Esercizi di Analisi Matematica II e Probabilità- Foglio 3

Esercizio 1 a) Sia $g = g(t)$ una funzione derivabile due volte per ogni $t \in \mathbb{R}$. Verificare che è identicamente nullo il determinante dell'Hessiano di

$$f(x, y) = g(ax + by)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ fissati.

b) Sia $g = g(t)$ una funzione derivabile due volte per ogni $t > 0$ e sia

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Verificare che

- tutti i punti critici di f tali che $(x, y) \neq (0, 0)$ soddisfano
$$g'(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$
- il determinante della matrice Hessiana si annulla se e solo se $g'(\sqrt{x^2 + y^2})g''(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$. In particolare, il determinante vale zero in corrispondenza di ogni punto critico.

Esercizio 2 Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle funzioni:

(i) $f(x, y) = (x + 5y)^3 + 4x + 20y$;

(ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)$;

(iii) $f(x, y) = (x^2 + y^2)[9(x^2 + y^2) - 6 - 4(x^2 + y^2)^2]$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma f\, ds$$

dove

(i) $f(x, y) = xy$ e γ è l'arco di circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 - 2y = 0$ nel secondo quadrante;

(ii) $f(x, y) = \sqrt{1 - xz}$ e γ è l'intersezione tra il cilindro $x^2+z^2 = 1$ e il piano $x+y+z = 1$.

(iii) $f(x, y) = \log(x + y + z)$ e γ è il segmento che congiunge il punto $(1, 0, 1)$ e $(0, 2, 3)$.

Esercizio 4 Calcolare i seguenti integrali multipli:

(i) $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$ dove $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\}$

(ii) $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$ dove D è la regione compresa tra la parabola $y = x^2/2$ e la retta $y = x$.

(iii) $\iint_D xy\, dxdy$ dove D è un disco di centro l'origine e raggio 3.

(iv) $\iint_D \log \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ dove D è il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine.

(v) $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dxdy$ dove D è la corona circolare di raggi $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ compresa nel primo quadrante.