MC-202
Árvores B

Iago A. Carvalho
iagoac@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2020

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

- Onde armazenar os dados?

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

- Onde armazenar os dados?

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

- Onde armazenar os dados?
- Qual estrutura de dados?

Introdução

Um problema: Trabalhamos com $1.000.000$ de registros e cada um pode ser muito grande (uma foto, por exemplo). Portanto, não podemos guardá-los todos na memória. Toda vez que executamos um programa, temos que executar cerca de 1000 consultas nesse banco de dados.

- Onde armazenar os dados?
- Qual estrutura de dados?

Tentativa: usar uma árvore binária de busca balanceada no disco

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

TEMPO

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

TEMPO $= 1000$ buscas

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

$$\text{TEMPO} = 1000 \text{ buscas} \times 20 \text{ nós/busca}$$

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

$$\text{TEMPO} = 1000 \text{ buscas} \times 20 \text{ nós/busca} \times 5 \text{ ms/nó}$$

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

$$\text{TEMPO} = 1000 \text{ buscas} \times 20 \text{ nós/busca} \times 5 \text{ ms/nó} = 100 \text{ s}$$

Verificando nossa tentativa

Quanto tempo vai levar para realizar as 1000 consultas?

- ler um nó no disco pode demorar 5 ms
- a árvore tem $1.000.000$ de nós
- a altura é de $\log_2(1.000.000) \approx 20$ nós

$$\text{TEMPO} = 1000 \text{ buscas} \times 20 \text{ nós/busca} \times 5 \text{ ms/nó} = 100 \text{ s}$$

Solução: diminuir a altura da árvore para diminuir número de leituras no disco

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache
  - Muito próxima do processador para ter acesso rápido

Hierarquia de Memória

A memória do computador é dividida em uma hierarquia:

- HDD (*Hard Disk Drive*) ou SSD (*Solid-State Drive*)
  - Memória permanente, onde gravamos arquivos
  - Chamada de memória secundária
- RAM (*Random-Access Memory*)
  - Onde são armazenados os programas em execução
    - e a memória alocada pelos mesmos
  - Memória volátil, é apagada se o computador é desligado
- Memória Cache
  - Muito próxima do processador para ter acesso rápido
  - A informação é copiada da RAM para a Cache

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3
RAM	2 a 20 GB/s	até 64 GB	7,5

[1] em um processador 2GHz

Comparação entre Memórias

	Velocidade	Tamanho	US$ por GB
HDD	até 200 MB/s	até 4TB	0,05
SSD	200 a 2500 MB/s	até 512 GB	0,3
RAM	2 a 20 GB/s	até 64 GB	7,5
Cache	32 a 64 GB/s[1]	até 25 MB	não é vendida

[1] em um processador 2GHz

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento
  - queremos ler o menor número de páginas possível

Estruturas em Disco e Páginas

Queremos armazenar registros na memória secundária:

- A informação não cabe na memória principal
  - ou queremos que a informação seja permanente
- A memória secundária é dividida em páginas
  - usualmente de 2MB a 16MB
- Se a página está na memória, podemos acessá-la
- Se não está, precisamos lê-la na memória secundária
- O acesso a memória secundária é muito mais lento
  - queremos ler o menor número de páginas possível
  - acessar páginas que estão na memória é rápido

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
    - são agnósticos em relação a linguagem de programação

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

- $\textsc{LeDoDisco}(x)$: lê x da memória secundária

Pseudocódigo e leitura/escrita de páginas

Usaremos pseudocódigo para apresentar a ED:

- Transmitem a ideia principal de um algoritmo
- Não há preocupação com detalhes de implementação
  - são agnósticos em relação a linguagem de programação
- É uma forma mais abstrata de falar de algoritmos
- Precisamos tomar o cuidado de:
  - Deixar o algoritmo explicito
  - E que cada passo possa ser feito pelo computador

Se x é ponteiro para um objeto na memória secundária

- LeDoDisco(x): lê x da memória secundária
- EscreveNoDisco(x): grava x na memória secundária

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca

Árvores M-árias de Busca

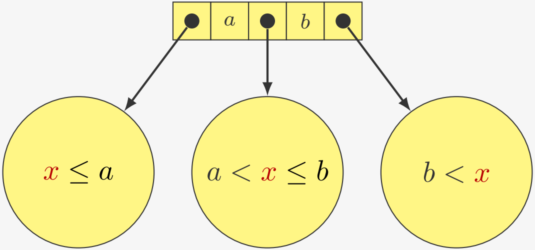
Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos

Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

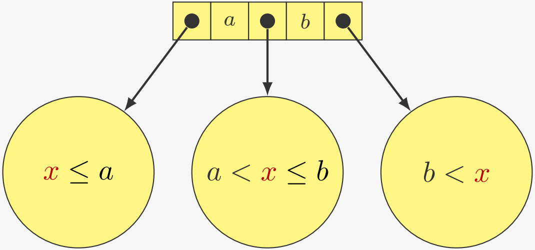
- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos



Árvores M-árias de Busca

Podemos generalizar árvores binárias de busca

- Ex: árvores ternárias de busca
  - Nó pode ter 0, 1, 2 ou 3 filhos



Como fazer busca?

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$
  - $x.chave[i\text{-}1] < k < x.chave[i]$ caso contrário

Árvores B

São árvores M-árias de busca com propriedades adicionais

Cada nó x tem os seguintes campos:

- $x.n$ é o número de chaves armazenadas em x
- $x.chave[i]$ é i-ésima chave armazenada
  - $x.chave[1] < x.chave[2] < \cdots < x.chave[x.n]$
- $x.folha$ indica se x é uma folha ou não

Cada nó interno x contém $x.n + 1$ ponteiros

- $x.c[i]$ é o ponteiro para o i-ésimo filho
- se a chave k está na subárvore $x.c[i]$, então
  - $k < x.chave[1]$ se $i = 1$
  - $x.chave[x.n] < k$ se $i = x.n + 1$
  - $x.chave[i\text{-}1] < k < x.chave[i]$ caso contrário

O $T.raiz$ indica o nó que é a raiz da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t-1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos

Propriedades das Árvores B

Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t - 1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t - 1$ chaves

Propriedades das Árvores B

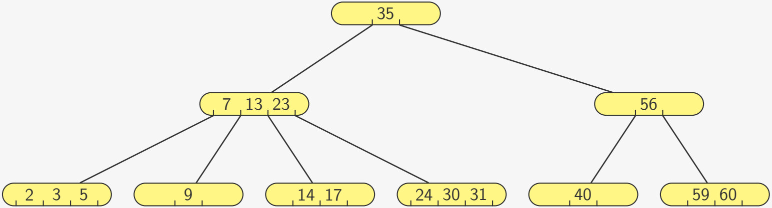
Toda folha está à mesma distância h da raiz

- h é a altura da árvore

Existe uma constante t que é o grau mínimo da árvore

- Todo nó exceto a raiz precisa ter pelo menos $t-1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem pelo menos t filhos
- Todo nó tem no máximo $2t-1$ chaves
  - ou seja, cada nó interno tem no máximo $2t$ filhos

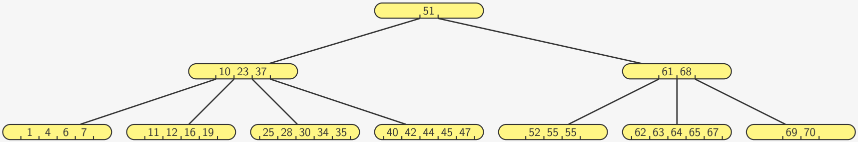
Exemplo



Para $t = 2$:

- cada nó não raiz tem pelo menos 1 registro
- cada nó tem no máximo 3 registros

Outro exemplo



Para $t = 3$:

- cada nó não raiz tem pelo menos 2 registros
- cada nó tem no máximo 5 registros

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos têm pelo menos $2t$ filhos

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos têm pelo menos $2t$ filhos
- que têm pelo menos $2t^2$ filhos

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos têm pelo menos $2t$ filhos
- que têm pelo menos $2t^2$ filhos
- e assim por diante

Altura de uma Árvore B

Uma árvore B com n chaves tem altura $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$

- a raiz tem pelo menos 2 filhos
- esses filhos têm pelo menos $2t$ filhos
- que têm pelo menos $2t^2$ filhos
- e assim por diante

A árvore é muito larga e muito baixa!

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes às árvores **rubro**-**negras**

Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

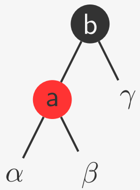
- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes às árvores **rubro-negras**



Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

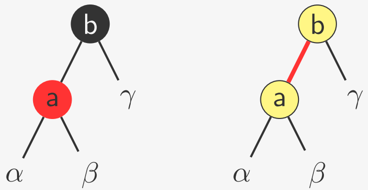
- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes às árvores **rubro-negras**



Escolhendo t

Queremos que um nó caiba em uma página do disco

- mas não queremos utilizar mal a página do disco

Escolha t máximo tal que $2t - 1$ chaves caibam na página

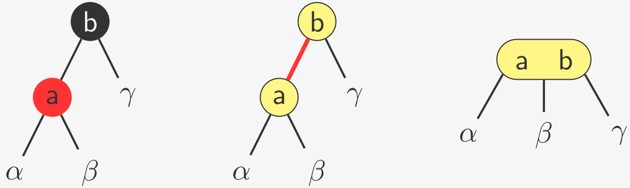
- Se $t = 1001$ e $h = 2$, armazenamos até 10^9 chaves
- i.e., fazemos dois acessos ao disco

Consideramos que o registro está junto com a chave

- Ou então temos um ponteiro para o registro

Quando $t = 2$, temos as Árvores $2 - 3 - 4$

- Equivalentes às árvores **rubro-negras**



Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

Busca na Árvore B

Para procurar a chave k no nó x

- Basta verificar se a chave está em x
- Se não estiver, basta buscar no filho correto

Busca(x, k)

```
i = 1
enquanto i ≤ x.n e k > x.chave[i]
    i = i + 1
se i ≤ x.n e k == x.chave[i]
    retorne (x, i)
senão se x.folha
    retorne NIL
senão
    LeDoDisco(x.c[i])
    retorne Busca(x.c[i], k)
```

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

Criando uma Árvore B

Criamos uma árvore vazia

- Basta alocar o nó e definir os campos

INICIA(T)

x = ALOCA()
$x.folha$ = VERDADEIRO
$x.n = 0$
ESCREVENODISCO(x)
$T.raiz = x$

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca estará cheio

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca estará cheio

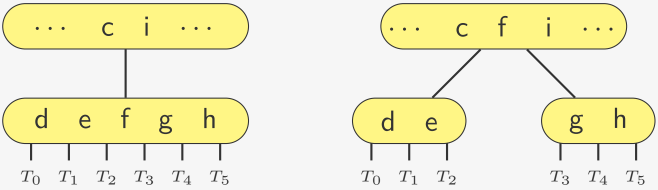
Exemplo: $t = 3$

Inserção

A inserção ocorre sempre em um nó folha

- porém, o nó folha pode estar cheio ($x.n == 2t - 1$)
- dividimos o nó na chave mediana ($x.chave[t]$)
  - em dois nós com $t - 1$ chaves
  - inserimos $x.chave[t]$ no pai para representar a quebra
  - mas o pai poderia estar cheio...
- dividimos todo nó cheio no caminho a inserção
  - assim, o pai nunca estará cheio

Exemplo: $t = 3$

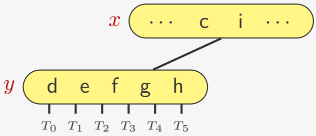


Dividindo um nó

```
DivideFilho(x, i)
z = Aloca()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)
```

Dividindo um nó

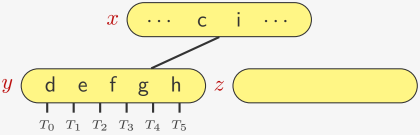
```
DivideFilho(x, i)
z = Aloca()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)
```



Dividindo um nó

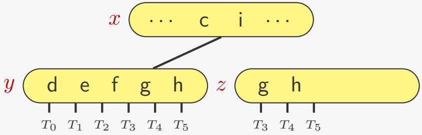
DivideFilho(x, i)

$z = \text{Aloca}()$
$y = x.c[i]$
$z.folha = y.folha$
$z.n = t - 1$
para $j = 1$ até $t - 1$
    $z.chave[j] = y.chave[j + t]$
se não $y.folha$
    para $j = 1$ até t
        $z.c[j] = y.c[j + t]$
$y.n = t - 1$
para $j = x.n + 1$ decrescendo até $i + 1$
    $x.c[j + 1] = x.c[j]$
$x.c[i + 1] = z$
para $j = x.n$ decrescendo até i
    $x.chave[j + 1] = x.chave[j]$
$x.chave[i] = y.chave[t]$
$x.n = x.n + 1$
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)



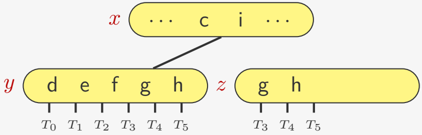
Dividindo um nó

```
DivideFilho(x, i)
z = Aloca()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)
```



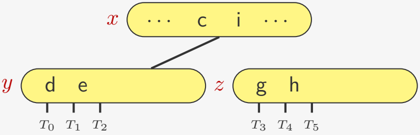
Dividindo um nó

```
DivideFilho(x, i)
z = Aloca()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)
```



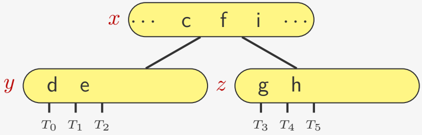
Dividindo um nó

```
DIVIDEFILHO(x, i)
z = ALOCA()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
ESCREVENODISCO(y)
ESCREVENODISCO(z)
ESCREVENODISCO(x)
```



Dividindo um nó

```
DivideFilho(x, i)
z = Aloca()
y = x.c[i]
z.folha = y.folha
z.n = t − 1
para j = 1 até t − 1
    z.chave[j] = y.chave[j + t]
se não y.folha
    para j = 1 até t
        z.c[j] = y.c[j + t]
y.n = t − 1
para j = x.n + 1 decrescendo até i + 1
    x.c[j + 1] = x.c[j]
x.c[i + 1] = z
para j = x.n decrescendo até i
    x.chave[j + 1] = x.chave[j]
x.chave[i] = y.chave[t]
x.n = x.n + 1
EscreveNoDisco(y)
EscreveNoDisco(z)
EscreveNoDisco(x)
```



Inserindo

Vamos inserir a chave k na árvore T

- verificamos se não é necessário dividir a raiz

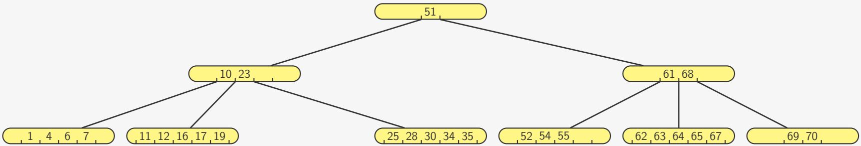
```
INSERE(T, k)
r = T.raiz
se r.n == 2t − 1
    s = ALOCA()
    T.raiz = s
    s.folha = FALSO
    s.n = 0
    s.c[1] = r
    DIVIDEFILHO(s, 1)
    INSERENÃOCHEIO(s, k)
senão
    INSERENÃOCHEIO(r, k)
```

Inserindo chave k em um nó não-cheio x

```
InsereNãoCheio(x, k)
i = x.n
se x.folha
    enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
        x.chave[i + 1] = x.chave[i]
        i = i − 1
    x.chave[i + 1] = k
    x.n = x.n + 1
    EscreveNoDisco(x)
senão
    enquanto i ≥ 1 e k < x.chave[i]
        i = i − 1
    i = i + 1
    LeDoDisco(x.c[i])
    se x.c[i].n == 2t − 1
        DivideFilho(x, i)
        se k > x.chave[i]
            i = i + 1
    InsereNãoCheio(x.c[i], k)
```

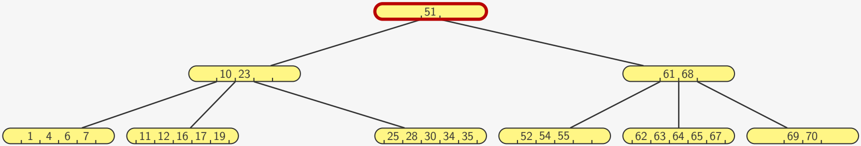
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



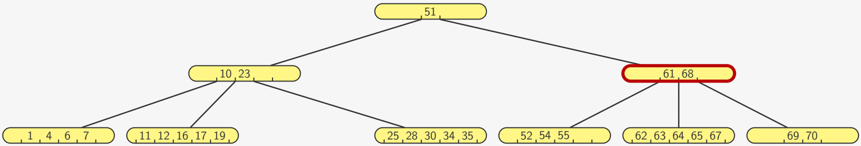
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



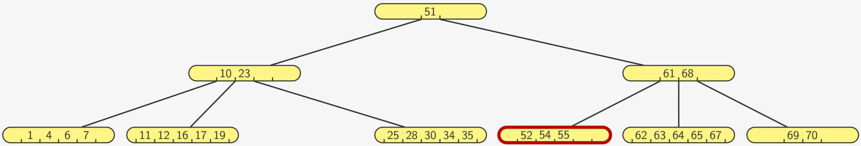
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



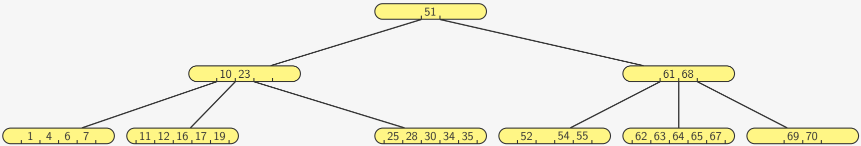
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



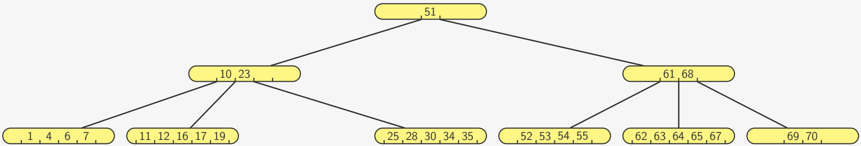
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



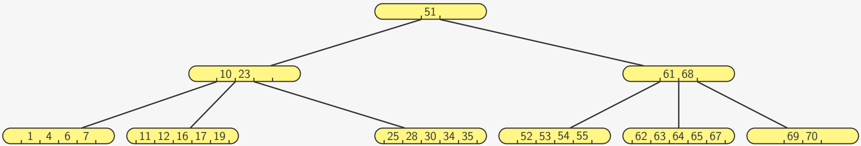
Exemplo: inserindo em nó não cheio

Inserindo 53



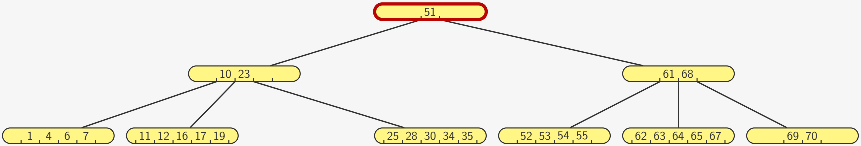
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



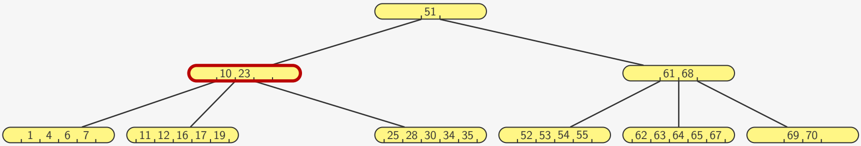
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



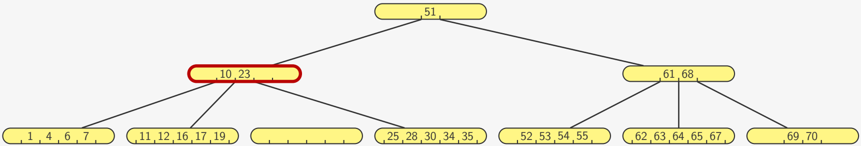
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



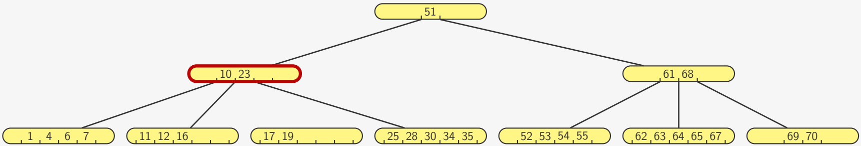
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



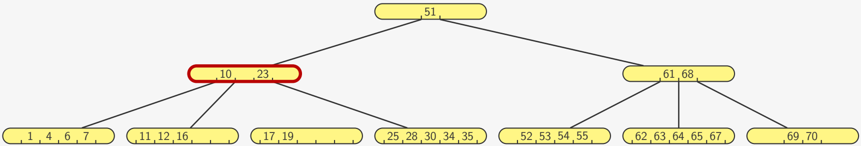
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



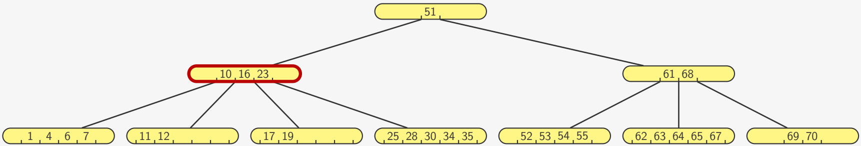
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



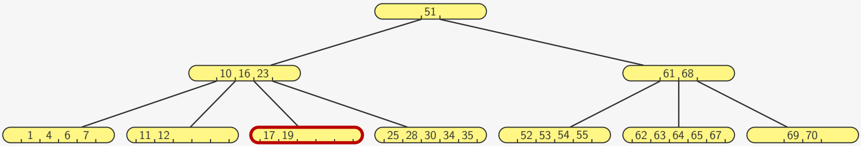
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



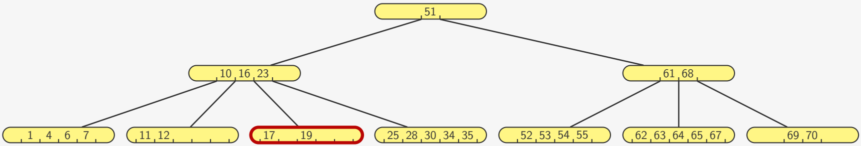
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



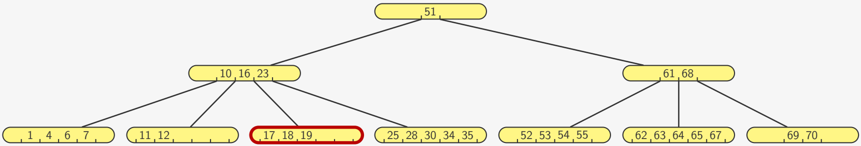
Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



Exemplo: inserindo em nó cheio

Inserindo 18



Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t-1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- se não houver, tentamos mover uma chave de um vizinho

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- se não houver, tentamos mover uma chave de um vizinho
- nem sempre conseguimos

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t - 1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- se não houver, tentamos mover uma chave de um vizinho
- nem sempre conseguimos
  - quando cada um dos dois vizinhos tiver apenas $t - 1$ chaves

Remoção

A remoção é mais complicada que a inserção

- Ela pode ocorrer em qualquer lugar da árvore
- Cada nó precisa continuar com pelo menos $t-1$ chaves
  - exceto a raiz que tem que ter pelo menos 1 chave

Para resolver esse problema, garantimos que os nós no caminho da remoção têm pelo menos t chaves

- nesse caso não há problema em remover
- se não houver, tentamos mover uma chave de um vizinho
- nem sempre conseguimos
  - quando cada um dos dois vizinhos tiver apenas $t-1$ chaves
  - juntamos os nós formando um nó com $2t-1$ chaves

Variantes

Árvores B^*:

Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Árvores B^+:

Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Árvores B^+:

- Mantêm cópias das chaves nos nós internos, mas as chaves e os registros são armazenados nas folhas

Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Árvores B^+:

- Mantêm cópias das chaves nos nós internos, mas as chaves e os registros são armazenados nas folhas
- Permite acesso sequencial dos dados

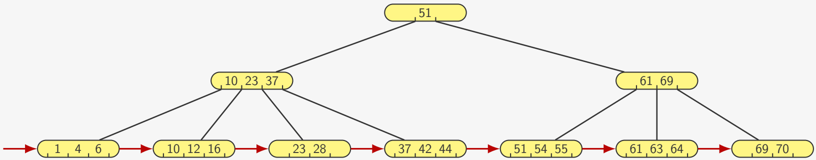
Variantes

Árvores B^*:

- Nós não raiz precisam ficar pelo menos $2/3$ cheios

Árvores B^+:

- Mantêm cópias das chaves nos nós internos, mas as chaves e os registros são armazenados nas folhas
- Permite acesso sequencial dos dados



Exercício

Qual a árvore obtida após inserirmos sequenciamente os números 13 e 33 na árvore seguinte?