

Misura e integrazione secondo Lebesgue

September 19, 2024

La trattazione segue le linee di [1].

1 Intervalli n -dimensionali e plurintervalli

Chiamo intervallo n -dimensionale o n -intervallo di estremi $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$I := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

L'insieme degli intervalli n -dimensionali si indica \mathcal{I} . Se $I \in \mathcal{I}$, chiamiamo *volume di I* il numero

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Osservazione 1.1. *Se I_1 e I_2 sono due intervalli n -dimensionali, allora $I_1 \cap I_2$ è un intervallo n -dimensionale. Gli insiemi $I_1 \setminus I_2$ e $I_1 \cup I_2$ possono essere scritti come unione finita di intervalli n -dimensionali a due a due disgiunti.*

Proposizione 1.1. *Ogni aperto di \mathbb{R}^n è unione numerabile di n -intervalli a due a due disgiunti.*

Proof. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto. Dimostriamo prima che A può essere scritto come unione numerabile di n -intervalli: considero la famiglia degli n -intervalli contenuti in A e ad estremi razionali:

$$\mathcal{V} := \left\{ I = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] : I \subseteq A, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

\mathcal{V} è un insieme numerabile perchè ogni suo elemento è individuato dalla $2n$ -upla $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Q}^{2n}$ che è un insieme numerabile. Inoltre,

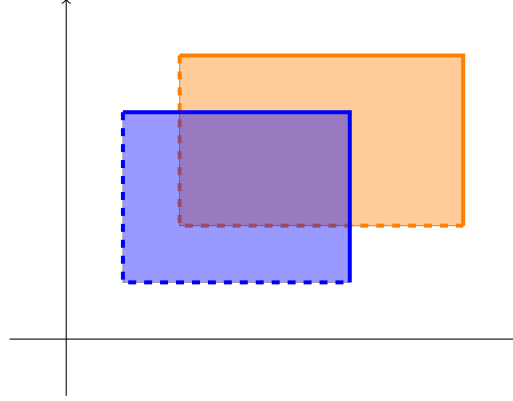


Figure 1: Unione, intersezione, differenza di n -intervalli

sicuramente, $\bigcup_{I \in \mathcal{V}} I \subseteq A$. Vogliamo dimostrare che vale anche l'inclusione opposta: sia $\mathbf{x} \in A$. A è aperto, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'insieme

$$\{\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

è contenuto in A .

Poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , per ogni $i = 1, \dots, n$ esistono $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ tali che

$$x_i - \varepsilon < \alpha_i < x_i < \beta_i < x_i + \varepsilon.$$

Dunque, l' n -intervallo $I := \prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i]$ contiene il punto \mathbf{x} e appartiene alla famiglia \mathcal{V} , quindi $\mathbf{x} \in \bigcup_{I \in \mathcal{V}} I$. Per l'arbitrarietà di \mathbf{x} abbiamo $A \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{V}} I$.

Mostriamo ora che gli n -intervalli possono essere scelti a due a due disgiunti. Sia $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, con I_k n -intervallo, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pongo

$J_k := I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j$. Allora i J_k sono disgiunti due a due, ciascun J_k è unione

finita di n -intervalli a due a due disgiunti e $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = A$. \square

2 Misura esterna

Indichiamo con $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n . $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è anche detto *insieme delle parti di \mathbb{R}^n* .

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (ovvero $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) definiamo *misura esterna di E*

$$\mathcal{L}^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) : I_k \in \mathcal{I}, \quad E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

Teorema 2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{L}^{n*}(E) \in [0, +\infty]$ è ben definita per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$;
2. $\mathcal{L}^{n*} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme monotona cioè

$$E \subseteq F \implies \mathcal{L}^{n*}(E) \leq \mathcal{L}^{n*}(F);$$

3. $\mathcal{L}^{n*} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione d'insieme σ -subadditiva cioè per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ si ha

$$\mathcal{L}^{n*} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j).$$

4. Se $I \in \mathcal{I}$, allora $\mathcal{L}^{n*}(I) = \text{vol}(I)$.
5. $\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf \{ \mathcal{L}^{n*}(A) : A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n, A \supseteq E \}$.

Proof. 1. e 2. sono ovvie.

3. Sia $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ la famiglia numerabile che consideriamo. Se esiste almeno un \bar{j} tale che $\mathcal{L}^{n*}(E_{\bar{j}}) = +\infty$, allora non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $\mathcal{L}^{n*}(E_j)$ sia finito per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Sia $\varepsilon > 0$: per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una famiglia numerabile $(I_k^{(j)})_{k=1}^{\infty}$ di n -intervalli tale che

$$E_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(j)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k^{(j)}) < \varepsilon 2^{-j} + \mathcal{L}^{n*}(E_j).$$

Sicuramente $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(j)}$ quindi

$$\mathcal{L}^{n*} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k^{(j)}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon 2^{-j} + \mathcal{L}^{n*}(E_j)) = \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j)$$

e dunque

$$\mathcal{L}^{n*} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo la tesi.

4. Sia $I \in \mathcal{I}$. Dalla definizione di misura esterna abbiamo $\mathcal{L}^{n*}(I) \leq \text{vol}(I)$. Vogliamo ora dimostrare la disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $(I_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{I}$ tale che

$$I \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k, \quad \sum_{k=1}^\infty \text{vol}(I_k) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(I).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che

$$\overline{I_k} \subset \text{int}(J_k), \quad \text{vol}(J_k) < \varepsilon 2^{-k} + \text{vol}(I_k).$$

Dunque $\overline{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \overline{I_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \text{int}(J_k)$, quindi dal ricoprimento aperto $(\text{int}(J_k))_{k=1}^\infty$ posso estrarre un ricoprimento finito:

$$\exists K \in \mathbb{N} : \overline{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^K \text{int}(J_k).$$

Si ha

$$\text{vol}(I) \leq \sum_{k=1}^K \text{vol}(J_k) < \sum_{k=1}^K (\varepsilon 2^{-k} + \text{vol}(I_k)) < \varepsilon + \sum_{k=1}^K \text{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(I).$$

5. Per la monotonia della misura esterna (punto 2.) abbiamo che per ogni $A \supseteq E$ si ha $\mathcal{L}^{n*}(A) \geq \mathcal{L}^{n*}(E)$ e dunque $\inf \{\mathcal{L}^{n*}(A) : A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n, A \supseteq E\} \geq \mathcal{L}^{n*}(E)$.

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$ e sia $(I_k)_{k=1}^\infty$ tale che $E \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k$, $\sum_{k=1}^\infty \text{vol}(I_k) < \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che $\text{int}(J_k) \supset I_k$, $\text{vol}(J_k) < \text{vol}(I_k) + \varepsilon 2^{-k}$. L'insieme $A := \bigcup_{k=1}^\infty \text{int}(J_k)$ è aperto perché unione di aperti

inoltre $A \supseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k \supseteq E$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}(A) &= \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^\infty \text{int}(J_k)\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^{n*}(\text{int}(J_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \text{vol}(J_k) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^\infty \text{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E). \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha dunque

$$\inf \{\mathcal{L}^{n*}(A) : A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n, A \supseteq E\} \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E).$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi. \square

Proposizione 2.2 (Test di Carathéodory). *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono tali che*

$$\text{dist}(E, F) := \inf \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F \} > 0$$

allora

$$\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) = \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F).$$

Proof. Sicuramente $\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) \leq \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F)$. Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza opposta. Sia $d := \text{dist}(E, F)$. È immediato vedere che

$$\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) : I_k \in \mathcal{I}, \quad E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \text{diam}(I_k) < \frac{d}{4} \right\},$$

$$\mathcal{L}^{n*}(F) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) : I_k \in \mathcal{I}, \quad F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \text{diam}(I_k) < \frac{d}{4} \right\}.$$

Dunque $E \cup F$ può essere ricoperto da n -intervalli $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ dove ciascun n -intervallo I_k interseca solo E o solo F . Da qui la tesi. \square

Proposizione 2.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{L}^{n*}(\emptyset) = 0$;
2. se E è un insieme finito o numerabile, allora $\mathcal{L}^{n*}(E) = 0$;
3. se I è un n -intervallo, allora $\mathcal{L}^{n*}(\partial I) = 0$.

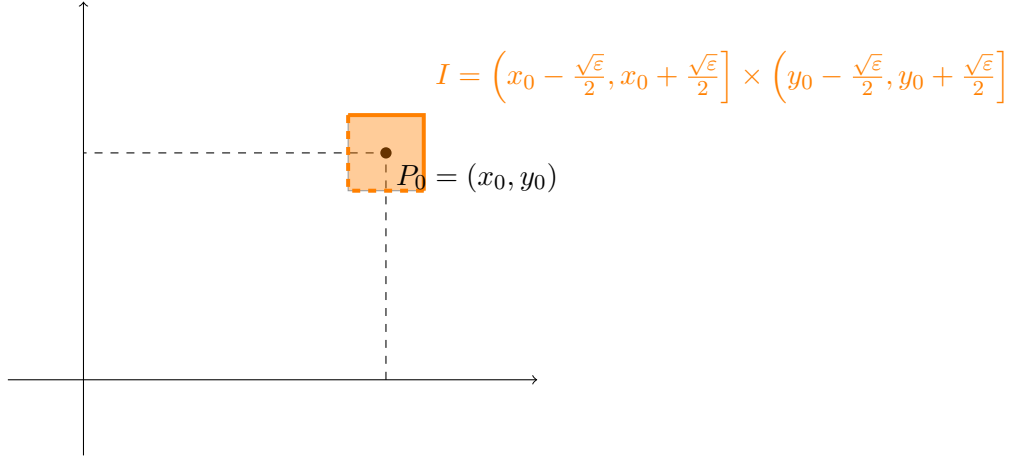


Figure 2: Ricoprimento di un singoletto nel piano

Proof. Sia $E = \emptyset$ o $E = \{\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)\}$. Per $\varepsilon > 0$ e per $k \geq 1$, sia $I_k = \prod_{i=1}^n \left(x_i^0 - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}}}{2}, x_i^0 + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}}}{2} \right]$. Abbiamo $\text{vol}(I_k) = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}} = \varepsilon 2^{-k}$ e dunque $\sum_{k \geq 1} \text{vol}(I_k) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon$.

Dunque l'insieme vuoto e i singoletti hanno misura esterna nulla. Per il Teorema 2.1 hanno misura esterna nulla anche gli insiemi discreti. \square

Proposizione 2.4. Sia $(I_k)_{k=1}^K$ una famiglia finita di n -intervalli a due a due disgiunti. Allora $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k)$.

Proof. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $k = 1, \dots, K$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che

$$\overline{J_k} \subset \text{int}(I_k), \quad \mathcal{L}^{n*}(I_k) = \text{vol}(I_k) < \text{vol}(J_k) + \varepsilon 2^{-k}.$$

Sicuramente la distanza tra J_k e J_s , $\text{dist}(J_k, J_s)$, $k \neq s$ è positiva quindi

$$\sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k) = \sum_{k=1}^K \text{vol}(I_k) < \varepsilon + \sum_{k=1}^K \text{vol}(J_k) = \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K J_k\right) < \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo dunque $\sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k) \leq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right)$. La disuguaglianza opposta è sempre vera e dunque vale l'uguaglianza. \square

3 Insiemi misurabili

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dico che E è *misurabile secondo Lebesgue* o \mathcal{L}^n -*misurabile* o, semplicemente, *misurabile* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \in \mathcal{I} \text{ tale che } E \subseteq P \text{ e } \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) < \varepsilon.$$

La famiglia degli insiemi di \mathbb{R}^n misurabili secondo Lebesgue si indica \mathcal{M}^n o \mathcal{M} .

Se $E \in \mathcal{M}$ la misura esterna di E , $\mathcal{L}^{n*}(E)$, si chiama *misura di E* e si indica col simbolo $\mathcal{L}^n(E)$.

Osservazione 3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{L}^{n*}(E) = 0$, allora E è misurabile. In particolare la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue \mathcal{M} contiene \emptyset , ogni insieme finito e ogni insieme numerabile.

Proposizione 3.1. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, allora A è misurabile.

Proof. Se A è aperto, per la Proposizione 1.1 A è unione numerabile di n -intervalli: $A = P := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{I}$ dunque $\mathcal{L}^{n*}(P \setminus A) = \mathcal{L}^{n*}(\emptyset) = 0$. \square

Proposizione 3.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è misurabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste A aperto tale che $A \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$.

Proof. Supponiamo esista A aperto tale che $A \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$. Poiché A può essere scritto come unione numerabile di n -intervalli, E è misurabile.

Viceversa: sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Sia $\varepsilon > 0$: sappiamo che $\exists P = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{I}$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) < \varepsilon$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che $\text{int}(J_k) \supset I_k$ e $\text{vol}(J_k) < \text{vol}(I_k) + \varepsilon 2^{-k}$. Pongo $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}(J_k)$. A è unione di aperti, quindi è aperto. Inoltre $A \supseteq P \supseteq E$ e

$$A \setminus E = (A \setminus P) \cup (P \setminus E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{int}(J_k) \setminus I_k) \cup (P \setminus E)$$

quindi

$$\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(\text{int}(J_k) \setminus I_k) + \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k} + \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) \leq 2\varepsilon.$$

□

Proposizione 3.3. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, allora F è misurabile.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$. Per il Teorema 2.1 esiste A aperto tale che $A \supset F$ e $\mathcal{L}^{n*}(A) \leq \mathcal{L}^{n*}(F) + \varepsilon$. L'insieme $A \setminus F$ è aperto, quindi esiste una famiglia numerabile di n -intervalli $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ a due a due disgiunti tale che $A \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Si ha dunque $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus F) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k)$. Basta perciò

dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) < \varepsilon$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia J_k un n -intervallo tale che $\overline{J_k} \subset I_k$ e $\text{vol}(J_k) > \text{vol}(I_k) - \varepsilon 2^{-k}$. Sia $N \in \mathbb{N}$. Si ha

$$A = F \bigcup (A \setminus F) \supseteq F \bigcup \bigcup_{k=1}^N I_k \supseteq F \bigcup \bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}.$$

F è compatto, gli insiemi $\overline{J_k}$ sono compatti, quindi $\bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}$ è compatto e

contenuto in $A \setminus F$. Di conseguenza $\text{dist}\left(F, \bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}\right)$ è positiva e dunque per il Test di Carathéodory, Proposizione 2.2,

$$\mathcal{L}^{n*}\left(F \cup \bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}\right) = \mathcal{L}^{n*}(F) + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}\right).$$

Si ha quindi

$$\mathcal{L}^{n*}(A) \geq \mathcal{L}^{n*}\left(F \cup \bigcup_{k=1}^N \overline{J_k}\right) \geq \mathcal{L}^{n*}(F) + \sum_{k=1}^N \text{vol}(J_k) \geq \mathcal{L}^{n*}(F) + \sum_{k=1}^N \text{vol}(I_k) - \varepsilon.$$

Otteniamo dunque

$$\sum_{k=1}^N \text{vol}(I_k) \leq \mathcal{L}^{n*}(A) - \mathcal{L}^{n*}(F) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Passando a limite per $N \rightarrow \infty$ abbiamo $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon$ da cui la tesi. \square

Lemma 3.4. *Se $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $(E_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste A_k aperto di \mathbb{R}^n tale che $A_k \supseteq E_k$ e $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k) < \varepsilon 2^{-k}$. L'insieme $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è aperto e

$$A \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Inoltre $A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus E_k)$ e

$$\mathcal{L}^{n*}\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon.$$

\square

Corollario 3.5. *Ogni chiuso di \mathbb{R}^n è misurabile.*

Proof. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ chiuso. Per $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k := F \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq k\}$. Ciascun insieme F_k è compatto dunque, per la Proposizione 3.3 è misurabile.

Poiché $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, per il Lemma 3.4, anche F è misurabile. \square

Definizione 3.1. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia \mathcal{E} una famiglia di sottoinsiemi di Ω . Dico che \mathcal{E} è una σ -algebra di Ω se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{E}$
2. se $(E_k)_{k \geq 1}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di Ω tale che $E_k \in \mathcal{E}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k \geq 1} E_k \in \mathcal{E}$
3. se $E \in \mathcal{E}$, allora $E^c := \Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

Teorema 3.6. *La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue \mathcal{M} è una σ -algebra di \mathbb{R}^n cioè*

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$;
2. se $(E_k)_{k=1}^\infty$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{M}$.
3. se $E \in \mathcal{M}$, allora $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{M}$;

Proof. Abbiamo già dimostrato i punti 1. e 2.. Proviamo il punto 3. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile. Per $k \in \mathbb{N}$ esiste A_k aperto tale che $A_k \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) \leq 2^{-k}$. Si ha

$$E^c = \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k^c \right) \cup \left(E^c \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k^c \right).$$

Ogni insieme A_k^c è chiuso e dunque misurabile, quindi anche $\bigcup_{k=1}^\infty A_k^c$ è mis-

urabile. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $E^c \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k^c \subseteq E^c \setminus A_j^c = A_j \setminus E$ dunque

$$\mathcal{L}^{n*} \left(E^c \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k^c \right) < 2^{-j}.$$

Per l'arbitrarietà di $j \in \mathbb{N}$ si ha dunque $\mathcal{L}^{n*} \left(E^c \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k^c \right) = 0$ e quindi

$E^c \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k^c$ è misurabile. E^c è dunque misurabile perché unione di due insiemi misurabili. \square

Corollario 3.7. *Se $(E_k)_{k=1}^\infty$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora anche l'insieme $\bigcap_{k=1}^\infty E_k$ è misurabile.*

Proof. Poiché $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^\infty E_k = \bigcup_{k=1}^\infty (\mathbb{R}^n \setminus E_k)$, per il Teorema 3.6 otteniamo la tesi. \square

Corollario 3.8. *$E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste F insieme chiuso tale che $F \subseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Proof. Supponiamo che E sia misurabile. Per il punto 3. del Teorema 3.6 anche l'insieme E^c è misurabile, quindi esiste A aperto tale che $A \supseteq E^c$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) < \varepsilon$. Considero $F := A^c$. F è chiuso e $F = A^c \subseteq (E^c)^c = E$.

Inoltre $E \setminus F = A \setminus E^c$ quindi $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) = \mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) < \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ esista F insieme chiuso tale che $F \subseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$. Sia $A := F^c$. A è aperto, $A = F^c \supseteq E^c$ e $A \setminus E^c = E \setminus F$ quindi $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) = \mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$ dunque E^c è misurabile. Per il punto 3. del Teorema 3.6 anche E è misurabile. \square

Teorema 3.9 (σ -additività della misura di Lebesgue). *Sia $(E_k)_{k=1}^\infty$ una famiglia di insiemi misurabili disgiunti due a due: $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $j \neq k$.*

Allora $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^n(E_k)$.

Proof. Banalmente abbiamo

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^{n*}(E_k) = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^n(E_k).$$

Dobbiamo dunque provare la disuguaglianza opposta. Supponiamo preliminarmente che gli insiemi E_k siano limitati. Sia $\varepsilon > 0$ e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k \subseteq E_k$ chiuso tale che $\mathcal{L}^{n*}(E_k \setminus F_k) < \varepsilon 2^{-k}$. Di conseguenza

$$\mathcal{L}^{n*}(E_k) = \mathcal{L}^{n*}(F_k \cup (E_k \setminus F_k)) \leq \mathcal{L}^{n*}(F_k) + \varepsilon 2^{-k}.$$

Inoltre gli insiemi F_k sono compatti e disgiunti due a due, quindi hanno distanza positiva. Di conseguenza, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^N F_k\right) = \sum_{k=1}^N \mathcal{L}^{n*}(F_k)$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) &\geq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^\infty F_k\right) \geq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^N F_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \mathcal{L}^{n*}(F_k) \geq \sum_{k=1}^N \left(\mathcal{L}^{n*}(E_k) - \varepsilon 2^{-k}\right) \geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^N \mathcal{L}^{n*}(E_k). \end{aligned}$$

Passando a limite per $N \rightarrow \infty$ otteniamo dunque

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) \geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^{n*}(E_k) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi.

Supponiamo ora che gli insiemi E_k non siano necessariamente limitati. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia B_j la palla centrata nell'origine e raggio j : $B_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < j\}$ e sia $E_{k,j} := E_k \cap (B_j \setminus B_{j-1})$. Allora gli insiemi $E_{k,j}$

sono misurabili, disgiunti due a due e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,j} = E_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k,j \in \mathbb{N}} E_{k,j}\right) = \sum_{k,j \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{n*}(E_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_{k,j}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k). \end{aligned}$$

□

Possiamo riassumere quanto fino ad ora detto nel seguente:

Teorema 3.10. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. E è misurabile;
2. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste A aperto, $A \supseteq E$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$;
3. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste F chiuso, $F \subseteq E$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$;
4. esistono una successione monotona decrescente di aperti $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ contenenti E ed un insieme N di misura nulla, $\mathcal{L}^n(N) = 0$, tali che $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \setminus N$;
5. esistono una successione monotona crescente di chiusi $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ contenuti in E ed un insieme N di misura nulla, $\mathcal{L}^n(N) = 0$, tali che $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$.

Proof. Dimostriamo solo che 2. \implies 4.

Per ogni $k \geq 1$ $\exists A_k \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $E \subseteq A_k$, $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$.

Pongo $B_1 := A_1$ e, per ricorrenza, $B_k := A_k \cap B_{k-1}$ per $k \geq 2$. Gli insiemi B_k sono aperti e $B_k \subseteq B_{k-1}$. Inoltre $E \subseteq B_k \subseteq A_k$ e $\mathcal{L}^{n*}(B_k \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$. Considero $(\bigcap_{k \geq 1} B_k) \setminus E$: per ogni $j \geq 1$ abbiamo che $(\bigcap_{k \geq 1} B_k) \setminus E \subset B_j \setminus E$ dunque

$$\mathcal{L}^{n*}((\bigcap_{k \geq 1} B_k) \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(B_j \setminus E) < 2^{-j}. \quad (1)$$

Quindi può solo essere $\mathcal{L}^{n*}((\bigcap_{k \geq 1} B_k) \setminus E) = 0$. Basta prendere $N := (\bigcap_{k \geq 1} B_k) \setminus E$ ed N , insieme alla famiglia $(B_k)_{k \geq 1}$ soddisfa la tesi. □

Teorema 3.11 (Continuità della misura). *Valgono le seguenti proprietà:*

1. Sia $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona crescente di insiemi misurabili. Allora l'insieme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(E_k)$;
2. Sia $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona decrescente di insiemi misurabili e di misura finita. Allora l'insieme $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e $\mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(E_k)$.

Proof. Dimostriamo la prima parte: definiamo $F_1 := E_1$ e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $F_k := E_k \setminus E_{k-1}$. Allora

$$E_k \cap E_j = \emptyset \quad k \neq j, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(F_k) = \\ &= \mathcal{L}^{n*}(E_1) + \sum_{k=2}^{\infty} (\mathcal{L}^{n*}(E_k) - \mathcal{L}^{n*}(E_{k-1})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora la seconda parte. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k := E_1 \setminus E_k$. Allora

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus F_k) = E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Inoltre gli F_k sono una successione monotona crescente di insiemi misurabili a cui posso applicare la proprietà precedente. Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mathcal{L}^n\left(E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \\ &= \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(F_k) = \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n(E_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(E_k). \end{aligned}$$

□

4 Alcuni insiemi interessanti

4.1 L'insieme di Cantor

Sia $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$. Considero $K_0 := [0, 1]$. Da K_0 tolgo l'intervallo centrale aperto di ampiezza α : $A_0 := \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$, $\mathcal{L}^1(A_0) = \alpha$. Pongo $K_1 := K_0 \setminus A_0$. K_1 è dato dall'unione di 2 intervalli compatti a due a due disgiunti.

Da ciascuno dei due intervalli che costituiscono K_1 tolgo l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\frac{\alpha}{3}$. Dunque da K_1 tolgo un insieme aperto A_1 di misura $\mathcal{L}^1(A_1) = 2\frac{\alpha}{3}$. Pongo $K_2 := K_1 \setminus A_1$:

K_2 è costituito da $4 = 2^2$ intervalli compatti a due a due disgiunti. Da ciascuno di questi intervalli tolgo l'intervallo centrale aperto di lunghezza $\frac{\alpha}{3^2}$, dunque tolgo un aperto A_2 di misura $\mathcal{L}^1(A_2) = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Proseguo in questo modo: dal compatto K_n tolgo 2^n intervalli aperti ciascuno di lunghezza $\frac{\alpha}{3^n}$, dunque tolgo un aperto A_n con $\mathcal{L}^1(A_n) = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e pongo $K_{n+1} := K_n \setminus A_n$.

Considero $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. A è aperto e

$$\mathcal{L}^1(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\alpha.$$

Sia $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = [0, 1] \setminus A$. Si ha

1. K è compatto;
2. $\mathcal{L}^1(K) = 1 - 3\alpha$ e dunque $\mathcal{L}^1(K) > 0$ se $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
3. se $\alpha = \frac{1}{3}$, allora $\mathcal{L}^1(K) = 0$. Dunque K non contiene nessun intervallo (altrimenti avrebbe misura positiva) ma K ha comunque la potenza del continuo perché può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 1]$. K è noto come *insieme di Cantor*.

4.2 Un insieme non misurabile: l'insieme di Vitali

Introduciamo una relazione di equivalenza nell'intervallo $[0, 1]$. Due punti $x, y \in [0, 1]$ si dicono *equivalenti* se $x - y \in \mathbb{Q}$.

Considero un insieme E in cui compare uno ed un solo rappresentante di ciascuna classe di equivalenza:

$$\begin{aligned} E &\subseteq [0, 1], \\ x, y \in E, x \neq y &\implies x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \forall x \in [0, 1] \exists! y \in E &: x - y \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che E non è misurabile.

Per $r \in \mathbb{Q}$ definisco il *traslato* di E

$$E^r := \{x + r : x \in E\}.$$

Se E fosse misurabile, allora anche E^r lo sarebbe e $\mathcal{L}^1(E^r) = \mathcal{L}^1(E) \forall r \in \mathbb{Q}$.

Osserviamo che i traslati E^r sono a due a due disgiunti. Per assurdo: siano $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$ e sia $y \in E^r \cap E^s$. Allora esistono $x_1, x_2 \in E$ tali che $y = x_1 + r = x_2 + s$. Dunque $x_1 - x_2 = s - r \in \mathbb{Q}$. Dunque $x_1 = x_2$ e $r = s$, mentre avevamo supposto $r \neq s$.

Per costruzione sappiamo che per ogni $y \in [0, 1]$ esiste uno ed un solo $x \in E$ tale che $y - x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Dunque abbiamo

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} E^r \subseteq [-1, 2].$$

Di conseguenza, se E fosse misurabile avrei

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}^1([0, 1]) &\leq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} E^r\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}^1(E^r) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}^1(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{L}^1(E) = 0, \\ +\infty & \text{se } \mathcal{L}^1(E) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque dovrà essere $\mathcal{L}^1(E) > 0$. D'altra parte abbiamo anche

$$\begin{aligned} 3 = \mathcal{L}^1([-1, 2]) &\geq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} E^r\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}^1(E^r) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}^1(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{L}^1(E) = 0, \\ +\infty & \text{se } \mathcal{L}^1(E) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi deve essere $\mathcal{L}^1(E) = 0$, una contraddizione.

5 Funzioni misurabili

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dico che f è una *funzione misurabile secondo Lebesgue* o che f è una *funzione \mathcal{L}^n -misurabile* se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$E_{f,t} := \{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \leq t\}$$

è misurabile.

Proposizione 5.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. f è una funzione \mathcal{L}^n -misurabile;
2. l'insieme $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
3. l'insieme $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \geq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;

4. l'insieme $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;
5. per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, la retroimmagine $f^{-1}(A)$ è misurabile;
6. per ogni $F \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, la retroimmagine $f^{-1}(F)$ è misurabile.

Inoltre se una qualsiasi delle prime quattro proprietà vale per ogni t in un sottoinsieme D denso in \mathbb{R} , allora vale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Proof. 1. \implies 2.

Basta osservare che $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\} = E \setminus E_{f,t}$.

2. \implies 3.

Basta osservare che $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \geq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t - \frac{1}{k} \right\}$.

3. \implies 4.

Basta osservare che $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < t\} = E \setminus \{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \geq t\}$.

4. \implies 1.

Basta osservare che $E_{f,t} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < t + \frac{1}{k} \right\}$.

Questo prova l'equivalenza delle prime quattro proprietà.

Ovviamente 5. \implies 2.. Per provare la 5. a partire dalle prime quattro proprietà osserviamo che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ è misurabile anche l'insieme $\{\mathbf{x} \in E: a < f(\mathbf{x}) \leq b\}$. Poiché ogni aperto A di \mathbb{R} può essere scritto nella forma $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$, abbiamo $f^{-1}(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k])$ che dunque è misurabile perché unione numerabile di misurabili.

Ovviamente 6. \implies 1.. Per provare 6. dalle altre proprietà, osserviamo che se F è chiuso, allora $A := \mathbb{R} \setminus F$ è aperto, dunque $f^{-1}(F) = E \setminus f^{-1}(A)$ è misurabile perché differenza di due misurabili.

Infine, sia $\bar{t} \in \mathbb{R} \setminus D$. Allora possiamo costruire una successione $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ monotona decrescente, contenuta in D e convergente a \bar{t} . Si avrà dunque $E_{f,\bar{t}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{f,t_k}$, dunque $E_{f,\bar{t}}$ è misurabile. \square

Lemma 5.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e siano $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Allora l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})\}$$

è misurabile.

Proof. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ considero gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < q\}, \quad \{\mathbf{x} \in E: q < g(\mathbf{x})\}.$$

Questi insiemi sono entrambi misurabili perché f e g sono funzioni misurabili. Inoltre

$$\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) < q\} \cap \{\mathbf{x} \in E: q < g(\mathbf{x})\} \right)$$

dunque è misurabile. □

Proposizione 5.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Le funzioni costanti sono misurabili,*
2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica*

$$\mathbf{1}_E: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

è una funzione misurabile.

3. *Se f e g sono misurabili in E , allora*

(a) le funzioni $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sono misurabili. In particolare sono misurabili le funzioni

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\}, \quad |f| := \max\{f, -f\}.$$

- (b) se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora le funzioni $f + \alpha$ e $\alpha f + \beta g$ sono misurabili,*
- (c) le funzioni $\frac{1}{f}$, f^2 e fg sono misurabili,*
- (d) se $F \subset E$ è misurabile, allora $f|_F$ è misurabile,*
- (e) se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora la composizione $\varphi \circ f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile,*

4. *Se $(f_k)_{k=1}^\infty$ è una successione di funzioni misurabili, allora le funzioni*

$$M(\mathbf{x}) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x}), \quad m(\mathbf{x}) := \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mathbf{x})$$

sono misurabili,

5. *Se $(f_k)_{k=1}^\infty$ è una successione di funzioni misurabili e se per ogni $\mathbf{x} \in E$ esiste $f(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$, allora f è una funzione misurabile,*

Proof. I punti 1. e 2. sono banali.

3a) Sia $h := \max\{f, g\}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $E_{h,t} = E_{f,t} \cap E_{g,t}$ e dunque h è misurabile. Analogamente, sia $k := \min\{f, g\}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $E_{k,t} = E_{f,t} \cup E_{g,t}$ e dunque k è misurabile.

3b) $E_{f+\alpha,t} = E_{f,t-\alpha}$ e dunque è misurabile.

Dimostriamo che αf è misurabile. Se $\alpha = 0$, αf è una funzione costante e dunque è misurabile. Se $\alpha \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} \in E: \alpha f(\mathbf{x}) \leq t\} &= \left\{ \mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \leq \frac{t}{\alpha} \right\} & \text{se } \alpha > 0, \\ \{\mathbf{x} \in E: \alpha f(\mathbf{x}) \leq t\} &= \left\{ \mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \geq \frac{t}{\alpha} \right\} & \text{se } \alpha < 0, \end{aligned}$$

dunque è misurabile.

Se f e g sono misurabili, allora $E_{f+g,t} = \{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \leq t - g(\mathbf{x})\}$.

Ma la funzione $\mathbf{x} \mapsto t - g(\mathbf{x})$ è misurabile per quanto visto prima, quindi per il Lemma 5.2 l'insieme $E_{f+g,t}$ è misurabile.

3c) $E_{f^2,t} = \begin{cases} \emptyset & t < 0, \\ \{\mathbf{x} \in E: -\sqrt{t} \leq f(\mathbf{x}) \leq \sqrt{t}\} & t \geq 0 \end{cases}$ e dunque è misurabile.

Le funzioni f e g sono misurabili, quindi sono misurabili le funzioni $(f+g)^2$, f^2 e g^2 . Dunque la funzione fg è misurabile perché $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.

3d) $E_{f|_F,t} = F \cap E_{f,t}$ dunque è misurabile.

3e) $E_{\varphi \circ f,t} = \{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) \in \varphi^{-1}((-\infty, t])\}$ misurabile perché $\varphi^{-1}((-\infty, t])$ è un chiuso di \mathbb{R} .

4. Basta osservare che

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} \in E: M(\mathbf{x}) > t\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in E: f_k(\mathbf{x}) > t\}, \\ \{\mathbf{x} \in E: m(\mathbf{x}) < t\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\mathbf{x} \in E: f_k(\mathbf{x}) < t\}. \end{aligned}$$

5. Anche in questo caso è sufficiente osservare che

$$\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{k=\ell}^{\infty} \left\{ \mathbf{x} \in E: f_k(\mathbf{x}) > t + \frac{1}{n} \right\},$$

□

5.1 Approssimazione mediante funzioni semplici

Una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *semplice* se è misurabile e assume solo un numero finito di valori. Ogni funzione semplice ammette una rappresentazione canonica in termine dei suoi insiemi di livello: siano a_1, a_2, \dots, a_N i valori assunti da φ . Per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ sia E_i il corrispondente insieme di livello:

$$E_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \varphi(\mathbf{x}) = a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Possiamo allora scrivere

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x}).$$

Osserviamo che gli insiemi $\{E_i\}_{i=1}^N$ sono una partizione di \mathbb{R}^n : $\bigcup_{i=1}^N E_i = \mathbb{R}^n$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Lemma 5.4 (Lemma di campionamento). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa. Allora f è misurabile se e solo se esiste $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ successione di funzioni semplici non negative tale che*

1. la successione è monotona crescente:

$$0 \leq \varphi_k(\mathbf{x}) \leq \varphi_{k+1}(\mathbf{x}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathbf{x} \in E;$$

2. $\varphi_k(\mathbf{x})$ converge a $f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Proof. Se esiste la successione approssimante $\{\varphi_k\}$ allora f è misurabile per la Proposizione 5.3.

Supponiamo che f sia misurabile. Estendendo $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$, possiamo sempre supporre che f sia definita su tutto \mathbb{R}^n .

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $h = 0, 1, \dots, 4^k - 1$ considero gli insiemi

$$E_k := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 2^k \right\},$$

$$E_{k,h} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{h}{2^k} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{h+1}{2^k} \right\}$$

che sono misurabili perché f è misurabile. Definisco

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2^k & \text{se } \mathbf{x} \in E_k, \\ \frac{h}{2^k} & \text{se } \mathbf{x} \in E_{k,h} \end{cases}$$

cioè

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^{4^k-1} \frac{h}{2^k} \mathbf{1}_{E_{k,h}}(\mathbf{x}) + 2^k \mathbf{1}_{E_k}(\mathbf{x}).$$

Sicuramente ogni funzione φ_k è una funzione semplice nonnegativa.

Per ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione $\varphi_k(\mathbf{x})$ è monotona crescente:

se $\varphi_k(\mathbf{x}) = 2^{k+1}$, allora $f(\mathbf{x}) > 2^{k+1} > 2^k$, dunque $\varphi_k(\mathbf{x}) = 2^k < \varphi_{k+1}(\mathbf{x})$;

se $\varphi_{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{h}{2^{k+1}}$, allora $\frac{\frac{h}{2}}{2^k} = \frac{h}{2^{k+1}} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{h+1}{2^{k+1}} = \frac{\frac{h+1}{2}}{2^k}$.

Se h è pari, allora $\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\frac{h}{2}}{2^k} = \varphi_{k+1}(\mathbf{x})$;

se h è dispari, allora $\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\frac{h-1}{2}}{2^k} < \varphi_{k+1}(\mathbf{x})$.

Proviamo che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la successione $\varphi_k(\mathbf{x})$ converge a $f(\mathbf{x})$:

se $f(\mathbf{x}) = +\infty$, allora $\varphi_k(\mathbf{x}) = 2^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) =$

$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = +\infty = f(\mathbf{x})$.

se $f(\mathbf{x}) < +\infty$, allora $\exists \bar{k}$ tale che, $\forall k \geq \bar{k}$ si ha $f(\mathbf{x}) < 2^{\bar{k}} < 2^k$. Dunque, per ogni $k \geq \bar{k}$ $\exists h \in \{0, 1, \dots, 4^k - 1\}$ tale che

$$\frac{h}{2^k} < f(\mathbf{x}) \leq \frac{h+1}{2^k}$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{h}{2^k}$$

da cui

$$0 < f(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

□

6 Integrale di Lebesgue

Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funzione semplice nonnegativa:

$$a_i \geq 0, \quad a_i \neq a_j, \quad E_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \varphi(\mathbf{x}) = a_i\} \in \mathcal{M}^n, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x}),$$

Se esiste \bar{i} tale che $a_{\bar{i}} = 0$ pongo $a_{\bar{i}} \mathcal{L}^n(E_{\bar{i}}) = 0$. Con questa convenzione definiamo *integrale di* φ la somma finita

$$I(\varphi) := \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(E_i).$$

Proprietà 6.1. *Se α, β sono numeri reali non negativi e φ, ψ sono funzioni semplici nonnegative, allora*

$$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi).$$

Proof.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x}), \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M b_j \mathbb{1}_{F_j}(\mathbf{x}).$$

Pongo $G_{ij} := E_i \cap F_j$. Sono insiemi a due a due disgiunti. Inoltre

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha a_i + \beta b_j) \mathbb{1}_{G_{ij}}(\mathbf{x})$$

dunque

$$\begin{aligned} I(\alpha\varphi + \beta\psi) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha a_i + \beta b_j) \mathcal{L}^n(G_{ij}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^n(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^M b_j \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(G_{ij}) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(E_i) + \beta \sum_{j=1}^M b_j \mathcal{L}^n(F_j) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi). \end{aligned}$$

□

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. Definisco *integrale* di f e indico col simbolo $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ la quantità

$$\sup \{I(\varphi): \varphi \text{ funzione semplice tale che } 0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2)$$

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile considero

$$f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}), 0\}.$$

Abbiamo già dimostrato che f^+ e f^- sono funzioni misurabili (Proposizione 5.3). Inoltre è facile vedere che

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Se almeno uno degli integrali $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ è finito, dico che la funzione f è *integrabile secondo Lebesgue* e pongo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Se entrambi gli integrali sono finiti dico che f è *sommabile secondo Lebesgue*.

Osservazione 6.1. f è *sommabile* se e solo se $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$ è finito.

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dico che f è *integrabile (sommabile) in E* se la funzione $\tilde{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$ è integrabile (sommabile). In tal caso si pone

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Proposizione 6.1. Valgono le seguenti proprietà:

1. se φ è una funzione semplice nonnegativa, allora $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = I(\varphi)$;
2. se f è integrabile su E sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e $F \subset E$ è misurabile, allora

$$\int_F f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) \mathbf{1}_F(\mathbf{x})d\mathbf{x};$$

3. se $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora ogni funzione f è sommabile in E e $\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$;
4. la famiglia delle funzioni sommabili in un insieme misurabile E è uno spazio vettoriale;

5. se f misurabile nonnegativa in E allora

$$\int_E \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

6. se f e g sono funzioni misurabili nonnegative in E e $f \leq g$ in E , allora

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x};$$

Proof. 1. Per definizione

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbf{x} = \sup \{I(\psi) : \psi \text{ semplice}, 0 \leq \psi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (3)$$

Sicuramente $\varphi \leq \varphi$ quindi $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbf{x} \geq I(\varphi)$.

Dimostriamo che vale anche la disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore esiste ψ funzione semplice tale che

$$0 \leq \psi \leq \varphi, \quad I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbf{x} - \varepsilon.$$

Poiché φ è semplice, sicuramente $I(\varphi) \geq I(\psi)$ dunque

$$I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbf{x} - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di ε ottengo $I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbf{x}$.

2. Per definizione

$$\begin{aligned} \int_F f(x) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\mathbf{x}, & \tilde{f}(x) &:= \begin{cases} f(x) & \mathbf{x} \in F, \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F \end{cases} \\ \int_E f(x) \mathbb{1}_F(x) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) d\mathbf{x}, & \tilde{g}(x) &:= \begin{cases} f(x) \mathbb{1}_F(x) & \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i due integrali coincidono.

3. Supponiamo $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile nonnegativa e sia

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

Sia φ una funzione semplice tale che $0 \leq \varphi(x) \leq \tilde{f}(x) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x})$ dove $a_1 = 0$ e $E_1 \supseteq \mathbb{R}^n \setminus E$. Si ha dunque

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{L}^n(E_i) = \sum_{i=2}^k a_i \mathcal{L}^n(E_i).$$

Ma, per ogni $i = 2, \dots, k$ si ha $E_i \subseteq E$ dunque $\mathcal{L}^n(E_i) = 0$ e quindi $I(\varphi) = 0$ per ogni funzione semplice nonnegativa tale che $0 \leq \varphi \leq \tilde{f}$. Di conseguenza $\int_E f(x) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\mathbf{x} = 0$.

Per f di segno variabile la tesi segue banalmente considerando f^+ e f^- .

4. Abbiamo già visto (Proposizione 5.3) che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni coppia di funzioni misurabili in E , f e g , la funzione $\alpha f + \beta g$ è ancora misurabile in E . Inoltre

$$|\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})| \leq |\alpha| |f(\mathbf{x})| + |\beta| |g(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Dunque se f e g sono sommabili in E , allora anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è sommabile in E .

5. Senza perdere in generalità possiamo supporre che sia $E = \mathbb{R}^n$.

Se $\alpha = 0$ non c'è niente da dimostrare.

Supponiamo $\alpha > 0$. Sia φ funzione semplice, $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\alpha\varphi$ è ancora semplice e $0 \leq \alpha\varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq I(\alpha\varphi) = \alpha I(\varphi).$$

Per l'arbitrarietà di φ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Viceversa: sia ψ funzione semplice, $0 \leq \psi(\mathbf{x}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\frac{1}{\alpha}\psi$ è ancora semplice e $0 \leq \frac{1}{\alpha}\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \alpha I\left(\frac{1}{\alpha}\psi\right) = \alpha \frac{1}{\alpha} I(\psi) = I(\psi).$$

Per l'arbitrarietà di φ abbiamo

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Per la doppia disuguaglianza otteniamo la tesi.

Se $\alpha < 0$, allora $(\alpha f)^+(\mathbf{x}) \equiv 0$, $(\alpha f)^-(\mathbf{x}) = (-\alpha)f(\mathbf{x})$. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^n} (-\alpha)f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -(-\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

6. Senza perdere in generalità posso supporre che sia $E = \mathbb{R}^n$. Sia φ funzione semplice tale che $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora abbiamo anche $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$I(\varphi) \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Per l'arbitrarietà di φ otteniamo la tesi. □

Lemma 6.2 (Lemma di Beppo-Levi). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $(f_k)_{k=1}^\infty$ una successione monotona crescente di funzioni misurabili nonnegative in E . Sia $f(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) = \sup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$. Allora f è misurabile in E e*

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proof. Abbiamo già dimostrato che l'estremo superiore di funzioni misurabili è una funzione misurabile.

Poiché $f_k(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$ e ogni $k \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui, passando a limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza opposta: se $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = +\infty$, non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ sia finito e sia φ una funzione semplice nonnegativa tale che $\varphi \leq f$ e sia $\beta \in (0, 1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ considero l'insieme

$$A_k := \{\mathbf{x} \in E : f_k(\mathbf{x}) \geq \beta \varphi(\mathbf{x})\}.$$

$(A_k)_{k=1}^\infty$ è una successione monotona crescente di insiemi misurabili. Inoltre $\bigcup_{k=1}^\infty A_k = E$, quindi abbiamo

$$\beta \int_{A_k} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{A_k} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{A_k} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x})$ la rappresentazione canonica di φ . Si ha

$$\int_{A_k} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(A_k \cap E_i).$$

Dunque

$$\beta \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(A_k \cap E_i) \leq \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ la successione $(A_k \cap E_i)_{k=1}^\infty$ è una successione monotona crescente di insiemi misurabili la cui unione è E_i , passando a limite per $k \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\beta \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(E_i) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

cioè

$$\beta \int_E \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \beta \in (0, 1).$$

Passando a limite per $\beta \rightarrow 1^-$ otteniamo

$$\int_E \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Per l'arbitrarietà della funzione semplice φ otteniamo la tesi. \square

Proposizione 6.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. Se f e g sono sommabili in E sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è ancora sommabile in E e

$$\int_E (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \alpha \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \beta \int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

2. se f è integrabile in E insieme misurabile di \mathbb{R}^n , allora

$$\left| \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_E |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x};$$

3. se E ed F sono sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n e $f: E \cup F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione integrabile, allora

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_F f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{E \cup F} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{E \cap F} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proof. 1. Senza perdere in generalità possiamo ancora supporre che sia $E = \mathbb{R}^n$.

Abbiamo già dimostrato (Proposizione 6.1) che se f e g sono sommabili, allora anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è sommabile. Dobbiamo provare la formula (4). La dimostrazione si svolge in più passi.

a. Abbiamo già dimostrato (Proposizione 6.1) che se f è una funzione misurabile nonnegativa, allora

$$\int_E \alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \alpha \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

b. Dimostriamo ora che se f e g sono funzioni misurabili nonnegative in E , allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Siano $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ e $(\psi_k)_{k=1}^\infty$ le successioni di funzioni semplici approssimanti f e g rispettivamente, come dal Lemma 5.4. Allora $(\varphi_k + \psi_k)_{k=1}^\infty$ è una successione monotona crescente di funzioni semplici che approssima puntualmente la funzione $f + g$. Dunque, applicando il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} &= \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k + \psi_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (I(\varphi_k) + I(\psi_k)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

c. Supponiamo che f sia nonnegativa e che g sia nonpositiva. Dimostro che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Sia $h := f + g$. Allora $h^+ = f$, $h^- = -g$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f + g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^n} h^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} h^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} -g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

d. È sufficiente osservare che $(f \mathbb{1}_E + f \mathbb{1}_F)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{E \cup F}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E \cup F$.

e. Siano ora f e g sommabili in \mathbb{R}^n di segno variabile. Scompongo E nei seguenti quattro insiemi, che risultano disgiunti due a due:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq 0, g(\mathbf{x}) \geq 0\} \\ E_2 &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq 0 \leq g(\mathbf{x})\} \\ E_3 &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < -g(\mathbf{x}) \leq 0 \leq g(\mathbf{x})\} \\ E_4 &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq 0, g(\mathbf{x}) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Applicando i passi c. ed a. in ciascuno dei quattro insiemi ed il punto e. per

la partizione $E = \bigcup_{i=1}^4 E_i$, si ottiene la tesi.

2. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\
\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\geq - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq - \int_{\mathbb{R}^n} |f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

3. È sufficiente osservare che per ogni $\mathbf{x} \in E \cup F$ si ha

$$(f \mathbf{1}_E + f \mathbf{1}_F)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{E \cup F}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{E \cap F}(\mathbf{x}).$$

□

Lemma 6.4. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile e sia $L > 0$. Allora gli insiemi $E \times (0, L)$, $E \times (0, L]$, $E \times [0, L)$ e $E \times [0, L]$ sono \mathcal{L}^{n+1} -misurabili e la loro misura di Lebesgue in \mathbb{R}^{n+1} vale $L \cdot \mathcal{L}^n(E)$.

Proof. La dimostrazione si svolge in più passi: 1) Osserviamo che se la tesi è vera per uno dei quattro insiemi in esame, allora è vera anche per gli altri tre infatti

$$E \times [0, L] \setminus E \times (0, L) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = L\}$$

cioè è contenuta nell'unione di due iperpiani e abbiamo già dimostrato che gli iperpiani hanno misura nulla. Dimostriamo dunque la tesi per l'insieme $E \times (0, L]$.

2) Se E è un n -intervallo I la tesi è vera perché $I \times (0, L]$ è un $n+1$ -intervallo, quindi

$$\mathcal{L}^{n+1}(I \times (0, L]) = \text{vol}_{n+1}(I \times (0, L]) = L \text{vol}_n(I) = L \mathcal{L}^n(I).$$

3) Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono insiemi disgiunti, \mathcal{L}^n -misurabili per cui vale la tesi, allora la tesi vale anche per $E \cup F$:

Infatti, per E ed F abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) &= L \mathcal{L}^n(E), \\
\mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) &= L \mathcal{L}^n(F).
\end{aligned} \tag{5}$$

Sommando membro a membro in (5) otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) + \mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) = L (\mathcal{L}^n(E) + \mathcal{L}^n(F)) = L \mathcal{L}^n(E \cup F).$$

Poiché

$$\begin{aligned}(E \times (0, L]) \cap (F \times (0, L]) &= (E \cap F) \times (0, L] = \emptyset, \\ (E \times (0, L]) \cup (F \times (0, L]) &= (E \cup F) \times (0, L]\end{aligned}$$

otteniamo che la tesi è vera per $E \cup F$.

4) Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono due insiemi \mathcal{L}^n -misurabili per cui vale la tesi e $F \subseteq E$, allora la tesi vale anche per $E \setminus F$:

Infatti, se la tesi è vera per E ed F , allora valgono le uguaglianze (5). Sottraendo membro a membro otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) - \mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) = L(\mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(F)) = L\mathcal{L}^n(E \setminus F).$$

Poiché

$$(E \times (0, L]) \setminus (F \times (0, L]) = (E \setminus F) \times (0, L]$$

otteniamo che la tesi è vera per $E \setminus F$.

5) Se $(E_k)_{k=1}^\infty$ è una famiglia numerabile monotona crescente di insiemi misurabili per i quali la tesi è vera, allora è vera anche per l'insieme $E :=$

$$\bigcup_{k=1}^\infty E_k:$$

Infatti $E_k \subseteq E_{k+1} \implies E_k \times (0, L] \subseteq E_{k+1} \times (0, L]$ dunque $(E_k \times (0, L])_{k=1}^\infty$ è una successione monotona crescente di insiemi e $\bigcup_{k=1}^\infty (E_k \times (0, L]) = E \times (0, L]$. Per la continuità della misura, Teorema 3.11 abbiamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{n+1}(E_k \times (0, L]) = \lim_{k \rightarrow \infty} L\mathcal{L}^n(E_k) = L\mathcal{L}^n(E).$$

6) Per i punti 1) e 5) la tesi è vera per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Per il punto 4) è quindi vera per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme chiuso. Di nuovo per 5) la tesi per ogni unione numerabile di insiemi chiusi $F_k, F_k \subseteq F_{k+1}$.

Per il Teorema 3.10 ogni insieme misurabile E può essere scritto come unione di un insieme di misura nulla N e di una unione di una famiglia numerabile crescente di chiusi: $E = N \cup \bigcup_{k=1}^\infty F_k, F_k \subseteq F_{k+1}$.

Per il punto 3) basta allora dimostrare che la tesi è vera per gli insiemi $N \subset \mathbb{R}^n$ di misura \mathcal{L}^n nulla.

Sia dunque $N \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{L}^n(N) = 0$. Sia $\varepsilon > 0$. Sappiamo che esiste $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto tale che $A \supseteq N, \mathcal{L}^n(A) < \varepsilon$.

Allora $N \times (0, L] \subset A \times (0, L]$ per cui

$$\mathcal{L}^{n+1}(N \times (0, L]) \leq \mathcal{L}^{n+1}(A \times (0, L]) = L\mathcal{L}^n(A) < L\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo $\mathcal{L}^{n+1}(N \times (0, L]) = 0$ quindi, per l'Osservazione 3.1 l'insieme $N \times (0, L]$ è misurabile e ha misura \mathcal{L}^{n+1} nulla. \square

Teorema 6.5. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. Allora il sottografico di f ,

$$SG_{f,E} := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in E, 0 < t < f(\mathbf{x})\}$$

è un insieme \mathcal{L}^{n+1} -misurabile e $\mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}) = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Proof. 1) Dimostriamo innanzitutto che la tesi è vera se f è una funzione semplice nonnegativa φ : sia $\varphi(\mathbf{x}) := \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}(\mathbf{x})$ la rappresentazione canonica di φ : $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^N E_i = \mathbb{R}^n$. Allora

$$SG_{\varphi, \mathbb{R}^n} = \bigcup_{i=1}^N \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in E_i, 0 < t < a_i\}$$

quindi, per il Lemma 6.4

$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi, \mathbb{R}^n}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{L}^n(E_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

La tesi è dunque vera per le funzioni semplici misurabili nonnegative.

2) Sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. La estendo a tutto \mathbb{R}^n ponendo $f(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Sappiamo (Lemma 5.4) che esiste una successione monotona crescente di funzioni semplici misurabili non negative $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Abbiamo allora $SG_{\varphi_k, \mathbb{R}^n} \subseteq SG_{\varphi_{k+1}, \mathbb{R}^n}$ e $\bigcup_{k=1}^\infty SG_{\varphi_k, \mathbb{R}^n} = SG_f, E$.

Per il passo 1) abbiamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi_k, \mathbb{R}^n}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per la continuità della misura (Teorema 3.11)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi_k, \mathbb{R}^n}) = \mathcal{L}^{n+1}\left(\bigcup_{k=1}^\infty SG_{\varphi_k, \mathbb{R}^n}\right) = \mathcal{L}^{n+1}(SG_f, E).$$

D'altra parte, per il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

da cui la tesi. □

Definizione 6.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Si dice che una proprietà vale quasi ovunque in E (e si scrive che la proprietà vale per q.o. $\mathbf{x} \in E$) se esiste $N \subseteq E$, $\mathcal{L}^n(N) = 0$ tale che la proprietà vale per ogni $\mathbf{x} \in E \setminus N$.

Proposizione 6.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e nonnegativa. Se $\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, allora f è nulla q.o. in E .

Proof. Per $k \in \mathbb{N}$ sia $E_k := \left\{ \mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > \frac{1}{k} \right\}$.

Poiché f è nonnegativa abbiamo

$$0 = \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_{E_k} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}d\mathbf{x} = \frac{1}{k}\mathcal{L}^n(E_k) = 0.$$

Dunque $\mathcal{L}^n(E_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,

per la continuità della misura, Teorema 3.11, abbiamo $\mathcal{L}^n(\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > 0\}) = 0$ e dunque $f(\mathbf{x}) = 0$ per q.o. $\mathbf{x} \in E$. \square

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ e sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Chiamo *fetta di E sopra \mathbf{x}* l'insieme

$$E_{\mathbf{x}} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \right\}.$$

Teorema 6.7 (Teorema di Fubini). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ un insieme \mathcal{L}^{n+k} -misurabile. Allora

1. per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ l'insieme $E_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile,
2. la funzione $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}})$ definita quasi ovunque in \mathbb{R}^n è \mathcal{L}^n -misurabile,
3. $\mathcal{L}^{n+k}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}})d\mathbf{x}$.

Proof. La dimostrazione si svolge in più passi:

1) proviamo che la tesi è vera se E è un $(n+k)$ -intervallo.

Infatti, in questo caso, $E = G \times H$ con G n -intervallo e H k -intervallo.

Dunque

$$\mathcal{L}^{n+k}(E) = \text{vol}_{n+k}(E) = \text{vol}_n(G)\text{vol}_k(H) = \mathcal{L}^n(G)\mathcal{L}^k(H).$$

D'altra parte $E_{\mathbf{x}} = \begin{cases} H & \mathbf{x} \in G, \\ \emptyset & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus G, \end{cases}$ dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}})d\mathbf{x} = \mathcal{L}^k(H)\mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^{n+k}(E).$$

2) Proviamo che se la tesi è vera per E, F sottoinsiemi disgiunti e \mathcal{L}^{n+k} -misurabili di \mathbb{R}^{n+k} , allora è vera per $E \cup F$.

Poiché la tesi è vera per E ed F sappiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+k}(E) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} \\ \mathcal{L}^{n+k}(F) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(F_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}\end{aligned}\tag{6}$$

Infatti, in questo caso $(E \cup F)_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}} \cup F_{\mathbf{x}}$. Dunque $(E \cup F)_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile perché unione di \mathcal{L}^k -misurabili. Inoltre $E_{\mathbf{x}} \cap F_{\mathbf{x}} = \emptyset$ dunque $\mathcal{L}^k((E \cup F)_{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) + \mathcal{L}^k(F_{\mathbf{x}})$. Sommando membro a membro in (6) e per la linearità dell' integrale otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+k}(E \cup F) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) + \mathcal{L}^k(F_{\mathbf{x}})) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k((E \cup F)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

3) Proviamo che se la tesi è vera per E, F sottoinsiemi \mathcal{L}^{n+k} -misurabili di \mathbb{R}^{n+k} tali che $F \subseteq E$, allora è vera per $E \setminus F$.

Infatti, in questo caso $(E \setminus F)_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}} \setminus F_{\mathbf{x}}$. Dunque $(E \setminus F)_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile perché differenza di \mathcal{L}^k -misurabili. Inoltre $\mathcal{L}^k((E \setminus F)_{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(F_{\mathbf{x}})$. Sottraendo membro a membro in (6) e per la linearità dell' integrale otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+k}(E \setminus F) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(F_{\mathbf{x}})) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k((E \setminus F)_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

4) Proviamo che se $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile monotona crescente di insiemi \mathcal{L}^{n+k} -misurabili per i quali la tesi è vera, allora è vera anche per l'insieme $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Tutti gli insiemi E_j soddisfano la tesi cioè per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ $E_{j,x}$ è misurabile e

$$\mathcal{L}^{n+k}(E_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{j,x}) d\mathbf{x}.\tag{7}$$

Poiché $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,x} = E_{\mathbf{x}}$, abbiamo che anche $E_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile. Inoltre $E_{j,x} \subseteq E_{\mathbf{x},j+1}$ dunque $\mathcal{L}^k(E_{j,x}) \leq \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x},j+1})$ e, per la continuità della misura, Teorema 3.11, $\mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^k(E_{j,x})$.

Passando a limite in (7), grazie al Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+k}(E) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{n+k}(E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{j,x}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^k(E_{j,x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

5) Proviamo che la tesi è vera se $\mathcal{L}^{n+k}(E) = 0$.

Se $\mathcal{L}^{n+k}(E) = 0$ esiste una successione $(A_j)_{j=1}^\infty$ di aperti di \mathbb{R}^{n+k} (Teorema 3.10, punto 4.) tale che

$$\mathcal{L}^{n+k*}(A_j \setminus E) < \frac{1}{j}, \quad E \subseteq A_{j+1} \subseteq A_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Poiché gli insiemi A_j sono aperti, per i punti 1) e 4), la tesi è vera per ciascun A_j :

$$\frac{1}{j} > \mathcal{L}^{n+k}(A_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{j,\mathbf{x}}) d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Sia $A := \bigcap_{j=1}^\infty A_j$. Poiché $\mathcal{L}^{n+k}(A_j) \leq \frac{1}{j}$ per la continuità della misura, Teorema 3.11, $\mathcal{L}^{n+k}(A) = 0$. Inoltre $A_{\mathbf{x}} = \bigcap_{j=1}^\infty A_{j,\mathbf{x}}$ quindi A è \mathcal{L}^k -misurabile per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Applicando il lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, alla successione monotona crescente $\mathcal{L}^k(A_{1,\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\mathbf{x}})$ abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \mathcal{L}^{n+k}(A) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \mathcal{L}^{n+k}(A_j) \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{L}^k(A_{1,\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\mathbf{x}}) \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\mathcal{L}^k(A_{1,\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\mathbf{x}}) \right) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{L}^k(A_{1,\mathbf{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{\mathbf{x}}) \right) d\mathbf{x} = \mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dunque $0 = \mathcal{L}^{n+k}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}$. □

Per la Proposizione 6 abbiamo $\mathcal{L}^k(A_{\mathbf{x}}) = 0$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Poiché $E_{\mathbf{x}} \subseteq A_{\mathbf{x}}$ abbiamo anche $\mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) = 0$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e dunque $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\mathbf{x} = 0 = \mathcal{L}^{n+k}(E)$.

Teorema 6.8 (Teorema di Fubini). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile e sia $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione nonnegativa. Allora f è misurabile in E se e solo se il suo sottografico $SG_{f,E}$ è un insieme \mathcal{L}^{n+1} -misurabile.*

Proof. Abbiamo già dimostrato, Teorema 6.5, che se f è misurabile nonnegativa, allora $SG_{f,E}$ è un insieme \mathcal{L}^{n+1} -misurabile e che in tal caso $\mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}) = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Supponiamo dunque che $SG_{f,E}$ sia un insieme \mathcal{L}^{n+1} -misurabile e dimostriamo che f è una funzione misurabile.

Se $t < 0$ $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\} = E$ che è misurabile.

Se $t > 0$ $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\} = \{\mathbf{x} \in E: (\mathbf{x}, t) \in SG_{f,E}\} = (SG_{f,E})_t$. Poiché $SG_{f,E}$ è \mathcal{L}^{n+1} -misurabile, per il Teorema 6.7 l'insieme $(SG_{f,E})_t$ è \mathcal{L}^n -misurabile per q.o. $t \in \mathbb{R}$.

Dunque esiste $N \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^1(N) = 0$ tale che $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\}$ è \mathcal{L}^n -misurabile per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus N$.

Poiché $\mathcal{L}^1(N) = 0$, l'insieme $\mathbb{R} \setminus N$ è denso in \mathbb{R} dunque, per la Proposizione 5.1 $\{\mathbf{x} \in E: f(\mathbf{x}) > t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ cioè f è una funzione misurabile. \square

Teorema 6.9. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ insieme misurabile e sia $f: R \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funzione integrabile in E . Allora*

1. per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la fetta $E_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile e la funzione $\varphi_{\mathbf{x}}: \mathbf{y} \in E_{\mathbf{x}} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è \mathcal{L}^k -misurabile;
2. la funzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è \mathcal{L}^n -misurabile;
3. $\int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$.

Proof. Abbiamo già dimostrato che la fetta $E_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Supponiamo preliminarmente che f sia nonnegativa. Considero gli insiemi

$$SG_{f,E} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E, 0 < t < f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}$$

$$SG_{\varphi_{\mathbf{x}}, E} = \left\{ (\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}: \mathbf{x} \in E_{\mathbf{x}}, 0 < t < f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}.$$

Dunque $SG_{f,E,\mathbf{x}} = SG_{\varphi_{\mathbf{x}}, E}$ e dunque, per il Teorema di Fubini, Teorema 6.7, l'insieme $SG_{\varphi_{\mathbf{x}}, E}$ è \mathcal{L}^{k+1} -misurabile per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{L}^{n+k+1}(SG_{f,E}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{k+1}(SG_{f,E,\mathbf{x}}).$$

Di conseguenza, per il Teorema 6.8, la funzione $\varphi_{\mathbf{x}}$ è \mathcal{L}^k -misurabile per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e per il Teorema 6.5,

$$\int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \mathcal{L}^{n+k+1}(SG_{f,E}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{k+1}(SG_{f,E,\mathbf{x}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Se f ha segno variabile applichiamo il passo precedente alle funzioni f^+ e f^- . \square

Teorema 6.10. *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, nonnegativa e integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile e $\int_{[a,b]} f(x) dx$ (integrale secondo Lebesgue) è uguale a $\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$ (integrale secondo Riemann).*

Proof. Osserviamo che ogni funzione costante a tratti $\varphi(x) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{(a_{j-1}, a_j]}(x)$,
 $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$ sull'intervallo $[a, b]$ è una funzione semplice misurabile. Chiaramente la somma alla Riemann $I_{\mathcal{R}}(\varphi) := \sum_{j=1}^N c_j (a_j - a_{j-1})$ di φ coincide con il suo integrale di Lebesgue e dunque, se φ è nonnegativa, anche con la misura \mathcal{L}^2 del sottografico: $I_{\mathcal{R}}(\varphi) = I(\varphi) = \mathcal{L}^2(SG_{\varphi, [a, b]})$.

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è integrabile secondo Riemann esiste φ e ψ funzioni costanti a tratti tali che

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad (9)$$

$$\mathcal{L}^2(SG_{\varphi, [a, b]}) = I_{\mathcal{R}}(\varphi) \leq \mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \leq I_{\mathcal{R}}(\psi) = \mathcal{L}^2(SG_{\psi, [a, b]}). \quad (10)$$

Sicuramente,

$$SG_{\varphi, [a, b]} \subseteq SG_{f, [a, b]} \subseteq SG_{\psi, [a, b]}.$$

e

$$0 \leq \mathcal{L}^2(SG_{\psi, [a, b]} \setminus SG_{\varphi, [a, b]}) = \mathcal{L}^2(SG_{\psi, [a, b]}) - \mathcal{L}^2(SG_{\varphi, [a, b]}) = I(\psi) - I(\varphi) < \varepsilon.$$

Di conseguenza $\mathcal{L}^{2*}(SG_{\psi, [a, b]} \setminus SG_{f, [a, b]}) \leq \mathcal{L}^2(SG_{\psi, [a, b]} \setminus SG_{\varphi, [a, b]}) < \varepsilon$. Poiché $SG_{\psi, [a, b]}$ è \mathcal{L}^2 -misurabile, esiste A aperto tale che

$$A \supseteq SG_{\psi, [a, b]}, \quad \mathcal{L}^{2*}(A \setminus SG_{\psi, [a, b]}) \leq \varepsilon.$$

Di conseguenza

$$\mathcal{L}^{2*}(A \setminus SG_{f, [a, b]}) \leq \mathcal{L}^{2*}(A \setminus SG_{\psi, [a, b]}) + \mathcal{L}^{2*}(SG_{\psi, [a, b]} \setminus SG_{f, [a, b]}) < 2\varepsilon.$$

Dunque $SG_{f, [a, b]}$ è \mathcal{L}^2 -misurabile e dunque la funzione f è misurabile in $[a, b]$ e

$$\mathcal{L}^2(SG_{f, [a, b]}) = \int_{[a, b]} f(x) dx.$$

Abbiamo dunque

$$I_{\mathcal{R}}(\varphi) = \mathcal{L}^2(SG_{\varphi, [a, b]}) \leq \int_{[a, b]} f(x) dx \leq \mathcal{L}^2(SG_{\psi, [a, b]}) = I_{\mathcal{R}}(\psi).$$

Per l'arbitrarietà delle funzioni φ e ψ e l'integrabilità secondo Riemann della funzione f abbiamo

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx = \sup_{\varphi \leq f} I_{\mathcal{R}}(\varphi) \leq \int_{[a, b]} f(x) dx \leq \inf_{\psi \geq f} I_{\mathcal{R}}(\psi) = \mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$$

da cui la tesi. \square

7 Teorema di convergenza dominata

Lemma 7.1 (Lemma di Fatou). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E . Supponiamo esista $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $f_j(x) \geq \varphi(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Per $x \in E$ e $k \in \mathbb{N}$ sia $g_k(x) := \inf_{j \geq k} f_j(x)$. Allora*

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proof. Sostituendo f_j con $f_j - \varphi$ possiamo limitarci a considerare il caso $f_j \geq 0$. Si ha allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_k(\mathbf{x}) \leq g_{k+1}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ g_k(\mathbf{x}) &\leq f_j(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in E, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad j \geq k. \end{aligned}$$

Osserviamo anche che ogni funzione g_k è misurabile e non negativa perché estremo superiore di funzioni misurabili e non negativi. Si ha quindi

$$0 \leq \int_E g_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall j \geq k$$

da cui

$$0 \leq \int_E g_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \inf_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passando a limite per $k \rightarrow \infty$ e applicando il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2 alla successione g_k otteniamo

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

□

Corollario 7.2. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E . Supponiamo esista $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $f_j(x) \leq \psi(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Per $x \in E$ e $k \in \mathbb{N}$ sia $h_k(x) := \sup_{j \geq k} f_j(x)$. Allora*

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proof. Applico il Lemma di Fatou, lemma 7.1, alla successione $\tilde{f}_j := -f_j$. Si ha quindi $\tilde{g}_k(\mathbf{x}) := \inf_{j \geq k} \tilde{f}_j(\mathbf{x}) = \inf_{j \geq k} -f_j(\mathbf{x}) = -\sup_{j \geq k} f_j(\mathbf{x}) = -h_k(\mathbf{x})$. Dunque

$$\begin{aligned} -\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \tilde{g}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \left(-\int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\sup_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Teorema 7.3 (Teorema di convergenza dominata di Lebesgue). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili in E tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ q.o. $\mathbf{x} \in E$. Supponiamo esista $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $|f_j(\mathbf{x})| \leq \psi(\mathbf{x})$ q.o. $\mathbf{x} \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E |f_j - f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

In particolare

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proof. Osserviamo che f è misurabile perché limite di una successione di funzioni misurabili. Applichiamo il Corollario 7.2 alla successione $\hat{f}_j := |f_j - f|$. Poiché $|f_j(\mathbf{x})| \leq \psi(\mathbf{x})$ abbiamo anche $|f(\mathbf{x})| \leq \psi(\mathbf{x})$ q.o. $\mathbf{x} \in E$ e dunque $0 \leq \hat{f}_j(\mathbf{x}) \leq |f_j(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x})| \leq 2\psi(\mathbf{x})$ q.o. $\mathbf{x} \in E$.

Sia $h_k(\mathbf{x}) := \sup_{j \geq k} |f_j - f|(\mathbf{x})$. Proviamo che $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\mathbf{x}) = 0$ q.o. $\mathbf{x} \in E$: poiché $|f_j(\mathbf{x})|$ converge a $|f(\mathbf{x})|$ q.o. $\mathbf{x} \in E$ abbiamo che $|f_j - f|(\mathbf{x})$ converge a 0 q.o. $\mathbf{x} \in E$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{j}: |f_j - f|(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \quad \forall j \geq \bar{j}$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{j}: h_{\bar{j}}(\mathbf{x}) = \sup_{j \geq \bar{j}} |f_j - f|(\mathbf{x}) \leq \varepsilon.$$

Ma $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente e dunque $h_k(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq \bar{j}$.

Si ha quindi

$$0 = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} \int_E |f_j - f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0.$$

Dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

In particolare, da

$$\left| \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_E |f_k - f|(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\text{otteniamo } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad \square$$

References

- [1] Mariano Giaquinta and Giuseppe Modica. *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*. Birkhäuser, 2012.