Domaća zadaća

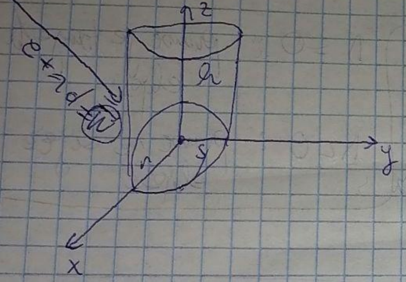
Zad. 3

Dan je eliptički cilindar čiji je radijus na osi x jednak r, a radijus na osi y jednak s centriran na xy ravnini visine h.

Točka cilindra $p = (x, y, z)$ mora zadovoljavati:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1 \qquad 0 \leq z \leq h$$

Neka su $e = (e_1, e_2, e_3)$ i $d = (d_1, d_2, d_3)$. Odredite siječe li zraka $e + \lambda d$ zadani cilindar.



IDEJA: Gledati sjecište projekcije zrake na xy ravninu i njeno sjecište s neograničenim cilindrom. Točnije, ukoliko zraka siječe bazu cilindra u xy ravnini, sigurno siječe i neograničeni cilindar.

Ograničeni cilindar je samo područje nekog beskonačnog cilindra omeđeno dvama paralelnim ravninama. Zato je dovoljno provjeriti siječe li pravac (zraka) te 2 ravnine, ili, ako je baš paralelna, tada treba provjeriti nalazi li se između njih.

Translacija vektora na ravninu:

Kako je naša ravnina zadana normalom $\vec{n}$, translaciju $\vec{w}$ radimo tako da vektor prvo translatiramo na vektor normale:

$$\vec{w_n} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right) \cdot \vec{n}$$

w_n – zraka na normalu,

Zatim, projekciju vektora w na ravninu dobijemo oduzimanjem:

$$\boxed{w_T = w - \vec{w_n}}$$

Translacijom smo ujedno dobili vektor na ravnini xy. Sada možemo uzeti pravac u smjeru našeg translatiranog vektora i označiti ga s općom jednadžbom $\boxed{y=ax+b}$.

Ubacivanjem jednadžbe pravca u jednadžbu elipse dobivamo:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2}+\frac{(ax+b)^2}{s^2}=1$$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{a^2x^2+2axb+b^2}{s^2}=1 \quad / \cdot r^2 s^2$$

$$x^2(s^2+a^2r^2+b^2)+2r^2ab\cancel{x}+b^2r^2-r^2s^2=0$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu. Znamo: $D=b^2-4ac>0$: pravac siječe elipsu u 2 točke

$D=0$: pravac je tangenta elipsi

$D<0$: pravac ne siječe elipsu

Kako nas zanima slučaj kada zraka siječe cilindar, uzimamo u obzir samo ona rješenja gdje imamo 2 sjecišta. Ukoliko ne nađemo 2 sjecišta, znamo da zraka ne siječe cilindar. //

Siječe li pravac (zraka) ravnine koje omeđuju cilindar?

Ravnina je definirana vektorom normale $\vec{n}$ okomitim na vektor i skalarom d.
Ravnina je skup točaka x za koje vrijedi $x \cdot n = d$.

Ukoliko uzmemo našu jednadžbu pravca: $p=e+\lambda d$, da bi ona sijekla ravninu, moramo naći neku točku ravnine koja se nalazi i na pravcu. Tu točku ćemo zvati g.

Ovaj g će biti jednak $e+\lambda d$ za neki skalar λ ako pravac siječe ravninu, tj: $d = g \cdot n = e \cdot n + \lambda u \cdot n$. Tada će jednadžba za skalar λ biti:

x iz gornje jednadžbe

$$\boxed{\lambda = \frac{d-e\cdot n}{u \cdot n}}$$

Sve veličine u ovoj formuli za d imaju geom. značenje. Ako je $\vec{n}$ jedinični vektor, onda je vrijednost $d - e \cdot n$ zapravo vrijednost udaljenosti p od ravnine u smjeru vektora normale, pomnožena s -1. Ako $\vec{n}$ nije jediničan, cijelu stvar treba samo podijeliti s $\|\vec{n}\|$. Drugim riječima, p se nalazi iznad [ispod] ravnine $\Leftrightarrow$ je $d - e \cdot n$ negativno [pozitivno].

Skalarni produkt $u \cdot n$ je negativan ako zraka pokazuje na dolje prema ravnini. Ako je $u \cdot n = 0$, tad je zraka paralelna s ravninom, pa je sigurno ne siječe, osim ako možda leži na njoj. Ako je $\lambda < 0$, tj. udaljenost od p do $g < 0$, tada zraka sigurno ne siječe ravninu.

Drugim riječima, dijelimo sve na 3 slučaja:

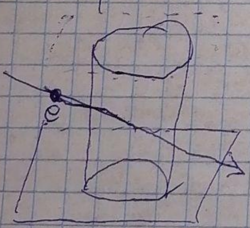
$u \cdot n = 0 \Rightarrow$ zraka paralelna s ravninom
$\lambda < 0 \Rightarrow$ zraka ne siječe ravninu
$\lambda > 0 \Rightarrow$ zraka siječe ravninu.

ako zraka ide od gore

Ukoliko je zraka paralelna s ravninom, može se dogoditi ovakav slučaj:

Dovoljno je provjeriti je li suma udaljenosti zrake od donje ravnine jednaka udaljenosti među ravninama.

Također, može se dogoditi još jedan posebni slučaj:



Drugim riječima, da se e nalazi ispod gornje ravnine.
Tada treba provjeriti siječe li $e + \lambda d$ donju ravninu,
tj. siječe li $-(e + \lambda d)$ gornju ravninu
minus