# Relácie

1. Relácie $R, S$ sú dané vymenovaním takto:
$$R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,1],[2,2]\}, S = \{[2,1],[2,2],[2,3],[3,1],[3,2],[4,1]\}.$$
Určte: $R \circ S,\ S \circ R,\ R^{-1}, S^{-1},\ R^{-1} \circ S^{-1}, (R \circ S)^{-1}, (S \circ R)^{-1}$.
Výsledky: $R \circ S\ =\ \{[2,1],[2,2],[2,3],[3,1],[3,2],[3,3],[4,1],[4,2],[4,3]\}$,
$S \circ R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,1],[2,2],[2,3]\}$, $R^{-1} = \{[1,1],[2,1],[3,1],[1,2],[2,2]\}$,
$S^{-1} = \{[1,2],[2,2],[3,2],[1,3][2,3],[1,4]\}$,
$(R \circ S)^{-1} = \{[1,2],[2,2],[3,2],[1,3],[2,3],[3,3],[1,4],[2,4],[3,4]\}$,
$(S \circ R)^{-1} = \{[1,1],[2,1],[3,1],[1,2],[2,2],[3,2]\}$, $R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}$.

2. Nech $A = \{n \in \mathbb{N}\colon n \leq 10\}$, $B = \{m \in \mathbb{N}\colon m \leq 12\}$, $R = \{[m,n] \in A \times B\colon n = 3m\}$, $S = \{[m,n] \in B \times A\colon m - n = 2\}$. Zapíšte relácie $R, S$ vymenovaním prvkov. Zostrojte grafy relácií $R, S$. Určte relácie $R \circ S, S \circ R, R^{-1}, S^{-1}$.
Výsledky: $R = \{[1,3],[2,6],[3,9],[4,12]\}$, $S = \{[3,1],[4,2],[5,3]\dots[11,9],[12,10]\}$,
$R \circ S\ =\ \{[3,3],[4,6],[5,9],[6,12]\}$, $S \circ R = \{[1,1],[2,4],[3,7],[4,10]\}$,
$R^{-1} = \{[3,1],[6,2],[9,3],[12,4]\}$, $S^{-1} = \{[1,3],[2,4],[3,5]\dots[9,11],[10,12]\}$.

3. Nech $R = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon y = 2x\}$, $S = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon x^2 = y\}$, $T = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon y = \sqrt{x}\}$. Zostrojte karteziánske grafy relácií $R, S, T$. Určte relácie $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S$. Zostrojte grafy relácií $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S$.
Výsledky: $R \circ S = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2x^2\}$, $S \circ R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 4x^2\}$, $S \circ T = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = x\}$, $T \circ S =$ $\{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = |x|\}$, $S \circ R = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = \sqrt{2x}\}$, $R \circ S = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2\sqrt{x}\}$

4. Na množine $M = \{1,2,3,4\}$ určte vymenovaním reláciu, ktorá je
   (a) symetrická, reflexívna, ale nie je tranzitívna,
   (b) reflexívna a tranzitívna, ale nie je symetrická,
   (c) tranzitívna, ale nie je reflexívna, ani ireflexívna,
   (d) tranzitívna, ale nie je symetrická, ani antisymetrická.

   Výsledky:
   a) napr. $R_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,1],[1,3],[3,1]\}$,
   b) napr. $R_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2]\}$,
   c) napr. $R_c = \{[1,1]\}$,
   d) napr. $R_d = \{[1,1],[2,2],[1,2],[2,1],[4,3]\}$.

5. Nech $R = \{(1,3),(2,3),(3,4),(3,1),(4,2)\}$. Nájdite $R^+$.
Výsledky: $R^+ = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$.

6. Nájdite reláciu $S$, pre ktorú platí $S^+ \neq S$.
Výsledky: napr. $S = \{[1,2],[2,1]\}$.

7. Nájdite reláciu $S$, pre ktorú platí $S^+ = S$.
Výsledky: napr. $S = \{[1,2]\}$.

8. Nájdite tranzitívnu reláciu $R$, pre ktorú platí $R \circ R \neq R$.
Výsledky: napr. $R = \{[1,2]\}$.

9. Nájdite neprázdnu tranzitívnu reláciu $R$, pre ktorú platí $R \circ R = \emptyset$.
Výsledky: napr. $R = \{[1,2]\}$.

10. Dokážte, že pre ľubovolné relácie platí:

    (a) $R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2$,
    (b) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$,
    (c) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$,
    (d) $(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}, (R^{-1})^{-1} = R$,
    (e) * $R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} R \circ S_i), (\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.

11. Dokážte, že pre ľubovolné relácie platí:

    (a) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2$,
    (b) $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq S_1 \circ R \cap S_2 \circ R$,
    (c) $R \circ S_1 \setminus R \circ S_2 \subseteq R \circ (S_1 \setminus S_2)$.

    Dokážte, že v uvedených vzťahoch nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

12. Určte vymenovaním všetky rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

    Výsledky: Všetkých možností je 15, treba si ich systematicky vypísať.

    Sú to napr. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \ldots, \{\{1, 2, 3, 4\}\}$,

13. Nájdite aspoň tri rôzne rozklady množiny $\mathbb{Z}$.

    Výsledky: Napr. $\{\{0\}, \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}, \{m \in \mathbb{Z} : m < 0\}\}, \{\{2m : m \in \mathbb{Z}\}, \{2m + 1 : m \in \mathbb{Z}\}\}, \{\{3m : m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 1 : m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 2 : m \in \mathbb{Z}\}\}$.

14. Napíšte relácie ekvivalencie k nasledujúcim rozkladom

    (a) $S_1 = \{\{a, b, c, d\}\}$,
    (b) $S_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$,
    (c) $S_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

    Výsledky:

    a) $R_1 = \{a, b, c, d\}^2$,

    b) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, b]\}$,

    c) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$.

15. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ je daná relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3]\}$. Je relácia $R$ reláciou ekvivalencie? V prípade kladnej odpovede nájdite rozklad, ktorý ekvivalencia určuje. V prípade zápornej odpovede určte jej reflexívny, symetrický a tranzitívny uzáver.

    Výsledky: $R$ nie je relácia ekvivalencie, nie je reflexívna ani tranzitívna.

    $\varrho(R) = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 4]\}$,

    $R^+ = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [1, 3], [3, 1]\}$,

    symetrický uzáver je totožný s $R$.

16. Zistite, ktoré z nasledujúcich relácií sú ekvivalencie na množině $\mathbb{R}$.

    (a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} = 1\}$,
    (b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\}$, proč je reflexivní?
    (c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$,
    (d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^3\}$.

Výsledky:

a) nie je relácia ekvivalencie, je porušená reflexívnosť,

b) nie je relácia ekvivalencie, je porušená tranzitívnosť,

c) je relácia ekvivalencie,

d) je relácia ekvivalencie.

17. Na množine $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \iff 10a + b \text{ je prvočíslo.}$$

Zistite, či $\sim$ je reláciou ekvivalencie na množine $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, v prípade kladnej odpovede nájdite jej rozklad.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená napr. reflexívnosť. Doporučujem nájsť prvok, pre ktorý reflexívnosť neplatí a zistiť, či zvyšné dve vlastnosti platia.

18. Nech $X$ je ľubovolná neprázdna množina. Na jej potenčnej množine $P(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Zistite, či $\sim$ je reláciou ekvivalencie alebo usporiadania na množine $P(X)$.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená symetria. Je to relácia usporiadania.

19. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Necht $E$ je relácia ekvivalencie. Potom relácia $E^{-1}$ je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie platí.

20. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech $E_1, E_2$ sú relácie ekvivalencie na tej istej množine. Potom relácia $E_1 \circ E_2$ je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušeá napr. symetria.

21. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech $R_1, R_2$ sú relácie usporiadania na tej istej množine. Potom relácia $R_1 \circ R_2$ je tiež relácia usporiadania. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušeá napr. antisymetria.

22. Nech $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Na množine $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je na možine $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$ reláciou usporiadania.

23. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich relácií sú zobrazenia:

(a) $R_1 = \{[*, \circ], [\circ, *], [\heartsuit, *], [\spadesuit, \heartsuit], [\circ, \heartsuit]\}$,
(b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$,
(c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x + y^4 = 1\}$,
(d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2 \colon x^2 + y = 1\}$.

Výsledky: a)-c) nie sú zobrazenia (treba zdôvodniť), d) je zobrazenie (treba dokázať.)

24. Nech $f$ je zobrazenie na množine $\mathbb{R}$ dané predpisom $y = x^2 - 1$. Určte $f(\langle -1, 2)), f(\langle -1, 1\rangle), f(\mathbb{R}), f^{-1}(\langle -1, 1\rangle), f^{-1}(\langle 0, 2\rangle)$.

Výsledky: $f(\langle -1, 2)) = \langle -1, 3), f(\langle -1, 1\rangle) = \langle -1, 0\rangle, f(R) = \langle -1, \infty), f^{-1}(\langle -1, 1\rangle) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$,
$f^{-1}(\langle 0, 2\rangle) = \langle -\sqrt{3}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{3}\rangle$.

25. Určte všetky bijekcie množiny $A = \{1, 2, 3\}$ na množinu $\{a, b, c\}$. Výsledky: všetkých bijekcií je $3! = 6$, jedna z ich je napr. $\{[1, a], [2, b], [3, c]\}$, ostatné si skúste systematicky vypísať.