$

Otra magnitud relevante, es la denominada *longitud de onda* λ, definida como la distancia que ocupa una onda senoidal en un ciclo completo de 2π radianes, tal como se indica en **Figura 2-2**. Ya que las ondas varían en el espacio como funciones senoidales de *x*, resulta que la longitud de onda, por definición, es:

$$\beta\lambda = 2\pi \tag{85}$$

O sustituyendo *ß* por la igualdad dada anteriormente:

$$\omega\lambda = 2\pi\nu \tag{86}$$

O lo que es equivalente:

$$\nu = \lambda f \tag{87}$$

2.2.2. Índice de refracción.

En física se define al *índice de refracción* como la inversa de la velocidad de fase relativa. Esto es:

$$\eta = \frac{1}{\nu_r} = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\mu_r \ \varepsilon_r} \tag{88}$$

Para materiales no ferrosos en donde $\mu_r \cong 1$, se tiene que:

$$\eta \cong \sqrt{\varepsilon_r} \tag{89}$$

2.2.3. Velocidad de grupo.

La *velocidad de grupo* es definida como la velocidad a la que viaja la envolvente de la onda.

Para el caso de una onda plana progresiva en el espacio libre, la velocidad de grupo coincide con la de fase, es decir que es igual a la velocidad de la luz.

Este resultado es debido a que el medio, espacio libre en este caso, es un medio no dispersivo. Un medio no dispersivo es aquel en el cual la velocidad de fase de una onda es independiente de la frecuencia. Por el contrario, un medio dispersivo es aquel medio en el cual la velocidad de fase de una onda depende de la frecuencia.

Los medios dispersivos pueden ser de dos tipos, a saber:

- Medios normalmente dispersivos. En estos medios, el cambio de la velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es *positivo*. Es decir que:

  $$\frac{d\nu}{d\lambda} > 0$$

  Para estos medios la velocidad de grupo es *menor* que la velocidad de la luz.

- Medios anormalmente dispersivos. En estos medios, el cambio de la velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es *negativo*. Es decir que:

  $$\frac{d\,v}{d\lambda} < 0$$

  Para estos medios la velocidad de grupo es *mayor* que la velocidad de la luz.

Para una dada frecuencia se tiene que la velocidad de grupo (u) es:

$$u = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{90}$$

Pero como:

$$\omega = 2\,\pi\,f = 2\,\pi\frac{v}{\lambda} = \beta v \tag{91}$$

resulta:

$$u = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta v)}{d\beta} = \beta\,\frac{dv}{d\beta} + v \tag{92}$$

O también:

$$u = v - \lambda\,\frac{dv}{d\lambda} \tag{93}$$

Verificándose que siempre se cumple:

$$u\,v = c^2 \tag{94}$$

2.2.4. Impedancia característica o intrínseca del medio.

Como ya ha sido explicado, existe una relación entre campo eléctrico y campo intensidad magnética, válido únicamente para variaciones armónicas (senoidales) de los mismos, a esta relación se la denomina *impedancia característica* o *impedancia intrínseca del medio*, prefiriéndose este último término, reservándose el primero para las líneas de transmisión de energía.

A través de esta relación, conocido uno de los campos, puede inferirse el campo restante.

Además, esta impedancia aporta un conocimiento que resulta fundamental para comprender los mecanismos de propagación en un dado medio, más aún, permite conocer lo que acontece cuando una onda al propagarse encuentra una discontinuidad en el medio, ya que conocidas las impedancias de los medios involucrados en la propagación, se puede aplicar una analogía con el caso de propagación en líneas.

En un punto anterior, se demostró que la impedancia intrínseca del espacio libre resulta ser:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\,\pi = 377\;\;[\Omega] \tag{95}$$

Por extensión, se puede aplicar la misma ecuación para el caso de un dieléctrico perfecto, cual es el caso del espacio libre. Por lo que la impedancia intrínseca de un dieléctrico perfecto resulta ser igual a:

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\,\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 377\,\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\;\;[\Omega] \tag{96}$$

Resulta evidente que, para el caso de un dieléctrico perfecto, se puede hablar de una resistencia intrínseca, ya que la parte imaginaria de la impedancia intrínseca resulta nula. Esto resulta del hecho de que los campos eléctrico **E** y de intensidad magnética **H** se encuentran en fase temporalmente.

En el caso general de la propagación en un medio cualquiera, la impedancia intrínseca será un número complejo.