Sedmé cvičení

gaus. eliminace - počet nenulových řádků musí být 0
za x,y dosadit vektor ua
2*(1,2) -1*(-3,2) = výsledek

1. Která z dvojic vektorů tvoří bázi $V_2(\mathbb{R})$?
   a) $A = \left([1,2]^T, [-3,2]^T\right)$; b) $A = \left([1,2]^T, [-2,-4]^T\right)$.
   Najděte vektor $\overline{u}$, který má v této bázi souřadnice $[\overline{u}]_A = [2,-1]^T$. Vektor také načrtněte spolu s bázovými vektory.
   Výsledky: a) A je báze, b) A není báze, $\overline{u} = [5,2]^T$.

spočítat to jako lineární kombinace
u=x*(1,0,1)+y*(1,1,0)+z*(0,0,1)

2. Jsou dány dvě báze $V_2(\mathbb{R})$:
   $A = \left([1,0,1]^T, [1,1,0]^T, [0,0,1]^T\right)$, $B = \left([2,2,0]^T, [0,0,1]^T, [1,0,1]^T\right)$.
   Určete souřadnice vektoru $\overline{u} = [2,4,-1]^T$ v obou bázích: Nejprve v bázi A. Pak s A porovnejte bázi B a souřadnice $\overline{u}$ v B určete pokud možno bez velkých výpočtů.
   Výsledky: $[\overline{u}]_A = [-2,4,1]^T$, $[\overline{u}]_B = [2,1,-2]^T$.

3. Jsou dány tři báze $V_2(\mathbb{R})$: standardní, $A = \left([1,1]^T, [-1,1]^T\right)$, $B = \left([2,1/2]^T, [0,1]^T\right)$.
   Najděte obě matice přechodu mezi bázemi A a B.
   Dále k zadaným vektorům určete jejich souřadnice ve zbývajících dvou bázích:

   z A do B
   P B|A = matice přechodu

   c) lineární kombinace
   (0,1) = a*(1,1)+b*(-1,1)
   (0,1) = a*(2,1/2)+b*(0,1)

   a) $[\overline{u}]_A = [1,2]^T, \overline{u} = ?, [\overline{u}]_B = ?$
   b) $[\overline{v}]_B = [3,0]^T, \overline{v} = ?, [\overline{v}]_A = ?$
   c) $\overline{w} = [0,1]^T, [\overline{w}]_A = ?, [\overline{w}]_B = ?$

   dle toho jestli jdu z b do a nebo naopak
   ub = P B|A * ua
   u = 1*(1,1) + 2*(-1,1)

   Výsledky: matice přechodu od A k B je $\begin{pmatrix} \cancel{5/4} & \cancel{1/2} \\ -\cancel{3/4} & \cancel{1/2} \end{pmatrix}$; v opačném směru je $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$.
   a) $\overline{u} = [-1,3]^T, [\overline{u}]_B = [-1/2, 13/4]^T$, b) $\overline{v} = [6, 3/2]^T, [\overline{v}]_A = [15/4, -9/4]^T$, c) $[\overline{w}]_A = [1/2, 1/2]^T, [\overline{w}]_B = [0,1]^T$.

4. Nechť $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ jsou vektory prostoru $V_3(\mathbb{R})$ a lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určena následovně:
   $$f(\overline{v}_1) = [1,-1,2]^T, f(\overline{v}_2) = [0,3,2]^T, f(\overline{v}_3) = [-3,1,2]^T.$$
   Určete $f(2\overline{v}_1 - 3\overline{v}_2 + 4\overline{v}_3)$.
   lineární kombinace:
   2*(1,-1,2)-3*(0,3,2)+4*(-3,1,2)
   Výsledky:$[-10,-7,6]^T$.

musíme zkontrolovat pravidla z obou stran
f(u+v) = f(u) + f(v)
f(a*v) = a*f(v)

5. Transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dána následovně: $[x,y]^T \mapsto [x, y, x+y]^T$. Zjistěte jestli je f lineární transformace. Svoje tvrzení zdůvodněte.
   Výsledky: f je lineární transformace, v důkaze je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace.
   přičemž u =(u1,u2)
   v = (v1,v2)

6. Nechť transformace $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jsou dány předpisy
   - $f_1\left([x,y]^T\right) = [-2y, 3x, x-2y]^T$,
   - $f_2\left([x,y,z]^T\right) = [y,z,x]^T$,
   - $f_3\left([x,y,z]^T\right) = [x+z, y-z]^T$.

   a) Dokažte, že transformace f_1, f_2, f_3 jsou lineární.

standard báze je (1,0) (0,1)
takže f(1,0) = (0,3,1)
f(0,1) = (-2,0,-2)

to hodit jako sloupce do matice viz výsledky

b) Sestavte matice těchto zobrazení (vzhledem ke standardní bázi).

c) Pro vektor $\overline{a} = [1, 2]^T$ počítejte postupně tyto vektory: $\overline{b} = f_1(\overline{a}), \overline{c} = f_2(\overline{b}), \overline{d} = f_3(\overline{c})$. prostě dosadíme za neznámé

d) Určete předpis pro transformaci $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ a vypočtěte $\overline{d}$ znovu pomocí něj. jedu zleva doprava a ty obecné zápisy dosazuju. Potom stačilo dosadit a=(1,2)

e) Určete předpis pro transformaci $f_1 \circ f_2 \circ f_3$

Výsledky: a) v důkazech je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace,

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\overline{b} = [-4, 3, -3]^T, \overline{c} = [3, -3, -4]^T, \overline{d} = [-1, 1]^T$,

d) $f_3 \circ f_2 \circ f_1([x, y]) = [3x - 2y, x]^T$, e) nelze.

jádro: z transformovaná část = (0,0,0) vypočítat rovnice

7. Najděte jádro a obraz transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, která je dáno předpisem $f\big([x, y]^T\big) = [0, x, y]^T$. Ukažte, že f je lineární transformace.

obraz transformace: dosadíme do transformace jednotkové báze (1,0), (0,1). Poté provedeme lineární kombinaci z výsledku a*()+b*()=výsledek

Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0, 0]^T\}, \operatorname{Im} f = \{[0, t, s]^T; t, s \in \mathbb{R}\}$, v důkaze je nutné ověřit všechny vlastnosti z definice lineární transformace

8. Najděte bázi a dimenzi jádra a obrazu transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, která je dána předpisem $f\big([x, y, z]^T\big) = [x - y + 2z, 3x - 2y + 4z]^T$.

Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0, 2t, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, báze je např. $[0, 2, 1]$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$, báze je např. $([0, 1], [1, 0])$.

jádro - ztransformované = (0,0,0) vypočítané x,y je výsledek
báze jádra - hodit do matice ztransformovanou část s dosazenými čísly

9. Najděte bázi a dimenzi jádra a obrazu transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, která je dána předpisem $f\big([x, y]^T\big) = [x - 2y, x + y, y]^T$.

Dále určete, pro kterou hodnotu $a \in \mathbb{R}$ leží vektor $v = [1, a, 1]^T$ v oboru hodnot (obrazu) transformace f, a najděte všechny vektory, které se na něj zobrazí.

Výsledky: $\operatorname{Ker} f = \{[0, 0]^T\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$, báze je např. $([-2, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T)$, $a = 4$, vzor je $[3, 1]^T$.

obraz trans. - dosadím jednotkovou bázi (1,0), (0,1) do ztransformované části. Z toho udělám matici, zjistím dimenzi.

zobrazení vektoru ty rovnice obraz trans. = (1,a,1) vypočítat a, pak neznáme

10. Pro následující transformace najděte jejich jádro.

*U každé transformace rozhodněte, jestli je injektivní a jestli je surjektivní.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x, y]^T\big) = [y, x]^T$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x, y]^T\big) = [0, 2x + 3y]^T$,
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\big([x, y]^T\big) = [x + y, x - y]^T$,
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; f\big([x, y]^T\big) = [x, y, x + y]^T$,
(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; f\big([x, y]^T\big) = [x - 2y, -x + 2y, 2x - 4y]^T$,
(f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; f\big([x, y, z]^T\big) = [x + y - z, x - y + 3z]^T$.

Výsledky: a) $\{[0, 0]^T\}$, b) $\{[-\frac{3}{2}t, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$, c) $\{[0, 0]^T\}$, d) $\{[0, 0, 0]^T\}$, e) $\{[2t, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$, f) $\{[-t, 2t, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$.

11. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:

$$f\big([1, 2, 1]^T\big) = [1, 2]^T, f\big([1, 1, 3]^T\big) = [0, 3]^T, f\big([2, 3, -1]^T\big) = [1, 1]^T.$$

Určete $f\big([2, 4, 2]^T\big), f\big([2, 3, 4]^T\big), f\big([4, 6, 3]^T\big), f\big([1, 7, 8]^T\big), f\big([3, 5, 11]^T\big), f\big([2, 13, 19]^T\big)$.

Výsledky: $f([2, 4, 2]^T) = [2, 4]^T, f([2, 3, 4]^T) = [1, 5]^T, f([4, 6, 3]^T) = [2, 6]^T, f([1, 7, 8]^T) = \left[6, \frac{53}{5}\right]^T, f([3, 5, 11]^T) = \left[2, \frac{59}{5}\right]^T, f([2, 13, 19]^T) = [11, 23]^T$.

Pozn. Matice zobrazení je $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$.

první vypočítat matici zobrazení
poté matice zobrazení * zadání před transformací

standard báze
(1,0,0) = a(1,2,1)+b(1,1,3)+c(2,3,-1)
poté místo před trans. dosadit po trans a abc
a(1,2) + b(0,3) + c(1,1)

12. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:

$$f\big([1,2,1]^T\big) = [1,2]^T, f\big([1,1,3]^T\big) = [0,3]^T, f\big([2,3,-1]^T\big) = [1,a]^T.$$

Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $f\big([0,0,1]^T\big) = [0,4]^T$.

Výsledky: $a = -15$.

lineární transformace s tím výsledkem
(0,0,1) = a(1,2,1) + b(1,1,3) + c(2,3,-1)
vypočítat abc
poté dosadit a ztransformovat takže:
(0,4) = a(1,2) + b(0,3) + c(1,a)

13. Nechť $\overline{v}_1 = [1,1]^T, \overline{v}_2 = [1,0]^T$ jsou vektory báze prostoru $V_2(\mathbb{R})$ (ověřte). Transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dána obrazy $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ následovně:

$$f(\overline{v}_1) = [-1,2,0]^T, f(\overline{v}_2) = [0,-3,5]^T.$$

Najděte matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a následně určete $f\big([2,-3]^T\big)$.

Výsledky: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$, $f\big([2,-3]^T\big) = [3,-21,25]^T$.

potřebuji standard bázi (0,1)
čirou náhodou (1,1)-(1,0) =
(0,1)
takže (-1,2,0) - (0,-3,5) =
(-1,2,5)
to je výsledek do matice
trans

poté trans. matice * (2,-3)T

14. Nechť $\overline{v}_1 = [1,1,1]^T, \overline{v}_2 = [1,1,0]^T, \overline{v}_3 = [1,0,0]^T$ jsou vektory báze prostoru $V_3(\mathbb{R})$ (ověřte). Transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána obrazy $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ následovně:

$$f(\overline{v}_1) = [2,-1,4]^T, f(\overline{v}_2) = [3,0,1]^T, f(\overline{v}_3) = [-1,5,1]^T.$$

Najděte matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a následně určete $f\big([2,4,-1]^T\big)$.

Výsledky: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f\big([2,4,-1]^T\big) = [15,-9,-1]^T$.

nasím úkolem je odečíst od sebe ty f(v1), f(v2), f(v3)
abychom získali jednotkové báze
potom náhodně odečíst, aby vznikly (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)
poté vezmeme to z těch funkcí a v tom pořadí uděláme minus/plus
to se transponuje a hodí do matice

druhá část:
vzít tu hotovou matici a vynásobit (2,4,-1) transponovaně