Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Klasszikus fizika laboratórium, Csütörtöki csoport

Márton Tamás

November 23.

Bevezetés

A cél a minták dinamikai vizsgálata meghatározott transzverzális, longitudinális vagy torziós rezgések esetén. A mérés során a rezgések amplitúdóját, frekvenciáját és a gerjesztő rezgéshez képesti fázisszögét mérjük a rezgésbe hozott mintán. Itt egyszerűbb kiküszöbölni a mérés során jelentkező hibaforrásokat, mint sztatikus dinamikai mérések során.

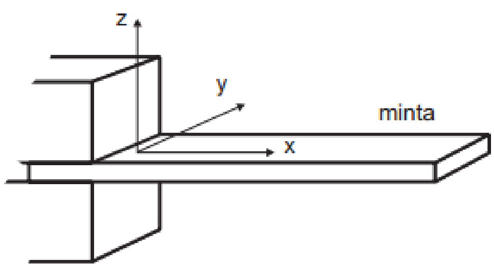
A mostani mérés során hasáb minták transzverzális rezgéseit fogjuk vizsgálni. Ezek sajátfrekvenciái a hallható hang tartományába esnek, erre utal a mérés címe.

I A mérés elvi áttekintése

A lineáris rugalmasságtan szerint egy szabad és befogott véggel rendelkező vékony rúd, kis amplitúdójú, csillapítatlan rezgés esetén, a rúd neutrális zónájának mozgását a következő parciális differenciál egyenlet írja le:

$$\frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Itt $z(x,t)$ a rúd kitérésének függvénye a rögzített végtől adott távolságra levő pontban. A a keresztmetszet, ρ az anyag sűrűsége, E a minta Young-modulusza, I pedig a másodrendű nyomatéka. A koordinátarendszer a következő módon van elhelyezve:



Az egyenlet megoldását $z(x,t) = Z(z)T(t)$ alakban keresve a megfelelő határfeltételek mellett (a rögzített végen $z(0,t) = 0$ és $\partial_x z(0,t) = 0$, a szabad végen $\partial_x^2 z(l,t) = 0$ és $\partial_x^3 z(l,t) = 0$) megoldva azt kapjuk, hogy a minta sajátfrekvenciái:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Ahol k_n számok a $\cosh(k_n)\cos(k_n) + 1 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$k_0 = 1.87510$$
$$k_1 = 4.69409$$
$$k_2 = 7.85476$$
$$k_3 = 10.9955$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a rezgésben csillapító tényező szerepet játszik, akkor a rezonancia görbe félértékszélességéből meghatározhatjuk a csillapítás mértékét. A körfrekvencia függő amplitúdó félérték szélessége és a csillapítási tényező közötti összefüggés:

$$\Delta\omega = 2\kappa_n$$

Ahol κ_n az adott saját móduszhoz tartozó csillapító tényező, ami nekünk most a nulladiké lesz. Az idő hiánya miatt mi nem a teljes rezonancia görbét, hanem csak a maximumát és a félértékszélességet mértük ki.

II A mérés leírása

A rezgés amplitúdóját egy piezoelektromos berendezéssel mérjük, amit a rezgő minta befogott végétől 10-15 mm-re helyeztem el. A piezoelektromos kristályban összenyomás hatására elektromos feszültség jön létre, melyet mérünk és erősítünk is. A rezonancia frekvenciát ez alapján, amplitúdó maximum mérésével tudtam meghatározni.

A mérés négy részből állt. A mérés első részében meg kellett határoznom egy adott minta (ez feltehetően alumínium volt) k_i móduszokhoz tartozó sajátfrekvenciáit és azok eltérését a számított értékhez képet(Egészes és feles erősítéseket is). Második lépésben meg kellett határoznom a másik (feltehetően vörösréz) minta rezonancia görbéjének félérték szélességét. Végül megvizsgáltam az alapfrekvenciák rezgési hossztól való függését. Ehhez 8, 7, 6, 5 és 4 cm-es szabad hosszak esetén mértem az utóbbi minta alapfrekvenciáit. Valamint az első felharmónikushoz tartozó csomópont helyét.

A négy mérésrész során a piezoelektromos detektort a befogott végtől 1-1,5 cm-re helyeztem, hiszen itt minden vizsgált esetben duzzadóhelye volt a rezgéseknek. A rezgést generáló elektromágnest, pedig a szabad vég alá helyeztem.

A sajátfrekvenciák felénél is tapasztalunk gerjesztést, mivel egy permanens mágnes is be van helyezve a rezonátorhoz. Ezeket is megmérjük az A minta gerjesztésénél, de az illesztést a saját móduszokra végezzük.

III Mérési adatok, kiértékelés

III.1 Geometriai paraméterek

A B jelű ezüstös valamint a 14-es számmal ellátott mintának a geometriai adatait kellett meghátárosnom először.

Az B jelű minta két részből állt: egy hosszú vékony rezgő lapkából és egy vastagabb végből, ami a határfeltételeket biztosította. A vég és a lapka paramétereit külön mértem a térfogat számításához. A következő két táblázatban rendre a lapka, és a vastagított vég adatait közlöm:

vastagság[mm]	szélesség[mm]	hosszúság[mm]
2.0	14.9	80.0
2.1	15.0	80.0
2.0	15.0	80.1
2.0	15.1	80.0
2.0	15.0	80.0

A mért adatok átlagát tekintem a helyes adatnak és a hibát a mikrométer 0.01 mm-es pontatlanságának tudom be. Így vastagságra $a = 2.02 \pm 0.01\ mm$, szélességre $b = 15.0 \pm 0.01\ mm$, míg hosszúságra $c = 80.0 \pm 0.01\ mm$ adódik. Így a térfogat relatív hibája és annak értéke:

$$\delta V = 3 * \delta l = 0.01$$
$$V = a * b * c = 2424.00 \pm 24.24 mm^3$$

vastagság[mm]	szélesség[mm]	hosszúság[mm]
9.90	15.99	20.00
10.1	14.99	19.97
9.94	15.00	19.98

$a' = 9.983 \pm 0.01\ mm$, $b' = 15.327 \pm 0.01\ mm$ és $c' = 19.983 \pm 0.01\ mm$. Ahonnan:

$$\delta V = 3\delta l = 0.01$$
$$V = a * b * c = 3057.63866 \pm 30.57639 mm^3$$

Ahol ennek a mintának a tömege: m=14.639 g, aminek a hibája 0.00005 g. Így a következő táblázat foglalja össze az A minta paramétereit:

V[mm^3]	ρ (kg m^{-3})	A [10^{-5} m^2]	I[10^{-11} m^4]
5481.63866 $\pm$ 54.81638 mm^3	2670.551802 $\pm$ 26.705518	4.38328 $\pm$ 0.04323	1.13584 $\pm$ 0.02790

Ezután térjünk át a 14 minta paramétereire és itt megismételve a korábbi számításokat, már csak az adatokat közlöm:

vastagság[mm]	szélesség[mm]	hosszúság[mm]
3.05	15.02	100
3.1	14.97	100
2.97	15.0	99.9
3.1	15.0	100
3.0	15.1	100

Innen az adatok a következők, $a'' = 3.044 \pm 0.01$ mm $b'' = 15.018 \pm 0.01$ mm és $c'' = 100 \pm 0.01$ mm. A minta tömege m'=39.915 ± 0.00005 g, így:

V[mm^3]	ρ (kg m^{-3})	A [10^{-5} m^2]	I[10^{-11} m^4]
4571.4792 $\pm$ 45.7147	8731.30955$\pm$ 87.3130	4.57147 $\pm$ 0.0457147	3.5299 $\pm$ 0.014275

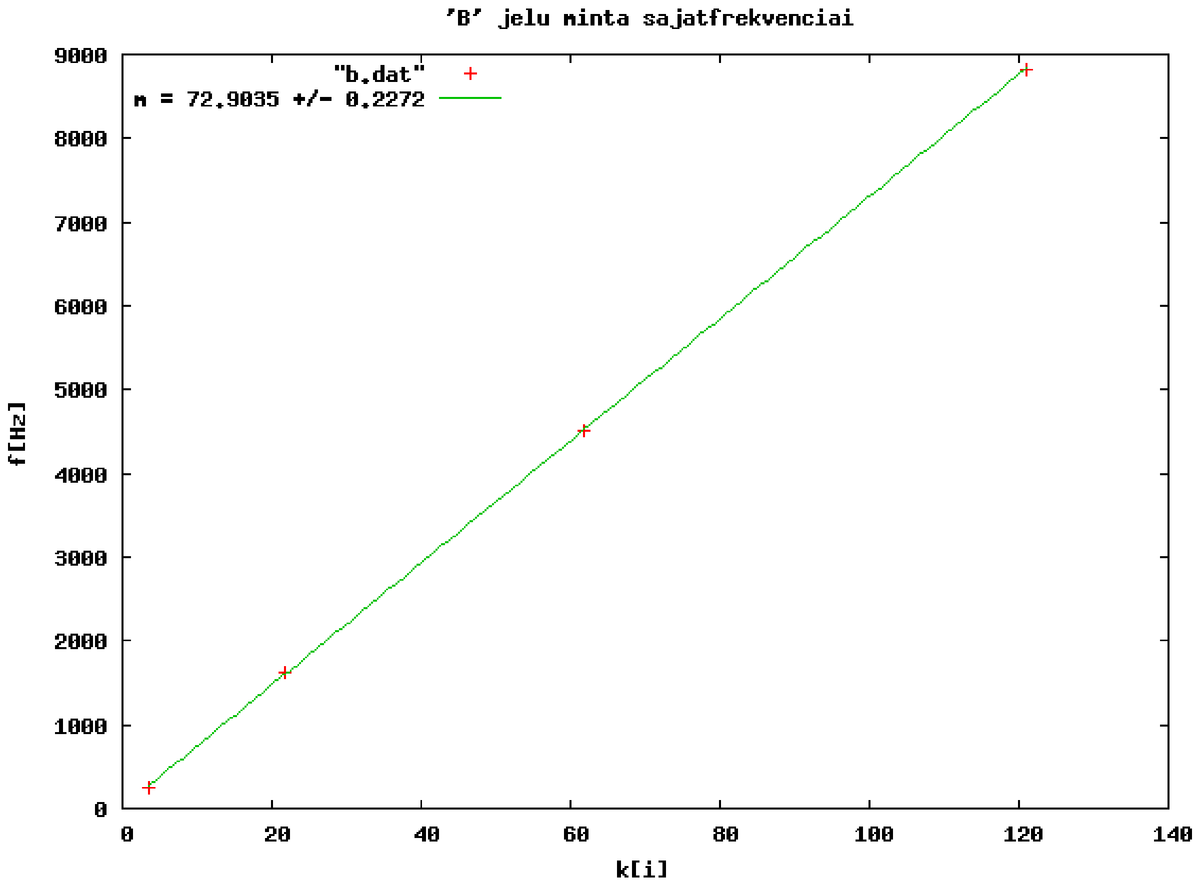
Ahol a másodrendű nyomaték természetesen egy téglalap felületé: $I = \frac{ab^3}{12}$ mindkét esetben. A hibákat hibaterjedéssel számoltam:

$$\Delta\rho = \rho\sqrt{(\delta m)^2 + (\delta V)^2}$$
$$\Delta A = A\sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$$
$$\Delta I = I\sqrt{3(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$$

Ezután jönnek az b minta sajátfrekvenciái:

i	$(k_i/k_0)^2$	f_m (Hz)	f_{sz} (Hz)	(feles frekvenciák)f_{2m}	f_{2sz}
0	1	254.45	–	127.225	–
1	6.2669	1617.7	1594.62	809.66	797.31
2	17.5922	4515.8	4476.36	2257.9	2238.1
3	34.3860	8827.2	8749.51	4412.79	4374.75

Az ezen pontokra illesztett $k_i^2 - f_i$ egyenest a következő meredekségű origón átmenő egyenes adja meg:



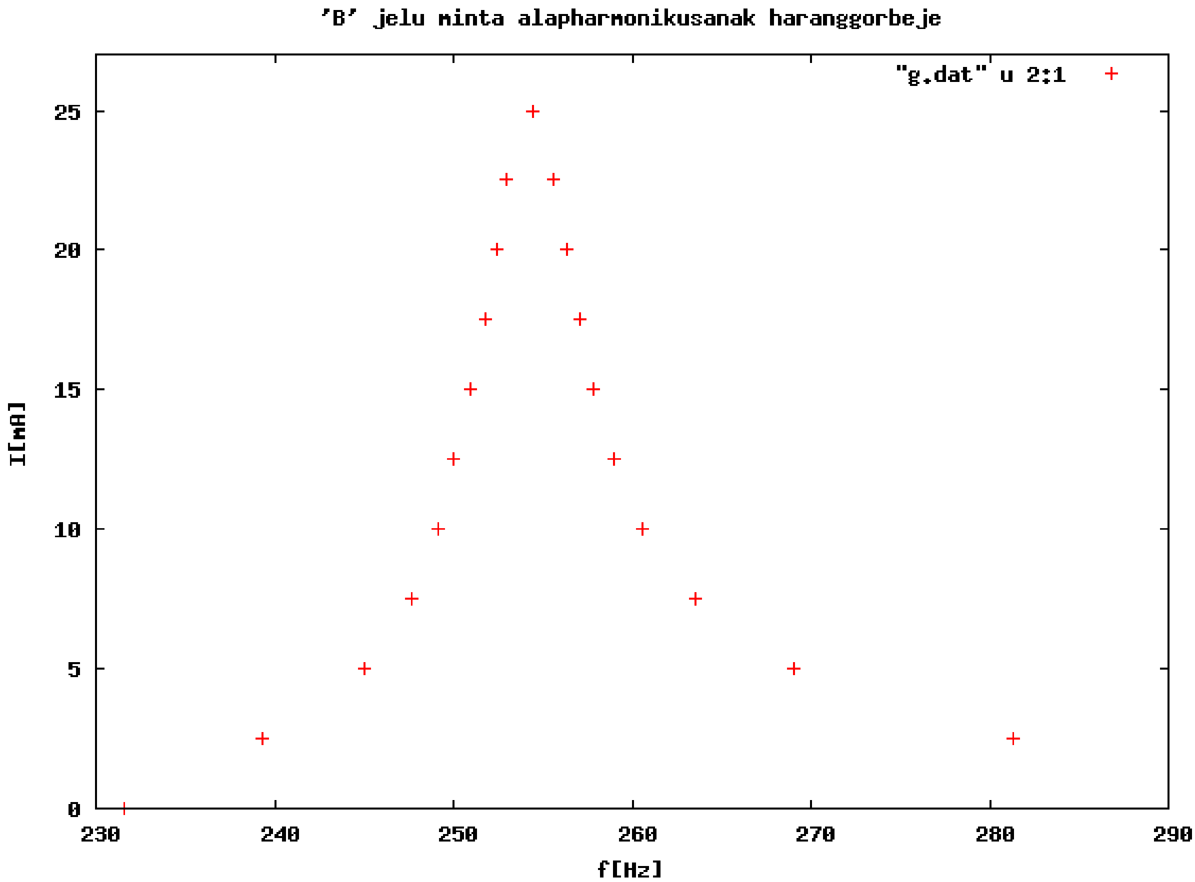
A jegyzetben megadott $m = \frac{1}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ alapján E kiszámítható:

$$\delta E = 4\delta l + 2\delta m + \delta\rho + \delta A + \delta I = 0.0443$$
$$E = m^2 4\pi^2 l^4 \rho \frac{A}{I} = 264.3522 \pm 11.7108 GPa$$

Ezután mértem a 14 mintán a félérték szélességet. A következő mérési eredményeim vannak:

I[mA]	f[Hz]
0	201.1
2.5	239.3
5	245
7.5	247.7
10	249.2
12.5	250
15	251
17.5	251.8
20	252.4
22.5	253
25	254.4

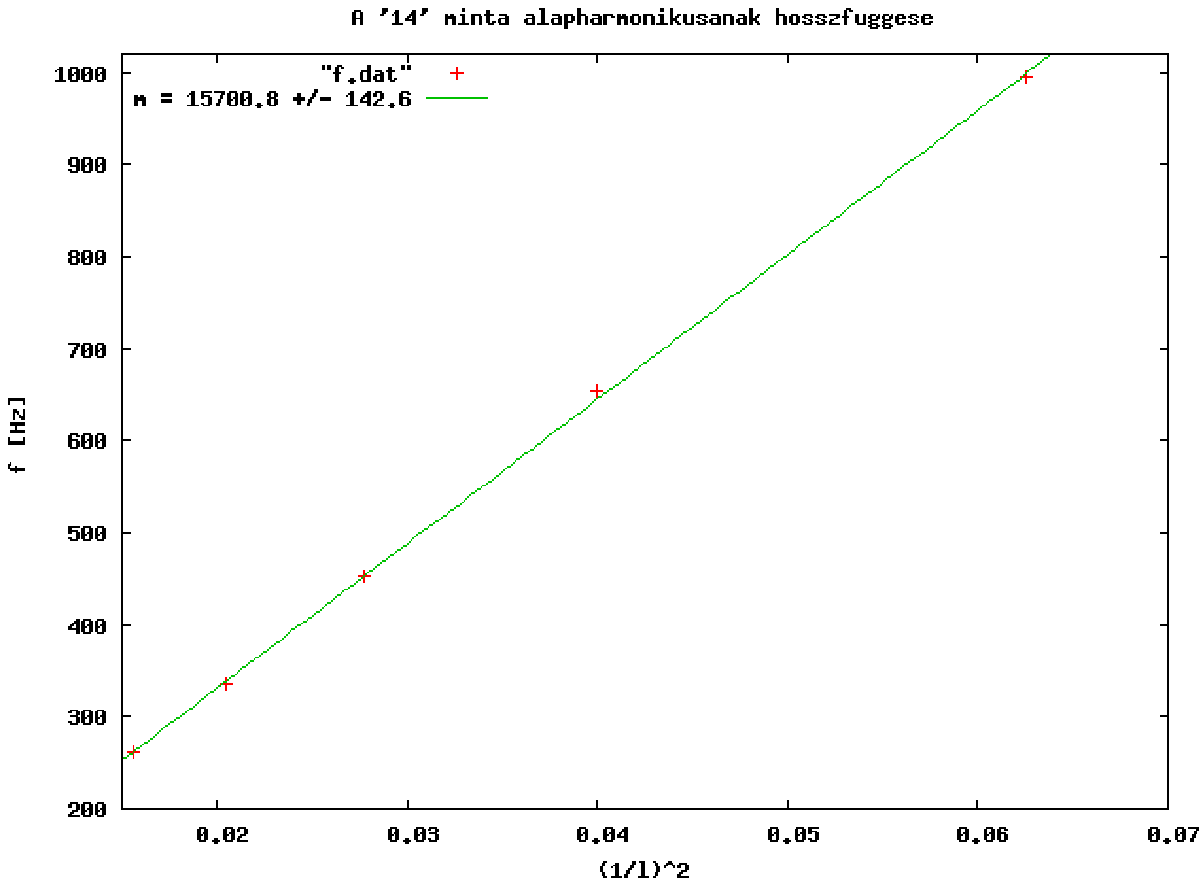
I[mA]	f[Hz]
22.5	255.6
20	256.3
17.5	257.1
15	257.8
12.5	259
10	260.6
7.5	263.5
5	269
2.5	281.3
0	231.6
-	-



Az utolsó mérésrészben meg kellett határoznunk a 14 minta különböző hosszakhoz tartozó alapharmónikusait.Amiből az adott anyag alapharmónikusának hosszfüggését tudom meghatározni. A mérési adatokat a következő táblázatban foglalom össze:

$l[cm]$	f_m (Hz)	f_{sz} (Hz)
8	262.15	–
7	342.4	336.29
6	466.04	451.8
5	671.1	653.3
4	1048.6	995.04

A mérési leírásban részletesen ki van fejtve, hogy a hossz reciprokának négyzete és a rezgési frekvencia között egyenes arányosság van, így erre egyenest illesztve:



A meredekség értéke leolvasható az ábráról annak hibájával együtt, amit a *Gnuplot* program határozott meg. A Young-modulus értékét meghatározhatjuk a következő összefüggés által:

$$\delta E = 2\delta m + \delta\rho + \delta A + \delta I = 0.039766$$

$$E = \frac{4\pi^2}{k_0^4}\rho\frac{A}{I}m^2 = 95.13177 \pm 3.783 GPa$$

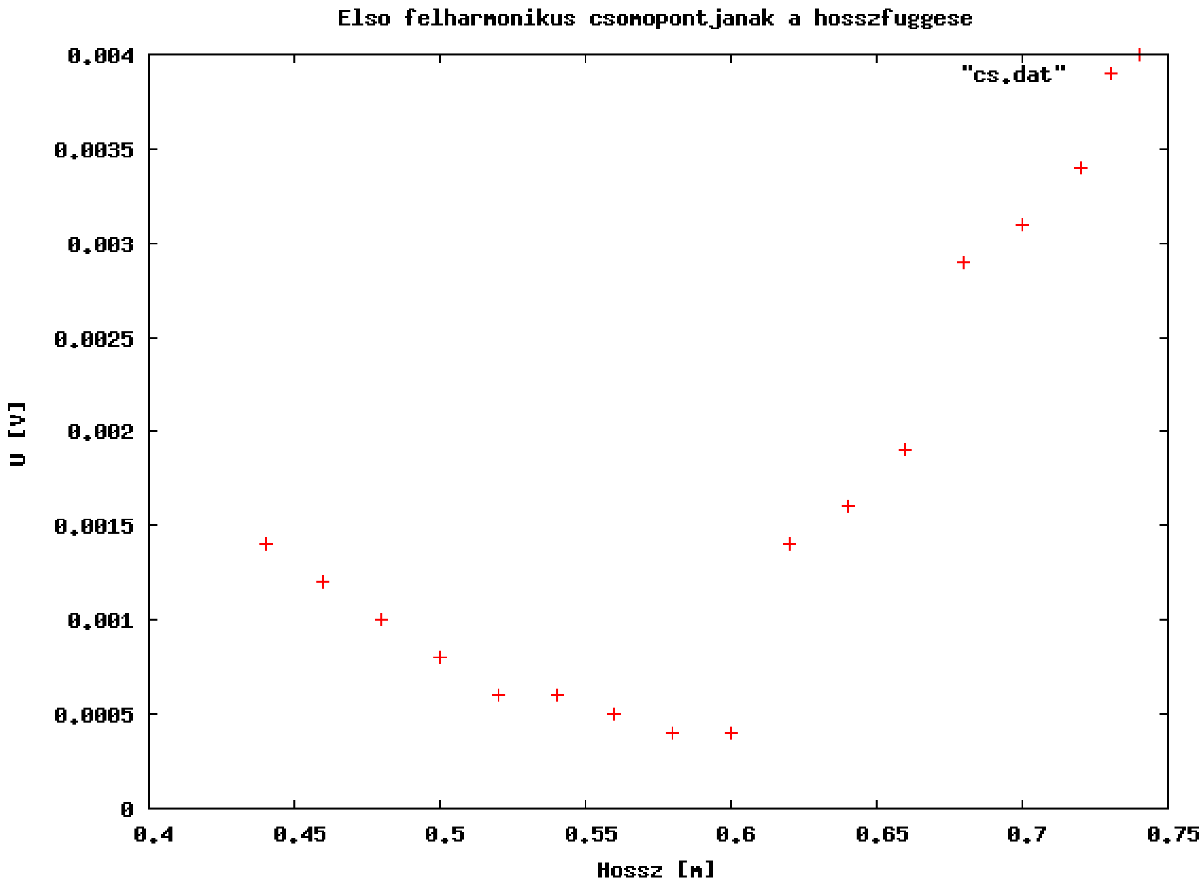
IV Elsö felharmónikus csomópotja

Az első felharmónikus csomópontját kellett meghatásoznom a 14-es mintának. A mérésnél a rezgést keltő tekercset mozgattam a befogatási pont felé $2mm$ enként és néztem a pickup áll-tal mért feszültség értékét. A kapott értékeimet az alábbi táblázatnan tütetem fel: Az mért alapharmónikus: $1604.18Hz$, az elektromágnes helye : $7.6cm$ volt.

X [M]	U [V]
0.74	0.004
0.72	0.0034
0.70	0.0031
0.68	0.0029
0.66	0.0019
0.64	0.0016
0.62	0.0014
0.60	0.0004

X [m]	U [V]
0.58	0.0004
0.56	0.0003
0.64	0.0006
0.52	0.0006
0.50	0.0008
0.48	0.001
0.46	0.0012
0.44	0.0014

A kapott számpárokat az alábbi grafikonon ábrázoltam:



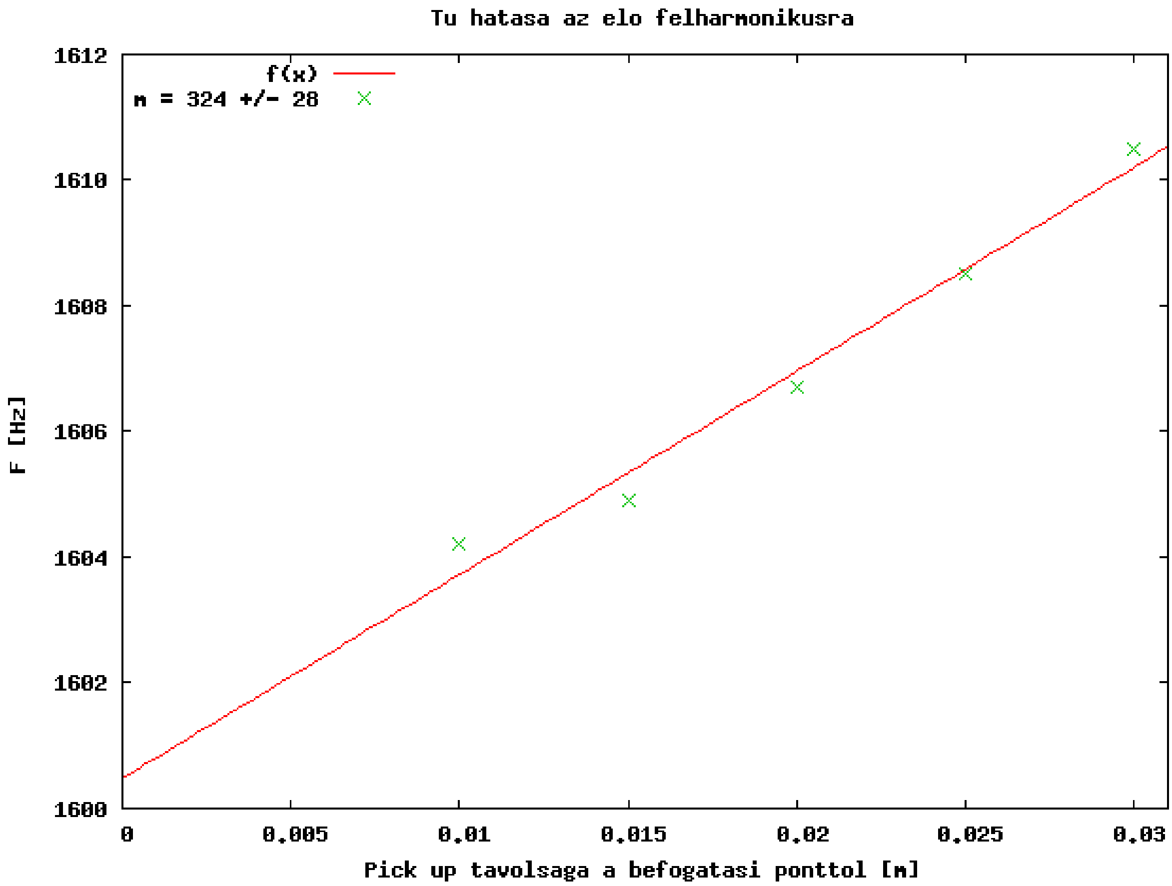
A jegyzetben megadott adatok alapján jól látható hogy az első felharmónikus csomópontja valóban ott található meglehetősen közel az általam mért minimumhelyhez.

V A pickup hatása a rezgésre

Első lépésként megmértem az összeállításhoz tartozó első felharmónikust ami $1603.25Hz$-nek adódott ekkor a befogástól körülbelül $5cm-$-re helyeztem el a pickupot.
Majd $5mm$-enként megmértem a rezgés frekvenciáját, tehát az így kapott pontokat ábrázolva és rá egyenest illesztve, a meredekségből meghatározható a pickupnak a súlya.

X [m]	F [Hz]
0.01	1604.2
0.015	1604.9
0.02	1606.7
0.025	1608.5
0.03	1610.5

Az illesztett egyenes egyenlete a következő: y = 324*x + 1600.48
a = 324 ±28
b = 1600.48 ±0.594
$\Delta a = 8.642\%$
$\Delta b = 0.03711\%$



VI Összefoglalás

A mérés során sejthető volt, hogy alumínium és vörösréz mintákról van szó. Ezt a mérési adatok közelítőleg helyeslik is. A mérés során feltehetően több szisztematikus hibát is vétettem(A minták pontosabb behelyezése, jobb rögzítése...).