

18. Granuláris anyagok

Modern fizika laboratórium

Mérést végezte: Krasznai Zsófia

Lugosi Lilla

Márton Tamás

Mérés időpontja: 2018. 03. 12. 10:15-14:00

Mérés célja

A mérés során granuláris anyagokban nyomás mélységfüggésének, erőeloszlásának vizsgálatát végeztük különböző anyagi minőségű mintákkal. Ezekből az anyagok Janssen-együtthatója meghatározható és q-modell igazolható az erőláncok eloszlásának inhomogenitásával.

Elméleti háttér

A granuláris anyagok, másnéven szemcsés anyagok, olyan rendszerek, amelyek 10^4 - 10^{15} darab makroszkopikus méretű részecskéből állnak. Általános esetben a részecskékre a gravitációs erő, az egymás között fellépő taszítóerő és az érintkezések helyén fellépő súrlódási erő hat. Különlegességük abból fakad, hogy a részecskék átlagos potenciális energiája sokkal nagyobb, mint a hőmozgásból adódó energiájuk, ezért a hőmérséklet átlagoló szerepe megszűnik. Ebből következően bármilyen metastabil állapot zavar nélkül végtelen ideig fennmaradhat, a rendszer leírása tehát sokkal bonyolultabbá válik. Granuláris anyagok leírása még nyugalmi állapotban sem könnyű, mivel bennük véletlenszerűen kialakuló hálózatok alakulnak ki, csak ezek mentén érintkeznek a részecskék egymással. Az érintkezési pontokban fellépő erőt a részecskék alakja, elrendeződése és felületi tulajdonságai mellett a rendszer múltja is befolyásolja. Kialakul egy inhomogén struktúra, melyben a legnagyobb feszültségi láncokat erőláncoknak nevezzük. Ezen erőláncokat vizsgálja a két mérés.

Nyomás mélységfüggése:

A hidrodinamikából ismert

$$P(z) = z * \rho * g \quad (1)$$

képlet helyett granuláris anyagokban mást kell alkalmazni, kísérleti tapasztalat ugyanis, hogy a magasság növelésével a plusz súlyt a tárolóedény fala tartja meg egyre nagyobb részben. A jelenségre magyarázatot ad a Janssen-modell. Feltevései szerint a nyomás csak a függőleges irányú helykomponenstől függ $P(z)$. Egy granuláris anyaggal töltött R sugarú, S alapterületű henger dz vastag részének egyensúlyban kell lennie, melynek feltétele, hogy a rá ható erők eredője nulla legyen:

$$\rho * g * S * dz - \frac{dP(z)}{dz} * S * dz - dF_{súrl} = 0 \quad (2)$$

A modell a nyomás vízszintes és függőleges irányban mérhető komponense között

$$P_{hor}(z) = K * P(z) \quad (3)$$

arányosságot feltételez, melyben K konstans értékét Janssen-együtthatónak nevezzük.

Feltehető még, hogy a súrlódási erő mindenhol függőlegesirányú és a maximum értékét veszi fel:

$$dF_{súrl} = \mu * K * P(z) * 2 * \pi * R * dz \quad (4)$$

ahol μ a súrlódási együttható.

Ezen összefüggések behelyettesítésével és $\lambda = \frac{R}{2 * \mu * K}$ változó bevezetésével a Janssen-modell differenciálegyenlete:

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda} * P = \rho * g \quad (5)$$

Ennek megoldása $P(0)=0$ kezdeti feltétellel:

$$P(z) = \lambda * \rho * g * \left(1 - e^{-\frac{z}{\lambda}}\right) \quad (6)$$

Ez az exponenciálisan lecsengő karakterisztika hasonló eredményt mutat a kísérleti tapasztalattal.

Erőeloszlás vizsgálata:

Az egyes szemcsékre ható erők leírására jó becslést adhat a q-modell. Minden részecske (a külső rétegektől eltekintve) a felette levő rétegből N részecskétől kapott erőt és a saját súlyát továbbítja az alatta levő és vele kapcsolatban levő N részecskének. Az i és j -dik részecske között tehát a továbbított erőt egy q_{ij} véletlen változóval jellemezhetjük. M mélységben az i -dik részecske által megtartott $w(M,i)$ súlynak az alábbi egyenletet ki kell elégítenie:

$$w(M, i) = 1 + \sum_{j=1}^N q_{ij} * (M - 1) * w(M - 1, i) \quad (7)$$

A q_{ij} változókra a feltevés, hogy

$$\sum_{j=1}^N q_{ij} = 1 \quad (8)$$

A valóságban azonban az erők térben korreláltak, de a modell ettől eltekint. A modell végeredménye, hogy a redukált súly $v=w/M$ eloszlásfüggvénye:

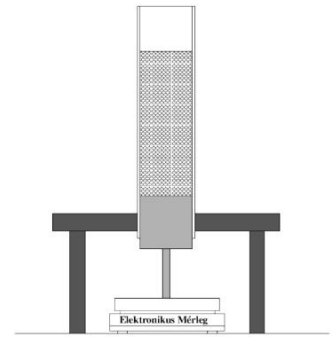
$$P(v) \sim v^{N-1} * e^{-a*v} \quad (9)$$

ahol a egy konstans.

A mérhető erők lecsengése exponenciális, de mivel lassabb, mint a Gauss, ezért az átlagos erőnél lényegesen nagyobb erők súlya a vártnál nagyobb.

Mérőeszközök

- piros műanyag kocka és köles minták
- vonalzó
- hengeredény dugattyúval
- mérleg
- indigó, papírlapok
- üveggolyós szemcsés anyag
- henger tároló
- kiértékelő program



Mérés menete, mért adatok

Nyomás mélységfüggése:

A laborban két különböző anyag: piros műanyag kocka és köles adagolásával a hengerbe mértük az oszlop látszólagos tömeget, mely a Janssen-modell alapján:

$$m_l(m) = m_\infty \left(1 - e^{-\frac{m}{m_\infty}} \right) \quad (10)$$

A kísérletet megismételtük a piros műanyaggal egy felfogólap közbeiktatásával is, így a szemcsék alacsonyabbról estek, más várható a Janssen-együtthatónak.

A mért adatokból az illesztett paraméterekkel a Jansen-együttható:

$$K = \frac{R^3 * \pi * \rho}{2 * \mu * m_\infty} \quad (11)$$

A súrlódási együtthatók meghatározását a lejtőn való megcsúszásukból számoltuk ki:

$$\tan(\alpha) = \mu \quad (12)$$

henger átmérője $d=5$ cm

dugattyú tömege 47 g

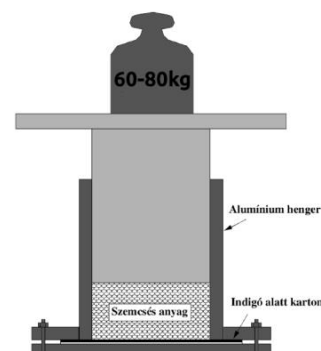
A piros műanyag esetén egy pohárnyi mennyiségű anyag 47,2 g, a köles pedig 30,4 g.

Az alábbi táblázat oszlopai tartalmazzák az adott mintával végzett 3-3 mérés átlagát a mérleg által mutatott tömegértékeket

poharak száma	piros műanyag (g)	köles (g)	piros műanyag csillapítással (g)	poharak száma	piros műanyag (g)	köles (g)	piros műanyag csillapítással (g)
1	92,00	72,67	87,67	12	145,00	185,33	-
2	107,33	96,33	106,33	13	146,00	191,00	-
3	116,67	113,33	113,00	14	-	195,00	-
4	123,00	129,00	121,00	15	-	196,33	-
5	128,00	139,00	122,33	16	-	198,00	-
6	133,33	149,67	125,00	17	-	201,33	-
7	135,33	162,67	126,33	18	-	203,33	-
8	138,33	167,00	128,33	19	-	204,67	-
9	141,00	173,67	129,67	20	-	206,67	-
10	142,67	179,00	131,00	magasság (cm)			
11	144,00	182,67	132,67				
				62,8 49,40 53,50			

Erőeloszlás vizsgálata:

A mérési összeállításban a mérőhenger aljára indigó alá helyezett papírlapra a granuláris anyag beletöltése és 600-800 N erő hatására a golyók lenyomatot hagytak a rájuk ható erők nagyságával arányosan erősebbet. Ezt a lenyomatot elemeztük a kiértékelő program segítségével.



Kiértékelés

nyomás mélységfüggése:

Két anyagra a megcsúszási magasság és az ebből számolt lejtő szöge, súrlódási együttható:

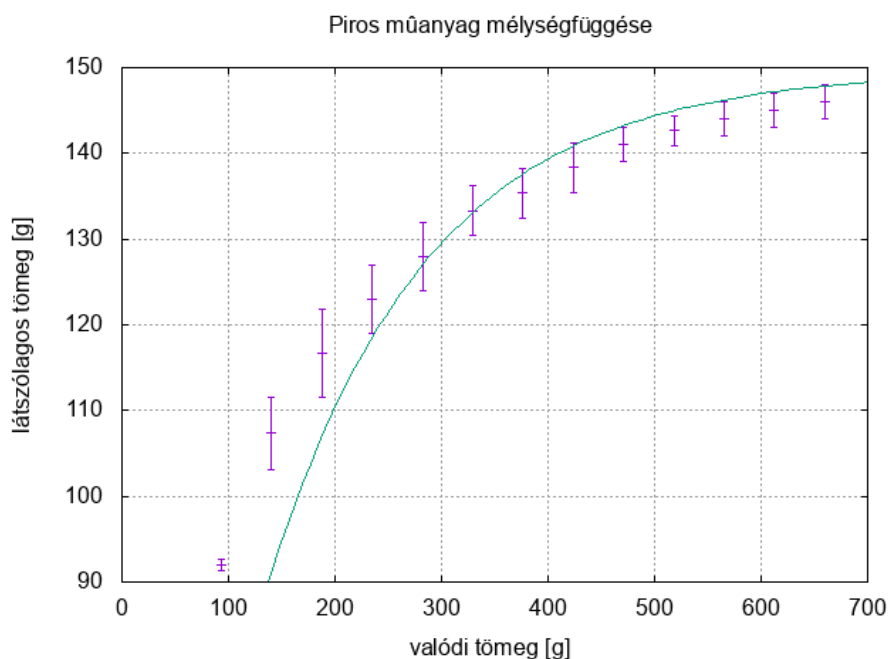
	piros műanyag	köles
h (cm)	10,4 ± 0,05	8,2 ± 0,05
α (°)	24,70	19,24
μ	0,4597 ± 0,05	0,3488 ± 0,05

A hossz mérés hibája leolvasási hiba: $\Delta l = 0,05$ cm. A súrlódási együttható esetén a hiba a hossz mérésből és a számolásnál a hibaterjedésből adódott. A számolásnál a hibaterjedésből adódó hiba: $\Delta \mu = 0,05$ a piros műanyagra és $\Delta \mu = 0,06$ a kölesre.

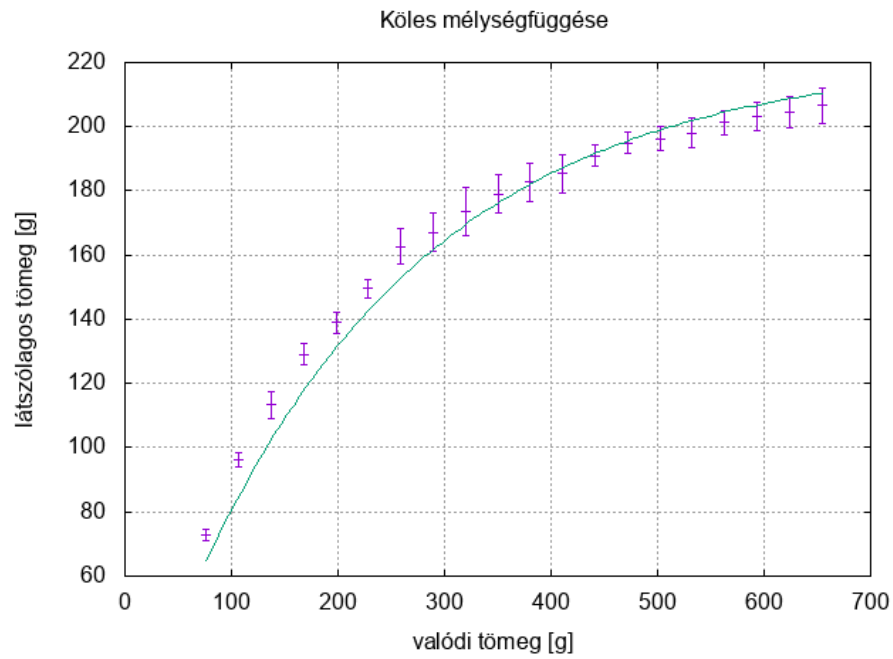
Az anyag magasságából és az üveghenger átmérőjéből kiszámolható a térfogat, amiből a mért tömegértékkel a sűrűség is.

	piros műanyag	köles	piros műanyag csillapítással
h (cm)	$62,8 \pm 0,05$	$49,4 \pm 0,05$	$53,5 \pm 0,05$
V (cm³)	$1233,075 \pm 0,04$	$969,97 \pm 0,04$	$1050,47 \pm 0,04$
m_{valódi} (g)	$659,6 \pm 1,28$	$654,0 \pm 0,64$	$565,2 \pm 1,28$
ρ (g/cm³)	$1,87 \pm 0,04$	$0,67 \pm 0,03$	$0,54 \pm 0,04$
m_∞ (g)	$147,97 \pm 0,85$	$222,1 \pm 2,8$	$138,6 \pm 4,4$
K	$0,67 \pm 0,13$	$0,21 \pm 0,18$	$0,21 \pm 0,15$

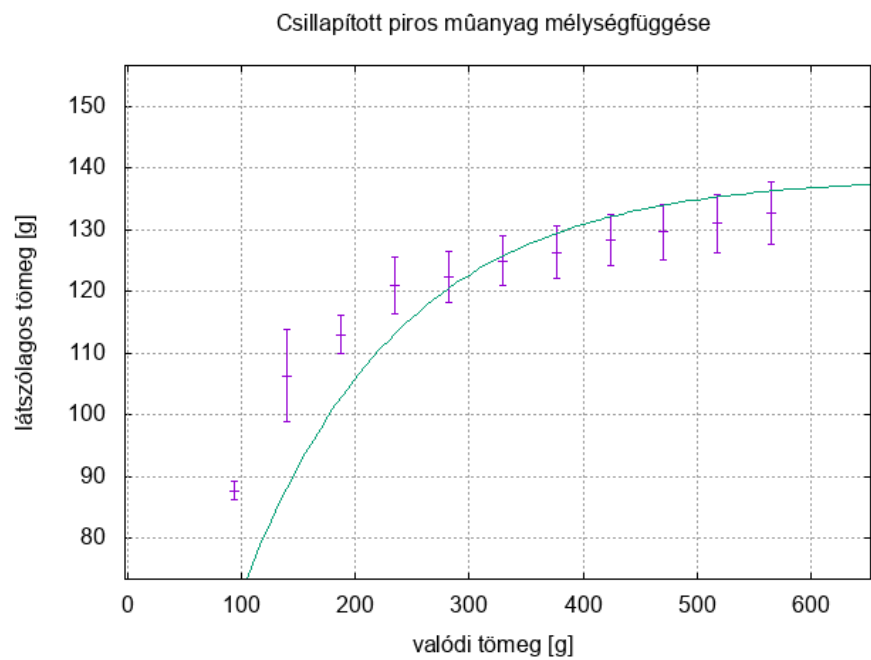
A sűrűség számolásánál fellépő hibák a hosszmérés leolvasási hibája, ami a henger átmérője esetén $\Delta l = 0,05$ cm, az anyag magasságánál azonban az egyenetlen felszín miatt a hibát $\Delta l = 0,1$ cm-nek becsültük. Az anyag valódi tömegének hibája az egyes pohártömegek szórásából $\Delta m = 1,28$ g értéknek adódott a piros műanyag esetén és $\Delta m = 0,64$ g-nak a kölesnél.



Látszólagos tömeg a valódi tömeg függvényében piros műanyag esetén



Látszólagos tömeg a valódi tömeg függvényében köles esetén



Látszólagos tömeg a valódi tömeg függvényében piros műanyag esetén csillapítással

erőeloszlás vizsgálata:

A program által kiértékelt adatokra Gauss-görbét

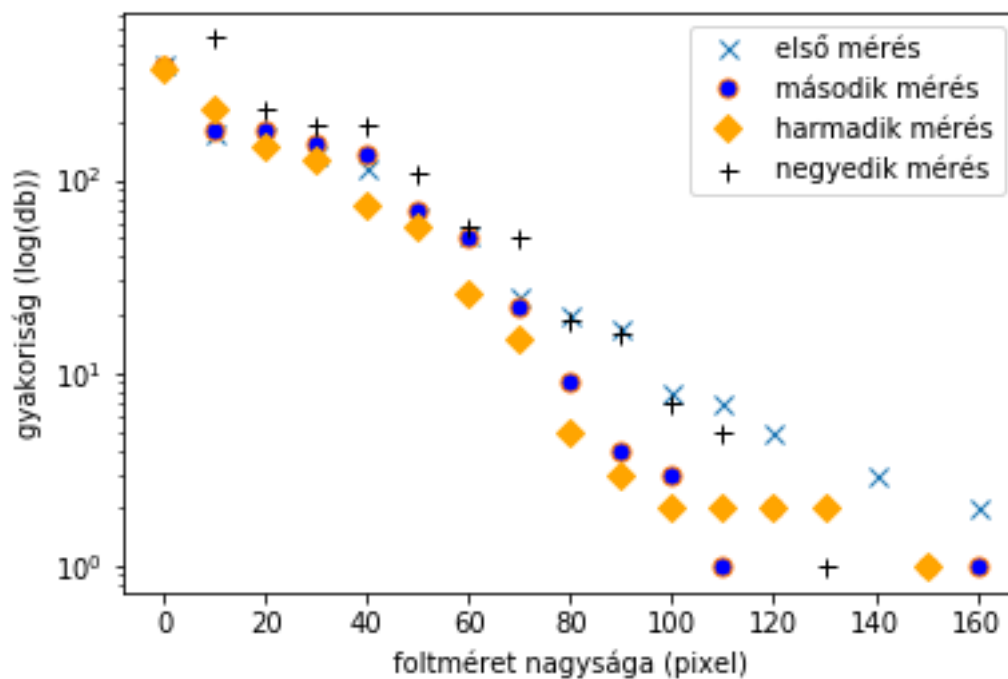
$$c * e^{\frac{-x^2}{2*z}}$$

és a q-modellnek megfelelően

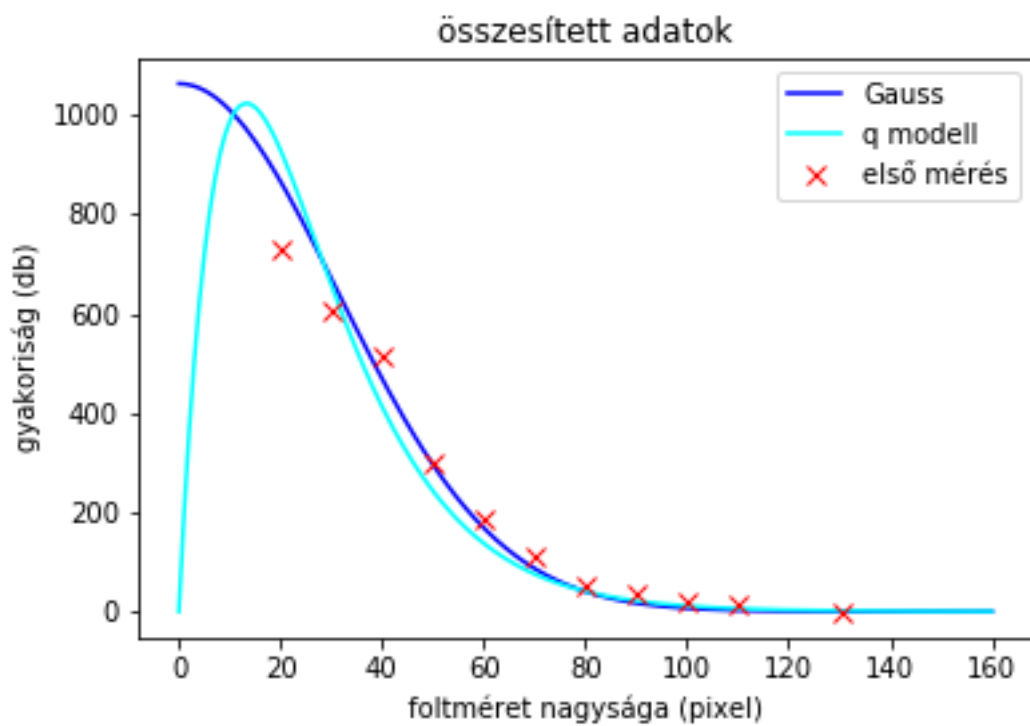
$$a * x * e^{-b*x}$$

alakú függvény illesztése után a kapott paraméterek az egyes esetekre:

	1.mérés	2.mérés	3.mérés	4.mérés
a	30,7102 ± 1,197	30,7126 ± 19,16	49,4675 ± 33,35	49,0625 ± 2,61
b	0,0615 ± 0,002	0,05961 ± 0,024	0,0835 ± 0,0321	0,0605 ± 0,0280
c	189,539 ± 4,342	283,146 ± 26,08	324,527 ± 21,64	480,655 ± 57,6
z	1382,68 ± 67,4	847,398 ± 197	452,168 ± 80,84	649,673 ± 158,7

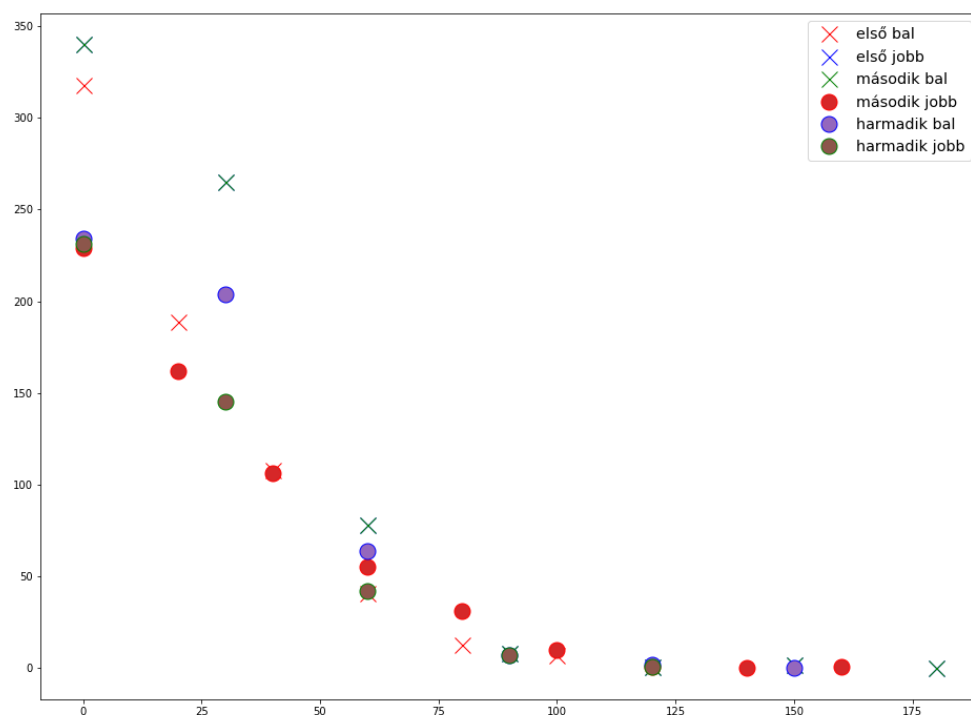


Az egyes szemcséken mérhető erők eloszlásának grafikonja szemilogaritmusos skálán



Gauss-, és a q-modell alapján származtatott illesztések azösszesített mérési adatra

homogenitás vizsgálata:



A négy mintán a foltméretek gyakorisági eloszlásának ábrázolása két részre osztva

Az ábra alapján látható, hogy az azonos színnel jelölt minták két térrészre osztott mintavételezése között nincs jelentős különbség, az eloszlás tehát homogénnek tekinthető.