



CAPÍTULO 3

CUADRADO DEL BINOMIO

JUAN D BELTRÁN, HELENA CAMARGO, PAOLA LÓPEZ, STELLA
MARTÍNEZ Y MARÍA C. CAÑADAS

1. INTRODUCCIÓN

Cuatro colegas diseñamos la unidad didáctica del cuadrado del binomio, como estudiantes de la maestría en educación de la Universidad de los Andes (MAD2) y orientadores del área de matemáticas de secundaria en instituciones educativas de carácter oficial en el departamento de Cundinamarca, Colombia. Tres de las cuatro instituciones están ubicadas en el municipio de Cajicá: Institución Educativa Departamental Antonio Nariño (IED Antonio Nariño), Institución Educativa Departamental Pablo Herrera (IED Pablo Herrera) y la Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez (IED Pompilio Martínez). La cuarta institución está ubicada en la zona rural del municipio de Nemocón: Institución Educativa Rural Departamental Patio Bonito (IERD Patio Bonito). La doctora María C. Cañadas, profesora de la Universidad de Granada (España), fue nuestra tutora durante los dos años que duró el programa de formación.

Escogimos el cuadrado de un binomio como tema, teniendo en cuenta el tiempo académico en que la unidad didáctica debía ser implementada en una de las cuatro instituciones en las que los miembros del grupo trabajamos. De acuerdo con el tema y lo dispuesto en los estándares de competencias (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006), así como en los lineamientos curriculares para matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998), el grado propicio para desarrollar la unidad didáctica del tema escogido es el grado octavo de la educación básica secundaria colombiana. La unidad didáctica contiene cinco tareas que pretenden activar en el estudiante capacidades para aplicar el cuadrado de un binomio en el cálculo de áreas cuadradas y circulares. Estas capacidades se refieren a observar, analizar e interpretar regularidades a partir de expresiones algebraicas resultantes de la recomposición de regiones rectangulares haciendo uso de rompecabezas algebraicos, y a solucionar problemas, comunicar respuestas y conclusiones dando paso a la argumentación y al fortalecimiento del uso del lenguaje formal matemático.

Una de las inquietudes de los profesores de matemáticas es enseñar el álgebra de forma diferente a la convencional. Muchos profesores usan un esquema en el que se describe un algoritmo para que los estudiantes lo reiteren cientos de veces a través de la ejercitación, sin darle un sentido de aplicación, ya sea dentro de las mismas matemáticas, o en otras disciplinas. Nuestra pretensión es construir el concepto del binomio al cuadrado haciendo uso de los conceptos previos de los estudiantes, especialmente del área de regiones rectangulares y circulares, puesto que el campo de la geometría permite evidenciar conceptos que en la matemática formal no son tangibles.

La unidad didáctica se implementó en la IED Pompilio Martínez del municipio de Cajicá. Este centro alberga 1600 estudiantes y se encuentra ubicado en el nivel superior, de acuerdo con los resultados obtenidos por los estudiantes que cursan el último grado de educación media en las pruebas Saber 11. Cuenta con tres aulas de informática con servicio de Internet, biblioteca y salas de audiovisuales dotadas con video beam. En la institución, se desarrollan proyectos de cualificación académica en convenio con el Colegio Mayor de los Andes en bilingüismo y con el Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA) en gestión ambiental. Además, los profesores del departamento de matemáticas reciben capacitación constante en geometría aplicada haciendo uso del programa Cabri.

Los estudiantes con quienes se implementó la unidad didáctica pertenecían al grado 804 de la institución en el año 2013. Sus edades oscilaban entre los 12 y 15 años. Los estudiantes pertenecían a los niveles 1 y 2 del Sistema de Identificación de Potenciales Beneficiarios de Programas Sociales (SISBÉN). La mayoría de los padres de estos estudiantes han culminado el bachillerato y algunos poseen título profesional. Ellos son empleados de empresas que funcionan en el municipio o municipios cercanos. Otros son propietarios de pequeños negocios.

Al desarrollar las tareas propuestas en la unidad didáctica, los estudiantes aprendieron a trabajar en grupo; a respetar la opinión y el argumento del otro; a colaborar con compañeros que presentaban dificultades; a utilizar el lenguaje matemático para expresar sus ideas; y a aplicar el cuadrado de un binomio para resolver situaciones contextualizadas en el campo de la geometría. Sin embargo, algunos presentaron dificultades con el manejo de expresiones algebraicas que representaban el área, la medida del lado, y la relación entre las medidas de superficie y de longitud. Estas dificultades están asociadas con los conceptos previos de cálculo de áreas, de reducción de términos semejantes y de ley de signos.

En este capítulo, presentamos el proceso de diseño e implementación de la unidad didáctica del cuadrado de un binomio para grado octavo. Iniciamos con la descripción de los análisis previos (análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción) a la implementación que permitieron producir el primer diseño de la unidad didáctica del tema. Seguidamente, detallamos el trabajo realizado en el análisis de actuación, con el cual iniciamos a reevaluar analizamos aspectos del diseño implementado de acuerdo con los resultados obtenidos por los estudiantes. Justificamos el nuevo diseño de la unidad didáctica con base en los resultados de esos análisis. Por último, concluimos con algunas reflexiones sobre la experiencia vivida a lo largo del proceso.

2. DISEÑO PREVIO

Fundamentamos el diseño previo de la unidad didáctica en los componentes del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación), y lo justificamos desde la función de las tareas, su contribución a las expectativas de aprendizaje y superación de dificultades. El análisis didáctico nos permitió abordar el tema en cuatro etapas (la conceptual, la cognitiva, la de instrucción y la de actuación) en pos de planificar una secuencia de actividades que parten de unos conceptos previos y pretenden contribuir al logro de unas expectativas de aprendizaje. Posteriormente, implementamos esas actividades y evaluamos tanto el diseño, como su implementación. A continuación, presentamos y justificamos el diseño previo de nuestra unidad didáctica con base en el análisis didáctico que realizamos del tema.

1. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Como lo definen Cañas y Gómez (2012, p. 1), el análisis de contenido “concierne a la dimensión conceptual de las matemáticas en el nivel de planificación local y proporciona herramientas para analizar los temas de las matemáticas escolares e identificar y organizar su multiplicidad de significados”. Este análisis se aborda desde la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología, que describimos a continuación.

1.1. Estructura conceptual

La estructura conceptual de un tema son todos aquellos conceptos, procedimientos implicados en tema y la relación entre ellos (Cañas y Gómez 2012). Para el binomio de la forma $(a \pm b)^2$, ubicamos el tema dentro de un entorno matemático. Para ello, identificamos elementos del campo conceptual y procedural de las expresiones algebraicas llamadas productos notables.

Campo conceptual

Dentro del campo conceptual se encuentran todos aquellos hechos, conceptos y estructuras matemáticas que permiten el desarrollo del tema. Entre otros, tenemos hechos como la notación (2, $a^2 = a \cdot a$, $+,-, x^n, (), a \pm b, x \pm y, -z, a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots n \text{ veces}$), la terminología (coeficiente, exponente, símbolo, variable, igualdad, suma, resta, producto, potencia), los convenios (pro-

piedades de la potenciación, potencia como producto de factores iguales, propiedades de la multiplicación, especialmente la de binomios) o los resultados (toda expresión elevada al cuadrado es positiva, el área de una región cuadrada se puede representar mediante el cuadrado de una suma). Dentro de los conceptos, tenemos la noción de variable, la adición y sustracción de monomios, y términos semejantes, entre otros. Finalmente, dentro de las estructuras están las expresiones algebraicas y los productos notables.

Campo procedimental

En el campo procedimental, se encuentran todas las destrezas, razonamientos y estrategias necesarios para el abordaje del tema. Entre las destrezas, encontramos las siguientes: reconocer variables, saberlas operar (adición, sustracción, multiplicación), e identificar igualdades entre dos expresiones. Los tipos de razonamiento necesarios son el inductivo (inferir la generalización a partir de hechos numéricos), el deductivo (aplicación de las propiedades de las operaciones en el desarrollo de cada producto notable $(a + b)^2$) y el figurativo (representación geométrica de superficies cuadradas). Por último, las estrategias que se utilizan son las siguientes: solución de situaciones problemáticas cotidianas donde intervengan diferentes magnitudes (relación entre edades, dimensiones de un rectángulo, costo de diferentes productos) para llegar al concepto de variable; solucionar binomios partiendo de los conceptos previos de operaciones algebraicas; y la descomposición geométrica de regiones cuadradas en superficies de dimensiones conocidas.

Relaciones entre los campos conceptual y procedimental

En la figura 1, presentamos un mapa conceptual que muestra las relaciones entre los elementos del campo conceptual y el campo procedimental de nuestro tema. En particular, mostramos las relaciones del producto notable con las operaciones entre expresiones algebraicas, con el concepto de variable y, por último, con el desarrollo de potencias.

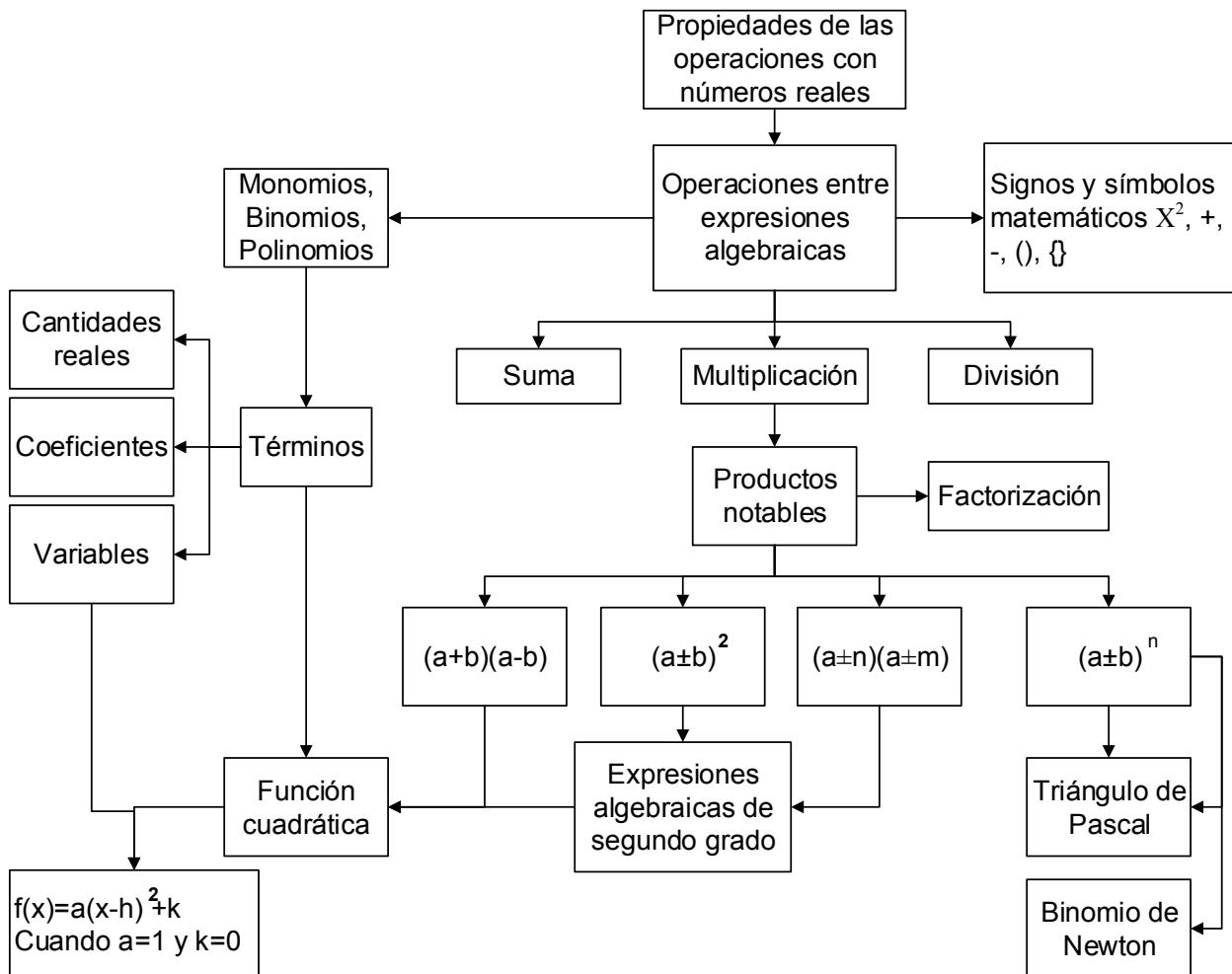


Figura 1. Estructura conceptual de la estructura matemática del cuadrado de un binomio

En la figura 2, mostramos las operaciones que se utilizan en el desarrollo de los productos notables. Estas operaciones se basan en las propiedades de las operaciones entre números reales: las propiedades distributiva, commutativa y asociativa, y el producto de factores iguales. Además, incluimos conceptos como la noción de variable, que requieren de razonamientos sobre la generalización de valores (razonamiento deductivo) o el desarrollo de operaciones (razonamiento inductivo).

Para el desarrollo del cuadrado de un binomio, se parte del manejo de conceptos que corresponden a términos como coeficiente, variable y exponente. Se aplican convenios de la potencia, como el producto de factores iguales. Las siguientes destrezas son fundamentales: saber operar (adición, sustracción, multiplicación y potenciación) con expresiones algebraicas; saber utilizar adecuadamente las propiedades de estas operaciones; y saber calcular áreas rectangulares y circulares, teniendo en cuenta que es la forma más práctica de evidenciar este producto.

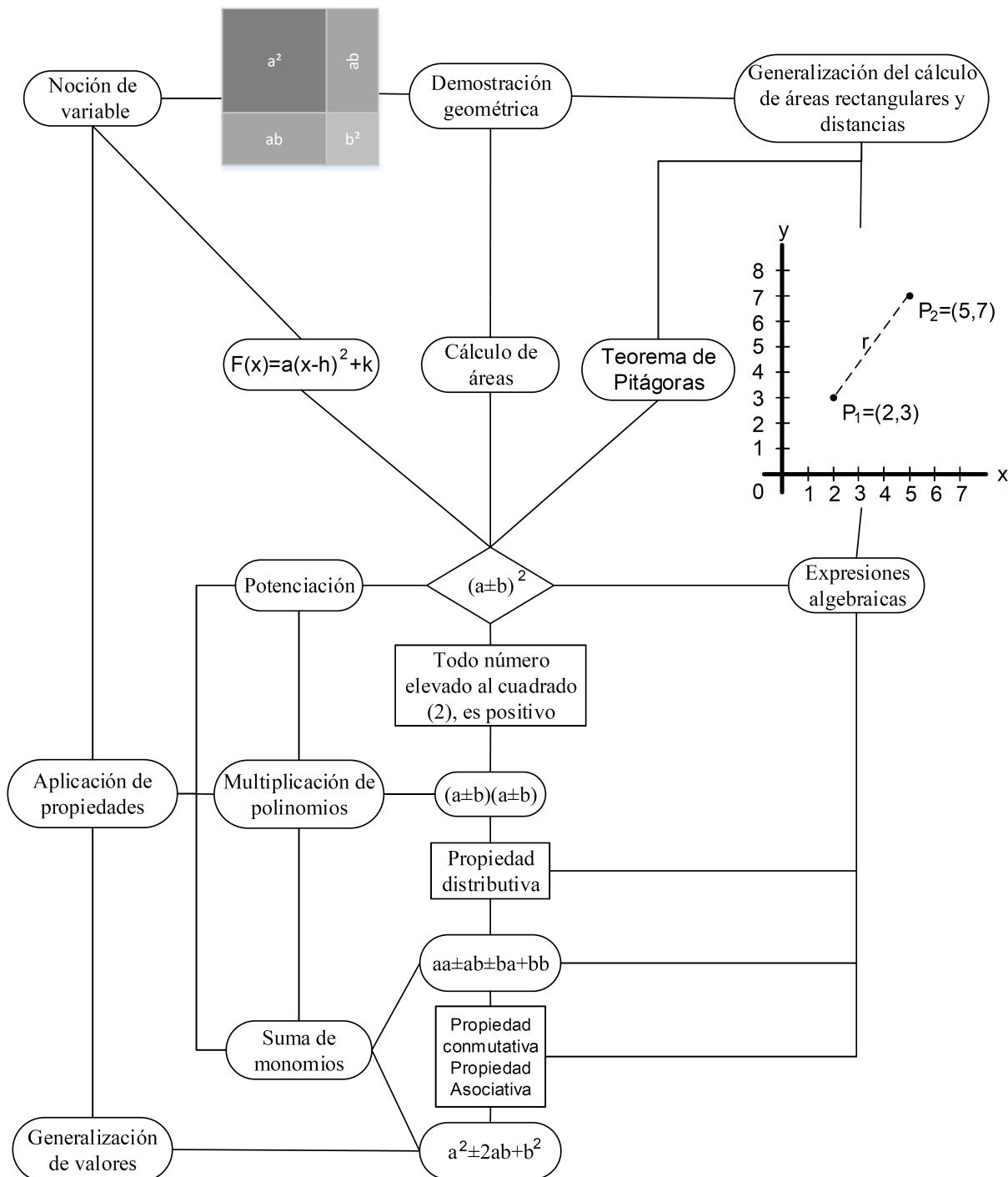


Figura 2. Estructura conceptual del cuadrado de un binomio

1.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación permiten expresar de diferentes formas un mismo concepto. Por esta razón, cuanta mayor cantidad de representaciones se tengan de un concepto, mayores oportunidades de comprensión del mismo se pueden ofrecer. Además, según Cañasas y Gómez (2012), dentro de cada sistema de representación se pueden identificar cambios en los signos del sistema de representación en los que el objeto matemático puede cambiar o no (transformaciones sintácticas) o la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación (traducciones).

Los sistemas de representación simbólico, numérico, geométrico, tabular, manipulativo, verbal y gráfico son relevantes para el cuadrado de un binomio. En la figura 3, presentamos estos sistemas de representación, las posibles transformaciones sintácticas y las traducciones que se pueden establecer entre ellos. Para indicar cada uno de estos aspectos hacemos uso de una línea diferente. La línea continua indica los diferentes sistemas de representación, la línea discontinua muestra las posibles traducciones entre sistemas de representación y la línea punteada las transformaciones sintácticas invariantes que se establecen dentro del mismo sistema de representación.

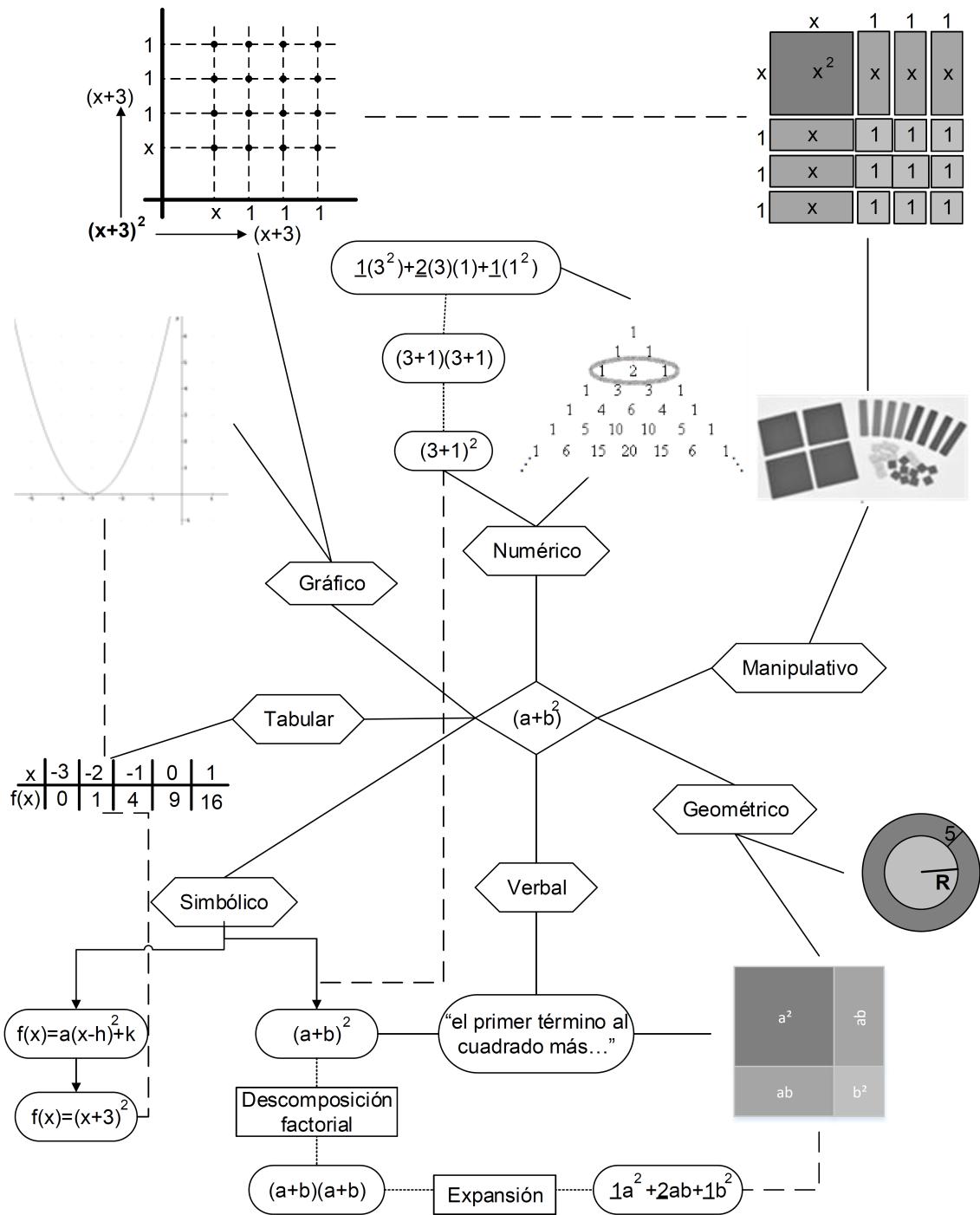


Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación del binomio al cuadrado

Si se tiene en cuenta que el cuadrado de cualquier expresión se puede descomponer en dos factores iguales, podemos escribir la expresión como $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$. A partir de esta expresión y haciendo uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y/o la sustracción, se tiene que $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2$. Al aplicar la propiedad asociativa y el convenio de reducción de términos semejantes, se obtiene finalmente la expresión $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Lo anterior permite evidenciar que existen tres equivalencias entre cuatro expresiones. Estas equivalencias corresponden a las transformaciones sintácticas invariantes de nuestro objeto de estudio. En la figura 4, mostramos las transformaciones sintácticas para el caso particular de $(x + 3)^2$ y $(x - 3)^2$.

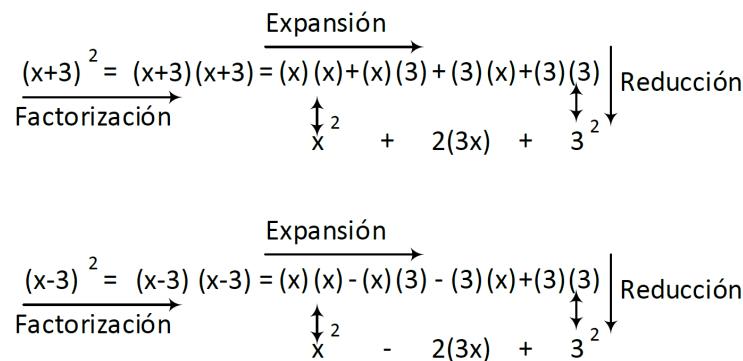


Figura 4. Transformaciones sintácticas

1.3. Fenomenología

En el análisis didáctico, la fenomenología se define como “elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto” (Gómez, 2007, p. 50).

Fenómenos

Los fenómenos son situaciones que dan sentido al cuadrado de un binomio en el contexto de resolver un problema. Algunos ejemplos para nuestro tema son los siguientes.

- ◆ Hallar el área regiones cuadradas de campos de fútbol sala y futbol.
- ◆ Cálculo del área de un frisbee.
- ◆ Desarrollo de la fórmula para hallar el área de círculos concéntricos.
- ◆ Cálculo de la distancia entre dos puntos ubicados en el plano.
- ◆ Cálculo del interés compuesto.

Contextos y subestructuras

Según Gómez (2007, p. 55), “usamos entonces el término contexto de un tema de las matemáticas escolares para referirnos a la agrupación de todos los fenómenos que comparten una

misma característica estructural” y las subestructuras son características comunes de los fenómenos pero relacionados con una parte de la estructura matemática. Un ejemplo del contexto de cálculo de áreas circulares está relacionado con el área de un frisbee cuyo radio es $(x + 3)$. En el caso concreto, en el que $x = 10$ podemos calcular el área del frisbee al aplicar la fórmula $A = \pi(x + 3)^2$ y desarrollar el cuadrado del binomio así: $(a \pm b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} A &= \pi(x + 3)^2 = \pi(10 + 3)^2 = \pi(10 + 3)(10 + 3) = \pi(10)^2 + 2(10)(3) + 3^2 \\ &= \pi(100 + 60 + 9) = 169\text{cm}^2\pi \end{aligned}$$

Relacionamos los demás fenómenos, contextos y sus respectivas subestructuras del tema en la figura 5.

Subestructuras	Contextos	Situaciones				Fenómenos
		Educativa	Laboral	Pública	Científica	
Producto de binomios	Áreas					Terrenos Frisbee Círculos Concéntricos
Teorema de Pitágoras	Distancias					Cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano.
Ecuación canónica de la función cuadrática	Variación de la posición respecto al tiempo					Movimiento rectilíneo acelerado Movimiento Parabólico Movimiento armónico

Figura 5. Esquema de fenomenología

En el esquema de la figura 5, podemos identificar la relación que existe entre las subestructuras, los contextos y las situaciones que se presentan dentro de la estructura objeto de nuestro estudio y que corresponde al producto de la forma $(a \pm b)^2$. Por ejemplo, dentro de los fenómenos que están ubicados en la subestructura del binomio al cuadrado de la forma $(a - b)^2$, encontramos el cálculo de áreas de terrenos. Este fenómeno se vincula con una situación escolar, pero también se puede relacionar con una situación laboral según la clasificación PISA (OCDE, 2005, pp. 41-42). El cálculo de áreas de círculos concéntricos se relaciona con una situación escolar en el contexto de cálculo de áreas circulares. Por otro lado, bajo la subestructura del binomio al cuadrado de la forma $(a + b)^2$, identificamos, como fenómenos, los relacionados con el cálculo del área

de un frisbee, que se encuentra dentro de una situación escolar, en el contexto de áreas de regiones circulares.

Entre la fenomenología y los sistemas de representación se da una estrecha relación, puesto que muchos de los fenómenos en los que se puede aplicar el concepto, son visibles gracias a sus diferentes representaciones. La relación entre la fenomenología y la estructura conceptual se da entre la subestructura matemática presente en la fenomenología y los conceptos que tienen incidencia en la estructura conceptual del cuadrado de un binomio. En la figura 6, presentamos las relaciones existentes entre los fenómenos, sistemas de representación y estructura conceptual. Los fenómenos se encuentran dentro de las cajas con un lado curvo. Los sistemas de representación dentro de hexágonos y la estructura conceptual dentro de rombos.

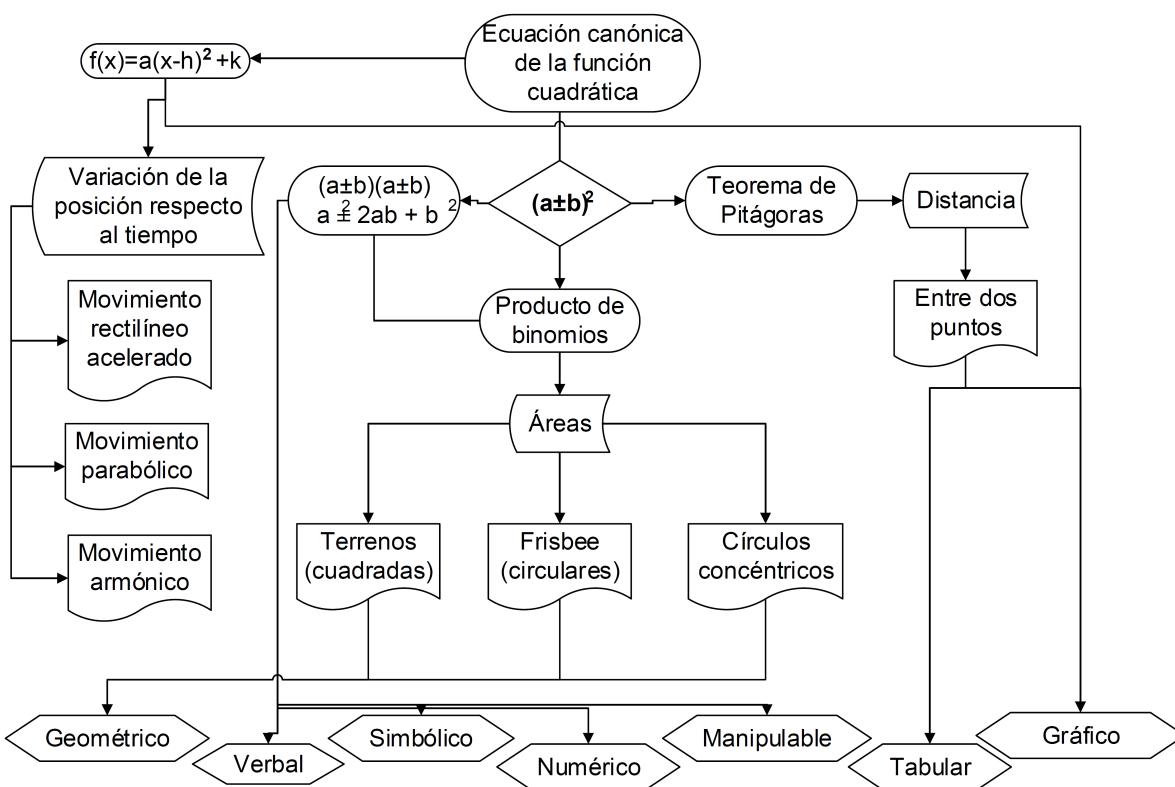


Figura 6. Mapa conceptual de fenomenología para el cuadrado de un binomio

En la figura 6, podemos observar la relación de la estructura matemática del producto notable de la forma $(a \pm b)^2$ con las tres subestructuras que consideramos más relevantes para el tema, con sus respectivos contextos y fenómenos. Además, en esta figura recogemos las relaciones entre los sistemas de representación y las diferentes subestructuras. Por ejemplo, en el caso de las áreas, su relación más directa está dada por el sistema de representación geométrico, sin olvidar que se conecta con los demás sistemas de representación. Por último, las transformaciones sintácticas del objeto matemático se reconocen en el sistema de representación simbólico principalmente.

2. ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo se centra en aspectos relacionados con el aprendizaje del estudiante. “Se trata de hacer una descripción de las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático en cuestión y sobre sus previsiones acerca del modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje” (González y Gómez 2013, p. 1). En este análisis, establecemos las competencias, los objetivos de aprendizaje y las capacidades que queremos que desarrollen los estudiantes con el trabajo de nuestro tema. También describimos nuestras hipótesis sobre cómo los estudiantes progresarán en su aprendizaje con motivo de las tareas que les propondremos.

2.1. Competencias y objetivos de aprendizaje

En este apartado, presentamos una definición de competencia, el listado de las competencias de aprendizaje que se relacionan con nuestro tema, la definición de objetivo de aprendizaje, y nombramos los objetivos y las expectativas afectivas que proponemos en nuestra unidad didáctica.

Competencias

Según Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006), una competencia es un

conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase. (p. 49)

Con base en los documentos de lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998) y el estudio PISA (OCDE, 2005, p. 40), identificamos cuatro competencias fundamentales para nuestro trabajo.

K1. Formular, plantear y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana y de otras ciencias aplicando los productos notables.

K2. Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones básicas entre expresiones algebraicas.

K3. Representar las operaciones básicas entre expresiones algebraicas haciendo uso de los diferentes sistemas de representación.

K4. Comprender e interpretar los enunciados orales y escritos de otras personas.

Objetivos de aprendizaje

El análisis del contenido de nuestro tema nos permitió establecer tres objetivos de aprendizaje que concretan nuestras expectativas sobre la comprensión del desarrollo y aplicación del binomio al cuadrado, en términos de las competencias anteriores. Un objetivo de aprendizaje se caracteriza por estar vinculado a un nivel educativo concreto, estar asociado a un contenido matemático

concreto y expresar una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario (González y Gómez 2013, p. 5). De acuerdo con estas condiciones, formulamos tres objetivos relacionados con el cuadrado de un binomio.

Objetivo 1. Expresar el área de diferentes regiones rectangulares aplicando el cuadrado de un binomio.

Objetivo 2. Representar de diversas formas el resultado del producto notable de la forma $(a \pm b)^2$.

Objetivo 3. Solucionar problemas, a partir de situaciones cotidianas, aplicando los productos notables.

Descripción de las tareas

Para describir estos objetivos, diseñamos cinco tareas. En la tabla 1, presentamos las tareas que contribuyen a cada uno de los objetivos.

Tabla 1

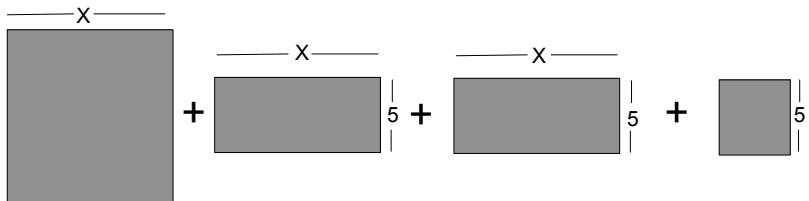
Tareas que contribuyen a cada objetivo

Objetivos	Tareas
1	Rompecabezas
	Testamento
2	Operando
	La Granja
3	Testamento
	Contenedor

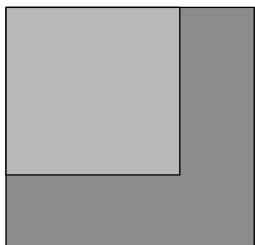
En la tarea Operando, proponemos el desarrollo de productos entre binomios iguales, con el uso de fichas algebraicas. Registramos los resultados en una tabla para, posteriormente, hacer un análisis de estos resultados. Así, partiendo del producto de expresiones algebraicas pretendemos llegar al producto notable. En la tarea Testamento, damos instrucciones para que, al partir de un cuadrado y dividirlo en regiones rectangulares, se llegue al cuadrado de la diferencia. Luego, presentamos un problema que esperamos que los estudiantes solucionen con la aplicación del cuadrado de la diferencia. La tarea La Granja requiere de la utilización de un software educativo para hallar la solución a una situación planteada. El Contenedor es la última de las tareas que proponemos y pretende solucionar un problema con la aplicación del producto notable. Presentamos en detalle la tarea Rompecabezas, para facilitar la interpretación del análisis cognitivo de cada una de las tareas. Las demás tareas se presentan en el anexo 1.

Trabajo individual

- a. Expresar la suma de las áreas de los rectángulos.

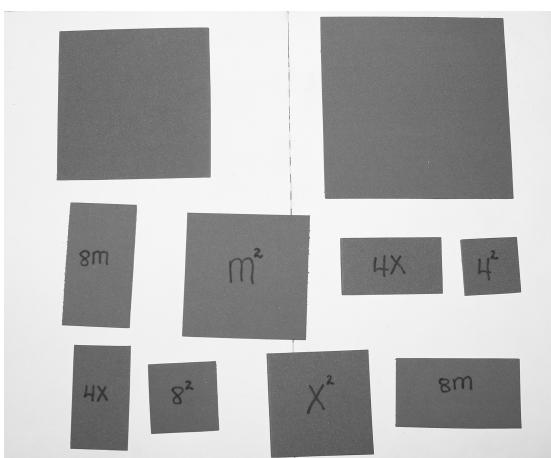


- b. Utilizar los rectángulos del literal (a) para cubrir completamente el cuadrado que aparece a continuación. ¿Cuál es su área?



Trabajo colaborativo

- a. En grupos de tres personas, comparar los resultados obtenidos en los literales anteriores. ¿Qué diferencias y similitudes se pueden encontrar en esos resultados?
 b. Utilizar las fichas correspondientes para recubrir completamente cada uno de los siguientes cuadrados. Recordar que para cada cuadrado existe un único juego de fichas.



- c. Escribir la expresión para el área de cada cuadrado obtenido y la dimensión del lado de cada uno.
 d. Escribir simbólicamente una expresión que relacione el lado del cuadrado y el área obtenida.
 e. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $(a + b)^2$?

f. Realizar una presentación en Power Point para socializar ante los demás compañeros el trabajo desarrollado.

2.2. Secuencias de capacidades, caminos de aprendizaje y dificultades asociadas

En este apartado, presentamos las secuencias de capacidades, los caminos de aprendizaje asociados a estas secuencias de capacidades y las dificultades que se pueden presentar al desarrollar las tareas propuestas.

Capacidades

Una capacidad se define como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático (González y Gómez 2013, p. 10). Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes. En la tabla 2, presentamos la lista de capacidades que surgieron del análisis de las tareas propuestas.

Tabla 2

Listado de capacidades

C.	Capacidad
C1	Infiere una generalización a partir de resultados obtenidos
C2	Reconoce un producto notable de la forma $(a \pm b)^2$
C3	Expresa el cuadrado de un binomio como el producto de dos binomios iguales
C4	Aplica el algoritmo verbal, para hallar el resultado del cuadrado de un binomio (suma y resta)
C5	Justifica el porqué de cada uno de los signos del trinomio cuadrado, aplicando las propiedades de las operaciones entre expresiones algebraicas
C6	Traduce un enunciado verbal como el cuadrado de un binomio
C7	Utiliza el triángulo de Pascal para hallar los coeficientes para un binomio a la n-ésima potencia
C8	Utiliza la técnica del Binomio de Newton para hallar los coeficientes para un binomio a la n-ésima potencia
C9	Identifica procedimientos reiterativos en la solución de situaciones donde se aplica el cuadrado de un binomio
C10	Relaciona el resultado obtenido con los datos del binomio inicial
C11	Aplica el cuadrado de un binomio en la resolución de problemas
C12	Distribuye cada uno de los factores en forma de filas y columnas, para el trabajo con fichas
C13	Representa los términos de un binomio, al iniciar el trabajo con las fichas algebraicas
C14	Elige y ubica cada una de las fichas algebraicas, teniendo en cuenta los lados de las fichas adyacentes
C15	Reduce términos semejantes haciendo uso de las fichas algebraicas

Tabla 2
Listado de capacidades

C.	Capacidad
C16	Expresa el resultado obtenido en las fichas de forma simbólica
C17	Asocia la distribución de fichas a un producto notable
C18	Representa gráficamente una expresión algebraica
C19	Asocia una representación geométrica a un producto notable
C20	Reduce términos semejantes
C21	Expresa la suma o diferencia de longitudes como una expresión algebraica
C22	Expresa el área de regiones rectangulares en términos del binomio al cuadrado
C23	Aplica el algoritmo de la multiplicación entre expresiones algebraicas para calcular el cuadrado de un binomio
C24	Identifica elementos claves presentados en el enunciado del problema, para la solución de este
C25	Halla una expresión algebraica, a partir de la representación gráfica de una situación
C26	Concluye que se puede obtener el mismo resultado aplicando diferentes herramientas
C27	Argumenta diferentes procesos aplicados para la obtención de un resultado
C28	Registra resultados obtenidos, en tablas
C29	Aplica la propiedad de la potenciación, al calcular el área de un cuadrado y/o círculo
C30	Aplica el algoritmo de la multiplicación de expresiones algebraicas, para calcular áreas de rectángulos y/o círculos
C31	Utiliza puzzles algebraicos para recomponer áreas de figuras rectangulares
C32	Calcula el área de un cuadrado mediante la recomposición de figuras
C33	Relaciona una expresión simbólica, al área calculada mediante la recomposición de figuras, teniendo en cuenta el área de cada ficha que conforma el puzzle algebraico
C34	Relaciona simbólicamente, el lado del cuadrado y el área obtenida en la recomposición del cuadrado
C35	Expresa en forma verbal, el trinomio resultante del cuadrado de un binomio
C36	Relaciona el producto obtenido entre dos binomios (utilizando las fichas), con áreas de regiones rectangulares
C37	Maneja las propiedades básicas del software geogebra, como herramienta para representar situaciones geométricas, bajo condiciones específicas
C38	Utiliza conceptos previos en la construcción de figuras geométricas

Nota: C. = capacidad

Dificultades

Según Socas (1997, p. 35),

las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las matemáticas que se manifiestan en sus simbolismos y en sus procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales.

Cuando el estudiante incurre en errores, pone en evidencia dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas. En la tabla 3, relacionamos los errores en los que posiblemente pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea rompecabezas y que, de acuerdo con las categorías establecidas por Socas (1997, p. 7), se asocian con la dificultad para relacionar diferentes sistemas de representación del cuadrado de un binomio (D2). El listado completo de errores y dificultades se encuentra en el anexo 2.

Tabla 3

Errores relacionados con la dificultad para relacionar diferentes sistemas de representación

E.	Error
E2.4	Expresa el área de cada una de las fichas del puzzle algebraico, pero no la suma de las mismas, para generar una expresión simbólica para el área del cuadrado recompuesto
E2.5	Expresa simbólicamente áreas de rectángulos iguales, sin reducirlas a una sola expresión
E2.6	Asume las expresiones simbólicas que representan cada una de las áreas y las reduce a un monomio
E2.7	Acomoda las fichas para recubrir figuras rectangulares, sin tener en cuenta las dimensiones de sus áreas
E2.8	Expresa simbólicamente, la relación entre la longitud del lado del cuadrado y el área obtenida de forma incorrecta

Nota: E. = error

Grafos de secuencias de capacidades

Al abordar una tarea, los estudiantes pueden activar secuencias de capacidades. Estas secuencias de capacidades se pueden representar en un grafo en el que se pueden incluir los errores en los que se prevé que los estudiantes pueden sufrir. En este apartado, presentamos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea Rompecabezas, construido con base en las capacidades que el docente prevé que los estudiantes activen al desarrollarla (figura 7).

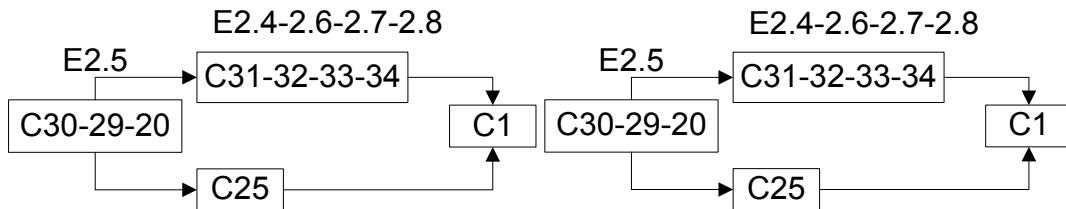


Figura 7. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea Rompecabezas

El grafo de secuencias de capacidades propuesto para la tarea Rompecabezas presenta unas secuencias de capacidades que empiezan por la utilización del algoritmo de la multiplicación, y el manejo y la aplicación del concepto de potencia. La siguiente secuencia de capacidades activa la utilización de material para hallar áreas, la correspondencia entre distintos sistemas de representación y la relación entre la medida de longitudes y/o áreas y una expresión algebraica. Al finalizar la tarea, se prevé que los estudiantes infieran una generalización analizando los resultados obtenidos. Los grafos de secuencias de capacidades de las demás tareas se presentan en el anexo 3. Aclaramos que estos son los grafos de secuencias de capacidades que previmos antes de implementar la unidad didáctica.

Las tareas contribuyen al logro de los objetivos. Por lo tanto, los grafos de cada objetivo se relacionan con los grafos de secuencias de capacidades de las tareas correspondientes. La tarea Rompecabezas contribuye al objetivo 1. En la figura 8, presentamos el grafo de secuencias de capacidades de este objetivo. Los grafos de secuencias de capacidades de los objetivos 2 y 3 se encuentran en el anexo 4.

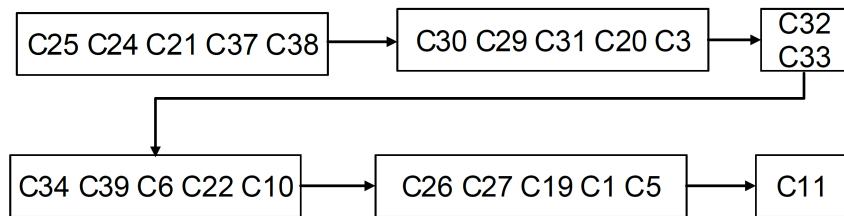


Figura 8. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1

En el objetivo 1, pretendemos activar secuencias de capacidades como identificar elementos fundamentales para el desarrollo de un ejercicio; utilizar conceptos previos referente a áreas, algoritmos de suma, resta, multiplicación y su correspondiente utilización de signos; y representar medidas de longitudes y/o áreas con expresiones algebraicas. Luego, se activan secuencias de capacidades referentes a la relación entre el área de un cuadrado de lado $(a + b)$ y el producto obtenido al desarrollar la potencia $(a + b)^2$; a la utilización de material para calcular áreas de regiones rectangulares; a la traducción de un enunciado verbal a una expresión algebraica; y al análisis de resultados para generar conclusiones.

Es importante que los estudiantes conozcan las secuencias de capacidades que se pueden activar al desarrollar cada tarea. Para ellos, el lenguaje utilizado por el docente es demasiado técnico.

co. Se hace necesario traducir estas secuencias de capacidades en frases que los estudiantes puedan entender. De esta forma, se construye el grafo de criterios de logro de los objetivos. Presentamos el grafo de los criterios de logro del objetivo 1 en la figura 9. Los grafos de criterios de logro para los objetivos 2 y 3 se encuentran en el anexo 5.

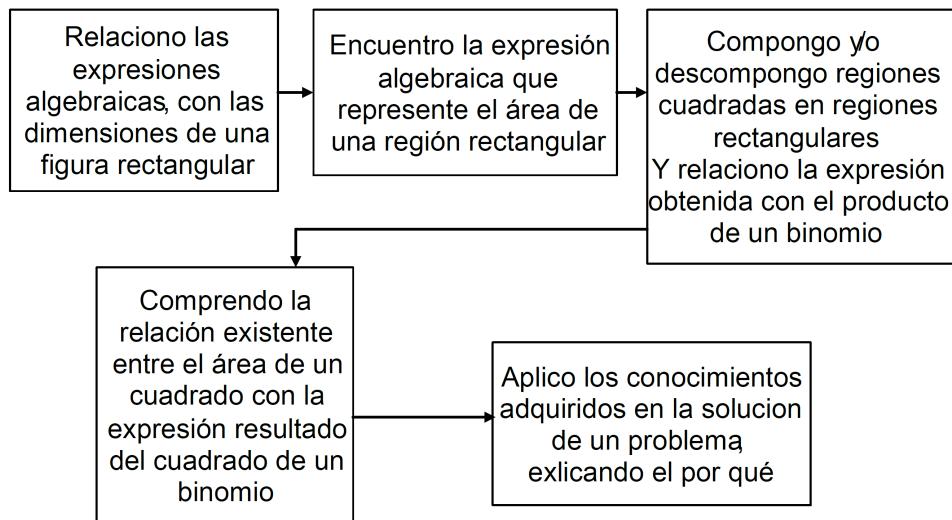


Figura 9. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

2.3. Expectativas afectivas

Se espera que, además de los conocimientos propios del tema matemático que se va a desarrollar, los estudiantes también fortalezcan valores que contribuyan al bienestar de cada uno de ellos, la sana convivencia del grupo y su crecimiento personal. De manera general, la relación que se establece entre cognición y afecto es cíclica (McLeod y Adams, 1989). La experiencia que tiene el alumno cuando aprende matemáticas le provoca distintas emociones e influye en la formación de sus creencias (Diego, 2011). Trabajar el aspecto afectivo de los estudiantes es importante en la planeación e implementación de nuestra unidad didáctica. Proponemos las siguientes expectativas de tipo afectivo, tomadas de los ejemplos dados por González y Gómez (2013).

1. Cuidar los diferentes materiales manipulables (fichas algebraicas) para la representación de productos notables.
2. Presentar disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medidas de objetos y calcular sus áreas.
3. Participar activamente en las actividades propuestas para el desarrollo de los productos notables.
4. Utilizar adecuadamente los diferentes instrumentos de medición requeridos para la construcción de rectángulos.
5. Presentar los trabajos escritos con orden y pulcritud.
6. Ser responsable en los acuerdos previamente establecidos con los miembros del equipo.

7. Valorar y respetar las ideas propias y las de los demás, y argumentar con criterios matemáticos válidos.
8. Trabajar con perseverancia y confianza en el planteamiento y solución de situaciones relacionadas con los productos notables.
9. Desarrollar estrategias personales para la resolución de problemas de productos notables.
10. Presentar actitud favorable para la exploración y aprendizaje de software educativo.

3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción tiene como fin identificar, describir y organizar tareas matemáticas, para diseñar y ejecutar las actividades de enseñanza y aprendizaje que constituyen la unidad didáctica (Flores, Gómez y Marín, 2013, p. 11). Deben analizarse los materiales y recursos que se utilizarán en la secuencia de enseñanza y su contribución al alcance de las expectativas de aprendizaje y la disminución en la ocurrencia de errores. La secuencia de enseñanza consta de una sucesión de tareas que están compuestas por elementos que caracterizan e identifican a cualquier tarea matemática. Una tarea matemática implica la interacción y actuación entre el estudiante, el profesor y un conocimiento matemático.

3.1. Diseño de tareas y secuencia de organización

Inicialmente, la secuencia de enseñanza estaba compuesta por cinco tareas matemáticas que aportaban a cada uno de los objetivos de aprendizaje descritos en el análisis cognitivo. Las tareas estaban distribuidas en ocho sesiones, de sesenta minutos cada una, y organizadas de acuerdo con su función dentro de la secuencia, como lo mostramos en la tabla 4.

Tabla 4
Distribución de sesiones de clase de la unidad didáctica

Sesión	Objetivos	Tareas	Función en secuencia
1	2	Operando	Fase inicial: detección de ideas previas, motivación, diagnóstico, presentación del tema y objetivo
2	1	Rompecabezas	Desarrollo: regulación
3			Desarrollo: autorregulación
4	1 y 3	Testamento	Desarrollo: autorregulación Cierre: recapitular y relacionar
5			
6	1 y 3	La granja	Desarrollo: autorregulación Cierre: representación grupal e individual
7			
8	3	Contenedor	Cierre: síntesis y estructuración.

La función que cumple una tarea matemática en la sucesión de tareas se determina por la fase en la que se encuentra y las acciones que implican estar en dicha fase. Giné y Parcerisa (2003) clasifican la secuencia formativa en tres fases: inicial, de desarrollo y de cierre. En la fase inicial, las tareas que se necesitan son aquellas que permiten diagnosticar conceptos previos y las que se utilizan para la presentación de un nuevo tema. Las tareas que implican ejercitación o aquellas que propician el cuestionamiento y la interrogación se presentan en la fase de desarrollo. Por último, las tareas de síntesis y conclusión se ubican en la fase de cierre. Cabe aclarar que, de acuerdo con las expectativas del docente y las características del grupo, una tarea puede involucrar más de una de las fases mencionadas.

3.2. Componentes de una tarea matemática

Los elementos que componen la tarea matemática nos permiten caracterizarla para luego ajustarla, si es necesario, y así hacer que contribuya eficazmente a las expectativas de aprendizaje, a las expectativas afectivas y a la superación de las limitaciones de aprendizaje que describimos en el análisis de cognitivo.

Flores et al. (2013, p. 12) afirman que una tarea matemática se compone de las siguientes cuestiones.

1. *La formulación de la tarea, es decir, los estímulos que facilitan que los alumnos lleven a cabo la actividad de aprendizaje.*
2. *La meta de la tarea matemática, que establece de qué manera la tarea pretende contribuir a los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.*
3. *Un conjunto de materiales y recursos disponibles.*
4. *Un conjunto de capacidades que se activan al usar los materiales y recursos para lograr la meta.*
5. *El contenido matemático que está implicado en la tarea, tanto en su intención educativa como el que es necesario para resolver la tarea matemática.*
6. *La situación de aprendizaje, como el contexto en el que adquieren significado las acciones que se contemplan en la tarea.*
7. *Formas de agrupar a los alumnos para realizar las tareas.*
8. *Procesos de interacción que se promueven entre alumno y profesor y entre pares (los alumnos entre ellos).*

3.3. Descripción detallada de los componentes de una de las tareas de la unidad didáctica

Identificar los componentes de las tareas permite planificar las sesiones de clase. Esta planificación se convierte en la ficha técnica de la sesión. Cada ficha contempla la meta, la formulación, los materiales y recursos, las formas de agrupamiento, los esquemas de interacción y la temporalidad. Este último aspecto se refiere a la distribución del tiempo de la clase donde se llevarán a cabo las acciones pertinentes. En la tabla 5, describimos la ficha técnica de la sesión de clase en

la que implementaremos la tarea Rompecabezas. Recogemos la descripción detallada de las demás tareas en el anexo 6.

Tabla 5

Ficha técnica de planeación de la sesión de clase para la tarea Rompecabezas

Componente	Descripción del componente
Meta	Se espera que el estudiante, mediante el trabajo realizado en la tarea, relacione la composición de áreas con el área de un cuadrado de lado $(a + b)$ y la exprese en diferentes sistemas de representación.
Formulación	La formulación de esta tarea está dada a manera de instrucción. En la etapa de trabajo de individual, el estudiante debe calcular el área de las diferentes regiones rectangulares que componen un cuadrado. Luego, debe calcular el área del cuadrado recomposto. En el trabajo colaborativo, los grupos deben comparar los resultados obtenidos en los numerales anteriores y concluir que la suma de las áreas es igual al área del cuadrado. Además, haciendo uso de rompecabezas algebraicos, los estudiantes deben inferir cuál es el área de un cuadrado de lado $(a + b)$.
Material	Para esta tarea, se usarán varios rompecabezas que representan de forma geométrica binomios al cuadrado, fotocopia con las instrucciones de la tarea, lápiz y papel, y video beam.
Formas de agrupamiento	La tarea se realizará de forma individual en su fase inicial. Posteriormente, se organizarán grupos de tres estudiantes.
Esquemas de interacción	Se promueven interacciones profesor-estudiante durante el trabajo individual. El profesor será la guía del estudiante en su trabajo, motivándolo para que llegue a las respuestas correctas por su cuenta. Luego, habrá interacción estudiante-estudiante en los pequeños grupos de trabajo. Los estudiantes discutirán las respuestas encontradas por cada uno, sus similitudes y diferencias, y producirán conclusiones que finalmente serán presentadas ante el gran grupo.
Temporalidad	Saludo y explicación de la tarea (10 minutos) Entrega y descripción del material (5 minutos) Realización de la fase uno de la tarea (15 minutos) Conformación de los grupos (5 minutos) Realización de la fase dos de la tarea (20 minutos) Realización de las presentaciones (casa) Socialización de las presentaciones (30 minutos)

A continuación, analizamos esta tarea desde la perspectiva de las secuencias de capacidades que activa, el contenido matemático que pone en juego y la situación en la que se ubica.

Secuencias de capacidades

Al resolver la tarea Rompecabezas, el estudiante activa las siguientes capacidades: aplicar el algoritmo de la multiplicación; aplicar la propiedad de la potenciación al resolver el área de un cuadrado; relacionar una representación pictórica con el concepto del binomio al cuadrado; manipular los rompecabezas para componer y recomponer áreas de cuadrados cuyo lado se expresa

como un binomio; inferir reiteraciones que le permiten generalizar la estructura del trinomio resultante de la suma al cuadrado; discutir y argumentar sus puntos de vista; respetar el de los demás; unificar criterios y concluir; trabajar en equipo; y presentar el trabajo realizado ante un gran grupo.

Contenido matemático

En la tarea se trabaja específicamente la suma al cuadrado, haciendo uso de los sistemas de representación simbólico, pictórico, manipulativo y geométrico.

Situación de aprendizaje

Ubicamos la tarea dentro de una situación educativa, en el contexto de cálculo de áreas cuadradas.

3.4. Diseño previo de la unidad didáctica

Finalmente, de acuerdo con el análisis de los aspectos mencionados anteriormente, el diseño previo de la unidad didáctica se organizó como mostramos en la tabla 6.

Tabla 6

Plan general de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Objetivo al que contribuye
1 y 2	Presentación del tema y tarea Operando (tarea diagnóstica)	Objetivo 2
3	Realimentación de la tarea diagnóstica (Operando)	
4 y 5	Tarea Rompecabezas	
6	Realimentación de la tarea Rompecabezas	Objetivo 1
7	Tarea Granja y realimentación	
8 y 9	Tarea Testamento y realimentación	Objetivo 3
10	Tarea Contenedor y realimentación	

La institución educativa Pompilio Martínez establece que la duración de cada una de las sesiones de clase es de sesenta minutos. Después de analizar los resultados obtenidos en la implementación de cada una de las tareas, se prevé dentro del plan general realizar la realimentación correspondiente con el propósito de aclarar dudas, superar dificultades y unificar criterios.

4. JUSTIFICACIÓN DEL DISEÑO PREVIO

En los análisis previos, encontramos que era necesario darle un orden y una secuencia a las tareas, antes de ser implementadas. Escogimos las tareas que serían más apropiadas para alcanzar los objetivos propuestos en la implementación de la unidad didáctica. Descartamos aquellas ta-

reas en las que no encontramos un aporte significativo para la unidad didáctica. Unimos las tareas que eran complementarias formando una sola actividad.

4.1. Función de las tareas dentro de la unidad didáctica

Después de realizar el análisis didáctico que cavamos de presentar, diseñamos cinco tareas para la unidad didáctica. Explicaremos la función de estas tareas con base en la tabla 4.

Ubicamos la tarea Operando en la fase inicial de la secuencia. Con esta tarea, pretendemos detectar ideas previas con el uso de las fichas algebraicas. Cumple la función de tarea diagnóstica, al solicitar la traducción entre diferentes sistemas de representación: manipulativo, geométrico, simbólico y verbal. Pretendemos motivar; presentar el tema y el objetivo al desarrollar las actividades en diferentes agrupaciones (individual y grupal); exponer los resultados; y discutir las conclusiones encontradas.

La tarea Rompecabezas cumple la función de desarrollo dentro de la secuencia, tanto de regulación como de autorregulación. En cuanto a la regulación, pretende disminuir la incidencia de errores y reforzar la mecanización de procesos. Respecto a la regulación, la tarea pretende que el estudiante se apropie de los conceptos trabajados y construya nuevos conocimientos.

Las tareas Testamento y La granja cumplen funciones tanto de desarrollo como de cierre para los objetivos 1 y 3. En cuanto a la función de desarrollo, pretenden la apropiación y la construcción autónoma de conocimiento en los apartados que requieren dar solución a una situación con el uso de diferentes sistemas de representación. En la fase de cierre, relaciona los conceptos adquiridos para sintetizar y estructurar el alcance del objetivo propuesto, al mostrar las representaciones individuales y grupales encontradas.

Ubicamos la tarea Contenedor en la fase final porque se basa en una situación problema y promueve la escritura de una expresión general para el binomio al cuadrado.

4.2. Significatividad

Según Flores et al. (2013, p. 27), para que una tarea matemática promueva un aprendizaje significativo, debe satisfacer las siguientes condiciones:

- 1. parte de situaciones conocidas por los estudiantes, es decir, propone una situación de aprendizaje que es comprendida por ellos, que les resulta familiar, en la que es razonable emplear el contenido matemático que se requiere en la tarea;*
- 2. requiere utilizar conocimientos matemáticos y acciones que los estudiantes pueden activar a partir de sus conocimientos previos;*
- 3. plantea un reto que los motiva a actuar y a aprender, comprendiendo la demanda que se les hace, la incógnita de la situación; y*
- 4. permite que los estudiantes puedan reconocer si la solución aportada por ellos es o no adecuada, o al menos, diferenciar el grado en que las soluciones obtenidas resuelven mejor el reto planteado.*

De acuerdo con estas cuatro condiciones, describimos a continuación la significatividad de cada una de las tareas que componen nuestra unidad didáctica. La tarea Operando inicia con el cálculo de áreas de regiones rectangulares. Esta es una situación conocida por los estudiantes en la que

serán necesarios los conocimientos previos. La tarea plantea un reto al relacionar diferentes sistemas de representación. Motiva a los estudiantes a hacer comparaciones, y a corroborar o refutar los resultados obtenidos por sus compañeros y los propios. La tarea Rompecabezas inicia con la escritura del área de figuras rectangulares. Para ello, es necesario la utilización de conceptos previos. Al requerir la recomposición de nuevas figuras, la tarea plantea un reto para los estudiantes. Además, permite comparar los resultados entre pares académicos. La tarea Testamento parte del diagrama de un cuadrado con condiciones específicas. Requiere la realización de acciones de seguimiento donde los estudiantes deben hacer trazos y disminuir la medida del lado del cuadrado inicial. Plantea un reto en la escritura simbólica que representa el diagrama y lo ocurrido en la disminución hecha. Permite a los estudiantes relacionar lo ocurrido con la solución de una situación problema. La tarea La granja inicia con el planteamiento de una situación familiar de los estudiantes en el cálculo de áreas rectangulares para animales en una granja. Plantea un reto y motiva a los estudiantes al requerir el uso del software educativo Geogebra. Permite que los estudiantes corroboren los resultados esperados con los resultados obtenidos. La tarea Contenedor plantea una situación problema para el cálculo del área de una puerta y representa un reto en la utilización de medidas no numéricas x e y para obtener una expresión general. Los resultados obtenidos se pueden comparar con el diagrama dado en la tarea.

4.3. Complejidad de las tareas

El grado de complejidad de una tarea matemática depende del aporte al logro de las competencias. El estudio PISA (OCDE, 2003, pp. 42-49) establece tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. El nivel de reproducción corresponde a la ejercitación reiterativa de procedimientos algorítmicos. El nivel de conexión requiere establecer relaciones entre diferentes sistemas de representación, con base en conocimientos previos para dar soluciones a situaciones complejas. Por último, en el nivel de reflexión, es necesario hallar conclusiones y generalizaciones a partir de situaciones específicas. Una tarea puede tener diferentes grados de complejidad. Las primeras tareas corresponden al nivel de reproducción. En el intermedio, encontramos tareas de conexión. Las tareas de cierre corresponden al nivel de reflexión. En la tabla 6, presentamos la complejidad en la secuencia de tareas. Describimos el análisis hecho a la tarea Rompecabezas.

Tabla 6
Análisis de complejidad de la secuencia de tareas

Competencia	Objetivos					
	Rompecabezas	Testamento	Operando	Granja	Contenedor	Objetivo 3
Objetivo 1						
K1	Rp, Cn, Rf			Rp		Cn
K2			Rp		Rp, Rf	

Tabla 6
Análisis de complejidad de la secuencia de tareas

Competencia	Objetivos			Contenedor
	Objetivo 1		Objetivo 2	
	Rompecabezas	Testamento	Operando	
K3	Rp, Cn, Rf		Cn	Cn
K4	Rp		Rf	Rf
				Cn

Nota. K1 = Formular, plantear y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana y de otras ciencias aplicando los productos notables; K2 = Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones básicas entre expresiones algebraicas; K3 = Representar productos notables haciendo uso de los diferentes sistemas de representación; K4 = Comprender e interpretar los enunciados orales y escritos de otras personas; Rp = Reproducción; Cn = Conexión; Rf = Reflexión.

Tarea Rompecabezas

La tarea Rompecabezas contribuye al desarrollo de las competencias K3 y K4 en los tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. Para la competencia K3, encontramos los tres niveles de manera secuencial en diferentes apartados de la tarea. Inicia con una situación familiar, como es el cálculo de áreas, establece procesos reiterativos entre diferentes sistemas de representación, y apunta a la generalización de una expresión simbólica. Para la competencia K4, la tarea está ubicada en el nivel de reproducción, por los procesos algorítmicos reiterativos que presenta.

Tarea Testamento

La tarea Testamento contribuye al desarrollo de la competencia K1 en el nivel de reproducción, con motivo de los procesos algorítmicos que exige. Se ubica en el nivel de conexión, al establecer la relación entre los sistemas de representación geométrico y el simbólico para la diferencia del cuadrado. Esta tarea también está ubicada en el nivel de reflexión, dado que busca la aproximación de una expresión generalizada para el cuadrado de un binomio para la resta.

Tarea Operando

La tarea Operando contribuye al logro del objetivo 2 y desarrolla la competencia K2 en el nivel de reproducción, la competencia K3 en el nivel de conexión y la competencia K4 en el nivel de reflexión. La primera parte de la tarea corresponde al nivel de reproducción de procesos algorítmicos con expresiones que contienen variables y valores numéricos específicos. La segunda parte de la tarea requiere del establecimiento de conexiones entre el sistema de representación geométrico, el simbólico y el verbal. En la parte final, es necesario el trabajo colaborativo entre pares para establecer una expresión general simbólica.

Tarea La granja

La tarea La granja contribuye a las competencias K1, K3 y K4, para el objetivo 3. Ubicamos la competencia K1 en el nivel de reproducción, por la repetición de procesos gráficos que debe hacer el estudiante. Ubicamos la competencia K3 en el nivel de conexión entre el sistema de representación simbólico y el geométrico. Finalmente la competencia K4 se activa en un nivel de reflexión ya que, al igual que para el objetivo 1, pretendemos un acercamiento a la generalización de los procesos.

Tarea Contenedor

La tarea Contenedor contribuye al alcance del objetivo 3 con las competencias K1, K2 y K4. En la competencia K1, encontramos el nivel de complejidad de conexión, ya que los estudiantes deberán escribir una expresión simbólica a partir de un diagrama geométrico. En la competencia K2, la tarea se ubica en el nivel reproducción, al necesitar de los procesos reiterativos hechos en tareas anteriores, para obtener un nivel de reflexión, y establecer la expresión general para la suma de un binomio al cuadrado. Pretendemos que esta expresión induzca al estudiante a deducir la expresión general para el cuadrado de un binomio.

4.4. Contribución al logro de las expectativas de aprendizaje y superación de limitaciones

Luego de examinar la secuencia de las tareas en cuanto al alcance de los objetivos y su complejidad, es necesario analizar su contribución al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de dificultades. Las tareas Rompecabezas y Testamento contribuyen al alcance del objetivo 1, al expresar el área de diferentes regiones rectangulares con la aplicación del cuadrado de un binomio. La tarea Rompecabezas utiliza material concreto con el que los estudiantes deben escribir simbólicamente las áreas obtenidas, y establecer transformaciones y traducciones entre diferentes sistemas de representación. Además, la tarea Testamento incluye una situación problema que debe ser resuelta con los datos suministrados.

La tarea Operando contribuye al alcance del objetivo 2, al requerir la utilización de los sistemas de representación geométrico, simbólico y verbal para expresar el resultado del producto notable. Las tareas La granja y Contenedor contribuyen al alcance del objetivo 3, porque la solución de estas situaciones requieren de la aplicación del cuadrado del binomio.

Algunas tareas nos permiten diagnosticar errores y otras superarlos. En ocasiones, una misma tarea hace posible tanto el diagnóstico como la superación de dificultades. En la tabla 7, presentamos la lista de los errores y establecemos qué tareas permiten diagnosticarlos y superarlos.

Tabla 7

Contribución de las tareas al diagnóstico y superación de los errores

Error	Tareas					
	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3	
	Rompecabezas	Testamento	Operando	Granja	Contenedor	
1.3		S				
1.6			D		D	
Producto notable						

Tabla 7
Contribución de las tareas al diagnóstico y superación de los errores

Error	Tareas				
	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3
	Rompecabezas	Testamento	Operando	Granja	Contenedor
2.1					S
2.3			D	D, S	S
2.4	D, S				
2.5	D, S		D	D	
2.6	D, S				
2.7	D, S				
2.8	D, S	S			
2.9			D	S	
2.10		D, S			
3.1		S			
3.2		S		D, S	D
3.3				D	
3.5		D, S	S	S	
4.1			D	D, S	
4.2			D	S	S

Nota. D = Diagnóstico; S = Superación.

En las primeras tareas, encontramos que los apartados que requieren conexión entre diferentes sistemas de representación nos permiten diagnosticar errores. Los procesos reiterativos y de ejercitación algorítmica permitirán la superación de las dificultades de los escolares.

3. INSTRUMENTOS Y PROCEDIMIENTOS DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para evaluar el desempeño de los estudiantes, y la pertinencia del diseño y de la implementación de la unidad didáctica, fue necesario diseñar instrumentos que nos permitieran recoger información durante y después de la implementación, para posteriormente analizarla con el propósito de encontrar los puntos débiles y mejorar el diseño de la unidad didáctica.

1. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN

Los siguientes instrumentos de recolección de la información fueron utilizados durante la implementación de la unidad didáctica: diario del docente, diario del estudiante, rúbricas de las tareas y examen. Otros se utilizaron después de la implementación: cuestionario final y autoevaluación.

1.1. Instrumentos de recolección de información durante la implementación

Para la recolección de información durante la implementación, diseñamos instrumentos con los cuales pudiéramos obtener datos sobre la pertinencia del diseño, el proceso de aprendizaje, y el desarrollo de las expectativas afectivas.

Diario del docente

El diario del docente es un instrumento que nos permite registrar cómo se desarrolló cada sesión, si lo que planificamos se dio en realidad o qué ajustes se tienen que hacer. El diario recoge las impresiones del profesor respecto al diseño de las actividades, las dificultades encontradas, la activación de secuencias de capacidades, la motivación de los estudiantes y la pertinencia de los recursos. En el anexo 7, presentamos el formato del diario del profesor para una tarea.

Diario del estudiante

El diario del estudiante busca proporcionar información para conocer la percepción que él tiene acerca de su desempeño, de las actividades, de su motivación y de su interés. Dentro del diario del estudiante, presentamos dos instrumentos para cada tarea: uno, para el aspecto cognitivo (grafo con semáforo) y, otro, para el aspecto afectivo (matematógrafo). Estos instrumentos fueron entregados a cada estudiante al iniciar cada tarea, para ser diligenciados dentro de la sesión de clase, al finalizar cada actividad.

En los semáforos (círculos), para cada tarea, el estudiante debe registrar con colores su sentir respecto al conocimiento logrado en el indicador propuesto. El color rojo indica que no se ha alcanzado, el amarillo que existen dificultades y el verde que se ha cumplido. Mostramos un ejemplo del esquema de semáforos en la figura 10. Los semáforos para las demás tareas se encuentran en el anexo 8.

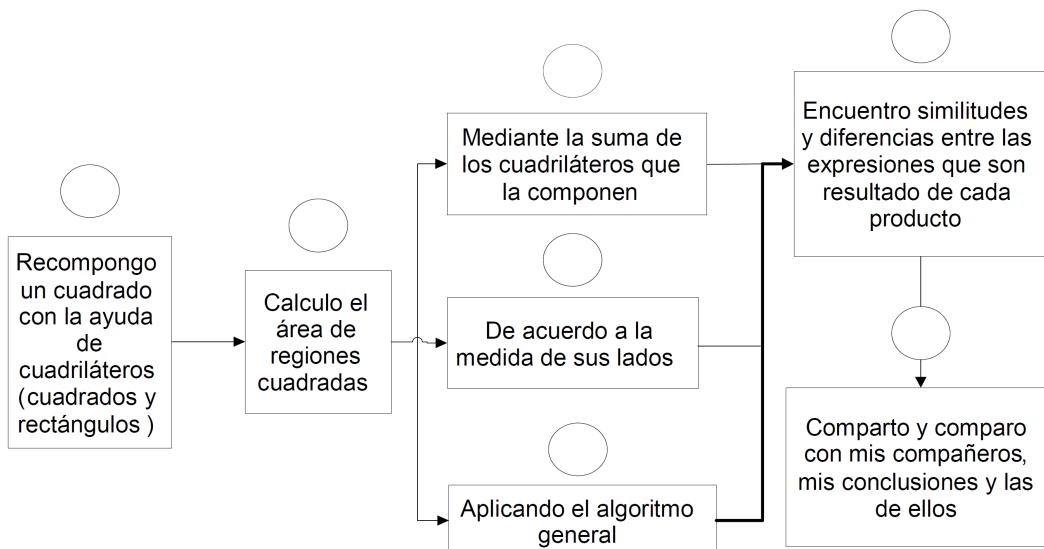


Figura 10. Grafo con semáforos para la tarea Rompecabezas

En el matematógrafo, los estudiantes deben señalar, según su percepción afectiva, una de las cuatro caras en cada uno de los ítems propuestos para la actividad. El matematógrafo es el mismo para todas las tareas. En la figura 11, presentamos el formato que empleamos.

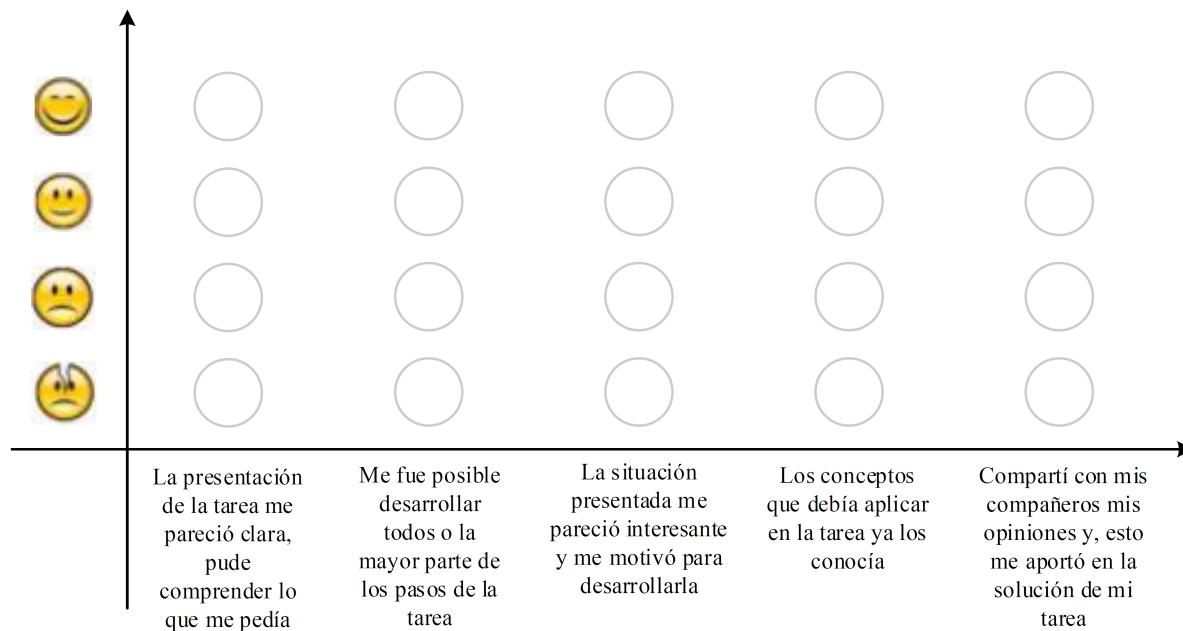


Figura 11. Formato del matematógrafo

Rúbricas de las tareas y del examen final

Otra fuente de recolección de información del proceso de aprendizaje de los estudiantes son las evaluaciones de desempeño en cada una de las actividades y en el examen final. Esta evaluación se realiza mediante rúbricas que definen los criterios para asignar valores y tienen en cuenta el sistema de evaluación del colegio y las escalas nacionales. Para diseñar las rúbricas de las tareas tuvimos en cuenta las respuestas esperadas en cada uno de los apartados de las actividades que apuntan a los objetivos propuestos y a los caminos de aprendizaje planificados. En la tabla 8, presentamos la rúbrica de la tarea Rompecabezas. En el anexo 9, presentamos las rúbricas de las demás tareas.

Tabla 8

Respuestas esperadas para la tarea Rompecabezas

Secuencias de capacidades	Apartados de la tarea	Respuestas esperadas
SC1: Encuentro la expresión algebraica que represente el área de una región rectangular	a, b, e	<p>Suman el área de cada uno de los cuadriláteros que la componen</p> <p>Aplican el algoritmo de la multiplicación de los binomios iguales que representan los lados de la figura recomposta</p> <p>Aplican el algoritmo de la multiplicación entre la base y la altura de regiones</p>

Tabla 8
Respuestas esperadas para la tarea Rompecabezas

Secuencias de capacidades	Apartados de la tarea	Respuestas esperadas
SC2: Compongo y/o descompongo regiones cuadradas en regiones rectangulares y relaciono una expresión algebraica que represente su área	b, d, g, e, f	rectangulares Recubren una región cuadrada utilizando los puzzles correspondientes de acuerdo a sus dimensiones Escriben una expresión algebraica que represente el área del cuadrado obtenido, el lado de la figura y su relación
SC3: Relaciono el producto de un binomio al cuadrado, con las dimensiones de una figura rectangular	a, b, c, e, f, g	Escriben el binomio al cuadrado que representa el lado de la figura y su expansión Escriben el producto entre los dos binomios iguales y su expansión Reconocen la semejanza entre dos áreas iguales y las reduzcan a una sola expresión

Las respuestas para cada uno de los apartados de la tarea nos permiten dar un juicio de valoración (total, parcial o nulo), de acuerdo con la activación de las secuencias de capacidades.

Evaluaremos el examen que presentamos en el anexo 10 mediante la rúbrica que describimos a continuación en la tabla 9, en la que se tienen en cuenta los desempeños de la escala de valoración nacional y los criterios de evaluación para cada uno de ellos.

Tabla 9
Rúbrica de evaluación para el examen final

Desempeños según escala nacional	Criterios de evaluación	Puntos del examen
Superior	Desarrolla correctamente los seis numerales del examen. Puede presentar dificultades menores en la utilización del algoritmo.	1 al 6
Alto	Desarrolla cinco numerales, pero presenta dificultad al analizar, aplicar o justificar alguno de los apartados relacionados en cada punto.	1, 2, 4, 5 y 6
Básico	Resuelve los numerales 1, 2 y 5 haciendo uso de diferentes procedimientos algorítmicos, pero no aplica el concepto a la solución de situaciones.	1, 2 y 5

Tabla 9
Rúbrica de evaluación para el examen final

Desempeños según escala nacional	Criterios de evaluación	Puntos del examen
Bajo	<p>Presenta dificultades para aplicar procedimientos algorítmicos en el desarrollo del examen.</p> <p>Se le dificulta analizar las situaciones, aplicar el concepto en la solución de dichas situaciones y justificar sus actuaciones matemáticas.</p>	Si resuelve solamente dos puntos de los numerales 1, 2 y 5

1.2. Después de la implementación

Otros instrumentos se utilizan después de haber terminado la implementación de la unidad didáctica. Estos instrumentos nos permiten recoger información sobre las expectativas cognitivas y afectivas. Nos permiten tener una idea del proceso de aprendizaje, desde el punto de vista de los estudiantes, ya que se trata de un formato de autoevaluación que utiliza el colegio y un cuestionario final que nosotros diseñamos.

Cuestionario final

En la figura 12, mostramos el cuestionario final. Es un formato con el que buscamos obtener información de los escolares sobre las experiencias durante el desarrollo de la unidad didáctica en algunos puntos específicos como la metodología, el proceso de aprendizaje y aspectos afectivos.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL POMPILIO MARTÍNEZ -CAJICÁ-

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

1. ¿Cuál de los materiales usados en clase le gustó más? ¿por qué?

2. ¿Prefieres trabajar en grupo o en forma individual? Explique por qué

3. ¿Su actitud y participación favoreció el desarrollo de la actividad?

4. ¿La actividad lo motivó a valorar y respetar las ideas propias las de los demás?

5. ¿La forma en que se desarrollaron las diferentes actividades le facilitó comprender el tema?

Figura 12. Cuestionario final

Formato de autoevaluación

Diseñamos el formato que presentamos en la figura 13 porque es un requisito del sistema de evaluación de la institución escogida para implementar la unidad didáctica. Este instrumento recoge información de tipo afectivo y cognitivo. El estudiante asigna una valoración de acuerdo con su proceso de aprendizaje.

Aspectos Afectivos	Valoración	Aspectos cognitivos	Valoración
Con mi actitud y participación contribuyo al buen desarrollo de las actividades		Puedo representar el cuadrado de un binomio como el producto de dos binomios iguales	
La relación de trabajo con mi grupo, propició el buen desempeño del mismo		Asocio el área de un cuadrado con el producto entre dos binomios iguales	
Valoro y respeto las ideas de los demás		Escribo una expresión algebraica que represente longitudes y/o áreas de regiones rectangulares	
Soy autónomo y honesto en el desarrollo y presentación de las actividades		Soluciono problemas utilizando productos entre binomios	
Desarrollo estrategias que me permiten solucionar problemas relacionados con los productos notables		Explico los pasos que he seguido para obtener un resultado	

Figura 13. Formato de autoevaluación

2. PROCEDIMIENTOS DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Realizamos la recolección de la información en cada una de las sesiones y al finalizar la implementación, con la ayuda de los instrumentos presentados en el apartado anterior. La información que recogimos en las actividades fue calificada de acuerdo con los criterios de evaluación para cada secuencia de capacidades de las rúbricas de las tareas que ya hemos descrito. Sistematizamos esta información en planillas de Excel. Posteriormente, la confrontamos con la información recogida en el diario del estudiante, con el fin de verificar los resultados obtenidos por los escolares, su percepción de logro y si las dificultades percibidas corresponden con los errores contemplados en los caminos de aprendizaje.

En la tabla 10, mostramos los criterios de activación de las secuencias de capacidades de la tarea Rompecabezas, junto con los niveles en los que ubicamos los estudiantes de acuerdo con las capacidades activadas.

Tabla 10

Nivel de activación de las secuencias de capacidades de la tarea Rompecabezas

SC		Nivel de activación
SC1	Total	Cuando son activadas las capacidades C20, C29, C30
	Parcial	Cuando son activadas las capacidades C29, C30
	Nulo	Cuando no es activada la capacidad C30
SC2	Total	Cuando son activadas las capacidades C31, C32, C33
	Parcial	Cuando son activadas las capacidades C31, C32
	Nulo	Cuando no son activadas las C33 y cualquiera de las otras dos
SC3	Total	Cuando son activadas las capacidades C1, C25, C34
	Parcial	Cuando son activadas las capacidades C25, C34
	Nulo	Cuando no se activa C34 y/o cuando no hay un proceso evidente

Nota: SC = secuencia de capacidades

La activación es nula cuando no se evidencia o presenta la activación de una de las capacidades que consideramos relevante dentro de la secuencia y contribuye a definir el alcance del logro del objetivo, pues a través de ella se podrían activar las demás. La capacidad que determina la nulidad en la SC1 es la capacidad C30, para la SC2 la capacidad C33 y para la SC3 la capacidad determinante es C34.

Ubicamos a cada alumno dentro de la escala de desempeño de evaluación nacional colombiana, de acuerdo con el nivel de activación de las secuencias de capacidades. Para la tarea Rompecabezas, acordamos que, para aquellos estudiantes que activaron en su totalidad las tres secuencias de capacidades, su desempeño será superior. Los estudiantes ubicados en el nivel de desempeño alto, serán aquellos que activen en su totalidad dos de la secuencias de capacidades y una de forma parcial. Para el desempeño básico y bajo consideramos varias posibilidades como mostramos en la tabla 11.

Tabla 11

Escala de valoración del estudiante

Activación de Secuencias de capacidades			Desempeños
SC1	SC2	SC3	
T	T	T	Superior
T	T	P	Alto

Tabla 11
Escala de valoración del estudiante

P	P	P	
T	P	P	
T	T	N	Básico
T	P	N	
N	N	N	Bajo
T	N	N	
P	P	N	
P	N	N	

Nota: Total (T), Parcial (P), Nula (N).

Evaluamos el éxito de la unidad didáctica de acuerdo con el logro de los objetivos propuestos en la planeación siguiendo la escala presentada por el MEN. Existen tareas que aportan a varios objetivos. Para obtener la evaluación global del logro de cada uno de los objetivos, asignamos el nivel de desempeño como lo mostramos en la tabla 12.

Tabla 12
Evaluación global de los objetivos

Objetivo	Nivel de desempeño	Desempeños en las tareas
1 y 3	Superior	Superior – Superior Superior – Alto
	Alto	Alto – Alto Superior – Básico Superior – NP
	Básico	Básico – Básico Superior – Bajo Alto – Básico Alto – Bajo Alto - NP
	Bajo	Bajo – Bajo Básico – Bajo Básico – NP Bajo – NP Np – NP

Tabla 12
Evaluación global de los objetivos

Objetivo	Nivel de desempeño	Desempeños en las tareas
2	Superior	Superior
	Alto	Alto
	Básico	Básico
	Bajo	Bajo

Nota: NP = no presentó

Analizamos la información recogida en el diario del profesor, en el formato de autoevaluación y en el cuestionario final con el fin de corregir errores en las actividades (como temporalidad, significatividad, recursos, y formas de agrupamiento). Tuvimos en cuenta estos aspectos en las sesiones siguientes y para producir la versión definitiva de la unidad didáctica.

4. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado, reseñamos la implementación de la unidad didáctica. Describimos cada una de las sesiones llevadas a cabo para cada tarea. También presentamos las modificaciones realizadas durante la implementación. Estas modificaciones se dieron debido a los resultados obtenidos durante el desarrollo de las actividades y con el fin de lograr las metas propuestas para cada tarea.

La implementación de la unidad didáctica se realizó en la Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez (Cajicá). Se inició el 17 de septiembre de 2012 y se planeó para desarrollarla en ocho sesiones. Implementamos los materiales y la forma de agrupamiento según lo previsto. En la implementación de la tarea La Granja, se nos presentó un inconveniente significativo. Esta tarea requería de la aplicación de un software educativo y el día en que se desarrolló la actividad no había servicio de Internet al iniciar la sesión. Luego, se terminó el tiempo disponible en la sala de informática del colegio y algunos grupos no pudieron terminar la actividad. A continuación, presentamos como se desarrolló cada una de las tareas.

Tarea Operando

Al iniciar la primera sesión, presentamos la unidad didáctica en gran grupo. Presentamos los objetivos, el número y nombre de las tareas y las capacidades que pretendíamos que los estudiantes desarrollaran con la implementación. Luego, entregamos a los estudiantes la tarea Operando de forma impresa. Esta tarea fue la primera de la unidad didáctica y contribuye al objetivo 2.

La primera parte de la tarea estaba diseñada para trabajarla individualmente. En esta parte de la tarea, los estudiantes presentaron dificultades para registrar los resultados obtenidos en una tabla. Esto hizo que los estudiantes requirieran de la ayuda constante de la docente. Esta tarea estaba planeada para desarrollarla en una sesión de 60 minutos, pero, en realidad, se llevó a cabo en tres sesiones de 60 minutos.

La segunda parte de la tarea estaba diseñada para desarrollarla en parejas. La docente organizó los grupos de trabajo de acuerdo con la ubicación de los estudiantes en el aula. En el trabajo colaborativo, los estudiantes debían comparar los resultados que cada uno obtenía y sacar conclusiones. Esta parte no fue efectiva porque no concluyeron lo que pretendíamos respecto al tema. Por ejemplo, los estudiantes concluyeron que, en cada caso, se utilizó un número diferente de fichas. Nosotros pretendíamos que concluyeran que los valores del resultado dependían direc-

tamente de los valores del ejercicio inicial. Por lo anterior, reformamos algunos enunciados de esta tarea. Esta parte de la tarea y la puesta en común se desarrolló en una segunda sesión.

Utilizamos una tercera sesión para la realimentación de la tarea. Faltando diez minutos para terminar la sesión, entregamos a los estudiantes la hoja del diario del estudiante. En este diario, los estudiantes debían registrar sus dificultades, lo que más se les facilitó, sus dudas y su forma de trabajar. Compartimos la meta que nos proponíamos con esta tarea, al escribirla en el tablero. Los estudiantes tardaron en diligenciar este diario, porque no se atrevían a tramitarlo, dado que era la primera vez que se les presentaba un documento de este tipo. Ellos no comprendieron la parte en la que se les pedía que informaran sobre la meta de la tarea.

Tarea Rompecabezas

La tarea Rompecabezas se desarrolló en dos sesiones como estaba previsto. Al iniciar la primera sesión, hicimos modificaciones respecto a lo planeado. A partir de esta tarea, dimos a conocer la meta y entregamos el diario del estudiante al inicio de la actividad, para que los estudiantes diligenciaran estos formatos durante el desarrollo de la clase. Esta estrategia fue favorable, porque los datos registrados fueron más reales. Además, esta tarea contribuyó al logro del objetivo 1.

Tomamos esta tarea como tarea especial porque sirve de enlace entre el tema anterior (correspondiente a la multiplicación de expresiones algebraicas) y el producto notable correspondiente. La primera parte de esta tarea estaba diseñada para desarrollarse de manera individual y se pretendía que los estudiantes relacionaran la representación geométrica con la representación simbólica, utilizando material manipulativo como los puzzles.

En la segunda parte de la tarea, propusimos el trabajo colaborativo para que los estudiantes, reunidos en grupos de tres, compararan los resultados de cada ejercicio y sacaran conclusiones. En este punto, se nos presentó un inconveniente porque los estudiantes no compararon los resultados de cada ejercicio, sino los resultados que cada uno de ellos obtuvo. Por este motivo, reformulamos los enunciados de cada punto de la tarea para aclarar lo que se pretendía. Presentamos estos cambios en el apartado 5 referente al nuevo diseño. En el trabajo colaborativo, se planteaba la reconstrucción de un cuadrado utilizando la técnica de armar un rompecabezas. Este punto fue favorable porque motivó a los estudiantes a trabajar con entusiasmo. Además, favoreció las expectativas afectivas al trabajar en equipo y fortaleció las buenas relaciones con sus compañeros y el respeto por la opinión y el trabajo de los otros.

Al finalizar la tarea, propusimos una puesta en común para socializar lo concluido. Este aspecto fue positivo en cuanto permitió desarrollar la comunicación, al motivar a los estudiantes a hablar en público. Esto se puede evidenciar en los diarios de los estudiantes que entregaron al finalizar la actividad.

Tarea La granja

La tarea La granja se inició como se había planificado. Dimos a conocer a los estudiantes la meta que pretendíamos alcanzar con su desarrollo. Entregamos la tarea impresa y el diario del estudiante. La tarea estaba diseñada para dos sesiones. Los estudiantes trabajaron en los computadores reunidos en parejas. Con el desarrollo de esta tarea, se pretendía que los estudiantes encontraran la relación que se establece entre la longitud de un cuadrado de lado ($a+b$), y el valor del área de dicho cuadrado. La tarea contribuye a los objetivos 1 y 3.

Al iniciar la actividad, tuvimos un inconveniente porque, en ese momento, no había servicio de Internet, lo que retrasó su inicio. Para compensar esta dificultad, creamos una tarea alternativa, de tal manera que se pudiera desarrollar utilizando lápiz y papel. Después de aproximadamente media hora, se restableció el servicio e iniciamos el desarrollo de la tarea. Se nos presentó un inconveniente adicional con algunos grupos que no lograban descargar el aplicativo por no seguir las instrucciones correctamente. Al desarrollar la tarea utilizando el software, los estudiantes no leyeron correctamente las indicaciones. Esto implicó que no lograron culminar el ejercicio y requirieron constantemente de la ayuda de las docentes. Luego se terminó el tiempo que teníamos disponible para hacer uso de la sala de informática y fue necesario suspender la actividad, aunque algunos grupos no habían terminado el trabajo. En la siguiente sesión, se llevó a cabo la puesta en común. Esta actividad se realizó parcialmente porque no contábamos con la información de todos los grupos. Las conclusiones se dieron de acuerdo con los datos de los grupos que terminaron la tarea. Al final de la actividad, los estudiantes entregan el diario del estudiante diligenciado.

Tarea Testamento

La tarea Testamento pretendía contribuir a los objetivos 1 y 3. Esta tarea se desarrolló tal y como fue planificada. Al iniciar la sesión, se dio a conocer a los estudiantes la meta que nos propusimos. Se hizo entrega de la tarea impresa con las instrucciones para ejecutar la actividad. Esta tarea se desarrolló de forma individual.

En la primera parte de la tarea, se elaboró un cuadrado de 5 cm de lado. Este cuadrado se debía descomponer en dos rectángulos de medidas iguales y dos cuadrados de diferente tamaño. Para ello, no podía sobrar, ni faltar material respecto al cuadrado inicial. Los estudiantes llevaron a cabo esta parte de la tarea sin dificultad. Luego, los estudiantes debían escribir una expresión algebraica para representar el área de cada cuadrilátero obtenido. También, debían escribir una expresión para relacionar el área del cuadrado inicial con el área de cada uno de los cuadrados obtenidos al descomponer el primero.

Con la implementación de esta tarea, pretendíamos que los estudiantes encontraran un trinomio que relacionara el cuadrado de la diferencia entre dos cantidades y el área de un cuadrado. En esta parte de la tarea, los estudiantes presentaron dificultades respecto a los signos de los términos del trinomio resultante de desarrollar el producto $(a - b)^2$. Por esta razón, la docente debió hacer una puesta en común y detallar cada uno de los pasos realizados en esta tarea y así analizar y concluir qué signos corresponden a cada término del trinomio.

La segunda parte de la tarea proponía una situación problemática para que los estudiantes aplicaran el producto $(a - b)^2$ y hallaran la solución. En esta parte, algunos estudiantes nuevamente presentaron dificultades respecto a los signos del trinomio. Los estudiantes diligenciaron y entregaron el diario del estudiante al finalizar el desarrollo de la tarea.

Tarea Contenedor

La tarea Contenedor pretendía contribuir al objetivo 3. Esta tarea se implementó de la forma como se planificó. Se desarrolló durante una sesión. Al iniciar la tarea, se compartió la meta con los estudiantes, al escribirla en el tablero. Se entregaron impresos el diario del estudiante y la tarea. La tarea El contenedor tiene como fin aplicar el producto $(a + b)^2$ para solucionar problemas

relacionados con el área de un cuadrado. Los estudiantes realizaron la lectura del problema, lo analizaron y finalmente la mayoría de ellos logró solucionarlo adecuadamente. Esta tarea constaba de un único problema por lo que fue fácil y rápida de desarrollar. Al finalizar la tarea, los estudiantes entregaron el diario del estudiante diligenciado.

Aunque habíamos planificado ocho sesiones para la unidad didáctica, su implementación se llevó a cabo en diez sesiones de 60 minutos.

Examen final

Para el desarrollo del examen final, habíamos previsto una sesión, pero fueron necesarias dos. Diseñamos el examen para desarrollarse individualmente. En esta actividad, presentamos seis numerales. Tres de estos numerales se referían a la parte algorítmica del producto $(a \pm b)^2$. En los numerales restantes, planteamos situaciones comunes para que los estudiantes las analizaran y le dieran solución, aplicando el producto $(a \pm b)^2$. La parte correspondiente a la aplicación del algoritmo no presentó mayores dificultades. Sin embargo, los numerales relacionados con solución de problemas no fueron desarrollados por gran parte de los estudiantes. Observamos que muy pocos estudiantes comprendieron y lograron desarrollar la situación referida a áreas circulares. Decidimos hacer cambios significativos a cada una de las tareas, pues hasta el momento solamente habíamos propuesto cambios menores. En cada tarea, incluimos una situación sobre áreas circulares. El examen final se encuentra en el anexo 10.

5. EVALUACIÓN DEL DISEÑO Y LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado, presentamos cuatro aspectos que nos permiten englobar la evaluación del diseño e implementación de nuestra unidad didáctica: el análisis de los logros de aprendizaje, el análisis del logro de las expectativas afectivas, el análisis de las dimensiones internas y externas de la matriz DAFO, y las propuestas de mejora para el nuevo diseño de la unidad didáctica del cuadrado del binomio.

1. ANÁLISIS DE LOS LOGROS DE APRENDIZAJE

Analizamos los resultados de los logros de aprendizaje teniendo en cuenta la evolución de la activación de secuencias de capacidades y la frecuencia de errores evidenciadas en las tareas y el examen final. Esto nos permitió identificar las secuencias de capacidades en las que los estudiantes presentaron mayor dificultad o bloqueos.

1.1. Resultados de los logros de aprendizaje

En la tabla 13, presentamos el análisis de las frecuencias relativas de activación de las secuencias de capacidades para el objetivo 1, incluyendo el examen y sus respectivas comparaciones. Los análisis de los objetivos 2 y 3 se encuentran en el anexo 11.

Tabla 13
Activación de secuencias de capacidades para el objetivo 1

Secuencias de capacidades	Frecuencia de activación		
	Total	Parcial	Nula
Rompecabezas			
SC1	61%	30,4%	8,6%
SC2	70%	30%	0%
SC3	30,4%	17,4%	52,2%
Testamento			
SC1	87,5%	12,5%	0%
SC2	50%	45,8%	4,2%
SC3	42%	30,4%	27,6%
SC4	42%	30,4%	27,6%
Examen			
SC1	77%	15,4%	7,6%
SC2	61,5%	30,8%	7,7%
SC3	69,2%	19,2%	11,6%
SC4	58%	27%	15%

Se puede observar, según los datos de la tabla, que las secuencias de capacidades son, en su mayoría, activadas total o parcialmente. En el examen, las activaciones totales de las secuencias de capacidades 3 y 4 aumentaron. Estas secuencias de capacidades se refieren a las representaciones simbólicas de áreas o longitudes de figuras rectangulares. Pensamos que esto se debe al uso de material concreto y de las representaciones pictóricas y geométricas dadas. Los estudiantes pudieron visualizar conceptos abstractos, no solo representados de manera simbólica y/o numérica, sino también relacionados con conocimientos previos como el área y longitudes de figuras cuadradas. Sin embargo, aquellos estudiantes que incurrieron en errores persistieron en las dificultades de relacionar una expresión algebraica con el lado del cuadrado y de relacionar el área con el binomio al cuadrado. Estos estudiantes incurrieron, con mayor frecuencia, en los errores previstos 1.2 y 2.1.

Concluimos que los errores en los que más incurrieron los estudiantes al desarrollar las tareas fueron el 2.10 y el 4.2, en los que los estudiantes evalúan la variable para trabajar numéricamente las actividades de las tareas, sin hacerlo simbólicamente. En la planilla de observación de logros y caminos de aprendizaje (Pestaña “Examen final Objetivo 1”, Anexo 12), observamos que la frecuencia con la que presentaron estos errores es de uno y cero, respectivamente. Una de las razones de la disminución de la frecuencia en estos errores es el entrenamiento que se dio en

las diferentes actividades de la unidad didáctica y la razón mencionada anteriormente. En el examen, observamos que los estudiantes que activaron nula o parcialmente la secuencia de capacidades 4, incurrieron en errores referentes a la expansión del cuadrado de la diferencia. Para estos ejercicios, no se presentaron representaciones geométricas y/o pictóricas; únicamente se presentó el binomio al cuadrado expresado de manera simbólica. Luego, los errores pudieron darse debido a la ausencia de algún tipo de representación. Es decir, que algunos estudiantes no pueden resolver ejercicios del cuadrado de un binomio si no “ven” su relación con lo concreto.

En conclusión, podemos afirmar que se alcanza el objetivo 1 de forma parcial, pues sólo un 57,7% activó totalmente las cuatro secuencias de capacidades y demuestra en el examen, superar las dificultades presentadas en actividades anteriores.

Analizar las frecuencias relativas de activación de secuencias de capacidades nos permite ubicar al estudiante en los niveles de desempeño manejados en las instituciones educativas en Colombia. En la tabla 14, presentamos los porcentajes de logro de los objetivos por niveles de desempeño para las tareas.

Tabla 14
Niveles de logro de los objetivos de aprendizaje de las tareas

Objetivo de aprendizaje	Nivel de logro			
	Bajo	Básico	Alto	Superior
1	25%	39%	22%	14%
2	12%	33%	22%	33%
3	17%	25%	29%	29%

En la tabla 15, registramos los niveles de logro de los objetivos de aprendizaje del examen, para luego contrastarlos con los niveles de logro alcanzados en las tareas.

Tabla 15
Niveles de logro de los objetivos de aprendizaje del examen final

Objetivo de aprendizaje	Nivel de logro			
	Bajo	Básico	Alto	Superior
1	11.5%	11.5%	11.5%	66.5%
2	19%	27%	27%	27%
3	50%	27%	16%	7%

Al realizar el contraste de los niveles de logro, llegamos a las siguientes conclusiones. Primero, para el objetivo 1, los errores en los que los estudiantes incurrieron durante el desarrollo de las tareas se superaron en el examen, pues los porcentajes alcanzados en los desempeños superior y alto en las tareas es del 36% y en el examen es del 78%. Segundo, para el objetivo 2, los porcentajes se mantienen en todos los niveles de logro. Pensamos que esto se debe a que los estudiantes

continúan presentando los mismos errores relacionados con la reducción de términos semejantes y la omisión de la variable en algunos de los términos del trinomio resultante. Finalmente, para el objetivo 3, se presenta una diferencia del 35% en los niveles de logro superior y alto. Es posible que esta diferencia se deba, por un lado, a la falta de ejercitación en la resolución de problemas y, por el otro, a que los estudiantes no habían abordado situaciones donde requieren el área del círculo.

1.2. Activación de secuencias de capacidades y errores más frecuentes

En la tabla 16, describimos el porcentaje de activación de las secuencias de capacidades que consideramos más relevantes debido al alto porcentaje de ocurrencia de errores. La frecuencia de estos errores se convierte en la pauta para hacer las mejoras en la unidad didáctica.

Tabla 16

Porcentaje de activación de secuencias de capacidades y de frecuencia de errores

Ob	Tareas	SC	Porcentaje de Activación			Porcentaje de errores más frecuentes							
			T	P	N	1.2	1.6	2.1	2.3	2.5	2.8	2.10	3.5
1	Rompecabezas	1	61	30	9							30	
1	Testamento	3	42	29	29							25	33
1	Testamento	4	42	29	29								17 12
2	Operando	3	41	52	7								26
2	Operando	4	15	63	22								22 11
3	Testamento	1	75	4	21								12
3	Testamento	3	29	50	21						12		62
3	Contenedor	4	64	32	4					36			
1	EF	1	77	15	8	23							
2	EF	2	62	19	19		23				4		
3	EF	3	19	31	50				11			31	

Nota: Ob = Objetivo; SC = Secuencia de Capacidades; EF = Examen Final; T = Total; P = Parcial; N = Nula; E = Error

El mayor porcentaje de activación nula se dio en el examen para el objetivo 3 que se refiere a la resolución de problemas. Esto se debe a la complejidad de los problemas dados en el examen y a la falta de ejercitación en situaciones que implican el área del círculo. A pesar de haber enunciado la fórmula que permite calcular el área del círculo, la mayoría de los estudiantes no encontraron cómo relacionar el área de la figura circular y el cuadrado del binomio, para encontrar la solución a la situación presentada. El error 2.10 hace referencia al uso de expresiones algebraicas que no corresponden con las dimensiones de los lados del rectángulo y del radio del círculo. Este error se presentó con mayor frecuencia en la tarea Testamento y se sigue presentando en el exa-

men con una disminución del 50%. Pensamos que la disminución se debe a la habilidad que algunos estudiantes fueron desarrollando en el manejo de expresiones algebraicas al ejecutar cada una de las actividades propuestas en la unidad didáctica. El error 2.3 se presenta tanto en la tarea, como en el examen. Sin embargo, no es posible hacer una comparación objetiva debido a que el 11% para el examen final no refleja la dificultad que los estudiantes realmente presentaron para expresar geométricamente un enunciado verbal. Como se observa en la tabla, el 50% de los estudiantes no realizaron el trabajo propuesto en los apartados del examen en los que debían resolver problemas.

Los errores 1.2 y 1.6 aparecen en el examen y no aparecen en las tareas. Pensamos que esto ocurrió porque, en el desarrollo de las tareas, se trabajó con material manipulativo y en el examen solo se presentaron dibujos de arreglos con fichas. Algunos de los errores en los que incurrieron los estudiantes se debieron a la presentación pictórica del arreglo, pues el espacio vacío tiene las mismas dimensiones de las fichas (figura 14) y esto llevó a algunos estudiantes a expresar el binomio al cuadrado con la diferencia y no con la suma.

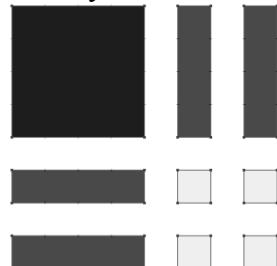


Figura 14. Presentación pictórica de un arreglo con fichas

1.3. Percepción de los estudiantes en el alcance de los logros de aprendizaje

La percepción de los estudiantes con respecto al alcance de los logros de aprendizaje es una variable importante. Su percepción, además de evidenciar lo que los estudiantes consideran un logro o una activación de capacidades, también muestra los errores en los que los docentes incurrimos a la hora de diseñar y/o redactar una serie de actividades para una unidad didáctica. La comparación entre la percepción del alcance de logros de los estudiantes y la activación de secuencias de capacidades nos permite analizar los resultados obtenidos en aquellas secuencias en las que identificamos mayor ocurrencia de errores. En la tabla 17, presentamos el resumen de la percepción que tuvieron los estudiantes y la activación de secuencias de capacidades relevantes de los logros de aprendizaje.

Tabla 17

Porcentajes de percepción de los estudiantes y de activación de secuencias de capacidades

Tabla 17

Porcentajes de percepción de los estudiantes y de activación de secuencias de capacidades

Ob	Tarea	SC	Percepción de los estudiantes			Activación de secuencias de capacidades		
			V	A	R	T	P	N
1	Testamento	4	63	33	4	42	29	29
2	Operando	3	69	31	0	41	52	7
2	Operando	4	81	19	0	15	63	22
3	Testamento	1	58	42	0	75	4	21
3	Testamento	3	71	29	0	29	50	21
3	Contenedor	4	68	32	0	64	32	4

Nota: Ob = Objetivo; SC = Secuencia de capacidades; V = Verde; A = Amarillo; R = Rojo; T = total; P = parcial; N = Nula

Al realizar la comparación entre los semáforos y los porcentajes de activación de las secuencias de capacidades relevantes, encontramos diferencias considerables. Para el objetivo 1, en las secuencias de capacidades 3 y 4 de la tarea Testamento, los estudiantes percibieron haberlas activado en un 71% y 63% respectivamente. Sin embargo, los resultados muestran un 29% de activación nula para las dos secuencias. Pensamos que esto puede deberse a la ocurrencia de errores relacionados con conceptos previos, que se refieren al manejo de expresiones algebraicas y su relación con las dimensiones de figuras rectangulares. Un ejemplo de este tipo de error es considerar equivalentes las expresiones $4x$ y $x+4$.

En el objetivo 2, encontramos que los estudiantes percibieron haber activado las secuencias de capacidades 3 y 4 en un 69% y 81%, respectivamente. La activación total de la secuencia de capacidades 3 se presentó en un 41% y en la secuencia de capacidades 4 en un 15%. La diferencia entre los porcentajes puede deberse a la dificultad de identificar procesos recurrentes, para obtener una expresión algebraica que permita modelar la generalización del binomio al cuadrado.

En el objetivo 3, según los estudiantes, la activación para la secuencia de capacidades 1 es de 58%, mientras que para nosotros presentó una activación total del 71%. Creemos que la diferencia se debió a la falta de confianza del estudiante, pues era la primera vez, durante la implementación, que se enfrentaba a un problema. Puede que el estudiante hubiese presentado inseguridad, al no conocer si usó o no correctamente los datos que suministraba la situación. En la secuencia de capacidades 3, la percepción de activación del estudiante es del 71%; para nosotros corresponde al 29%. Pensamos que esto se debe a la dificultad que los estudiantes presentaron para traducir del sistema geométrico al sistema simbólico. Los estudiantes seguían incurriendo en los mismos errores que se refieren a este aspecto, descritos en los párrafos anteriores.

2. LOGRO DE EXPECTATIVAS AFECTIVAS

Para valorar las expectativas afectivas, nos basamos en el semáforo, el matematógrafo, la autoevaluación y el cuestionario final. Estos dos últimos instrumentos se aplicaron al finalizar la implementación. La autoevaluación es un instrumento obligatorio que se aplica en la institución en la que se llevó a cabo la práctica. La diseñamos teniendo en cuenta las expectativas afectivas formuladas en el diseño previo de la unidad didáctica. En el cuestionario final, los estudiantes responden cinco preguntas que permiten evidenciar cómo se sintieron en la ejecución de las tareas. Nos centramos en los aspectos que, a nuestro modo de ver, se relacionan con la motivación de los estudiantes al realizar las tareas de la unidad didáctica. En la tabla 18, mostramos el análisis comparativo entre lo planeado para las expectativas afectivas y lo relacionado en los matematógrafos por parte de los estudiantes.

Tabla 18
Resultados del matematógrafo en variables afectivas

Objetivo	Tarea	Promedios ponderados				
		Comprensión	Desarrollo	Motivación	Previos	Compartir
1	Rompecabezas	3.7	3.7	4.3	3.4	3.9
1	Testamento	4.1	4.0	4.2	4.1	3.5
2	Operando	3.7	3.8	3.5	4.1	4.0
3	Contenedor	3.9	3.3	3.8	3.8	3.5
3	Testamento	4.1	4.0	4.2	4.1	3.5

Nota: Comprensión = la presentación de la tarea me pareció clara, pude comprender lo que me pedía; Desarrollo = me fue posible desarrollar todos o la mayor parte de los pasos; Motivación = la situación presentada me pareció interesante y me motivó para desarrollarla; Previos = los conceptos que debía aplicar en la tarea ya los conocía; Compartir = compartí con mis compañeros mis opiniones y esto me aportó en la solución de mi tarea.

De la autoevaluación, tomamos tres aspectos para la valoración de las expectativas afectivas:

- ◆ con mi actitud y participación contribuyo al buen desarrollo de las actividades;
- ◆ la relación de trabajo con mi grupo propició el buen desempeño del mismo; y
- ◆ desarrollo estrategias que me permiten solucionar problemas relacionados con los productos notables.

Del cuestionario final, los aspectos que seleccionamos corresponden a los numerales 1, 4 y 5.

1. ¿Cuál de los materiales usados en clase le gustó más? ¿Por qué?
4. ¿La actividad lo motivó a valorar y respetar las ideas propias y las de los demás?
5. ¿La forma en la que se desarrollaron las diferentes actividades le facilitó comprender el tema?

Para facilitar el contraste, ponderamos los aspectos elegidos de la autoevaluación como se muestra en la tabla 19, en la que especificamos la valoración que los estudiantes le asignaron y la frecuencia con la que se dio en cada aspecto.

Tabla 19

Frecuencias y ponderados de la autoevaluación en variables afectivas correspondientes a motivación

Valoración	Actitud y participación	Relación de trabajo	Desarrollo de estrategias
5	2	6	4
4.5	3	4	2
4	8	11	6
3.5	4	2	4
3	7	1	8
Ponderado	3.7	4.2	3.8

Nota: Actitud y participación = con mi actitud y participación contribuyo al buen desarrollo de las actividades; Relación de trabajo = la relación de trabajo con mi grupo propició el buen desempeño del mismo; Desarrollo estrategias = desarrollo estrategias que me permiten solucionar problemas relacionados con los productos notables

De acuerdo con los resultados obtenidos en las tablas y las respuestas dadas en los numerales elegidos del cuestionario final, nos damos cuenta que los estudiantes se sintieron motivados en el desarrollo de las diferentes tareas. Sin embargo, muestran mayor motivación en aquellas en las que se emplearon materiales manipulativos. Como lo muestra la tabla 18, la tarea Rompecabezas obtiene una valoración de 4.3 en el aspecto de motivación. Este aspecto también se ve reflejado en las respuestas que dan los estudiantes en el numeral 1 del cuestionario final: “me gustó más formar el cuadrado con las fichas algebraicas porque nos hacía entender mejor el tema”, “...las fichas porque me ayudaban a hallar más rápido y correctamente cada producto”, “...trabajar con el fomi (rompecabezas), pues completábamos la figura y hallábamos la expresión algebraica”.

La tabla 18 también muestra que la tarea Operando obtiene un ponderado de 3.5 en la motivación, pese a trabajarse con fichas algebraicas. Pensamos que esto se debe al inconformismo que reflejaron los estudiantes al organizarse los grupos de trabajo de forma aleatoria y no de acuerdo con sus afinidades personales. También puede haber influido el momento en el que se presentó la tarea dentro de la unidad didáctica, ya que era la primera, y los estudiantes no estaban acostumbrados a la metodología de trabajo (por ejemplo, formación de grupos de forma aleatoria, utilización de material didáctico en la clase de matemáticas, argumentación de procesos y compartir ideas). Aunque la organización de los grupos no los motivó al iniciar, su motivación fue cambiando tal como se evidencia en las respuestas al numeral 4 del cuestionario final: “...sí porque nos damos cuenta que todos tienen ideas muy buenas, que pueden servir para algo muy bueno”, “... sí porque a veces estaba equivocado y las ideas de los demás están en lo correcto”, “... sí porque nos colaborábamos y podíamos resolver más rápido los productos”. Podemos con-

cluir que las expectativas afectivas propuestas se lograron, como se evidencia en las tablas de este apartado y en algunos ejemplos de la autoevaluación y cuestionario final.

3. BALANCE ESTRATÉGICO DEL PROCESO Y PLAN DE MEJORA

Para el balance estratégico del proceso de implementación y diseño de la unidad didáctica del cuadrado del binomio, utilizamos el análisis DAFO. Esta técnica constituye una herramienta analítica y estructurada para valorar organizaciones y programas de actuación en una amplia diversidad de situaciones (Lupiáñez y Gómez, 2014). Trujillo (2011), en su blog, afirma que, en una situación educativa,

el (análisis) DAFO tiene muchas posibles aplicaciones tanto en el ámbito personal (por ejemplo, en tutorías con nuestros estudiantes o para reflexionar sobre nuestro propio desarrollo profesional) como en el ámbito colectivo, para el diseño eficaz de un proyecto educativo o para la evaluación y redacción de la memoria final de curso.

El plan de mejora de la unidad didáctica pretende encontrar estrategias que permitan minimizar las amenazas y superar las debilidades que identificamos con el análisis DAFO.

3.1. Análisis DAFO

El análisis DAFO contempla dos dimensiones: la dimensión interna (fortalezas y debilidades) y la dimensión externa (oportunidades y amenazas). La dimensión interna identifica aquellos aspectos del diseño e implementación que necesitan modificarse para potenciar las fortalezas o superar las debilidades. Son aspectos inherentes a la unidad didáctica y que su solución está en nuestras manos. La dimensión externa está conformada por aquellos aspectos que nosotros no podemos solucionar, pero que de algún modo afectan, positiva o negativamente, el desarrollo de la unidad didáctica. A continuación, presentamos nuestro análisis DAFO, de acuerdo con estas dimensiones.

Debilidades

Al analizar el diseño e implementación de la unidad didáctica, pudimos observar que, entre las debilidades más relevantes, se hallan las siguientes.

Uso del lenguaje y presentación de la tarea de forma ambigua. En algunas de las tareas, las instrucciones no fueron lo suficientemente claras. Esto hizo que hubiera interpretaciones y soluciones distintas a las que nosotros esperábamos. Fue el caso de la tarea Rompecabezas en el literal c, donde la instrucción dada decía: “Comparar los resultados obtenidos en los literales anteriores. ¿Qué diferencias y similitudes encuentran en dichos resultados?”. Pretendíamos que los estudiantes compararan y concluyeran que los resultados en los dos literales eran iguales. Sin embargo, los estudiantes compararon los resultados que cada uno de ellos obtuvo en cada literal.

Ausencia de una actividad como alternativa para tareas que requieran recursos informáticos. Esta debilidad se evidenció al implementar la tarea La granja, que necesitaba de Geogebra para su desarrollo. Debido a una falla en el servicio de Internet y al no haber disponibilidad en la sala

para desarrollarla después, no fue posible culminar la actividad y obtener los resultados esperados.

Escasa ejercitación en actividades relacionadas con áreas, análisis y solución de problemas. Dentro del diseño de la unidad didáctica, son escasas las situaciones en las que se planteen problemas para que los estudiantes realicen una ejercitación aplicando el cuadrado del binomio, no solo en áreas rectangulares, sino también en circulares. Esto se evidencia en los resultados del examen.

Fortalezas

En cuanto a los aspectos positivos encontrados al interior de la unidad didáctica, resaltamos los siguientes.

La utilización de material manipulativo. La construcción y uso de diferentes materiales manipulativos, como puzzles y fichas algebraicas, permitió que los estudiantes se encontrarán motivados para el desarrollo de las tareas. Además, según las evidencias encontradas en el diario del estudiante, esto les permitió comprender mejor el tema.

Disposición favorable y entusiasmo de los estudiantes para el desarrollo de las actividades. Los estudiantes siempre se mostraron en buena disposición y cumplieron con los requerimientos de las actividades. Esto favoreció la implementación de la unidad didáctica.

Manejo de conceptos asociados a situaciones prácticas. Asociar el cuadrado de un binomio con el cálculo de áreas permitió que los estudiantes construyeran un puzzle que demostrará la aplicación geométrica del tema.

Amenazas

Entre los aspectos externos que pueden obstaculizar el logro de algunas metas propuestas, mencionamos los siguientes.

Disponibilidad limitada de recursos informáticos. Aunque la institución cuenta con dos salas de informática para bachillerato, en ocasiones no están disponibles para el momento en que es pertinente el desarrollo de alguna actividad. Esto imposibilitó, por ejemplo, culminar la tarea La granja.

Organización de los horarios en la institución. Por políticas institucionales, los horarios están organizados en sesiones de clase de 60 minutos para cada asignatura. Esto hace que el tiempo no sea efectivo, pues algunas actividades podrían requerir de mayor tiempo para su desarrollo, socialización y comprensión.

Relación tiempo-contenido. Para la institución, es importante abarcar la mayor parte de los contenidos que se encuentran estipulados por el MEN, por lo que se hacen controles periódicos al cumplimiento de los docentes en este aspecto en cada grado. El trabajo con unidades didácticas requiere de un tiempo superior al de una clase tradicional, pues se le da al estudiante el espacio para que construya su propio conocimiento, por lo que el contenido planeado no se abarcaría.

Oportunidades

De acuerdo con las condiciones de la institución, identificamos las siguientes oportunidades.

Disposición favorable de las directivas de la institución para la implementación de proyectos que cualifican la labor docente. Las directivas de la institución están interesadas en mantener el nivel superior en las pruebas Saber 11 y en apoyar la cualificación del personal docente. Por esta razón, abre las puertas a aquellos proyectos encaminados a lograr estos objetivos.

Multiplicar las experiencias adquiridas en el desarrollo de la unidad al interior del área en la institución. Es importante dar a conocer la experiencia del docente en aspectos que fortalecen la formación académica a sus compañeros. Así, es posible universalizar en la institución las metodologías que favorezcan el aprendizaje significativo.

Permite promover habilidades comunicativas en los estudiantes. El planteamiento de las discusiones académicas entre los estudiantes incentiva el análisis crítico y la comunicación entre los participantes.

3.2. Plan de mejora

Teniendo en cuenta las debilidades y amenazas descritas en el apartado anterior, proponemos algunos ajustes que permitirían suavizar los efectos negativos que pueden ocasionar estos aspectos.

Minimización de debilidades

Para la falta de ejercitación en el trabajo respecto al área de regiones circulares, análisis y solución de problemas, incluiremos algunos apartados en los que el estudiante manipula y trabaja el cálculo de áreas de figuras circulares. Por ejemplo, en la tarea diagnóstico se incluirá una situación en la que el estudiante debe calcular el área de círculos concéntricos. Debido a estos cambios, se hace necesario el ajuste de los caminos de aprendizaje que incluyan las capacidades relacionadas con la actividad reformada.

Otra de las debilidades de la unidad didáctica fue no haber diseñado una actividad alternativa para tareas que requieran recursos informáticos. Este aspecto se refiere especialmente a la tarea La granja en la que se utiliza un software educativo. Por tal motivo, planeamos una actividad que permita activar las capacidades implicadas en la tarea que no fue posible desarrollar.

Otra debilidad detectada se refiere al uso del lenguaje y presentación de la tarea de forma ambigua. En este caso, cambiamos la forma como están redactados algunos apartados. En otros casos, los eliminamos o creamos nuevos enunciados en algunas tareas. Por ejemplo, en la tarea Rompecabezas, reformamos el trabajo individual para aclararle al estudiante lo que debe comparar en el trabajo colaborativo.

Preparación frente a las amenazas

Para futuras implementaciones, creemos que podemos mitigar las amenazas con las siguientes estrategias. En el caso de la disposición limitada de la sala de informática para la implementación de actividades con software educativo, diseñaremos una actividad alternativa para la tarea que lo requiera. Para el aspecto relacionado con la organización de los horarios por parte de los directivos, que no es posible cambiar a voluntad, recurriremos a la disposición favorable de compañe-

ros docentes con los cuales podamos negociar cambios o que ellos nos concedan algunas horas de su asignación académica. La relación tiempo-contenido se escapa de nuestro control, pues en la institución se deben presentar resultados cada periodo y cada año escolar.

6. NUEVO DISEÑO

El diseño final de la unidad didáctica es resultado del análisis DAFO hecho a la unidad didáctica implementada y del plan de mejora propuesto. En los siguientes apartados, describimos los cambios hechos y la nueva propuesta de unidad didáctica. En el nuevo diseño de unidad didáctica, mantendremos las competencias y los objetivos propuestos en el apartado 2.2.1, así como los grafos de los objetivos del apartado 2.2.2. La significatividad del apartado 2.4.2 y la complejidad del apartado 2.4.3 tampoco fueron modificadas. La distribución de las sesiones de clase y la función de las tareas descritas en el apartado 2.3.1 cambió únicamente para la tarea La Granja, dado que esta tarea anteriormente era la quinta de la secuencia y ahora es la cuarta. Así mismo, la funcionalidad de la tarea La Granja antes era de desarrollo y cierre y ahora cumple solamente la función de desarrollo. Debido a los cambios efectuados en las tareas, modificamos el listado de capacidades y errores y, en consecuencia, los caminos de aprendizaje y las fichas de las tareas.

1. NUEVO LISTADO DE CAPACIDADES

El listado de capacidades propuesto en la tabla 2 del apartado 2.2.2 fue reformado; generamos un nuevo listado de capacidades. Eliminamos aquellas capacidades que no fueron activadas, que eran repetitivas o que describían conceptos previos. Modificamos las capacidades que resultaban confusas e incluimos nuevas capacidades asociadas al cálculo de áreas de regiones circulares.

Las capacidades C7 y la C8 fueron eliminadas debido a que la unidad didáctica está diseñada únicamente para desarrollar un binomio al cuadrado. La capacidad C12 fue una de las capacidades que fue reformada. La nueva capacidad dice: “elige y ubica cada una de las fichas algebraicas, teniendo en cuenta los lados de las fichas adyacentes”. Incluimos la capacidad: “expresa el área de regiones circulares en términos del binomio al cuadrado”. El nuevo listado de capacidades se encuentra en el anexo 13.

2. NUEVO LISTADO DE ERRORES

El listado de errores propuesto en la tabla 3 del apartado 2.2.2 fue reformado; generamos un nuevo listado de errores. Eliminamos o modificamos los errores que resultaban confusos e in-

cluimos nuevos errores según el análisis hecho al diseño de implementación de la unidad didáctica.

Uno de los errores que modificamos es el E2.3, debido a que era muy general y confuso. Incluimos errores asociados al cálculo de áreas de regiones. El nuevo listado de errores se encuentra en el anexo 14.

3. NUEVOS CAMINOS DE APRENDIZAJE DE LAS TAREAS

En la figura 15, presentamos el nuevo camino de aprendizaje de la tarea Rompecabezas. Este incluye las nuevas capacidades y los nuevos errores.

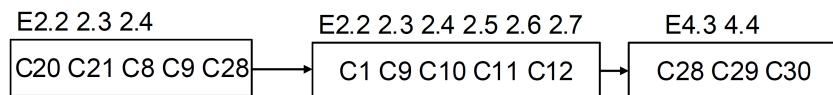


Figura 15. Nuevo camino de aprendizaje de la tarea Rompecabezas

Los caminos de aprendizaje de las demás tareas están en el anexo 15.

4. NUEVOS SEMÁFOROS DE LAS TAREAS

En la figura 16 presentamos el nuevo semáforo de la tarea Rompecabezas.

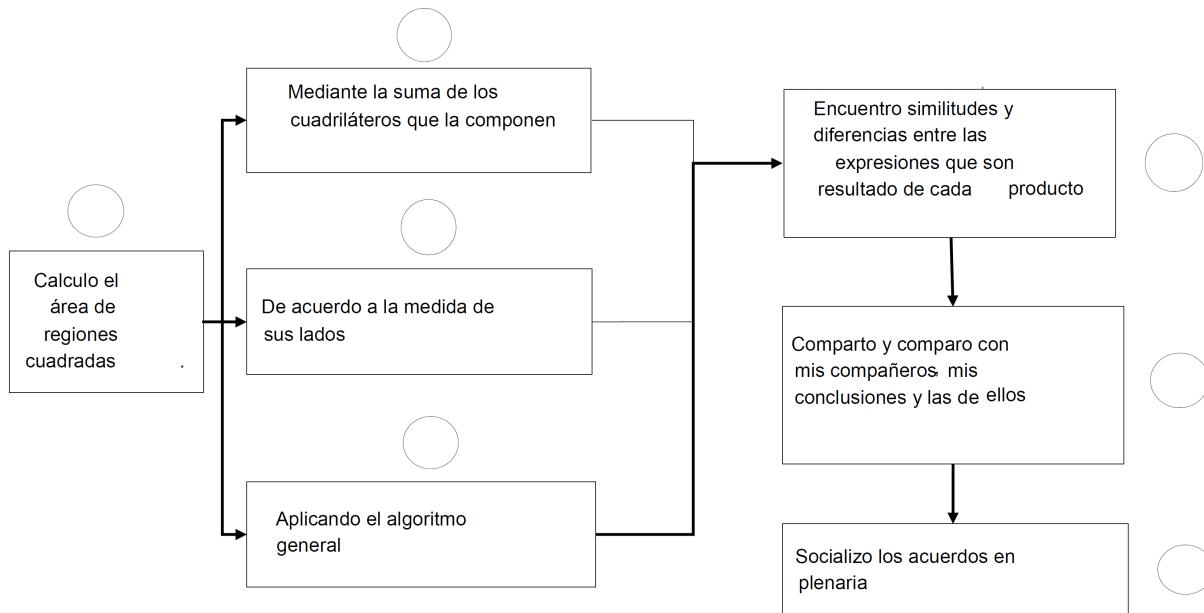


Figura 16. Nuevo semáforo de la tarea Rompecabezas

Los nuevos semáforos de las demás tareas se encuentran en el anexo 16.

5. FICHAS DE LAS NUEVAS TAREAS

Modificamos las fichas de las tareas de acuerdo con la eliminación o inclusión de apartados. Presentamos la ficha de la nueva tarea Rompecabezas en la tabla 20.

Tabla 20
Tarea Rompecabezas

Meta	Se espera que el estudiante, mediante el trabajo realizado en la tarea, infiera que el área de cualquier cuadrado se puede descomponer en dos rectángulos iguales y dos cuadrados distintos, cuyos lados corresponden a cada uno de los lados del rectángulo. Además, se espera que lo relacionen con el trinomio que representa dicha área.
Objetivo	1. Expresar el área de diferentes regiones rectangulares aplicando el cuadrado de un binomio.
Formulación	La formulación de esta tarea está dada a manera de instrucción. En la etapa de trabajo de individual, el estudiante debe calcular el área de las diferentes regiones rectangulares que componen un cuadrado. Luego, debe calcular el área del cuadrado recomposto. En el trabajo colaborativo, los estudiantes deben comparar los resultados obtenidos en los numerales anteriores y concluir que la suma de las áreas es igual al área del cuadrado. Además, al hacer uso de rompecabezas algebraicos, los estudiantes deben inferir cuál es el área de un cuadrado de lado ($a + b$).
Material	Para esta tarea se usarán varios puzzles (que representan de forma geométrica binomios al cuadrado), fotocopia con las instrucciones de la tarea, lápiz, papel, tijeras, marcadores y foami.
Formas de Agrupamiento	Se trabaja en forma individual durante la primera fase. Luego, los estudiantes se reúnen en parejas para desarrollar la segunda parte.
Esquema de Interacción	Estudiante – estudiante Profesor – estudiante Profesor - gran grupo Estudiante - gran grupo
Temporalidad	Saludo y explicación de la tarea (10 minutos) Entrega y descripción del material (5 minutos) Realización de la fase uno de la tarea (30 minutos) Conformación de los grupos (5 minutos) Realización de la fase dos de la tarea (30 minutos) Socialización de las presentaciones, conclusiones y registro en el diario del estudiante (40 minutos)

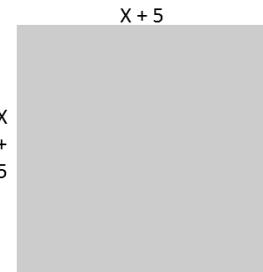
Las fichas de las demás tareas se encuentran en el anexo 17.

6. NUEVA TAREA ROMPECABEZAS

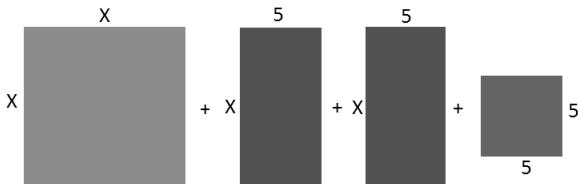
Presentamos la nueva tarea Rompecabezas. Las demás tareas nuevas se encuentran en el anexo 18 y el nuevo examen final en el apartado 19.

Trabajo individual

A. Calcule el área del siguiente cuadrado.



B. Escriba el trinomio que resulta de la suma de las áreas de los rectángulos, que aparecen a continuación.

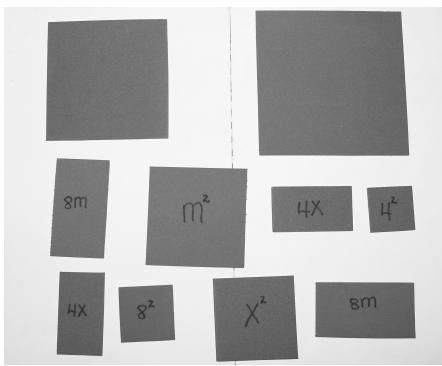


C. Observe las áreas obtenidas en los literales A y B, compare dichos resultados y escriba en qué se parecen.

D. Recorte las figuras del literal B y recubra con ellas, el cuadrado del literal A. Describa qué sucede.

Trabajo colaborativo

El trabajo colaborativo se realiza en grupos de dos personas.



- E. Comparen los resultados obtenidos en los literales anteriores. ¿Se puede afirmar que el área del cuadrado del literal A, es igual a la suma de las áreas del literal B? ¿Por qué?
- F. Recubran completamente cada uno de los cuadrados azules, utilizando las fichas correspondientes. Recordar que para cada cuadrado existe un único juego de fichas.
- G. Escriban la expresión para el área de cada cuadrado obtenido y la dimensión del lado de cada uno.
- H. Escriban simbólicamente, una expresión que relacione el lado del cuadrado y el área obtenida.
- I. Teniendo en cuenta las actividades realizadas anteriormente, construyan un rompecabezas que represente el área de un cuadrado de lado $(a + b)$. Expongan su construcción ante los demás compañeros.

7. CONCLUSIONES

El análisis didáctico nos dio herramientas para el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica del cuadrado de un binomio. Describimos el tema matemático en términos de los conceptos y los procedimientos implicados. El estudio de los sistemas de representación hizo posible ver el concepto de diferentes maneras. La fenomenología nos permitió ubicar el tema dentro de fenómenos cercanos al estudiante. Estos tres aspectos fueron fundamentales para diseñar tareas que fueran motivadoras, significativas y que facilitaran la comprensión del tema. Luego de caracterizar la estructura conceptual el cuadrado del binomio, seleccionamos las competencias acordes al tema de acuerdo con los documentos de lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998), estándares básicos de competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006) y los estudios PISA (OCDE, 2003). Planteamos los objetivos que esperábamos lograr al finalizar la implementación de la unidad didáctica, las capacidades que pretendíamos que los estudiantes activaran y las dificultades que podrían presentar. El aspecto afectivo también fue importante en el diseño de nuestra unidad didáctica, por lo que propusimos las expectativas afectivas con las que pretendíamos contribuir al desarrollo personal de los estudiantes. Teniendo en cuenta los análisis hechos anteriormente, diseñamos cada una de las tareas. Los componentes, la significatividad y la complejidad de las tareas nos ayudaron a determinar su pertinencia y su secuencia de desarrollo.

En la implementación de la unidad didáctica, el número de sesiones fue mayor a las previstas; algunos enunciados de algunas tareas no fueron claros; los estudiantes presentaron resultados no esperados; y una de las tareas no pudo ser correctamente implementada por fallas en el servicio de Internet y en la disposición de la sala de informática. En el examen final, evidenciamos falencias relacionadas con la solución de problemas de áreas circulares y fallas en el diseño de las gráficas presentadas, lo que llevó a los estudiantes a incurrir en errores. Para analizar los resultados obtenidos en el diseño y la implementación de la unidad didáctica, fue necesario elaborar instrumentos que nos permitieran recolectar información sobre la actuación de los estudiantes y del docente. Podemos afirmar, según este análisis, que el logro de los objetivos planteados inicialmente se cumplió de manera parcial. Hubo mayor alcance en las tareas en las que se utilizó material manipulativo, puesto que este recurso facilitó la comprensión de los conceptos matemáticos. A partir de las fortalezas y debilidades identificadas, propusimos una nueva unidad didáctica del cuadrado de un binomio, para futuras implementaciones.

El trabajo en el aula con la unidad didáctica fortaleció la autonomía de los estudiantes en su proceso de aprendizaje y fomentó una visión crítica de su trabajo y el de sus compañeros. Los resultados de los estudiantes del curso 804, con respecto a otros cursos del mismo grado en los que no se implementó la unidad didáctica, se ven reflejados en los aportes que realizan durante la clase y en un mejor rendimiento académico en el área de matemáticas.

El trabajo durante estos dos años en MAD nos brindó herramientas para la planificación de cualquier actividad en el aula apoyada en el análisis didáctico. Nos sensibilizó para utilizar un lenguaje apropiado y varias representaciones de un mismo concepto, y nos dio una pauta para activar en el estudiante el sentido de apropiación de su proceso de aprendizaje que permitiera la construcción de su propio conocimiento. Antes de MAD, la planificación de nuestras clases se limitaba a la preparación del tema para que los estudiantes respondieran lo que nosotros queríamos de manera mecánica. Luego de la experiencia en la maestría, somos conscientes de la importancia de prever las dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir y de planificar las ayudas oportunas que contribuyan a la superación de esas dificultades.

La metodología que se usa en MAD nos permitió aprovechar la experiencia de nuestros tutores, formadores y compañeros al abordar y socializar las actividades propuestas en los diferentes módulos. Los comentarios realizados por nuestros compañeros a cada una de las actividades aportaron significativamente en la construcción y fortalecimiento de nuestra unidad didáctica. Nos ayudaron a ver nuestras falencias y nos brindaron alternativas para superarlas.

En resumen, estamos convencidos que, después del paso por MAD, nuestro trabajo como docentes es distinto. Somos docentes dinámicos, motivados, con la disposición de ayudar a nuestros estudiantes a construir su conocimiento, multiplicadores de nuevas metodologías que ayuden a nuestros colegas a mejorar su práctica en el aula, proyectándonos en las instituciones donde trabajamos.

8. REFERENCIAS

- Cañadas, M. C. y Gómez , P. (2012). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1983/>
- Diego, J. M. (2011). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria and Cyprus.* Mathematics Education. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cambridge, Cambridge.
- Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2061/>
- Giné, N. y Parcerisa, A. (2003). *Planificación y análisis de la práctica educativa.* Barcelona: Graó. Disponible en <http://tinyurl.com/c394qpo>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- González, M. J. y Gómez , P. (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://tinyurl.com/n4zgncc>
- Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2014). *Apuntes sobre evaluación de la planificación. Módulo 6 de MAD.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- McLeod, D. B. y Adams, V. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective.* Berlin: Springer-Verlag.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/7t988s5>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Autor. Disponible en <http://is.gd/kqjT0a>

- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE. Disponible en <http://tinyurl.com/9wmr4ct>
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana. Disponible en <http://tinyurl.com/8c3w873>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en <http://is.gd/LBFU1R>
- Trujillo, F. (2011). El análisis DAFO en el diseño de proyectos educativos: una herramienta empresarial al servicio de la educación. Descargado el 16 de septiembre de 2011, de <http://www.educacontic.es/blog/el-analisis-difo-en-el-diseno-de-proyectos-educativos-una-herramienta-empresarial-al-servicio>