Matematická Indukcia

1. Dokážte, že pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

   (i) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

   (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

   (iii) $2 + 3 + 4 + \cdots + (3k+2) = \frac{1}{2} \cdot (3k+1) \cdot (3k+4)$

   (iv) $2 + 4 + 6 + \cdots + (4n+2) = (2n+1) \cdot (2n+2)$

   (v) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

   (vi) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

   (vii) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

   (viii) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$

   (ix) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

   (x) $2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

   (xi) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1)$

   (xii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   (xiii) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

   (xiv) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (3n-1) = n^2(n+1)$

   (xv) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

   (xvi) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$

   (xvii) $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \cdots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)$

   (xviii) $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

   (xix) $2 + 7 + 14 + \cdots + (n^2+2n-1) = \frac{1}{6}n(2n^2+9n+1)$

   (xx) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

   (xxi) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (xxii) $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$

   (xxiii) $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

   (xxiv) $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

   (xxv) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

   (xxvi) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

   (xxvii) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$

   (xxviii) $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$

   (xxix) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(xxx) $\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\ldots\left(1+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{3(2n+1)}{2n+3}$

(xxxi) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

(xxxii) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

(xxxiii) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n>1$ platí:

   (i) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$

   (ii) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$

   (iii) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n-2}>1$

   (iv) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$

   (v) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

   (vi) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

   (vii) $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$

3. Dokážte, že platí:

   (i) $2^n>n^2\,,\quad n\geq 5, n\in\mathbb{N},$

   (ii) $2^n\geq n+1\,,\quad n\geq 0, n\in\mathbb{N},$

   (iii) $3^n\geq 2(n+1)^2\,,\quad n\geq 4, n\in\mathbb{N},$

   (iv) $5^n\geq 5n^3+2\,,\quad n\geq 4, n\in\mathbb{N},$

   (v) $2^{n+2}>2n+5\,,\quad n\geq 1, n\in\mathbb{N},$

   (vi) $\sqrt{(2n)!}<2^n\cdot n!\,,\quad n\geq 1, n\in\mathbb{N}.$

4. Dokážte, že pre každé reálne číslo $a\geq -1$ a pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

$$(1+a)^n\geq 1+na$$

5. Dokážte, že pre rôzne kladné reálne čísla a,b a pre prirodzené číslo $n>1$ platí:

$$2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)>(a+b)^n$$

6. Ak pre nezáporná reálne čísla $x_1,x_2,\cdots,x_n$ platí $x_1+x_2+\cdots+x_n\leq\frac{1}{2}$, tak

$$(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geq\frac{1}{2}.$$

   Dokážte.

7. Dokážte, že pre prirodzená čísla platí:

$$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2.$$

8. Dokážte, že pre každé nepárne (liché) prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2013$ deliteľný číslom 96.

Dôkazy

1. Zistite, či pre ľubovolné množiny A, B platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

   (a) $A \cap (A \cup B) = A$,

   (b) $A \cup (A \cap B) = A$,

   (c) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,

   (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,

   (e) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,

   (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,

   (g) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

nezapomenout dokázat z obou stran (případně udělat jen první důkaz, hodit na ekvivalence a napsat viz krok 1)

   Výsledky: a) platí, b) platí, c) neplatí, d) neplatí, e) platí, f) neplatí, g) platí.

2. Zistite, či pre ľubovolné množiny A, B, C, D platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

   (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

   (b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

   (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

   (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   (e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$

   (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

   (g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

   (h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   (i) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

   (j) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$

   (k) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

   (l) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

   Výsledky: a) platí, b) platí, c) platí, d) platí, e) platí, f) platí, g) platí, h) platí, i) platí, j) platí, k) neplatí, l) neplatí.