Projekt z Metód voľnej optimalizácie: Metódy vnútorného bodu na riešenie úloh LP

Úlohou projektu je naprogramovať barérovú metódu vnútorného bodu na riešenie úloh lineárneho programovania v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T x \\ & \mathbf{A}x \geq \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$.

Pre takúto metódu je dôležitý predpoklad existencie vnútorného bodu množiny prípustných riešení úlohy (1), t.j. predpoklad

$$\mathcal{P}^0 = \{x \mid \mathbf{A}x > \mathbf{b}\} \neq \emptyset. \tag{2}$$

Barérová metóda vnútorného bodu je založená na opakovanom riešení úloh bez ohraničení typu

$$\min \ B_t(x) = t\mathbf{c}^T x - \sum_{i=1}^{m} \ln(\mathbf{a}_i^T x - \mathbf{b}_i), \tag{3}$$

pre postupne zväčšujúce sa hodnoty parametra t. Postupne je teda pri riešení úloh kladená čoraz väčšia váha na účelovú funkciu a menšia váha na ohraničenia. Zrejme definičný obor úloh (3) je $\mathcal{P}^0$ Úlohy (3) sa riešia Newtonovou metódou.

a) Naprogramujte Newtonovu metódu pre úlohu (3). Na to potrebujete odvodiť gradient $g(x) := \nabla B_t(x)$ a Hesseho maticu $H(x) := \nabla^2 B_t(x)$. Vyjadrite ich v kompaktnej forme, pomocou matice A. Zdôvodnite, že ak $h(A) = n$, tak $H(x)$ je kladne definitná $\forall x \in \mathcal{P}^0$ a Newtonovský krok $s_N(x)$ je dobre definovaný. Konvergenciu Newtonovej metódy testujte pomocou kritéria

$$\left(s_N(x)^T H(x) s_N(x)\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

b) Nech $x^*(t)$ je optimálne riešenie úlohy (3). Ukážte, že ak definujeme $z^*(t)$ vektor so zložkami $z_i^*(t) = (t(\mathbf{a}_i^T x^*(t) - \mathbf{b}_i))^{-1}$, tak $z^*(t)$ je prípustné riešenie duálnej úlohy k úlohe (1). Odvoďte z toho, že ak p^* je optimálna hodnota úlohy (1), tak

$$c^T x^*(t) - p^* \leq \frac{m}{t}.$$

Pomocou toho zdôvodnite, že $\frac{m}{t} < \varepsilon$ je dobré ukončovacie kritérium v algoritme c).

c) Naprogramujte metódu vnútorného bodu pomocou nasledovného algoritmu:

Vstup: hodnota $t_0 > 0$, štartovací bod $x_0 := x^*(t_0)$, tolerančná konštanta $\varepsilon > 0$, parameter $\mu = 1 + (2\sqrt{m})^{-1}$

1. Nastav $t = t_0$.
2. Nájdi optimálne riešenie $x^*(\mu t)$ bariérovej úlohy (3) pre parameter μt Newtonovou metódou so štartovacím bodom $x^*(t)$.
3. Ak $\frac{m}{t} < \varepsilon$ - koniec; inak nastav $t = \mu t$ a choď na 2.

d) Algoritmus graficky ilustrujte na vhodne zvolených úlohách s dvoma premennými. Vykreslite prípustný región, vrstevnice $B_{\mu t}(x) = B_{\mu t}(x^*(t))$, „trajektórie" riešení $x^*(t)$ a optimálne riešenie úlohy. Uvažujte prípad jediného optimálneho riešenia aj prípad s nekonečne veľa optimálnymi riešeniami.

e) Náhodne generujte úlohy s vopred daným vnútorným bodom x^0, t.j. generujte $\mathbf{A}$ a x^0 a vektor b vhodne dopočítajte. Experimentujte s rôznymi rozmermi a pozorujte rýchlosť konvergencie. Výsledky uveďte v tabuľke, prípadne graficky znázornite. (Môžete znázorniť m/t v jednotlivých iteráciách).

f) Pomocou algoritmu z b) možno určiť, či má daná úloha vnútorný bod. Na to stačí riešiť úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & Ax - b \geq (1-t)\mathbf{1}, \\ & t \geq 0. \end{aligned}$$

Zdôvodnite. Implementujte kód, pomocou ktorého zistíme, či má úloha v tvare (1) vnútorný bod a ak áno, nájdeme jej riešenie metódou vnútorného bodu.

g) *Nadstavba:* Vymyslite rozšírenie projektu. Vedeli by ste napríklad testovať prípustnosť a neohraničenosť úlohy, prípadne riešiť úlohu s ohraničeniami v tvare rovnosti?