Úvod do teórie množín

1. Dané sú množiny $A = \{1,4,5,6\}$, $B = \{3,4,6,7\}$, $C = \{2,5,6\}$. Určte $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $A \setminus (C \setminus B)$, $A \cap (B \setminus C)$, $A \triangle B$, $A \times B$, $(A \times C) \setminus B$.

   Výsledky: $A \cup B = \{1,3,4,5,6,7\}$, $A \cap C = \{5,6\}$, $C \setminus B = \{2,5\}$, $A \setminus (C \setminus B) = \{1,4,6\}$, $A \cap (B \setminus C) = \{4\}$, $A \triangle B = \{1,3,5,7\}$, $A \times B = \{[1,3],[1,4],[1,6],[1,7],[4,3],\dots,[6,6],[6,7]\}$, $(A \times C) \setminus B = A \times C$.

2. Dané sú množiny (intervaly) $A = (1,3\rangle$, $B = \langle 2,5)$. Určte $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \setminus B)$, $B \setminus (B \setminus A)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $B \setminus (A \setminus B)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$, $A \triangle B$.

   Výsledky: $A \cup B = (1,5)$, $A \cap B = \langle 2,3\rangle$, $B \setminus A = (3,5)$, $A \setminus (A \setminus B) = \langle 2,3\rangle$, $B \setminus (B \setminus A) = \langle 2,3\rangle$, $A \setminus (B \setminus A) = (1,3\rangle$, $B \setminus (A \setminus B) = \langle 2,5)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $A \triangle B = (1,2) \cup (3,5)$.

3. V triede je 22 chlapcov a všetci sa venujú nejakému športu: 19 futbalu, 5 karate a 10 hokeju. Pritom všetci karatisti sú aj futbalisti a 3 hokejisti sú aj karatisti. Koľko chlapcov hrá iba hokej, ak 10 chlapcov hrá iba futbal?

   Výsledky: 3.

4. Pre ktoré reálne čísla x majú intervaly $\langle \frac{x-1}{2}, 3\rangle$ a $(-\infty, x+2\rangle$ neprázdny prienik?

   Výsledky: $x \in \langle -5, 7)$.

5. Pre ktoré reálne čísla x majú intervaly $\left\langle \frac{4x}{3}, \infty\right)$ a $\langle -11, \frac{6x-2}{4}\rangle$ prázdny prienik?

   Výsledky: $x \in (-7, 3)$.

6. Pre ktoré reálne čísla x nie sú intervaly $(-\infty, 2+x)$ a $\langle \frac{2x-1}{3}, 3\rangle$ disjunktné?

   Výsledky: $x \in (-7, 5)$.

   disjunktné = prázdný průnik

7. Pre ktoré reálne čísla x je interval $\left(-3, \frac{x-1}{2}\right)$ podmnožinou intervalu $(-\infty, \frac{1}{x}\rangle$?

   Výsledky: $x \in (-5, -1\rangle \cup (0, 2\rangle$.

8. Určte množiny X, Y tak, aby platilo: $X \cap Y = \emptyset, X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, ku každému $a \in X$ existuje $b \in Y$ tak, že $b = a + 4$.

   Výsledky: $X_1 = \emptyset, Y_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}, X_2 = \{1\}, Y_2 = \{2,3,4,5,6,7\}, X_3 = \{2\}, Y_3 = \{1,3,4,5,6,7\}, X_4 = \{3\}, Y_4 = \{1,2,4,5,6,7\}, X_5 = \{1,2\}, Y_5 = \{3,4,5,6,7\}, X_6 = \{1,3\}, Y_6 = \{2,4,5,6,7\}, X_7 = \{2,3\}, Y_7 = \{1,4,5,6,7\}, X_8 = \{1,2,3\}, Y_8 = \{4,5,6,7\}$.

   prostě v x nesmí být větší číslo než 3, protože 3+4=7, všechny možné kombinace. Když chybí, tak nevadí

proč x=3 ??

9. Určte podmnožiny X, Y množiny $M = \{1,2,3,4,5,6\}$, pre ktoré platí: $X = \{2,6,x,y\}, Y = \{2,x,z,u\}, X \cap Y'_M = \{5,6\}, X'_M \cap Y = \{1,4\}$.

   Výsledky: $X = \{2,6,3,5\}, Y = \{2,3,1,4\}$.

   Doplňěk $$Y'_M$$ je 'všechno v M bez Y'

10. Určte množiny A, B tak, aby platilo:

$$\{2\} \subseteq A \setminus B \quad \wedge \quad \{2\} \in A \cap B.$$

   Výsledky: Napr. $A = \{2, \{2\}\}, B = \{\{2\}\}$.

11. Nájdite všetky dvojice množín X, Y, pre ktoré platí:

   vždy musí mít jeden prvek stejný, zbytek na random jiný

$$|X \cap Y| = |X \setminus Y| \quad \wedge \quad X \cup Y = \{a,b,c\}.$$

   Výsledky: $X_1 = \emptyset, Y_1 = \{a,b,c\}, X_2 = \{a,b\}, Y_2 = \{a,c\}, X_3 = \{a,b\}, Y_3 = \{b,c\}, X_4 = \{a,c\}, Y =_4 \{a,b\}, X_5 = \{a,c\}, Y_5 = \{b,c\}, X_6 = \{b,c\}, Y_6 = \{a,c\}, X_7 = \{b,c\}, Y_7 = \{a,b\}$,

12. Uveďte príklad množín A, B, pre ktoré platí $A \in B$ a zároveň $A \subseteq B$.

   Výsledky: Napr. $A = \{2\}, B = \{2, \{2\}\}$.

13. Zakreslite si ľavú a pravú stranu rovností Vennovými diagramami. Nájdite konkrétne množiny A, B pre ktoré uvedená rovnosť platí a ak je to možné nájdite i množiny A, B, pre ktoré uvedená rovnosť neplatí.

    (a) $A \cap (A \cup B) = A$,
    (b) $A \cup (A \cap B) = A$,
    (c) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,
    (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,
    (e) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
    (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
    (g) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

    Výsledky: a) platí pre ľubovolné dve množiny, b) platí pre ľubovolné dve množiny, c) platí napr. pre $A = B = \emptyset$, neplatí napr. pre $A = B = \{\star\}$, d) platí napr. pre $A = B = \{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{2\}, B = \{\star\}$, e) platí pre ľubovolné dve množiny, f) platí napr. pre $A = B = \{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{2\}, B = \{\star\}$, g) platí pre ľubovolné dve množiny.

14. Zakreslite si ľavú a pravú stranu rovností Vennovými diagramami. Nájdite konkrétne množiny A, B, C pre ktoré uvedená rovnosť platí a ak je to možné nájdite i množiny A, B, C, pre ktoré uvedená rovnosť neplatí.

    (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
    (b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
    (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
    (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
    (e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$
    (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
    (g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
    (h) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (B \cap D) \cup (A \cap C)$

    Výsledky: a) platí pre ľubovolné tri množiny, b) platí pre ľubovolné tri množiny, c) platí pre ľubovolné tri množiny, d) platí pre ľubovolné tri množiny, e) platí pre ľubovolné tri množiny, f) platí pre ľubovolné tri množiny, g) platí pre ľubovolné tri množiny, h) platí napr. pre $A = B = C = D\{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{\star\}, D = \{\star, \Delta\}$.