Véletlen fizikai folyamatok

5. beadandó

Márton Tamás

PJF19C
martontamas@caesar.elte.hu

1. feladat

Feladat leírás.

Az atomreaktorokban keletkező, erősen sugárzó hulladékok tárolására a geológiailag stabil, gránit alapú ősmasszívumokat tekintik alkalmasak (Finnországban most épül egy barlangrendszer, amelybe 100 éven keresztül tervezik felhalmozni a hulladékot, ami után az egészet betemetik). Tegyük fel, hogy a terület geológiailag valóban stabil, s a radioaktív magok csak a gránitonkeresztül történő diffúzióval tudnak a felszínre jutni. Keressük ki a gránit diffúziós együtthatóját nagyobb rendszámú atomokra (pl. az U^{233} izotópra) és számítsuk ki, hogy milyen mélyre kell eltemetni a hulladékot ahhoz, hogy 100000 év elteltével még ne észleljünk radioaktivitást a barlang felett a felszínen!

Feladat megoldása.

A diffúziós együtthatóról korábbi előadásokon és a beadandók során láttuk, hogy:

$$D = \frac{\Delta x^2}{2\tau}. \tag{1.1}$$

Ahol D a diffúziós együttható, Δx a távolság amit a diffúzió alatt megtesz a részecske, τ pedig a diffúzió időtartama. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen mélyre kell eltemetni a sugárzó anyagot, hogy 100000 év elteltével se észleljük a felszínen a radioaktivitást. A diffúziós együtthatót a feladathoz a talált cikk alapján vett középértéknek vettem $4.95 \cdot 10^{-11} m^2/s$.

$$\Delta x = \sqrt{2\tau \cdot D}, \tag{1.2}$$

mindez behelyettesítve:

$$\Delta x = \sqrt{2 \cdot 100000v \cdot 4.95 \cdot 10^{-11}}, \tag{1.3}$$

ami az átváltások után:

$$\Delta x = \sqrt{2 \cdot 3.1536 \cdot 10^{12} s \cdot 4.95 \cdot 10^{-11}}, \tag{1.4}$$

melynek eredménye:

$$\Delta x = 17.669363316203558 m. \tag{1.5}$$

A radioaktív hulladékot 17.669363316203558 m-nél ha mélyebbre ássuk, akkor 100000 év múlva sem tapasztalunk sugárzást a felszínen.

2. feladat

Feladat leírás.

Vizsgáljuk az előadáson tárgyalt 2 Ising spinből álló rendszer relaxációjának problémáját! Az előadáson megkaptuk a rendszer dinamikai mátrixát, s meghatároztuk a sajátvektorokat és a megfelelő sajátértékeket (A számolás megtalálható a kurzus honlapján "Ising spinek dinamikája" cím alatt is).

(a) Ismerve az összes sajátvektort és sajátértékeket, határozzuk meg milyen valószínűséggel van a rendszer t időpontban az $s_1 = -1, s_2 = +1$ állapotban, ha a kezdeti állapot $s_1 = +1, s_2 = -1$ volt.

(b) Számítsuk ki a rendszer átlagos mágnesezettségének $[M(t) = \langle (s_1 + s_2) \rangle]$ időfejlődését, ha a kezdeti állapotban $s_1 = +1, s_2 = +1$.

Feladat megoldása.

2.a. feladat

Az előadás anyaga és az említett cikk alapján tudjuk, hogy egy állapot valószínűségét a következő általános formulából számíthatjuk:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^{(e)} + \sum_{i=2}^{4} a_i e^{\lambda_i t \vec{P}^i}, \tag{2.1}$$

és az a_i együtthatókat a kezdeti feltételből kaphatjuk meg, ami $s_1 = +1, s_2 = -1$, vagyis a $(\uparrow\downarrow)$ állapot.
A sajátvektorokat ismerjük:

$$\vec{P}^{(e)} = \frac{1}{2(e^{\kappa} + e^{-\kappa})} \cdot \begin{pmatrix} e^{\kappa} \\ e^{-\kappa} \\ e^{-\kappa} \\ e^{\kappa} \end{pmatrix}, \vec{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{P}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

ahol $\kappa = \beta \cdot J$, és $\beta = \frac{1}{k_B T}$, valamint J egy pozitív konstans ami a spinek energiaskálázásáért felelős.
A λ sajátértékeket is tudjuk:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2(1 + e^{-2\kappa}), \lambda_3 = -2e^{-\kappa}, \lambda_4 = -2. \tag{2.3}$$

Tehát kezdeti feltételünk:

$$\vec{P}(t=0) = \begin{pmatrix} P(\uparrow\uparrow, t=0) \\ P(\uparrow\downarrow, t=0 \\ P(\downarrow\uparrow, t=0 \\ P(\downarrow\downarrow, t=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{P}^{(e)} + \sum_{i=2}^{4} a_i e^{\lambda_i} \cdot 0 \vec{P}^{(i)} = \vec{P}^{(e)} + \sum_{i=2}^{4} a_i \vec{P}^{(i)}. \tag{2.4}$$

Ebből a következő egyenleteket kapjuk az a_i együtthatókra:

$$0 = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + a_2 + a_3 \tag{2.5}$$

$$1 = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} - a_2 + a_4 \tag{2.6}$$

$$0 = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} - a_2 - a_4 \tag{2.7}$$

$$0 = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + a_2 - a_3 \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

Ha kivonjuk a 2.7 egyenletből a 2.8 egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$a_4 = \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

Ha kivonjuk a 2.6 egyenletből a 2.9 egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$a_3 = 0 \tag{2.11}$$

Ha a 2.6 egyenletbe beírjuk, hogy $a_3 = 0$, azt kapjuk, hogy:

$$a_2 = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} \tag{2.12}$$

Ezek ismeretében válaszolhatunk a feladat kérdésére, ami azt volt, hogy milyen valószínűséggel van a rendszer t időpontban az $s_1 = -1, s_2 = 1$, azaz a $(\downarrow\uparrow)$ állapotban. A keresett valószínűség:

$$P(\downarrow\uparrow, t) = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} \cdot e^{-2(1+e^{-2\kappa})} - \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

2.b. feladat

A mágnesezettség időfejlődését a következő módon számolhatjuk:

$$M(t) = \rangle(s_1 + s_2)\langle = \sum_{s_1 \pm 1} \sum_{s_2 \pm 1} (s_1 + s_2) \cdot P(s_1, s_2, t). \tag{2.14}$$

A számolás módja hasonló lesz az előző alfeladathoz. A kezdeti feltétel most:

$$\vec{P}(t=0) = \begin{pmatrix} P(\uparrow\uparrow, t=0) \\ P(\uparrow\downarrow, t=0 \\ P(\downarrow\uparrow, t=0 \\ P(\downarrow\downarrow, t=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

és ismét a 2.4 egyenlet formájához visszanyúlva, a következő összefüggéseket kapjuk az a_i együtthatókra:

$$1 = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa} + e^{-\kappa})} + a_2 + a_3 \tag{2.16}$$

$$0 = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa} + e^{-\kappa})} - a_2 + a_4 \tag{2.17}$$

$$0 = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa} + e^{-\kappa})} - a_2 - a_4 \tag{2.18}$$

$$0 = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa} + e^{-\kappa})} + a_2 - a_3 \tag{2.19}$$

Ha a 2.17 egyenletből kivonjuk a 2.18 egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$a_4 = 0 \tag{2.20}$$

Ha a 2.16 egyenletből kivonjuk a 2.19 egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$a_3 = \frac{1}{2} \tag{2.21}$$

Ezek alapján látható a 2.17 egyenletből, hogy:

$$a_2 = \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} \tag{2.22}$$

Így felírhatjuk $\vec{P}(t) - t$:

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} \cdot \begin{pmatrix} e^{\kappa} \\ e^{-\kappa} \\ e^{-\kappa} \\ e^{\kappa} \end{pmatrix} + \left(\frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} \right) \cdot e^{2(1+e^{-2\kappa})t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

A mágnesezettségre felírt egyenletben (2.14 egyenlet) láthatjuk, hogy csak a (↑↑) és a (↓↓) állapotok adnak járulékot, a (↓↑) és a (↑↓) állapotok zérust eredményeznek. Így azt kapjuk, hogy:

$$M(t) = 2P(\uparrow\uparrow, t) - 2P(\downarrow\downarrow, t). \tag{2.24}$$

Ahol:

$$P(\uparrow\uparrow, t) = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \tag{2.25}$$

$$P(\downarrow\downarrow, t) = \frac{e^{\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} + \frac{e^{-\kappa}}{2(e^{\kappa}+e^{-\kappa})} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \tag{2.26}$$

Tehát, mivel:

$$P(\downarrow\downarrow, t) = P(\downarrow\downarrow, t) \tag{2.27}$$

Így a mágnesezettség időfejlődése zérus:

$$M(t) = 0. \tag{2.28}$$

3. feladat

3.a. feladat

Feladat leírás.

Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, és w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, és onnan folytatja a mászást.

3.b. feladat

Feladat leírás.

Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban! Használjuk a generátorfüggvény formalizmust a stacionárius eloszlás kiszámítására!

Feladat megoldása.

A Master-egyenlet segítségével határozhatjuk meg, hogy milyen P_n valószínűséggel van a hegymászó nl magasságban:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_n = -(w + w_0)P_n + wPn - 1 + w_0 Pn + 1, \tag{3.1}$$

ahol az első, negatív együtthatós tag az n. állapotból kilépést, a második és harmadik pozitív együtthatós tag pedig az $n \pm 1$. állapotból az n. állapotba áttérést reprezentálja. Nézzük a Master-egyenletet az $n = 0$ esetben:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0 = -wP_0 + w_0 P_1, \tag{3.2}$$

Vezessük be az előadáson használt q mennyiséget a kasszás sorban állós példához hasonlóan, és legyenek:

$$q = \frac{w}{w_0}, \tau = \frac{1}{w_0}. \tag{3.3}$$

Most osszuk le az $n \geq 1$ (3.1 egyenlet) és az n = 0 (3.2 egyenlet) Master-egyenleteket w_0 -al, és azt kapjuk, hogy:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} P_n = -(q + 1)P_n + qP_{n-1} + P_{n+1} \tag{3.4}$$

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} P_0 = -qP_0 + P_1. \tag{3.5}$$

Most írjuk fel általánosan a generátorfüggvényt, majd deriváljuk parciálisan idő szerint:

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \frac{\partial}{\partial t} P_n(t) \tag{3.6}$$

Most írjuk be a generátorfüggvény idNew deriváltjába a Master-egyenletre kapott kifejezést:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} G(s,t) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) = -qP_0 + P_1. + \sum_{n=1}^{\infty} \{-(q+1)P_n + qP_{n-1} + P_{n+1}\} e^{-sn} \tag{3.7}$$

A szumma második két tagjánál újra kell indexelnünk, így a szumma utolsó tagja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} Pn + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1)} Pn + 1 = \sum_{m=2}^{\infty} e^{-sm} Pm \tag{3.8}$$

a szumma második tagja:

$$q \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} Pn - 1 = qe^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n-1)} Pn + 1 = qe^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-sm} Pm \tag{3.9}$$

Így a 3.7 egyenlet az alábbi formára hozható:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} G(s,t) = P_0(1 - e^{-s}) + \left\{-(q+1)P_n + qe^{-s} + e^{s}\right\} G(s,t) \tag{3.10}$$

Stacionárius megoldást szeretnénk kiszámolni, vagyis azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor a generátorfüggvény időderiváltja zérus. Így azt kapjuk, hogy:

$$G^{stac}(s) = \frac{(1 - e^{-s})P_0}{1 - e^{s} + q - qe^{-s}} = \frac{P_0}{1 - qe^{-s}}. \tag{3.11}$$

A generátorfüggvénynek tudnia kell, hogy $G(s = 0) = 1$, és ebből a feltételből azt kapjuk, hogy:

$$P_0 = 1 - q = 1 - \frac{w}{w_0} \tag{3.12}$$

Így stacionárius esetben tehát a generátorfüggvény:

$$g^{stac}(s) = \frac{1-q}{1-qe^{-s}} = \frac{1-\frac{w}{w_0}}{1-\frac{w}{w_0}e^{-s}} \tag{3.13}$$

3.c. feladat

Feladat leírás.

Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

Feladat megoldása.

Ezt a stacionárius generátorfüggvényből könnyen megkaphatjuk, az s változója szerint parciálisan deriváljuk, majd az $s = 0$ helyen kiértékeljük:

$$\langle n \rangle = \frac{\partial}{\partial s} G^{stac}(s)\Big|_{s=0} = -\frac{(1-q)qe^{-s}}{(1-qe^{-s})^2}\Big|_{s=0} = \frac{(1-q)q}{(1-q)^2} = \frac{w}{w_0 - w} \tag{3.14}$$

3.d. feladat

Feladat leírás.

Van itt a hasonlóság a sorbanállás problémájával?

Feladat megoldása.

4. feladat

Feladat leírás.

Egy járvány során az ember a következő állapotokban lehet: egészséges (e), fertőzött (f), immunis (i), halott (h). Írjuk fel a master-egyenletet, amely leírja az $e \to f$, $f \to i$ és $f \to h$ dinamikát. A médiából elérhető adatokból becsüljük meg az átmeneti rátákat, majd határozzuk meg, hogy elhúzódó járvány esetén hány halott lesz!

Feladat megoldása.