Bolygómozgás

Márton Tamás

Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Informatikus Fizikus

Számítógépes szimulációk laboratórium.

IV. jegyzőkönyv.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Fizikai probléma ismertetése

A szimuláció célkitűzése bolygómozgás vizsgálata numerikus módszerekkel. Ha bolygómozgásról beszélünk, fontos megemlíteni a Kepler-törvényeket:

1. A bolygók ellipszis pályán keringenek, és az ellipszis fókuszpontjában a Nap van.
2. A bolygók felületi sebessége állandó, azaz a vezérsugár azonos idők alatt azonos nagyságú felületeket súrol.
3. Minden bolygóra $\frac{a^3}{T^2}$azaz a félnagytengely köbének és a periódusidő négyzetének a hányadosa állandó.

A Kepler-törvények nem csak a Naprendszerben található bolygókra és a Napra, hanem minden másra is, akár egy bolygó és a körülette keringő holdakra is igazak. Ezen felül az égi mechanikát alapvetően meghatározó összefüggés a tömegvonzás. Ha van két tömeggel rendelkező testünk, a kettő között vonzó gravitációs erő hat, amit az alábbi módon írhatunk fel vektoriálisan:

$$\vec{F_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r_{12}}, \quad \vec{F_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r_{21}} \tag{1.1}$$

ahol például az $\vec{F_{12}}$ a második test által az elsőre kifejtett gravitációs erőt jelenti, $\vec{r_{12}}$ pedig a második testtől az első test felé mutató vektort jelöli, m_1 és m_2 pedig a testek tömegeik, valamint G a gravitációs állandó. Mivel a Nap tömege a Földének kb. egymilliószorosa, és a Naprendszerben található összes bolygóra igaz, hogy a Nap tömege legalább 1000-szerese az egyes bolygókhoz képest, ezért a problémára tekinthetünk úgy, mintha a Nap tömege mellett a bolygók tömege elhanyagolható lenne, és rögzítve lenne a Nap pozíciója. Így megkaphatjuk a Kepler-pálya egyenletét az elmozdulás szögének függvényében:

$$r(\Theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon cos(\Theta)}, \quad b = a\sqrt{1-\epsilon^2} \tag{1.2}$$

ahol ϵ a pálya excentricitását (a pálya "lapultságát"), a a félnagytengely, b pedig a félkistengely hosszát jelöli. A keringő test keringési idejére a következő összefüggést kaphatjuk Kepler harmadik törvényéből:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3. \tag{1.3}$$

Mivel szimulációim során nem csak a Föld-Nap, hanem a Merkúr-Nap rendszert is fogom vizsgálni, fontos itt megemlíteni, hogy a Merkúrról tudjuk, hogy pályája erősen elnyúlt, $\epsilon = 0.2056$, és emiatt a pályája hosszú idő alatt elfordul. Ezért a tömegvonzási erőtörvényt az általános relativitáselmélet alapján korrigálni kell:

$$F = G\frac{m_{Merkur} m_{Nap}}{r^2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \tag{1.4}$$

1.0.1. Szimuláció

A szimulációs problémát a a tárgy honlapján található forráskódból való kiindulással kezdtem meg, ami a bolygómozgást negyedrendű Runge-Kutta (továbbiakban RK4), és annak adaptív lépéshossz változtatásával oldja meg. A Merkúr-Nap rendszer vizsgálatához a példakódon módosítani kell. A szimuláció bemeneti paraméternek 5 értéket vár a felhasználótól:

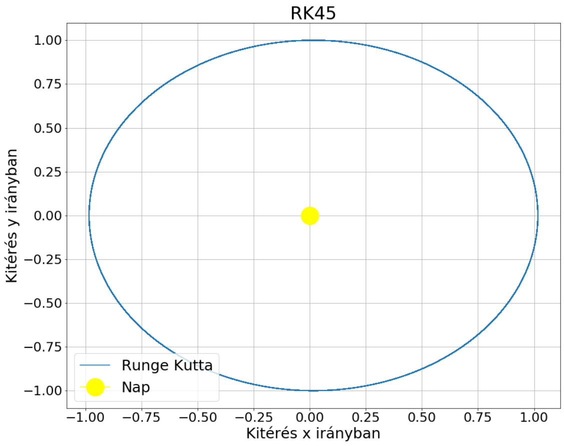
- aphélium távolság csillagászati egységekben,
- excentricitás,
- periódusszám,
- integrálási dt idő (lépésméret) évben,
- adaptív RK4-hez pontosság.

Amikor Föld-Nap rendszert vizsgáltam, a Föld excentricitását $\epsilon = 0.016710219$-nak vettem Wikipedia cikk alapján. Ahol külön nem tüntetem fel, az integrálási időt $dt = 0.001$ évnek, valamint az adaptív RK4 pontosságát 10^{-10} -nek vettem.

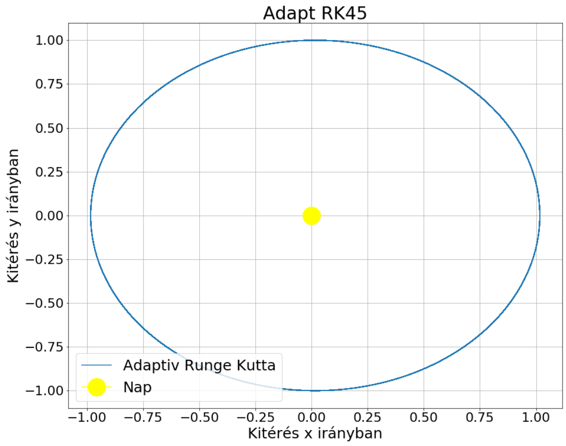
1.1. Föld-Nap rendszer

1.1.1. Pálya ellenörzése

Nulladik lépésnek kiábrázoltam a Föld pályáját RK4 és adaptív RK4 módszer alapján, ez látható a *a.* és a *b.* ábrákon. A vártnak megfelelően egy ellipszist kapunk, aminek lapultsága kicsi, már-már jó közelítéssel körnek tekinthető.



(a) RK4

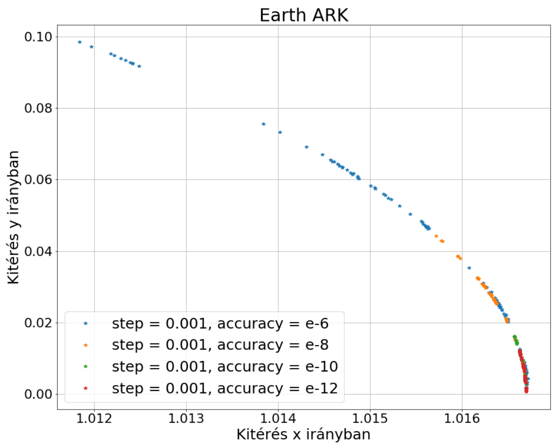


(b) Adaptiv RK4

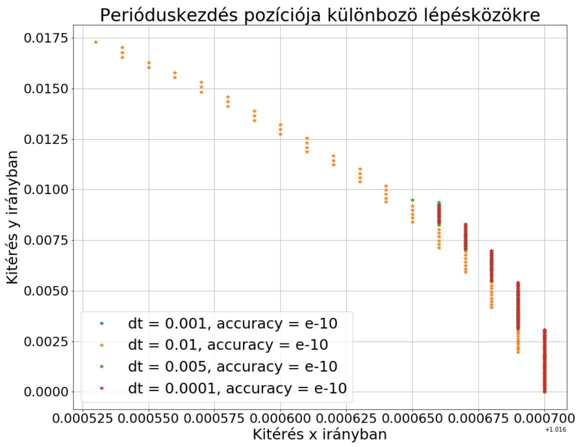
1.1.1. ábra. *Nap-Föld rendszer keringése*

1.1.2. Periódusok kiindulási helyének vizsgálata

Ebben az alfejezetben a Föld-Nap rendszerben a Föld pályaellipszisének nagytengelyét vizsgáltam. Intuitíven azt várnánk, hogy iránya és nagysága állandó, azaz minden egyes periódus megtétele után a kiindulópontba fogunk visszatérni, ahonnan indul a szimuláció. Mivel a Föld aphélium távolsága 1.0167 csillagászati egység, a Föld az $(1.0167, 0)$ pontból indul, és azt vizsgálom, hogy az egyes periódusok megtétele után mennyire tér el a pozíciója az $(1.0167, 0)$ ponttól. A vizsgálat módszere azonban eltér RK4 és adaptív RK4 esetén. RK4 esetén a dt lépésköz paraméterérték módosítgatása mellett ábrázolom ki a periódusok (x,y) kezdőpontjait változtatom, ez látható a (a) ábrán, amiről leolvasható, hogy a dt lépéshossz csökkentésével egyre kisebb az eltérés a kezdeti ponttól. Ezzel ellentétben adaptív RK4-nél az integrálás pontosságát változtatom, ez látható a (b) ábrán. Jól látszik, hogy ahogy a pontosságot növeljük (vagyis ugye az értékét csökkentjük, hiszen minél kisebb az *accuracy* értéke annál pontosabb a kiértékelés), egyre kisebb az eltérés a kezdeti ponttól.



(a) Adaptiv RK4

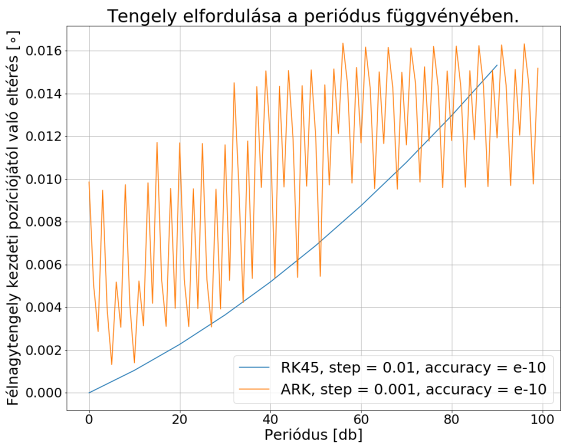


(b) RK4

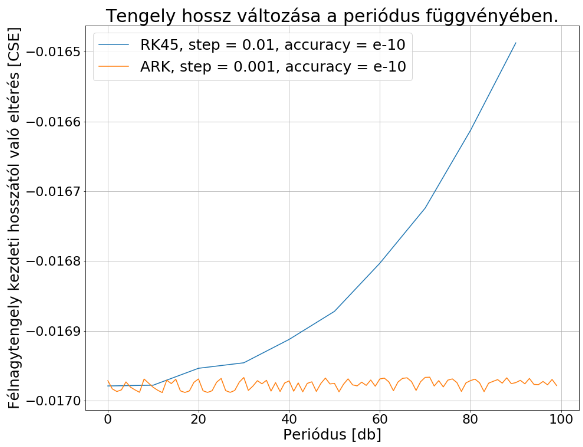
1.1.2. ábra. *Nap-Föld rendszer kiinduló pontjainak ábrázolása*

1.2. Nagytengely vizsgálata

A Föld-Nap rendszer nagytengelyének hosszát és szögét állandóknak várnánk. De mivel az előző alfejezetben láthattuk, hogy az egyes periódusok kiindulási pontja is változik az integrálási paraméterek megválasztásától, így várhatólag a nagytengely tulajdonságai is módosulni fognak az idő előrehaladtával, azaz a periódusok elteltével. Az *a* ábrán kirajzoltam, hogy az RK4 és az adaptív RK4 esetén mennyit változik a nagytengely szöge a 180$\circ$ -hoz képest. Ezt úgy számoltam ki, hogy minden periódus elején kiszámoltam a periódus kezdeti y és x koordinátáinak $arctg$-sét. Ha 0-át kaptam volna eredménynek, akkor nem fordult volna el a nagytengely, de láthatjuk az *a* ábrán hogy igenis ahogy haladunk előre a szimulációban időben, a nagytengely minimálisan elfordul a pozitív irányba. Emellett, a *b* ábrán láthatjuk, hogy a szimuláció előrehaladtával a numerikus hibák miatt szintén változik a nagytengely hossza, de láthatjuk, hogy csak nagyon kicsi mértékben.



(a) Nagytengely elfordulása

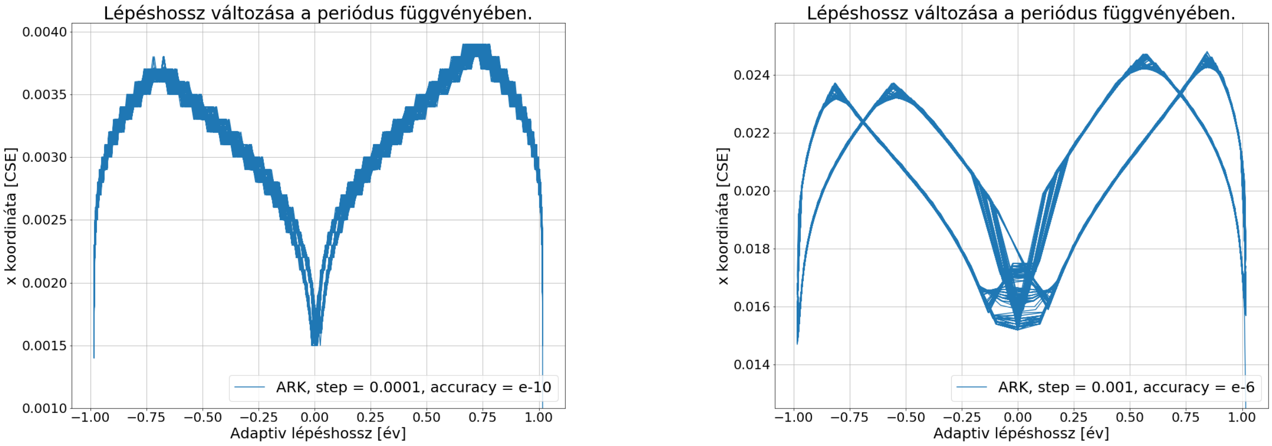


(b) Nagytengely hosszának változása

1.2.1. ábra. *Nap-Föld rendszer nagytengely vizsgálata*

1.3. Adaptív lépéshossz vizsgálata

Az adaptív RK4 fő tulajdonsága, hogy a numerikus integrálás lépéshosszát megadott pontosságot figyelembe véve változtatja az algoritmus. A Föld x koordinátájának függvényében kiábrázoltam az adaptív lépéshosszok alakulását, ezt láthatjuk az a, b ábrán. Azt láthatjuk, hogy ahol a pálya lapultsága kisebb, ott a lépéshossz nagyobb. Globálisan leolvasható az is, hogy míg a sima RK4-nek lépéshosszra 0.001- et állítottam be, itt láthatjuk hogy az adaptív ennél mindig nagyobbak lépett, vagyis azt várjuk, hogy gyorsabban is fut le, mint a normál RK4 algoritmus.



(a) Accuracy = $1{\cdot}10^{-10}$ (b) Accuracy = $1{\cdot}10^{-6}$

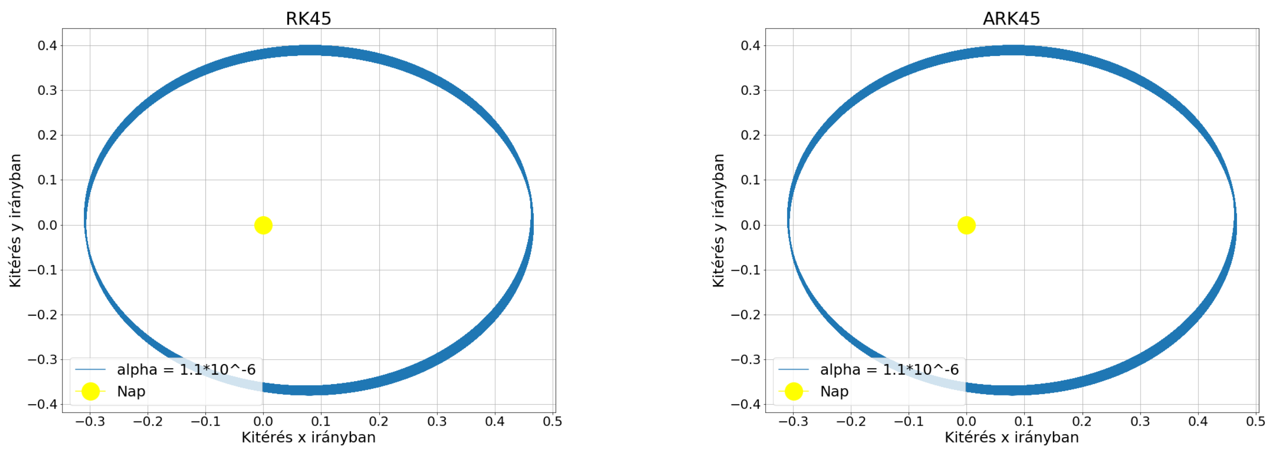
1.3.1. ábra. *Adaptív RK45 viszgálata*

2. Merkúr-Nap rendszer

A bevezetésben láttuk, hogy a tömegvonzási törvényt az általános relativitáselmélet alapján korrigálni kell a Merkúr-Nap rendszer esetén, mivel a Merkúr pályája erősen elnyúlt. A programkódban szereplő pár változót módosítani kell a Merkúr-Nap rendszerre, az adatokat a Wikipediáról kerestem ki:

- GmPlusM = 39.46205
- r_ap = 0.46669835
- eccentricity = 0.20563069

Ahogy a mérés leírásban is olvashattuk, az α korrekciós irodalmi paraméter értéke $\alpha \approx 1.1 \cdot 10^{-8} AU^2$. A 2.01 ábrán 3000 periódusra ábrázoltam a Merkúr pályáját, $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5}$ érték mellett, adaptív RK4 módszerrel.
A Merkúr páylályának szögelfordulását amelynek irodalmi értéke 100 évente 43 ívmásodperc, úgy számoltam ki, hogy első lépésben kiszámoltam a periódusok számát 100 földi évre és az elsö periódishoz és az utolsó periódushoz tartozó nagytengely koordinátákból számolt szögeket kivontam egymásból, mely a $\alpha \approx 1.1 \cdot 10^{-8} AU^2$ értékben szereplő $\approx$ miatt valamint a kerekítések miatt az általam számolt érték 0.010282396657179 82° az irodalmi érték fokban 0.011938888888888888° az értékek között az eltérés 0.0016564922317090676°



(a) RK45 (b) Adaptív RK45

2.0.1. ábra. *Nap-Merkúr rendszer nagytengely elfordulása*

3. Diszkusszió

Megvizsgáltam a Föld-Nap rendszer számos tulajdonságát adaptív és normál RK4 algoritmus segítségével. Megállapítottam, hogy a numerikus hibák miatt a nagytengely szöge és nagysága változik, valamint az egyes periódusok kezdeti pontja is eltér a várttól. Megmértem, hogy az adaptív lépéshossz hogyan változik a pálya mentén, és észrevettem, hogy a pálya lapultabb részein nagyobbat lép az adaptív RK4. Ezután a Merkúr-Nap rendszert vizsgáltam, ahol láttuk vizuálisan is a pálya elfordulását, ahol a szögelfordulást irodalmi értékét sikerült kimérnem.