Programmazione Lineare (PL)

La programmazione lineare (PL) è quella branca della ricerca operativa che si occupa di studiare algoritmi di risoluzione per problemi di ottimizzazione lineari.

1. Problema di produzione

Esempio 1.1 una ditta produce LaminatoA, LaminatoB. Per la produzione, si deve passare dai reparti Materie Prime, Taglio, FinituraA, FinituraB. Il guadagno è di €8.400 e €11.200 rispettivamente. Ogni reparto impiega un certo numero di ore, vincolate secondo la seguente tabella.

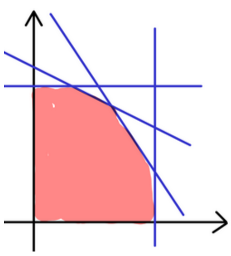
Reparto	**Vincolo**	**LaminatoA**	**LaminatoB**
Materie Prime	$120h$	$30h$	$20h$
Taglio	$80h$	$10h$	$20h$
FinituraA	$62h$	$20h$	
FinituraB	$105h$		$30h$

Abbiamo una **funzione obbiettivo** da massimizzare, e dei **vincoli**. Una **regione ammissibile** è l'insieme delle **soluzioni ammissibili** i.e. le soluzioni che rispettano i vincoli. La **soluzione ottima** è, tra le funzioni ammissibili, quella che massimizza la funzione obbiettivo.

$$\text{Modello matematico: } \begin{cases} \max 8.4x_A + 11.2x_B, \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ 30x_A + 20x_B \leqslant 120 \\ 10x_A + 20x_B \leqslant 80 \\ 20x_A \qquad\quad \leqslant 62 \\ \qquad\quad 30x_B \leqslant 105 \end{cases}$$

$$\text{Siano } A = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 20 \\ 20 & 0 \\ 0 & 30 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 62 \\ 105 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 8.4 & 11.2 \end{bmatrix} \therefore (p) = \begin{cases} \max c^T \cdot x \\ A \cdot x \leqslant b \end{cases}$$

Abbiamo aggiunto il vincolo $(x_A, x_B) \geqslant 0 \iff -x_A \leqslant 0, \; -x_B \leqslant 0$



La regione ammissibile è un'intersezione di semipiani i.e. un poliedro in $\mathbb{R}^2$

Modello.

Problema di produzione:
Problema di ottimizzazione in cui si devono allocare risorse limitate (materie prime, tempo, forza lavoro...) per massimizzare il guadagno, o minimizzare i costi, rispettando una serie di vincoli (capacità produttiva, disponibilità di risorse, domanda di mercato...)

$$(p)\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leqslant b \quad \text{massimizza il guadagno} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad (q)\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geqslant b \quad \text{minimizza il costo} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1. Formati standard

Un problema di programmazione lineare (PL) è un problema di min / max di una funzione lineare soggetta a vincoli lineari. Un **formato standard** è un formato che racchiude tutti i problemi.

$$(p) = \begin{cases} \min / \max c^T \cdot x \\ Ax \leqslant b \\ Bx \geqslant d \\ Cx = e \end{cases}$$

Definizione.

Definizione (formato primale standard):

Un problema di PL in **formato primale standard** è $(p) = \begin{cases} \max c^T \cdot x \\ Ax \leqslant b \end{cases}$

dove $c, x \in \mathbb{R}^n,\ \ A \in \mathbb{R}^{n \times m},\ \ b \in \mathbb{R}^m$

Siccome è un formato primale **standard**, vuol dire che può risolvere tutti i problemi di programmazione lineare. Per trasformare un problema di PL da un formato standard all'altro si devono usare alcuni "trucchi":

- $\geqslant \longleftrightarrow \leqslant$ moltiplicando per -1
- $= \longleftrightarrow \leqslant$ imponendo che sia $\leqslant$, $\geqslant$ contemporaneamente
- $\max \longleftrightarrow \min$ poiché $\max f = -\min -f$

In seguito ne vedremo anche altri due:

- $\leqslant \ \to \ = \ , \ \geqslant$
- $x \geqslant 0 \to x_i = x_i^{++} - x_i^{+},\ \ x_i^{++} \geqslant x_i^{+} \geqslant 0$

1.2. Regione ammissibile e soluzione ottima

La regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro P, definibile in due modi:

1. **Poliedro algebrico:** $Ax \leqslant b$
2. **Poliedro geometrico:** intersezione di un numero finito di semispazi chiusi i.e. il cui bordo appartiene ai vincoli ($\leqslant$)

Osservo che $\nabla(c \cdot x) = c \neq 0$. Quindi, per il teorema di Fermat, i punti interni non possono essere di massimo. Per il teorema di Weierstrass, la soluzione, se esiste, deve trovarsi sul bordo.

Proposizione.

- $(p) = +\infty$, se il poliedro è illimitato. Vuol dire che ci siamo dimenticati dei vincoli
- $P = \emptyset$ i.e. $\max c \cdot x = -\infty \implies$ il poliedro è vuoto, ci sono troppi vincoli. In tal caso si può fare un **ranking dei vincoli** ed eliminare quello meno importante

Per trovare la soluzione ottima graficamente si usano le **linee di isoguadagno**, che hanno equazione $c \cdot x = k$

Il vettore c è il gradiente di $c \cdot x$, ovvero la direzione di massima crescenza della funzione obbiettivo. Devo quindi trovare l'ultimo punto prima che la retta di isoguadagno esca dal poliedro.

Attenzione: non è vero in generale che la soluzione ottima sta sul vertice. Può accadere che c sia perpendicolare allo spigolo; in tal caso ci sono infinite soluzioni, poiché la linea di isoguadagno passa per tutto lo spigolo. Il **cono di competenza** indica il range di vettori c tali per cui un certo vertice è soluzione ottima.

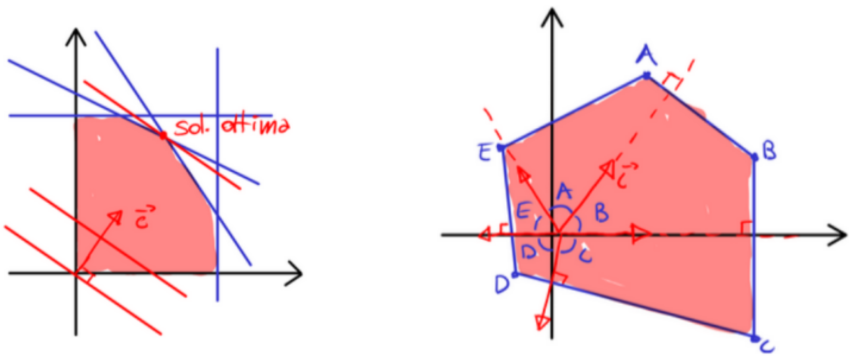


Figura 1: le linee di isoguadagno sono perpendicolari a $\vec{c}$.

Figura 2: coni di competenza. Se, per esempio, il vettore $\vec{c}$ si trova nell'angolo β, lo spigolo B è la soluzione ottima.

Proposizione.

Se ci sono due soluzioni ottime, ci sono infinite soluzioni ottime.

Dimostrazione:
Siano z, w soluzioni ottime. Il segmento che le congiunge ha equazione $\lambda z + (1-\lambda)w,\ \ \lambda \in [0,1]$.
La funzione obbiettivo del segmento è il segmento stesso poiché $c^T(\lambda z + (1-\lambda)w) =$
$= \lambda c^T z(1-\lambda)c^T w = \lambda v(1-\lambda)v = \vec{v}$. Quindi tutto il segmento è fatto di soluzioni ottime. □

2. Problema di assegnamento

Esempio 2.1 n-persone, n-lavori, ogni persona ha un costo per ogni lavoro. Voglio fare un'associazione biunivoca che minimizza il costo. Gli assegnamenti diversi sono le permutazioni $n!$, non posso andare di forza bruta.

	Lavoro 1	**Lavoro 2**	**Lavoro 3**	**Lavoro 4**
Persona 1	20	18	16	14
Persona 2	22	16	19	15
Persona 3	21	17	15	23
Persona 4	19	18	14	24

Modello matematico:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{la persona non lavora} \\ 1, & \text{la persona lavora} \end{cases}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}$$

Nei vincoli devo mettere che ogni lavoro deve essere svolto esattamente da una persona (primi 4), che ogni persona deve svolgere esattamente un lavoro (secondi 4), e infine che $x_{ij} \geqslant 0$

$$(p) = \begin{cases} \min c^T x = \min 20x_{11} + 18x_{12} + ... + 24x_{44} \\ 1.\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad 5.\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ 2.\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad 6.\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ 3.\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad 7.\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ 4.\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad 8.\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ 9.\ x_{ij} \geqslant 0\ \forall i, j \in [0,4] \end{cases}$$

x_{ij} potrebbe essere compreso in $]0,1[$, per cui si ha un **assegnamento cooperativo**. Se si vogliono solo x_{ij} booleani, si ha un **assegnamento non cooperativo** (non è più PL)

Modello.

Problema di assegnamento:
Il problema di assegnamento è un problema di ottimizzazione combinatoria in cui si cerca di assegnare un insieme di risorse o lavoratori a un insieme di compiti o attività in modo da minimizzare i costi totali.

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{dove } c, x \in \mathbb{R}^{n^2}, A \in \mathbb{R}^{2n \times n}, \; b \in \mathbb{R}^{2n}$$

Definizione.

Definizione (formato duale standard):

Un problema di PL in **formato duale standard** è $(p) = \begin{cases} \min c^T \cdot x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

dove $c, x \in \mathbb{R}^{n^2}, \; A \in \mathbb{R}^{2n \times n}, \; b \in \mathbb{R}^{2n}$

"Trucco" dello slack:
Alcuni programmi potrebbero non supportare solo i formati duali standard, per cui bisogna aggiungere il "trucco" n.4, che ci permette di trasformare $\leqslant \; \rightarrow \; = \; , \; \geqslant 0$

$$3x_1 + x_2 \leqslant 5 \equiv \begin{cases} 3x_1 + x_2 + Slack = 5 \\ Slack \geqslant 0 \end{cases}$$

Esempio 2.2 $\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \end{cases}$ è in formato standard?

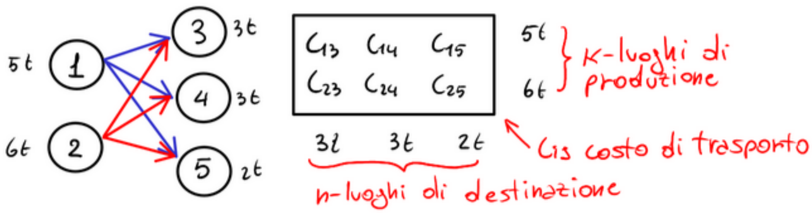
Se è riconducibile a un formato primale standard, allora è standard (risolve tutti i problemi di PL). Non è standard poiché lo slack dev'essere positivo.

Esempio 2.3 $\begin{cases} \min 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 - x_2 \leqslant 7 \;, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ trasformare nel formato sduale standard $\begin{cases} \min c^T \cdot x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \min 3x_1 + x_2 + 0x_3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ in questo caso , e lo si riconosce nei problemi di PL perché ha coefficiente nullo nella funzione obbiettivo e compare in un solo vincolo

3. Problema di trasporto

Esempio 3.1 Uno spedizioniere deve trasportare 11 tonnellate di prodotto divisibile. I suoi spedizionieri possono trasportare al massimo 5 tonnellate e 6 tonnellate, rispettivamente. Gli acquirenti hanno bisogno di almeno 3 tonnellate, 3 tonnellate, 2 tonnellate, rispettivamente. Si ipotizza che gli spedizionieri non possano comunicare tra loro, così come gli acquirenti.



$x = (x_{13},\ x_{14},\ x_{15},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{25})$. $\overline{x} = (3, 2, 0, 0, 1, 2)$ è una soluzione ammissibile.

$$\text{Modello matematico:} \begin{cases} \min c_{13}x_{13} + x_{14}c_{14} + x_{15}c_{15} + x_{23}c_{23} + x_{24}c_{24} + x_{25}c_{25} \\ \left.\begin{array}{l} x_{13} + x_{14} + x_{15} \leqslant 5 \\ x_{23} + x_{24} + x_{25} \leqslant 6 \end{array}\right\} \text{vincoli di produzione} \\ \left.\begin{array}{l} x_{13} + x_{23} \geqslant 3 \\ x_{14} + x_{24} \geqslant 3 \\ x_{15} + x_{25} \geqslant 2 \end{array}\right\} \text{vincoli di destinazione} \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

Nei vincoli di destinazione ci va $\geqslant$ perché si ipotizza che un acquirente accetti prodotto in più da mettere in stoccaggio.

Modello.

Problema di trasporto:
Determinare il modo più efficiente di distribuire una certa quantità di merce da più punti di origine (magazzini, fabbriche) a più punti di destinazione (clienti, magazzini di distribuzione), minimizzando i costi di trasporto.

$$(p) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_j \ \forall j = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant o_i \ \forall i = 1, \ldots, m \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

4. Teoria della PL

Enunciamo tre teoremi che ci aiutano a trovare una soluzione ottima a problemi di PL. Prima, però, alcune definizioni.

Definizione.

Definizione (combinazione convessa):
Siano $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^n$
y si dice combinazione convessa di $x^1, \dots, x^k$ se
$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \ t.c. \ y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$
Ovvero se esistono k-coefficienti λ_i tra 0 e 1, a somma 1 tali che $y = \lambda_1 x^i + \dots + \lambda_k x^k$

Questo concetto è molto simile alla combinazione lineare di $\{x^1, \dots, x^k\}$, solo che i coefficienti λ_i hanno delle proprietà aggiuntive.

Definizione.

Definizione (involucro convesso):
L'involucro convesso di $x^1, \dots, x^k$ ($\text{conv}\{x^1, \dots, x^k\}$) è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di $x^k, \dots, x^k$.

Esempio 4.1 in $\mathbb{R}^2$:

- $k = 1 \implies y = \lambda_1 x^1 = 1x^1$, le combinazioni convesse di un punto sono il punto stesso
- $k = 2 \implies y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ dove $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \ \lambda \in [0,1]$
  $\text{conv}\{x^1, x^2\}$ è il segmento che congiunge x^1, x^2
- $k = 3 \implies \text{conv}\{x^1, x^2, x^3\}$ è il triangolo che ha come vertici i punti x^1, x^2, x^3. Questo si vede ponendo a zero uno dei punti $(\lambda_i = 0)$, ottenendo come conv il segmento che congiunge gli altri due.

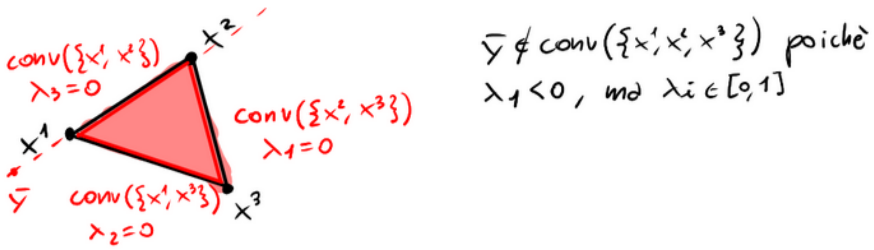


Figura 3: $\text{conv}\{x^1, x^2, x^3\}$

Ricordiamo che un insieme convesso K è un insieme dove il segmento che congiunge due punti qualsiasi "non esce" dall'insieme, ovvero $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K \ \forall x^1, x^2, \lambda \in [0,1]$.
Si può dimostrare che $\text{conv}\left\{x^1, \dots, x^k\right\}$ è il più piccolo insieme convesso che contiene $x^1, \dots, x^k$
$\therefore$ un insieme convesso K coincide con il suo $\text{conv}(K)$.

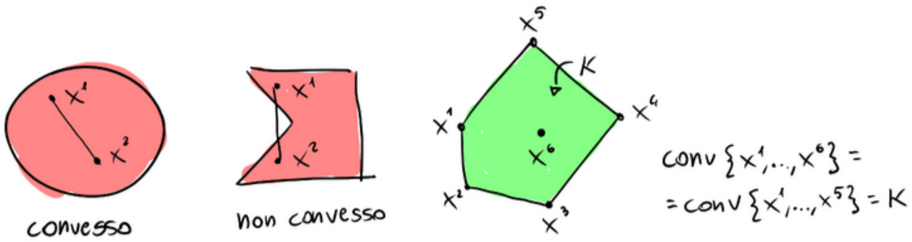


Figura 4: Insiemi convessi e non convessi, K convesso $=$ $\text{conv}(K)$

Definizione.

Definizione (combinazione conica):
Siano $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^n$
y si dice combinazione conica di $x^1, \dots, x^k$ se

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+ \ t.c. \ y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

Ovvero se esistono k-coefficienti λ_i positivi tali che $y = \lambda_1 x^i + \ldots + \lambda_k x^k$

Definizione.

Definizione (cono):
Un cono K è un insieme tale che se contiene un punto di K, diverso dall'origine, allora contiene anche tutta la semiretta uscente dall'origine passante per quel punto.
Ovvero $\lambda x \in K \ \forall x \in K, \ \lambda \geqslant 0$.

I coni possono essere convessi o non. A noi interesseranno i coni convessi.

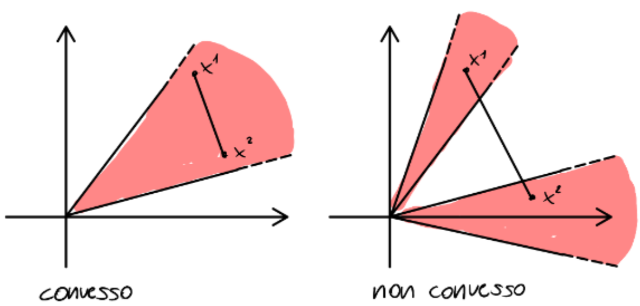


Figura 5: Cono convesso e cono non convesso

Definizione.

Definizione (involucro conico):
L'involucro conico di $x^1, \ldots, x^k$ ($\text{cono}\left\{x^1, \ldots, x^k\right\}$) è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di $x^k, \ldots, x^k$.

Similmente all'involucro convesso, si può dimostrare che $\text{cono}\left\{x^1, \ldots, x^k\right\}$ è il più piccolo cono convesso che contiene $x^1, \ldots, x^k$ $\therefore$ un cono convesso K coincide con il suo $\text{cono}(K)$.

Per esempio, per $k = 1$, $\text{cono}(x^1)$ è una retta; per $k = 2$, $\text{cono}(x^1, x^2)$ è un cono convesso come nella figura precedente, dove x^1, x^2 sono punti del bordo.

Esempio 4.2 $\text{cono}\{(1,0),(0,1),(1,1)\} = \text{cono}\{(1,0),(0,1)\}$ è il primo quadrante poiché $(1,1)$ è una combinazione conica di $(1,0)$, $(0,1)$ ovvero $(1,1)$ è **conicamente dipendente** dagli altri due vettori.

4.1. Teorema di rappresentazione dei poliedri

O anche chiamato Teorema di Weil, il primo teorema del corso ci fornisce una **rappresentazione** di un poliedro, ovvero una condizione necessaria e sufficiente per caratterizzarlo.

TEOREMA.

Teorema (di rappresentazione dei poliedri):
Dato un poliedro $P = \{Ax \leqslant b\}$, allora
$\exists V = \left\{v^1, \ldots, v^k\right\} \subseteq P,\ \exists E = \left\{e^1, \ldots, e^p\right\} \subset \mathbb{R}^n\ t.c.\ \ P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$

La somma tra insiemi $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$ significa $\left\{a + b : a \in \text{conv}(V),\ b \in \text{cono}(E)\right\}$

Esempio 4.3

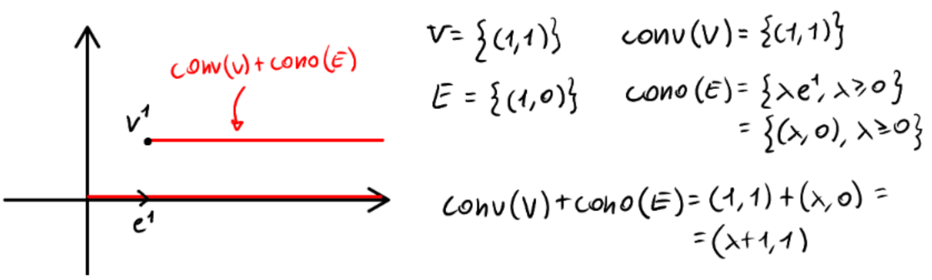


Figura 6: vettori λe^1 applicati a un punto

Conviene considerare V come un insieme di punti e E come un insieme di vettori: sommare $\text{conv}(V) + \text{cono}(E)$ significa **applicare i vettori di E sui punti di V.**

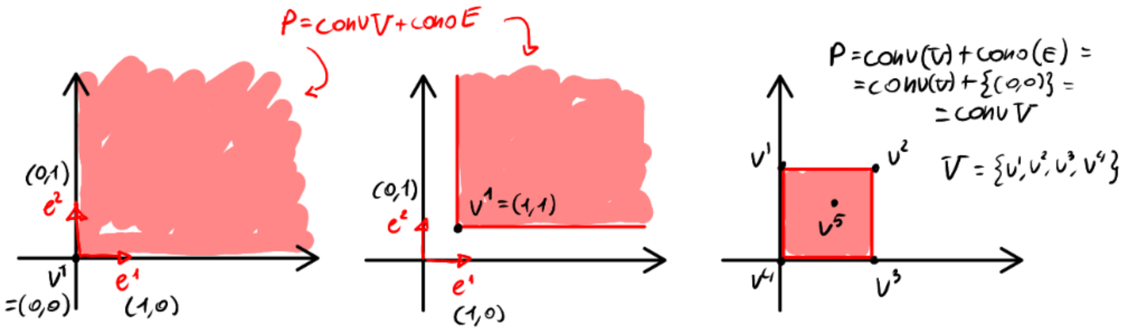


Figura 7: Altri esempi di $\text{conv}(V) + \text{cono}(E)$

È importante sapersi muovere tra le tre forme dei poliedri: **algebrica** ($Ax \leqslant b$), **geometrica** (intersezione di sottospazi) e **forma di Weil** ($\text{conv}(V) + \text{cono}(E)$)

4.2. Teorema fondamentale della PL

Il teorema fondamentale della PL, combinato al Teorema di Weil e ad altre considerazioni, ci permette di giungere a un importante risultato per la risoluzione di problemi di PL.

TEOREMA.

Teorema (fondamentale della PL):

Sia $(p) = \begin{cases} \max c^T \cdot x \\ Ax \leqslant b \end{cases}$ un problema di PL in forma primale standard, e sia V, E la rappresentazione del poliedro in forma di Weil. Vale una delle tre opzioni:

1. $P = \emptyset$, per cui ci sono troppi vincoli
2. $\max c^T x = +\infty$, ho dimenticato vincoli
3. $\exists r \in \{1, \ldots, k\} : v^r \in V$ è soluzione ottima di (p)

Ovvero, se il poliedro non è vuoto e il problema è limitato, esiste un elemento di V che è soluzione ottima.

Dimostrazione:

Sia dato un problema di PL in formato primale standard, e sia $\overline{x} \in P$ una soluzione ammissibile.

$$\overline{x} = \text{conv}(V) + \text{cono}(E) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i v^i + \sum_{i=1}^{p} \overline{\mu}_i e^i \qquad \text{dove } \overline{\lambda}_i \in [0,1],\ \Sigma\overline{\lambda}_i = 1,\ \overline{\mu}_i \geqslant 0$$

$$c^T \cdot \overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i (v^i \cdot c^T) + \sum_{i=1}^{p} \overline{\mu}_i (e^i \cdot c)$$

Se un solo prodotto scalare $e^i \cdot c > 0$, allora $(p) = +\infty$.

Se i prodotti scalari $e^i \cdot c \leqslant 0\ \forall i$, allora la soluzione di $\max c^T \cdot x = c \cdot v^r$ è il v^r più alto tra tutti i v^i □

- Per verificare che $P \neq \emptyset$ basta trovare una soluzione ammissibile
- Per verificare che $(p) < +\infty$ devo fare i prodotti scalari $c^T e_j$ $\forall j = 1 \dots p$. Se solo uno di questi prodotti scalari è positivo, allora $(p) = +\infty$. Il problema è che non ho un algoritmo per calcolare gli e_j. Quindi potrebbe tornare utile una verifica geometrica, disegnando il poliedro.

Definizione.

Definizione (vertice):
Sia P un poliedro. Un punto $\overline{x} \in P$ si dice vertice se non si può esprimere come combinazione convessa di due punti di P diversi da $\overline{x}$. (i.e. combinazione convessa propria)

Proposizione.

Proposizione 1: se il poliedro P è limitato, allora $E = \{\vec{0}\}$ quindi cono$(E) = \emptyset$ i.e. non ci sono direzioni di recessione (gli "insostituibili" di E). Inoltre, i poliedri limitati hanno vertici.

Proposizione 2: i vertici sono gli unici punti insostituibili nella combinazione convessa della rappresentazione di Weil, per cui, se il poliedro P ha vertici, allora $V = \left\{\text{vert}(P)\right\}$

Combinandole assieme: Se P è limitato, $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E) = \text{conv}\left\{\text{vert}(P)\right\}$

Attenzione: un poliedro può non avere vertici, ma posso comunque trovare la sua rappresentazione di Weil. I poliedri senza vertici in $\mathbb{R}^2$ sono i **semipiani**, le **strisce** e le **rette**.

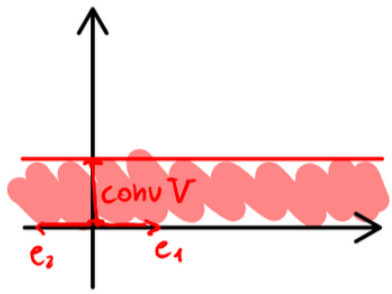


Figura 8: Poliedro senza vertici

Osservazione: i poliedri senza vertici sono quelli che contengono una retta. Se nei vincoli c'è $x \geqslant 0$, allora il poliedro ha almeno un vertice.

Combiniamo ora le proposizioni e il teorema fondamentale della PL per giungere a un importante risultato.

1. Per le proposizioni 1 e 2: se P è limitato allora $P = \text{conv}\big(\text{vert}(P)\big)$
2. Per il teorema fondamentale della PL: se $P \neq \emptyset$ e P è limitato (quindi $(p) < +\infty$), allora esiste almeno un elemento di $V = \text{vert}(P)$ che è soluzione ottima di (p). I poliedri nonvuoti di ricerca operativa, essendo limitati, hanno **almeno un vertice che è soluzione ottima**!

Proposizione.

Se il poliedro P è limitato, allora esiste almeno un vertice che è soluzione ottima.

4.3. Calcolo dei vertici

Ora che abbiamo dimostrato che possiamo cercare le soluzioni ottime nei vertici, calcoliamo i vertici del poliedro $Ax \leqslant b$ **in formato primale standard**.

Definizione.

Definizione (soluzione di base):
Sia $B := \{1, \dots, m\} : |B| = n$ un sottoinsieme degli indici di riga
Sia A_B la sottomatrice di A che ha le righe individuate dagli indici di B
Sia b_B il sottovettore di b individuato dagli indici di B

Se A_B è invertibile, ovvero $\det A_B \neq 0$, allora la soluzione del sistema $A_B \cdot x = b_B$ si chiama **soluzione di base.** Formula chiusa: $x = A_B^{-1} b_B$

Esempio 4.4 $n = 2,\ m = 4$

$$Ax \leqslant b \equiv \begin{cases} 1.\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ 2.\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ 3.\ -x_1 \leqslant 0 \\ 4.\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \qquad B := \{3, 4\}$$

Esempio 4.4 $n = 2,\ m = 4$

$$Ax \leqslant b \equiv \begin{cases} 1.\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ 2.\ 3x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ 3.\ -x_1 \leqslant 0 \\ 4.\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \qquad B := \{3, 4\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow b_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_B \\ b_N \end{bmatrix} \Longrightarrow Ax \leqslant b \therefore \begin{cases} A_B x \leqslant b_B \\ A_N x \leqslant b_N \end{cases}$$

$\det(A_B) \neq 0$

$\therefore A_B \cdot \overline{x} = b_B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \overline{x} = (0,0)$ è la soluzione di base

Se il determinante fosse zero, le rette sarebbero parallele o coincidenti, dunque non ci sarebbe un vertice. In pratica devo fare l'intersezione di n-rette.

Definizione.

Definizione (soluzione di base ammissibile):
Una soluzione di base si dice **ammissibile** se appartiene al poliedro.

Esempio 4.5 Nell'esempio precedente, $\overline{x} = (0,0)$ è soluzione di base ammissibile perché non viola nessun vincolo del poliedro. Se prendo come base $B = \{1,4\}$, si può verificare che $\overline{x} = (6,0)$, che non è una base ammissibile.

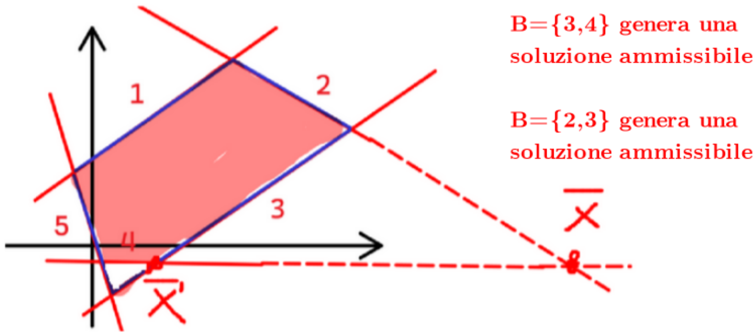


Figura 9: significato geometrico delle soluzioni di base ammissibili

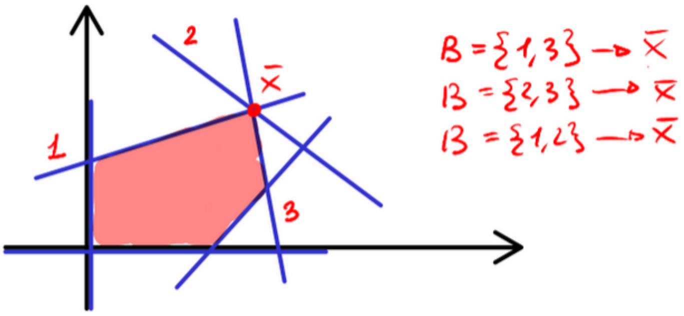
TEOREMA.

Teorema (caratterizzazione dei vertici):
Un punto $\overline{x}$ del poliedro è un vertice se e solo se è una soluzione di base ammissibile

Questo teorema è una definizione alternativa di vertice. In questo caso, l'altra definizione di vertice che abbiamo dato può essere usata come una proprietà.

Definizione.

Definizione (soluzione di base degenere):
La soluzione di base $\overline{x}$ si dice degenere se più basi generano $\overline{x}$.



Degenere non vuol dire eliminabile (ma vale solo in R^2). Addirittura non esistono algoritmi per verificare se un vincolo è combinazione lineare di altri vincoli (per cui sarebbe eliminabile).

Un punto è soluzione di base se rispetta n vincoli con l'uguale. Un punto è soluzione di base degenere se ne rispetta **almeno** $n + 1$.

L'**algoritmo di enumerazione totale** esplora tutti i vertici (ovvero tutte le possibili soluzioni di base ammissibili) per trovare quello ottimale. Il problema con questo algoritmo è che bisogna calcolare le possibili basi, che sono le *combinazioni di n elementi presi da un basket di m*:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

La complessità è fattoriale, dunque è parecchio inefficiente.

4.4. Trasformazioni equivalenti

Mantengono inalterati i punti di ottimo e il valore della funzione obiettivo, ma modificano la forma del problema. Sono utili per convertire problemi in forme standard.

Corollario.

Trasformazioni equivalenti:

- min $\leftrightarrow$ max — $\min(f) = -\max(-f)$
- $\leqslant \ \leftrightarrow \ \geqslant$ — $x \leqslant x_0 \Leftrightarrow -x \geqslant -x_0$
- $= \ \rightarrow \ \leqslant, \geqslant$ — $x = x_0 \Longrightarrow x \geqslant x_0, \ x \leqslant x_0$
- $\leqslant \ \rightarrow \ =$, Slack — $x \leqslant x_0 \Longrightarrow x = x_0 + S, \ S \geqslant 0$
- $x \geqslant 0 \rightarrow x_i^{++}, x_i^{+} \geqslant 0$ — $x \geqslant 0 \Longrightarrow x_i = x_i^{++} - x_i^{+}$ con $x_i^{++} \geqslant x_i^{+} \geqslant 0 \ \forall i$

A cosa serve l'ultima trasformazione equivalente? Ad esempio:

$$(p)\begin{cases}\min 3x_1 + x_2\\ 5x_1 + x_2 \geqslant 7\\ x_1 \geqslant 0\end{cases}, \quad \text{portare in formato standard } (q)\begin{cases}\min c^T x\\ Ax \geqslant b\\ x \geqslant 0\end{cases}$$

Non posso semplicemente aggiungere la condizione $x_2 \geqslant 0$ perché il primo problema non ci dice niente sul suo segno: x_2 potrebbe essere negativo e i vincoli sarebbero comunque rispettati. Allora osservo che ogni numero in $\mathbb{Z}$ si può scrivere come differenza di due numeri positivi.

$$\begin{cases}\min 3x_1 + x_2\\ 5x_1 + x_2^{++} - x_2^{+} \geqslant 7\\ x_1, x_2^{++}, x_2^{+} \geqslant 0\end{cases} \equiv \begin{cases}\min 3x_1 + x_2^{++} - x_2^{+}\\ 5x_1 + x_2^{++} - x_2^{+} \geqslant 7\\ x \geqslant 0\end{cases}$$

Devo sostituire x_2 anche nella funzione obbiettivo per ottenere un sistema in tre incognite. Osservo che, se $x' = (6, 3, 2)$ è una soluzione ammissibile di (q), allora $x'' = (6, 3 - 2) = (6, 1)$ è una soluzione ammissibile di (p).

4.5. Teoria della dualità

4.5.1. Vertici del poligono in formato duale standard

C'è un modo molto più rapido per calcolare i vertici di un poligono **in formato duale standard**. Sdoppiare le uguaglianze per portare il poliedro in formato primale standard significa avere tante righe che sono linearmente dipendenti.

Definizione.

Definizione (soluzione di base duale):
Si divide la variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in blocco di base x_B e blocco non di base x_N
$x_B \in \mathbb{R}^k$ dove k è il numero di equazioni.

Pongo $x_N = \vec{0}$, mi assicuro che il sistema di k equazioni in k incognite abbia soluzione (matrice invertibile) e risolvo per x_B. Ricostruisco $x = (x_B,\ x_N)$

Simile alla definizione per il formato primale standard, ma anziché le righe si prendono le variabili.

Esempio 4.6

$$(p)\begin{cases}\boxed{3x_1 + 2x_2} + 4x_3 + x_4 = 3\\ \boxed{2x_1 + x_2} + 3x_3 + x_4 = 2\\ x \geqslant 0\end{cases}$$

$$B = \{1, 2\} \implies (p_B)\begin{cases}\boxed{3x_1 + 2x_2} = 3\\ \boxed{2x_1 + x_2} = 2\end{cases}, \det\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \neq 0 \implies x_B = (1, 0) \implies x = (1, 0, 0, 0)$$

$$B = \{2, 4\} \implies (p_B)\begin{cases}2x_2 + x_4 = 3\\ x_2 + x_4 = 2\end{cases}, \det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \neq 0 \implies x_B = (1, 1) \implies x = (0, 1, 0, 1)$$

Le definizioni di soluzione di base ammissibile e degenere e il teorema di caratterizzazione dei vertici sono facilmente adattabili alle soluzioni di base duali.

Osservazione: $\overline{x}$ soddisfa il vincolo $A\overline{x} = b$ per costruzione. Quindi, per ferificare se $\overline{x}$ è una soluzione di base ammissibile, mi basta che $\overline{x} \geqslant 0$

4.5.2. Test di ottimalità

Dato un vertice $\overline{x}$ di P, come faccio a sapere che sono arrivato all'ottimo (senza enumerare tutti i vertici)?

$(p)\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leqslant b \end{cases}$, il suo problema duale è $(d) = \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

dove $c, x \in \mathbb{R}^n,\ \ y, b \in \mathbb{R}^m$ sono vettori colonna. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Il problema primale ha n variabili e m vincoli, il duale ha m variabili e n vincoli.

Il problema duale è completamente diverso dall'originale, questa forma non ha a che vedere con le trasformazioni equivalenti.

Esempio 4.7

$$(p)\begin{cases} \max x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 9 \end{cases},\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \to (d)\begin{cases} \min 8y_1 + 6y_2 + 9y_3 \\ 3y_1 - y_2 + 3y_3 = 1 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 = -1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

TEOREMA.

Teorema (scarti complementari):
Sia $\overline{x} \in P,\ \ \overline{y} \in D$ soluzioni ammissibili.

$\overline{x},\ \overline{y}$ sono soluzioni ottime (rispettivamente di (p) e (d)) $\iff \overline{y} \cdot (b - A\overline{x}) = 0$
Dove $\overline{y} \cdot (b - A\overline{x}) = 0$ si chiama **condizione degli scarti complementari**.

Osservazioni:

1. Due soluzioni di base $\overline{x}, \overline{y}$ complementari (generate dalla stessa base) sono sempre in scarti complementari.
2. Essendo (d) in forma duale standard, se $\overline{y}$ è una soluzione di base dual, allora se $\overline{y} \geqslant 0$, è anche ammissibile.

Corollario.

Test di ottimalità:
Oss. 1 $\to$ Dato un vertice $\overline{x}$ generato dalla base B, costruiamo la $\overline{y}$ con la stessa base B.
Oss. 2 $\to$ Se $\overline{y} \geqslant 0$, cioè $c\left(A_B^T\right)^{-1} \geqslant 0$, per il th. degli scarti complementari, $\overline{x}$ è ottima.

Esempio 4.8

$$(p)\begin{cases}\max 3x_1+2x_2\\ 5x_1+6x_2\leqslant 9\\ 3x_1+8x_2\leqslant 7\\ -x_1 \qquad\quad \leqslant 0\\ \qquad\ -x_2\leqslant 0\end{cases}\rightarrow (d)\begin{cases}\min 9y_1+7y_2\\ 5y_1+3y_2-y_3=3\\ 6y_1+8y_2-y_4=2\end{cases}$$

So che $\overline{x}=(0,0)$ è generato dalla base $B=\{3,4\}$ ed è ammissibile, quindi è un vertice.
$\overline{x}$ è ottimo?

$$B=\{3,4\},\ \begin{cases}\min 9y_1+7y_2\\ -y_3=3\\ -y_4=2\end{cases}\implies \overline{y}=(0,0,-3,-2)<0, \text{ quindi } \overline{x} \text{ non è l'ottimo.}$$

TEOREMA.

Teorema (dualità forte):
Sia (p) un problema primale e (p) il suo duale. Siano $P, D\neq\emptyset$
Il valore ottimo del primale coincide con quello del problema duale i.e. $\max\limits_{Ax\leqslant b} cx = \min\limits_{yA=c,\ y\geqslant 0} yb$

Allora esiste il test di ottimalità anche per il problema duale: sia una soluzione di base ammissibile $\overline{y}\in D$, cioè un vertice del duale; costruiamo la soluzione di base (con la stessa base) del primale associato, $\overline{x}$. Se $\overline{x}$ è ammissibile i.e. $b-A\overline{x}\geqslant 0$ siamo all'ottimo. **L'operazione di duale è involutoria**: il duale del duale è il primale, quindi i problemi di PL vanno sempre in coppia, e uno diventa il test di ottimalità dell'altro.

5. Algoritmo del simplesso

L'algoritmo del simplesso è stato ideato da George Dantzig nel 1946, mentre stava lavorando sui metodi di pianificazione dell'aeronautica militare degli Stati Uniti. L'idea fondamentale dell'algoritmo è partire da un vertice e spostarsi lungo gli spigoli di vertice in vertice, fino a raggiungere l'ottimo.

Correva l'anno 1984. Il matematico indiano Karmarkar ha scoperto un algoritmo polinomiale per risolvere problemi di PL. Incuriosito, il giovane Pappalardo parte per l'America per assistere alla presentazione. L'aula è affollata di matematici e alle 9:00 in punto, l'indiano entra, accompagnato dalle guardie del corpo. Sfodera i lucidi e li proietta a una velocità impressionante, circa tre secondi per diapositiva, con alcuni spettatori che scattano freneticamente foto. In circa 30 pagine, dimostra come il suo algoritmo, a differenza del metodo del simplesso, non si muove da vertice a vertice, ma punta direttamente all'ottimo. Cionondimeno, anche dopo 40 anni, l'algoritmo del simplesso resta più efficace nella pratica, pur essendo esponenziale.

5.1. Algoritmo del simplesso primale

Sia $(p)\begin{cases}\max cx\\ Ax \leqslant b\end{cases}$ un problema di PL in formato primale standard

5.1.1. Passo base

Supponiamo di avere un vertice $\overline{x} \in P,\ \overline{x} = A_B^{-1} b_B$

Costruiamo $\overline{y} = \left(cA_B^{-1}, 0\right)$ la soluzione di base duale complementare.

Se $\overline{y}_B \geqslant 0$ siamo all'ottimo. Altrimenti $\exists k \in B : \overline{y}_K < 0$

5.1.2. Passo induttivo

Idea: Se non siamo all'ottimo, effettuo un cambio di base. C'è un indice h uscente e un indice k entrante in base. In altre parole mi sposto lungo lo spigolo a un vertice adiacente. In generale, in $\mathbb{R}^n$, tra vertici adiacenti, ci sono $n-1$ indici uguali.

Trovo l'indice uscente.

Voglio che lo spostamento produca un aumento della funzione obiettivo cx.

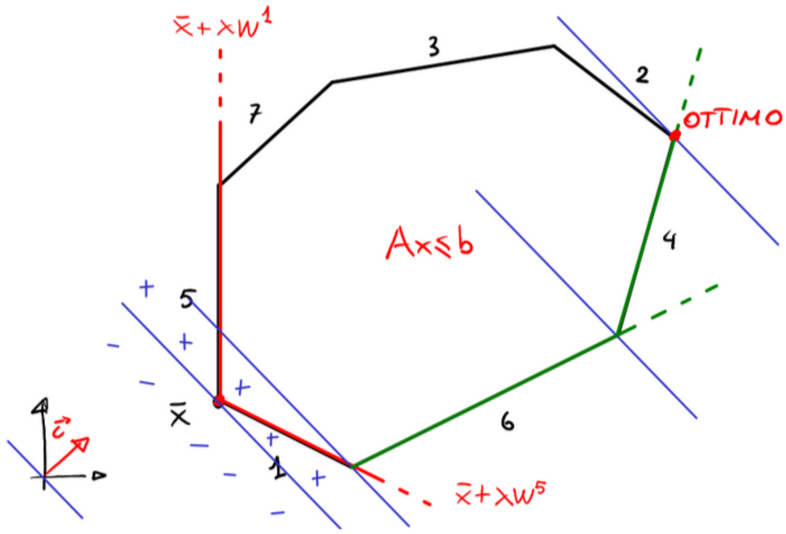


Figura 10: algoritmo del simplesso con vertice iniziale $\overline{x}$ e tre passi induttivi.

Proposizione.

Proposizione:
Sia $W := -A_B^{-1}$, siano W^i le colonne di W.
$\overline{x} + \lambda W^i, \lambda \geqslant 0$ è l'equazione della semiretta uscente da $\overline{x}$ con direzione di W^i (attenzione, non mi sto muovendo lungo lo spigolo i, ma lungo quello adiacente).

Calcolo la funzione obbiettivo lungo la semiretta:
$c(\overline{x}+\lambda W^i) = c\overline{x}+\lambda cW^i$ dove $c\overline{x}$ è il valore della funzione obbiettivo corrente, $\lambda \geqslant 0$ sempre.
Quindi, per far crescere la funzione obbiettivo mi serve che cW^i sia positivo.

Osservo che $cW^i = c\left(-A_B^{-1}\right)^i = -c\left(A_B^{-1}\right)^i = -\overline{y}_i$.
Questo è coerente con il fatto che se $\overline{y}_i \geqslant 0 \implies cW^i \leqslant 0$ ovvero siamo all'ottimo. Dunque se non trovo una $y_i \geqslant 0$ vuol dire che lo spostamento nella direzione dei vertici adiacenti produce sempre un aumento della funzione obiettivo. Ma quale devo scegliere?

<u>Regola di anticiclo di Bland:</u> Scelgo il primo indice per cui la duale è negativa.
$h = \min\{i \in B : y_i < 0\}$. Questo si fa per garantire che l'algoritmo non entri in un ciclo e quindi termini in un numero finito di passi.

Ad esempio: $\overline{y} = (0, 7, -4, 0, 0, -5) \implies h = 3$.

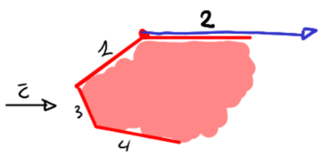
Trovo l'indice entrante.

$A(\overline{x}+\lambda W^h) \overset{?}{\leqslant} b$, mi chiedo per quali λ rimango dentro al poliedro?

Prendo gli indici i che si dividono in base e non base: $A_i(\overline{x}+\lambda W^h) \overset{?}{\leqslant} b_i,\ \{i \in B \vee i \in N\}$,
per la proprietà distributiva: $A_i\overline{x}+\lambda A_iW^h \leqslant b_i$

<u>Vediamo il caso per i vertici di base:</u>
Poiché $i \in B$, allora $A_i\overline{x} = b_i$.
$b_i+\lambda A_iW^h \leqslant b_i \implies \lambda A_iW^h \leqslant 0$, poiché $\lambda \geqslant 0$, mi interessa il segno di $A_iW^h = A_i\left(-A_B^{-1}\right)^h$.
Se moltiplico una riga di A_B per una colonna di A_B^{-1} fa 0 oppure 1 perché fa l'identità. Siccome è scambiata di segno, fa 0 oppure -1. In ogni caso vale sempre $A_iW^h \leqslant 0$. Non ci sono problemi per ogni indice di base: non è possibile uscire dal poliedro "per colpa" di un indice di base.

<u>Vediamo il caso per i vertici non di base:</u>
Se $A_iW^h \leqslant 0\ \forall i \in N$ significa che posso procedere all'infinito, $(p) = +\infty$



Se $\exists i : A_iW^h > 0$, allora $A_i\overline{x}+\lambda A_iW^h \leqslant b_i \iff \lambda \leqslant \dfrac{b_i - A_i\overline{x}}{A_iW^h} =: r_i$

Calcolo solo gli r_i dove $A_iW^h > 0$ poiché gli altri non hanno conseguenze sull'uscita del poliedro (calcolo al più $m-n$ rapporti). Per non uscire dal poliedro devo prendere.

$$\min\left\{r_i = \frac{b_i - A_i\overline{x}}{A_iW^h} : i \in N,\ A_iW^h > 0\right\}$$

Anche qui si applica la regola di anticiclo di Bland: prendo l'indice entrante k come il primo i nel caso in cui ci siano due rapporti r_i minimi uguali.

$\overline{\lambda} = \dfrac{b_k - A_k\overline{x}}{A_k W^h}$ è il massimo λ che posso prendere per rimanere dentro al poliedro.

Oss: $\cancel{A_i}\overline{x} + \dfrac{b_k - \cancel{A_k}\overline{x}}{A_k \cancel{W^h}} A_i \cancel{W^h}\Big|_{i=k} = b_k$ vuol dire che l'indice k è soddisfatto con l'uguale.

ALGORITMO.

Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base B che genera una soluzione di base primale ammissibile $\overline{x} := A_B^{-1} b_B$
2. Calcola la soluzione di base duale $\overline{y} := \begin{bmatrix} \overline{y}_B \\ \overline{y}_N \end{bmatrix}$ con $\overline{y}_B^T := c^T A_B^{-1}$, $\overline{y}_N := 0$
3. **if** $y_B \geqslant 0$ **then** STOP (x è ottima per (p) e y è ottima per (d)).
   else calcola l'indice uscente $h := \min\{i \in B : \overline{y}_i < 0\}$
   poni $W := -A_B^{-1}$ e indica W^h la h-esima colonna di W.
4. **if** $A_i W^h \leqslant 0 \ \forall i \in N$ **then** STOP $((p) = +\infty, \ (d) = \emptyset)$
   else poni $r_i := \dfrac{b_i - A_i\overline{x}}{A_i W^h}$ se $i \in N$, $A_i W^h > 0$ e calcola $\overline{\lambda} := \min\{r_i\}$
   calcola l'indice entrante $k := \min\left\{ i : \dfrac{b_i - A_i\overline{x}}{A_i W^h} = \overline{\lambda} \right\}$
   aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

5.2. Algoritmo del simplesso duale

Ricordiamo come i problemi di PL vanno sempre a coppie (primale/duale). Distinguo quattro casi:

A. Soluzione di base ammissibile per (p), (d) $\rightarrow$ siamo all'ottimo
B. Soluzione di base ammissibile per (p), non ammissibile per (d) $\rightarrow$ simplesso primale
C. Soluzione di base ammissibile per (d), non ammissibile per (p) $\rightarrow$ simplesso duale
D. Soluzione di base non ammissibile per (p), (d) $\rightarrow$ trovo un'altra soluzione di base.

Sia $\overline{y} \in D$ la soluzione di base ammissibile (vertice di D)

Sia $(p) \begin{cases} \max cx \\ Ax \leqslant b \end{cases}$ un problema di PL in formato primale standard

5.2.1. Passo base

Supponiamo di avere un vertice $\overline{y} \in D,\ \overline{y} = (\overline{y}_B, \overline{y}_N) = \left(c^T A_B^{-1}, 0\right) : c^T A_B \geqslant 0$

Se $\overline{x}$ è ammissibile ovvero $b_i - A_i\overline{x} \geqslant 0$, allora siamo all'ottimo.

5.2.2. Passo induttivo

Indice entrante: Altrimenti, sia k il primo (anticiclo) indice $i \in N$ tale che $b_k - A_k\overline{x} < 0$.

Indice uscente: faccio i prodotti scalari $A_k W^i$ (k l'ho già trovato e devo trovare $i \in B$ uscente).

Prendo solo $A_k W^i < 0$ (se sono tutti $\geqslant 0$ allora $(d) = -\infty$) e trovo il minimo di $r_i := \dfrac{-y_i}{A_k W^i}$.

h è il primo degli indici per cui viene raggiunto il minimo

ALGORITMO.

Algoritmo del simplesso duale

1. Trova una base B che genera una soluzione di base primale ammissibile
   $\overline{y} := \begin{bmatrix} \overline{y}_B \\ \overline{y}_N \end{bmatrix}$ *con* $\overline{y}_B^T := c^T A_B^{-1},\ \overline{y}_N := 0$
2. Calcola la soluzione di base duale $\overline{x} := A_B^{-1} b_B$
3. **if** $b_N - A_N\overline{x} \geqslant 0$ **then** STOP ($\overline{y}$ è ottima per (d) e $\overline{x}$ è ottima per (p)).
   else calcola l'indice entrante $k := \min\{i \in N : b_i - A_i\overline{x} < 0\}$
   poni $W := -A_B^{-1}$ e indica W^i la i-esima colonna di W.

4. **if** $A_k W^i \geqslant 0\ \forall i \in B$ **then** STOP ($(d) = -\infty,\ (p) = \emptyset$)
   else poni $r_i := \dfrac{y_i}{-A_k W^i}$ se $i \in B$, $A_k W^i < 0$ e calcola $\overline{\lambda} := \min\{r_i\}$
   calcola l'indice uscente $h := \min\left\{ i : \dfrac{y_i}{-A_k W^i} = \overline{\lambda} \right\}$
   aggiorna la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e torna al passo 2.

5.3. Problema duale ausiliario

Non sempre ho a disposizione un vertice per iniziare l'algoritmo del simplesso. Vediamo un modo per trovare sicuramente un vertice da cui partire.

Definizione.

Definizione (duale ausiliario):

Sia $D = \begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ un poliedro in formato duale std, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ x \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^n$

Il problema duale ausiliario è $(da) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \\ Ax + I\epsilon = b \\ x, \epsilon \geqslant 0 \end{cases}$

Ad esempio: $D = \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \to (da) \begin{cases} \min \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + \epsilon_1 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 + \epsilon_2 = 9 \\ x, \epsilon \geqslant 0 \end{cases}$

TEOREMA.

Teorema del duale ausiliario:

Sia $v(da)$ il valore ottimo di (da).

- Se $v(da) > 0$, allora $D = \emptyset$
- Se $v(da) = 0$, allora $D \neq \emptyset$

Inoltre, se $D \neq \emptyset$, la soluzione ottima di (da) ci fornisce un vertice di D.

Mi accorgo che esiste una soluzione di base ammissibile banale, ovvero quella ottenuta settando a zero tutti gli x_i. Dall'esempio di prima, $(\overline{x}, \overline{\epsilon}) = (0, 0, 0, 0, 8, 9) \in \text{vert}(DA)$.

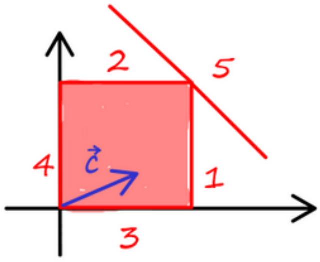
Il teorema ci dice anche che, se il poliedro non è vuoto, basta risolvere il problema duale ausiliario col metodo del simplesso duale per trovare un vertice del problema di partenza. In questo modo, riusciamo a trovare sempre un vertice di ogni poliedro (a patto che esista).

5.4. Il caso degenere

Grazie alla regola di anticiclo di Bland, nel caso degenere, se $\overline{\lambda} = \dfrac{b_k - A_k\overline{x}}{A_k W^h} = 0$ sempre, siamo arrivati all'ottimo. Altrimenti, il denominatore prima o poi diventerà negativo e quindi mi sposto. Questo ci garantisce che l'algoritmo del simplesso non cicla nei vertici degeneri. L'algoritmo del simplesso cambia basi ad ogni passo, non i vertici.

Esempio 5.1

$$(p)\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_2 \leqslant 1 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2 \end{cases} \to (d)\begin{cases} \min y_1 + y_2 + 2y_5 \\ y_1 - y_3 + y_5 = 2 \\ y_2 - y_4 + y_5 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$



Prendo la base $B = \{1, 2\}$, $\overline{x} = (1, 1) \longleftrightarrow \overline{y} = (2, 1, 0, 0, 0)$
Prendo la base $B = \{1, 5\}$, $\overline{x} = (1, 1) \longleftrightarrow \overline{y} = (1, 1, 0, 0, 1)$
Prendo la base $B = \{2, 5\}$, $\overline{x} = (1, 1) \longleftrightarrow \overline{y} = (0, -1, 0, 0, 2)$

Supponiamo di partire col simplesso primale dalla base $B'' = \{2, 5\}$. Il simplesso non si accorge che il punto è ottimo, ma solo riconoscere quando la base è ottima. Cambia base: esce $h = 2$, entra $k = 1$. Poi dichiara ottima la base $B' = \{1, 5\}$.

Fine teoria