

Esercizi di Analisi Matematica II e Probabilità- Foglio 1

Esercizio 1 Trovare il limite se esiste o dimostrare che non esiste

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2};$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4};$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \sin(x-1)}{x^2 - 2x + 1};$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 5y^2};$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2};$
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 - \sin y^2}{x^2 + y^2};$
- h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(x+y)^2}{x^2}.$

Esercizio 2 Determinare il dominio e studiare la continuità delle funzioni date nel rispettivo insieme di definizione.

- a) $f(x, y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y};$
- b) $f(x, y) = \cos \frac{1}{xy^2};$
- c) $f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2};$
- d) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2 - 1};$
- e) $f(x, y) = \frac{1}{(x - y)^2};$
- f) $f(x, y) = e^{x^2 - xy^3} \sin(x + \sqrt{y});$
- g) $f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2};$
- h) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases};$

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ \text{j) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x \geq 0, y \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

è discontinua nell'origine, mentre la sua restrizione alla porzione di piano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |y| \leq x\}$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & 0 \leq |y| \leq x \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 4 Calcolare i punti di estremo assoluto di

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$$

in $A = [0, 1] \times [0, 1]$ utilizzando il metodo delle curve di livello.

Esercizio 5 Calcolare i punti di estremo assoluto di

$$f(x, y) = xy$$

in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 2\}$ utilizzando il metodo delle curve di livello.