Università degli Studi di Milano
Facoltà di Studi Umanistici
Corso di laurea Triennale in Filosofia

Considerazioni metodologiche sul modello Lotka-Volterra

Relatore: *Prof. Hykel Hosni*

Relazione della prova finale di:
Tommaso Locatelli
Matricola 886257

Anno Accademico 2018–2019

Indice

Introduzione

> Le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto dei modelli. Per modello s'intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni - cioè descriva correttamente i fenomeni in un'area ragionevolmente ampia.
>
> John von Neuman

Questa tesi verterà sul valore epistemologico di un modello matematico in relazione al procedimento con cui questo viene costruito. Un modello matematico è una semplificazione della realtà dettata dall'esigenza di introdurre il formalismo matematico. In quanto semplificazione, risulterà essere un sistema surrogato [Mäki, 2009] rispetto al sistema reale, ovvero un insieme di elementi che perde informazioni e dettagli rispetto al fenomeno d'interesse. Una volta ottenuto il modello sarà possibile, manipolandone operativamente gli elementi secondo le proprietà degli oggetti matematici, descrivere il suo funzionamento, predirne l'andamento e perfezionare la propria conoscenza del fenomeno. L'utilità del formalismo matematico deriva in parte dalla possibilità di disporre di procedure generali che sanno condurre sempre alla soluzione di un problema, qualsiasi sia la condizione particolare di partenza. Chiunque, impostato un problema, seguendo queste procedure, può giungere alla medesima soluzione. Non sembra però esistere una procedura che ci dica come sia meglio modellizzare un determinato problema. Sulla base delle proprie condizioni pregresse - lo stato dell'arte nella ricerca in tale settore, ipotesi preliminari, analogie con altre situazioni, necessità di trattabilità - il ricercatore si vede costretto a dover fare numerose scelte, avendo la possibilità di costruire modelli diversi per un unico fenomeno. Da questa considerazione sorgono alcune domande preliminari: quale modello è il più adeguato a descrivere un dato fenomeno e come fare ad essere sicuri che questo approccio riesca a catturare gli elementi costitutivi del problema? L'utilizzo consapevole di un modello non può prescindere dalla discussione di queste domande, in quanto da esse dipende il valore che daremo ai risultati dello studio. Questo ci conduce alla domanda che intendo affrontare in questa tesi: dato un modello, come ne valuteremo la pertinenza al fenomeno reale? Secondo un'altra formulazione: quanto possiamo ritenere opportuno un modello per studiare un fenomeno?

Riprendendo preliminarmente i passaggi in cui Angelo Guerraggio [Guerraggio, 2018] suddivide lo studio *secondo modelli matematici* chiariamo la domanda:

1. problema del mondo reale: domande relative ad un fenomeno che può riguardare diversi ambiti di ricerca (scienze empiriche, scienze sociali ecc...);
2. costruzione del modello: individuazione di grandezze e relazioni che si reputano essenziali nello studio del fenomeno e relativa formalizzazione matematica;
3. studio matematico del modello: tramite l'applicazione degli strumenti matematici si deducono le caratteristiche del modello posto nel passaggio precendente;
4. interpretazione dei risultati: si valuta la significatività dei risultati della fase precedente alla luce di verifiche empiriche.

L'argomento della mia trattazione riguarda la verosimiglianza delle ipotesi di partenza. Questa intenzione è giustificata dal fatto che: anche se, nel migliore dei casi possibili, la dinamica del modello rispecchiasse perfettamente l'andamento del fenomeno reale, questo non sarebbe abbastanza per valutare positivamente i risultati dello studio. Questo potrebbe dipendere, ad esempio, da ragioni fortuite o dall'eccessiva semplificazione nella costruzione del modello. Se dunque l'*interpretazione dei risultati* non può essere l'unico criterio di giudizio della bontà di un modello, esso va accompagnato dalla profonda comprensione delle sue premesse. La domanda è dunque legata in particolare ai primi due passaggi dello studio: la *costruzione del modello*, perché più le scelte di modellazione rispecchieranno le condizioni reali del fenomeno più si potrà ritenere il modello verosimile; il *problema del mondo reale* perchè in base all'oggetto di studio si potrà discutere l'adeguatezza di tale metodo, ovvero va chiarito se i caratteri del fenomeno si prestino a venir ben formalizzati senza snaturalizzare le loro qualità. Sottolineo che questi due problemi riguardano la medesima domanda, - come giudicare la bontà delle premesse di un modello essendo queste poste a discrezione del ricercatore? - ma a livelli differenti (level of description) [Hosni and Vulpiani, 2017] . La prima è posta a livello delle ipotesi di formalizzazione del fenomeno mentre la seconda riguarda l'adeguatezza di questo metodo nello studio di un fenomeno.

Per proporre una risposta a questa domanda discuterò un esempio specifico: il modello Lotka-Volterra. Questo modello ci permetterà di affrontare sia un esempio di modellizzazione di un fenomeno, sia un esempio di discussione metodologica su un ambito di applicazione. Tratterò nel primo capitolo lo studio di Volterra per poi discuterne le scelte di modellizzazione. Per ogni ipotesi presenterò inoltre delle alternative in modo da integrare lo studio del modello evidenziandone le criticità delle premesse. Questo ci permetterà di riflettere sulla natura di queste premesse e mostrare come la relativa bontà dipenda dai caratteri del fenomeno oggetto di studio. Nel secondo capitolo, una volta presentata una sua applicazione in ambito macroeconomico e la criticità delle sue premesse, problematizzerò lo studio tramite modelli matematici nelle scienze economiche. Per fare ciò, affronterò il tema da una prospettiva di ricostruzione storica della rivoluzione marginalista; inoltre tematizzerò le considerazioni del filosofo della scienza e filosofo dell'economia Ismo Uskali Mäki in relazione alle ipotesi irrealistiche nei modelli economici. Con questa trattazione cercherò di evidenziare i problemi che sorgono nel tentativo di modellizzare fenomeni economici. In particolare, riguardo alle idealizzazioni, imprescindibili nella costruzione di un modello, evidenzierò come la pertinenza di queste ultime al *problema del mondo reale* vada giustificata dalle conoscenze del fenomeno pregresse alla costruzione del modello.

Alla luce del contenuto dei capitoli, sosterrò che solo una prospettiva interdisciplinare può comprendere a pieno la rilevanza di un modello, in quanto la giustificazione delle scelte metodologiche e di modellazione va oltre le prerogative delle sole scienze matematiche; queste scelte pertengono invece a una discussione preliminare al modello, di natura retorica e non dimostrativa.

Capitolo 1

Un modello matematico della predazione

1.1 Volterra e i pesci

Il modello Lotka-Volterra deve il suo nome da un importante analista e fisico matematico italiano, Vito Volterra (1860-1940) e allo statistico austriaco-statunitense Alfred J. Lotka (1880-1949). Entrambi questi ricercatori arrivarono a formulare il medesimo modello indipendentemente negli anni '20. L'importanza principale di questo modello sta nell'essere stato il punto di partenza di una lunga serie di ricerche nell'ambito dei modelli biologici. In questo capitolo mi concentrerò sullo studio compiuto da Volterra così come presentato in modo sintetico da Angelo Guerraggio in *Matematica per le scienze* [Guerraggio, 2018].

Il problema viene posto a Volterra dal suo genero zoologo Umberto D'Ancona, il quale aveva rilevato un fenomeno interessante relativo a dati statistici di pesci pescati nel mar Adriatico tra il 1910 ed il 1923. D'Ancona aveva considerato la percentuale dei "selaci" (pesci simili a squali, predatori di pesci più piccoli) nel totale di pesci pescati nei porti di Trieste, Fiume e Venezia. Egli notò un incremento relativo di "selaci" negli anni della guerra e in quelli appena successivi. «I biologi del tempo cercavano, senza successo, di mettere in relazione fluttuazioni come queste con i possibili mutamenti periodici di fattori come il clima, la pesca o la quantità di nutrienti immessi in mare.» [G.I.Bischi et al., 2004]

Alcune percentuali di pesci selaci possedute da D'Ancona [Guerraggio, 2018].

Anno	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920
Trieste	8,8	9,5	15,7	14,6	7,6	16,2	15,4	-	19,9	15,8
Fiume	-	-	-	11,9	21,4	22,1	21,2	36,4	27,3	16,0
Venezia	-	-	-	-	-	-	-	-	30,9	25,3

Questo portò D'Ancona a credere che la diminuzione dell'attività di pesca durante gli anni della guerra, dovuta alla mancanza di molti pescatori che si trovavano al fronte, avesse favorito i pesci predatori. Una volta che gli venne posto il problema Volterra «invece di affrontare direttamente il problema di D'Ancona cercò di studiare il fenomeno della convivenza fra prede e predatori in forma pura, eliminando gli attriti e le perturbazioni capaci di oscurare il fenomeno.» [Israel, 2015]

Per poter analizzare il problema in forma pura, cercando di eliminare ogni perturbazione, Volterra deve scegliere quali aspetti del fenomeno sono determinanti e quali contingenti. Egli divide la popolazione di pesci in due gruppi: quello delle prede e quello dei predatori. Indicheremo con x la variabile popolazione di prede, mentre con y la variabile popolazione di predatori. Ovviamente queste variabili possono essere considerate come variabile dipendenti dal tempo t, ottenendo dunque per ciascun gruppo una funzione che associa ad ogni istante di tempo la sua popolazione.

$$x(t)$$

$$y(t)$$

Per comodità non indicheremo più esplicitamente la dipendenza dal tempo. Ora Volterra dovrà fare delle ipotesi per ottenere una qualche relazione che gli consenta di determinare il legame fra tempo e popolazione. Comincia con il considerare la popolazione in modo isolato. Immaginando che le prede abbiano a disposizione risorse infinite la loro crescita seguirà il modello malthusiano, il quale prevede una crescita esponenziale della popolazione.

$$x' = ax$$

Per quanto riguarda invece i predatori, in assenza di prede sono destinati a decrescere fino all'estinzione, ipotizziamo anche in questo caso in modo esponenziale ma con costante negativa (con $c > 0$).

$$y' = -cy$$

Volterra passa dunque a considerare i due gruppi in maniera non più isolata ma cercando di catturare il rapporto che implica la coabitazione. Ci aspettiamo che la crescita dei predatori sia legata al numero di cacce andato a buon fine e che questo fattore debba essere proporzionale: al numero di prede disponibili nell'ambiente, al numero di predatori (dato che un maggior numero di predatori alza la probabilità di incontro) e ad una costante che indica l'efficienza predatoria e le caratteristiche dell'ambiente. Considereremo dunque $y' = -cy + hxy$, con $h > 0$. Questo fattore di incremento della popolazione dei predatori deve comparire anche nell'equazione delle prede con segno opposto. Otteniamo dunque $x' = ax - bxy$, con $b > 0$. Ponendo a sistema queste due equazioni differenziali otteniamo il modello matematico.

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + hxy \end{cases}$$

Una volta impostato il sistema di equazioni Volterra può passare allo studio analitico di questo modello dinamico. Tramite tecniche standard otteniamo un'equazione a variabili separabili.

$$e^{-by} y^a = K x^{-c} e^{hx} \text{con } K > 0$$

Da questa equazione non è possibile esplicitare la y in funzione di x. Volterra introduce il seguente cambio di variabili

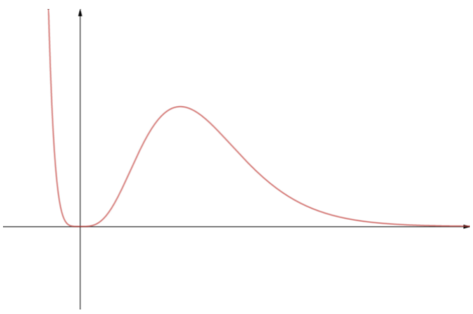
$$z = e^{-by} y^a$$

$$w = K x^{-c} e^{hx}$$

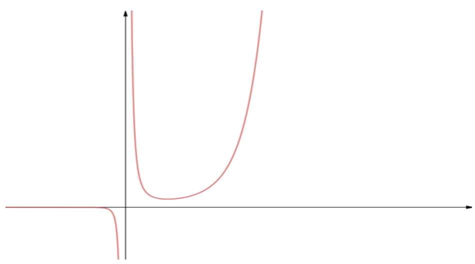
L'equazione nelle nuove variabili diventa:

$$z = w$$

Ottiene dunque il grafico di queste funzioni tramite gli strumenti dell'analisi.



(a) Grafico di $z = e^{-by} y^a$



(b) Grafico di $w = K x^{-c} e^{hx}$

Successivamente costruisce un sistema di riferimento a 4 semi-assi come riportato in figura.

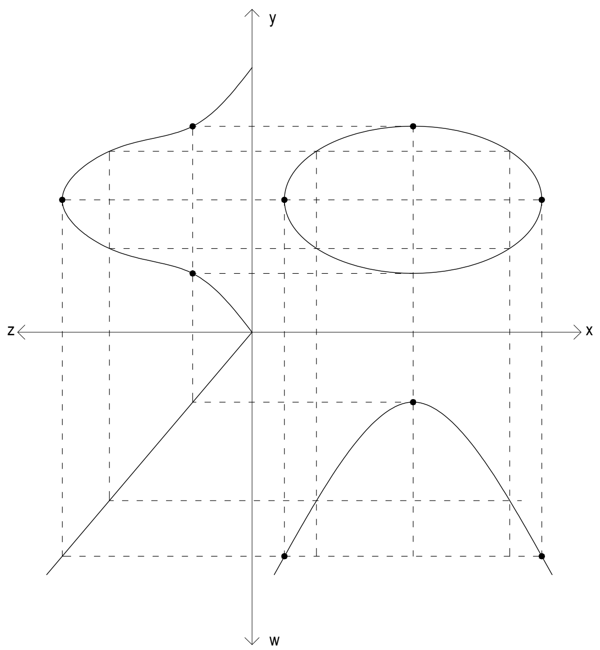


Figura 1.2: Piano cartesiano a 4 semi-assi

Nel secondo quadrante riporta la curva di equazione $z = e^{-by}y^a$, nel quarto quella di equazione $w = Kx^{-c}e^{hx}$ e nel terzo la bisettrice $z = w$, ovvero l'equazione nelle nuove variabili. É interessato alle coppie (x, y) tali che si verifica $e^{-by}y^a = Kx^{-c}e^{dx}$, cioè al luogo di punti (x, y) tale che $z = w$. Ora è in grado di associare ad ogni valore x i rispettivi valori y procedendo con il seguente metodo:

1. considera un generico punto x e la sua immagine tramite $w = Kx^{-c}e^{hx}$
2. dal momento che deve risultare $z = w$ otterremo per proiezione tramite la bisettrice un valore z
3. a questo corrisponderanno dei valori di y tramite la curva $z = e^{-by}y^a$
4. traccia nel primo quadrante i punti di coordinata x iniziale e y appena trovata

Volterra riesce dunque ad ottenere per ogni iniziale valore x i rispettivi valori y. Procedendo per punti si ottiene una curva chiusa che rappresenta l'orbita lungo cui variano le popolazioni di prede e predatori. Dividendo la curva in quarti capiamo come il ciclo della dinamica sia suddiviso in quattro fasi:

1. una in cui la scarsità di prede porta alla diminuzione di predatori ma all'aumento di prede
2. successivamente il continuo aumento di prede porta ad aumentare anche i predatori
3. la cui crescita però avrà come conseguenza un'inversione di tendenza per le prede
4. fino a che anche i predatori inizieranno a diminuire

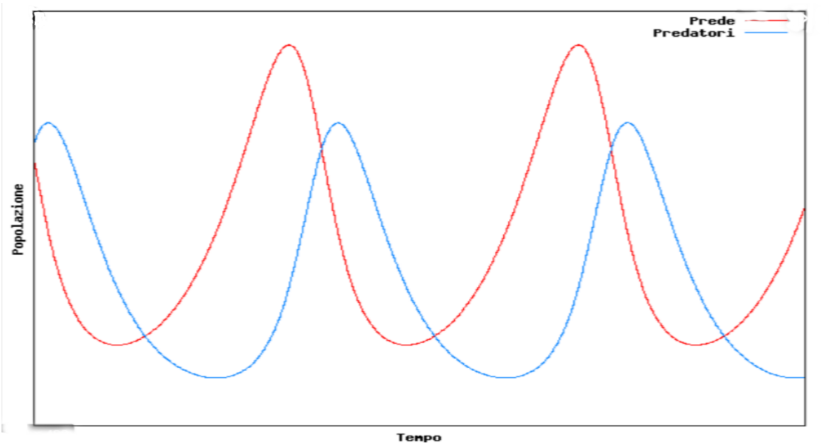


Figura 1.3: grafico delle oscillazioni dei due gruppi

Tramite lo studio del modello, Volterra ottiene come primo risultato la spiegazione delle continue fluttuazioni delle popolazioni. A differenza di altri studi biologici che non riuscivano a spiegare le dinamiche cicliche di alcuni fenomeni in relazione ad eventi periodici, come ad esempio le stagioni, al matematico italiano è bastato modellizzare la dinamica di predazione fra due gruppi per trovare le cause endogene di queste fluttuazioni.

Andava ancora spiegato se ci potesse essere una relazione causale tra diminuzione dell'attività di pesca e aumento proporzionale di predatori. Per fare questo abbiamo prima bisogno di calcolare la popolazione media dei due gruppi nel periodo T.

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad \bar{y} = \int_0^T y(t)dt$$

Operando ed integrando opportunamente il sistema si ricava che:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{c}{h}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{a}{b}$$

Ottenuti questi risultati generali sul sistema dinamico, possiamo ora tornare alla richiesta di D'Ancona. Durante il periodo della guerra l'attività di pesca deve essere diminuita dal momento che molti pescatori si trovavano al fronte. La pesca porta in generale alla diminuzione delle due popolazioni di pesci nella misura di $\varepsilon x(t)$ e $\varepsilon y(t)$, dove la costante ε riflette l'intensità della pesca. La situazione viene allora descritta del seguente sistema modificato di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - \varepsilon x = (a-\varepsilon)x - bxy \\ y' = -cy + hxy - \varepsilon y = -(c+\varepsilon)y + hxy \end{cases}$$

Questo sistema è nella struttura identico al precedente, ma sostituisce ad a e c rispettivamente $(a-\varepsilon)$ e $(c+\varepsilon)$. Possiamo allora affermare che i nuovi valori medi saranno:

$$\bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{h} \qquad \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}$$

Volterra mostra dunque che in questo modello l'aumento dell'attività di pesca porta all'aumento della popolazione media di prede ed alla diminuzione di predatori, mentre la diminuzione dell'attività ittica determina un aumento dei predatori e alla diminuzione delle prede. Il modello dunque descrive correttamente il fenomeno osservato e sembra validare la tesi di D'Ancona in merito al legame fra pesca e quantità di pesci "selaci".

Prima di proseguire con la discussione delle ipotesi fatte da Volterra riporto brevemente i passaggi della costruzione del modello da parte di Lotka. Questo risulterà comunque utile alla mia trattazione per due ragioni. La prima ragione è che sarà interessante notare come partendo da due situazioni iniziali differenti i due autori convergano al medesimo modello. La seconda ragione invece è che, non partendo Lotka da un problema preciso come Volterra, lo statistico statunitense prima formulerà una generalizzazione del modello, la quale per l'assenza di ipotesi stringenti si rivelerà intrattabile e solo successivamente descriverà il sistema di equazioni differenziali del modello preda-predatore. Il primo riferimento a questo modello compare nell'articolo di Lotka *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems* [Lokta, 1920]. Egli pone il problema da una prospettiva, come ho anticipato, molto più generale. Quello che gli interessa è trovare la ragione della presenza in natura di oscillazioni permanenti (non smorzate) che a suo avviso è improbabile non dipendano da una struttura geometrica comprensiva di molte classi di problemi. Lotka ha in mente non solo fenomeni legati alle popolazioni di specie ma a un ventaglio molto ampio di fenomeni, compresi quelli chimici e quelli biologici interni agli esseri viventi. Discute prima il caso generale in cui all'interno di un medesimo ambiente siano presenti n specie o sostanze, $S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_n$, ognuna delle quali di massa $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$. Ogni possibile stato del sistema può essere definito dai valori $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$ e di alcuni paramentri Q e P. Q indica il carattere delle diverse specie variabile nel tempo mentre P i limiti dell'ambiente. Per ogni fenomeno appartenente a questa classe di problemi avremo dunque che:

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, ..., X_n; P, Q) \\ \text{con} \qquad i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

La generalità di questo caso chiaramente rende difficile fare delle ipotesi stringenti su quali relazioni possano definire tale funzione, risulta dunque intrattabile. Lotka procede dunque a studiare un caso più semplice: un sistema formato da due specie, S_1 e S_2. Immaginando che S_1 sia una sostanza che cresce assorbendo risorse talmente tanto presenti nell'ambiente che possono essere considerate costanti (S_1 non le esaurisce) e che S_2 sia una specie che si nutre di S_1 scrive le seguenti relazioni [Lokta, 1920]:

Rate of increase of X_1 per unit of time	=	Mass of newly formed S_1 per unit of time	-	Mass of S_1 destroyed by S_2 per unit of time	-	Other dead or excretory matter eliminated per unit of time

Rate of increase of X_2 per unit of time	=	Mass of newly formed S_1 per unit of time (derived from S_1 as food ingested)	-	Mass of S_2 destroyed or eliminated per unit of time

Formalizzando le equazioni nel seguente modo.

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1' X_1 - B_1 X_1 X_2 - A_1'' X_1$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A_2 X_1 X_2 - B_2 X_2$$

Raccogliendo X_1 tra il primo e terzo fattore della prima equazione e sostituendo $A'_1 - A''_1 = A_1$ si ottengono le stesse equazioni di Volterra. É interessante notare come aggiungendo un fattore nella prima equazione rispetto al matematico italiano, Lotka ottiene comunque le medesime equazioni considerando il tasso di crescita costante delle prede isolate dipendente anche dalle perdite dovute non dai predatori.

1.2 Alcune alternative alle ipotesi fatte da Volterra

Presa visione in modo sintetico dello studio compiuto da Volterra concentriamoci ora sul passaggio che è di mio interesse analizzare in questo primo capitolo, ovvero le scelte che il modellatore deve fare prima di avvalersi degli strumenti matematici per studiare il modello. «It would be desirable to identify a general method that allows us to determine the equations that govern the phenomenon we are interested in» [Hosni and Vulpiani, 2018] ma fino a che non ne possederemo uno saremo costretti a dover fare numerose scelte per poter introdurre gli strumenti matematici nello studio dei fenomeni. Mi propongo ora di discutere le scelte che portarono Vito Volterra al risultato appena esposto e di evidenziare per ogni scelta le alternative possibili. Intendo mostrare come alla indiscutibilità dei risultati che discendono dall'applicazione degli strumenti matematici facciano da contraltare tutte le scelte prese nella costruzione del modello, dettate da fattori come: esigenze del ricercatore, ipotesi discutibili, e modelli pregressi. Ogni combinazione di risposte alle diverse domande che porrò corrisponde ad un ipotetico modello diverso, infatti «One can construct many mathematical models for the same practical situation and one has to choose the most appropriate, that which fits the situation as closely as practical aims require (it can never fit completely).» [Rényi, 1965] Invito il lettore a prestare attenzione su come alcune scelte riguardino preponderalmente la formalizzazione matematica in sé, come ad esempio la prima, mentre altre il fenomeno di per sé, come la seconda. Questo ci ricorda come la costruzione di un modello sia un problema complesso che può inoltre aver bisogno di un approccio interdisciplinare.

Variabili continue o variabili discrete? La prima scelta fatta da Volterra che voglio mettere in questione è relativa alla natura delle variabili considerate. Egli pone sia il tempo che le popolazioni come variabili continue, la prima cosa che mi propongo di mostrare è come per entrambe queste scelte sarebbe opportuno valutare l'opzione discreta come egualmente valida. Per quanto riguarda il tempo potrebbe sembrare al primo approccio non problematica la scelta di considerarla una variabile continua, dopo tutto è proprio così che immaginiamo solitamente il tempo, come un qualcosa che può sempre essere suddiviso in intervalli più piccoli. Nonostante questo, considerare il tempo come una variabile discreta potrebbe essere una scelta molto interessante in questo problema. Permetterebbe di individuare un'unità di tempo caratterizzante del fenomeno, se le specie animali considerate avessero uno sviluppo stagionale sarebbe realistico immaginare che la loro dinamica cresca per scatti, ad esempio se la maggior parte delle specie avessero un'unica stagione di riproduzione durante l'anno. Va anche considerato che i dati forniti da D'Ancona non si riferiscano ad uno sviluppo continuo ma annuale. Inoltre, renderebbe molto più facile inserire relazioni che considerino effetti di ritardo, ovvero la dinamica della predazione non dipenderebbe solo dal numero di pesci presenti solo nell'attimo presente ma anche dalla situazione precedente. Con questo strumento sarebbe meglio modellizzabile il fatto che per un certo tempo i pesci appena nati non sono ancora sessualmente maturi e quindi non contribuiscano con l'accoppiamento all'aumento della popolazione. Va inoltre considerato che «è ragionevole pensare a intervalli di tempo e di spazio piccolissimi [...] è assai più difficile accettare l'idea di considerare incrementi di popolazione piccolissimi. Come pensare a $2,3333$ o a $0,00001$ individui?» [Israel, 2015] La scelta di considerare le variabili x e y come continue ha senso solo sotto l'ipotesi che stiamo trattando fenomeni con un ordine di grandezza molto elevato. Questa scelta è dunque legata anche al considerare il modello come modello solamente deterministico in quanto la legge dei grandi numeri permette di ignorare possibili fattori aleatori. Va considerato che la scelta di Volterra di considerare sia la variabile temporale che le variabili di popolazioni come continue, dipenda dall'esigenza di utilizzare gli strumenti dell'analisi del continuo senza i quali risulterebbe molto più arduo studiare tale modello.

Due gruppi di interesse? Come scegliere quali variabili sono indispensabili per lo studio del fenomeno d'interesse e quali no? Quanti gruppi di pesci è necessario considerare per comprendere i dati registrati da D'Ancora? Nel rispondere a queste domande ha voluto considerare il caso più semplice, dividere la popolazione di pesci in due gruppi: prede e predatori. Ma se questo non catturasse le ragioni reali della strana fluttuazione misurata da D'Ancona? «Alcuni obiettarono che l'andamento oscillatorio dei pesci dell'Adriatico sparisce se si escludono dal conteggio le seppie, le quali presentano un andamento oscillatorio stagionale che influenza fortemente il fenomeno complessivo.» [Israel, 2015]. In generale, Volterra si mise nell'ottica di studiare in forma pura il problema delle prede e dei predatori ma è facile immaginare diversi fattori in un sistema complesso come può essere l'ecosistema del mar Adriatico che ci facciano chiedere se in questo caso basti analizzare il problema da un punto di vista così ideale. Ad esempio, andrebbe considerato anche il variare delle risorse disponibili alle prede, ma di questo discuteremo nel paragrafo successivo.

Modello malthusiano o modello logistico? Come modellizzare la crescita o la decrescita di una popolazione? Volterra, prima di stabilire la relazione che lega prede e predatori, pone in entrambe le equazioni un fattore dinamico che trascende la presenza dell'altro gruppo. La sua scelta ricade su modello malthusiano, il primo modello di dinamica delle popolazioni concepito dal reverendo Thomas Robert Malthus nel *Saggio sui principi della popolazione* [Malthus, 1798]. Questo modello prevede una crescita illimitata di una popolazione, all'interno di un ecosistema che le fornisca risorse infinite, secondo una progressione geometrica di questo tipo:

$$P_1 = cP_0 \qquad P_2 = cP_1 = c^2P_0 \qquad P_n = c^nP_0$$

$$\text{con} \qquad c = 1 + (a - b)$$

dove a è il numero di nuovi nati e b è il numero di morti nell'ultimo anno. Passando dal discreto al continuo, otteniamo che la dinamica della nostra popolazione è rappresentata dalla funzione esponenziale [Guerraggio, 2018]:

$$P(t) = P_0c^t \qquad P'(t) = kP(t)$$

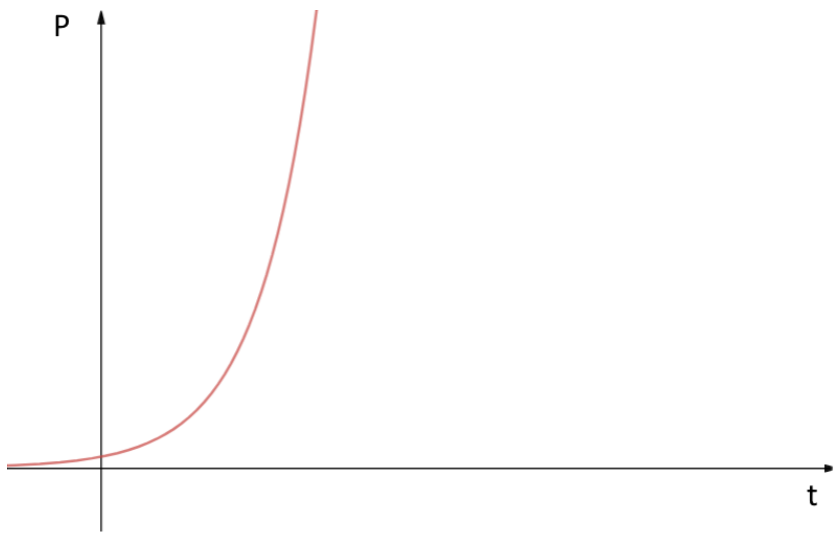


Figura 1.4: crescita malthusiana

La crescita malthusiana è attendibile solo se ci si aspetta un tasso di crescita costante, questo risulta spesso verosimile per periodi iniziali di crescita dove le risorse disponibili sono abbastanza da superare la richiesta. L'aumento della popolazione porta però alla crescita della domanda di risorse e al progressivo esaurimento di queste ultime. Dopotutto l'ipotesi fatta da Volterra è che le risorse delle prede siano presenti in così grande quantità da rimanere *de facto* costanti ed assicurare una crescita malthusiana, questo potrebbe essere verosimile se immaginiamo che i predatori intervengano a ridurre la crescita molto prima dell'esaurirsi stagionale delle risorse. Non sembra comunque convincente pensare che la crescita delle prede non influisca in nessun modo sulla presenza di risorse che a sua volta ne influenzerebbe la crescita. Ovviamente Volterra aveva presente questi limiti del modello Malthusiano dal momento che ad aver ispirato il suo lavoro è l'opera di Verhulst. Pierre Francois Verhulst (1804-1849) è stato un matematico belga che pubblicò il modello demografico logistico [Verhulst, 1838]:

$$P'(t) = kP(t)(N - P(t))$$

«Nella previsione sul suo sviluppo, sembra allora ragionevole tener conto della numerosità $P(t)$ raggiunta ma anche degli effetti del sovraffollamento ossia della distanza $N - P$ che separa la popolazione $P(t)$ da un valore massimo N che non può superare dato che spazio e ambiente sono risorse limitate.» [Guerraggio, 2018]

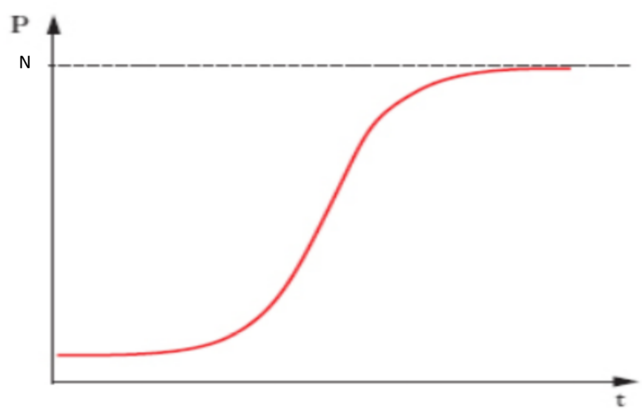


Figura 1.5: crescita logistica

Va considerato inoltre che questo è solo uno dei potenzialmente infiniti modi per porre dei limiti alla crescita illimitata di una popolazione. A questo punto spero di aver chiarito che il modello di Lotka-Volterra sembrerebbe più realistico se si tenesse conto di un fattore come i limiti ambientali. Volterra sfrutta questo strumento per la costruzione di un altro modello nel 1927. In questo caso i due gruppi non sono uno preda dell'altro, ma specie diverse che competono per le medesime risorse, ovvero occupano la stessa nicchia ecologica. Il modello che si ottiene è il seguente [G.I.Bischi et al., 2004]:

$$\begin{cases} x' = x(a - sx - y) \\ y' = y(e - dy - cx) \end{cases}$$

É dunque possibile immaginare una correzione del modello di Lotka-Volterra che pone un limite al gruppo delle prede - di conseguenza anche a quello dei predatori - ponendo la crescita isolata delle prede di tipo logistico.

$$\begin{cases} x' = ax - nx^2 - bxy \\ y' = -cy + hxy \end{cases}$$

Predazione semplice o complicata? Anche per quanto riguarda il fattore di caccia ci si può chiedere se la scelta di Volterra sia giustificata nel prendere l'opzione più semplice possibile. Si potrebbe per esempio considerare che l'efficienza di predazione vari in funzione del numero di predatori. Se immaginiamo che i predatori considerati caccino meglio in gruppi molto grandi potremmo dire che l'aumentare di y porti all'aumento dell'efficienza, ovvero $h = ky$. Modificando dunque la seconda equazione del modello.

$$y' = -cy + kxy^2$$

Modello deterministico o stocastico? L'ultima alternativa che intendo evidenziare è semplicemente una considerazione di ordine generale. Potrebbero esserci diverse ragioni per immaginare che un modello stocastico o l'introduzione di fattori aleatori possa rendere più realistico il modello preda-predatore. Dopo tutto diversi sottofenomeni oggetti di studio è facile immaginare che siano presenti come variabili casuali e non in modo uniforme. Ad esempio, ci sembra ragionevole immaginare che un individuo di una specie non si riproduca o cacci in modo uniforme nel tempo ma che alterni intervalli più o meno attivi.

Non poniamo limiti alla fantasia. Sarebbe ingenuo immaginare di poter raccogliere tutte le possibili domande e risposte che un matematico potrebbe porsi nel tentativo di modellizzare questo problema, qui ho solo voluto indicarne le principali. Dopo tutto cosa ci può far escludere che strutture anche molto diverse possano comunque catturare caratteri importante del fenomeno della predazione. Probabilmente esistono infiniti modi per formalizzare un unico fenomeno, anche perchè una volta ammesso che nessun modello è completamente giusto anche i modelli peggiori sono semplicemente relativamente lontani dal descrivere in modo preciso il fenomeno.

L'intenzione di questo capitolo è stata quella di dimostrare come il lavoro di Volterra vada ben oltre l'applicazione delle proprietà matematiche. Nel momento in cui si passa dalla teoria alla pratica e si cerca di costruire un modello è necessario un profondo lavoro intellettuale per determinare la migliore formalizzazione del fenomeno sotto analisi. Non esiste nessun teorema, lemma o corollario che ti dirà come modellizzare un fenomeno. L'obbiettivo per cui ho fatto ciò, non è delegittimare un sapere che in realtà ha piena coscienza della propria fallibilità - ogni modello è un modello sbagliato e non può praticamente mai combaciare perfettamente con il fenomeno reale - ma piuttosto perchè credo che una ricerca come questa vada sempre accompagnata dalla consapevolezza di cosa è dettato da necessità matematica e cosa dalla discrezione dell'autore. In particolare, non sembra possibile valutare lo studio di un fenomeno tramite modello matematico senza entrare nel merito della verosimiglianza delle ipotesi determinanti il modello. Sono le ipotesi a determinare quanto sarà ampio il gap tra fenomeno e modello. Anche se nella prima parte di questo capitolo è sembrato che lo studio di Volterra soddisfacesse pienamente gli obbiettivi di ricerca da cui veniva posto, è chiaro che la semplice convergenza tra dinamica osservata e dinamica dedotta dal modello non è sufficiente per considerare un modello un buon strumento. Dopo tutto «lo stesso D'Ancona ammise che non vi erano argomenti sufficienti per difendere il valore empirico generale del modello» [Israel, 2015]. Certamente questo non deve oscurare la grande fecondità che ha dimostrato avere questa ricerca: da un lato ci ha dato gli strumenti per gestire nella storia diversi problemi reali dell'ecologia (dall'utilizzo del DDT ai registri di linci e lepri della Hudson Bay Company) e dall'altro ha reso possibile lo sviluppo di numerosi e sempre più raffinati modelli di biologia matematica e non solo. Va anche ricordato come una delle utilità di costruire un modello matematico sia capire cosa non si comprende di un dato fenomeno.

> even a crude mathematical model can help us to understand a practical situation better, because in trying to set up a mathematical model we are forced to think over all logical possibilities, to define all notions unambiguously. [Hosni and Vulpiani, 2018]

In conclusione, spero di aver persuaso il lettore che la verosimiglianza delle ipotesi di formalizzazione non può essere motivata dai risultati dello studio e che quindi va oltre le prerogative delle scienze matematiche. La validità delle ipotesi deve essere giudicata rispetto i caratteri dell'oggetto di studio. Questo ci conduce ad affrontare il tema secondo un altro livello di astrazione. A seconda dell'oggetto che si intende studiare si può valutare più o meno adeguato lo studio tramite modello matematico. Sarà compito del secondo capitolo discutere questo problema alla luce di un esempio specifico.

Capitolo 2

L'utilizzo di modelli matematici in economia

La facilità o la difficoltà del trovare una formalizzazione che ad ipotesi realistiche associ una buona trattabilità può dipendere dalla natura dell'oggetto che si vuole porre in studio. Se per ottenere modelli manipolabili in modo significativo saremo costretti a fare ipotesi troppo irrealistiche quale valore attribuiremo alla ricerca? La domanda che mi accingo ad affrontare non riguarda solamente il rapporto tra fenomeno di interesse e modello ma il rapporto tra area di interesse e metodo di studio. Una discussione di questo tema non può prescindere la scelta di un ambito di studio in particolare e per queste ragioni il modello di Lotka-Volterra si rivelerà ancora utile. Una volta presentata una sua applicazione macroeconomica, alla luce delle problematicità delle sue ipotesi, discuterò un tema che ha suscitato tantissimo interesse ed altrettante ricerche: l'utilizzo di modelli matematici in economia. Riguardo a questo tema mi limiterò a presentarne le origini ed alcune considerazioni di un filosofo contemporaneo. Ciò mi permetterà di evidenziare la complessità dell'utilizzo di questo metodo in questa area particolare e proporre che solo una discussione che tenga conto a diversi livellli del problema (il rapporto tra premesse del modello ed il fenomeno, lo studio del modello, la valutazione dell'adeguatezza metodologica) possa tener conto delle diverse sfaccettature e problematicità che concernono un tale metodo di studio.

2.1 Lo stesso modello in economia

Il modello di Lotka-Volterra si è rivelato essere molto versatile[1]. Nella fattispecie discuteremo una sua famosa applicazione nel campo economico sviluppata da Richard Goodwin (1913-1996). Intenzione del suo studio è descrivere l'evoluzione di occupazione e investimenti in un'economia capitalista e, facendo ciò, perviene al medesimo sistema di equazioni differenziali del modello preda-predatore. Il modello venne sviluppato nel secondo dopoguerra ma le origini del problema di partenza vanno ritrovate in un dibattito che da alcuni anni interessava i più grandi economisti. In particolare, il problema riguardava l'andamento delle economie capitaliste e il comprendere se ci fossero dei meccanismi che portassero ad un andamento ciclico, alla luce della drammatica crisi economica del 1929.

La tesi fondamentale di Goodwin per spiegare l'andamento ciclico è che i lavoratori ed i capitalisti, i principali agenti in un sistema capitalista, siano perennemente in conflitto. Ognuna delle due classi sociali vuole aumentare la propria ricchezza a discapito dell'altra, ma le leggi che ne governano i rapporti non permettono che una riesca a prendere per sé tutta la ricchezza a disposizione. Infatti, quanto più i salari aumentano a discapito dei profitti tanto minori saranno gli investimenti. Conseguentemente la diminuzione degli investimenti porterà all'aumento del tasso di disoccupazione e quindi ad una diminuzione della quota del prodotto allocata ai lavoratori. Ecco che nessuna delle due classi sociali riuscirà a prevalere in maniera definitiva sull'altra. Questa breve spiegazione ci può far immaginare perchè Goodwin convergerà, facendo adeguate ipotesi, al medesimo modello esposto nel capitolo precedente.

Le ipotesi fatte da Goodwin sono molto semplificatrici [Israel, 2015]:

1. il tasso di progresso è costante
2. la forza lavoro cresce a un tasso costante
3. vi sono solo due fattori produttivi: il lavoro ed il capitale
4. le quantità utilizzate sono reali
5. i salari sono interamente consumati, i profitti interamente reinvestiti

[1] Il modello Lotka-Volterra è stato utilizzato anche in altri ambiti, ad esempio l'utilizzo che ne fece il fisico olandese Balthasar Van der Pol (1889-1959) il quale si occupò di trasmissioni radio e dei circuiti elettrici utilizzati nelle radio. Uno dei sistemi di equazioni che interveniva nei modelli da lui studiati era esattamente quello di Lotka-Volterra. Va anche ricordato che egli giunse alle equazioni ancora prima di Lotka e Volterra nel 1920, ma riconobbe l'identità delle equazioni solo nel 1934. [Israel, 2015]

6. il rapporto capitale prodotto è costante
7. il saggio del salario cresce con l'occupazione

Goodwin definisce le prime cinque ipotesi come scelte di convenienza, se pur irrealistiche non dovrebbe esserci motivo di credere che una loro modifica vada ad inficiare i risultati del sistema. Ad esempio, le prime due pur non essendo verosimili, possono comunque sembrare la scelta migliore alla luce della difficile prevedibilità dell'evoluzione tecnologica e dell'andamento demografico. Gli ultimi due punti sono più empirici e perciò controversi. Goodwin risponderà alle critiche di poca bontà delle ipotesi sostenendo che per analizzare la logica di un certo comportamento sia essenziale analizzarlo in termini semplici. Approfondirò questo problema nell'ultimo paragrafo del capitolo quando mi confronterò con le considerazioni di Uskali Mäki.

Ometterò qui la traduzione in formule delle ipotesi e i passaggi che portano al sistema perchè renderebbero eccessivamente pesante la trattazione.[2]

Quello che Goodwin ottiene è il seguente modello:

$$\begin{cases} v' = (\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta)v - (\frac{1}{\sigma})vu \\ u' = -(\alpha + \gamma)u + \rho vu \end{cases}$$

$$\text{con} \qquad v = \frac{L}{n} \qquad u = \frac{w}{a}$$

ovvero, il tasso di occupazione v è uguale ai lavoratori diviso l'offerta di lavoro e la quota del prodotto che va ai lavoratori u è il saggio del salario fratto la produttività del lavoro. Le variabili v e u occupano nel modello il medesimo ruolo rivestito dalle popolazioni di pesci predati e predatori nell'applicazione biologica di Volterra. Per quanto riguarda: α, β, σ, γ e ρ sono rispettivamente: il tasso costante di crescita della produttività del lavoro; il tasso costante di crescita dell'offerta di lavoro; il rapporto costante fra capitale e prodotto; l'intercetta dell'approssimazione della curva di Phillips[3]; il coefficiente angolare dell'approssimazione della curva di Phillips. Sono tutti parametri macroeconomici che dipendono dalla situazione di partenza e dalle condizioni generali del sistema.

Risulterà semplice al lettore riconoscere le equazioni di Lotka-Volterra. Notiamo dunque che «è legittimo pensare a un modello come quello delle equa-

[2]Per quanto concerne questa parte rimando ad una tesi triennale dedicata alla interpretazione economica del modello da parte di Goodwin, http://matematica-old.unibocconi.it/rizzi/secondo/modello1.htm

[3]Funzione quadratica che associa al tasso di occupazione la variazione dei salari.

zioni di Lotka-Volterra, come uno schema (matematico) vuoto di realtà possibili, per usare il linguaggio del gruppo di matematici francesi che era raccolto attorno allo pseudonimo di Nicolas Bourbaki.» [Israel, 2015]. Ovvero un modello risulta essere una struttura formale, in questo caso il sistema delle due equazioni differenziali, connotata da proprietà proprie in cui è possibile sintetizzare i caratteri di fenomeni molto diversi tra di loro. É chiaro che tutte le considerazioni valide per il modello di predazione varranno ugualmente per il modello di Goodwin applicato all'economia. Notiamo come una volta ottenuto il medesimo modello il ricercatore possa per il momento ignorare il problema da cui era partito, non ci interessa più se in questione ci sono le popolazioni di gruppi diversi di pesci o la ridistribuzione della ricchezza fra classi sociali. La necessità della matematica si dimostra proprio in questo, assumendo come vero questo sistema di equazioni differenziali si arriva sempre ai medesimi risultati: stesse orbite, stessi punti di equilibrio, stessa dinamica oscillatoria ecc. Goodwin è dunque in grado di mostrare un meccanismo che a partire dalla conflittualità tra lavoratori e capitalisti porta il sistema economico ad oscillare, così come volevasi dimostrare. [Rizzi, 2006]

L'aspetto che è di mio interesse consiste nel problematizzare se delle ipotesi così stringenti e inverosimili ci permettano di ritenere valido il modello. Possiamo essere sicuri che l'andamento oscillatorio delle economie capitaliste possa essere spiegato perdendo così tanta complessità del fenomeno reale? Forse questa trattazione va considerata solo come analisi di uno dei diversi meccanismi in atto nel problema di interesse. Ma se così fosse, come possiamo valutare la rilevanza di questo meccanismo rispetto alle dinamiche ignorate da questo studio? Queste considerazioni ci portano ad affrontare la seconda declinazione della domanda di tesi. Bisogna valutare se ci si può ritenere soddisfatti di uno studio tramite modello matematico alla luce del peso delle semplificazioni introdotte rispetto alla complessità del fenomeno reale. Vorrei sottolineare come questo sia un problema diverso da quello affrontato nel primo capitolo. Non ho intenzione di discutere la bontà delle singole scelte ma di riflettere in generale il carattere semplificatore delle ipotesi alla luce della complessità di un dato oggetto di studio. Per fare questo c'è bisogno di discutere se il particolare oggetto di interesse si presti bene ad essere modellizzato, quanti fattori concorrono e sono essenziali nel determinare la dinamica di un ciclo economico? Se il bisogno di semplificazioni per costruire un modello e la complessità naturale del fenomeno economico si rivelassero inconciliabili sarebbe opportuno ritenere questo metodo di analisi inopportuno per tale fenomeno. In questione vi è dunque l'utilizzo di modelli matematici nello studio dell'economia. Come anticipavo, questo problema è stato analisi di una vastissima letteratura e sarebbe ingenuo a questo punto immaginare di poterlo affrontare in modo esaustivo. Ai fini della mia trattazione mi limiterò a presentarne l'origine e una posizione contemporanea per evidenziare quanto problematico sia riuscire a costruire dei modelli che risultino avere: delle ipotesi plausibili, una buona trattabilità e che siano in grado di descrivere un'area ragionevolmente ampia; in ambito economico. Nonostante questo, non proporrò una critica di questa pratica ma un utilizzo consapevole che non può prescindere da una riflessione complementare sui fenomeni oggetto di studio secondo altri metodi e con altri strumenti. Potrò dunque sottolineare la centralità di un approccio interdisciplinare come soluzione, o almeno gestione, della problematica emersa.

2.2 La svolta metodologica di fine Ottocento

Per affrontare la questione dell'utilizzo di modelli matematici in economia ho ritenuto indispensabile ripercorrere i momenti storici, gli autori ed i problemi che hanno portato alla genesi del problema. Tale presentazione mi permetterà di ricostruire le ragioni per cui si è determinata questa svolta metodologica. Ricordiamo che l'utilizzo di modelli matematici in economia è una consuetudine relativamente recente, se paragonata allo studio di questa materia, e quindi non scontata nelle sue premesse e nella sua legittimità. In particolare, cercherò di evidenziare i caratteri della «folk ontology of model-based science, the ontology that is implicit in the practitioners' routine behaviors» [Goodfrey-Smith, 2009], in quanto parte costitutiva delle premesse di una ricerca.

Non si potrebbe comprendere il sorgere dell'economia matematica senza spendere del tempo in merito ai cambiamenti che la matematica ha vissuto a sua volta, in particolare durante l'Ottocento. Mi limito qui a porre i passaggi fondamentali che hanno condotto al risultato così ben riassunto dalle parole di Guerraggio:

> La matematica non si occupa più solo di numeri e figure: diventa consistente la sua pervasività in ambiti che sembravano molto distanti, dove si presenta per fornire un servizio ma anche per "dettare legge" [Guerraggio, 2013].

In prima istanza i matematici hanno progressivamente allungato l'elenco degli oggetti studiati e con questi hanno sviluppato una maggiore varietà di operazioni a cui è possibile sottoporre questi oggetti. Secondariamente si comincia ad intuire che insiemi di oggetti, possono presentare una medesima struttura e che sono le proprietà di queste strutture l'elemento fondamentale. Si arriva dunque a considerare i diversi insiemi di oggetti matematici non più distintamente, ma accomunati da un'unica analisi se gli elementi interagiscono secondo le stesse regole. Questo concede agli strumenti matematici la possibilità di spaziare nell'applicazione in un gran numero di problemi diversi che prima non si immaginava di poter trattare con il rigore caratteristico di questa materia. Non va certo dimenticato che questo servizio la matematica ad alcune materie lo offriva già da tempo, ad esempio alla meccanica che secondo le stesse parole di Volterra è «la parte più solida e sicura delle conoscenze» [Volterra, 1901] proprio in virtù dell'uso sistematico della matematica.

Ovviamente già prima che si entri nel merito di un utilizzo sistematico degli strumenti matematici in economia, la matematica veniva utilizzata da diversi economisti. I primi casi più importanti si hanno in Francia ed in Italia durante il XVIII secolo. In Francia gli strumenti matematici più semplici si fanno spazio nell'economia tramite i lavori di Anne-Robert-Jacques Turgot (ministro delle finanze sotto Luigi XVI) e Francois Quesnay, il quale, ad esempio, nelle sue tabelle economiche sintetizzava numericamente i flussi di produzione e scambio all'interno del sistema economico. In questi casi comunque ci si limita all'utilizzo di strumenti aritmetici semplici. Un altro spessore invece va riconosciuto a Condorcet, autore di articoli sul calcolo integrale, fondatore di quella che lui chiama matematica sociale. Sicuramente gli strumenti matematici da lui utilizzati risultano essere molto più raffinati e si comincia a porre in essere la questione metodologica. Egli inizia a concepire una prospettiva che emuli la solidità delle scienze fisiche in quelle economiche tramite l'utilizzo del metodo scientifico (fondato su dati empirici) e gli strumenti del ragionamento deduttivo. In Italia l'avvento della matematica sociale avviene ancora prima. Nel 1711 Giovanni Ceva pubblica un volumetto sulla moneta molto modesto nell'originalità e per nulla radicale nell'utilizzo degli strumenti matematici, ma che segna una tappa nel campo della storia del pensiero. «Per la prima volta un fenomeno di natura sociale viene studiato utilizzando i simboli e i metodi della matematica» [Bianchini, 1982]. Nel percorso iniziato da Ceva si inseriranno poi diversi intellettuali: Giammaria Ortes, Paolo Frisi Cesare Beccaria, Pietro Verri, Ferdinando Galiani e Giambattista Venturi. Il problema principale che affrontano questi autori è la determinazione del prezzo sulla base della domanda e dell'offerta. Fino a qui però l'utilizzo della matematica rimane semplicemente uno strumento tra gli altri per gli economisti.

Un vero cambiamento di paradigma viene proposto successivamente. La svolta è segnalata dalla pubblicazione di tre volumi durante gli anni 70 dell'Ottocento: *The Theory of Political Economy* di W.S. Jevons, *Eléments d'économie politique* di L.Walras e *Grundsătze der Volkswirtschaftslehre* di

C. Menger. É l'inizio di quella che verrà chiamata rivoluzione marginalista. All'affermazione della nuova prospettiva concorrono: la differente condizione economica reale - un periodo di minor accelerazione nella crescita porta ad interrogarsi sulla scarsità di alcuni beni essenziali al funzionamento del sistema come ad esempio il carbone - sia motivazioni interne connesse al dibattito teorico. Non è più il problema dello sviluppo ma la ricerca dell'equilibrio attraverso la miglior allocazione di risorse a spostare il baricentro degli studi economici. Passano in secondo piano le complicate analisi storiche finalizzate a cogliere le radici della situazione attuale, ma la nuova intenzione è concentrarsi sul presente e tendere alla sua gestione più efficiente. Sorge l'esigenza di liberare l'economia dai condizionamenti storici, dalle relazioni sociali, dalla politica. L'analisi economica vuole divenire una scienza, non più *Political Economy* ma solo *Economics*. Per fare questo ci si aspetta che la matematica possa adempiere ad un ruolo simile a quello giocato nella meccanica. L'elemento fondamentale della costruzione risulterà essere l'*homo oeconomicus*, chiamato a compiere un ruolo simile a quello del *punto materiale* in meccanica. L'individuo dunque si muoverà sulla base di un calcolo razionale per la massimizzazione dell'utilità. Le forze che agiranno su di lui ne determineranno l'equilibrio. Ogni individuo è colto solo nelle sue variazioni infinitesimali (o marginali), da qui il nome di tale impostazione. In rapporto con l'ortodossia del pensiero classico e con gli economisti di ispirazione socialista, i marginalisti lasciano perdere tutto quello che sembra ormai indifendibile dal punto di vista scientifico, per concentrarsi su un unico nucleo concettuale che reputano indiscutibile.

Figura fondamentale per la diffusione della rivoluzione marginalista in Italia è Vilfredo Pareto (1848-1923). Ingegnere per professione egli segna il momento di svolta in Italia quando, dopo aver ottenuto la cattedra di professore di economia politica all'università di Losanna proprio tramite Walras, redige i suoi principali trattati: *Cours d'Économie politique* del 1896 e il *Manuale di Economia matematica* del 1906 seguito dall'edizione francese del 1909. Fin dall'inizio del *Cours* inizia a tratteggiare i caratteri di quella che dovrà essere l'economia matematica:

> «La scienza di cui intraprendiamo lo studio è una scienza naturale come la psicologia, la fisiologia, la chimica, ecc. Come tale, non ha da darci precetti; studia dapprima le proprietà naturali di certe cose e risolve poi dei problemi che consistono nel chiedersi: date certe premesse, quali ne saranno le conseguenze?».

Ribadisce in una lettera al socialista Antonio Graziadei: «Finché le scienze naturali hanno ricercato "l'intima natura" delle cose, non hanno concluso nulla. Quando hanno badato solo alle relazioni tra le cose, hanno fatto meravigliosi progressi. Io dunque, guidato dall'esperienza, seguo quella via anche per le scienze sociali. E se altro vuole seguire una via diversa, s'accomodi: non litigo certo con lui». Con queste premesse Pareto costruisce la scienza economica come una scienza logico-deduttiva partendo di fatto da pochissime premesse: il criterio dell'utilità e la sua massimizzazione ricercata da ogni agente economico. Lasciamo ancora la parola a Pareto che è sicuramente il miglior difensore delle sue tesi per poi problematizzare il dibatto che ne consegue. Sempre da il *Cours*:

> Tra le scienze sociali la scienza dell'ofelimità[4] è la sola i cui risultati abbiano raggiunto un grado di precisione e di certezza paragonabile a quello delle proposizioni delle altre scienze naturali. Conviene quindi farne uno studio a sé, non foss'altro che per evitare di mischiare delle proposizioni quasi certe con altre meno certe;

mentre da una lettera di qualche anno successiva ad il *Cours* all'economista Attilio Cabiati:

> Io non so dove lei ha trovato che io sono ferocemente avverso agli operai. Non voglio, quando mi occupo di scienza, avere nessuna fede. Adorare Giove, la Vergine Maria, o il dio operaio, o democratico, per me è tutt'uno. Io studio la società dal di fuori, come un uomo può studiare l'automobilismo senza mai andare in automobile.

Il rigore delle conclusioni a cui si giunge sarà giustificato dal carattere indubitabile delle premesse e dall'uso degli strumenti matematici. Gli strumenti utilizzati sono calcolo differenziale, le derivate parziali e le condizioni di ottimo vincolato.

É scontato dire che le posizioni di Pareto non passarono inosservate, soprattutto se si considera che, pur pretendendo di essere una scienza neutrale da pregiudizi di parte, arrivava a conclusioni non molto neutrali. Un esempio importante è costituito dall'articolo *Il ministro della produzione nello stato collettivista* in cui Enrico Barone, tramite gli strumenti dell'economia marginalista, sembrava dimostrare che uno stato socialista è certo possibile ma comunque non preferibile ad uno basato sull'iniziativa privata. Uno stato collettivista ha sicuramente un sistema di equazioni più pesante e dunque difficile da computare per la sua maggiore complessità.

La questione finisce per essere un terreno di scontro fra diversi intellettuali: economisti, politici, sindacalisti di ispirazione marxista e anche filosofi. Mi limito qui ad esporre il dibatto che si venne a creare tra Pareto e Benedetto

[4] Termine con cui Pareto si riferisce all'utilità

Croce; uno dei primi a cogliere l'interesse verso le tesi paretiane. All'inizio del ventesimo secolo Pareto e Croce decidono di rendere pubbliche sul *Giornale degli economisti* le loro discussioni. Croce cerca da un lato di mettere in discussione la pretesa neutralità o capacità di studiare dal di fuori, secondo la citazione di Pareto, la società problematizzando la questione della definizione di cosa sia l'attività economica. Pareto dal canto suo replica che non gli interessa cosa si debba considerare con il termine *economico*, vuole invece portare avanti operativamente la sua analisi. Croce non può però essere d'accordo e cerca di mostrare come le scelte operate da Pareto prendono come presupposto un retroterra che non può pensare di essere oggettivo e fuori da ogni discussione. Come scrive Croce «voi parlate di ritagliare da un fenomeno concreto una fetta, e studiate questa soltanto; ed io vi domando come farete a ritagliare quella fetta? Il vostro tagliare la fetta è già un risolvere la questione del *quid* in cui consiste il fatto economico». Croce non è certo l'unico a pensarla così, emblematico è ad esempio il commento del matematico francese Emile Borel che troviamo nell'articolo *La valeur pratique du calcul des probabilités* nel 1906: «Ci sono dei casi in cui il calcolo sembra sufficiente a predeterminare le nostre decisioni ma questo in realtà succede perchè noi abbiamo già fissato, prima, una certa regola di condotta». Bisogna quindi mettere in discussione la regola di condotta e le sue premesse metodologiche prima di considerare come indiscutibili i risultati. Nel caso di Pareto, non risulterà riduttivo cercare di spiegare i fenomeni economici considerando gli agenti in qualità di *homo oeconomicus*?

Il lettore avrà notato come non sia emerso nella ricostruzione il tema dell'utilizzo di modelli matematici ma semplicemente l'utilizzo della matematica in economia. Questo dipende dal fatto che anche la nozione di modello, così come mi è interessato discuterla, si sta delineando in questo periodo. Ad esempio, una delle prime definizioni di modello viene data proprio da Volterra durante il discorso inaugurale dell'anno accademico 1901-1902 presso l'università di Roma dove aveva appena ottenuto il trasferimento.

> Un modello è costruito con la sola condizione che, quando sia posto in moto, certe sue parti si spostino o mutino seguendo le stesse leggi con cui cambiano altrettanti elementi variabili nel fenomeno.

Nonostante ciò gli autori appena considerati evidenziano per la prima volta un problema che non smetterà di fornire temi di discussione fino ad oggi. L'utilizzo degli strumenti matematici e la loro preponderanza rimane una questione problematica all'interno delle diverse scuole di pensiero economico. Particolarmente spinosa risulta essere l'individuazione di ipotesi da cui poter partire. Se pensiamo all'*homo oeconomicus* di Pareto come premessa

- da lui considerata indubitabile - e le considerazioni di Croce che problematizzano questa assunzione si comprenderà che non è sempre facile trovare le formalizzazioni che catturano gli elementi costitutivi di un fenomeno economico. Questi problemi sono lontani dall'appartenere solo ad alcuni autori di fine Ottocento. Si pensi come ad esempio la razionalità e l'egoismo degli individui siano tra le ipotesi fondamentali della ortodossia economica neoclassica e come Goodwin stesso consideri due gruppi intenti solamente a massimizzare il proprio profitto a discapito del gruppo avversario. Le difficoltà dimostrate da questa scuola di pensiero nell'omologare gli specialisti in questa opinione è sintomo del fatto che questo sia ancora un problema in buona parte aperto [Rosser-Jr., 2009].

Vorrei recuperare alcuni punti conclusivi. La problematicità di individuare premesse a cui applicare gli strumenti matematici nelle scienze economiche sembra essere un carattere distintivo di questa materia. Si può notare confrontando la verosimiglianza delle ipotesi fatte da Volterra con quelle fatte da Goodwin. Le prime, se pur alla luce dei problemi trattati in conclusione del primo capitolo, risultano essere più conformi alla realtà. Questo problema non tardò ad essere al centro di discussioni come dimostra il dibattito tra Pareto e Croce. É necessario chiedersi quale sia il ruolo delle ipotesi irrealistiche all'interno di modelli economici e quali siano le relative prerogative.

2.3 Uskali Mäki e le ipotesi poco realistiche

Ismo Uskali Mäki, filosofo della scienza e dell'economia, si è a lungo occupato dell'uso di modelli matematici nelle scienze economiche. Confrontiamoci in conclusione con alcune sue considerazioni sul problema trattato in questo capitolo a partire dall'articolo *Realistic realism about unrealistic models* [Mäki, 2009], in cui ripercorre e sintetizza il suo pensiero riguardo l'economia.

> all models are false anyway, they are to be judged only in terms of convenience and instrumental usefulness [Mäki, 2009]

Abbiamo già considerato il carattere semplificatore dei modelli e il conseguente non poter mai combaciare perfettamente al fenomeno reale. Ogni modello è falso ma va giudicato solo in termini di convenienza. Per capire cosa intende con questo Mäki riporto la schematizzazione dello studio tramite modello esposta nell'articolo.

Un ricercatore A usa un oggetto M (il modello) come rappresentazione di un sistema R per un obbiettivo P, ingaggiando un uditorio E, al quale fornisce prove di somiglianza fra M e R ed una narrazione C (commentary) per identificare la relazione fra questi due elementi.

Un modello è dunque rivolto a rappresentare alcuni elementi del fenomeno reale e metterne in relazione solo alcune parti. Il fatto che il modello sia in grado di rappresentare solo alcuni caratteri e non ogni arbitraria caratteristica del fenomeno è un presupposto di questo strumento.

> Idealizaing assumptions are false, they distort the facts. But these falsehoods are not errors.

I modelli sono dunque sistemi surrogati del sistema reale e l'indagine economica concerne le proprietà di questi surrogati. In questo i modelli economici non si discostano molto da modelli di altre scienze empiriche, come la fisica. Basti pensare a idealizzazioni come: corpi perfettamente rigidi, pianeti considerati punti materiali o l'assenza di attrito. Mäki propone che le *idealizzazioni false* abbiano un importante ruolo paragonabile all'isolazione sperimentale. Così come in laboratorio si isolano degli elementi dal resto del sistema per poter studiare dei meccanismi particolari che risulterebbe altrimenti intrattabili, si isolano nei modelli alcuni caratteri ignorandone altri. Questa idealizzazione non risulta essere un errore ma una chiara scelta metodologica. Questo ci ricorda la risposta di Goodwin esposta nel primo paragrafo del capitolo rispetto alle critiche relative alle sue ipotesi. Riconsiderando i problemi trattati precedentemente, si potrebbe dunque sostenere che Goodwin sia interessato a studiare semplicemente la dinamica oscillatoria solo alla luce del conflitto tra lavoratori e capitalisti; Pareto al contrario giustificato nel premettere il criterio di utilità perchè interessato solo ai soggetti economici in quanto essi sono strumentalmente interessati solo alla massimizzazione del proprio utile, ricercato secondo razionalità.

Consideriamo ad esempio il primo modello economico. J.H. von Thűnen costruisce un modello riguardo l'uso del suolo per scopi agricoli nell'articolo tradotto in inglese come *Isolated State* [von Thunen, 1842]. Le assunzioni sono le seguenti: la città non ha dimensioni (è un punto), non ci sono altre città, non ci sono fiumi montagne o valli, vige l'omogeneità per quanto riguarda la fertilità ed il clima, i costi di trasporto sono funzioni della distanza, lo stato è isolato dal resto del mondo e gli agenti sono razionali. Egli mostra come si formano zone concentriche di produzione agricola attorno alla città centrale ognuna delle quali adempie ad esigenze diverse. É ovvio che un pattern come questo non si presenti nel mondo reale dove tutte queste ipotesi sono smentite ma come sostiene Mäki, gli economisti posso essere realisti anche se i loro modelli descrivono solo situazioni immaginarie non realistiche.

Sicuramente quella di Mäki è un'opportuna giustificazione di come il carattere surrogato dei modelli non debba essere un ostacolo al loro utilizzo. Nonostante ciò va considerato come non tutte le idealizzazioni si rivelino ugualmente utili. Anche se è giustificato l'utilizzo di semplificazioni questo non significa che sia giustificata qualsiasi idealizzazione. La valutazione sulla bontà delle premesse rimane un elemento imprescindibile, altrimenti si rischierebbe di utilizzare modelli che deducono meccanismi che, non avendo nessun legame con il fenomeno, possono condurre a risultati altrettanto slegati dal sistema reale. Immaginiamo con un esperimento mentale di essere interessati a modellizzare un fenomeno come la caduta dei corpi. Se fossimo interessati a quantificare il tempo di caduta di corpi abbastanza semplici (come delle biglie) possiamo senza troppi indugi decidere di ignorare l'attrito dell'aria in quanto fattore di poca importanza rispetto ad altezze relativamente piccole. Se invece fossimo interessati a studiare la caduta di una piuma ignorare l'attrito dell'aria equivarrebbe ad ignorare il fattore più importante del problema. Questo ci permette di chiederci: se fossimo interessati a conoscere un fenomeno come valuteremo la pertinenza delle ipotesi alla domanda di studio? Come ci possiamo assicurare di star tagliando dall'esperimento mentale, che è il modello, caratteri fondamentali per dare una risposta al nostro dubbio? Riprendendo la seconda alternativa alle ipotesi di Volterra analizzata precedentemente: e se le fluttuazioni di predatori dipendessero solamente dalle seppie? O invece se l'andamento oscillatorio dell'economia fosse strettamente legato all'andamento caotico del progresso tecnologico e della crescita demografica? Sicuramente lo studio secondo modelli matematici tenterà di smarcarsi da questa problematica nel tempo secondo una logica di prova ed errori. Il permanere di questo problema mi conduce a ipotizzare che una ricerca di questo tipo può dare il suo meglio solo se accompagnata da una discussione metodologica e una preformale del fenomeno.

In conclusione, alla luce di una giustificazione metodologica conclusiva sull'utilizzo di ipotesi irrealistiche, abbiamo considerato come non permetta di non problematizzare, dato un modello, la pertinenza delle ipotesi iniziali al fenomeno di interesse. Spero dunque di essere stato in grado di spiegare che una profonda trattazione dei caratteri del fenomeno preliminarmente alla costruzione di un qualunque modello sia un passaggio necessario per una corretta valutazione dei risultati del modello stesso; altrimenti si rischia di concentrarsi su variabili secondarie rispetto al problema di interesse. In generale questo ci permette di sostenere come alla formalizzazione matematica di un fenomeno vada accompagnata non solo un'interpretazione verbale, come riportato nell'epigrafe di von Neuman nell'introduzione, ma una vera e propria trattazione che renda conto dei diversi problemi che sorgono a partire dall'applicazione di questa pratica in una data area di interesse e da una relativa discussione del legame fra caratteri del fenomeno e ipotesi scelte.

Conclusioni

La domanda che mi sono posto all'inizio di questo elaborato era: come valutare la verosimiglianza delle ipotesi di partenza di un modello matematico? Mi sono servito di un esempio, il modello Lotka-Volterra, prima tramite lo studio di Volterra, come prova di quante scelte diverse possa compiere un ricercatore e di come queste siano più o meno adeguate secondo i caratteri del fenomeno reale; successivamente dell'applicazione economica di Goodwin per problematizzare l'utilizzo di questo metodo di studio in un'area particolare ed il conseguente l'utilizzo di ipotesi inverosimili. Questo dovrebbe aver mostrato quanto del modello vada ricondotto alla discrezione dell'autore. Torniamo dunque alla considerazione da cui è partita la trattazione, ovvero, la matematica ci fornisce procedimenti da seguire per risolvere alcuni problemi, ma non ci dice come o quale modello costruire. Il suo utilizzo garantisce una certa oggettività o universalità ai risultati, richiamata più volte con le parole di Pareto, ma sembra difficile immaginare di risolvere in maniera esaustiva il problema della scelta di un modello. Alla luce di tutto questo deduciamo che il semplice utilizzo della matematica non è condizione sufficiente di risultati affidabili e conclusioni corrette. Se comunque *l'interpretazione dei risultati* permetterà di valutare quanto il modello rispecchi l'andamento reale, ho voluto approfondire come anche la verosimiglianza delle ipotesi sia un elemento imprescindibile. Questa non potrà che essere discussa sulla base di conoscenze pregresse. Particolare rilevanza va data agli studi del fenomeno fatti secondo altri metodi, ad esempio non formali o quantitativi. Nel caso dell'applicazione biologica del modello Lotka-Volterra, una profonda conoscenza dell'ecosistema e delle sue dinamiche caratteristiche ci permetterà di valutare la pertinenza delle formalizzazioni fatte.

Recuperiamo la distinzione tra saperi dimostrativi e saperi retorici, secondo la formulazione di Olivier Reboul, per concludere il ragionamento.

> Queste, come scienze dimostrative, approdano a verità necessarie, che, come i teoremi, non possono essere altro che quello che sono, e che per-

> mettono così di pervenire a una comprensione certa e di fare previsioni altrettanto certe. La retorica invece non approda che al verosimile, ciò che il più delle volte si verifica, ma che potrebbe tuttavia prodursi altrimenti. [Reboul, 2002]

Questa distinzione si poggia sul metodo con cui si argomentano i contenuti ed il valore che si attribuisce ai risultati. I saperi dimostrativi assumono un metodo dimostrativo logico-deduttivo e la modalità con cui giungono ai risultati è la necessità. I saperi retorici invece, a partire da premesse più deboli, assumono un metodo argomentativo retorico non dettato da necessità ma da verosimiglianza. Spero di aver mostrato in questa tesi come le premesse scelte da un ricercatore vadano giustificate secondo la modalità retorica, in particolare mi riferisco alle scelte di modellizzazione e alla scelta metodologica di utilizzare un modello matematico. Propongo dunque che si consideri lo studio secondo modelli matematici un metodo ibrido; in cui si alternano fasi retoriche con fasi dimostrative. La presenza di entrambi rimane un aspetto imprescindibile del suo utilizzo. In questo senso lo stesso modello Lotka-Volterra, nelle sue due applicazioni studiate, si è rivelato un'applicazione di proprietà tipiche dei contenuti dei saperi dimostrativi (analisi matematica) a partire da considerazioni che sfuggono al puro interesse di questa materia. La giustificazione retorica di alcune premesse risulta essenziale per poter rispondere ai dubbi che lo stesso studio esibiva riguardo le ipotesi di partenza. É in questo senso che propongo, come strumento di valutazione di un modello matematico, un approccio interdisciplinare che sappia tenere conto dei diversi metodi necessari alla difesa della validità di un tale oggetto di studio e alla comprensione della sua portata.

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Hykel Hosni, non solo per avermi guidato in questo lavoro, ma per tutte le volte, in aula e fuori, che mi ha stimolato portandomi a riflettere e spingendomi a capire profondamente gli argomenti di studio. Voglio ringraziare vivamente anche altri docenti che mi hanno aiutato in questi mesi, prima di tutti il professor Marcello D'Agostino per la disponibilità a seguirmi nella conclusione di questo percorso. Un ringraziamento va anche ai professori Giovanni Puccetti e Francesco Guala i quali hanno dato un apporto fondamentale alla bibliografia.

Sono molti i compagni di studio, discussioni e ricerche che sono stati una parte fondamentale di questo lavoro ed in generale della mia formazione lungo questi anni, per citarne alcuni: Filippo Greggi, Tommaso Alberti, Riccardo Orlando, Domiziana Curci, Cecilia Deluca, Giora Bassanelli, Giacomo Della Volta e Davide Riva. Vi ringrazio sperando che il futuro ci riservi ancora l'occasione di poter trarre profitto dalla vostra compagnia e ricchezza. Ringrazio anche chi si è reso disponibile ad aiutarmi in alcune questioni puntuali riguardo questa tesi, come: Samuele Livrieri, Riccardo Pirovano e Roberto Cesa.

L'ultimo pensiero va alla mia grande famiglia - formata da: genitori, fratelli e amici - il cui supporto costante, mi ha permesso di affrontare questa e le altre sfide che la vita porta con sè. Più di tutti però Arianna ed Ettore che ogni giorno mi spingono a dare il meglio di me stesso e che mi hanno accompagnato con pazienza in ogni aspetto e fase di questo lavoro.

Bibliografia

[Bianchini, 1982] Bianchini, M. (1982). *Alle origini della scienza economica: felicità pubblica e matematica sociale negli economisti italiani del settecento*. Editrice Studium Parmense.

[G.I.Bischi et al., 2004] G.I.Bischi, R.Carini, L.Gardini, and P.Tenti (2004). *Sulle orme del caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*. Mondadori Bruno.

[Goodfrey-Smith, 2009] Goodfrey-Smith, P. (2009). Models and fictions in science. *Philosophical Studies*.

[Guerraggio, 2013] Guerraggio, A. (2013). *15 grandi idee matematiche che hanno cambiato la storia*. Mondadori Bruno.

[Guerraggio, 2018] Guerraggio, A. (2018). *Matematica per le scienze*. Pearson.

[Hosni and Vulpiani, 2017] Hosni, H. and Vulpiani, A. (2017). Forecasting in light of big data. *Philosophy and Technology*.

[Hosni and Vulpiani, 2018] Hosni, H. and Vulpiani, A. (2018). Data science and the art of modelling. *Lettera Matematica*.

[Israel, 2015] Israel, G. (2015). *La matematica e la realtà*. Carocci Editore.

[Lokta, 1920] Lokta, A. J. (1920). Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

[Malthus, 1798] Malthus, T. R. (1798). An essay on the principle of population.

[Mäki, 2009] Mäki, I. U. (2009). Realistic realism about unrealistic models. *Oxford Handbook of the Phylosophy of Economics*.

[Reboul, 2002] Reboul, O. (2002). *Introduzione alla retorica*. Mulino.

[Rizzi, 2006] Rizzi, A. (2006). http://matematica-old.unibocconi.it/rizzi/secondo/modello2.htm. [Online; visualizzato il 28-01-2020].

[Rosser-Jr., 2009] Rosser-Jr., J. B. (2009). Frontiere della ricerca economica. *Enciclopedia Treccani, Lessico del XXI Secolo.*

[Rényi, 1965] Rényi, A. (1965). *A dialogue on the application of mathematics.* Holden-Day.

[Verhulst, 1838] Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique.*

[Volterra, 1901] Volterra, V. (1901). Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali. *Discorso presso R. Università di Roma.*

[von Thunen, 1842] von Thunen, J. H. (1842). Der isolierte staat in beziehung auf landwirtschaft und nationalonomie.