Výrokový a predikátový počet

1. Zistite, či nasledujúce formuly sú tautológie:

   (i) $(A \Leftrightarrow C) \implies \big((B \Leftrightarrow C) \implies (A \Leftrightarrow B)\big)$

   (ii) $(A \Leftrightarrow B) \implies \big(A \wedge C \Leftrightarrow C \wedge B\big)$

   (iii) $(A \Leftrightarrow B) \implies (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

   dosadit do pravdivostní tabulky

   (iv) $(A \Leftrightarrow B) \implies (B \implies A)$

   (v) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

   (vi) $(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

   (vii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)\big)$

   (viii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

   (ix) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

   (x) $(A \wedge \neg A) \wedge B \Leftrightarrow A \wedge \neg A$

   (xi) $(A \wedge \neg A) \vee B \Leftrightarrow A$

   (xii) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   Výsledky:Tautológie sú: (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (viii), (ix), (x).

2. V dielni sú tri stroje, ktoré pracujú podľa týchto podmienok: Ak pracuje prvý stroj, pracuje i druhý stroj. Ak nepracuje prvý stroj, nepracuje ani tretí stroj. Aké sú možnosti pre prácu tejto trojice strojov?

   Výsledky: Buď pracujú všetky tri stroje, alebo ani jeden z nich, alebo iba 2. stroj, alebo 1. a 2. stroj zároveň.

3. Pred sudcom stáli traja obžalovaní. Vyšetrovaním sa zistilo, že:

   a) Ak je A nevinný alebo B vinný, tak C je vinný.

   b) Ak A je nevinný, tak nevinný je aj C.

   hodit do prav. tabulky - ten kdo má na konci 1 a byl pouze sám je vinný

   Koho z nich má sudca odsúdiť?

   Výsledky: Sudca môže obviniť A.

4. Detektív Sherlock Holmes zistil:

   a) Ak A je vinný a B je nevinný, tak C je vinný. $$A \wedge \neg B \implies C$$

   b) C nikdy nie je v akcii sám. $$C \implies (A \vee B)$$

   c) A nikdy nespolupracuje s C. $$A \implies \neg C$$

   d) Mimo A, B, C nie sú do prípadu zapletené ďalšie osoby.

   Koho obvinil Sherlock Holmes? Koho môže s istotou prepustiť?

   Výsledky: Sudca môže obviniť B, prepustiť nemôže nikoho.

5. Nech x, y, z sú reálne premenné. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zápisov sú termy, ktoré výroková forma a ktoré výrok nad množinou $\mathbb{R}$.

   (a) 3,
   (b) $3x$,
   (c) $3x - y$,
   (d) $3x > y$,
   (e) $\sqrt{|x+z|} - 3x$,
   (f) $\forall x \forall y \colon (x \cdot z = y \cdot z) \Rightarrow x = y$,
   (g) $\forall x \colon x - y < y$,
   (h) $\exists x \forall y \colon x + y = 0$,
   (i) $\forall x \exists y \colon x + y = 0$.

   Výsledky: Termy sú a), b), c), e); výrokové formy sú d), f), g); výroky sú h), i).

6. Formuly predikátového počtu znegujte, potom prepíšte do bežneho jazyka aj pôvodnú formulu, aj jej negáciu:

   (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \colon x + y = 0$,
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon x + y = 0$,
   (c) $\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 \neq -1$,
   (d) $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^3 = -1$,
   (e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon y > x$,
   (f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon y \geq x$,
   (g) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \colon x > y$,
   (h) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \colon x \geq y$.

7. Formulami predikátového počtu zapíšte:

   (a) Rovnica $x^2 + 1 = 0$ nemá na množine reálnych čísel riešenie.
   (b) Rovnica $x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$ má na množine reálnych čísel aspoň jedno riešenie.
   (c) Pre niektoré reálne čísla platí $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.
   (d) Pre sčítanie reálnych čísel platí komutatívny zákon.
   (e) Pre násobenie reálnych čísel platí asociatívny zákon.
   (f) Množina prirodzených čísel nie je zhora ohraničená.
   (g) Neexistuje najväčšie reálne číslo.
   (h) Prirodzené číslo je deliteľné šiestimi, práve vtedy, keď je deliteľné dvomi a tromi.

   Výsledky: a) $\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 1 \neq 0$, b) $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$, c) $\exists a, b \in \mathbb{R} \colon (a+b)^3 = a^3 + b^3$, d) $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x + y = y + x$, e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, f) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \colon m > n$, g) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon y > x$, h) $\forall n \in \mathbb{N} \colon 6|n \iff 2|n \wedge 3|n$.