Márton Tamás

PJF19C

①

a)

Az első órán egy pénzfeldobó gép működését koncolgattuk amit meg tudom fogalmazni ezt a kérdést. A gép működésénél a szerencsét és a frekvenciát tudom állítani. A kapott eredményeket egy f, v diagrammon ábrázolva a félfordulatokat elválasztó határvonal (~~parabola~~) hiperbolákat rajzol. Mondtuk, hogy a hiperbolák távolsága növelnő f és v értékek esetén $\frac{1}{\sqrt{n}}$-el nagy, lesznek nagyon keskeny sávok is. A berendezésünk beállítóráshoz használt értékadó eszközt, ahol a szerencsét és a frekvenciát beállíthatom feltesszem, hogy csak egész számokat tud adni, töréseket már nem. Ez tudom képzelni, hogy van olyan keskeny hiperbola sáv amit akkor tudok csak beállítani ha három tizedesjegy pontosan adom meg a v, f értékeket és ha ez összerakott beszabadodrem elektronosan nem elég stabil és a második tizedesjegyle mindig ingadozik, amit nem is látok mivel csak egész számot mutat a kijelzőm, így belően nagy f és v esetén már a beállításom már csak a véletlen következménye miatt lehet azonos a kidobott fej vagy írás értékével.

b) Egy mindennapos esemény a vásárlásnál a sorban állás, amelyikben nem ismerjük a korszakot és azt feltételezem, hogy mindegyik kasszás ugyanolyan gyorsan dolgozik (persze nem így van), a ~~*~~ sorokban álló emberek kosaraiban látható tárgyak darabszáma alapján mondhatom meg hogy melyik sorban fogok legnagyobb való színűséggel végezni.

c) Porszemcsék mozgása a levegőben, amit egy ablakon beszűrődő nap tesz láthatóvá, amelyikben 3 dimenzióban írjuk fel a mozgást és eltekintünk a gravitációtól, akkor ez a modell megfelel az előadáson tanult Brown-mozgás leírásával.

2)

a)

A F és az I is 0,5 valószínűséggel fordul elő leesés után. Mivel a dobások függetlenek egymástól, ahhoz, hogy FF vagy FI végeredményt kapjunk, először F-et kell dobni ami 0,5 valószínűségű és utána I-t vagy F-et ~~[illegible]~~ szintén 0,5 valószínűséggel lehetséges. Így 0,25 valószínűséggel nyerhet mindkét fél tehát a játék igazságos.

b)

Tanár úr segítségét követve először annak a valószínűségét számolom ki, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a 25 diákból mindenki más napon született. Majd azt vonom le az 1-ből hogy megkapjam a helyes eredményt.

- Nem ugyan azon a napon születtek:

$$P_{nem} = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \cdots\cdots \frac{365-(n+1)}{365} \Rightarrow \frac{365!}{(365-n)!}\,\frac{1}{365^n} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

- n értéke most 25

$$P_{nem} = \frac{365!}{365^{25}(340)!} \simeq 0,4313$$

- Egy napon születtek:

$$P_{igen} = 1 - P_{nem} = 1 - 0,4313 = 0,5687$$

Tehát érdemes arra fogadni, hogy két diáknak ugyanarra napra esik a születésnapja.

A számolásnál elhanyagoltuk, hogy lehet szökőév, születési statisztikákat is azt, hogy lehetnek ikrek is a csoportban.

③

Az előadáson kiszámolt Brown-mozgás valószínűségi képletét használhatom a megoldáshoz, de most az elmozdulás nem Δ hanem ℓ. Első esetben minden kitüntetett irány mivel $p_+ = p_- = 1/2$ tehát a $\phi(\ell) = \phi(-\ell) = 1/2$. Tehát a D diffúziós együttható most

$D = \frac{\overline{\ell^2}}{2\tau}$ és a sűrűségfüggvény $P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$ valamint $t = N\tau$

Mindent felhasználva azt kapom hogy:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\overline{\ell^2}}{2\tau} N\tau}} e^{\frac{-x^2}{4\frac{\overline{\ell^2}}{2\tau}N\tau}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\overline{\ell^2}}{2} N}} e^{\frac{-x^2}{2\overline{\ell^2}N}}$$

Várható érték:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x,t)\, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x,t)\, dx$$

$\langle x \rangle =$ $P(x,t)$ páros függvény $x =$ páratlan így az integrálás tétele

$$\langle x_t \rangle = \emptyset.$$

$\langle x^2 \rangle =$ felhasználom az órán számolt integrált amit D paraméternél számoltunk végig

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = 2\frac{\overline{\ell^2}}{2\tau} N\tau = \overline{\ell^2} N$$

Ameddig $p_+ = 3p_-$ -al így a problémára úgy tekintünk mint binomiális eloszlásra; $p_+ = \frac{1}{4}$; $p_- = \frac{3}{4}$;

Vizsgáljuk meg az alapesetet mikor $p_+ = p_-$.

<u>Binomiális eloszlás</u>: $P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

$$\langle x \rangle = Np$$

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{Np(1-p)}$$

- ha $p_+ = p_-$ és ugrás távolság $\pm l$

az ugrások számának várható értéke: $Np_- = Np_+ = \frac{N}{2}$

akkor $\pm \frac{Nl}{2}$ távolságot fog ugrani, ahol

$$\langle x \rangle = \frac{Nl}{2} - \frac{Nl}{2} = 0$$

$\langle x^2 \rangle$ a szórásból számolható mert $\sigma_+ = \sigma_- = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{\frac{N}{4}} = \frac{\sqrt{N}}{2}$

tehát az ugrások távolságának szórása $\frac{\sqrt{N}l}{2}$ jobbra és balra is.

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle - 0 = \left(\frac{\sqrt{N}l}{2} + \frac{\sqrt{N}l}{2}\right)^2 = Nl^2$$

- ezeket az alapokat most felhasználhatom tetszőleges p_+ és p_--re

most $p_+ = \frac{1}{4}$; $p_- = \frac{3}{4}$

$$\langle x \rangle = Nl\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{2Nl}{4} = \frac{Nl}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x\rangle^2 = \left(\frac{\sqrt{3N}l}{4} + \frac{\sqrt{3N}l}{4}\right)^2 + \frac{N^2l^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3N}l}{2}\right)^2 + \frac{N^2l^2}{4} = \left(\frac{3}{2} + \frac{N}{4}\right)Nl^2 = \langle x^2 \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2 = \frac{3Nl^2}{4}$$

4 a) b)

A feladat megoldásához az órán tanult Chapman-Kolmogorov egyenletet használom: $P(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)P(x-\Delta,t)\,d\Delta$

most is elvégezhetem a Kramers-Moyal sorfejtést, mint $r(t)$ sokkal nagyobb mint $r(\tau)$ és τ nagyon kicsi.

$$\cancel{P(x,t)}+\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau=\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\,d\Delta\, P(x,t)}}_{\text{normálás miatt } 1\cdot P(x,t)}-\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\Delta\,d\Delta\,\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\Delta^2\,d\Delta\,\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau=-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\Delta\,d\Delta}_{\overline{\Delta}}\,\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\Delta^2\,d\Delta}_{\overline{\Delta^2}}\,\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$=\ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau=-\overline{\Delta}\,\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\overline{\Delta^2}\,\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\quad \Big/ :\tau$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\overline{\Delta}}{\tau}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

- ahol $\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}=D$, diffúziós együttható
- $\frac{\overline{\Delta}}{\tau}=v$, sebesség értelme, mivel Δ-hosszúság, τ idődimenziójú

} behelyettesítve

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-v\,\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+D\,\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

- Az egyenlet azt jelenti számunkra, hogy a $P(x,t)$ görbéként v-sebességgel halad miközben időben a félértékszélessége növekszik.

Tehát ha mi az origóhoz rögzített koordinátarendszerből figyeljük az idő fejlődést (~~akkor~~), hanem egy v sebességgel haladóból akkor az eredeti képet kapom.

Átírva $\longrightarrow$ $\cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} - v\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cancel{-v\frac{\partial \varphi}{\partial z}} + D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

és visszakapom az eredeti Fokker-Planck egyenletet ezzel a helyettesítéssel és koordinátarendszer nézéssel.

- Az origóból kiindulva:
  - A kezdeti feltételek ugyanazok mint az előadáson felírtak: $\varphi(z, t=0) = \delta(z)$

  amiből az előadáson mutatott eredményt kapjuk:

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

- ha visszaírjuk a $\varphi(z,t)$ -ből a $P(x,t)$ -be tehát az origóhoz rögzített koordinátarendszerbe akkor:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$