Richiami di Algebra Lineare

Sia n un numero intero positivo. Sia R^nl'insieme delle n-uple di numeri reali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Esiste una corrispondenza biunivoca fra le n-uple di numeri reali e i vettori a n componenti reali, cioè

(n-uple) ⇔ vettori

Si suole perciò indicare con R^n anche l'insieme dei vettori ad n componenti reali.

$$x \in R^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si definiscano in R^n le operazioni di addizione tra due vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

$$x \in R^n, y \in R^n \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y \\ x_2 + y_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in R$$

Si dimostra facilmente che esse godono delle seguenti proprietà.

1. L'addizione tra vettori è commutativa ed associativa.

2. L'elemento $0 \in R^n$, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle, detto vettore zero o vettore nullo è tale che $v+0=v \quad \forall \quad v \in R^n$;

3. $0 \cdot v=0$, $1 \cdot v=v$, essendo rispettivamente 0 ed 1 rispettivamente lo zero e l'unità di *R*..

4. Per ogni elemento $v \in R^n$ esiste il suo opposto $-v$ in R^n tale che $v+(-v)=0$;

5. valgono le seguenti proprietà distributive:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x, y \in R^n, \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n, \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta$$

6. vale la seguente proprietà associativa:

$$\forall \ \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

L' insieme R^n in cui sono definite queste due operazioni è munito di una struttura di spazio vettoriale sul campo R.

R^n è solo un esempio di spazio vettoriale. Un altro importante esempio di spazio vettoriale è Π_n, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad *n* sull'intervallo [a,b] su cui sono definite le analoghe operazioni di somma tra due polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

Ritorniamo per semplicità a parlare di R^n.

Dati *k* vettori, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in R^n$ e *k* scalari $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k \in R$, la quantità

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k$$

si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$

Definizione di lineare indipendenza: *I vettori* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k = 0$$

solo per $\lambda_i = 0$ $i=1,2,..,k$, cioè se nessuno di essi può essere ottenuto come combinazione lineare degli altri.

In R^n il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è n, cioè la dimensione dello spazio.

Una n-upla di vettori linearmente indipendenti costituisce una base per R^n , cioè un sistema di vettori generatori di R^n,

Un esempio di base di R^n è la base canonica. Essa è formata dai vettori:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{bmatrix} \quad \leftarrow i \qquad\qquad \text{i=1,...n}$$

Quando scriviamo un vettore in genere lo pensiamo rappresentato nella base canonica

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori della base canonica, oltre a essere linearmente indipendenti, possiedono un'ulteriore proprietà: l'ortogonalità. Per definirla è necessario introdurre il concetto di prodotto scalare.

Definiamo il prodotto scalare canonico su R^n, (che è stato munito di struttura di spazio vettoriale)

Definizione: Siano $x, y \in R^n$, il loro prodotto scalare canonico è definito come:

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Per indicare il prodotto scalare canonico tra due vettori si può utilizzare anche la notazione equivalente $x^T y$

Esempio:

Siano $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, il loro prodotto scalare canonico è dato da:

$$x \cdot y := 3 \cdot (-2) + 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = -6 + 2 - 3 = -7$$

In generale, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale R^n è un'applicazione da $R^n \times R^n$ a R che gode delle seguenti proprietà:

<u>Proprietà</u>

1) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R^n$

2) $x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x \cdot y_1 + \lambda_2 x \cdot y_2 \quad \forall x, y_1, y_2 \in R^n, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$

3) $x \cdot x > 0 \quad se \quad x \neq 0$

Definizione di vettori ortogonali. *Due vettori* $x, y \in R^n$ *si dicono <u>ortogonali</u> rispetto al prodotto scalare introdotto se* $x \cdot y = 0$, *o equivalentemente se* $< x, y >= 0$.

Spesso per quantificare gli errori che si commettono nel calcolare un vettore o per misurare delle distanze è necessario misurare la grandezza dei vettori. Introduciamo perciò il concetto di **norma vettoriale**.

La norma è una generalizzazione della lunghezza di un vettore x ∈ R^n.

Definizione di norma di un vettore

Ogni applicazione da R^n a $R_+ \cup \{0\}$ si chiama norma su R^n e si indica con $\|\cdot\|$, se gode delle seguenti proprietà:

1) $\|x\| > 0 \ \ \forall \ x \in R^n$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se x=0*

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \ \ \forall \ \lambda \in R, \forall \ x \in R^n$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall \ x, y \in R^n$

Esempi di norme di vettori sono:

1) Norma 1

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2) Norma 2

$\|x\|_2 = [\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2]^{\frac{1}{2}}$

Essendo il prodotto scalare canonico tra due vettori di R^n definito come la somma dei prodotti delle loro componenti, la norma due di un vettore può essere definita come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore,

cioè $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$

Osservazione:

Per una matrice ortogonale A (ossia t.c. $A^T A = A A^T = I$) risulta:

$$\| Ax\|_2 = \sqrt{(Ax)^T\,(Ax)} = \sqrt{x^T\,(A^T A)x} = \sqrt{x^T x} = \| x \|_2 \quad \forall x \in R^n$$

Norma infinito

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Si dimostra facilmente che le norme definite soddisfano le proprietà 1), 2), 3).

Le norme definite, nonostante producano risultati diversi, hanno la proprietà di produrre risultati "confrontabili".

Questo è garantito dal seguente Teorema.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di vettori, ad esempio* $\|x\|$ *e* $\|x\|_+$, *esistono costanti positive m ed M tali che ogni* $x \in R^n$

$$m \cdot \|x\|_+ \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_+$$

Si dice che le norme $\|x\|$ *e* $\|x\|_+$ *sono equivalenti.*

Quindi tutte le norme su R^n sono equivalenti.

Si può fare vedere che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

da cui si ottiene:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Matrici

Siano *m* ed *n* due interi positivi. Si definisce matrice (*m*x*n*) una tabella di *m* righe e *n* colonne di elementi reali o complessi del tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Poiché la tabella è costituita da m righe ed n colonne si dice che la matrice ha dimensioni *m* ed *n*, cioè è una matrice *m*×*n*. Possiamo pensarla come *n vettori*, detti vettori colonna, di dimensione *m* ciascuno.

Una matrice *m*×*1* coincide con un vettore colonna appartenente ad R^m; una matrice *1*x*m* coincide con un vettore riga (o trasposto di un vettore colonna) di dimensione *m*.

Se *m*=*n* la matrice è quadrata di dimensione n.

L'insieme delle matrici *m*×*n*, in genere si indica con $M(m \times n)$

Operazioni tra matrici:

Somma tra matrici

Siano $A, B \in M(m \times n)$ *si definisce matrice somma la matrice* $C \in M(mxn)$ *definita come segue:*

$$C = A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \quad i = 1, \dots m, \; j = 1, \dots, n$$

Prodotto di uno scalare per una matrice

Siano $A \in M(m \times n)$, $\lambda \in R$ *si definisce*

$$\lambda \cdot A = \left[\lambda \cdot a_{ij}\right] \quad i = 1, \dots m \quad j = 1, \dots, n$$

$M(m \times n)$ è così munito della struttura di spazio vettoriale.

Prodotto tra matrici

Siano $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$, *si definisce matrice prodotto la matrice* $C \in M(m \times n)$ *definita come segue:*

$$C = A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}\right] \quad i = 1, \dots m, \;\; j = 1, \dots, n$$

cioè la matrice C= A·B ha come elemento [i j] il prodotto scalare della riga i-esima di A per la j-esima colonna di B.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota bene:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Non vale in generale la proprietà commutativa.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

L'elemento neutro dell'operazione prodotto tra matrice è la matrice identità:

$$I_{nxn} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se $A \in M(n \times n)$ $\qquad I{\cdot}A = A{\cdot}I$

Definizione di prodotto matrice vettore*: Data la matrice* $A \in M(m \times n)$ *ed il vettore* $x \in R^n$ *, si definisce prodotto matrice vettore il vettore Ax di* R^m *che ha come i-esima componente il prodotto scalare tra la riga i-esima della matrice A ed il vettore x, cioè*

$$Ax = = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \cdots \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix}$$

In modo equivalente *Ax* si può definire come il vettore ottenuto dalla combinazione lineare delle colonne di *A* con i coefficienti dati dagli elementi di *x*, cioè indicate con $\underline{a_i}$, *i=1,..,n* le colonne di *A*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}_i$$

Osservazione:

Dati due vettori $x, y \in R^n$ il prodotto scalare canonico può essere visto anche come:

$$x^T y = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = y^T x$$

(matrice riga per matrice colonna)

Attenzione: Il prodotto $x \ y^T$ dà come risultato una matrice *n*×*n,* che prende il nome di *matrice diade.*

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

Definizione di matrice inversa: *Si definisce matrice inversa di una matrice* $A \in M(nxn)$ *, una matrice* $A^{-1} \in M(nxn)$ *tale che:*

$$A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

Definizione di rango di una matrice: *Si definisce rango di una matrice il numero di vettori colonna linearmente indipendenti di A.*

Esempio: Una matrice diade ha rango 1.

Teorema: *Una matrice* $A \in M(n \times n)$ *si dice invertibile, cioè ammette inversa* $A^{-1} \in M(n \times n)$*, se e solo se è a rango massimo, cioè se ha n colonne tutte linearmente indipendenti.*

Definizione di Matrice Trasposta:

Sia $A \in M(m \times n)$*, si definisce matrice trasposta di A e si indica con* $A^T \in M(n \times m)$*, la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A, cioè*

$$\boldsymbol{A^T = [a_{ji}] \quad i = 1,..n \; j = 1,..,m}$$

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Proprietà della trasposizione di matrici.

Se $A, B \in M(m \times n)$, *si ha*

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Se $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$ *si ha che*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Se $A \in M(n \times n)$ *si ha che*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

cioè l'operazione di trasposizione può essere scambiata con quella di inversione.

Definizione di matrice simmetrica $A \in M(m \times n)$ *si dice simmetrica se* $A^T = A$, *cioè se coincide con la sua trasposta.*

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \quad \textit{è} \quad \textit{simmetrica}$$

Definizione di matrice diagonale. *Una matrice* $A \in M(n \times n)$ *si dice diagonale se*

$$a_{ij} = 0 \quad per\ i \neq j$$

Si può esprimere nel seguente modo:

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Si definisce matrice inversa di una matrice diagonale, la matrice

$$A^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \qquad \lambda_i \neq 0 \quad i = 1, \ldots n$$

Definizione di matrice a diagonale dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale dominante se*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots n$$

Definizione di matrice a diagonale strettamente dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale strettamente dominante se*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots n$$

Definizione di matrice ortogonale.

Una matrice $A \in M(nxn)$ *è ortogonale se è invertibile e la sua inversa coincide con la sua trasposta:*

$$Q^{-1} = Q^{T}$$

Proprietà delle matrici ortogonali:

- Il prodotto di matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

- Le matrici ortogonali preservano il prodotto scalare canonico e quindi la norma 2 di vettori. Infatti, ricordando che

$$\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x^T x}$$

si ha

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{< Qx, Qx >} = \sqrt{x^T Q^T Q x} = \sqrt{x^T Q^{-1} Q x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2$$

Definizione di matrice simmetrica definita positiva.

Una matrice $A \in M(n \times n)$ simmetrica è definita positiva se

$$A = A^T \ e \quad x^T A x > 0 \qquad \forall\ x \neq 0$$

Proprietà delle matrici definite positive:

Se due matrici A e B sono definite positive ed il loro prodotto commuta, cioè AB=BA, allora il loro prodotto è ancora una matrice definita positiva.

Se una matrice simmetrica ha elementi diagonali positivi ed è a diagonale dominante, allora è definita positiva.

Definizione di matrice simmetrica semidefinita positiva.

Una matrice $A \in M(n \times n)$ simmetrica è semidefinita positiva se

$$A = A^T \ e \quad x^T A x \geq 0 \qquad \forall\ x \neq 0$$

Autovalori ed autovettori

Sia $A \in C^{nxn}$, il numero $\lambda \in C$, reale o complesso, è detto **autovalore** di A se esiste un vettore $x \in C^n$, $x \neq 0$, tale che valga la relazione

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

Allora il vettore x è detto **autovettore** di A corrispondente all'autovalore λ.

L'insieme degli autovalori di una matrice A costituisce lo ***spettro*** di A e l'autovalore di A di modulo massimo è detto ***raggio spettrale*** e si indica con ρ(A).

Il sistema (1) può essere riscritto nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0 \, . \qquad (2)$$

Per il teorema fondamentale dei sisitemi lineari esso ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0 \, ,$$

cioè se

$$\det(A - \lambda I) = P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \, , \qquad (3)$$

in cui

$$a_0 = (-1)^n$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} tr(A) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad e \quad a_n = \det(A) \, .$$

Il polinomio $P_n(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* di A e l'equazione $P(\lambda)$=0 è detta *equazione caratteristica* di A.

Gli autovalori di A sono tutti e soli i valori che annullano $P_n(\lambda)$, cioè le radici di $P_n(\lambda)$.

Poiché un polinomio di grado n ammette sempre n radici reali o complesse, distinte o coincidenti, una matrice *n*x*n* ha sempre n autovalori, non necessariamente distinti.

Dalle relazioni che legano i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica risulta che

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) \quad e \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A).$$

Gli autovettori corrispondenti agli auto valori di A sono le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo (2). Quindi un autovettore corrispondente ad un autovalore λ risulta determinato a meno di una costante moltiplicativa $\alpha \neq 0$, cioè se x è un autovettore di A anche αx è un autovettore di A corrispondente allo stesso autovalore.

Esempio1:

Il polinomio caratteristico della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

si ricava dal determinante

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

L'equazione caratteristica corrispondente

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

ha come radici $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=4$ che sono gli autovalori della matrice A.

L'autovalore corrispondente all'autovalore $\lambda_1=-2$ si calcola risolvendo il sistema (2) che in questo caso diventa

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dalla prima equazione di ottiene $x_1+x_2=0$ da cui $x_1=-x_2$

Da cui segue che qualunque vettore

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\alpha \neq 0$ è un autovettore di A corrispondente a λ_1.

Proprietà degli autovalori

- Gli autovalori di una matrice diagonale o triangolare sono uguali agli elementi diagonali.
- Se λ è un autovalore di una matrice A non singolare e x un autovettore corrispondente, allora risulta
  1. $\lambda \neq 0$
  2. $1/\lambda$ è autovalore di A^{-1} con x autovettore corrispondente. Infatti dalla (1) si ha

$$x = \lambda A^{-1} x$$

e quindi

$$\lambda \neq 0 \quad e \quad A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x .$$

- Per il raggio spettrale di A vale $|\rho(\lambda)| \leq ||A||$

  Infatti abbiamo $||Ax|| = |\lambda| \cdot ||x||$

  perciò vale $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \cdot ||x|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq ||A||$

- Se λ è un autovalore di una matrice A, allora esso è anche autovalore di A^T. Infatti, poiché

$$\det A^T = \det A ,$$

si ha

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I) .$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A ortogonale, cioè tale che $A^T = A^{-1}$, allora risulta $|\lambda| = 1$. Infatti dalla relazione (1) si ha

$$(Ax)^T = (\lambda x)^T$$

e quindi

$$x^T A^T = \lambda x^T,$$

da cui si ha

$$x^T A^T A x = \lambda \lambda x^T x.$$

Poiché A è ortogonale, $A^TA=I$ e quindi si ha

$$x^T x = \lambda^2 x^T x.$$

Essendo $x^T x \neq 0,$ segue che

$$\lambda^2 = 1, \quad e \quad quindi \quad |\lambda| = 1.$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A, allora λ^k è anche autovalore di A^k.

  Infatti dalla relazione $Ax = \lambda x$ si ottiene

$$A^k x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k\,volte} x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k-1\,volte} \lambda x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k-2\,volte} \lambda^2 x = .. = \lambda^k x$$

Autovalori di matrici speciali:

Le matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali.

Le matrici simmetriche definite positive hanno tutti gli autovalori reali e positivi.

Matrici Simili

Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine, si dice che B è simile ad A, o che B è ottenuta da A mediante una **trasformazione di similitudine** se esiste una matrice quadrata non singolare T tale che

$$B = T^{-1} A T$$

Si osserva che la similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza, cioè

- A è simile ad A
- Se A è simile a B $\Rightarrow$ B è simile ad A
- Se A è simile a B e B è simile a C $\Rightarrow$ A è simile a C

Proprietà di matrici simili:

- Due matrici simili hanno lo stesso spettro, cioè gli stessi autovalori. Inoltre hanno gli autovettori legati tra loro dalla matrice di similitudine T. Infatti è facile verificare che se (λ, x) è una coppia autovalore-autovettore di A allora (λ, $T^{-1}x$) lo è di $B=T^{-1}BT$.

  Se λ è autovalore di A ed x è il relativo autovettore vale

  $$Ax = \lambda x$$

  Sia ora $y= T^{-1}x$ allora si ha

  $$By = T^{-1}ATT^{-1}x = T^{-1}Ax = T^{-1}\lambda x = \lambda y$$

  da cui

  $$By = \lambda y$$

  cioè A e B hanno gli stessi autovalori e autovettori legati dalla matrice di similitudine.

- Due matrici simili A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioè

  $$P_A(\lambda)=P_B(\lambda)$$

  e quindi hanno gli stessi autovalori.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left[(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T)\right] = \det\left[(T^{-1}(A - \lambda I)T)\right] \\ &= \det(T^{-1})\det(A - \lambda I)\det(T) = \det(A - \lambda I)\det(T^{-1}T) \\ &= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)\end{aligned}$$