Páté cvičení

1. Načrtněte následující lineární kombinace vektorů

$$\overline{u} = [2, 3], \overline{v} = [3, -2], \overline{w} = [-1, 1]$$

a) $2\overline{u} - \overline{v}$, b) $\overline{u} + 2\overline{w}$, c) $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$

Výsledky: a) $[1, 8]$; b) $[0, 5]$; c) $[4, 2]$.

2. Vyjádřete vektor $\overline{u} = [1, 4]$ jako lineární kombinaci vektorů

$$\overline{v} = [1, 1], \overline{w} = [-1, 2] :$$

a) odhadněte graficky, b) výpočtem

(1,4) = x(1,1) + y(-1,2)

Výsledky: b) $\overline{u} = 2\overline{v} + \overline{w}$.

3. Pokud to jde, vyjádřete vektory $\overline{u} = [5, 10, 2], \overline{v} = [1, 1, -3]$ jako lineární kombinace vektorů $[2, 5, 6], [1, 2, 1]$.

Výsledky: $\overline{v} = 3[1, 2, 1] - [2, 5, 6]; \overline{u}$ není lin. kombinací.

4. Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $[3, 10, b]$ byl lineární kombinací vektorů $[1, 3, 6], [1, -4, 1]$.

Výsledky: $b = \frac{131}{7}$.

5. Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $[3, 10, b]$ nebyl lineární kombinací vektorů $[2, 3, 6], [1, -4, 2]$.

Výsledky: $b \neq 10$.

6. Zjistěte, jestli vektory

   (a) $[2, 1, 3], [4, 4, 2], [3, 2, 1]$,

   pokud je D nula, tak jsou závislé

   (b) $[2, 0, 2], [4, 4, 2], [2, 2, 0]$,

   (c) $[2, 2, 1], [4, 4, 2], [1, 2, 2]$,

   (d) $[1, -1, 1, -1], [1, 1, 1, 0], [3, 1, 3, -1]$

jsou lineárně závislé.

Výsledky: a) nezávislé, b) nezávislé, c) závislé, d) závislé.

7. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů $[1, b, 2], [b, 1, 2], [2, 1, b]$ v závislosti na parametru $b \in \mathbb{R}$.

Dále zjistěte, pro které hodnoty $b \in \mathbb{R}$ má soustava rovnic právě jedno; nekonečně mnoho; žádné řešení.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & 2z & = & 0 \\ bx & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & bz & = & 0 \end{array}$$

normáln zase determinant, ale jsou tam neznámé

Výsledky: Vektory jsou závislé pro $b \in \{1, 2, -3\}$, soustava má pro tyto b nekonečně mnoho řešení, pro $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -3\}$ jsou vektory nezávislé, soustava má právě jedno řešení, žádné řešení soustava nemá pro žádné b.

8. Určete dimenzi prostoru, který je generován zadanými vektory, a popište, jak prostor vypadá geometricky

   (a) $V = \langle [-5, -2, 1], [1, 2, 1], [4, 4, 1] \rangle$,

   (b) $V = \langle [3, 2, 0], [1, 2, 1], [4, 4, 1] \rangle$,

   (c) $V = \langle [2, 5, 3], [4, 4, 2], [3, 2, 5] \rangle$,

   (d) $V = \langle [2, 2, 1], [4, 4, 2], [-2, -2, -1] \rangle$.

poet nenulových ádk ve shod tvaru

Výsledky: a) $\dim V = 2$, b) $\dim V = 2$, c) $\dim V = 3$, d) $\dim V = 1$.

9. Doplňte zadanou množinu vektorů na bázi prostoru $V_3(\mathbb{R})$.

   (a) $\{[1, 2, 3], [4, 4, 1], [3, 1, 2]\}$,

   (b) $\{[-5, -2, 1], [1, 2, 1], [4, 4, 1]\}$,

   (c) $\{[3, 2, 0], [1, 2, 1], [4, 4, 1]\}$.

Výsledky: a) vektory již tvoří bázi, b) $\{[-5, -2, 1], [1, 2, 1], [0, 0, 1]\}$, c) $\{[3, 2, 0], [1, 2, 1], [0, 0, 1]\}$.

10. Dané jsou vektory $[1, b, 1], [4, 4, 1], [1, 1, b]$. Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby prostor jimi generovaný měl dimenzi a) 3, b) 2.

Výsledky: a) $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$, b) $b \in \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$.

11. Pracujeme v prostoru $V_3(\mathbb{R})$ – vektory jsou uspořádáné trojice reálných čísel a skaláry jsou reálná čísla. Zjistěte, jestli $M_1(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ jsou podprostory $V_3(\mathbb{R})$, jestliže

    (a) $M_1 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = 2b\}$

    (b) $M_2 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = b + c\}$

    (c) $M_3 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; b = a + 1\}$

Výsledky: a) M_1 je podprostor $V_3(\mathbb{R})$, b) M_2 je podprostor $V_3(\mathbb{R})$, c) M_3 není podprostor $V_3(\mathbb{R})$.

12. Jsou dány podprostory $V_3(\mathbb{R})$

$$L_1 = \langle [1, 0, -1] \rangle, \quad L_2 = \langle [1, 2, 3] \rangle, \quad L_3 = \langle [1, 0, -1], [1, 2, 3] \rangle$$

    Uveďte několik příkladů vektorů, které leží v L_3, ale přitom neleží ani v L_1 ani v L_2.

Výsledky: např. $[2, 2, 2], [5, 6, 7]$.

13. Jsou dány podprostory $V_3(\mathbb{R})$

$$L_1 = \langle [1,0,-1],[1,2,3] \rangle, \quad L_2 = \langle [0,1,2],[2,1,0] \rangle.$$

Rozhodněte, které tvrzení je pravdivé:

a) $L_1 = L_2$, b) $L_1 \subseteq L_2$, c) $L_2 \subseteq L_1$, d) $L_1 \cap L_2 = \{[0,0,0]\}$,
e) $L_1 + L_2 = V_3(\mathbb{R})$

Výsledky: a) pravda, b) pravda, c) pravda, d) nepravda, e) nepravda.

14. * (pokud si to * zaslouží ?) Jsou dány podprostory $V_3(\mathbb{R})$

$$L_1 = \langle [1,0,-1],[1,2,3] \rangle, \quad L_2 = \langle [1,0,1],[2,-1,0] \rangle.$$

Najděte bázi prostoru $L_1 \cap L_2$.