
Véletlen fizikai folyamatok

2. beadandó

Márton Tamás

PJF19C

martontamas@caesar.elte.hu



1. 1.feladat

Feladat leírás.

A Perrin kísérlet analíziséhez először oldjuk meg a két-dimenziós Brown-mozgás következő változatát: l rácsállandójú négyzetrácson egy részecske τ időközönként, egyenlő valószínűséggel ugrik a négy szomszédos rácspont egyikébe, s az egymást követő lépések függetlenek egymástól. A részecske az $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pontból indul.

Határozzuk meg $at = N\tau$ idő alatti várható elmozdulást, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2_t \rangle + \langle y^2_t \rangle}$ -t!

Feladat megoldása.

A második előadás elején elhangzott egy segítség ehhez a feladathoz, miszerint diszkrét esetű megoldással egyszerűbb megoldani ezt a problémát.

$$\langle e_i \rangle = (0, \frac{1}{4}) + (0, -\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}, 0) + (-\frac{1}{4}, 0) = 0, \quad (1.1)$$

tehát a részecskének N lépés után a várható értéke:

$$\langle x_N \rangle = l \sum_{i=1}^N \langle e_i \rangle = 0. \quad (1.2)$$

Az elmozdulás várható értéke ezek alapján pedig:

$$\langle x^2_N \rangle = l^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \langle e_j e_i \rangle = l^2 N + l^2 \sum_{j \neq i} \langle e_j e_i \rangle = l^2 N + l^2 \sum_{j \neq i} \langle e_j \rangle \langle e_i \rangle = l^2 N. \quad (1.3)$$

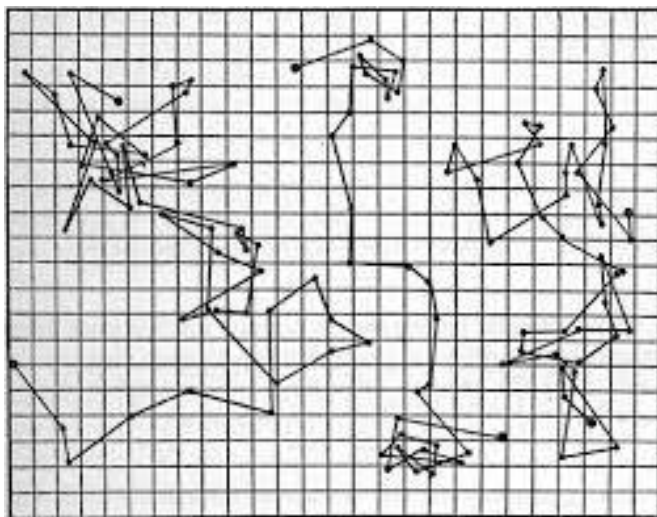
Tehát a $t = N\tau$ idő alatt történő elmozdulás várható értéke:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = l\sqrt{N}. \quad (1.4)$$

2. 2.feladat

Feladat leírás.

Perrin kísérletében kolloid részecskék mozgását vizsgálták híg, vizes oldatban. A részecskék sugara $a = 0.52\mu m$, $\tau = 30s$ -onként mérték a helyzetüket, s az ábrán látható négyzetrács rácslاندója $3.125\mu m$. Becsüljük meg a kolloid részecskék diffúziós együtthatóját kétféleképpen: (a) a kezdő és a végpont közötti elmozdulásból, feltételezve hogy a mozgás diffúzív, és (b) a τ idő alatti ugráshosszok négyzetének átlagából!



2.0.1. ábra. Perrin kísérlet ábrái.

Feladat megoldása.

2.1. (a) feladat

Ahhoz, hogy ezt a feladatot meg tudjam oldani, meg kellett számolnom mindhárom részecske által megtett lépésszámot és ezáltal a megtett utat, majd az eltelt időt kell kiszámolnom.

1. táblázat. A mért és számolt adatok.

Részecske	Lépésszám	Idő [s]	Távolság négyzet [m^2]
Jobb	42	1260	$1.239 \cdot 10^{-10}$
Középső	30	900	$2.725 \cdot 10^{-9}$
Bal	47	1410	$1.239 \cdot 10^{-9}$

Majd felhasználjuk a *Brown-mozgásra* levezetett elmozdulás négyzetére vonatkozó összefüggést $\langle r^2 \rangle = 2Dt$, aminek segítségével már ki tudjuk számolni a diffúziós együtthatót.

2. táblázat. Diffúziós együtthatók.

Részecske	Diffúziós együttható [m^2/s]
Jobb	$2.766 \cdot 10^{-13}$
Középső	$1.514 \cdot 10^{-12}$
Bal	$4.394 \cdot 10^{-13}$

A diffúziós együttható meghatározásához ezeknek az értékeknek vettem az átlagát:

$$D = 7.43 \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s} \quad (2.1)$$

2.2. (b) feladat

Ennek a részfeladat megoldásához egy [internetes alkalmazás](#) segítségével használtam, ahol az Perrin-kísérletről készült ábrát feltöltve, azon pontokat jelöltem, amihez a program koordinátákat rendelt, amit bármilyen táblázatkezelőbe importálhatunk. Majd a diffúziós együttható értékét úgy határozom meg, hogy az egésével kiszámolt elmozdulások négyzetét átlagolom ki, és ezt osztom el a τ kétszeresével :

$$D = \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{2\tau}. \quad (2.2)$$

A diffúziós együttható ezek alapján:

3. táblázat. Diffúziós együtthatók.

Részecske	Diffúziós együttható [m^2/s]
Jobb	$7.387 \cdot 10^{-13}$
Középső	$6.379 \cdot 10^{-13}$
Bal	$1.238 \cdot 10^{-12}$

Ezek alapján ismét vettem az átlagot. Az így számolt diffúziós együttható értéke:

$$D = 8.714 \cdot 10^{-13} \frac{m^2}{s}. \quad (2.3)$$

3. 3.feladat

Feladat leírás.

Használjuk a (2) feladat eredményét, valamint a Brown-mozgas Langevin-fele leírásából kapott kifejezést a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára, s becsüljük meg az Avogadro-számot! A kolloidrészecskék sűrűséget tekinthetjük vízhez közelinek, a hőmérsékletet pedig szobahőmérsékletnek.

Feladat megoldása.

Ebben a feladatban, úgy ahogy az előzőekben is, külön-külön fogom számolni a N_A Avogadro-szám értékét. Langevin által levezetett eredmény a diffúziós együtthatóra a Brown-mozgásra:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}. \quad (3.1)$$

Ahol η a viszkozitás, a a részecske sugara, k_B a Boltzmann állandó, amelynek értéke $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ a hőmérséklet. Tudjuk még, hogy:

$$N_A k_B = R, \quad (3.2)$$

ahol R az egyetemes gázállandó $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$. A diffúziós együttható formulája a következő formulába írható át:

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}. \quad (3.3)$$

Az Avogadro-számra a következő összefüggést kapjuk:

$$N_A = \frac{RT}{6\pi\eta a D}. \quad (3.4)$$

4. 4. feladat

A számításhoz használt értékek a következők: $T = 20.2 \text{ }^\circ\text{C}$ ami a $293.2 \text{ }^\circ\text{K}$, $\eta(T = 20.2 \text{ }^\circ\text{C}) = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. A részecskék sugara a második feladatból $a = 0.52 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Az avogadrószám a következőnek adódik $(a)s(b)$ esetre:

4. táblázat. Számolt Avogadro értékek.

második módszerrel	Avogadro szám $[1/mol]$
a	$3.35 \cdot 10^{23}$
b	$2.85 \cdot 10^{23}$

A kapott értékek eltérnek az irodalmi értéktől ($A_N = 6.02 \cdot 10^{23} 1/mol$), nagyságrendben jól kaptam meg az értéket. A hiba adódhat a pontatlan úthossz mérésekből.

4. 4. feladat

Feladat leírás.

Tegyük fel, hogy a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára kapott kifejezés extrapolálható molekuláris szintre. Milyen értéket kapunk egy nem túlságosan nagy molekula (pl. Buckminsterfullerene: 60 szénatom focilabdászerű elrendezésben, átmérő: 1.01 nm) vízben történő termális mozgásának diffúziós együtthatójára? És mit kapunk egy biológiai molekulára (pl. DNS)?

Feladat megoldás.

A diffúziós együttható kiszámításához alkalmazom a már ismert képletet:

$$D = \frac{k_B t}{6\pi\eta a}. \quad (4.1)$$

Ahol a η a víz viszkozitása, amely a korábbi feladatmegoldásokból $\eta(T = 293.2 \text{ }^\circ\text{K}) = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Ezek alapján a diffúziós együtthatók a következők:

5. táblázat. Avogadro számok.

Hőmérséklet $[^\circ\text{K}]$	Sugár $[m]$	D $[m^2/s]$	Molekula
293.2	$1.01 \cdot 10^{-9}$	$2.127 \cdot 10^{-10}$	Buckminsterfullerene
293.2	$17 \cdot 10^{-10}$	$1.26 \cdot 10^{-10}$	DNS