SOLUZIONI ESERCIZI FOGLIO 1

① ⓐ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

infatti passando a coordinate polari si trova

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}} = 0$$

perché

$$\frac{\cancel{\rho^3}\,|\cos^3\theta|}{\cancel{\rho^2}} \le \rho \to 0 \quad \text{per } \rho\to 0$$

Uniformemente in θ

ⓑ $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4} =$$

$$x = 2+\rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\cancel{4}+\rho^2\cos^2\theta+\cancel{4\rho\cos\theta}+\rho^2\sin^2\theta-\cancel{8}-\cancel{4\rho\cos\theta}+\cancel{4}} =$$

$$= \frac{\cancel{\rho^2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{\rho^2}} = \sin\theta\cos\theta$$

$\lim_{\rho \to 0} f(\rho, \theta) \nexists$ perché dipende da θ

__Alternativa__ :

$$\frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)y}{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\left.f\right|_{y=0} = 0$$

$$\left.f\right|_{y=(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{2(x-2)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Il limite $\nexists$

ⓒ $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y \sin(x-1)}{x^2 - 2x + 1} \nexists$$

$$x = 1 + \rho \cos\theta$$
$$y = 2 + \rho \sin\theta$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{(2 + \rho \sin\theta)\sin(\rho\cos\theta)}{\rho^2 \cos^2\theta}$$

dipende da θ

ⓓ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \rho^2} - 1} \sim \frac{\rho^2}{1 + \frac{1}{2}\rho^2 - 1} = 2 \quad \text{per } \rho \to 0$$

$|f(\rho, \theta) - 2| \to 0$ per $\rho \to 0$ (non dipende da θ)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ldots = 2$$

(e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2} \quad \nexists$$

$$f(0,y) = \frac{y^2}{5y^2} = \frac{1}{5} \qquad \nexists \text{ lim.}$$

$$f(x,x) = \frac{6x^2}{6x^2} = 1$$

$$\left(\text{oppure } f(x,0) = \frac{2x^2}{x^2} = 2\right)$$

(F) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \quad \nexists$$

$$f(x,-x) = 0$$

$$f(x,x) = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

(g) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2} \quad \nexists$$

Passando a coordinate polari

$$f(\rho,\theta) = \frac{\sin(\rho^2\cos^2\theta)-\sin(\rho^2\sin^2\theta)}{\rho^2}$$

$$\sim \frac{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} \qquad \rho\to 0$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

Alternativamente

$$f(x,0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$f(0,y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2} \xrightarrow{y\to 0} -1$$

(h) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x+y)^2}{x^2} \quad \nexists$$

$$f(x,0) = \frac{\arctan(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$f(x,x) = \frac{\arctan 4x^2}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 4$$

(2) (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$; f continua in D

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$; f continua in D

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$; f continua in D

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$; f continua in D

(e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$; f continua in D

(g) $D \equiv \mathbb{R}^2$; f continua in D

(h) f continua nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ perché funzione razionale

Per stabilire la continuità in $(0,0)$ valutiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 \; ?$$

Passando, per esempio, alle coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

Il limite dipende da θ e quindi $\nexists$

Alternativa: $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{\cancel{x^2}(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

(i)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^5 \cos^2\theta \sin^3\theta}{2\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin^3\theta}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$|f(\rho,\theta)| \leq \frac{\rho^3 \,\cancel{|\cos^2\theta|}\, |\sin^3\theta|}{2\,\cancel{\cos^2\theta}} \leq \frac{\rho^3}{2} \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

La funzione è continua nell'origine

(J) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La funzione è continua nei punti $(x,y)\neq(0,0)$
Passando a coordinate polari si trova

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}=1 \quad \left(\text{oppure } f(x,x)=\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\xrightarrow{x\to 0}1\right)$$

e questo valore è diverso da $f(0,0)=0$,
quindi f non è continua.

<u>ES. 3</u>

$$f(y^2,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=0$$

f non è continua in $(0,0)$

$$|g(x,y)|\leq\frac{|x|^3}{x^2+y^4}\leq\frac{|x|^3}{x^2}\leq|x|$$

Per il T. del confronto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0 \quad \text{e } g \text{ è continua.}$$

Es. 4 minimo (globale) in $(0,0)$

massimo (globale) in $(1,1)$

Es. 5 massimo (globale) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$