Calcolo differenziale in più variabili

Sia $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$

$(x, y) \in R^2 \rightarrow f(x, y) \in R$

$f: R^2 \rightarrow R$ **è un campo scalare** su R^2, cioè una **funzione che associa uno scalare ad un punto di R^2**.

Definiamo il grafico di f, G_f come segue:

$$G_f = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = f(x, y)\}$$

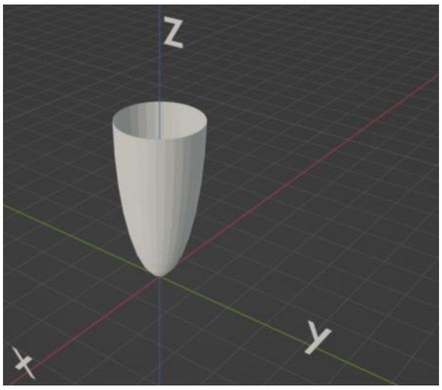
(Tutto la trattazione che faremo può essere generalizzata al caso di $f: R^n \rightarrow R$, **un campo scalare** su R^n, cioè una **funzione che associa uno scalare ad un punto di R^n**

Grafico di $f: R^n \rightarrow R$

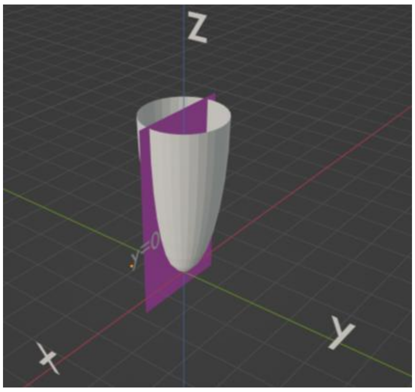
$G_f = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$)

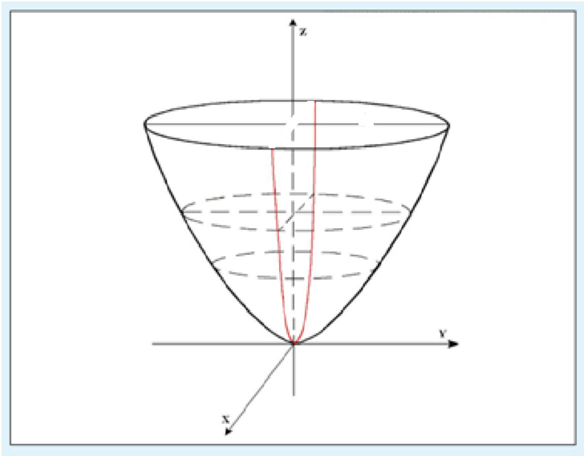
Esempio:

$z = f(x, y) = x^2 + y^2$

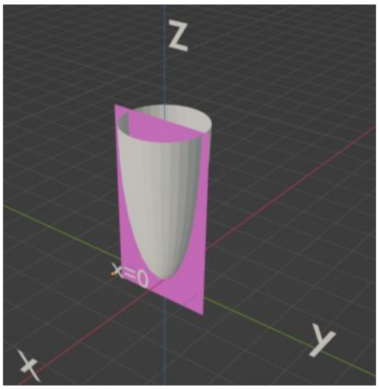


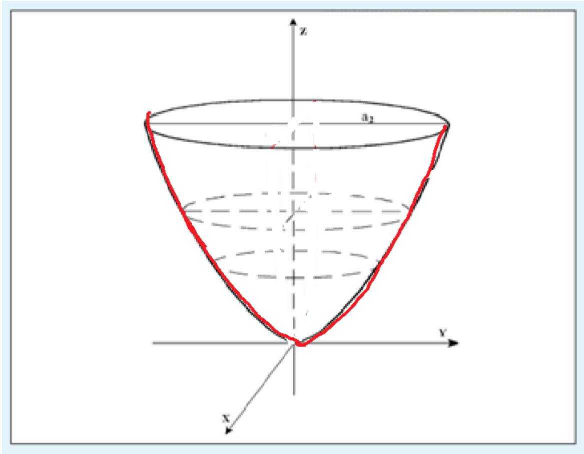
Se intersechiamo il grafico G_f con il piano $y = 0$, otteniamo la parabola $\boldsymbol{z = x^2}$.





Se intersechiamo il grafico G_f con il piano $x = 0$, otteniamo la parabola $\boldsymbol{z = y^2}$.

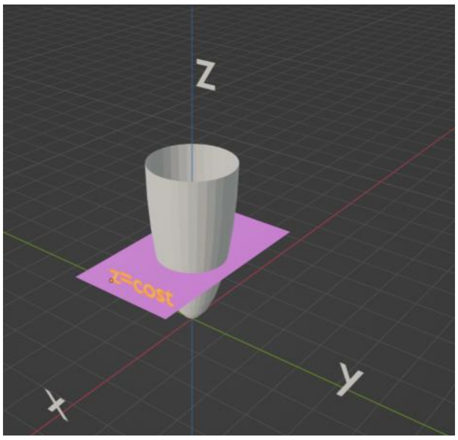


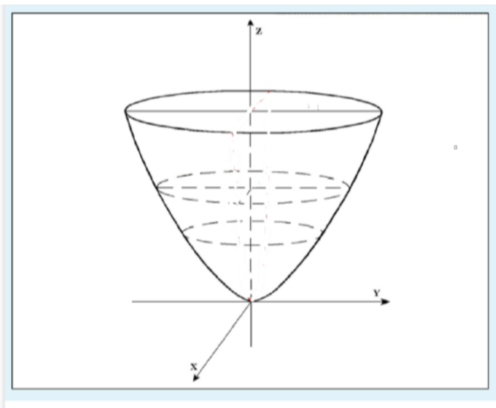


Se intersechiamo il grafico G_f con piani orizzontali z= $cost$, paralleli al piano xy, otteniamo circonferenze

$$x^2 + y^2 = z_c$$

con centro l'origine e raggio $\sqrt{z_c}$





Definizione di Curva di livello:

Sia $f: dom(f) \subset R^2 \rightarrow R$ e sia $k \in R$ un numero reale,

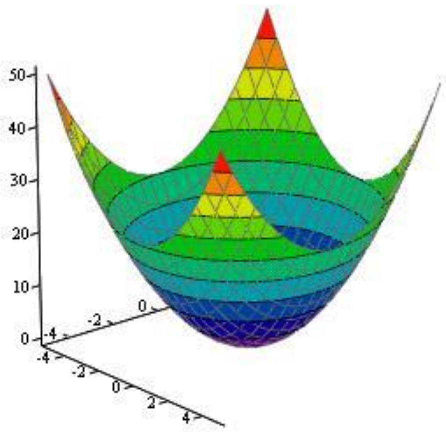
Si definisce curva di livello $L(f,k)$ l'insieme dei punti del dominio di f che soddisfano l'equazione $f(x,y) = k$

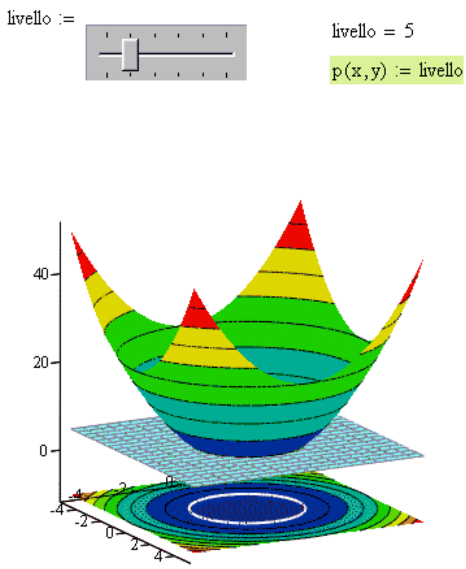
$$L(f,k) = \{(x,y) \in dom(f(x,y)) : f(x,y) = k\}$$

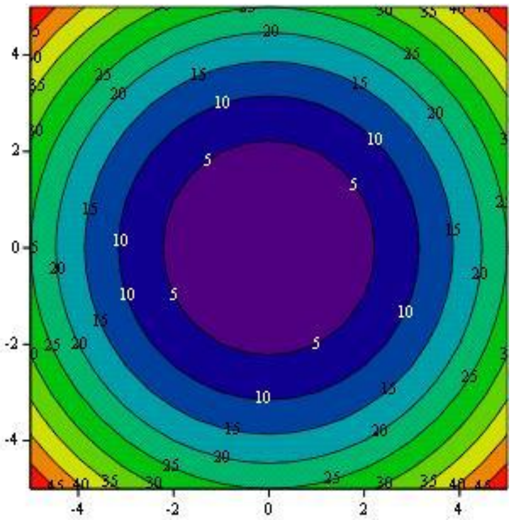
Se $k \notin Im\,(f(x,y))$, allora $L(f,k) = \emptyset$

Dal punto di vista geometrico, le curve di livello sono le proiezioni ortogonali sul piano Oxy delle curve ottenute intersecando il piano $z = k$ ed il grafico della funzione $z = f(x,y)$.

Tutti i punti che appartengono alla stessa curva di livello, avranno immagini, mediante f, alla stessa quota $z = k$.







Derivate parziali:

Sia $(x_0, y_0) \in R^2$, e sia f definita in un intorno di (x_0, y_0).

Diciamo che f è derivabile rispetto ad x in (x_0, y_0) se esiste ed è finito il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e lo denotiamo con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oppure con $f'_x(x_0, y_0)$.

Diciamo che f è derivabile rispetto ad y in (x_0, y_0) se esiste ed è finito il

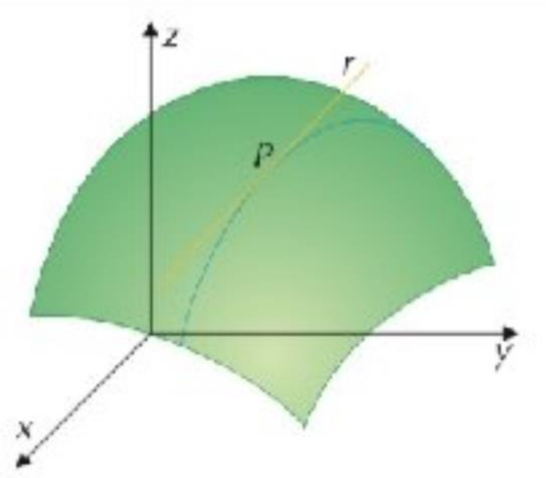
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0\,,\ y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

e lo denotiamo con $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oppure con $f'_y(x_0, y_0)$

Derivate parziali: interpretazione geometrica

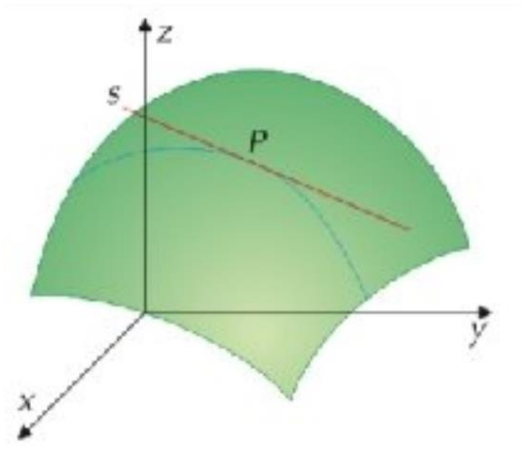
Per calcolare la derivata parziale della funzione $f(x, y)$ rispetto ad x nel punto $P = (x_0, y_0)$, fissiamo il valore di y_0, cioè intersechiamo la superficie che f rappresenta con il piano $y = y_0$.

La derivata parziale rispetto ad x in P rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in P alla curva che si ottiene intersecando il grafico della funzione f con il piano $y = y_0$.

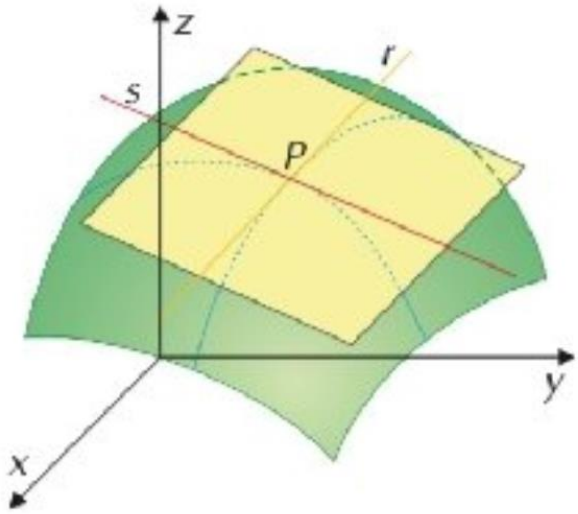


Per calcolare la derivata parziale della funzione $f(x, y)$ rispetto ad y nel punto $P(x_0, y_0)$, fissiamo il valore di x_0, cioè sezioniamo la superficie che f rappresenta con il piano $x = x_0$.

La derivata parziale rispetto ad y in P rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva che si ottiene intersecando il grafico della funzione f con il piano $x = x_0$.



Le due rette r ed s definiscono il piano tangente alla superficie in P.



Se una funzione è differenziabile in un punto allora tutte le derivate parziali calcolate nel punto esistono, ma non vale il viceversa.

L'esistenza di tutte le derivate parziali in un punto non garantisce la differenziabilità di una funzione in quel punto.

Teorema: Sia $A \subseteq R^2$ $aperto, f: A \to R$. Se tutte le derivate parziali prime esistono e sono continue, la funzione f è differenziabile.

Se f è differenziabile ammette piano tangente di equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Le due derivate parziali nel punto P della funzione $z = f(x, y)$ formano un vettore , che prende il nome di **gradiente** della funzione $z = f(x, y)$ nel punto P e viene indicato con

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Quando applichiamo l'operatore ∇ (nabla) (gradiente) ad un campo scalare, cioè ad una funzione $f: R^2 \to R$, otteniamo un **campo vettoriale**.

Derivata direzionale

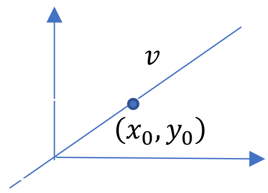
Le derivate parziali misurano la variazione di una funzione lungo direzioni parallele agli assi coordinati. Nulla vieta di considerare qualsiasi altra direzione.

Sia $(x_0, y_0) \in R^2, v = (v_x, v_y)$ un versore, cioè un vettore che ha norma 2 unitaria.

L'equazione parametrica della retta passante per (x_0, y_0) e con direzione v è data da:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_x \\ y = y_0 + t\, v_y \end{cases}$$

che descrive le coordinate (x, y) di un punto che si muove su tale retta



quando $t = 0$ si ottengono le equazioni del punto (x_0, y_0)

Vogliamo calcolare la variazione della funzione f lungo la direzione v

Sia $f: R^2 \to R$, $P_0 = (x_0, y_0) \in R^2$. Sia $v \in R^2$ un vettore unitario, cioè tale che $\|v\|_2 = 1$, se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\, v_x\, ,\ y_0 + t\, v_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

lo definiamo **derivata direzionale *di f*** (nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$) lungo la direzione v e lo denotiamo con $\partial_v f$ oppure $D_v f$.

Se $u = (1,0)$ $\quad allora \quad \partial_u f = \partial_x f$

Se $u = (0,1)$ $\quad allora \quad \partial_u f = \partial_y f$

Teorema del gradiente

Sia $f: A \subseteq R^2 \to R$, A insieme aperto , f differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$ e sia v un vettore unitario di componenti (v_x, v_y) , allora esiste $D_v f$ e vale che

$$\boldsymbol{D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot v = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot v_y}$$

dove $\cdot$ rappresenta il prodotto scalare tra i vettori $\nabla f(x_o, y_o) \cdot v$.

Osservazione 1.

Supponiamo f differenziabile in (x_0, y_0). **Qual' è la direzione v in cui f ha massima crescita, cioè $D_v f(x_0, y_0)$ assume valore massimo**?

Il prodotto scalare tra due vettori può essere interpretato nel seguente modo:

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot v = \|\nabla f(x_o, y_o)\| \|v\| \cos(\alpha)$$

dove α è l'angolo formato tra la direzione del gradiente e la direzione u.

Ricordiamo che $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ e $\|v\| = 1$.

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot v = \|\nabla f(x_o, y_o)\| \cos(\alpha)$$

$D_v f(x_0, y_0)$ assume valore massimo quando $\cos(\alpha) = 1$, e quindi $\alpha = 0$, **cioè** se v è la direzione del gradiente stesso $\nabla f(x_o, y_o)$, ovvero il vettore di norma unitaria nella direzione del gradiente, $v = \frac{\nabla f(x_o, y_o)}{\|\nabla f(x_o, y_o)\|}$.

$D_v f(x_0, y_0)$ assume valore minimo quando $\cos(\alpha) = -1$, e quindi $\alpha = \pi$, **cioè se v** è la direzione opposta al gradiente $\nabla f(x_o, y_o)$, ovvero il vettore di norma unitaria nella direzione opposta del gradiente, $v = -\frac{\nabla f(x_o, y_o)}{\|\nabla f(x_o, y_o)\|}$.

Segue che $\nabla f(x_o, y_o)$ è la direzione di massima crescenza di f e che $-\nabla f(x_o, y_o)$ è la direzione di massima decrescenza di f.

Osservazione 2.

$\nabla f(x_o, y_o)$ è ortogonale alla direzione della retta tangente alla curva di livello in un determinato punto.

Sia v la direzione della retta tangente alla linea di livello in un determinato punto (x_o, y_o).

Si ha che:

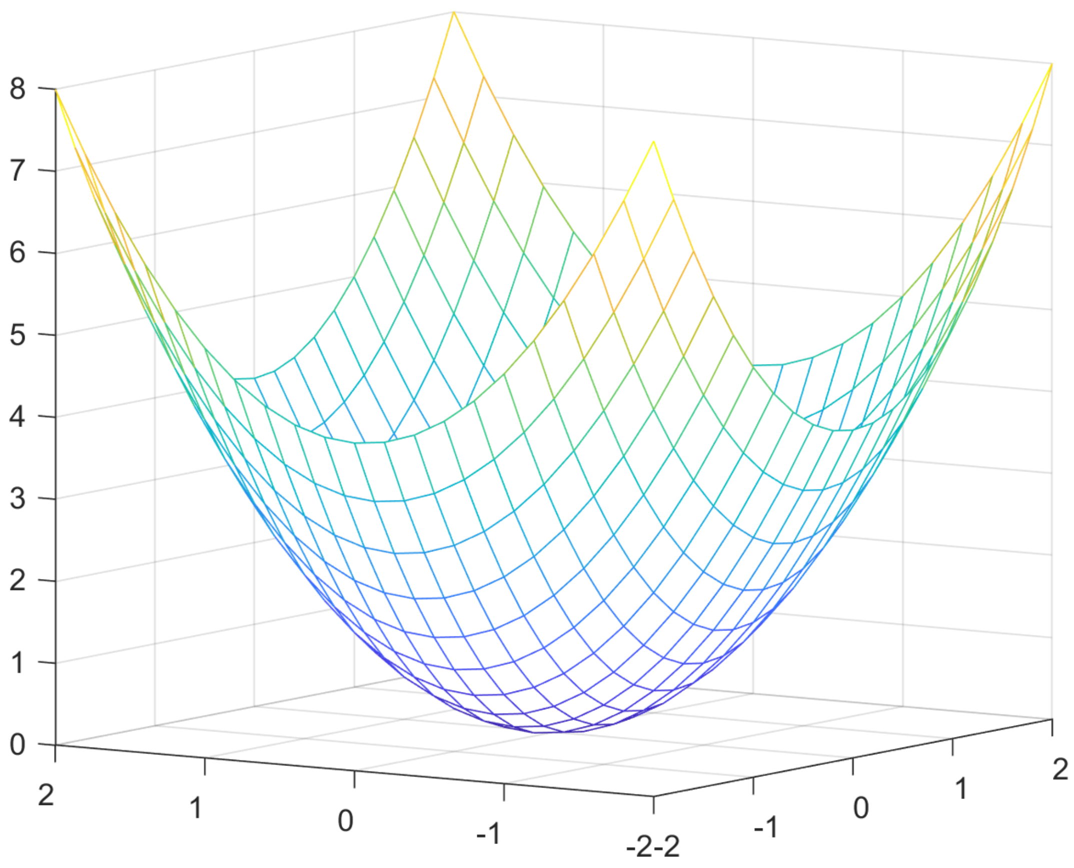
$D_v f(x_0, y_0) = 0$ perché f è costante lungo le linee di livello.

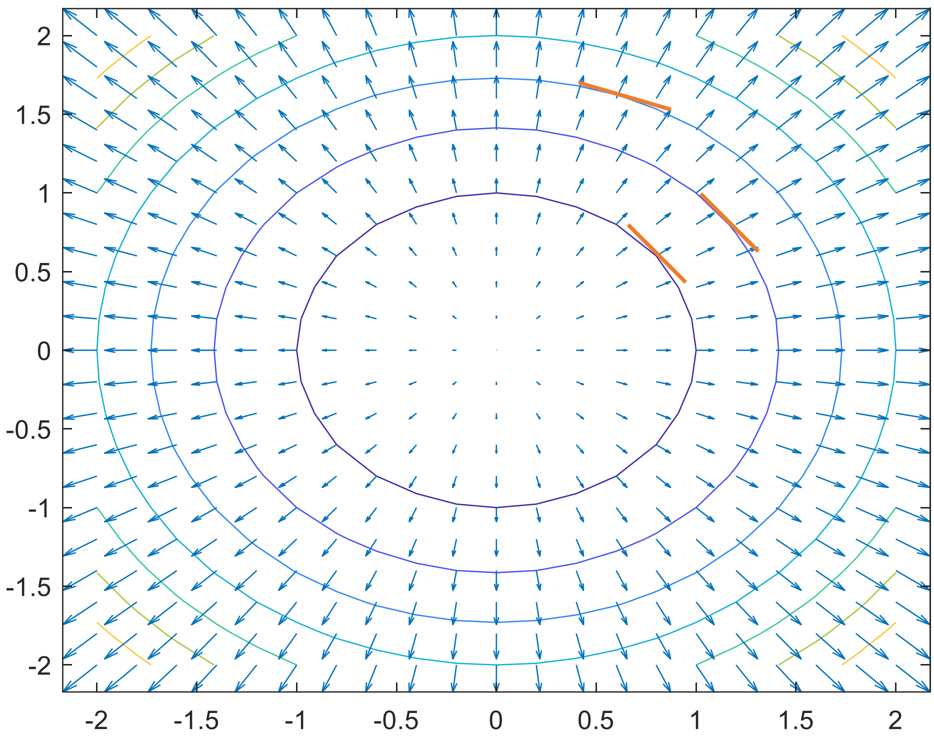
Per il teorema del gradiente $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot v = 0$

Da cui segue che $\nabla f(x_o, y_o) \perp v$, dove v è la tangente alla curva di livello nel punto (x_0, y_0).

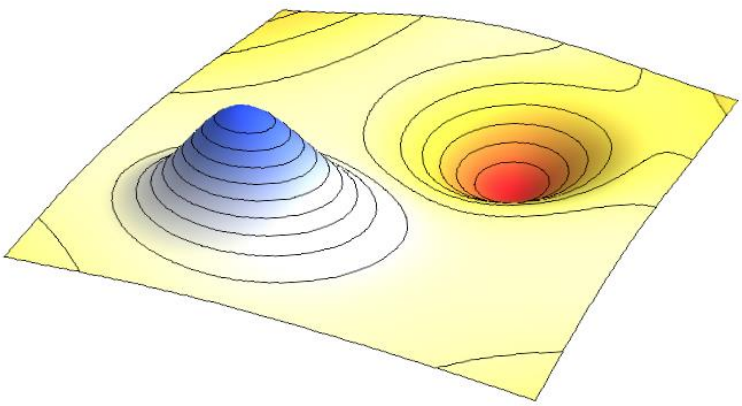
Esempio:

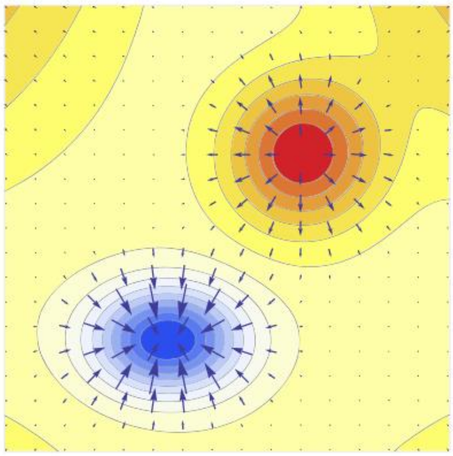
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$





Esempio 2:





Derivate seconde

Sia $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$, $(x, y) \rightarrow f(x, y)$, se $\partial_x f(x, y)$ e $\partial_y f(x, y)$ sono derivabili, allora diciamo che f è derivabile 2 volte . Se le derivate di f sono continue allora diciamo che la f è di classe C^2.

Notazione per le derivate seconde

$$\partial_{xx} f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xx}$$

$$\partial_{xy} f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{xy}$$

$$\partial_{yx} f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx}$$

$$\partial_{yy} f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}, \quad f_{yy}$$

Teorema di Schwarz

Sia $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$ di classe C^2 (cioè tale che le derivate di ordine 2 siano continue) allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Forma quadratica

Una forma quadratica su R^n è un polinomio **di secondo grado in *n* variabili**

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

$$q(h) = q(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

$$q(h) = a_{11}h_1^2 + a_{12}h_1h_2 + \cdots + a_{1n}h_1h_n + a_{21}h_2h_1 + a_{22}h_2^2 + \cdots \\ + a_{2n}h_2h_n + \cdots + a_{n1}h_nh_1 + a_{n2}h_nh_2 + \cdots + a_{nn}h_n^2$$

Nel caso n=2

$$q(h_1, h_2) = a_{11}h_1^2 + a_{12}h_1h_2 + a_{21}h_2h_1 + a_{22}h_2^2$$

La **matrice associata** a $q(h)$ è :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$q(h)$ può essere scritta nella forma

$$q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h^T A\, h$$

Una forma quadratica si dice **definita positiva** se

$$q(h) > 0 \quad \forall\, h \neq 0$$

Una forma quadratica si dice **definita negativa** se

$$q(h) < 0 \quad \forall\, h \neq 0$$

Una forma quadratica si dice **semidefinita positiva** se

$$q(h) \geq 0 \quad \forall\, h \;\; ed \;\; \exists\, h \neq 0 \; tale \; che \; q(h) = 0$$

Una forma quadratica si dice **semidefinita negativa** se

$$q(h) \leq 0 \quad \forall\, h \;\; ed \;\; \exists\, h \neq 0 \; tale \; che \; q(h) = 0$$

Teorema:

Una forma quadratica **q è definita positiva** ⇔ **det A >0 e $a_{11} > 0$**

q è definita negativa ⇔ **det A >0 e $a_{11} < 0$**

Una forma quadratica q **è semidefinita positiva** ⇔ det A=0 e a_{11} >0

q è **definita negativa** ⇔ det A= 0 e a_{11} <0

Una forma quadratica q **è indefinita** ⇔ det A<0

Massimi e minimi di una funzione di 2 variabili

Chiamiamo **MASSIMO relativo** (o massimo locale) per una funzione $z = f(x, y)$ un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tale

$$\boldsymbol{f(x_0, y_0) \geq f(x, y)}$$

per tutti i punti **(x, y) che appartengono ad un intorno $\mathcal{N}$ di P_0** contenuto nel dominio della funzione;

chiamiamo invece **MINIMO relativo** (o minimo locale) un punto P_0 tale

$$\boldsymbol{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)}$$

per tutti i punti **(x, y) che appartengono ad un intorno $\mathcal{N}$ di P_0** contenuto nel dominio della funzione;

chiamiamo **MASSIMO assoluto** (o massimo globale) per una funzione $z = f(x, y)$ un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tale

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

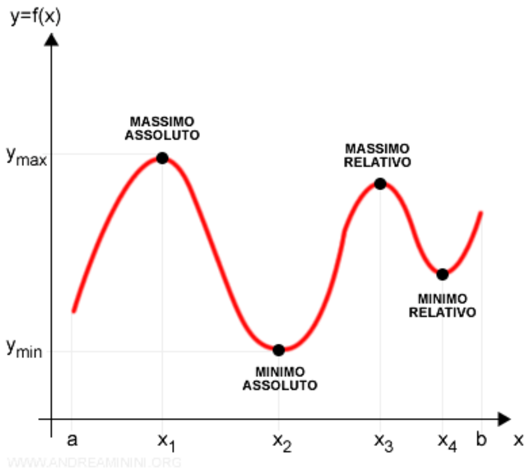
per **tutti i punti (x, y) che appartengono al dominio della funzione**;

chiamiamo **MINIMO assoluto** (o minimo globale) per una funzione $z = f(x, y)$ un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tale

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

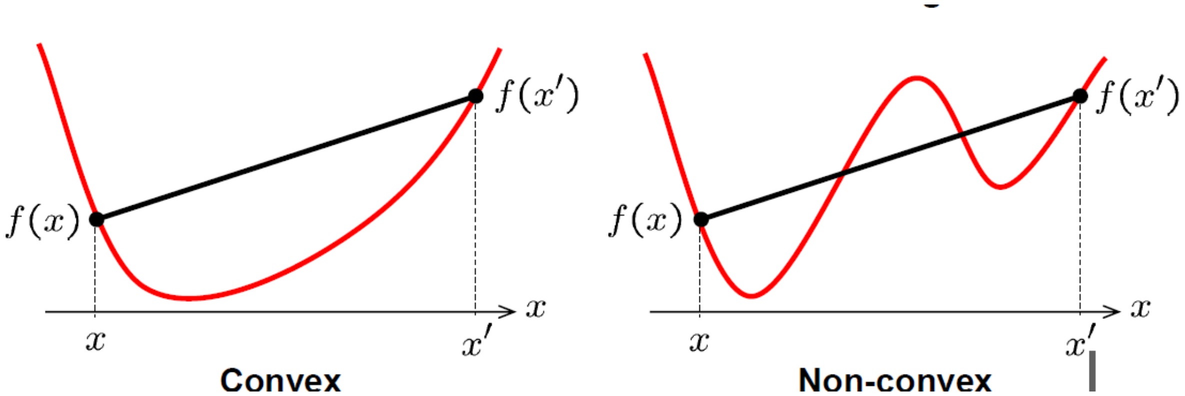
per **tutti i punti (x, y) che appartengono al dominio della funzione**;

Esempio per una funzione $y = f(x)$



I punti in cui si annulla il gradiente di una funzione f si chiamano punti critici o punti stazionari di f.

Nota sulle funzioni convesse



Ricordate che una funzione $f: A \subseteq D \rightarrow R$, definita su un insieme convesso A è detta convessa se

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot x') \leq t\, f(x) + (1-t) f(x')$$

Dal punto di vista geometrico, una funzione si dice **convessa** se ogni coppia di punti sul grafico della funzione è congiunta mediante un segmento che sta al di sopra del grafico, oppure coincide con una parte del grafico.

Per una funzione convessa il minimo **relativo coincide con il minimo assoluto.**

Teorema: Se la funzione **f è convessa e differenziabile**, (x_0, y_0)

è un minimo (assoluto o relativo) $\iff$ $\mathbf{\nabla f(x_0, y_0) = 0}$, In generale

Classificazione dei punti critici

Supponiamo $f: A \subseteq R^2 \to R$ di classe C^2 (cioè tale che le derivate di ordine 2 siano continue)

Sia $(x_0, y_0) \in R^2$ un punto critico di f, cioè **un punto in cui si annulla il gradiente $\nabla \mathbf{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = \mathbf{0}$, cioè si risolve il sistema lineare**

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

e si trovano le coordinate dei punti critici.

Allora

se $H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di **minimo locale**.

se $H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di **massimo locale.**

se $H_f(x_0, y_0)$ è indefinita $\Rightarrow (x_0, y_0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo. Un tale punto di dice **punto di sella**.

Se **det** $\boldsymbol{H_f(x_0, y_0) = 0}$ casi dubbi