Véletlen fizikai folyamatok

8. beadandó

Márton Tamás

PJF19C
martontamas@caesar.elte.hu

1. feladat

Feladat leírás.

Ez egy példa arra, hogy hatvány alakú fokszámeloszlás esetén a hálózatnövekedési dinamika lényegtelennek tűnő részlete is befolyásolhatja a hatványkitevő értékét. Az *eltolt lineáris preferenciával* növekedő hálózatban egy k fokszámú csúcshoz való csatolódás valószínűsége $(k+\lambda)/\sum_\ell(\ell+\lambda)N_\ell$, ahol N_k a k fokszámú csúcsok száma. A 9. előadás jegyzetében megtalálható a levezetés, hogy $\lambda = 0$ (lineáris preferencia) esetén a fokszámeloszlás nagy k-ra hatvány alakú

$$P_k \sim k^{-3}\,. \tag{1}$$

Vigyük végig a lineáris preferenciára alkalmazott számolást a $\lambda = 2$-re és mutassuk meg, hogy ekkor az eloszlás nagy-k alakja

$$P_k \sim k^{-5}\,. \tag{2}$$

A fenti két eredmény azt sugallja, hogy (mint azt be is lehet bizonyítani) tetszőleges $\lambda > 0$-ra a következő eredmény igaz

$$P_k \sim k^{-(3+\lambda)}\,. \tag{3}$$

Feladat megoldása.

Az előadási példához hasonlóan, ahol a rátát $w_k = \frac{k}{A}$ alakban írtuk fel, így vizsgáljuk most is A értékét:

$$A = \sum_{l=1}^{N} = (l+\lambda)N_l = 2N + \lambda N = (2+\lambda)N \tag{1.1}$$

Írjuk fel a Master-egyenletet a rendszerünkre:

$$N_k(N+1) = N_k(N) - \frac{k+\lambda}{A}N_k + \frac{k+\lambda-1}{A}N_{k-1}$$
$$N_1(N+1) = N_1(N) - \frac{1+\lambda}{A}N_1 + 1,$$

ami a következő alakra hozható:

$$\frac{dN_k}{dN} = -\frac{k+\lambda}{A}N_k + \frac{k+\lambda-1}{A}N_{k-1}$$
$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{1+\lambda}{A}N_1 + 1,$$

valamint behelyettesítem az A ra kapott értéket(1):

$$\frac{dN_k}{dN} = -\frac{k+\lambda}{(2+\lambda)N}N_k + \frac{k+\lambda-1}{(2+\lambda)N}N_{k-1}$$
$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{1+\lambda}{(2+\lambda)N}N_1 + 1,$$

valamint alkalmazom a $\lambda = 2$ helyettesítési értéket:

$$\frac{dN_k}{dN} = -\frac{k+2}{4N}N_k + \frac{k+1}{4N}N_{k-1}$$
$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{3}{4N}N_1 + 1.$$

Kihasználom, hogy a fokszámeloszlás definíciója:

$$P_k = \frac{N_k}{N}. \tag{1.2}$$

Ekkor az egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\frac{dN_k}{dN} = -\frac{k+2}{4}P_k + \frac{k+1}{4}P_{k-1}$$
$$\frac{dN_1}{dN} = -\frac{3}{4}P_1 + 1.$$

Valamint tudjuk, hogy:

$$\frac{dN_k}{dN} = \frac{d(NP_k)}{dN} = P_k + N\frac{dP_k}{dN}, \tag{1.3}$$

ezért át tudom írni a Master-egyenletemet a fokszámeloszlásra vonatkozó differenciálegyenletekké:

$$P_k + N\frac{dP_k}{dN} = -\frac{k+2}{4}P_k + \frac{k+1}{4}P_{k-1}$$
$$P_1 + N\frac{dP_1}{dN} = -\frac{3}{4}P_1 + 1.$$

Majd átrendezem az egyenletet:

$$N\frac{dP_k}{dN} = -\frac{k+6}{4}P_k + \frac{k+1}{4}P_{k-1}$$
$$N\frac{dP_1}{dN} = -\frac{7}{4}P_1 + 1.$$

Tudjuk, hogy stacionárius megoldásnál az összes derivált zérus, így:

$$P_k^{stac} = -\frac{k}{k+5}P_{k-1}^{stac} = \frac{k(k-1)}{(k+5)(k+4)}P_{k-2}^{stac} = ... = \frac{k!}{(k+5)!}P_1^{stac}$$
$$P_1^{stac} = \frac{4}{7}.$$

Ha megvizsgálom külön a P_k fokszámeloszlását, akkor:

$$P_k^{stac} = \frac{k!}{(k+5)!}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{(k+5)(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \approx \frac{1}{k^5}.$$

Tehát megkaptuk a helyes végeredményt, miszerint $P_k \approx k^{-(3+\lambda)}$, azaz ha $\lambda = 2$ akkor $P_k \approx k^{-5}$

2. feladat

Feladat leírás.

A 9. előadáson vizsgált, lineáris preferenciával növekedő hálózatban egy k fokszámú csúcshoz való csatolódás valószínűsége $k/\sum_\ell \ell N_\ell$, ahol N_k a k fokszámú csúcsok száma. Az előadáson megmutattuk, hogy a fokszámeloszlás nagy k-ra hatvány alakú $P_k \sim k^{-3}$.

Feladatok:

(i) Vizsgáljuk meg, hogy a fenti eredmény függ-e a kezdeti feltételektől! Indítsunk szimulációkat
(1) egy csúcsból,
(2) öt, lineárisan csatolt csúcsból $[N_1(t=0)=2,\ N_2(0)=3,\ N_{k\neq 1,2}=0]$,
(3) öt, kereszt alakban összekapcsolt csúcsból $[N_1(0)=4,\ N_4(0)=1,\ N_{k\neq 1,4}=0]$,
s hasonlítsuk össze a fokszámeloszlások nagy k-s viselkedését nagy (csúcsok száma: $N\approx 10^5-10^6$) hálózatokra.

(ii) Találjuk meg a maximális fokszámú csúcsot a fenti szimulációkban generált hálózatokban, s határozzuk meg a maximális fokszám átlagát $\langle k_{max}\rangle$ elég nagy csúcsszám esetére. Függ-e $\langle k_{max}\rangle$ a kezdeti feltételektől?

Feladat megoldása.

A hálózat szimulációját *Pythonban* írtam *Jupyter-notebook*-ban.
Az *(1),(2),(3)* feladat megoldásához létrehoztam a fokszámokat:

```
############# (1) feladathoz
fokszamok[0] = 1
fokszamok[1] = 1
melyikhez_keruljon_a_harmas = randint(0,2)
fokszamok[2] = 1
fokszamok[melyikhez_keruljon_a_harmas] += 1
############# (2) feladathoz
fokszamok[0] = 2
fokszamok[1] = 2
fokszamok[2] = 2
fokszamok[3] = 1
fokszamok[4] = 1
```

```
############# (3) feladathoz
fokszamok[0] = 4
fokszamok[1] = 1
fokszamok[2] = 1
fokszamok[3] = 1
fokszamok[4] = 1
```

A szimulációhoz, az adatok kiszámolásához egy törzset használtam, különböző N értékek mellett. A szimuláció lépései a következők voltak:

- kiválasztunk egy mar lent levő csúcsot véletlenszerűen,
- leszámoljuk a kiválásztott csúcs éleinek számát *fokszám=k*,
- kiválasztott csúcshoz w_k valószínűséggel kötöm az új berakott csúcsot,
- $w_k = k/A$,
- $A = \sum l * Nl$ ahol Nl az l éllel rendelkező csúcsok száma,
- húzok egy számot véletlenszerűen $[0, 1]$ között,
- ha a random szám $< w_k$, hozzákötöm a csúcshoz, ha nem, választok új csúcsot es előröl kezdem a folyamatot,
- a (2) és a (2) feladat eseteben a szimuláció *for* ciklusa *(5,N)* között fut.

```
for i in range (3,N):
        osszekotes_megtortent = False
        A = 0
        A_szamolva_volt_e = False

        while (osszekotes_megtortent == False):
                random_kivalasztott_csucs = randint(0,i)
                k = fokszamok[random_kivalasztott_csucs]

        if(A_szamolva_volt_e == False):
                for j in range (0,i):
                A += fokszamok[j]
                A_szamolva_volt_e = True
```

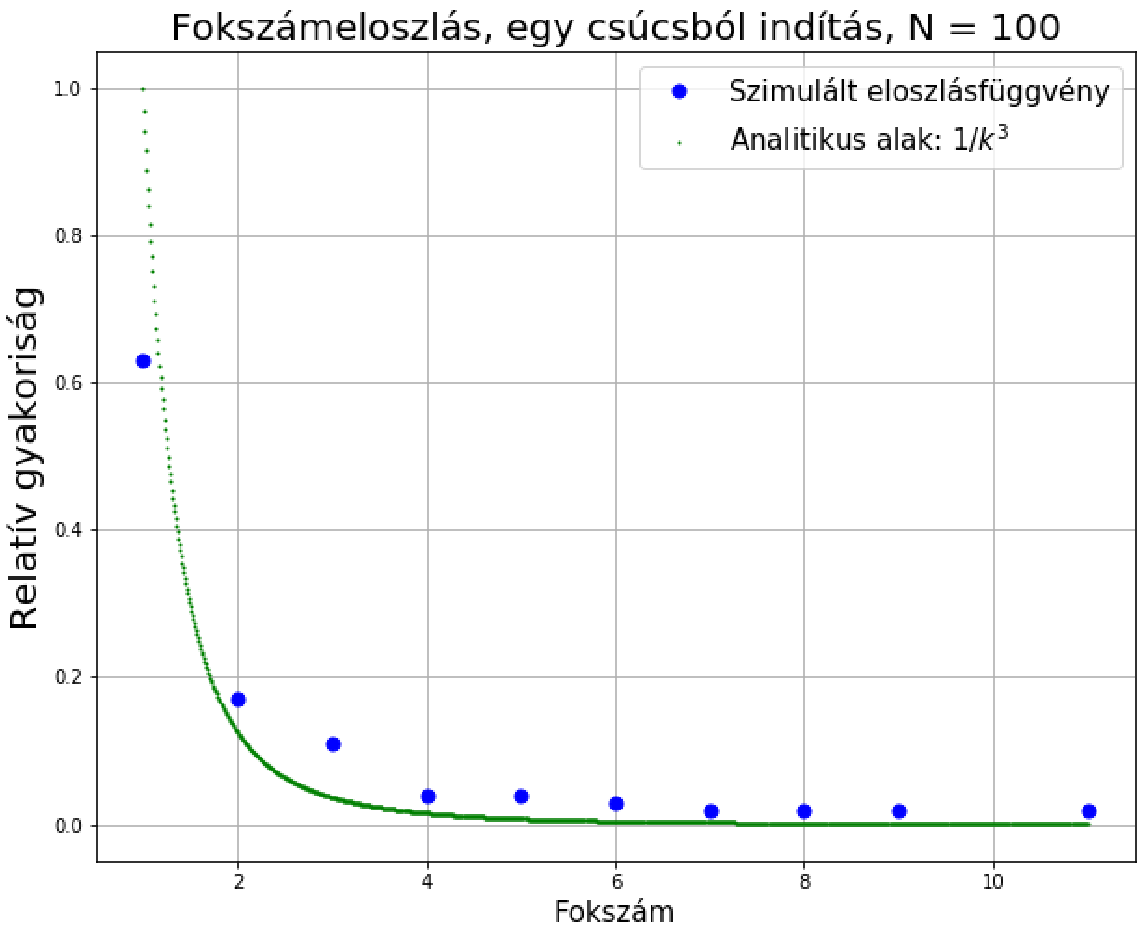
```
    w_k = k / A
    P = random.random()

    if(P < w_k):
        fokszamok[random_kivalasztott_csucs] += 1
        fokszamok[i] = 1
        osszekotes_megtortent = True
```

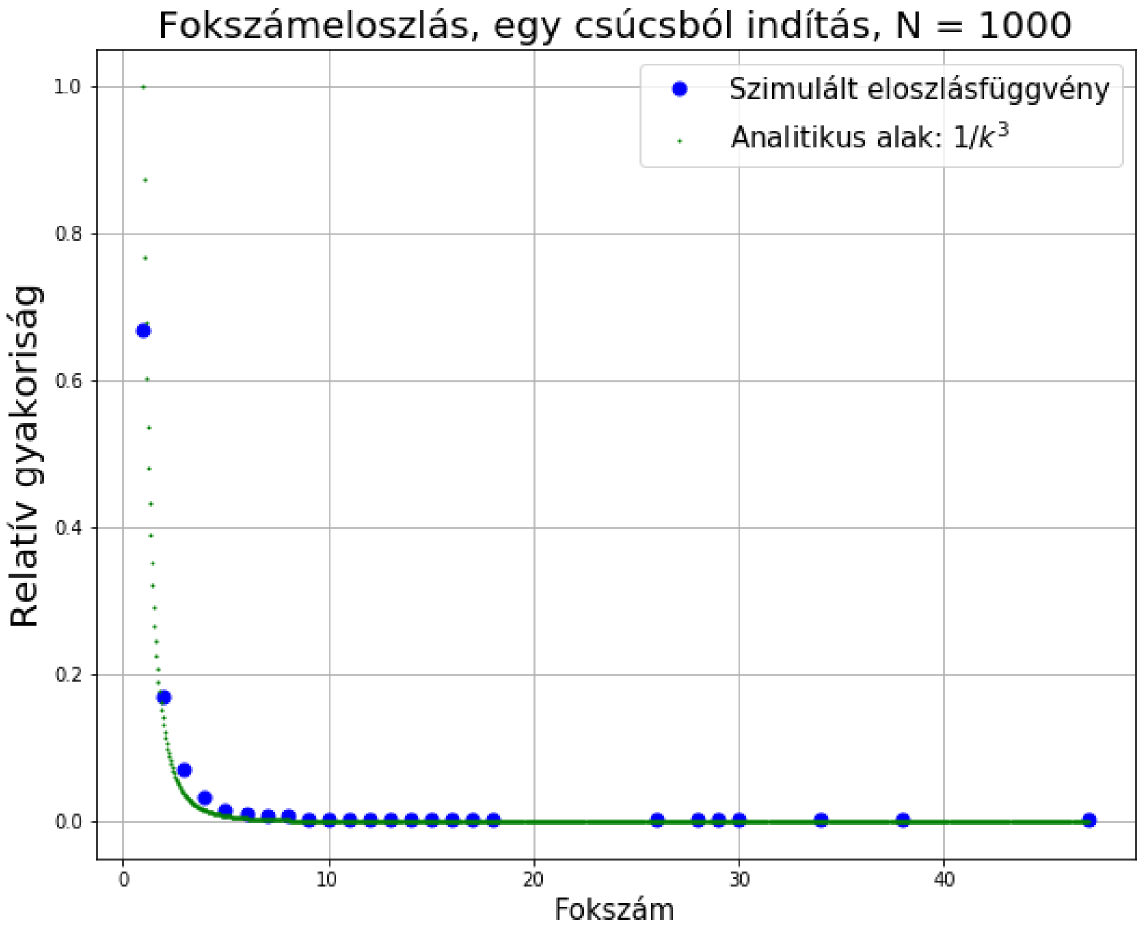
Majd a legnagyobb fokszámmal rendelkező csúcsot kerestem meg és ennek kiírását oldottam meg, valamint az ábrázoláshoz készítettem elő az adatokat, ami az analitikus görbét is tartalmazza.

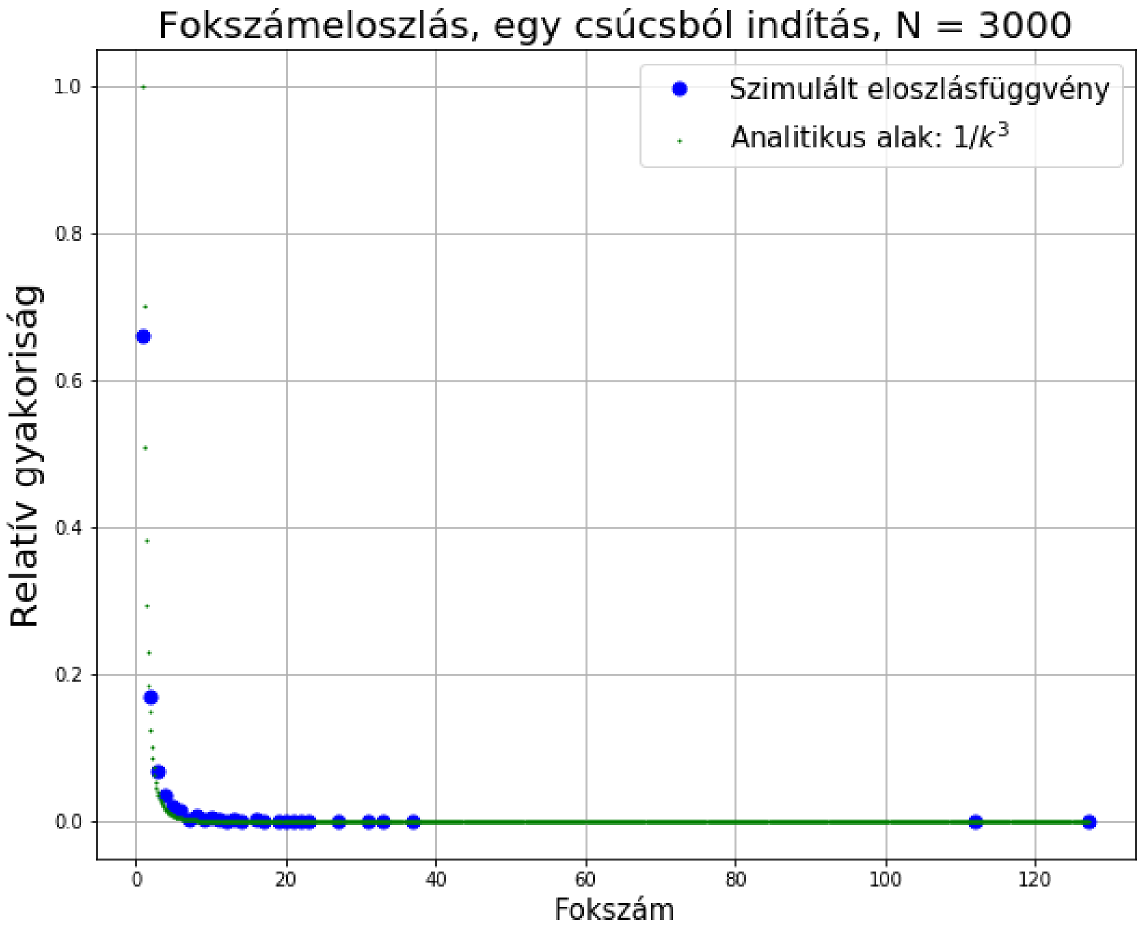
```
#Legnagyobb fokszamu csucs megtalalasa
index = where(fokszamok == max(fokszamok))
print("Az ennyiedik csucs(ok)nak van maximalis fokszama: " +
    str(csucsok[index[0]]) + " ami ekkora fokszamu: " +
    str(max(fokszamok)))

#unique-izalas
fokszameloszlas = []
fokszamokfajtaja = []
for i in range (0,N):
    if fokszamok[i] not in fokszamokfajtaja:
        fokszamokfajtaja.append(fokszamok[i])
        fokszameloszlas.append(1)
    if fokszamok[i] in fokszamokfajtaja:
        fokszameloszlas[fokszamokfajtaja.index(fokszamok[i])] += 1

#kiiratas
for i in range (0,len(fokszameloszlas)):
    print("Mekkora fokszam: " + str(fokszamokfajtaja[i]) +
    ". Ennek gyakorisaga:"+str(fokszameloszlas[i]))

fokszameloszlas = numpy.array(fokszameloszlas)
fokszamokfajtaja = numpy.array(fokszamokfajtaja)
eloszlasfuggveny = fokszameloszlas / N

#analitikus mo
def analitikus_mo(k):
    return 1/(k**3)

k = linspace(1,max(fokszamokfajtaja),1000)
```

Ábrázoltam a szimuláció eredményeit, melyen látható, hogy a három különböző kezdőparaméterekkel rendelkező rendszerek, mennyire térnek el a $P_k \approx k^{-3}$ alaktól. Az ábrákról leolvasható, hogy kellően nagy N-ekre a rendszer megközelíti az elméleti értéket a logaritmikus skálás ábrázolt értékeken jól látszik hogy növekvő N-ek esetén, hogyan mozognak a szimulált adatok, sajnos számítási kapacitás hiányában nem tudtam a $10^5 - 10^6$-os tartományig elmenni, mivel a számítógépem nem engedte, de az $N = 100$ as feltétel mellett jól megfigyelhető az eltérés.

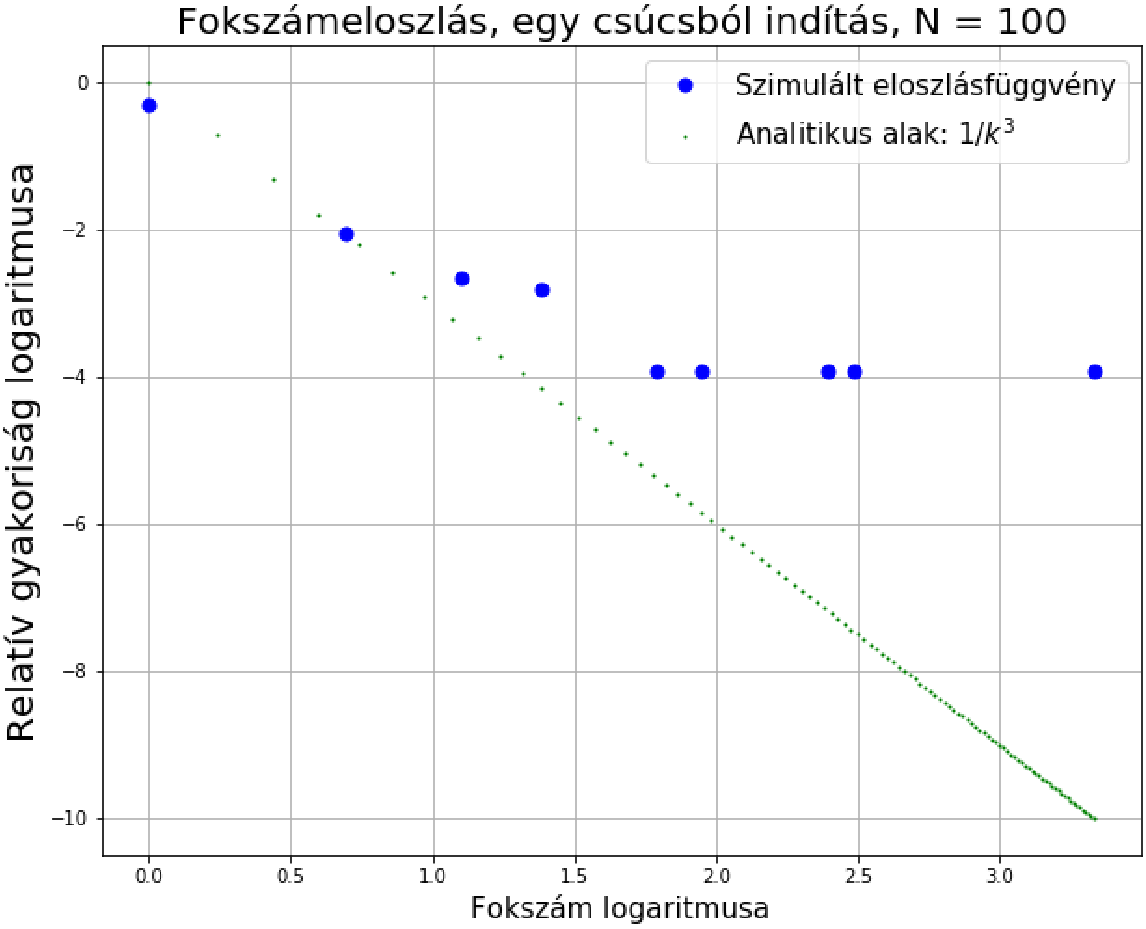
1.részfeladat

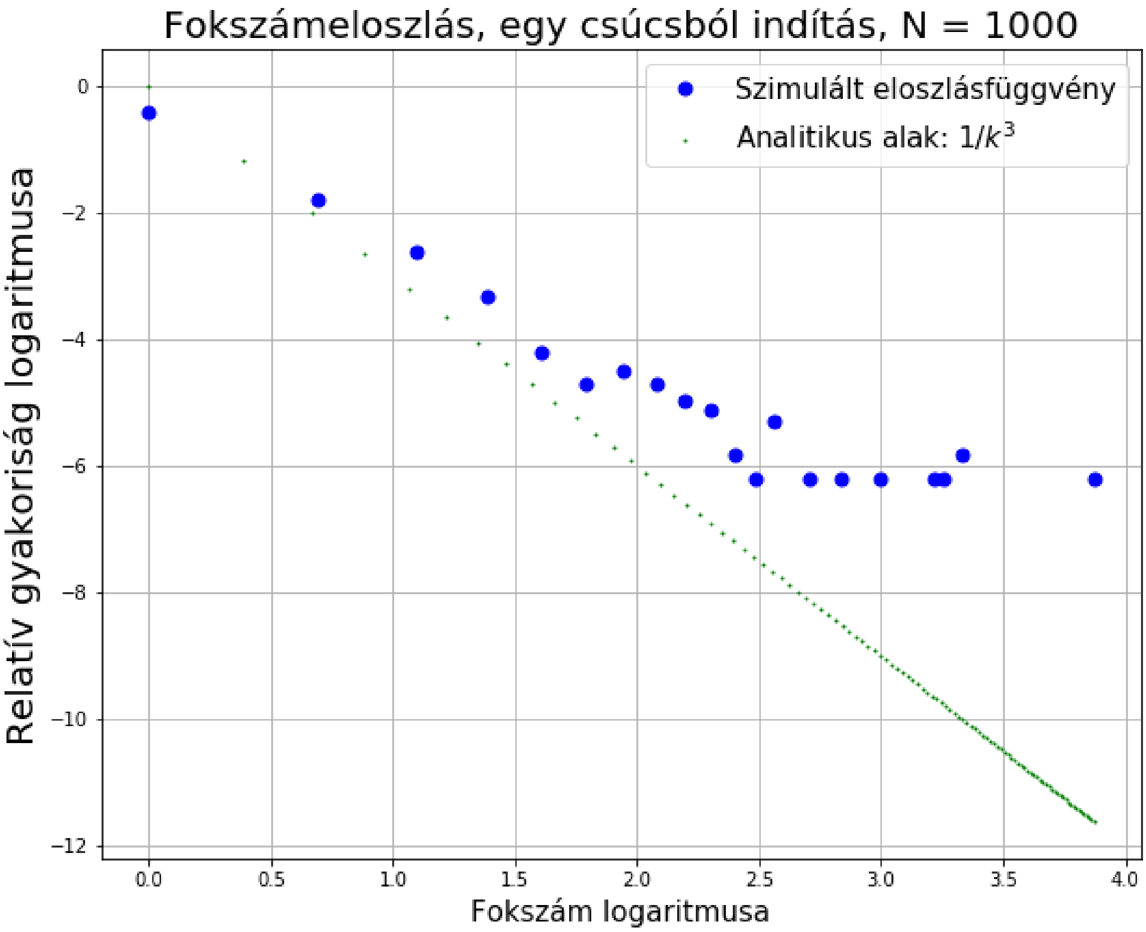


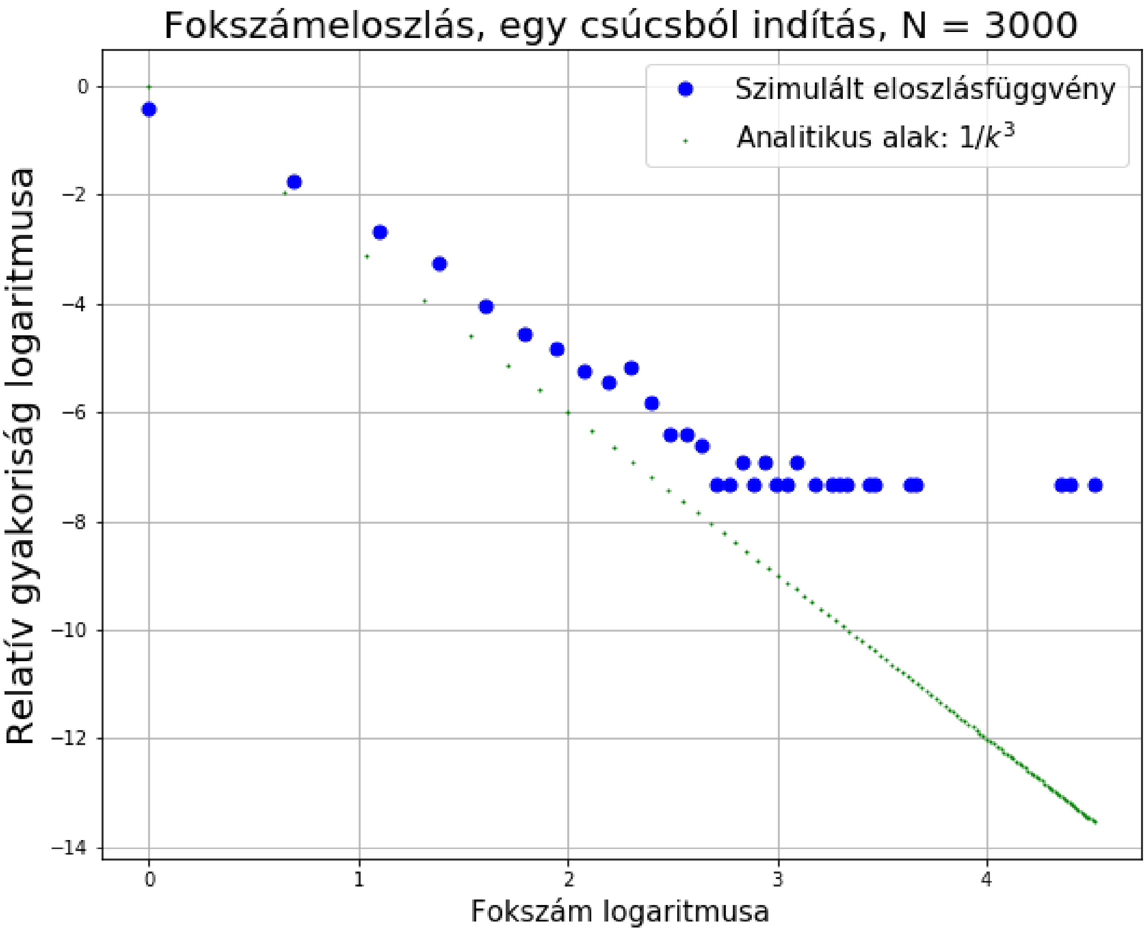

Fokszámeloszlás, egy csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság
Fokszám
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40



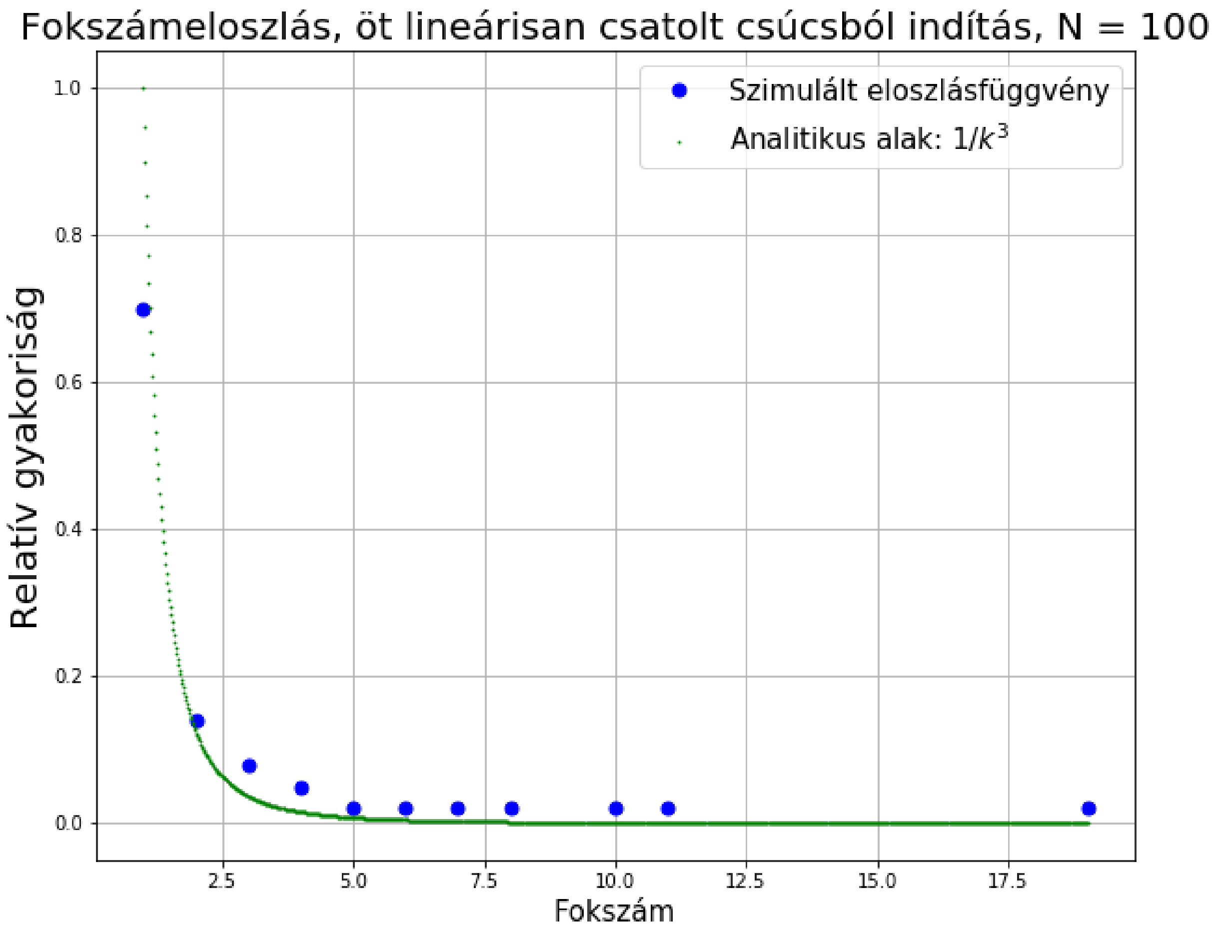
Fokszámeloszlás, egy csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: 1/k^3
Relatív gyakoriság
Fokszám
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
120

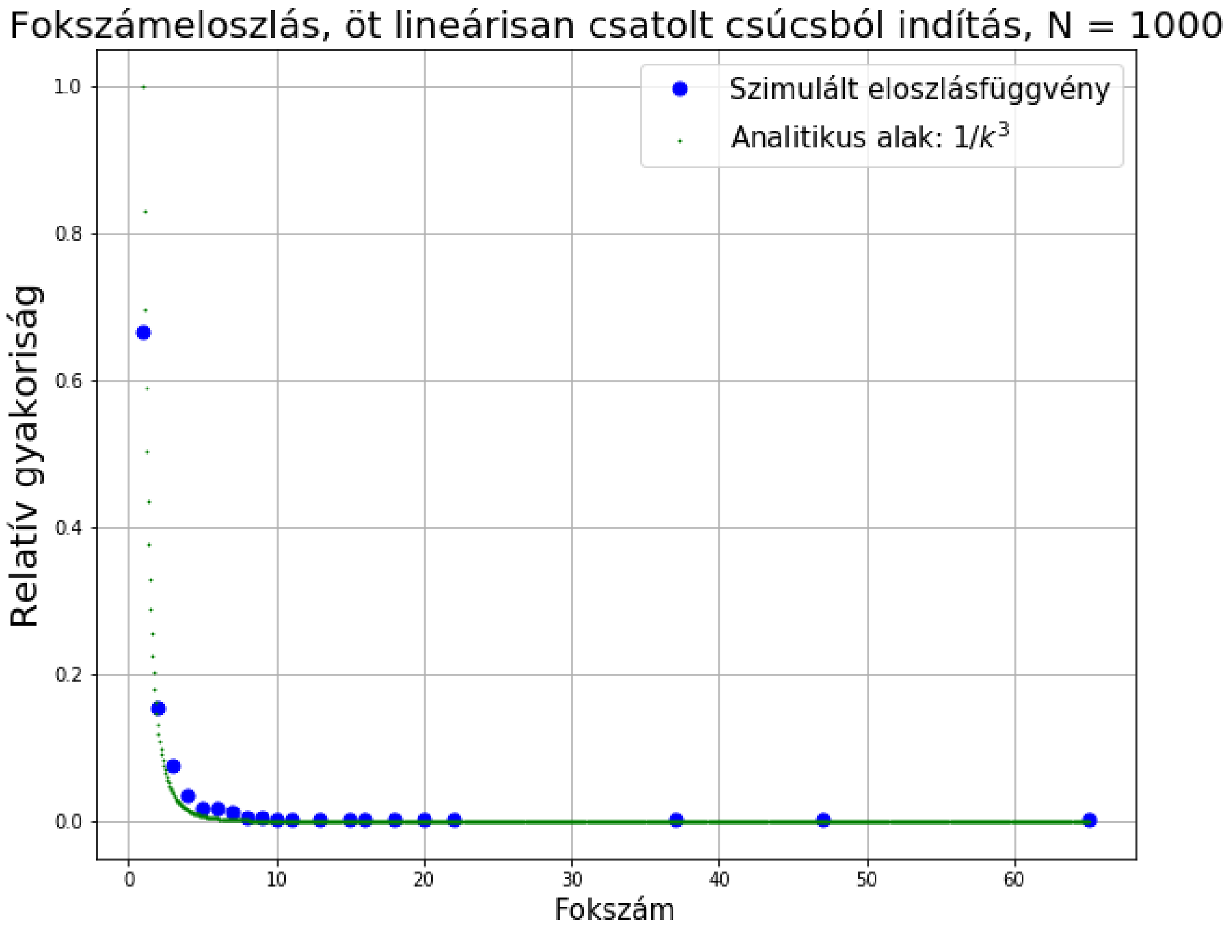

Fokszámeloszlás, egy csúcsból indítás, N = 100
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

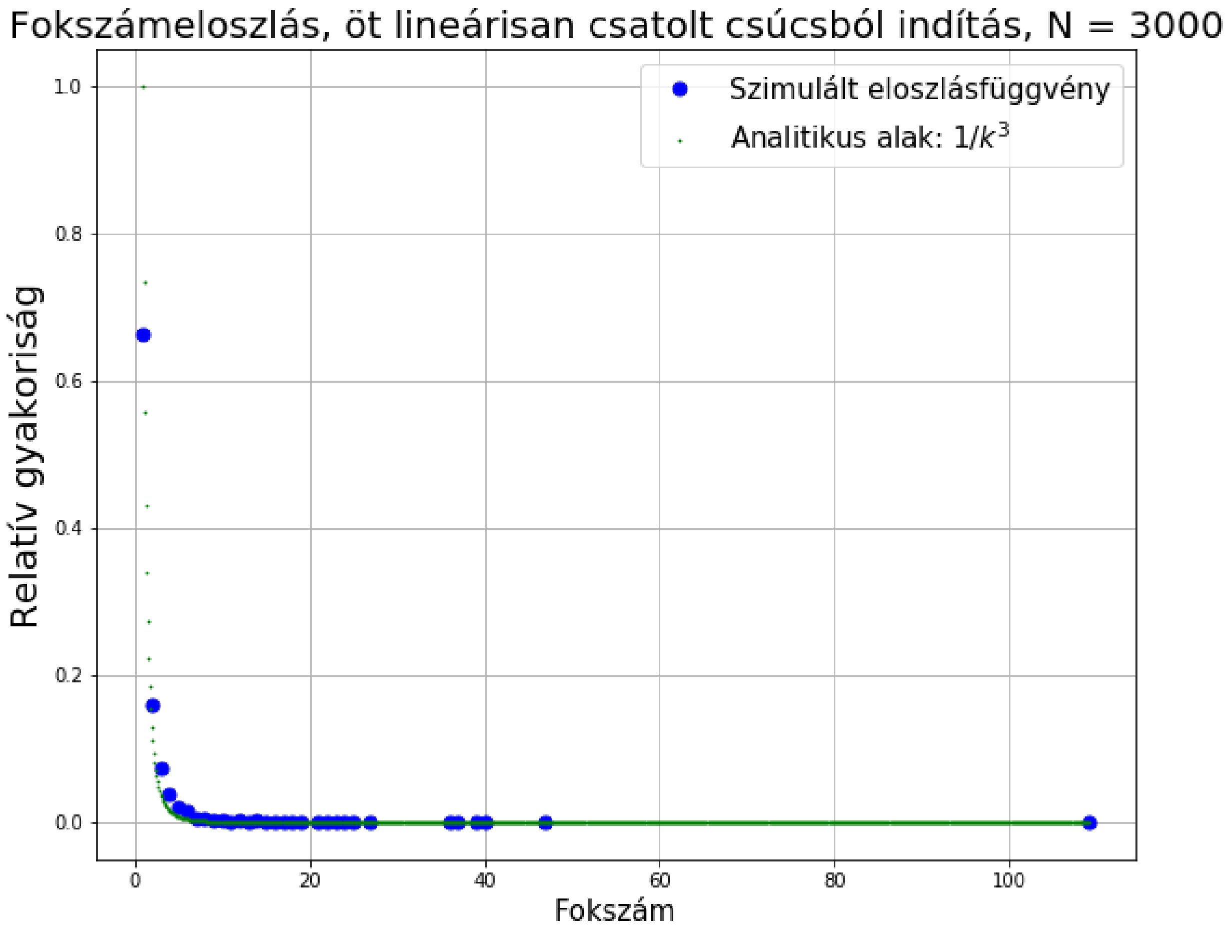

Fokszámeloszlás, egy csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

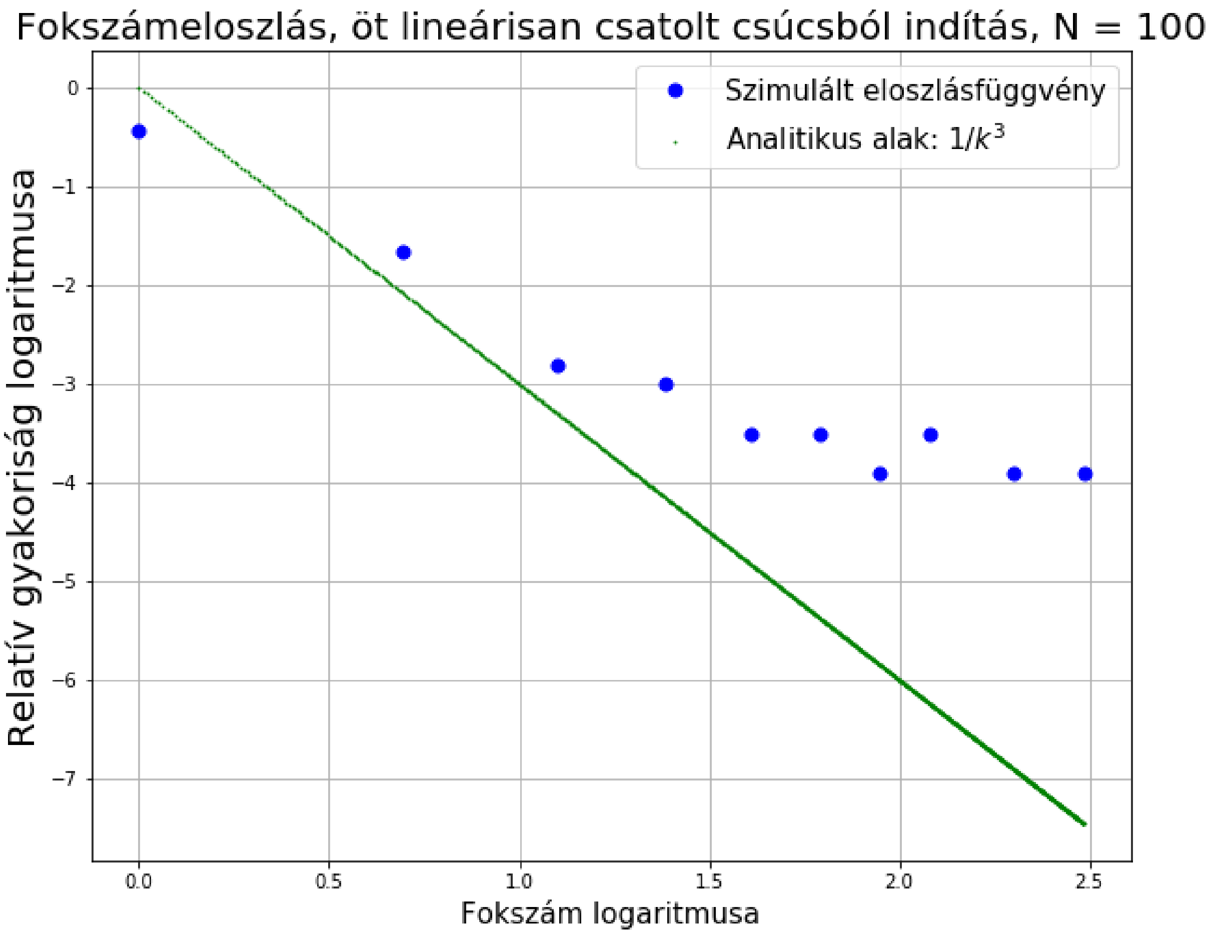

Fokszámeloszlás, egy csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
0
1
2
3
4

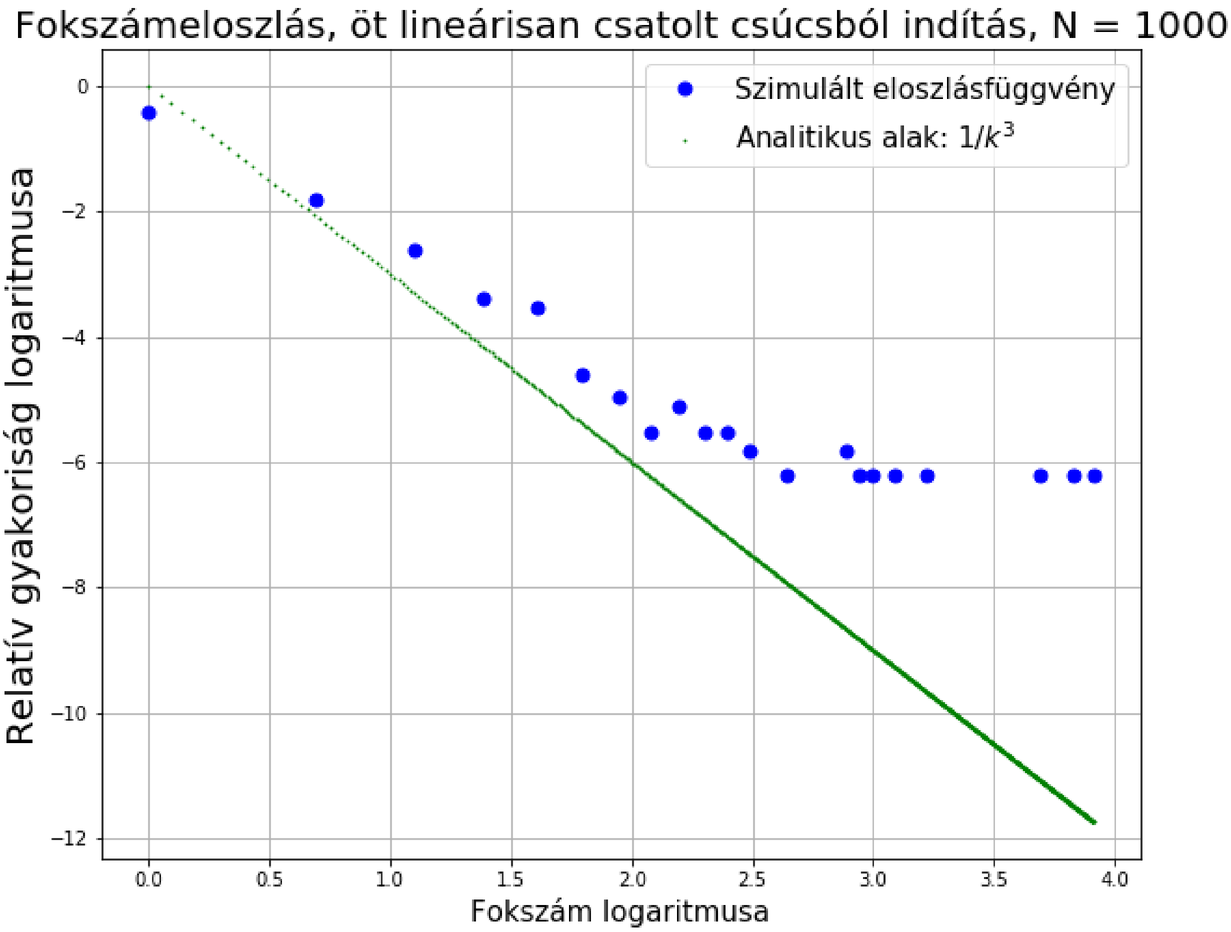
2.részfeladat



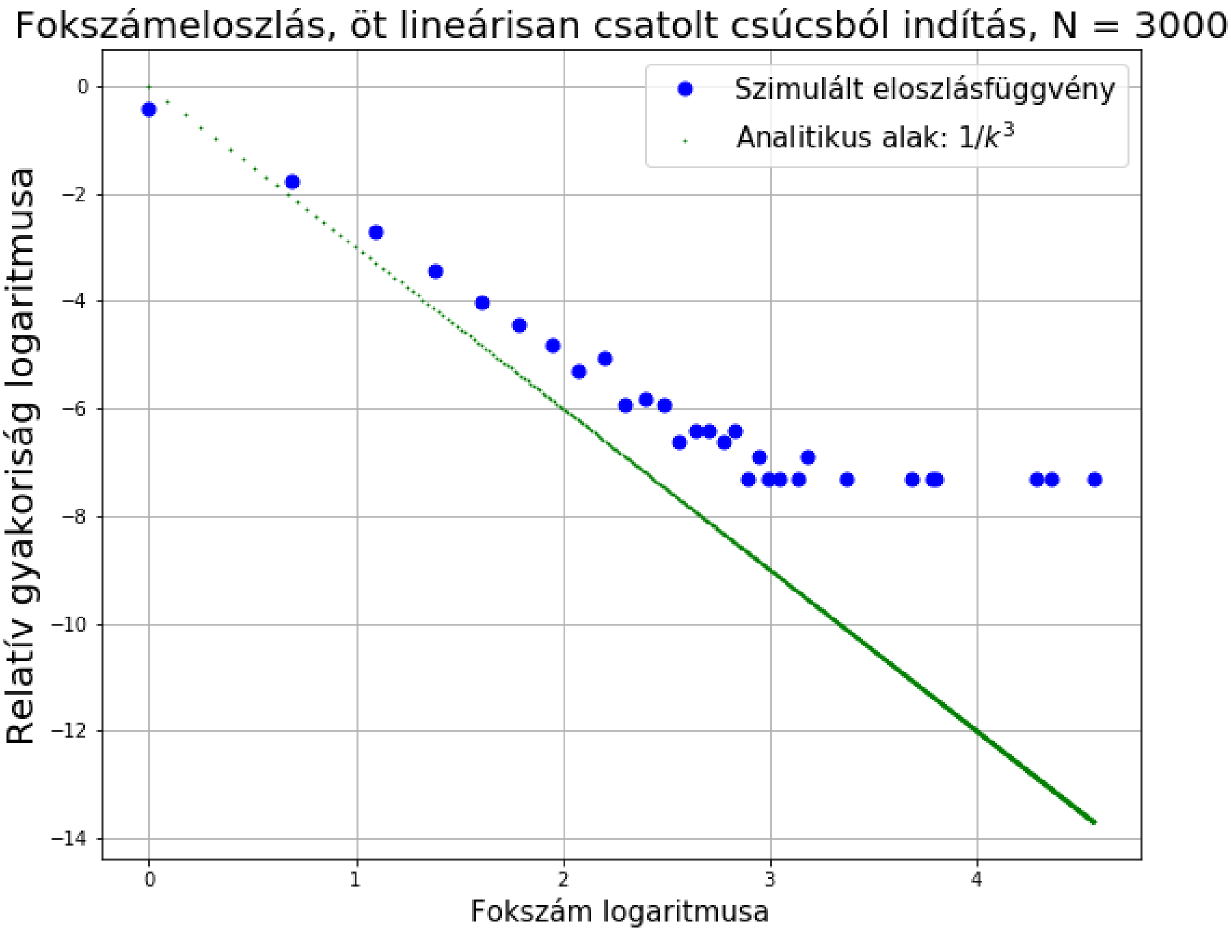

Fokszámeloszlás, öt lineárisan csatolt csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság
Fokszám
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60


Fokszámeloszlás, öt lineárisan csatolt csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság
Fokszám
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100


Fokszámeloszlás, öt lineárisan csatolt csúcsból indítás, N = 100
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

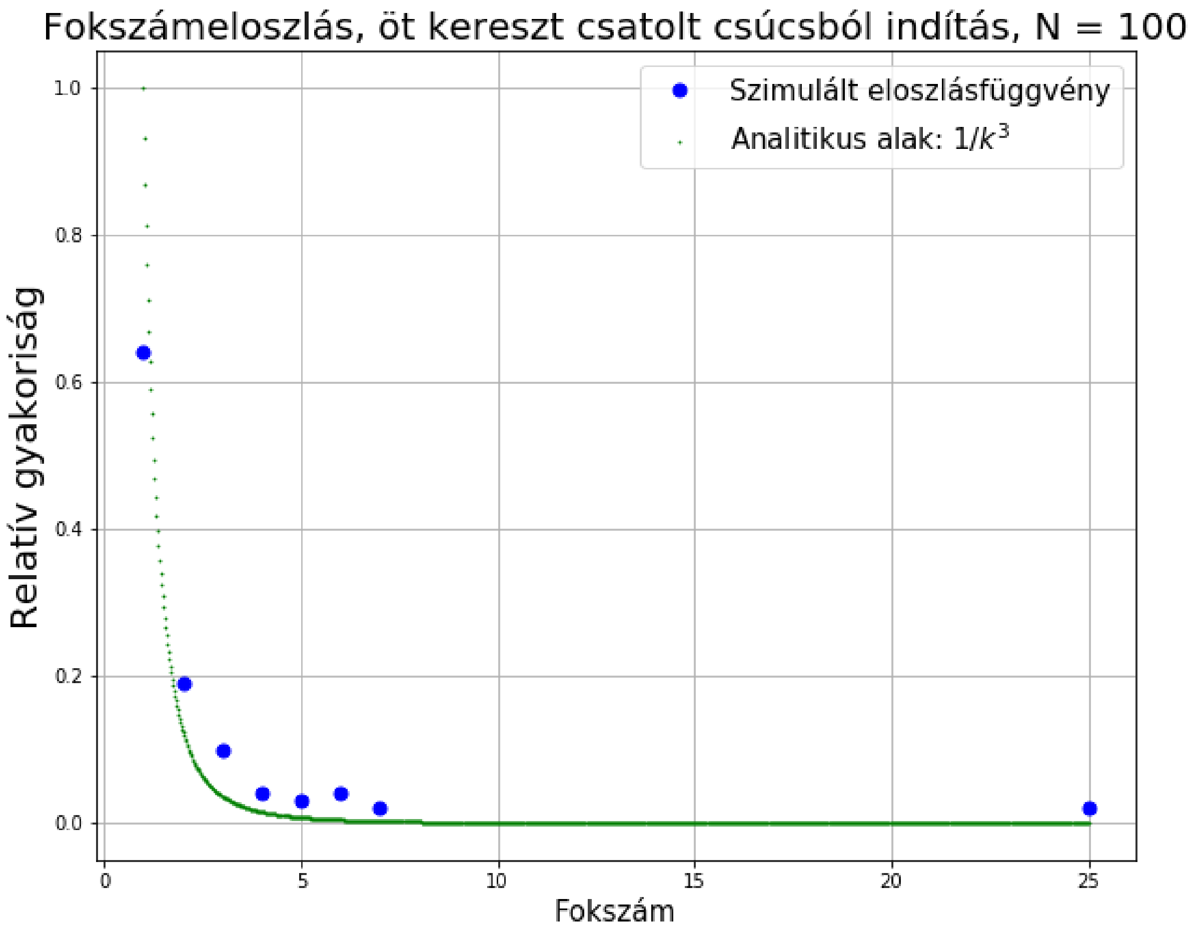


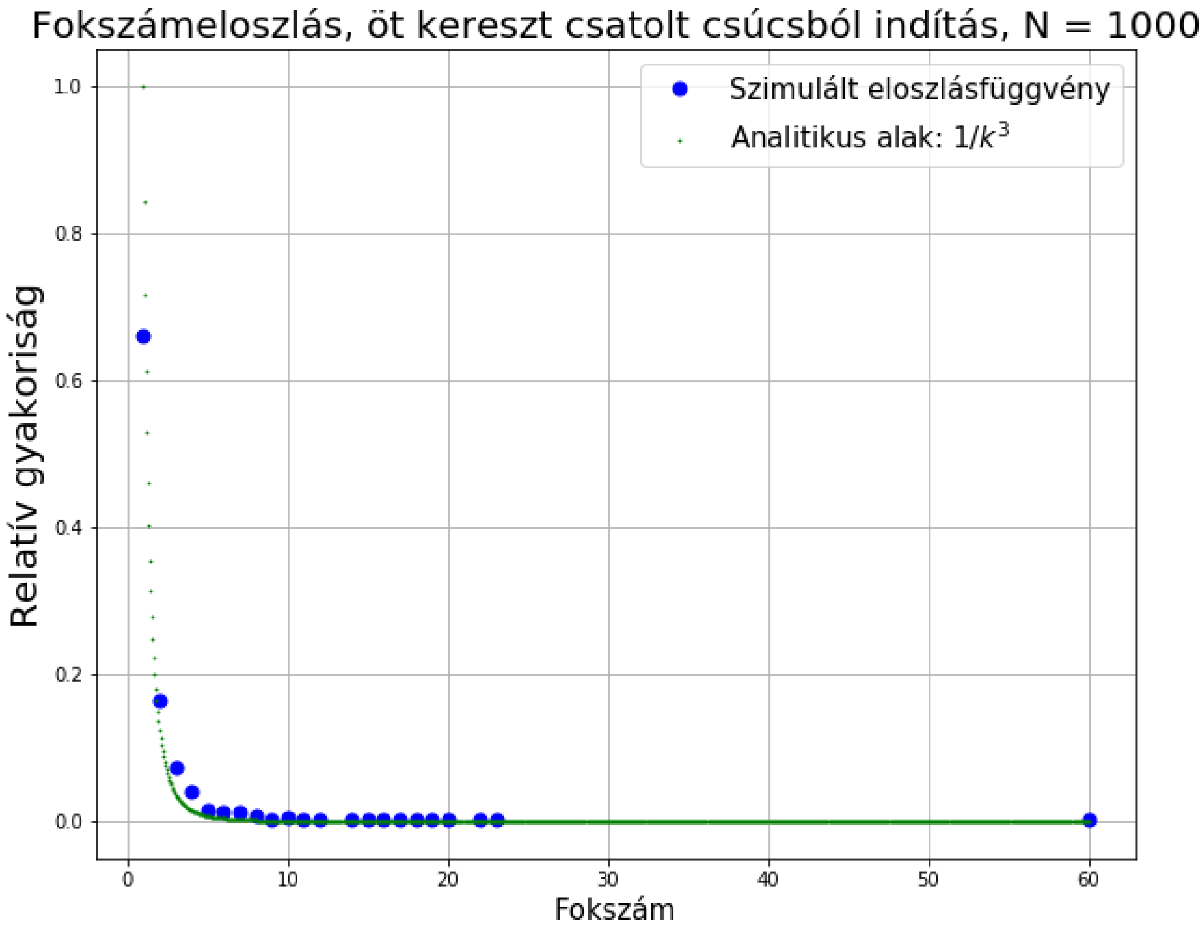
Fokszámeloszlás, öt lineárisan csatolt csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

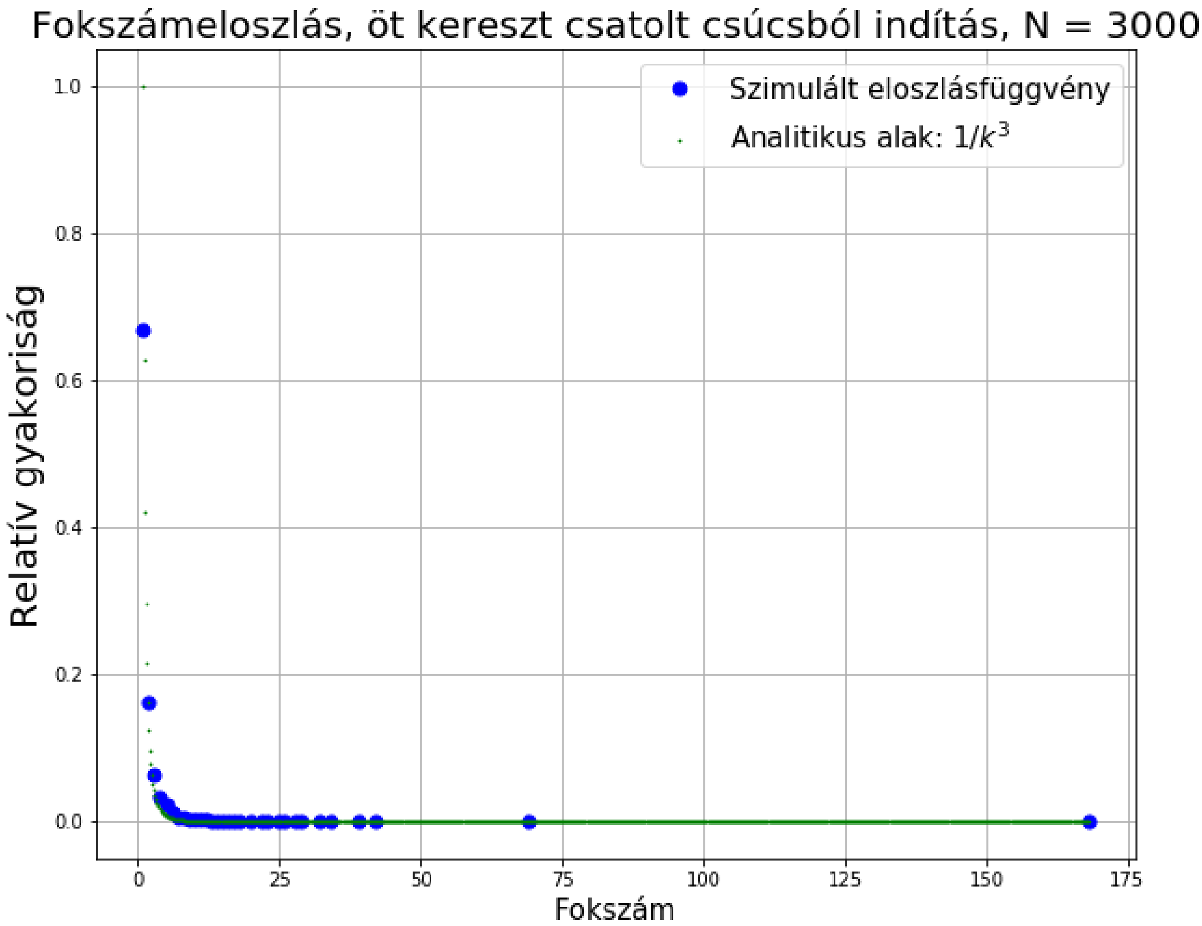


Fokszámeloszlás, öt lineárisan csatolt csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
0
1
2
3
4

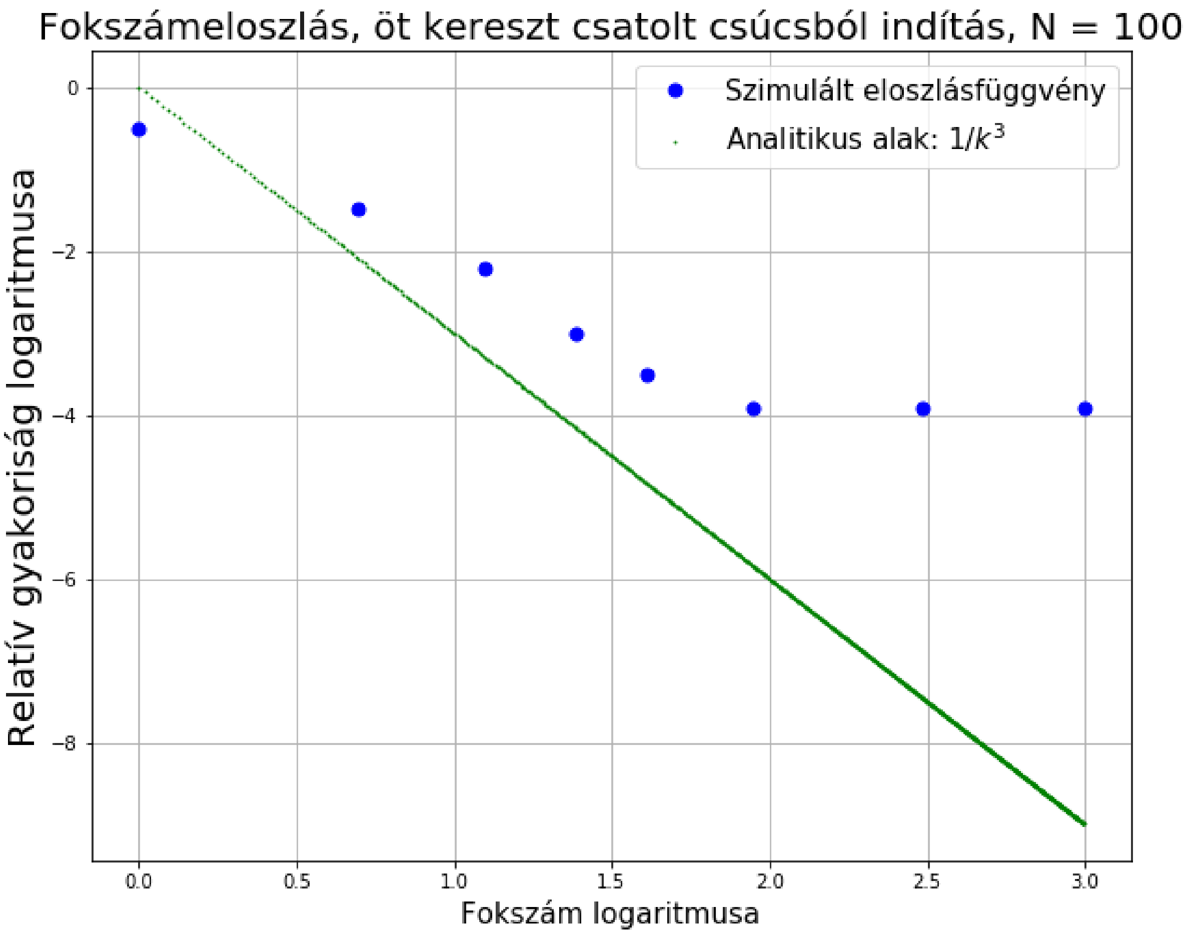
3.részfeladat

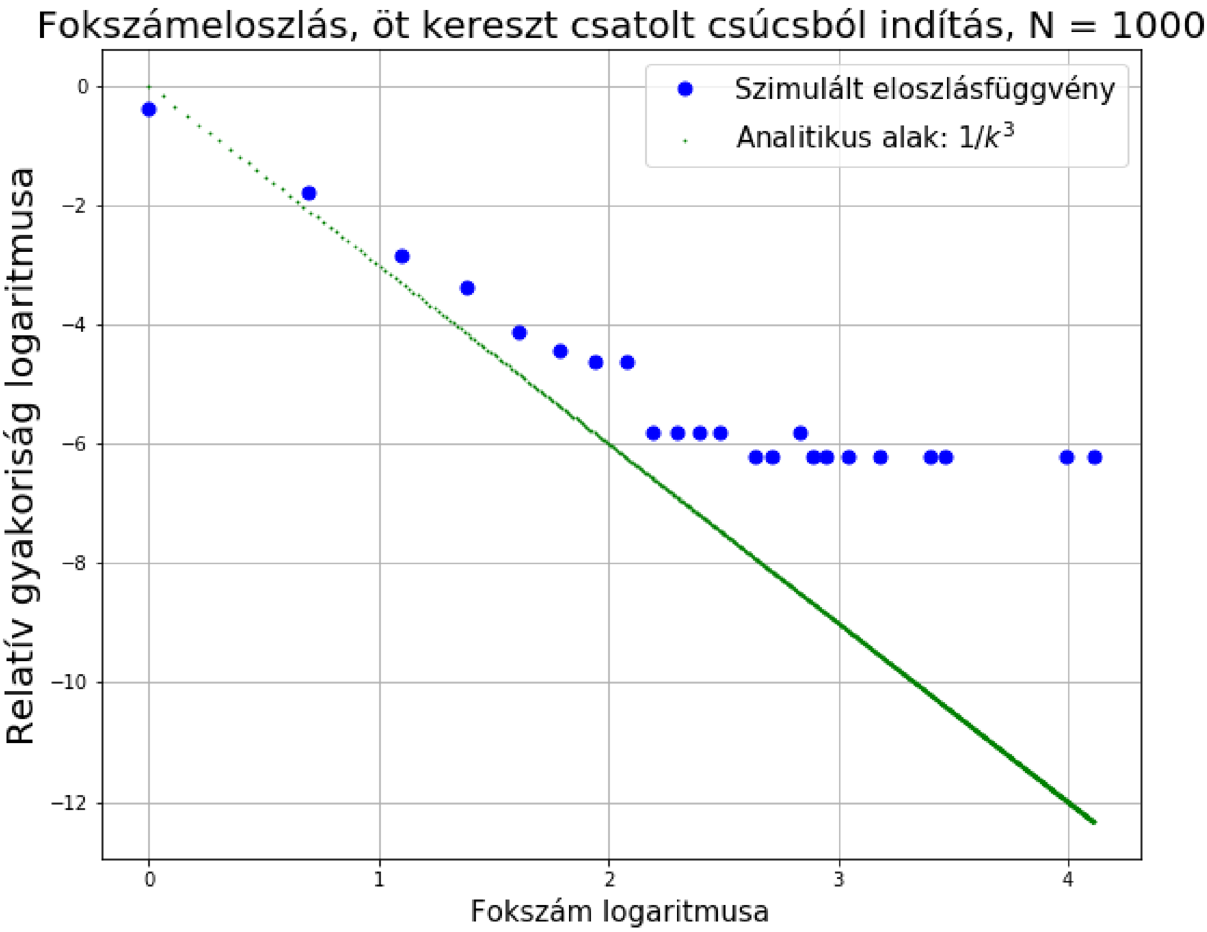


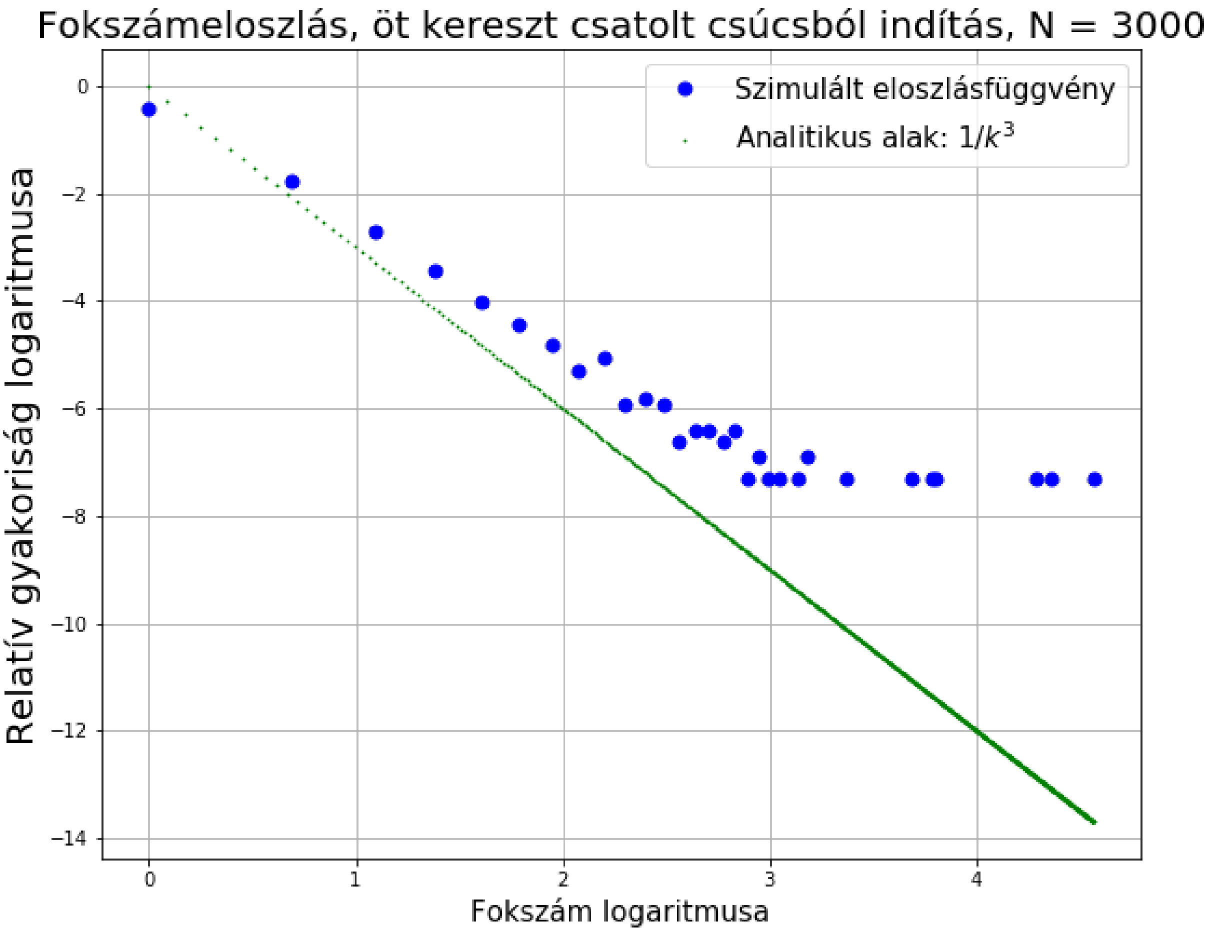

Fokszámeloszlás, öt kereszt csatolt csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: 1/k^3
Relatív gyakoriság
Fokszám
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50
60



Fokszámeloszlás, öt kereszt csatolt csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság
Fokszám
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
25
50
75
100
125
150
175


Fokszámeloszlás, öt kereszt csatolt csúcsból indítás, N = 100
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: 1/k^3
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


Fokszámeloszlás, öt kereszt csatolt csúcsból indítás, N = 1000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
0
1
2
3
4

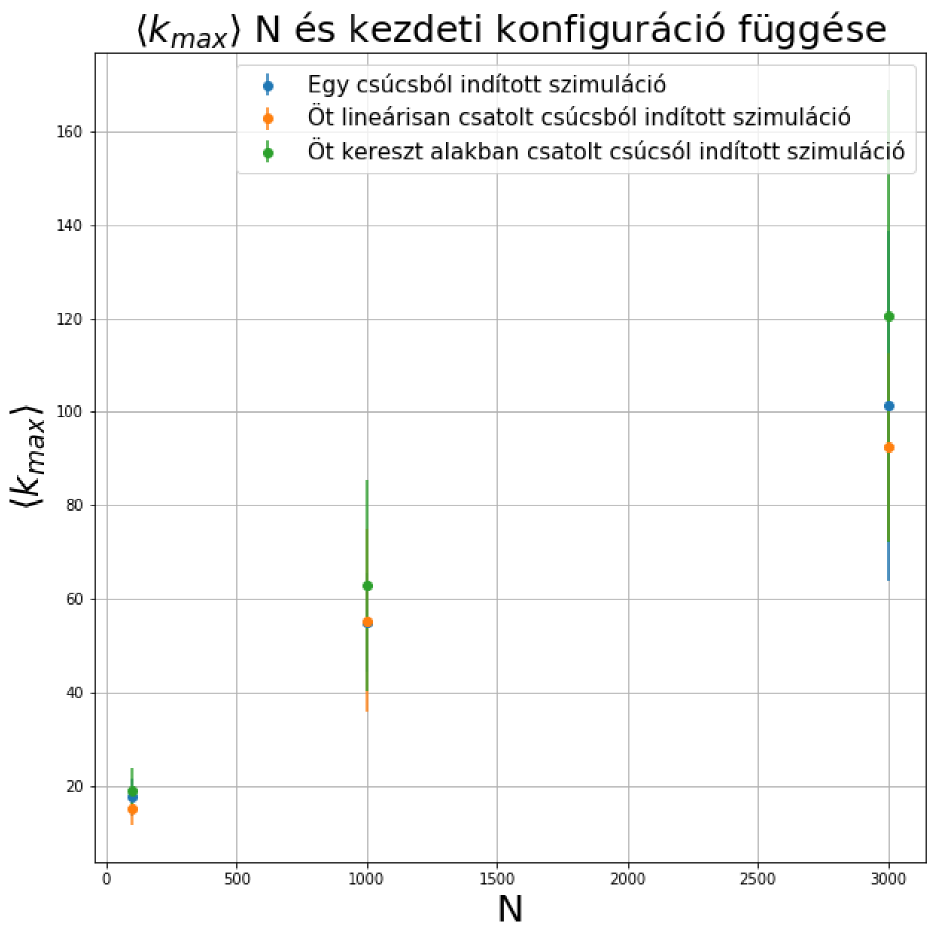


Fokszámeloszlás, öt kereszt csatolt csúcsból indítás, N = 3000
Szimulált eloszlásfüggvény
Analitikus alak: $1/k^3$
Relatív gyakoriság logaritmusa
Fokszám logaritmusa
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
0
1
2
3
4

Feladatunk volt megvizsgálni a maximális fokszám átlagának, $\langle k_{max} \rangle$-nak a kezdeti feltételektől való függését.Ebben az esetben úgy jártam el, hogy N = 100, 1000 és 3000 esetére 7-szer lefuttattam a szimulációt mindhárom kezdeti feltételből indítva, lejegyeztem a maximális fokszámú csúcsokat, ezeket kiátlagoltam, és a hibát a következő formulával számoltam:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2, \rightarrowtail \sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{2.1}$$

A mérési adatokat az alábbi táblázatok tartalmazzák. Ezek után kiábrázoltam a kapott $\langle k_{maxi} \rangle$ átlagértékeket hibával együtt, ezt láthatjuk a 2..1 ábrán, amiről leolvashatjuk, hogy mindhárom kezdeti konfiguráció hibahatáron belül közel egyező megoldást ad, illetve mindhárom esetén ahogy várhattuk, N növelésével $\langle k_{maxi} \rangle$ növekvő tendenciát mutat.



2..1. ábra. $\langle k_{max} \rangle$ N és kezdeti konfiguráció függése.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
100	17
100	15
100	22
100	20
100	23
100	12
100	14
Átlag hibával	17.57 ± 3.9

1. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 100 esetre, egy csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
1000	57
1000	66
1000	36
1000	58
1000	65
1000	60
1000	43
Átlag hibával	55 ± 10.4

2. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 1000 esetre, egy csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
3000	67
3000	88
3000	174
3000	116
3000	74
3000	63
3000	127
Átlag hibával	17.57 ± 3.9

3. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 3000 esetre, egy csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
100	23
100	13
100	17
100	16
100	14
100	13
100	11
Átlag hibával	15.28 ± 3.7

4. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 100 esetre,öt lineárisan csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
1000	96
1000	46
1000	63
1000	41
1000	46
1000	33
1000	63
Átlag hibával	55.42 ± 19.5

5. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 1000 esetre, öt lineárisan csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
3000	65
3000	95
3000	92
3000	125
3000	81
3000	89
3000	109
Átlag hibával	92.42 ± 20

6. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 3000 esetre, öt lineárisan csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
100	18
100	22
100	21
100	13
100	13
100	28
100	16
Átlag hibával	19 ± 4.9

7. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 100 esetre,öt kereszt alakban csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
1000	36
1000	76
1000	38
1000	55
1000	50
1000	86
1000	99
Átlag hibával	62.85 ± 22.6

8. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 1000 esetre, öt kereszt alakban csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.

N	$\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszám
3000	172
3000	91
3000	63
3000	85
3000	186
3000	79
3000	168
Átlag hibával	120.57 ± 48.3

9. táblázat. $\langle k_{max} \rangle$ maximális fokszámok, s azok átlaga hibával, N = 3000 esetre, öt kereszt alakban csatolt csúcsból indított szimuláció esetében.