Informe de Trabajo Integrador Final IPyAN

Tomás Vidal
Introducción a la Programación y Análisis Numérico, Depto. de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.

***Resumen*— A continuación se detalla como se encuentran los valores del capacitor, inductor y resistencia, además del valor $u_s(t)$ del circuito eléctrico presente en Fig. 1. La principal aplicación de este circuito es atenuar las frecuencias bajas de la señal que se le entregue, por eso además de estudiar los valores de sus componentes se interioriza en el estudio de la señal de salida $u_s(t)$ con respecto de diferentes tipos de señales sinusoidales. Para poder aproximar $u_s(t)$ se hace uso de los métodos numéricos de polinomios de Lagrange y mínimos cuadrados, y se espera que tenga una forma exponencial decreciente, y luego de aplicar los métodos se concluye que efectivamente la tensión analizada tiene este comportamiento y que para aproximar los datos que no tienen error es mejor interpolarlos, al contrario de los que se sabe que tienen error, pues a estos últimos es mejor hacerles un ajuste (exponencial en este caso). Posterior a ésto se aproxima el valor de la resistencia haciendo un ajuste de los datos, y despejando de relaciones físicas conocidas, finalmente se obtienen errores relativos del 5.50% y 0.05% tomando ventaja de la precisión en diferentes intervalos de tiempo. Los valores del capacitor y inductor se hayan a partir de las ecuaciones físicas que describen sus comportamientos en los circuitos eléctricosy, en estos casos se llega a las aproximaciones a partir del método numérico de Simpson 3/8, pues con 200 puntos de mediciones se tiene un error relativo de 6.46% (L) y 5.75% (C). Para analizar la salida con respecto a las diferentes sinusoides en la entrada se hace uso de los métodos de Euler, Taylor de orden 2, Adams Bashforth y Runge Kutta 4, concluyendo que el método numérico más efectivo es Taylor de orden 2 y que Runge Kutta 4 no converge para todas las frecuencias estudiadas. También se encuentra que el circuito atenua las frecuencias bajas en la salida a partir de 200hz.**

I. INTRODUCCCIÓN

En este informe se describen las metodologías implementadas y los resultados que se obtuvieron con sus significados referentes a los problemas que se pretenden responder y, que están en el Trabajo Práctico Integrador 2020. Todos los problemas tienen su respetivo archivo .m donde se encuentra el código en matlab/octave para resolver numéricamente el problema en concreto, los mismos se encuentran adjuntos al informe, además de resultados numéricos archivados, aunque el lector puede tomarse la libertad de correr los códigos y comprobar los mismos. Para poder comenzar a estudiar y calcular el valor aproximado de $u_s(t)$ primero se debió realizar un análisis del circuito con el objetivo de conocer aproximadamente el resultado esperado; al hacer esto se puede observar que $u_s(t)$ tendrá un comportamiento exponencial decreciente, pues el voltage provisto por la fuente u_e se verá disminuido progresivamente con la carga del capacitor, hasta que éste se cargue por completo anulando el voltage en $u_s(t)$, dado que se conoce que la carga de un capacitor es exponencial se espera que la salida tenga el efecto inverso, es decir, una exponencial decreciente y además se deduce:

$$u_s(t) = u_e - u_c(t)$$

Después de haber analizado ésto se puede proseguir a implementar las resoluciones numéricas.

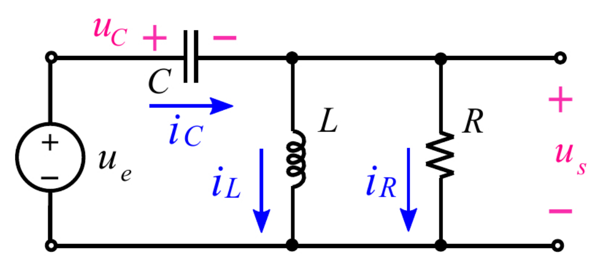


Fig. 1.

II. MÉTODOS IMPLEMENTADOS

En esta sección se desarrollan los métodos numéricos implementados a lo largo del informe. Los mismos fueron desarrollados matemáticamente como se los aplicó en el códio para que sean facilmente implementables en cualquier lenguage de programacíon.

A. Lagrange

El método de Lagrange [1] implica obtener una función polinomial de grado N ($P_N(x)$) que tiene la forma:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} L_{n,N}(x) f(x_n)$$

$$L_{n,N}(x_i) = \begin{cases} 1, x_i = x_n \\ 0, x_l \neq x_n \end{cases}$$

con $n, l = 0, 1, \cdots, N$ Esto permite que en cada x_l el polinomio coincida con el valor del punto dado.

B. Mínimos cuadrados

Teniendo $f(x) = a_0 + a_1 x$ se aproxima a_0 y a_1 con el método, haciendo uso de las ecuaciones:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} f(x_i) - \sum_{i=1}^{m} x_i f(x_i) \sum_{i=1}^{m} x_i}{m(\sum_{i=1}^{m} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} f(x_i)}{m(\sum_{i=1}^{m} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$$

C. Simpson 3/8

Sea la integral

$$I = \int_a^b f(x)$$

Se obtiene una aproximación de la misma con:

$$I \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3\sum_{i=1}^{N/3}(f(x_{3i-2} + f(x_{3i-1})) +$$
$$2\sum_{i=1}^{N/3-1}(f(x_{3i}) + f(x_N))]$$

D. Euler

Todos los sistemas de ecuaciones que se resuelven con estos métodos requieren que cada ecuación sea aproximada con el valor enésimo antes de seguir la proxima iteracion (es decir n+1); entonces si se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 = f1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -\frac{1}{RC}y_2 - \frac{1}{LC}y_1 = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Aplicando el método y_1 e y_2 se pueden aproximar con:

$$\begin{cases} y_1(x_{n+1}) = y_1(x_n) + hy_2(x_n) \\ y_2(x_{n+1}) = y_2(x_n) + hf_2(x_n, y_1(x_n), y2(x_n)) \end{cases}$$

Donde h es el paso de iteración. Este método tiene un error global $O(h)$.

E. Taylor orden 2

Para poder aplicar este método se requiere una derivada más de la que se tiene en el problema original, por lo tanto se debió encontrar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u_S(t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{RC}\frac{\partial u_S(t)}{\partial t} - \frac{u_S(t)}{LC} + \frac{\partial^2 u_e(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^3 u_S(t)}{\partial t^3} = -\frac{1}{RC}\frac{\partial^2 u_S(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial u_S(t)}{\partial t LC} + \frac{\partial^3 u_e(t)}{\partial t^3}$$

Primero se despeja la máxima derivada, y luego se deriva en ambos lados de la ecuación y así se tiene la derivada que se requiere. Luego se prosigue al igual que con el método de Euler, a exepción de que ahora se agrega un nuevo término en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1(x_{n+1}) = y_1(x_n) + hy_2(x_n) + \frac{h^2}{2!}f(x_n, y_1, y_2) \\ y_2(x_{n+1}) = y_2(x_n) + hf(x_n, y_1(x_n), y2(x_n)) + \\ +\frac{h^2}{2!}f_2(x_n, y_1, y_2) \end{cases}$$

Donde f_2 es la derivada que se acaba de encontrar, esta depende de x, y_1 e y_2 porque se deben reemplazar las variables acorde al sistema de ecuaciones planteado.

Este método tiene un error global $O(h^2)$.

F. Adams Bashforth orden 3

Para este método se requiere tener al menos 3 puntos iniciales, éstos se obtuvieron del método de Taylor y de la solución analítica; para la aproximación se utilizó el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1(x_{n+1}) = y_1(x_n) + \frac{h}{12}[23f_1(x_n, y_1(x_n), y_2(x_n)) - \\ 16f_1(x_{n-1}, y_1(x_{n-1}), y_2(x_{n-1})) \\ +5f_1(x_{n-2}, y_1(x_{n-2}), y_2(x_{n-2}))] \\ y_2(x_{n+1}) = y_2(x_n) + \frac{h}{12}[23f_2(x_n, y_1(x_n), y_2(x_n)) - \\ 16f_2(x_{n-1}, y_1(x_{n-1}), y_2(x_{n-1})) \\ +5f_2(x_{n-2}, y_1(x_{n-2}), y_2(x_{n-2}))] \end{cases}$$

Este método tiene un error global $O(h^3)$

G. Runge Kutta 4

Para resolver la ecuación diferencial con éste método se aproximó con:

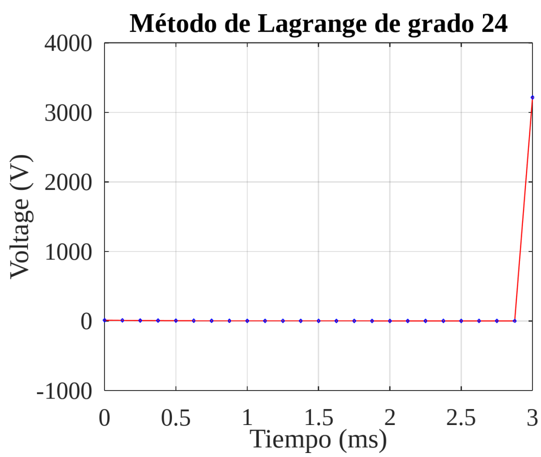
$$\begin{cases} k11 = hf1(x_n, y_1(x_n), y_2(x_n)) \\ k12 = hf2(x_n, y_1(x_n), y_2(x_n)) \\ k21 = hf1(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), \frac{1}{2}k11 + y_2(x_n)) \\ k22 = hf2(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), \frac{1}{2}k12 + y_2(x_n)) \\ k31 = hf1(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), \frac{1}{2}k21 + y_2(x_n)) \\ k32 = hf2(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), \frac{1}{2}k22 + y_2(x_n)) \\ k41 = hf1(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), k31 + y_2(x_n)) \\ k42 = hf2(x_n, \frac{h}{2} + y_1(x_n), k32 + y_2(x_n)) \\ y_1(x_{n+1}) = y_1(x_n) + \frac{1}{6}[k11 + 2k21 + 2k31 + k41] \\ y_2(x_{n+1}) = y_2(x_n) + \frac{1}{6}[k12 + 2k22 + 2k32 + k42] \end{cases}$$

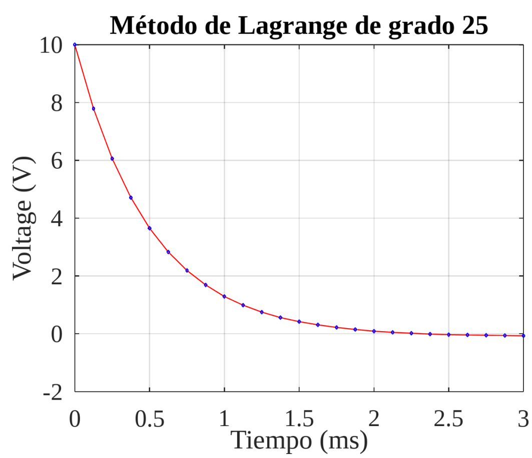
Donde $f1$ y $f2$ ya se definieron previamente. Este método tiene un error global $O(h^4)$.

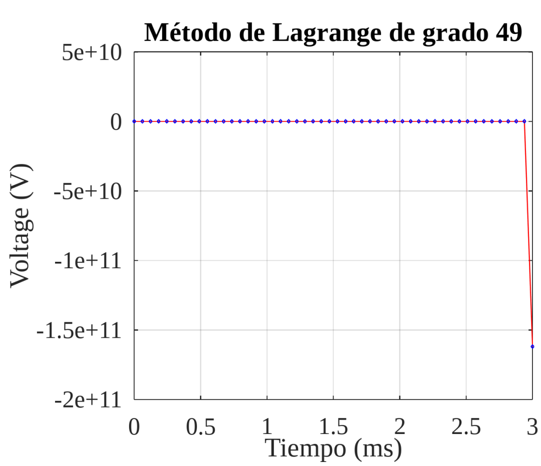
III. Ejercicio 1

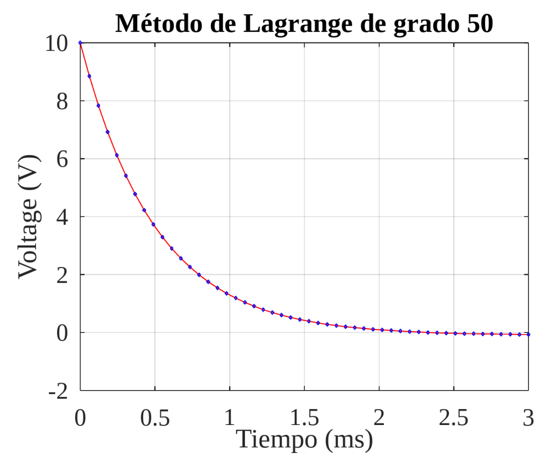
A. MARCO TEÓRICO

Para el caso del análisis de $u_s(t)$ se aplicó el método de Lagrange. Este método es considerado apto para el ejercicio 1 a y b, pues en estos casos sabemos que los valores tomados son exactos, entonces la función que los contiene debe interpolarlos. Para ambos incisos se utilizó el mayor orden polinomial posible, pues de otra forma se introducía mucho error en los extremos del intervalo debido a los efectos de estos polinomios (con un total de 25 muestras en el a y 50 en el b).









En el caso del inciso C se aplicó el método de mínimos cuadrados, pues los datos tienen error, (es decir que no se sabe si la función realmente los interpola) se sabe que la función tiene una forma exponencial:

$$f(x) = BA^x = Y$$

Por lo que para poder aplicar el método se deben linealizar los parámetros A y B, aplicando logaritmo natural se tiene:

$$Ln(Y) = Ln(BA^x)$$

Aplicando propiedades del logaritmo:

$$Ln(Y) = Ln(B) + Ln(A)x$$

Reescribiendo:

$$\bar{Y} = \bar{B} + \bar{A}x$$

Ahora si se puede aplicar el método de mínimos cuadrados; es importante destacar que no estamos hayando el valor de B directamente, sino que estamos buscando $\bar{B} \approx B$, y además usamos $\bar{Y} \approx Y$, por lo que ésto introduce un nuevo error además del presente por el método, que se debe tener en cuenta si se quiere lograr mayor precisión. Entonces para obtener una aproximación de A se debe aplicar exponencial:

$$A \approx e^{\bar{A}}$$

Y con ésto ya se tienen los parámetros necesarios para construir la función que ajusta exponencialmente los datos:

$$Y \approx Bx^A$$

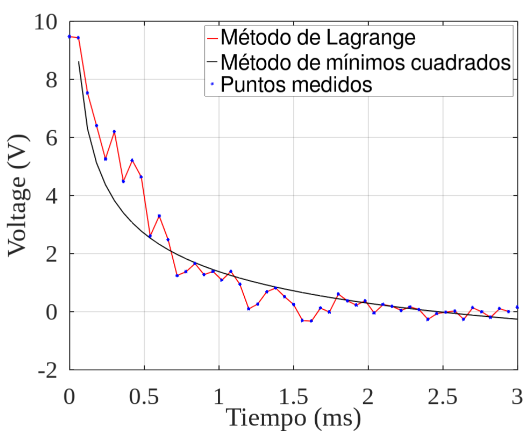
B. *Código matlab/octave*

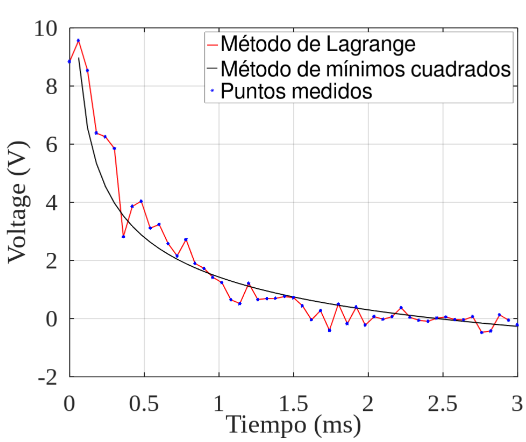
La dificultad para aplicar el método de mínimos cuadrados se encuentra cuando hay puntos que tienen valores negativos o cero, pues hay aplicar el logaritmo para linealizar la ecuación y estos datos se salen del dominio del logaritmo, por eso para solventar este problema se aplicó una traslación a la variable dependiente de 6.65 unidades, ya que después probar distintos valores de traslación se comprobó que este última introducía menos error; y al primer valor de la variable independiente se lo cambió por un valor muy próximo a cero (0.0002), así se encuentra dentro del dominio del logaritmo. Los errores debido a la traslación de los datos se generan que los pequeños errores en los mimos se amplifican cuando se aplica el logaritmo y luego la exponencial, es por ésto que no siempre es conveniente realizar una traslación, por eso como en la variable independiente al no haber más valores que el primero que generen problemas, sólo se le aplicó una pequeña modificacíon, que si bien introduce error al dato, es mucho menor que si se hubiesen transladado a todos. Otro problema ocurre cuando los valores de los datos se aproximan a cero (limite del domino del logaritmo), pues comienza a haber más error.

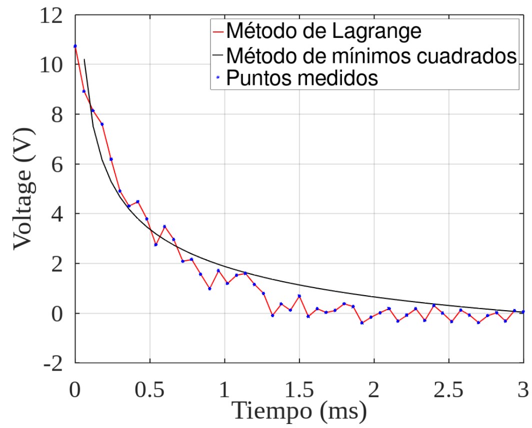
Haciendo uso del script generate_plots.m se crearon muchos gráficos para corroborar la efectividad del método y se puede observar que aunque haya un error, el método de mínimos cuadrados aproxima muy bien los datos. Los scripts usados son ej1_a.m, ej1_b.m, ej1_c.m, lagrange.m y minimos_cuadrados_no_lineal.m

C. Resultados

A continuación se pueden observar la comparación al aplicar ambos métodos utilizados cuando hay error presente en las mediciones (cada gráfico son un conjunto de puntos diferentes).







IV. Ejercicio 2

A. Marco Teórico

Para aproximar $\bar{R}$ se midió $u_s(t)$ y $i_R(t)$, y a partir de la ley de ohm:

$$V_R = \bar{R} I_R$$

Se puede aplicó el método de mínimos cuadrados y se obtuvo una aproximación de $\bar{R}$. Para poder llegar a un valor consistente se generaron 49 repeticiones de éste método y luego se promediaron estos valores, de esta forma se tiene un valor medio de la aproximacíon del verdadero valor de la resistencia, estó se hizo para el Ej b y c, pues en el a al no haber error no hay cambios al repetir el proceso.

B. Resultados

En la próxima tabla se incluyen los primeros 5 valores aproximados y posteriormente el promedio obtenido, en los archivos adjuntos (values-b.mat y values-c.mat) se pueden ver todos los valores calculados.

Ej. b	Ej. c
1.8893689700835241	1.8893689700835241
1.9458937425267899	1.9458937425267899
1.929197846439076	1.929197846439076
1.8054188637685247	1.8054188637685247
2.0941426320507293	2.0941426320507293

TABLA I. Valores de $\bar{R}$ aproximados

Ej. a	Ej. b	Ej. c
2.0036	1.889880012621626	2.0011405711954762

TABLA II. Promedios obtenidos de $\bar{R}$

Como se puede observar en el Ej. c al tomar un intervalo más pequño se tiene una mejor aproximación al valor verdadero teniendo los errores relativos porcentuales:

	Ej. a	Ej. b	Ej. c
Error	0.1800%	5.5060%	0.057029%

TABLA III. Errores relativos porcentuales de $\bar{R}$

V. EJERCICIO 3

A. Marco Teórico

Para aproximar los valores de L y C si hizo medio del método de Simpson 3/8, para integrar:

$$\int_{t_0}^{t} i_c(\tau)\, d\tau$$

y

$$\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)\, d\tau$$

Pues a partir de ecuaciones físicas conocidas se tienen las relaciones:

$$C = \frac{\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)\, d\tau}{u_c(t)} = c(t)$$

$$L = \frac{\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)}{i_L(t)}\, d\tau = l(t)$$

también:

$$i_C = i_L + i_R$$

$$u_L = u_S = u_R$$

$$u_C = u_e - u_s$$

Por lo tanto sólo integrando y despejando de las ecuaciones se pueden aproximar ambas magnitudes. Se eligió el método de Simpson 3/8 pues tiene una precisión suficiente para el caso y es facilmente implementable.

B. Resultados

Todos los datos que se resumen en la siguiente table se pueden encontrar en los archivos adjuntos.

	L	C
Promedio	0.093531236156927489	0.00023562271769011871
Error	6.46%	5.75%

TABLA IV. Errores relativos porcentuales

VI. EJERCICIO 4

A. Marco Teórico

Para poder resolver la ecuación diferencial ordinaria de orden dos que se presenta como solución a la tensión de salida $u_S(t)$ del circuito se planteó un sistema de dos ecuaciones (1 y 2) que reducen en un orden la misma, de ésta forma se pudieron aplicar los métodos de solución de EDO[1] de Euler, Taylor, Adams Bashforth y Runge Kutta.

$$\frac{\partial^2 u_S(t)}{\partial t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\partial u_S(t)}{\partial t} + \frac{u_S(t)}{LC} = \frac{\partial^2 u_e(t)}{\partial t^2}$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u_S(t_0) = 0 \\ u'_S(t_0) = A2\pi \mathrm{f} \end{cases}$$

[1]Ecuación diferencial ordinaria

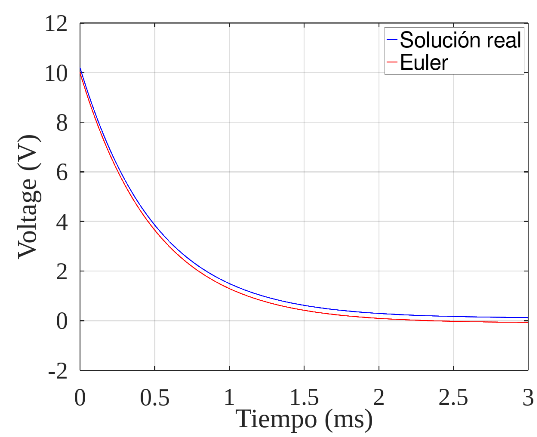
Resulta en ...

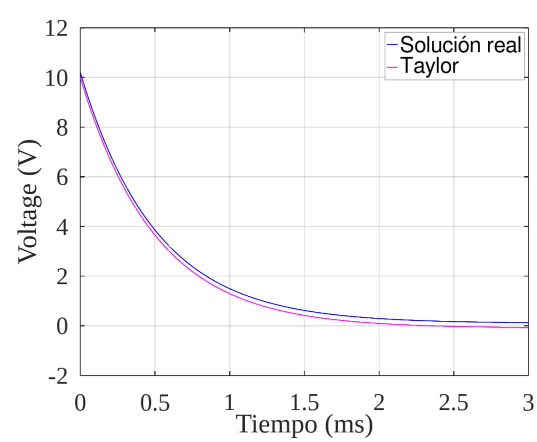
$$\begin{cases} y_0 = u_S(t) \\ y_1 = u'_S(t) = y'_0 \\ y_2 = u''_S(t) = y'_1 = y''_0 \\ y'_1 = y_2 (1) \\ y'_2 = -\frac{1}{RC} y_2 - \frac{1}{LC} y_1 (2) \\ u_S(t_0) = 0 \\ u'_S(t_0) = A2\pi \mathrm{f} \end{cases}$$

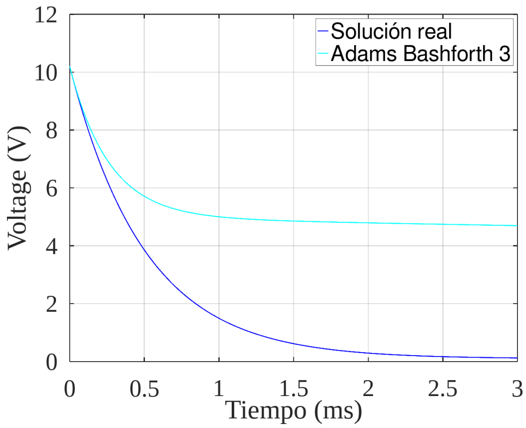
La forma en que se resulven estas dos nuevas EDOs es pasando como primer valor para y_0 e y_1 las condiciones iniciales, $u_S(t_0)$ y $u'_S(t_0)$ respectivamente, y luego se deben resolver en simultáneo, aplicando el método que se quiera; pues al ser un sistema de ecuaciones ambas se relacionan, y de otra forma no se podrían resolver.

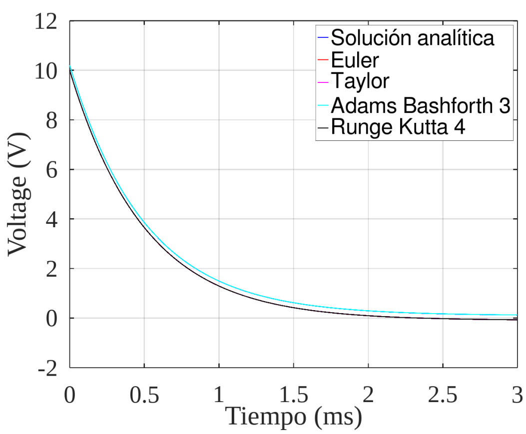
B. Resultados

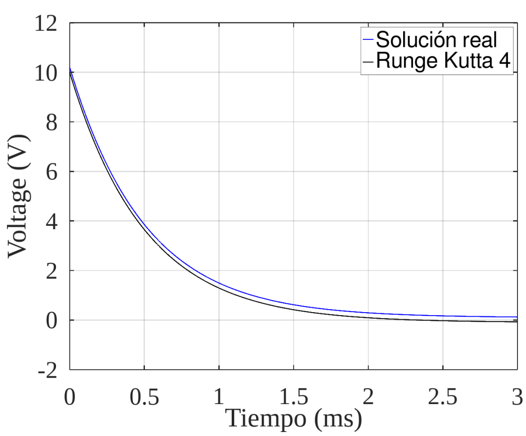
Como se pueden observar en los siguientes gráficos los métodos convergen de forma muy similar a exepcíon de Adams Bashforth que tiene un clara divergencia.

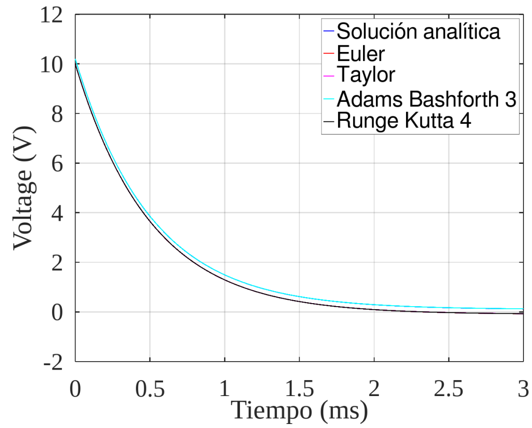




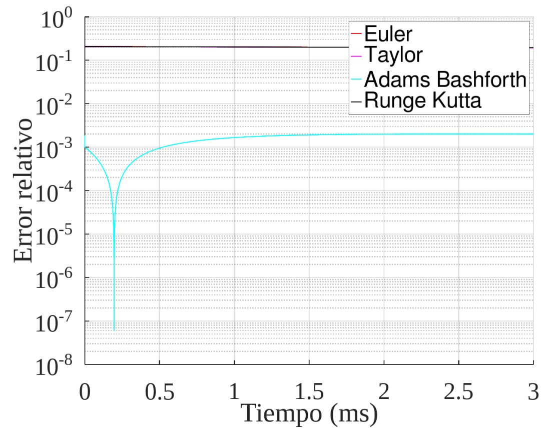


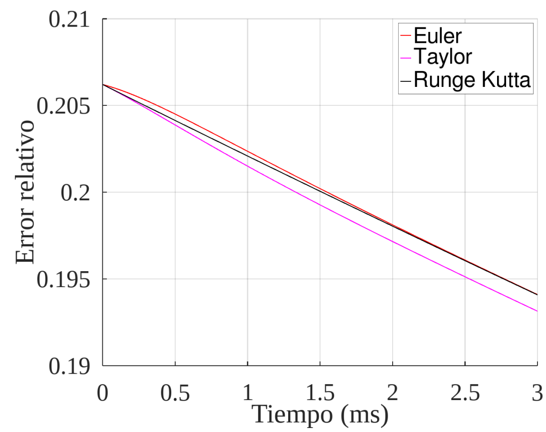






Con los errores relativos porcentuales…





En conclusión el mejor método para las condiciones presentes es el de Taylor de orden 2, pues converge con menos error.

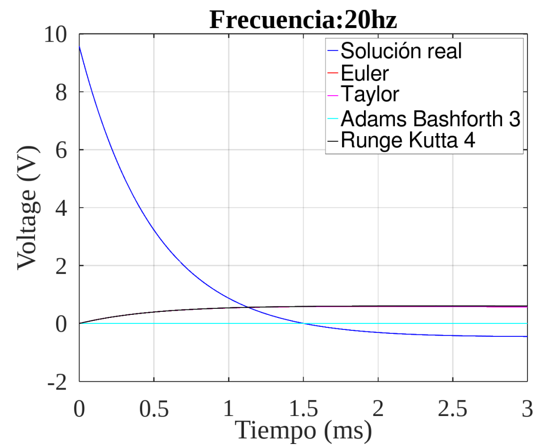
VII. Ejercicio 5

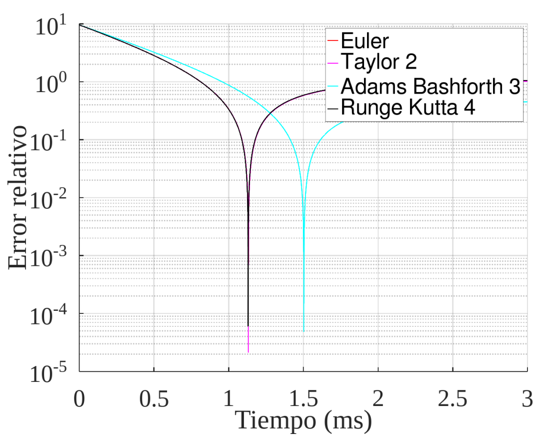
A. *Marco Teórico*

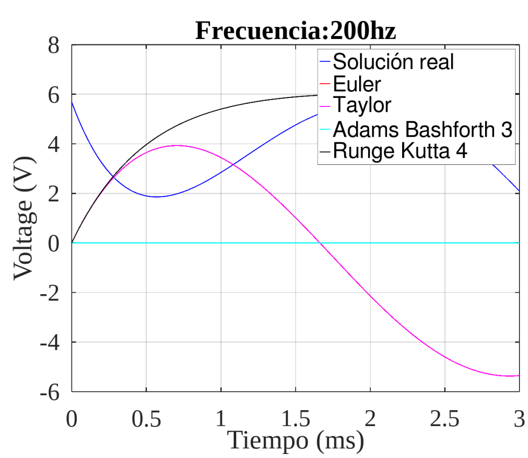
Basandonos en el mismo marco teórico que en el Ejercicio 4 se resuelve la EDO (que ahora es no homogénea) con el sistema de EDOs, por lo cual la solución analítica es diferente, aunque la solucioón numérica se obtenga con los mismos algoritmos desarrollados en octave previamente (solo se hacen modificaciones para poder calcular más facilmente el resultado ante la variación de frecuencias).

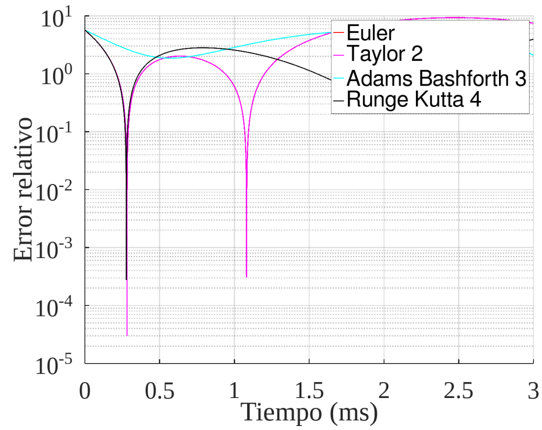
B. Resultados

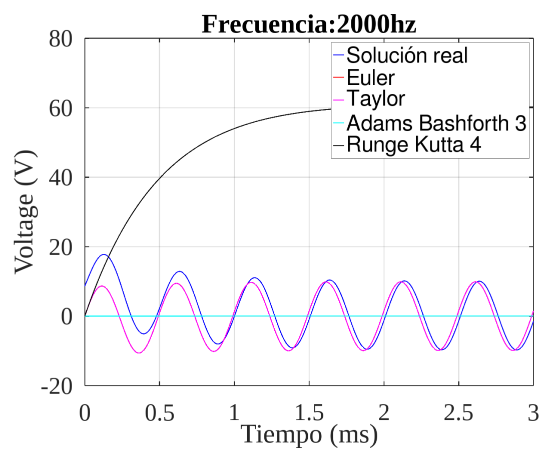
En los siguientes gráficos se muestran cómo los métodos aproximan la solución analítica para 20hz, 200hz, 2000hz y 20000hz. Con ésto se espera observar el comportamiento de los métodos ante estas variaciones de frecuencia.

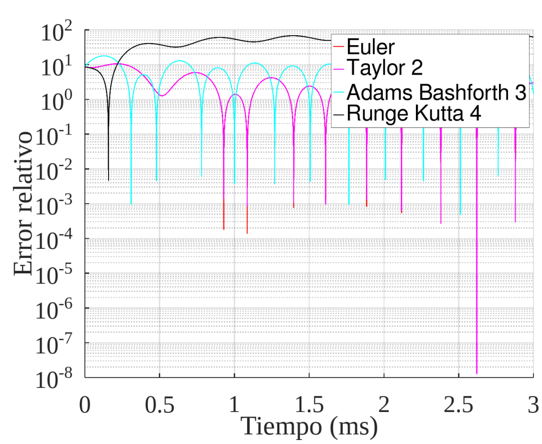


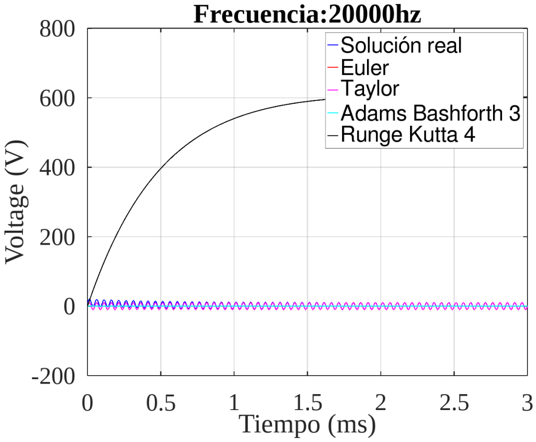


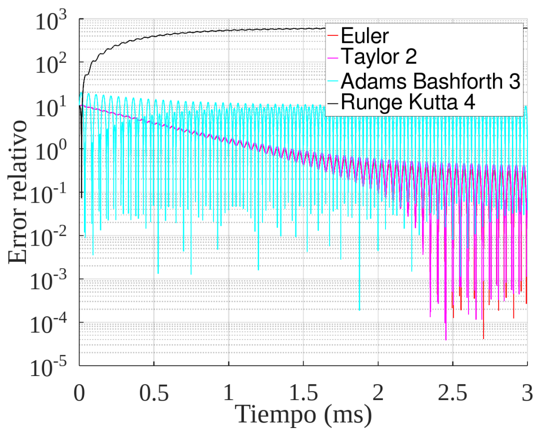




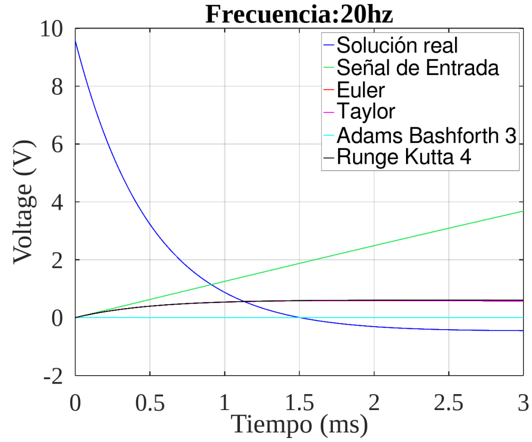


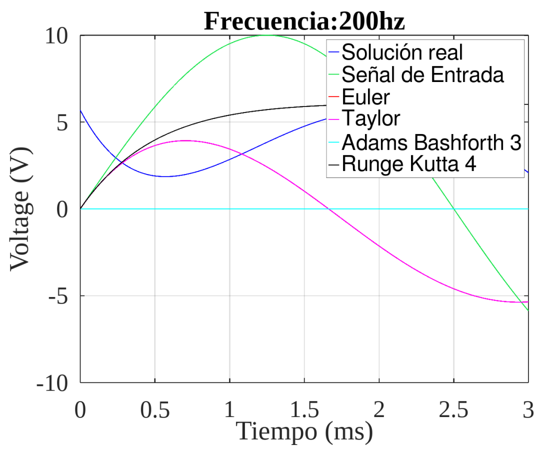


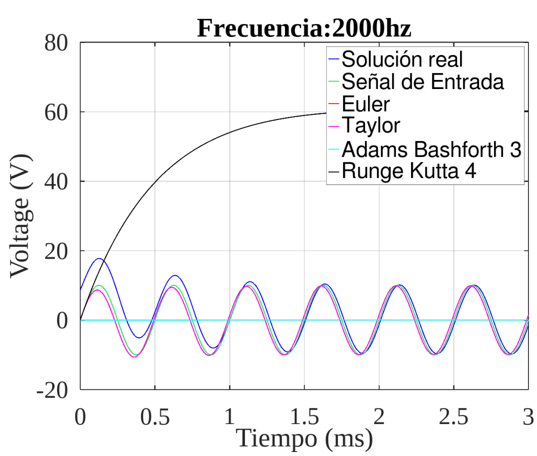


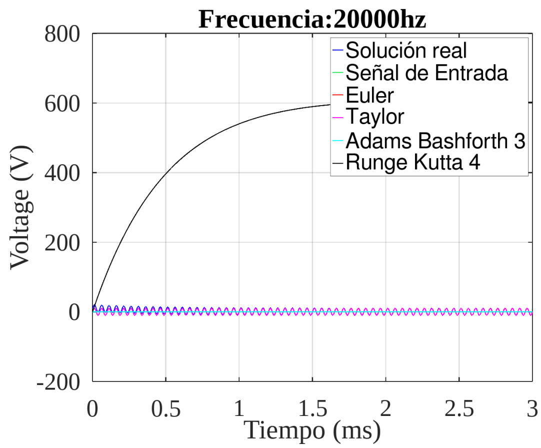


Con estos gráficos podemos ver que el método de Runge Kutta 4 termina divergiendo para frecuencias altas, además Euler y Taylor de orden 2 son superiores a Adams Bashforth para todas las frecuencias estudiadas, y que Taylor sigue siendo el mejor método entre estos cuatro, presentando menos error relativo porcentual, aunque, es superior al resto por 'poco' error, por lo que Euler no es para nada una mala alternativa, ya que es más fácil de implementar que Taylor de orden 2, porque no requiere el cálculo de otra derivada, y tiene menor cálculo computacional, por éstas razones, dependiendo de cúal sea el objetivo, Euler puede llegar a ser muy buena solución. Ahora para estudiar el comportamiento del circuito ante la variación de frecuencias se muestran en los siguientes gráficos la comparativa de la señal de entrada $u_e(t)$ con respecto de la señal de salida.









Como se observan en estos gráficos efectivamente la señal de salida se ve atenuada (menor voltage) para las frecuencias de entrada bajas, y que como se mencionó anteriormente el método de Runge Kutta no nos sirve para expresar el comportamiento del circuito, pues diverge. Esto se deduce a partir de que en las frecuencias bajas el voltage máximo que se observa en la salida es cuantitativamente menor y, para frecuencias altas, la señal de salida se comporta prácticamente como la de entrada.

REFERENCES

[1] Richard L. Burden, Análisis Numérico, décima edición, 2017.
[2] Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers, sixth edition, 2010.