Norme vettoriali e matriciali

I dati di un problema in generale non sono semplicemente scalari appartenenti ad *R*, ma possono essere vettori di R^n oppure matrici di $R^{m\times n}$. E' necessario, quindi, introdurre uno strumento matematico che ci consenta di estendere l'errore relativo, che abbiamo visto nel caso in cui dati sono scalari appartenenti ad *R*, al caso più generale di vettori e di matrici.

Introduciamo perciò dapprima il concetto di **norma vettoriale** e successivamente di **norma matriciale**.

La norma vettoriale è una generalizzazione della lunghezza di un vettore $x \in R^n$.

Definizione di norma di un vettore

Ogni applicazione $\|\cdot\| : R^n a\ R_+ \cup \{0\}$ *si chiama norma su* R^n, *se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|x\| > 0\ \ \forall\ x \in R^n$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se x=0*

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\ \ \forall\ \lambda \in R, \forall\ x \in R^n$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ \forall\ x, y \in R^n$

Esempi di norme di vettori sono:

1) **Norma infinito**

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

2) **Norma 1**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3) Norma 2

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Essendo il prodotto scalare canonico tra due vettori di R^n definito come la somma dei prodotti delle loro componenti, la norma due di un vettore può essere definita come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore,

cioè $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{2}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}}$

Osservazione:

Per una matrice ortogonale A (ossia t.c. $A^T A = AA^T = I$) risulta:

$$\| Ax||_2 = \sqrt{(Ax)^T\,(Ax)} = \sqrt{x^T\,(A^T A)x} = \sqrt{x^T x} = \| x \|_2 \;\; \forall x \in R^n$$

Si dimostra facilmente che le norme definite soddisfano le proprietà 1), 2), 3).

Le norme definite, nonostante producano risultati diversi, hanno la proprietà di produrre risultati “confrontabili”.

Questo è garantito dal seguente Teorema.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di vettori, ad esempio $\|x\|$ e $\|x\|_*$, esistono costanti positive m ed M tali che ogni $x \in R^n$*

$$m \cdot \|x\|_* \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_*$$

Si dice che le norme $\|x\|$ e $\|x\|_*$ sono equivalenti.

Quindi tutte le norme su R^n sono equivalenti.

Si può fare vedere che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

da cui si ottiene:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

Esempio

Calcolare la norma $\infty, 1\ e\ 2$ del seguente vettore

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

e verificare che vale la relazione

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

- $\|x\|_\infty = \max(1, |-4|, 2) = \max(1,4,2) = 4$
- $\|x\|_1 = 1 + |-4| + 2 = 7$
- $\|x\|_2 = \sqrt{1 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21} \cong 4.58257$

$$4 \le 4.58257 \le 7$$

Richiami:

▶ $A \in$ M(n×n) è detta simmetrica se $A^T = A$;

▶ $\lambda \in$ C è un autovalore di A ∈ M(n×n) se esiste un vettore x ∈ $R^n \setminus \{0\}$. (diverso dal vettore nullo) per cui

$$Ax = \lambda x,$$

o equivalentemente se $\det(A-\lambda I) = 0$;

▶ A ∈ M(n×n) è detta **semidefinita positiva** se $x^T Ax \geq 0$, ∀x ∈ $R^n \setminus \{0\}$.

▶ A ∈ M(n×n) è detta **definita positiva** se $x^T Ax > 0$, ∀x ∈ $R^n \setminus \{0\}$.

In particolare,

- nel caso di A simmetrica e semidefinita positiva tutti gli autovalori di A sono reali non-negativi.
- nel caso di A simmetrica e definita positiva tutti gli autovalori di A sono reali e positivi.

Norme di matrici

Definizione: *Sia* $M(m \times n)$ *lo spazio vettoriale delle matrici m×n su R, si dice che l'applicazione* $\|A\|$ *da* $M(m \times n)$ *a* $R_+ \cup \{0\}$ *è norma della matrice A se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|A\| > 0$ *per tutte* $A \neq 0$ *e* $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \qquad \forall \quad A \in M(m \times n), \ \forall \quad \alpha \in R$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall \quad A, B \in M(m \times n)$

4) $\boldsymbol{\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall \quad A \in M(m \times p), B \in M(p \times n)}$

Norme compatibili:

Si dice che ***la norma di una matrice || || è compatibile con una data norma di vettori*** $\| \ \|_p$ *se* $\forall \quad A \in M(n \times n)$ *e* $\forall \quad x \in R^n$ *si ha:*

$$\|Ax\|_p \leq \|A\| \cdot \|x\|_p$$

Poiché si conoscono le norme di vettori è interessante definire norme di matrici indotte dalle corrispondenti norme di vettori.

Un modo per definire una norma indotta è il seguente:

Sia $A \in M(m \times n)$ *e* $x \in R^n, x \neq 0$, *si consideri ad esempio* $\|x\|_p$. *Poiché* $Ax \in R^m$, *si consideri poi la norma vettoriale* $\|Ax\|_p$. *Si definisce* *norma indotta* (o norma naturale) $\|A\|_p$, *la più piccola costante C per cui vale la maggiorazione*

$$\|Ax\|_p \leq C \cdot \|x\|_p \qquad (1)$$

da cui

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

Poiché $\|A\|_p$ è la più piccola delle costanti per cui vale la maggiorazione (1), significa che:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Norme indotte dalle norme più comuni su R^n

1**)** **p=1** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\|A\|_1 = \max_{j=1,..n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}$ si considera la norma 1 di tutte le colonne e si prende il valore massimo

2) **p=∞** $\|x\|_1 = \max_j |x_j|$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\|A\|_\infty = \max_{i=1,..m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$ si considera la norma 1 di tutte le righe e si prende il valore massimo.

2) **p=2**

$\boldsymbol{\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}}$ dove $\boldsymbol{\rho}$ è il raggio spettrale, cioè l'autovalore di modulo massimo della matrice $\boldsymbol{A^T A}$.

N.B. $A^T A$ è simmetrica e semidefinita positiva.

E' simmetrica perché $(A^T A)^T = A^T A$

$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = y^T y = \sum_i y_i^2 \geq 0 = y_i^2$

Per una matrice simmetrica e definita positiva gli autovalori sono reali e non negativi, quindi $\rho(A^T A)$ è il massimo autovalore di $A^T A$ ed è sempre non negativo.

N.B. Se $A \in R^{n \times n}$ è **simmetrica** allora $\boldsymbol{\|A\|_1} = \boldsymbol{\|A\|_\infty}$

Anche per le matrici vale il concetto di norme equivalenti.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di matrici, ad esempio* $\|A\|$ *e* $\|A\|_*$ *esistono sempre due costanti m ed M tali che* $\forall \quad A \in M(nxn)$ *si ha:*

$$m\|A\|_* \leq \|A\| \leq M\|A\|_*$$

Si dice che $\|A\|$ *e* $\|A\|_*$ *sono norme* *equivalenti.*

Esempio:

Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty \quad .$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

Poiché il calcolo di $\| A \|_2$ *risulta più oneroso di quello di* $\| A \|_\infty$ *o di* $\| A \|_1$*, le precedenti relazioni possono essere utili nel caso sia sufficiente disporre solo di una stima di* $\| A \|_2$.

1. **Esempi relativi al calcolo delle norme matriciali indotte dalle norme vettoriali ∞, 1 *e* 2.**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix}$$

- **Calcolo di $||\,A\,||_\infty$**

$$||\,A\,||_\infty = \max\left\{4 + |-1| + 6, 2 + 3 + |-3|, 1 + |-2| + \frac{9}{2}\right\}$$
$$= \max\left\{11, 8, \frac{15}{2}\right\} = 11$$

- **Calcolo di $||\,A\,||_1$**

$$||\,A\,||_1 = \max\left\{4 + 2 + 1, |-1| + 3 + |-2|, 6 + |-3| + \frac{9}{2}\right\}$$
$$= \max\left\{7, 6, \frac{27}{2}\right\} = \frac{27}{2} = 13.5$$

- **Calcolo di $||\,A\,||_2$**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$M = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 45/2 \\ 0 & 14 & -24 \\ 45/2 & -24 & 261/4 \end{bmatrix}$$

- **Calcoliamo gli autovalori di M**

$$det(M - \lambda I) = det\begin{bmatrix} 21 - \lambda & 0 & \frac{45}{2} \\ 0 & 14 - \lambda & -24 \\ \frac{45}{2} & -24 & \frac{261}{4} - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + \frac{401}{4}\lambda^2 - \frac{2991}{2}\lambda$$

$$= -\frac{1}{4}\,\lambda(4\,\lambda^2 - 401\,\lambda + 5982)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono

$\lambda = 0,\ \ \lambda_1 = \frac{401+\sqrt{65089}}{8}$**=82.0157,** $\lambda_2 = \frac{401-\sqrt{65089}}{8}$**=18.2343**

Da cui si ottiene:

$$\rho(M) = max\,\{0, 18.2343, 82.0157\} = 82.0157$$

E pertanto $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(M)} = \sqrt{82.0157} = 9.0563$