

POTENČNÁ MNOŽINA, PRINCÍP INKLÚZIE A EXKLÚZIE A DIRICHLETOV PRINCÍP

1. Vymenujte prvky množín:

a) $\mathcal{P}(\{1\})$, b) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, c) $\mathcal{P}(\{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\})$.

Výsledky: a) $\{\emptyset, \{1\}\}$, b) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,

c) $\{\emptyset, \{\{\star\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}\}, \{\{\star\}, \Delta\}, \{\{1, 2\}, \Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\}\}$.

2. O množine M vieme, že: $|\mathcal{P}(M)| = 4$, $\{\{5\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(M)$. Určte množinu M .

Výsledky: $M = \{\emptyset, 5\}$.

3. Koľko prvkov má množina $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Výsledky: $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 4$.

4. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí nasledujúca rovnosť, prípadne, či sa rovnosť dá nahradiť inklúziou.

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

Výsledky: Rovnosť neplatí, neplatí ani jedna z inklúzií, všimnite si napr. takéto množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$.

5. Koľko čísel zostane z čísel $1, 2, \dots, 1000$ po vyškrtaní všetkých násobkov čísel

(a) 2, 6, 18 ?

(b) 4, 6, 32 ?

(c) 5, 18, 30 ?

(d) 2, 6, 15 ?

(e) 2, 3, 5, 7 ?

Výsledky: a) 500, b) 667, c) 756, d) 467, e) 228.

6. Určte počet prirodzených čísel $n < 100$, ktoré nie sú deliteľné druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.

Výsledky: 61.

7. Určte počet prirodzených čísel $n < 100$, ktoré nie sú deliteľné tretou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.

Výsledky: 84.

8. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov DEN, NOC?

Výsledky: $16! - 2 \cdot \frac{16!}{3!} + \frac{16!}{5!}$.

9. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HOP, PONK?

Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!}$.

10. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov BOK, MONK?

Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$.

11. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HLOD, HOP?

Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$.

12. Daná je množina obsahujúca 10 prirodzených čísel medzi 1 a 99 (vrátane). Dokážte, že existujú dve disjunktné neprázdne podmnožiny tejto množiny s rovnakým súčtom svojich prvkov.
13. Nech A je množina 19 navzájom rôznych prirodzených čísel, vybraných z aritmetickej postupnosti 1, 4, 7, ..., 100. Dokážte, že A musí obsahovať dve rôzne čísla, ktorých súčet je 104.
14. Nech A je množina obsahujúca 100 prirodzených čísel. Je možné vždy vybrať niekoľko prvkov z množiny A tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom 100?
15. Je daných 33 prirodzených čísel. Dokážte, že medzi nimi existujú aspoň 2 také čísla, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 32.