(1)

$$f_x(x,y) = 2y\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_x(1,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = 2x\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y(1,0) = 2$$

(2)

$$f_x = e^{x-y^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^4}} \qquad \nabla f(1,0) = \left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$f_y = -2y e^{x-y^2} + \frac{2y^3}{\sqrt{1+x^2+y^4}}$$

piano tangente : $z = e + \sqrt{2} + \left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-1)$

$v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$D_v f(1,0) \underset{\uparrow}{=} \nabla f(1,0)\cdot v = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e - \frac{1}{2}$$

formula del gradiente ($f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ diff.)

(3) (i) $|f(x,y)| \le x^{1/3} \to 0$

$\Rightarrow f$ continua in $(0,0)$

(ii) Si valuta $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$ per $\theta \neq 0$

$$= \lim_{t\to 0} t^{-2/3}(\cos\theta)^{1/3} e^{-\frac{\cos^2\theta}{t^2\sin^4\theta}} = 0$$

per $\theta = 0$ (asse x)

$f(x,0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

Tutte le derivate dir. esistono e sono nulle

(iii) la formula del gradiente è verif. per (ii)

(iv) Si valuta

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\left(f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{1/3} e^{-\frac{h^2}{k^4}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

per $h = k^2$ $\quad f(k^2,k) = \dfrac{k^{2/3} e^{-1}}{\sqrt{k^2+k^4}} \sim \dfrac{k^{2/3} e^{-1}}{|k|} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} +\infty$

4) $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ min. locali, $(0,0)$ sella (usando il segno di $f(x,y) - f(0,0)$)

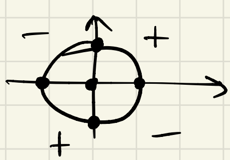
5) (i) $(1,0)$ min. locale

(ii) $(0,0)$ sella, $(-4,-2)$ max locale

(iii) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $C = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $D = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$(0,0)$

A, D max locali
B, C min locali



La funzione non è derivabile in $x^2+y^2=1$, quindi questo caso va analizzato a parte
Studiando il segno di f si trova che

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ sono punti di sella

I punti della circonf. del 1° e 3° quad. sono min locali
" " " " 2° e 4° quad. sono max locali

(infatti $f(0,0)=0$)

7) $f = x^2+y^2$ $\qquad$ $2x+3y=1$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = k \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

1 sol. per $k = \frac{1}{13}$

$\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)$ min. assoluto (i livelli si fanno più alti al crescere del raggio delle circonferenze)