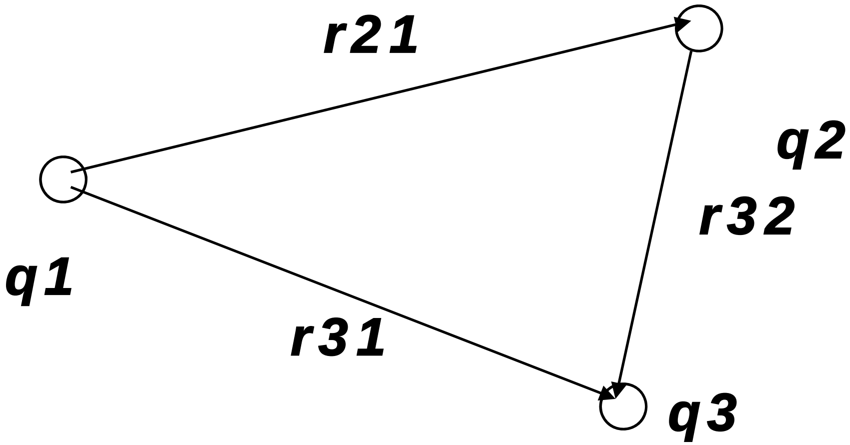
Energía electrostática.

Campos y Ondas

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
ARGENTINA

1. Trabajo de agrupación de cargas puntuales



$$W = q_2 . V_{21} + q_3 . V_{31} + q_3 V_{32}$$

$$V_{21} q_2 = \frac{q_1 . q_2}{4\pi \in_0 r_{21}} = V_{12} q_1 = \frac{q_2 . q_1}{4\pi \in_0 r_{12}}$$

$$q_m V_{mn} = q_n V_{nm}$$

$$W = \frac{1}{2} q_1 . V_{12} + \frac{1}{2} q_2 . V_{21} + \frac{1}{2} q_1 . V_{13} + \frac{1}{2} q_3 . V_{31} + \frac{1}{2} q_3 V_{32} + + \frac{1}{2} q_2 V_{23}$$

$$W = \frac{1}{2} q_1 \left(V_{12} + V_{13} \right) + \frac{1}{2} q_2 \left(V_{21} + V_{23} \right) + \frac{1}{2} q_3 \left(V_{31} + V_{32} \right) \quad [\mathrm{J}]$$

- ***V'*$_1$, *V'*$_2$ y *V'*$_3$ son los potenciales en los puntos 1, 2 y 3 respectivamente, debidos a todas las cargas *excepto* la carga ubicada en el punto considerado.**

$$W = \frac{1}{2} q_1 V_1' + \frac{1}{2} q_2 V_2' + \frac{1}{2} q_3 V_3' \qquad [\mathrm{J}]$$

$$W = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{2} q_i V_i' \qquad [\mathrm{J}]$$

$$V_i' = \sum_{j=1\,(j \neq i)}^{\mathrm{n}} V_j(\mathbf{r}_i)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathrm{n}} V_j(r_i)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} q_i V_i^{'} \quad [\mathrm{J}]$$

- La fórmula da la energía potencial *W* de agrupamiento de cargas eléctricas puntuales desde el punto de vista de la *acción a distancia* entre las cargas.
- Naturalmente, también puede adoptarse el punto de vista del *campo de fuerza* creado por las cargas. Encontraremos la expresión de *W* en ese caso.
- Consideremos el teorema de la divergencia y la Ley de Gauss, aplicados al caso de una carga puntiforme genérica *qi* en el vacío; se tendrá:

$$qi = \iiint_{v_i} \vec{\nabla} \cdot \left[\varepsilon_0 \, \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \right] \, dv = \iint_{S_i} \varepsilon_0 \, \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\iiint_{v \to \infty} \nabla \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \, dv \right] \left[\sum_{j=1\,(j \neq i)}^{n} V_j\left(\mathbf{r}_i\right) \right]$$

- ✓ ***vi*** **es un volumen cualquiera que encierra (contiene) el punto *i* en el que está situada la carga *qi*.**
- ✓ ***Si*** **es la superficie (cerrada) límite del volumen *vi*.**
- ✓ **E*i*(r) es el campo eléctrico asociado a *qi*.**
- ✓ **r es el vector de posición de un punto genérico interior a *vi*.**

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} V_j(r_i) \qquad\qquad W = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n} \boxed{\iiint_{v\to\infty} \nabla \mathbf{E}_i(\mathbf{r})} \, dv \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} V_j(r_i)$$

- **La expresión es una suma de n (n-1) términos de la forma genérica:**

$$V_j(\mathbf{r}_i)\cdot \iiint_{v_i} \vec{\nabla}\cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})\; dv = \iiint_{v_i} V_j(\mathbf{r})\; \vec{\nabla}\cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r})\; dv$$

- **La divergencia de Ei bajo el signo integral es nula en casi todo el volumen *vi*, excepto justo en el punto *i*, donde está *qi*, la única carga considerada. Así también el producto será nulo en casi todo el volumen *vi*, excepto en *i*, donde r = r*i* y *Vj* = *Vj*(r*i*). Por eso resulta en este caso que Vj se introduce dentro de la integral, transformandose en Vj(r)**

Utilizando la siguiente identidad del análisis vectorial:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r})\ \mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]=\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r})\right]\mathbf{E}_i(\mathbf{r})+V_j(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

$$V_j(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})=\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r}\ )\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]-\vec{\nabla}\cdot V_j(\mathbf{r}\ )\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

$$\iiint_{v_i} V_j(\mathbf{r})\ \vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\ dv=\boxed{\iiint_{v_i}\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]dv}+\iiint_{vi}\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})dv$$

Teorema Gauss

$$\iiint_{v_i}\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]\ dv\ =\iint_{S_i}\left[V_j(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]\cdot d\mathbf{s}$$

$$\iint_{S_i\to\infty}\left[V_j(\mathbf{r})\,\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]\cdot d\mathbf{s}+\iiint_{vi\to\infty}\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\,dv$$

Se anula

- ***vi*** **puede ser cualquier volumen con la condición de contener la carga *qi***
- **se elige un único volumen *v* = *vi* tal que para todo *i* el volumen *v* contenga todas las n cargas *qi*.**
- **Además puede hacerse *v* tan grande como sea necesario (r-> infinito) de modo que las integrales de superficie se anulen.**
- **Cuando *v* crece indefinidamente, la superficie límite *S* varía con r^2, mientras que *vi* varía con r^{-1} y E*i* lo hace con r^{-2}**

Energía expresada en función del campo

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\iiint_{v\to\infty}\nabla\mathbf{E}_i(\mathbf{r})V_j(r).\,dv=\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\underbrace{\iiint_{v\to\infty}\vec{\nabla}\cdot\left[V_j(\mathbf{r})\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right]dv}_{0}+\iiint_{v\to\infty}\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})dv$$

$$\boxed{W=\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\iiint_{v\to\infty}\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})dv}$$

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{v\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{j=1(j\neq i)}^{n}\left(\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right)\right]dv$$

- **Teniendo en cuenta que el campo eléctrico total E(r) creado por las n cargas es:**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

$$E^2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n}\left(\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right) + \sum_{i=1}^{n} E_i^2(\mathbf{r})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n}\left(\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right)\right) = E^2(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{n} E_i^2(\mathbf{r})$$

***Usi:** autoenergía, o energía de condensación, de la i-ésima carga.*

Las cargas qi ya existían antes de reunirlas

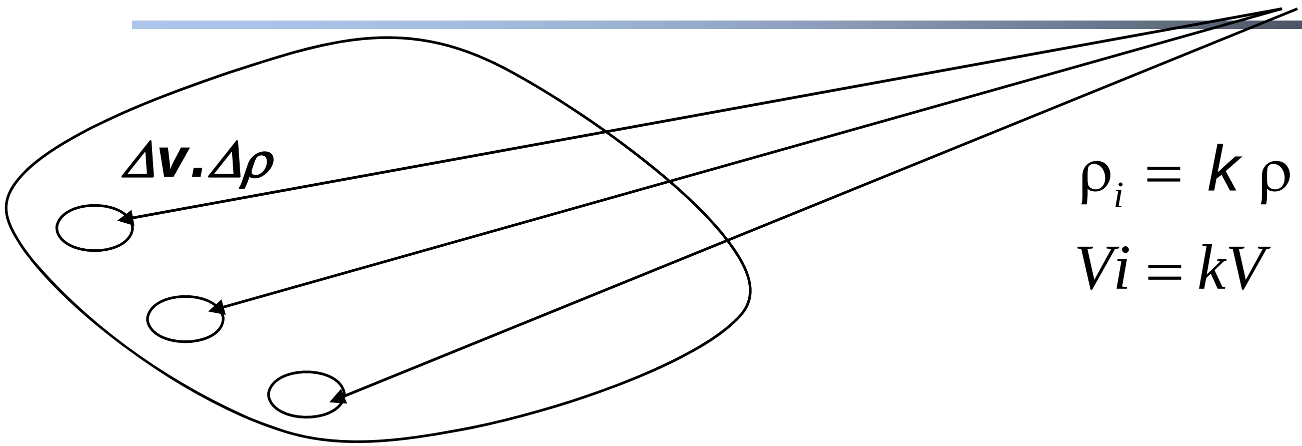
***Us:** energía total del campo eléctrico*

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{v\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\,(j\neq i)}^{n}\left(\mathbf{E}_j(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right)\right] d$$

$$\Rightarrow$$

$$W = \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{v\to\infty} E^2(\mathbf{r})\, dv} - \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint_{v\to\infty} E_i^2(\mathbf{r})\; dv}$$

Energía de una distribución continua de cargas



$$\rho_i = k\,\rho \qquad d\rho = \rho\; dk$$

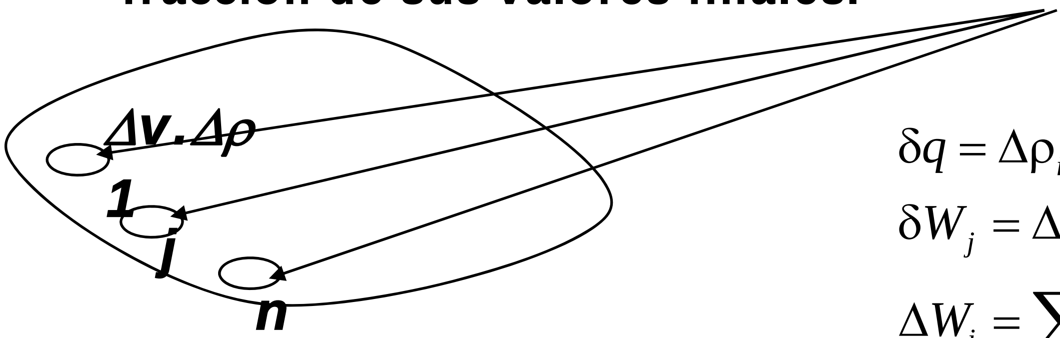
$$Vi = kV$$

- **Se trata de encontrar una expresión de la energía electrostática para una distribución cualquiera de carga en el continuo, caracterizada por una densidad $\rho(x, y, z)$, con la salvedad de que es finita *en todo* punto.**
- **Supongamos que se desplazan pequeños elementos de carga desde el infinito a su ubicación final de modo de ir incrementando su densidad de carga en cada punto hasta alcanzar el valor final $\rho(x, y, z)$.**
- **Dado que el trabajo necesario para construir la distribución es independiente de la modalidad con que se construya, puede considerarse que el transporte de los pequeños elementos de carga se realiza de forma de que en cada instante la densidad de carga qi en cada punto es la misma fracción *k* de la densidad final de ese punto**

Energía de una distribución continua de cargas

- **Todas las partes del sistema son traídas a su estado final de carga al mismo tiempo, es decir que en cualquier etapa del proceso todas las densidades de carga (en cada punto del espacio) están a la misma fracción de sus valores finales.**

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_i &= k\,\rho \\ Vi &= kV \end{aligned}}$$



$$\delta q = \Delta\rho_i(x,y,z).\Delta v$$

$$\delta W_j = \Delta\rho_i(x,y,z).\Delta v_j.Vi(x,y,z)$$

$$\Delta W_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\rho_i(x,y,z).Vi(x,y,z).\Delta v_j$$

$$\rho_i(x,y,z) = k\rho(x,y,z)$$

$$\Delta\rho_i(x,y,z).\Delta v = dk.\rho(x,y,z).dv$$

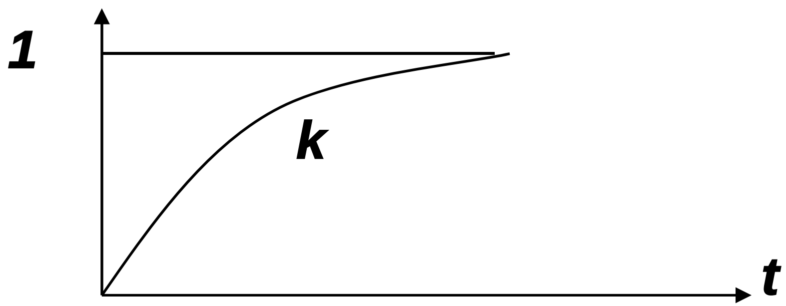
$$V_i(x,y,z) = k.V(x,y,z)$$

$$dWi = k.dk\iiint_v V(x,y,z).\rho(x,y,z).dv$$

$$W = \int_0^1 k.dk.\iiint_v V(x,y,z).\rho(x,y,z).dv$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}.\iiint_v V(x,y,z).\rho(x,y,z).dv}$$

i: instante
vj : elemento de volumen
k=0…1



Energía de una distribución continua de cargas

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V \, dv \quad (1)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} q_i V_i' \quad (2)$$

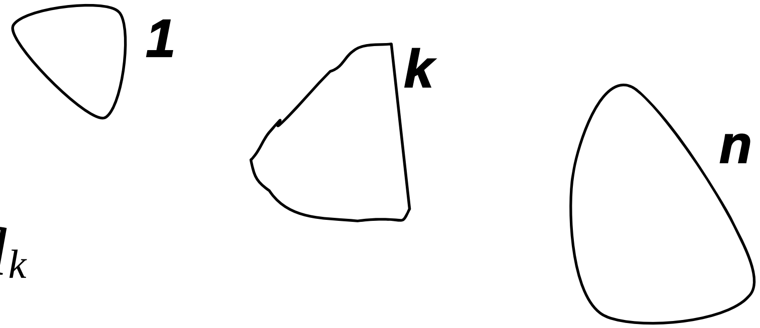
- **(1) Expresa la energía potencial para el caso de una distribución de carga arbitraria (con ρ finito en todo punto del espacio), y es equivalente a la expresión para cargas puntuales (2).**
- **Sin embargo, debe notarse que en (1) el valor del potencial es el generado por toda la distribución de carga , mientras que en (2) el potencial es el debido a todas las cargas excepto la del punto.**
- **La (1) incluye la autoenergía.**
- **Para los casos de distribuciones de cargas superficiales y lineales se expresa como:**

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma V \, ds$$

$$W = \frac{1}{2}\int_L \lambda V \, dl$$

Energía de una distribución de conductores cargados

- **En n conductores:**



$$W_k = \frac{V_k}{2}\iint_{S_k} \sigma_k \ ds = \frac{1}{2} V_k . q_k$$

$$V_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} . q_j$$

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} . V_j$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k . q_k}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} . V_k . V_j}$$

En función del potencial

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} . q_k . q_j}$$

En función de la carga

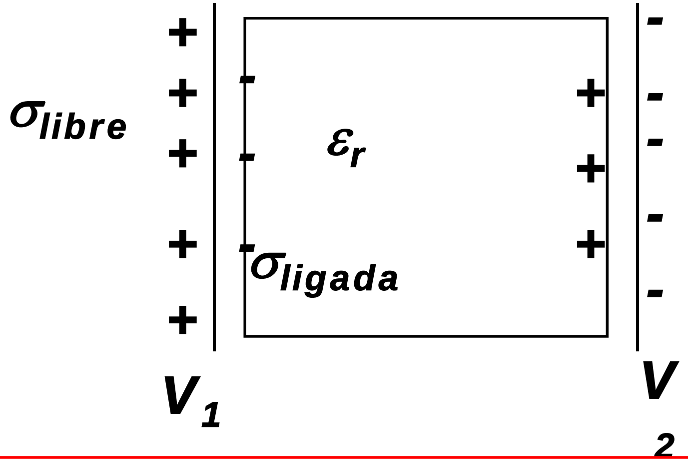
Energía electrostática en materiales dieléctricos

- Las expresiones encontradas de la energía describen la energía de un grupo de cargas en el vacío. Si se trata con materiales polarizables (dieléctricos) se puede tener en cuenta de dos maneras
  - 1. Considerando a todas las cargas libres y ligadas en el vació y E es el campo total y ρ la densidad de carga total
  - 2. Considerar a E como el campo eléctrico total pero solo evaluar la energía de agrupamiento de las cargas libres en presencia del material dieléctrico (dipolos de polarización)

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \rho_{total}\, V\, dv \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \rho_{libre}\, V\, dv \quad (2)$$

- **Capacitor de placas planas con dieléctrico, homogeneo, lineal e isotrópico**



$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\sigma_{libre} = \sigma_{total} + \sigma_{ligada}$$

$$\sigma_{libre} = \varepsilon_r \sigma_{total}$$

$$\sigma_{total} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_r}$$

Energía de las cargas libres

$$W_1 + W_2 = \frac{V_1}{2}\iint_{S1} \sigma_{libre1}\, ds + \frac{V_2}{2}\iint_{S2} \sigma_{libre2}\, ds$$

$$\sigma_{libre1} = -\sigma_{libre2} = \sigma; .....S_1 = S_2 = S$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{V_1}{2}\iint_{S1} \sigma_1\, ds - \frac{V_2}{2}\iint_{S1} \sigma_1\, ds$$

$$W = \frac{V_1 - V_2}{2}\sigma S = \frac{1}{2} E l \sigma S = \frac{1}{2} E \sigma l S = \frac{1}{2} E \sigma .vol = \frac{1}{2}\mathbf{ED}.vol$$

Energía de las cargas totales

$$W_{t1} + W_{t2} = \frac{V_1}{2}\iint_{S1} \sigma_{total1}\, ds + \frac{V_2}{2}\iint_{S2} \sigma_{total2}\, ds$$

$$\sigma_{total1} = -\sigma_{total2} = \sigma t; .....S_1 = S_2 = S$$

$$W_t = W_{t1} + W_{t2} = \frac{V_1}{2}\iint_{S1} \sigma_t\, ds - \frac{V_2}{2}\iint_{S1} \sigma_t\, ds$$

$$W = \frac{V_1 - V_2}{2}\sigma_t S = \frac{1}{2} E l \sigma_t S = \frac{1}{2} E \frac{\sigma}{\varepsilon_r} l S = \frac{1}{2} E \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E}{\varepsilon_r}.vol = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2.vol$$

- **Si mantenemos a E como campo total y consideramos las cargas libres:**

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad \left[\mathrm{C}/\mathrm{m}^3\right] \qquad W=\frac{1}{2}\iiint_v V\left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{D}\right)dv$$

Utilizando la igualdad del análisis vectorial

$$\vec{\nabla}\cdot\left(c\,\mathbf{F}\right)=c\,\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\vec{\nabla}c$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_v \vec{\nabla}\cdot\left(V\,\mathbf{D}\right)dv-\frac{1}{2}\iiint_v \mathbf{D}\cdot\vec{\nabla}V\,dv$$

aplicando el teorema de la divergencia al primer término del miembro derecho de la anterior ecuación , se tiene:

$$W=\underbrace{\frac{1}{2}\iint_S V\,\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}}_{0}\;\boxed{-\frac{1}{2}\iiint_v \mathbf{D}\cdot\vec{\nabla}V\,dv}$$

S puede elegirse arbitrariamente. Si se elige S como una superficie cerrada en el infinito, debe calcularse la integral para r muy grande.

$$\mathbf{E}=-\vec{\nabla}V$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\iiint_v\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)dv}$$

Energía electrostática en materiales dieléctricos

- **El factor ½ solo es cierto si el potencial es proporcional a la carga, o sea si ε_r es independiente del campo aplicado**
- **Si ε_r depende del campo no hay relación líneal entre el campo (o el potencial) y la carga libre.**
- **El trabajo de agrupamiento se debe evaluar como:**

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \Delta\rho\ (x,y,z).V(x,y,z).\Delta v_j$$

$$\Delta\rho(x,y,z) = \rho_{i+1} - \rho_i = \nabla\mathbf{D}_{i+1} - \nabla\mathbf{D}_i$$

$$\boxed{\delta(\nabla\mathbf{D}) = \nabla(\delta\mathbf{D})}$$

$$dW = \iiint_v V(x,y,z).\nabla(\delta\mathbf{D}).dv$$

$$dW = \iiint_v div(V.\delta\mathbf{D}).dv - \iiint_v \nabla V.\delta\mathbf{D}).dv$$

$$dW = \cancel{\iint_{S\to\infty} V.\delta\mathbf{D}.ds} - \iiint_{v\to\infty} \nabla V.\delta\mathbf{D}.dv$$

$$dW = \iiint_{v\to\infty} \mathbf{E}.\delta\mathbf{D}.dv$$

$$W = .\iiint_v [\int_0^{\mathbf{D}} (\mathbf{E}.d\mathbf{D})].dv$$

$$(div\mathbf{D})_i = \frac{\partial D_i x}{\partial x} + \frac{\partial D_i y}{\partial y} + \frac{\partial D_i z}{\partial z}$$

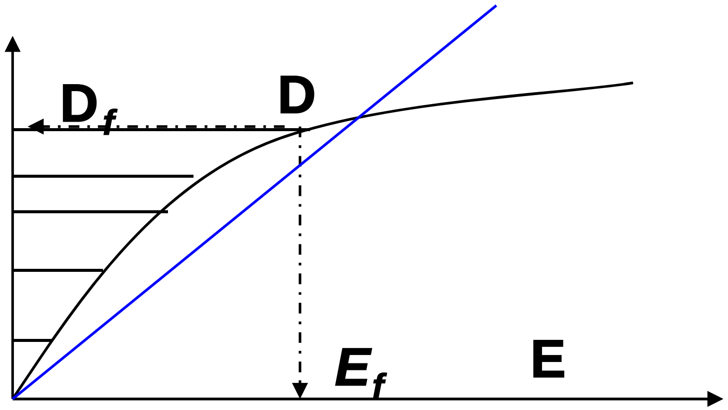
$$(div\mathbf{D})_{i+1} = \frac{\partial D_{i+1} x}{\partial x} + \frac{\partial D_{i+1} y}{\partial y} + \frac{\partial D_{i+1} z}{\partial z}$$

$$\delta(div) = \frac{\partial D_{i+1} x}{\partial x} - \frac{\partial D_i x}{\partial x} + \frac{\partial D_{i+1} y}{\partial y} - \frac{\partial D_i y}{\partial y} + \frac{\partial D_{i+1} z}{\partial z} - \frac{\partial D_i z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(D_{i+1}x - D_i x)}{\partial x} + \frac{\partial(D_{i+1}y - D_i y)}{\partial y} + \frac{\partial(D_{i+1}z - D_i z)}{\partial z} = div(\delta\mathbf{D})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(V\ \delta\mathbf{D}) = V\ \vec{\nabla}\cdot\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}\cdot\vec{\nabla}V$$

- **En cada punto del espacio hay que evaluar como crece el campo eléctrico y el desplazamiento para obtener la integral**



$$W = .\iiint_v [\int_0^{\mathbf{D}_f} (\mathbf{E}.\mathbf{dD})].dv$$

- **Si D=$\varepsilon_r.\varepsilon_0$.E caso de material lineal**

$$W = .\iiint_v [\int_0^{\mathbf{D}_f} (\mathbf{E}.\mathbf{dD})].dv$$

$$\iiint_v \int_0^{\mathbf{D}_f} (\mathbf{E}.\mathbf{dD})]dv = \iiint_v \varepsilon_r.\varepsilon_0[\int_0^{\mathbf{E}_f} (\mathbf{E}.\mathbf{dE})]dv = \boxed{\frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon_r.\varepsilon_0 \mathbf{E}_f{}^2 dv}$$

Si E es el campo eléctrico en cada punto, la energía es:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon_r.\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 dv$$

Y la densidad de energía por unidad de volumen es :

$$w = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_r.\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}^2$$

Tiene valor en todo el espacio

La densidad de energía nada dice de la localización de la energía :

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V \, dv$$

$$w = \frac{1}{2}\rho V$$

Tiene valor solo donde hay carga

Si las derivadas de la energía respecto del volumen informaran acerca de la localización de la energía darían resultados contradictorios Pues ambas expresiones tienen valores diferentes en puntos idénticos

Fuerzas y energías en el campo electrostático

Principio de los trabajos virtuales

- Conociendo la expresión de la energía almacenada en el campo eléctrico y su variación durante un desplazamiento infinitesimal de cuerpos cargados, es posible determinar en base a la ley de conservación de energía, las fuerzas que actúan en un campo eléctrico.
- Supongamos un sistema aislado formado por varias partes: fuente, conductores, cargas puntuales, dieléctricos.
- Supongamos que dejamos que una de las partes realice un pequeño desplazamiento, *d*r, bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que actúan sobre el sistema eléctrico.
- Entonces hay un trabajo mecánico consecuencia de un intercambio de distintas formas de energía
- Las variables que describirán el estado del sistema y su convención de signos: *Wm* el trabajo mecánico realizado *por* las fuerzas eléctricas del sistema, *W* la energía *almacenada* en el campo electrostático y sea *Wb* la energía *suministrada* por la fuente. Debido a que el sistema está aislado no hay otro tipo de intercambio,

$$dW_b = dW + dW_m$$

existe una fuerza externa opuesta al campo para que el movimiento sea a velocidad constante

$$dW_b = dW \quad + \; dW_m$$

$dW_b > 0$ ⟹ ***La fuente entrega energía***

$dW_c > 0$ ⟹ ***El campo incrementa su energía***

$dW_m > 0$ ⟹ ***La Fuerza del campo realiza un trabajo positivo***

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial x}dx + \frac{\partial W_m}{\partial y}dy + \frac{\partial W_m}{\partial z}dz = \mathbf{F.dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dWm = \tau \,.\, d\theta$$

donde τ ***es el momento eléctrico y dθ el desplazamiento angular en función de sus componentes (***τ***1,*** τ***2 ,*** τ***3) y (d***θ***1, d***θ***2, d***θ***3).***

Supongamos un sistema aislado formado por varias partes tal que no se encuentra conectado a ninguna fuente, es decir es un sistema a *carga constante*.

$$dW + dW_m = 0$$

$$dW_m = -dW$$

$$dW_m = -\frac{\partial W}{\partial x}dx - \frac{\partial W}{\partial y}dy \frac{\partial W}{\partial z}dz = \mathbf{F.dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q ; \quad F_y = -\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_Q ; \quad F_z = -\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_Q$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_1}\right)_Q ; \quad \tau_2 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_2}\right)_Q ; \quad \tau_3 = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_3}\right)_Q$$

- Caso de un sistema conectado a una fuente la cual mantiene a potencial constante las superficies conductoras.
- Un sistema de conductores cargados, con energía electrostática *W*, parte del sistema se desplaza mientras **los potenciales de los conductores permanecen fijos**, la energía electrostática sufre un incremento infinitesimal debido a una variación diferencial de la carga *d*qi.
- La energía suministrada por la fuente, *dWb, es el trabajo necesario para mover cada uno de los diferenciales de carga, dq*i, desde el potencial cero hasta el potencial del conductor adecuado

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \mathrm{dq_i\, V_i} \qquad dW_b = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dq_i\, V_i} \qquad dW_b = 2dW = dW + dW_m$$

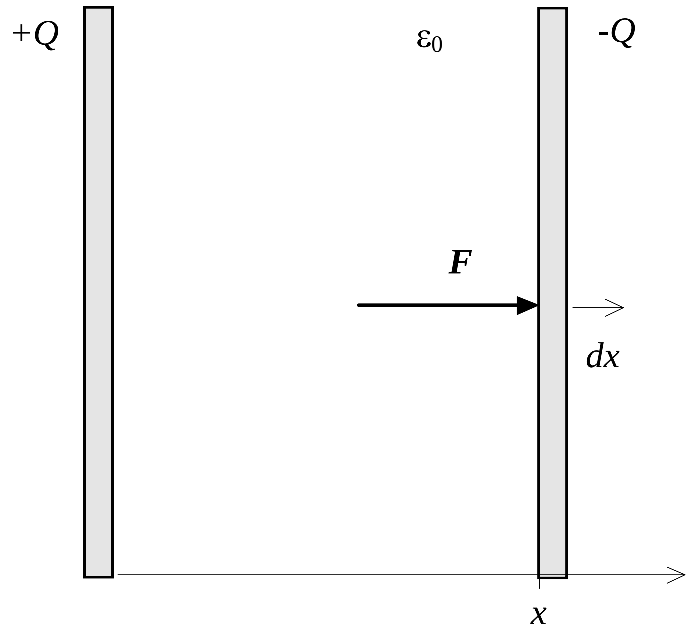
$$dW = dW_m \qquad dW_m = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_V ; \qquad F_y = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_V ; \qquad F_z = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_V$$

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_1}\right)_V ; \qquad \tau_2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_2}\right)_V ; \qquad \tau_3 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_3}\right)_V$$

Ejemplo de cálculo de la fuerza sobre la placa de un capacitor

- **La separación entre las placas del condensador es *x*, y el área de las mismas es *A*. Supongamos que el condensador ha sido cargado carga *Q* y desconectado de la fuente, después de ello la densidad de carga de sus placas será σ = *Q*/*A* y la misma no variará**
- **la fuerza que ejerce la placa cargada con carga +*Q* sobre la placa cargada con -*Q*.**
- **consideremos un trabajo virtual debido a un desplazamiento infinitesimal *dx* tendiente a alejar las placas**



$$F_x.dx + dW = 0$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon_0 E^2\, dv = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}.A.x$$

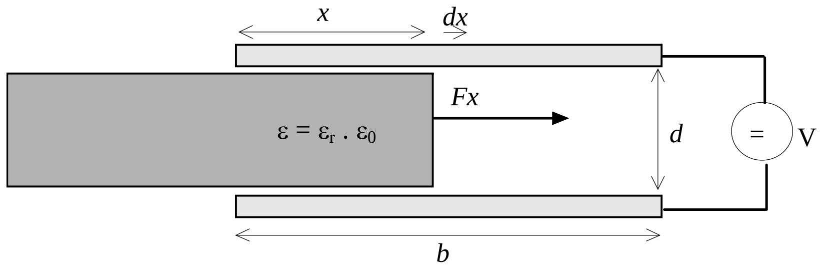
$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\;\; a_x}$$

Signo negativo indica que la fuerza es en sentido contrario al desplazamiento

- **La fuerza que sufre un material dieléctrico al ser introducido en el espacio entre las placas planas**
- **Las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante *V*.**
- **El dieléctrico se desplaza en el sentido de introducirse dentro del espacio entre placas**



longitud *b, ancho w, y separación d*

$$W = \frac{1}{2}\iiint_v (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\, dv$$

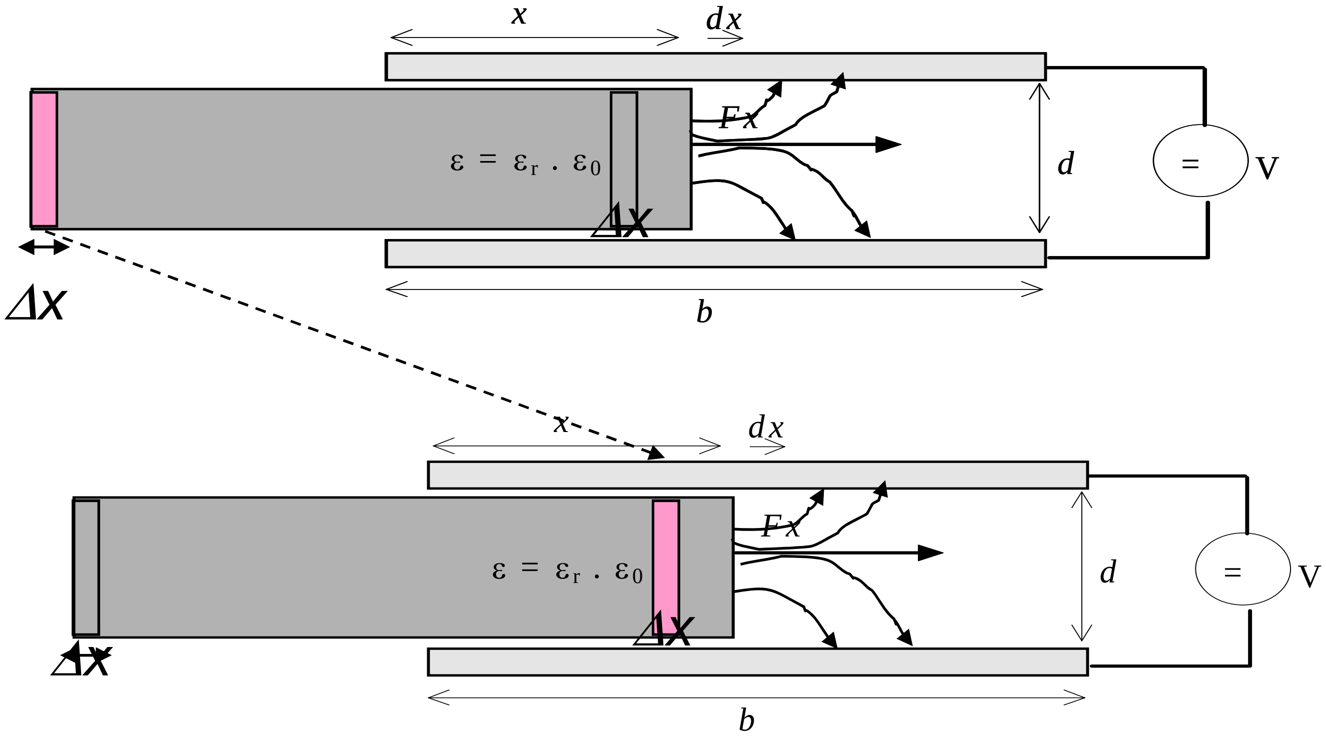
$$dW_m + dW = dW_b \qquad dW_m = dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx = F_x dx \qquad W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma V\, dS$$

Despreciando los efectos de borde, y teniendo en cuenta que la densidad volumétrica de energía en el espacio ocupado por el dieléctrico es diferente a la que existe en la región con aire

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (b-x)\, w\, d + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\, x\, w\, d \qquad E = \frac{V}{d} \qquad W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 V^2 w}{d}\left[(b-x)+\varepsilon_r x\right]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 V^2 w}{d}(\varepsilon_r - 1) = F_x}$$

Los efectos de borde que fueron despreciados en el cálculo de la energía son los responsables de que exista esta fuerza ?????



$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 V^2 w}{d}\left[(b-x) + \varepsilon_r\, x\right]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 V^2 w}{d}(\varepsilon_r - 1) = F_x}$$